UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD DESDE LA PERSPECTIVA DE LA GEOMETRÍA Y EL ARTE PICTÓRICO, PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE EN EL GRADO QUINTO DE EDUCACIÓN BÁSICA

LINA PAOLA SARRIA SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTANDER DE QUILICHAO CAUCA

2018

UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD DESDE LA PERSPECTIVA DE LA GEOMETRÍA Y EL ARTE PICTÓRICO, PARA FAVORECER APRENDIZAJE EN EL GRADO QUINTO DE PRIMARIA

LINA PAOLA SARRIA SÁNCHEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

DIRECTORA
ADRIANA GARCÍA MORENO

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTANDER DE QUILICHAO CAUCA
2018

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

La siguiente propuesta se trata del desarrollo de estrategias didácticas para fomentar el aprendizaje de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica y artística, dirigida a estudiantes del grado quinto de Educación Básica.

El presente trabajo parte de la problemática asociada a encontrar la relación entre matemáticas (geometría) y arte (arte pictórico), con la intención de construir estrategias para favorecer al aprendizaje del concepto de proporcionalidad en los primeros años de escolaridad.

Teniendo en cuenta la problemática inicial, se realiza la revisión de algunos referentes teóricos relacionados con algunos estudios históricos, epistemológicos, didácticos y curriculares, que proponen la relación entre arte y matemáticas; los referentes históricos y epistemológicos rescatan una aproximación a la definición de la proporcionalidad desde lo geométrico, y evidencian el estudio de la proporcionalidad en el arte pictórico; los referentes didácticos y curriculares, dan cuenta de las dificultades y alternativas para el aprendizaje de este concepto.

En ese orden, en este trabajo se asume el diseño original de una Secuencia Didáctica que integra la geometría con el arte pictórico para hacer una aproximación a los conceptos de razón y proporción en el grado quinto de primaria, puesto que bajo la dirección de la problemática y los referentes teóricos se halla pertinente estudiar, trabajar y generar propuestas hacia el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad desde una perspectiva artística-matemática.

Palabras claves: Arte pictórico, geometría, razón, proporción, proporcionalidad.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo parte de la problemática de encontrar la relación entre matemáticas y arte, con la intención de construir estrategias para favorecer al aprendizaje del concepto de proporcionalidad, en los primeros años de escolaridad. Para ello, se realiza una revisión de referentes teóricos en donde se abordan los aportes de algunos estudios históricos y epistemológicos, que proponen la relación entre arte y matemáticas; referentes históricos que rescatan una aproximación a la definición de la proporcionalidad desde lo geométrico; referentes didácticos y curriculares, que dan cuenta de las dificultades y alternativas para el aprendizaje de este concepto.

En este orden, a la luz de los referentes teóricos abordados se diseña una secuencia didáctica, en la que se proponen una serie de actividades que favorece la aproximación conceptual de la proporcionalidad, dirigida a estudiantes de grado quinto de Educación Básica. Por tanto, este trabajo se enfatiza en las líneas de investigación en Historia de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas, que componen dos de las cinco líneas de investigación del programa académico de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle.

En un primer capítulo, se exponen lo que se ha nombrado como Aspectos Generales, el cual está conformado por la problemática, la justificación, antecedentes y objetivos. En el segundo capítulo, se encuentra el marco teórico, que contiene los respectivos referentes matemáticos, curriculares, didácticos, históricos y la estrategia metodológica. En el tercer capítulo, se aborda lo relacionado con el diseño propio y configuración de las situaciones propuestas como estrategia de enseñanza para el aprendizaje del concepto de proporcionalidad.

Por último, se hará mención de las conclusiones respectivas, teniendo en cuenta los objetivos que se han planteado. Además de contemplar un espacio de reflexión acerca del aporte de esta propuesta, dando a conocer posibles ventajas y limitaciones que se perciban en el diseño luego del proceso de la validación de la misma, con un grupo de maestros de matemáticas.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES

1.1 PROBLEMÁTICA

La problemática planteada, parte de dos elementos principales, el primero parte del hecho de identificar algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de proporción y el segundo de cómo establecer una relación existente entre arte y matemáticas, una relación que ha sido estudiada por autores como Martínez (2014), sin embargo no se ha logrado consolidar una propuesta didáctica para implementar en un aula de clase, donde la presencia del arte pictórico se integre con la geometría; por tanto se plantea la posibilidad de seleccionar elementos fundamentales y pertinentes para el campo de la Educación Matemática, que permita mostrar formas o estrategias diferentes para su enseñanza y aprendizaje, en particular para el aprendizaje de la proporcionalidad. A partir de ello, inicia una investigación de los diferentes referentes teóricos como son el de Obando, Vasco y Arboleda, (2013); Obando, Vasco y Arboleda (2014); Mochón, (2012); Guacaneme, (2001); Ramírez y Block, (2009); y Guacaneme, (2002); que permitan establecer y resaltar la relación entre estos campos, para poder desarrollar una propuesta de aula que responda a la inquietud inicial. Cabe aclarar que al referirse al arte, la investigación se centra en el arte pictórico.

Continuando con la ampliación del primer elemento que da origen a la problemática, se da paso a la mención de las investigaciones de los autores mencionados, para conocer las dificultades asociadas al aprendizaje de la proporcionalidad, y luego identificar las estrategias que favorezcan su aprendizaje y materializarlas en una secuencia didáctica. Así, según Arboleda, Obando y Vasco (2014) se tiene que:

> Razones, proporciones y proporcionalidad (en adelante RPP) han sido conceptos ampliamente problematizados desde los procesos de aprendizaje y de enseñanza. Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimiento sigue vigente. (p. 60).

Por tanto, se puede indicar que el estudio de (RPP) sigue siendo un tema de investigación vigente para la Educación Matemática que requiere de especial atención y de nuevas alternativas para mejorar el aprendizaje en los estudiantes de Educación Básica; por ejemplo, desde el punto de vista curricular los mismos afirman que:

> Si bien se reconoce la valoración que a nivel curricular tienen ejes temáticos en torno a las RPP, éstas continúan siendo un problema complejo en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. A pesar de los importantes avances logrados en la investigación en didáctica de las matemáticas (caracterizaciones finas de los problemas cognitivos y didácticos) aún no se logran consolidar propuestas que modifiquen la forma como las RPP se abordan en los contextos escolares. (p. 61).

De acuerdo con lo anterior, se puede inferir que gran parte de los maestros de matemáticas, en el proceso de formular o reformular propuestas acerca de RPP, desconocen las investigaciones realizadas por la Didáctica de las Matemáticas; a pesar de que la enseñanza y el aprendizaje de las RPP sean mencionadas como parte fundamental en los currículos; lo que no es favorable si lo que se pretende es mejorar el aprendizaje de las RPP en los estudiantes.

Por otro lado, Mochón (2012), hace una crítica puntualizada en el caso del uso indiscriminado de algoritmos mecánicos y la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad; de ahí, que no se logre desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales alrededor de este concepto y todo lo que ésta implica e integra. Por consiguiente, para encontrar alternativas que atiendan a dificultades como esta, es preciso explorar las posibilidades que brindan otras disciplinas, donde se ha escogido el arte como una de la variedad de disciplinas con la pretensión de asociarla con la geometría. Al respecto, el mismo autor anterior, se refiere:

> La proporcionalidad es una de las ideas principales presente en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias. La mayoría de las actividades matemáticas de nuestra vida cotidiana están basadas en este concepto por ser el más sencillo de utilizar (5 piezas cuestan 5 veces lo que una pieza). Sin embargo, las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres. (p. 134)

En efecto y en relación con lo anterior, el aprendizaje de la proporcionalidad enfocado en el mero uso de algoritmos en la escuela, ha generado que se pierda su verdadero significado. Con esto no quiere decir que sea inútil el uso de estos procesos algorítmicos, si no, aclarar que el uso indiscriminado de las operaciones, en últimas, se convierte en algo sencillamente mecánico.

Por otro lado, "en numerosos libros de texto actuales, las razones se identifican con las fracciones, ya sea por definición o dándolo por hecho, sin que medie un trabajo de articulación" (Block y Ramírez, 2009, p. 66). De manera similar, en algunos estudios de Guacaneme (2001) realizados a libros de textos escolares hace afirmaciones como se presenta a continuación:

> …Como se destacó ampliamente en una de las observaciones hechas, a pesar de identificar a través de definiciones a la razón con el cociente indicado o con el cociente exacto, todos los textos terminan por hacer un tratamiento de la razón como un número. Consecuentemente, aplican los algoritmos de producto y cociente de racionales (escritos en forma fraccionaria) a tales entre razones, así como la igualdad entre racionales para dar cuenta de la equivalencia entre razones. (p. 241)

Con respecto a las afirmaciones anteriores, también se puede identificar que algunos libros de texto, en los cuales se apoya el docente y el estudiante, se definen los términos de razón y proporción[1] con la ayuda de representaciones numéricas, como es el caso de los números fraccionarios que limita o reduce el concepto de razón al cociente entre dos cantidades.

> Las nociones de razón y fracción se confunden, y la noción de relación proporcional y la de función se intentan articular, no siempre con suficiente claridad. El mismo lenguaje de las proporciones refleja estos mestizajes, a menudo opacando o confundiendo los sentidos de las nociones: se habla de razón o de fracción, la razón se anota usando los dos puntos ($a : b$) o la notación de fracción $\frac{a}{b}$, y se sigue hablando de "medios y extremos", aunque se use la notación fraccionaria en la que ya no hay ni medios ni extremos. (Block y Ramírez, 2009, p. 68-69)

Dado lo anterior, la historia de las matemáticas, da cuenta de que la definición de estos términos fundamentales -razón y proporción- no siempre estaba asociados exclusivamente a un tratamiento aritmético, muestra de ello, se evidencia en los Elementos de Euclides

[1] Los conceptos de razón y de proporción son inherentes al concepto de proporcionalidad.

(Puertas, 1994), específicamente en el libro V de esta obra; allí se rescata el verdadero significado de estos conceptos, cuando se trata de involucrar la geometría sin la exclusiva intervención de la aritmética, tal y como señala Guacaneme (2002):

> Adicionalmente, es necesario identificar aproximaciones escolares a la razón y a la proporcionalidad que no atiendan al cociente y a la medida y que, en consecuencia, respeten la naturaleza y esencia de la razón (en tanto relación o pareja) y de la proporción (en tanto equivalencia entre razones o relación entre relaciones). El libro V de los Elementos constituye una aproximación matemática formal que preserva la naturaleza de estos conceptos y no la contamina con la idea de número ni de medida (p. 40)

En relación a ello, la presente propuesta, retoma las definiciones propuestas en el libro V de los Elementos de Euclides, en tanto que hace parte de los desarrollos formales en matemáticas, y permiten hacer una aproximación desde lo geométrico más accesible para un estudiante de grado quinto de Educación Básica, que rescata el significado de este concepto.

Finalmente, la idea de la posible conexión entre geometría y arte pictórico, como estrategia para el aprendizaje de la proporcionalidad en el grado quinto de primaria de la educación Básica, es oportuna en la medida en que las matemáticas no deben limitarse, sino complementarse, enriquecerse e integrarse con otras disciplinas, como es el caso del arte desde una perspectiva geométrica. Sin embargo, sigue sin mencionarse una estrategia específica, instaurada y establecida desde el campo de la Educación Matemática, de este modo se sostiene la búsqueda acerca de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques desde una perspectiva geométrica, con el fin de presentar un tratamiento distinto al aritmético para el aprendizaje de este concepto. En consecuencia, esto permite plantearse la siguiente pregunta problematizadora:

¿Qué estrategias se pueden emplear en una propuesta de aula para que los estudiantes de grado quinto de Educación Básica, puedan profundizar en el concepto de proporcionalidad desde lo geométrico a través la integración de la geometría y el arte pictórico?

1.2 JUSTIFICACIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no ha sido un trabajo fácil, es un proceso que está en constante evolución, ajustándose a los cambios y a las exigencias requeridas en determinado tiempo. Pese a las diversas investigaciones realizadas por la Didáctica de las Matemáticas para mejorar cada vez más la labor educativa y por ende la labor docente, aun es necesario indagar acerca de las diferentes problemáticas, alternativas, estrategias, transformaciones y demás, para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático. Por consiguiente y teniendo en cuenta la problemática planteada en este trabajo acerca de las dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad, se propone una alternativa con el interés de favorecer aún más la comprensión de este concepto matemático en las aulas de clases.

En ese orden, esta propuesta es pertinente, pues si bien se han desarrollado propuestas para la enseñanza que relacionen geometría y arte (Antón; Gómez, (2016); Edo, (2006) y otros que dan cuenta de los posibles aportes para la Educción Matemática, dada la relación arte y geometría (Martínez, 2014), hasta el momento no se ha encontrado el diseño de una secuencia didáctica que integre estos dos campos, con este objeto matemático y para este grado en particular. Por tanto, a continuación se requiere resaltar aspectos claves y relevantes sobre cada uno de estas disciplinas, campos y grado escolar escogidos.

1.2.1 *Respecto a la geometría*

La Geometría se reconoce en la Historia de las Matemáticas como una disciplina refinada, donde diversas culturas y civilizaciones que fueron relevantes por sus aportes en la historia de la Aritmética y la Geometría como los egipcios y los griegos, quienes manifestaron el papel que esta disciplina significaba para ellos; en cuanto a los primeros, esto se evidencia en sus estudios, construcciones, edificaciones, entre otros; en relación a los segundos, la geometría les permite explicarse el origen de las cosas y las relaciones entre ellas, de acuerdo con Prieto (1992):

> No debe resultarnos extraño pues, que la Geometría, en cuanto espacio de representación de las formas, nazca aquí y ocupe un lugar de privilegio como puente entre la percepción y el concepto, y antesala de la idea, de la abstracción, tal y como Platón la ubica.
>
> Pero este espacio de representación tiene una peculiaridad frente a otros: mira hacia la realidad. Es un instrumento para ordenar la realidad. Un medio entre el hombre y su entorno físico y social. En él elaboramos esos modelos –las leyes- que después aplicamos. Por ello exigimos que sea un espejo lo más fiel posible de la realidad. (p. 6).

De acuerdo a lo anterior, el hombre ha intentado evidenciar y resaltar la presencia de la geometría como parte de su entorno, de esta manera esta rama de las matemáticas se convierte en algo conocido, familiar y hasta evidente para cada persona que se detiene a contemplar la composición y la manifestación de ella como parte de su mundo exterior. Es decir, existe la posibilidad de encontrar representaciones de algunos conceptos (en su mayoría abstractos) geométricos en el entorno físico o de la vida real, en la naturaleza y espacio universal; al mismo tiempo ofrece herramientas para organizar y comprender el universo físico del hombre, además de aproximar constantemente conocimiento de ella misma.

Por otro lado, al realizar un acercamiento entre de arte pictórico y geometría, no suena extraño pues, como se afirmó anteriormente esta última se posibilita como espacio de representación de las formas, favoreciendo al hombre por medio de la percepción comprender conceptos (matemáticos o propios de la geometría). Muchos artistas pictóricos, de alguna manera proyectan, transmiten y resaltan esta auténtica relación. Directamente o indirectamente, los pintores hacen uso de este espacio de representación.

No obstante, para apoyar la idea del por qué se tuvo en cuenta la integración de este campo, se presenta el aporte de Gamboa y Vargas (2013):

> ¿Por qué es importante estudiar geometría? La respuesta a esta pregunta lleva a reflexionar sobre el nacimiento de la geometría y en cómo el ser humano, a través de la percepción de las formas, del espacio que lo rodea y la necesidad de crear y transformar el mundo en el que vive, ha buscado una manera de explicar aquello que percibe a través de los sentidos. La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad. (p.75).

Así, la geometría lograría consolidarse como una rama elemental de las matemáticas, con lo cual, posteriormente se convierte en un campo de investigación vigente y fundamental. No obstante, hay que reconocer que este campo tiene múltiples temáticas de interés, además de sus diversas tipologías (tales como: geometría euclidiana, algebraica, riemanniana, hiperbólica, diferencial, proyectiva, de incidencia, descriptiva, analítica, algorítmica, entre otras). Con lo que respecta al tipo de geometría para trabajar esta propuesta, se trata de la Geometría Euclidiana, debido a que ha dejado un legado importante en la Historia de las Matemáticas y durante mucho tiempo ha predominado su enseñanza en la educación a nivel mundial, por ende en los currículos escolares.

Teniendo en cuenta lo anterior, la presencia de la geometría en los currículos escolares es indispensable, muestra de ello, es constituirse como uno de los cinco pensamientos que se trabajan en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia (MEN, 2006) y en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), este pensamiento es denominado como pensamiento espacial y los sistemas geométricos; además, es conveniente recordar el aporte de la geometría Euclidiana en los documentos de política educativa debido a afirmaciones como la siguiente:

> La geometría euclidiana fue la primera rama de las matemáticas en ser organizada de manera lógica. Por ello, entre los propósitos principales de su estudio está definir, justificar, deducir y comprender algunas demostraciones. La geometría euclidiana puede considerarse como un punto de encuentro entre las matemáticas como una práctica social y como una teoría formal y entre el pensamiento espacial y el pensamiento métrico. (MEN, 2006, p. 63).

Es conveniente subrayar esta última afirmación, debido a que el presente trabajo se rescatan algunas nociones matemáticas definidas en el libro V de los libros de los Elementos de Euclides, debido a la riqueza conceptual que ofrece desde el punto de vista geométrico alrededor de las RPP; teniendo en cuenta la pretensión y elaboración de esta investigación de pregrado al conectar los campos mencionados (arte pictórico y geometría)para involucrarlos al ámbito escolar, y favorecer el aprendizaje de un objeto matemático en particular como lo son las RPP; de esta manera la integración de la geometría Euclidiana es pertinente para cimentar los propósitos establecidos.

1.2.2 Respecto al arte y el arte pictórico

> *"La belleza tiene dos orígenes: uno natural y uno por costumbre. El natural proviene de la geometría y consiste en la uniformidad, es decir en igualdad y proporción. La belleza por costumbre es producida por el uso, del mismo modo que la familiaridad engendra amor por cosas que nos son bellas en sí mismas". Sir Christopher Wren.*

El término arte no tiene un definición específica o acabada, existieron y existen muchas concepciones acerca de este campo en cada una de las épocas históricas (antigua, medioevo y renacimiento) en que se movilizó; sin embargo, coinciden en que "desde la antigüedad hasta los comienzos de la época moderna, se consideraba arte a toda producción del hombre, de tal forma que la palabra arte acaparaba todo tipo de oficios en el que interviniera la creatividad del hombre." Tartarkiewicz (citado en Martínez, 2014, p. 18).

La afirmación anterior, permite reconocer una relación estrecha entre arte y la mayoría de las actividades del hombre. Poco a poco el término "arte" se ha tratado de precisar según la correlación que tiene con los seres humanos. Por ello, se ha catalogado al arte, como la manifestación de los pensamientos del artista, influenciados por las ideologías y realidades que ofrecen inspiración a partir de un tiempo determinado; además, estas manifestaciones artísticas logran producir deleite, emociones y sensaciones a sus espectadores. (Martínez, 2014).

De acuerdo a lo anterior, el arte está presente y conectado con los seres humanos, convirtiéndose en un medio de expresión; es por ello que en el presente trabajo se cuenta con la integración de este componente fundamental. Cabe aclarar que será el arte pictórico el escogido para hacer parte de esta propuesta, teniendo en cuenta que es un tipo de arte que se distingue de otros, de acuerdo con Martínez (2014):

> Actualmente se reconocen lo que se denominada las sietes artes. Con Batteux, en 1746, surge lo que hoy en día se denomina bellas artes. Las bellas artes las dividió en pintura, escultura, música, poesía y danza y luego añadió arquitectura y elocuencia. Las bellas artes hoy en día son formas de arte realizadas con un fin estético, de belleza y utilidad práctica, se encuentran

> comprendidas por: escultura, danza, música, pintura, literatura y cine que fue incluida en el siglo XX. (p. 19)

Para dar continuidad, la idea de involucrar el arte en el aula de clase de matemáticas para favorecer el aprendizaje de un concepto matemático en particular, no logra ser una idea inconcebible, al contrario, existen afirmaciones de algunos autores interesados en el tema tales como Antón y Gómez (2016):

> A través de arte se desarrolla la creatividad y se facilita la observación y reconocimiento de las propiedades geométricas de los objetos. Esto ayuda a generalizar y sistematizar un conocimiento geométrico ordenado que, además, será significativo, porque ha sido adquirido en permanente contacto con la realidad. Permite trabajar, además, de forma globalizada porque se está vinculando al conocimiento matemático otros contenidos (artísticos, naturales, físicos, históricos, etc.) y social, porque el arte permite el diseño de actividades diversas que se pueden llevar a cabo con diferente tipos de agrupamientos. (p.100).

Igualmente, al revisar algunos trabajos sobre educación infantil, se observa el uso de la integración de arte pictórico y geometría en el aprendizaje de los infantes; de acuerdo con Edo (2008, p. 40) "en educación infantil podemos crear situaciones didácticas en las que determinados contenidos de aprendizaje matemático y algunos contenidos del área visual y plástica se fundan y se complementen al trabajarse conjuntamente". No obstante, esta perspectiva ayuda a promover su utilidad en niveles de educación posteriores, pues son estrategias que se disponen para cautivar y motivar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, de una manera distinta a lo que comúnmente se encuentra en un aula de clase de matemáticas.

Así mismo, Martínez (2014) evidencia en su trabajo sobre historia, la relación entre arte y matemáticas, donde concluye que es indiscutible que las matemáticas no tengan relación significativa con el arte; a pesar de ello, aún es posible encontrar en la concepción de algunos individuos que no existe tal relación, además, se le atribuye exclusivamente a ciertos eruditos, el conocimiento matemático, en parte por concebirse como una disciplina fría y deshumanizada; de manera análoga sucede con el campo artístico, relacionado con la belleza y la actividad humana, alejada de los saberes matemáticos; este desconocimiento puede ser una de las razones por lo que existe una relativa aversión hacia la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Martínez (2014).

De esta manera, se resalta y se rescata el uso del arte pictórico para apoyar el aprendizaje de nociones matemáticas (las RPP) en la educación primaria.

1.2.3 Respecto a la proporción y a la proporcionalidad

Al abordar esta temática se tuvo en cuenta cierta problemática acerca de la misma como se mencionó en la primera parte de este trabajo, pero en esta sección se toman aspectos a tener en cuenta para indagar sobre la importancia de las RPP.

En la Didáctica de las Matemáticas, existe un campo de investigación denominado: razonamiento proporcional; donde Inhelder y Piaget (1958) presentaron unos de los primeros trabajos sobre las razones, proporciones y proporcionalidad, y se centraron en el desarrollo del pensamiento de la proporcionalidad (razonamiento proporcional). Una de las razones se debe al papel relevante que juega este último en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; además de la relación de este concepto de proporcionalidad con otras disciplinas, e incluso la vida cotidiana. (Obando, 2015).

De acuerdo a lo anterior, hay investigaciones vigentes sobre la proporcionalidad para el campo de educativo de las matemáticas, de esta manera, se presenta a continuación un poco sobre la complejidad de esta temática (proporcionalidad) y sus conceptos incluyentes (razón y proporción); en palabras del profesor Obando (2015):

> Es común encontrar que los procesos de conceptualización de dichos aspectos en los ámbitos escolares no alcanzan los niveles de desempeño esperados en los estudiantes. Prueba de ello son los resultados de las evaluaciones de competencias que se hacen en Colombia (pruebas Saber en 3o, 5o y 7o grado, Saber Once, antes ICFES, y Saber Pro, antes ECAES), o en las internacionales (como las pruebas TIMSS o las PISA de las cuales también participa nuestro país). Todas ellas coinciden en afirmar que cuando se trata de enfrentar problemas que impliquen el análisis e interpretación de información, o combinar diferentes procedimientos, los niveles de desempeño de los estudiantes están muy por debajo de lo esperado. Esto muestra, entonces, que el impacto de la investigación en los entornos educativos no es del todo satisfactorio, y que es necesaria la investigación que permita la comprensión de nuevos

> escenarios para el conjunto de problemáticas asociadas al aprendizaje o la enseñanza de los objetos de conocimiento *razón*, *proporción* y *proporcionalidad* (RPP). (p. 2).

En cuanto a lo anterior, es evidente que el estudio de las RPP debe fortalecerse, de manera que se generen o se renueven propuestas para mejorar su enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, como se mencionó en la problemática del presente trabajo, Guacaneme (2002) evidencia el uso exclusivo de un tratamiento aritmético para definir la razón y la proporción en algunos libros de texto de matemáticas[2]; por ello el autor define lo siguiente:

> …el hecho de que los textos no incluyan un tratamiento de la proporcionalidad para magnitudes relativas ofrece también un —aparentemente— nuevo ámbito de investigación a través del cual se puedan construir situaciones que involucren magnitudes relativas directamente proporcionales y la función de proporcionalidad sea monótonamente decreciente, así como situaciones que involucren magnitudes relativas inversamente proporcionales y la función de proporcionalidad sea creciente. (Guacaneme, 2002, p.41)

Motivos como el anterior, dan cuenta de la necesidad de la investigación sobre aquellas temáticas en la Educación Matemáticas, por lo cual, se ha emprendido en una nueva propuesta para lograr aportar en el aprendizaje de los estudiantes. Cabe recordar que una de las ideas centrales no es abordar todas las temáticas relacionadas a la proporcionalidad, sino lo que se refiere a los conceptos fundamentales, como lo son la de razón y proporción, pero desde la perspectiva geométrica, para marcar una diferencia con el tratamiento aritmético que se usa en mayor medida en la enseñanza y aprendizaje de las RPP.

Para finalizar la justificación del presente trabajo, se deja claro la pertinencia de cada componente en esta propuesta, debido a que su interés es lograr integrarlos, de manera que se aproveche el arte pictórico como un medio de expresión visual, creativo y motivador que al combinarlo con la geometría logra facilitar la observación y reconocimiento de propiedades geométricas para apoyar la comprensión del concepto de proporcionalidad. A partir de lo anterior, se genera el diseño de una propuesta didáctica dirigido a estudiantes de grado quinto de la Educación Básica, para suscitar y mejorar el aprendizaje de las RPP.

---

[2] "El libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el recurso mayoritariamente usado por los profesores." Guacaneme (2000, p.32)

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 General

- Identificar las estrategias que favorezcan el aprendizaje del concepto de proporcionalidad a través del diseño una Secuencia Didáctica a partir de la integración de la geometría y el arte pictórico, para estudiantes de grado quinto de Educación Básica.

1.3.2 Específicos:

- Seleccionar los elementos más relevantes en el aprendizaje de la proporcionalidad a partir de los referentes históricos, matemáticos, curriculares y didácticos para en el grado quinto, desde el punto de vista geométrico y pictórico.
- Articular en el diseño de una Secuencia Didáctica algunos de los elementos teóricos seleccionados, que integre a su vez el arte pictórico y la geometría como una estrategia que favorezca el aprendizaje de la proporcionalidad.
- Identificar las ventajas y limitaciones de la Secuencia Didáctica para la aproximación del concepto de proporcionalidad.

1.4 ANTECEDENTES

A continuación se dan a conocer algunos antecedentes cercanos a la problemática establecida en este trabajo. El primero en presentarse es un trabajo de grado, el cual realiza un recorrido histórico desde la época antigua hasta el renacimiento, para proponer una asociación entre arte pictórico y matemáticas; el segundo es un libro denominado: Matemática en su salsa: historia, arte y juegos, allí se tiene como propósito conectar la matemática con otras ramas del saber u otras disciplinas, donde se acentúa la historia y diferentes ramas del arte, para que los estudiantes conozcan y comprendan los conceptos, la utilidad, los orígenes, el desarrollo y las aplicaciones de estas conexiones; por último, la tercera referencia es un trabajo de grado que revela y destaca el protagonismo del artista alemán Alberto Durero en la época del Renacimiento, quien utiliza la geometría en aras de teorizar bajo la certeza de la ciencia todas las practicas del pintor.

Atendiendo a la breve introducción anterior, se tiene en primer lugar, la investigación de pregrado realizado por la Licenciada Vivian Martínez (2014). El título designado fue: *Algunas anotaciones históricas sobre arte y matemáticas: una herramienta didáctica en perspectiva*. Se recogen aportes muy importantes, puesto que en este trabajo se comparte el mismo punto de vista de relacionar arte y matemáticas; incluso en uno de sus capítulos (capítulo 2) se aborda el tema sobre La Teoría de Razones y Proporciones en el arte.

Este trabajo se trata de un análisis histórico, tanto de las matemáticas como del arte, específicamente se trabaja el arte pictórico. Presenta una visión más integral de las matemáticas con el entorno, por esta razón se aprovechan las huellas de las matemáticas en los diferentes periodos de la historia para realizar la asociación de estas dos perspectivas –arte e historia-.Pretende que se comprenda a el arte como un elemento motivador en la enseñanza de las matemáticas, y, a la vez, que las matemáticas puedan proporcionar elementos para apreciar la belleza de una manera que vaya más allá de la intuición.

Para hacer mención de cómo se desarrolló esta propuesta se tiene en cuenta que: se dividió en dos grandes partes: un primer capítulo denominado “Algunas anotaciones sobre arte”, en primera instancia se intenta dar una definición a lo que se entiende por arte; en segunda, se describen los inicios de la concepción filosófica del arte, tomando como referencia la concepción pitagórica y su teoría de números y magnitudes. Posteriormente se involucran las posturas filosóficas acerca del arte y la estética (en general) respectivamente de cuatro autores: Platón, Aristóteles, Kant y Hegel, de los cuales los dos primeros hacen parte de la época antigua y los segundos hacen parte la época moderna.

A continuación se presenta una tabla del trabajo escrito de Martínez (2014, p.52-53) que deja ver las concepciones de algunos autores en ciertas épocas representativas de la historia del arte:

Definición	**Platón**	**Aristóteles**	**Kant**	**Hegel**
Definición del arte	El arte es imitativo. “la pintura es imitación de previas imitaciones”. Cualquier teoría del arte debe partir de la noción de belleza.	El arte es Esencialmente imitativo, aunque va más allá de la simple imitación.	El arte es una imitación de la naturaleza que llega a la ilusión (belleza natural) o es un arte encaminado a nuestra satisfacción.	El arte debe tener otro fin que el de la imitación puramente formal de lo que existe, pues la imitación no puede dar lugar más que a artificios técnicos, que no tienen nada en común con una obra de arte.
Ficción y arte	La ficción es Esencialmente dañina por que aleja al ser humano de la búsqueda de la verdad.	La ficción ofrecía mayor grado de creatividad a los artistas, pues pensaba que estos representaban mejor o peor la realidad	El producto del arte debe parece un producto natural. Por lo tanto no hay cabida para la ficción.	La ficción puede tomarse como un valor de la realidad. En la realidad de la obra de arte interviene el espíritu.
Papel del arte	El arte cumple dos objetivos: (a) Como pauta moral del comportamiento (b) Reflejar miméticamente la realidad a	El arte llenaba la necesidad del ser humano de aprender a partir de la imitación.	El arte no es ni bueno, ni útil, ni malvado, ni es un oficio ni un artificio, etc. Sin embargo tiene una finalidad, es	El arte constituye un alimento espiritual. El espíritu es el ser verdadero que comprende todo en sí mismo.

	partir de la medida y la proporción.		espíritu y libre juego.	
Manifestaciones del arte	Ciertas Manifestaciones artísticas pueden tener efectos perjudiciales en el estado de ánimo del ser humano.	Consideraba las artes pictóricas, podían servir de purificadoras.	El arte debe atenerse a la naturaleza y para el hombre moderno, la naturaleza, muchas veces, supera en belleza y esplendor estético del arte más refinado y genial. La experiencia estética es una satisfacción desinteresada.	La obra de arte tiene una superioridad, esa superioridad consiste, en qué lo natural, aunque dotado de vida, se extingue, en cambio la obra de arte perdura.

Tabla 1. Resumen de las concepciones de algunos autores en ciertas épocas representativas de la historia del arte.

En esta primera instancia se trabaja de una forma la teoría de la estética, teniendo puntos de vista diferentes, pero de cierto modo unas posturas coinciden con otras, a pesar de la diferencia de épocas en que cada uno trabajó.

El segundo capítulo se denominó: “Un encuentro histórico entre el arte pictórico y la matemática”, este capítulo se encuentra divido en tres partes:

1. Periodo de Antigüedad: se retoman las concepciones de los pitagóricos y su gran teoría de la belleza que, después de ser extraída de la música, es llevada tanto a la pintura como a la arquitectura; posteriormente se habla sobre la teoría de la medida de la magnitudes, la teoría de razones y proporciones, y finalmente del descubrimiento de la inconmensurabilidad hasta llegar a la proporción aurea.
2. Periodo del Medioevo: aquí la belleza ya no gira alrededor del orden y la armonía, debido a que la concepción de belleza se influencia por el carácter religioso que dominaba en esa época; sin embargo, el uso de la proporción aurea en las obras sigue llamando la atención para los artistas medievales.

3. Periodo del Renacimiento: en este periodo se intenta rescatar algunos aspectos y conceptos de belleza desarrollados en la antigüedad haciendo uso de las matemáticas; la idea es realizar copias idénticas de la realidad plasmadas en el lienzo, con ello surge lo que se conoce como geometría proyectiva.

El tercer capítulo nombrado: “Revisión de algunas obras con contenido matemático”, como su título lo indica es mostrar algunas obras pictóricas de autores modernos como Velázquez, Dalí y Escher, de manera que esta relación de arte y matemáticas continua a través del tiempo.

A continuación se presentan algunas de las conclusiones expuestas al final del trabajo de la Licenciada Martínez, estas ideas son presentadas de acuerdo a la pertinencia que poseen para el presente trabajo sobre proporcionalidad. Resaltando la importancia de arte y matemáticas en general y para la educación en particular.

- En cada periodo los artistas trabajan con el orden y la proporción en las representaciones aunque no siempre sea de manera evidente como sucedió en el medioevo a diferencia de la antigüedad y el renacimiento.

- La belleza de la obras de arte, al igual que la belleza física o de algunos otros aspectos pueden ser descritos matemáticamente.

- El conocimiento se ha reducido a diferentes parcelas a las que solo tienen acceso aquellos expertos en el tema. Por tanto, no es raro que hoy en día el ciudadano común asocie las matemáticas a eruditos en el tema, o a algo totalmente abstracto y ajeno a su vida, por ello, nada tendrá que ver con aquellos aspectos tan trascendentales de la vida.

- La historia nos revela los vínculos recíprocos entre matemáticas, filosofía, arte y, en general, cualquier manifestación de la cultura; constituyéndose en el lugar de encuentro y punto de convergencia entre las diversas disciplinas matemáticas y las múltiples disciplinas llamadas humanísticas y artísticas.

- Las obras de arte no solo se presentan como una futura herramienta que permite contribuir a la enseñanza de la geometría sino que también permite un desarrollo de la estética y visualización de los estudiantes.

Por último, se rescatan algunos aportes de acuerdo con las anteriores descripciones del trabajo de Martínez. La idea es ofrecer una panorámica del trabajo y lograr afirmar que todo el trabajo ha sido de suma importancia para apoyar la propuesta que se desarrolla en el presente trabajo de proporcionalidad y arte. Desde la perspectiva histórica de las matemáticas para estudiar términos asociados al arte, pasando por las diferentes teorías desarrolladas en cuando a las magnitudes, razones y proporciones; hasta conocer algunas obras pictóricas y sus respectivos autores. Además incluye un cierre de reflexión con ideas muy interesantes sobre la educación matemática en lo que respecta a la idea desarrollada. Este trabajo realmente es un elemento significativo y motivador para la propuesta.

Otro de los antecedentes encontrados es un libro titulado: *Matemática en su salsa: historia, arte y juegos.* En este es un libro, donde se exploran las relaciones entre matemática, historia y arte. Su autora titular es Irene Zapico (2009). Para mención del propósito de este trabajo, es necesario saber que lo que constituye esta obra se ha elaborado en base a los trabajos de investigación realizados en los años 2000 y 20004, en el marco de la Unidad Interdepartamental de Investigaciones, del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de la ciudad de Buenos Aires.

En este trabajo se tiene como propósito conectar la matemática con otras ramas del saber u otras disciplinas, donde se destaca la historia y diferentes ramas del arte, para que los estudiantes conozcan y comprendan los conceptos, la utilidad, los orígenes, el desarrollo y las aplicaciones de esta conveniente conexión.

La obra consta de cuatro capítulos: el primero es denominado "Enseñar matemáticas con su historia", el segundo se llama "Literatura en la clase de matemáticas", el tercero "jugando con la matemática", y por último "presencia matemática en el arte". A continuación se presenta a modo de resumen lo que se trabaja en cada capítulo.

Capítulo 1: "Enseñar matemáticas con su historia". En este apartado se recogen aspectos históricos que tienen que ver con la matemática hindú, la matemática del Antiguo Egipto, la matemática Griega, donde se resalta el protagonismo del matemático Tales de Mileto, y por último en este apartado se presenta una tabla acerca del número π y su evolución a través del

tiempo. Es importante tener en cuenta que al final de cada subtema se presenta una actividad relaciona con este, de manera que se pone en práctica lo aprendido.
Capítulo 2: “Literatura en la clase de matemática”. Aquí se tiene en cuenta la literatura de algunos autores que se han interesado por integrar las matemáticas en sus obras, de manera que estas logren llamar la atención en sus lectores. En este capítulo se trabajan fragmentos de lecturas como la de Malba Tahan: “El hombre que calculaba”, Yakov Perelman: “Álgebra recreativa”, Bertrand Russell: “Misticismo y lógica (y otros ensayos), Jorge Luis Borges: “Otro poema”, Rafael Alberti y su poema “A la línea”, Irene Zapico: “Cenicienta, una historia de amor a primera vista”, Jonathan Swift: “los viajes de Gulliver”.

Al final de cada lectura trabajada se proponen actividades relacionadas con cuestiones acerca de la lectura, de manera que los estudiantes investiguen, comprendan y desarrollen interés hacia la matemática y hacia la lectura; al mismo tiempo, logra ser una manera en la cual se les enseñe a apreciar la actividad intelectual, el talento, la imaginación, la capacidad creadora e intuitiva que poseen los autores que han incursionado en la matemática y en la literatura.

Capítulo 3: “Jugando con la matemática”. Es un capítulo que muestra la posibilidad de unir los juegos con la matemática, donde se propone utilizarlos como un recurso didáctico-pedagógico para darle un toque diferente a las clases y despertar el interés de los estudiantes, ayudarlos a adquirir y desarrollar nuevos conceptos. Entre los juegos que se pueden encontrar en este apartado están: la carta elegida, los caballos del rey, juegos con fósforos, un juego con monedas y cuadrados mágicos.

Capítulo 4: “Presencia matemática en el arte”. Durante este capítulo se encuentra la elección de algunos arquitectos y artistas plásticos, para poner de manifiesto de qué modo la matemática está presente en sus obras y se sugiere actividades para el aula en relación a esto. Dentro de los artistas seleccionados se encuentra:

Le Corbusier (1887-1965), el cual rechazaba la expresión decorativa superficial, y era más bien partidario de una estética derivada del objeto realizado por el hombre.

Seguidamente se hace mención de la perspectiva en el la época del Renacimiento, donde se destacan la obras de Giotto, Jan Van Eyck como antecedentes de las reglas de la perspectiva. Posteriormente, la perspectiva se aborda de una manera científica, donde se resalta los trabajos realizados por Filippo Bruneleschi, y estas aportaciones dan lugar para que autores como Gian Battista Alberti, Piero della Francesca, Pablo Ucello, Leonardo da Vinci y Alberto Durero sigan desarrollando teorías acerca de la perspectiva. Cabe destacar que Leonardo y Durero fueron los artistas más influyentes en investigaciones relacionada con el arte y la proporcionalidad, de tal manera que trataron de demostrar el carácter científico de la pintura.

Posteriormente se incorporan algunos aspectos que dieron lugar para considerar lo que se entiende como Arte abstracto geométrico, haciendo referencia a un artista como Piet Mondrian se rescatan aspectos como: la necesidad de despegarse de la realidad y rechazar la copia o imitación de todo modelo exterior, para plantear la visión del objeto desde distintos ángulos y momentos, que de alguna manera se lograr ser más original, atemporal, universal y proponer un pensamiento matemático aún más integral. Para finalizar este apartado, se realiza una presentación del arquitecto Brasileño Oscar Niemeyer por aprovechar la utilidad de la geometría con el uso de todo tipo de líneas curvas en sus monumentales diseños.

De acuerdo al anterior trabajo descrito, se requiere destacar que las diferentes actividades que se proponen, los aspectos históricos de algunas culturas, civilizaciones y artistas que aquí se presentan, las cuales ayudan a comprender la importancia de tener cuenta la intervención y la integración de la el arte en las matemáticas, habiendo un interés particular en el arte pictórico en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad, debido a que se moviliza como medio de expresión entre los individuos, por su valor estético, por la capacidad de mostrar que en las matemáticas existe una relación continua, ya que estas últimas poseen un carácter universal; además, no se trata solo de aplicaciones de técnicas, sino también que es necesario conocerlas y utilizarlas, de esta manera ambas pueden complementarse y evidenciar el soporte conceptual que hay detrás de cada obra artística. Todo esto puede influir en mejorar la práctica docente y potenciar el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a la Educación Matemática como es el caso.

En último lugar, se expone una monografía titulada: *Alberto Durero: Relación Geometría y Experiencia*, realizada por la Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas Johanna Jennifer Mora Olarte (2011). En este documento se aborda una clara relación entre arte y matemáticas, para ello se tiene en cuenta una época del tiempo muy distinguida como lo es el Renacimiento, destacando el protagonismo del artista alemán Alberto Durero, quien utiliza la geometría en aras de teorizar bajo la certeza de la ciencia todas las practicas del pintor, tomando como fundamentos algunos estudios preliminares como los Elementos de Euclides, obras de artistas italianos, aportes de filósofos y demás que apoyaron la construcción de su tratado de pintura. A continuación se enuncian los seis capítulos que componen esta obra, así como una breve descripción de cada uno.

Capítulo 1. Presenta la manera en la cual el artista Alberto Durero se nutrió durante la búsqueda de la teorización de su experiencia como artista en un determinado tiempo de la historia universal, por tal motivo se trata de caracterizar el Renacimiento, destacándola como una época de descubrimientos, despojándose de teorías como la geocéntrica y ordenes establecidas, enfocando un interés por la relaciones y las funciones que existen entre los cuerpo, entre otros aspectos.

Capítulo 2. Se aborda la vida y obra del Alberto Durero. Se resaltan aspectos del contexto y otros autores que influenciaron en su trabajo, se describe una de sus obras escritas más importantes denominado *Underweysung der messung*, la cual es un tratado de geometría y es catalogado el primer documento literario en que un problema estrictamente representacional recibe un tratamiento estrictamente científico de manos de un artista.

Capítulo 3. El foco de este apartado es una aproximación a las espirales de Arquímedes, por tal motivo se analiza la primera parte del libro I del tratado de Durero, se presentan los objetos matemáticos que Durero ha caracterizado y utiliza en su tratado y a su vez éste evidencia la estrecha una estrecha relación con el libro I de los Elementos de Euclides. A partir de esto, se muestran las aplicaciones de las espirales a la pintura como la espiral con hojas, el báculo episcopal y la línea para labores de follaje.

Capítulo 4. Se analiza la última aplicación de la espiral Arquímedes teniendo como variable de construcción la división del segmento inicial a partir de líneas acompasables, y es desde estas líneas que surgen algunos de los problemas con regla y compas, los cuales son los tres problemas clásicos de las matemáticas de la antigua Grecia: la trisección del triángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Capítulo 5. Se aborda una de las discusiones más suscitadas a lo largo de la historia, la cual se trata del concepto de infinito en potencia y acto, se debate a partir de la diferencia entre el pensamiento aristotélico que concibe un infinito en potencia y el pensamiento de Giordano Bruno, el cual defiende un infinito en acto; donde estos pensamientos tomaran influencia sobre el artista Durero (infinito en acto) y Euclides (infinito en potencia) respectivamente, y de esta manera se conserva una diferencia de pensamientos entre estos autores sucesores. Bajo esta apreciación, seguidamente se presenta en este capítulo la que se conoce como la espiral de Durero o la aproximación a la espiral logarítmica, además, se recrea paso por paso la construcción de dicha espiral, evidenciando las diferencias entre ésta y la espiral arquimédica.

Capítulo 6. Se muestra la relación de la espiral de Durero y otras teorías del arte y la matemática, comenzando por Pitágoras, pasando por Euclides con la definición de media y extrema razón, la razón de Fibonacci, las construcciones anónimas como la del rectángulo áureo y la espiral logarítmica, para poder componer a partir de una divina proposición una representación pictórica, tomando como ejemplo el retrato de Giovanna Tornabuoni creada por Domenico Ghirlandaio en 1490.

Para finalizar, se hace mención de algunas reflexiones en torno a la relación matemática, arte y enseñanza teniendo en cuenta la vida y obra de Alberto Durero. Por nombrar algunas, aparece lo siguiente:

- La relación que como artista Durero trata de mostrar entre la matemática y el arte tiene que ver con el nivel al que quiera llevar su práctica de taller y cómo, a partir de esta disciplina, la pintura va nutriendo y consolidando una estructura teórica propia, des eta manera lograr darle estatus a las prácticas artísticas.

- Para Durero el arte y la matemática son tipos de conocimientos en donde se pueden encontrar múltiples relaciones beneficiándose de dicha relación en la construcción de la teoría en la pintura.

- Las artes al igual que las matemáticas, son aquellas expresiones las cuales pueden liberarse de la presión del mundo natural, la matemática posee su propia lógica y el arte al ser una expresión de la cultura, y ésta última ser el mundo creado por el hombre, tiene el mismo derecho de pensarse por fuera de las restricciones de lo real. Por ello, considerar la relación existente de las artes con el trabajo del docente de matemáticas no permite dejar de lado el carácter creativo que esta disciplina posee.

- Se muestra el trabajo de Durero acerca de su tratado, lo que permite tener un acercamiento de tipo práctico con las matemáticas, en este sentido el educador debe intentar relacionar conceptos matemáticos que se encuentran en un mundo intangible, con otras facetas del conocimiento para facilitar el acceso de estos a los estudiantes, de esta manera se logra encontrar y difundir un sentido de practicidad y funcionalidad de conceptos en la vida de los educandos.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 DIMENSIÓN MATEMÁTICA

Para realizar el estudio de la proporcionalidad de acuerdo a la propuesta de trabajo en la cual será enfocada, teniendo en cuenta que uno de los fines es resaltar la relación entre matemáticas (específicamente geometría) y arte pictórico; se considerará los *Elementos* de Euclides como el componente matemático fundamental del trabajo, en particular el libro V de la versión en español presentada por Puertas (1994). De esta manera, en los *Elementos* se logra observar lo siguiente:

> …(i) en éste Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción, por demás ampliamente estudiada por los historiadores, la cual constituye la innovación central frente a la teoría de la proporción pitagórica; (iii) el Libro V maneja un nivel de generalidad *sui generis* en los Elementos; (iv) la "proporcionalidad geométrica" no ha sido tan comentada y estudiada en la investigación didáctica (o al menos no tanto como la "proporcionalidad aritmética") y por tanto, presenta un "sabor" especial a la reflexión. Guacaneme (2012).

1.1.2 Estructura del libro V de los Elementos de Euclides.

El libro V no condiciona el tratamiento de la teoría de la proporción en el ámbito aritmético; lo que si sucede en el libro VII; también se identifican dieciocho definiciones, veinticinco proposiciones (ninguna de ellas construcción o problemas), dos porismas (o corolarios) y ningún postulado. De ahí que obtenga la definición de razón y la definición de proporción.

Los enunciados de las siguientes definiciones y proposiciones se presentan de la siguiente forma esquemática como lo realizo el profesor Guacaneme (2016), estos enunciados están escritos tal cual como en el libro V de los *Elementos* de la versión de Puertas (1994):

Enunciados de las definiciones

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.

5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.

7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.

8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.

9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que [guarda] con la segunda.

10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que [guarda] con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.

11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.

12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.

13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.

14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola [magnitud] en relación con el propio consecuente.

15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.

16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.

17. Una razón *por igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que tomadas de dos en dos guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.

18. Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuentes es a alguna otra [magnitud] —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra [magnitud] es al antecedente.

Tabla 2. Definiciones del Libro V de Elementos de Euclides. (Guacaneme, 2016, p. 287).

En la siguiente tabla se presentan de los enunciados de las proposiciones, se agrega una segunda columna que muestra una forma simbólica de los mismos respectivamente, con el fin de hacer más comprensivos los enunciados. Guacaneme (2016).

Enunciados de las proposiciones	**Simbolización del enunciado**[3]
1. Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.	$m(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = mx_1 + mx_2 + \ldots + mx_n$
2. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.	$(m \oplus n)x = mx + nx$
3. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos [magnitudes] tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.	$m(nx) = (m \odot n)x$
4. Si una primera [magnitud] guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.	$Si\ w : x :: y : z$, entonces $\forall\ m\ y\ n, mw : nx :: my : nz$

[3] Nótese que se han empleado símbolos diferentes para indicar las relaciones u operaciones entre magnitudes (=, <, >, :, +, -), las relaciones entre razones (≺,≻, ::), o las operaciones entre números (⊕, ʘ, ɵ). Además, hemos empleado las letras u, v, w, x, y, z para las magnitudes, en tanto que para los números hemos usado las letras m, n. No hemos empleado signo alguno para el múltiplo n-ésimo de una magnitud (por ejemplo, nx), pues no lo reconocemos como producto del número por la magnitud (es decir, del natural n por la magnitud x, en el ejemplo).

5. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una [magnitud] quitada [a la primera] lo es de otra quitada [a la segunda], la [magnitud] restante [de la primera] será también el mismo múltiplo de la [magnitud] restante [de la segunda] que la [magnitud] entera de la [magnitud] entera.	$m(x-y) = mx - my$
6. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas [magnitudes] quitadas [de ellas] son equimúltiplos de estas [dos segundas], las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.	$(m \ominus n)x = mx - nx$
7. Las [magnitudes] iguales guardan la misma razón con una misma [magnitud] y la misma [magnitud] guarda la misma razón con las [magnitudes] iguales.	$Si\ x = y$, entonces $x: z: : y: z\ y\ z: x: : z: y$
Porisma 7': Si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión.	$Si\ w: x$::y: z, entonces $x: w$::$z: y$
8. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma [magnitud] una razón mayor que la menor, y la misma [magnitud] guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.	$Si\ x < y, entonces\ x: z < y: z;\ y\ z: x > z: y$
9. Las [magnitudes] que guardan con una misma [magnitud] la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma [magnitud] guarda la misma razón, son iguales.	Si $x: z: : y: z$, entonces $x = y$. Y, si $z: x: : z: y$, entonces $x = y$
10. De las [magnitudes] que guardan razón con una misma [magnitud], la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma [magnitud] guarda una razón mayor, es menor.	Si $x: z < y: z$, entonces $x<y$. Y si $z: x < z: y$, entonces $x>y$
11. Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.	$Si\ u: v$::$w: x\ y\ w: x$::$y: z$, entonces $u: v$::y: z
12. Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes.	Si $x1: y_1$::x_2:y_2::…::$x_n: y_n$, entonces $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n): (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$:: $x_i: y_i, \forall_{\ i} = 1, \ldots, n$
13. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con una sexta.	| $u: v: : w: x\ y\ w: x \succ y: z$, entonces $u: v \succ y: z$
14. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la	Si $w: x: : y: z\ y\ w \lesseqgtr y$, entonces $x \lesseqgtr z$

tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor.	
15. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente.	$x: y::nx: ny$
16. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.	$Si\ w: x::y: z,$ entonces $w: y::x: z$
17. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales.	Si $(w+x): x::(y+z): z$, entonces $w: x::y: z$
18. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.	$Si\ w: x::y: z,$ entonces $(w+x): x::(y+z): z$
19. Si como un todo es a otro todo, así es una [parte] quitada [de uno] a una [parte] quitada [de otro], la [parte] restante será también a la [parte] restante como el todo es al todo.	$Si\ (w+x): (y+z): : w: y$, entonces $(w+x): (y+z)::x: z$
Porisma 19': Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales.	$Si\ (u+v): (x+y)::v: y,$ entonces $(u+v): (x+y)::u: x$
20. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.	Si u:v::x:y y v:w::y:z y $u \lesseqgtr w$, entonces $x \lesseqgtr z$
21. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.	Si $u: v: : y: z\ y\ v: w: : x: y$ y $u \lesseqgtr w$, entonces $x \lesseqgtr z$
22. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.	Si $x_1: x_2: : y_1: y_2, x_2: x_3: : y_2: y_3, \ldots$, y $x_{n-1}: x_n: : y_{n-1}: y_n$, entonces $x_1: x_n: : y_1: y_n$
23. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.	$Si\ u: v: : y: z\ y\ v: w: : x: y, entonces\ u: w: : x: z$
24. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán	$Si\ u: v :: w: x\ y\ y: v :: z: x,$ entonces $(u+y): v::(w+z): x$

también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.	
25. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor [juntas] son mayores que las dos restantes.	$Si\ w{:}x{:}y{:}z\ y\ w > x\ y\ w > y\ y\ x > z\ y\ y > z,$ entonces $w + z > x + y$

Tabla 3. Proposiciones del Libro V de Elementos de Euclides. (Guacaneme, 2016, p. 288-290)

En general, la presencia de las tabulaciones presentadas permite una comunicación directa con las definiciones y proposiciones que se trabajan en el libro V de Elementos de Euclides, de acuerdo a una organización propuesta por Guacaneme (2016). Por tal razón se deicidio integrarlas en esta dimensión del marco teórico que conforma este proyecto de grado. Además, gracias a este aporte se da continuidad a la identificación de algunos enunciados que servirán como estudio de investigación, y se presentan a continuación.

1.1.3 Identificación de los conceptos de razón y proporción

De acuerdo a lo anterior respecto a las definiciones y proposiciones del libro V de Euclides (Puertas, 1994, p. 9-54), es notorio que existe una aproximación para definir el término proporción en la definición 5 y el de razón en la definición 3.

Razón.

> Definición V.3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

A partir de esta definición, se tienen en cuenta diferentes aportes sobre algunos estudios sobre la teoría euclidiana de la proporción, por ejemplo los realizados por el profesor Guacaneme (2008), afirma lo siguiente:

> Existe un cierto consenso en que el no establecer de manera explícita las definiciones de *relación*, *tamaño* y *magnitudes homogéneas* hace que la definición 3 presente un carácter general y vago, respecto de la intención de definir la idea de *razón*; a pesar de ello, ésta contempla una condición manifiesta sobre el hecho de que las dos magnitudes involucradas en una razón no pueden ser de diferente naturaleza (*i.e.*, no se puede establecer una razón entre el tamaño de un segmento y el tamaño de una superficie, así como tampoco entre el

> tamaño de un ángulo y el tamaño de un volumen, entre otros). En otras palabras, la definición 3 no define la idea de razón, aunque sí condiciona parcialmente la posibilidad de su existencia.

Teniendo en cuenta que la definición anterior no es suficiente para comprender exactamente lo que se conoce como razón, se involucran otras investigaciones acerca de nociones fundamentales sobre la razón, y se toma como referencia a la definición 4 (Puertas, 1994, p. 10):

Definición V.4: Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.

Existe una condición suficiente y necesaria para poder establecer una razón entre dos cantidades dadas de un sistema de cantidades (Arboleda, Obando y Vasco, 2013, p. 979), esta condición se trata de cumplir con la propiedad arquimediana, la cual menciona lo siguiente: dadas dos cantidades $x, y \epsilon A$, con A un sistemas de cantidades, entonces entre ellas se puede establecer una razón si existen números naturales m, n tales que $m * x > y \wedge m * y > x$ (en el contexto griego no necesariamente implicaban números naturales, sino magnitudes equimúltiplos); es decir, si dichas cantidades (x e y) son finitas se puede definir una razón; esto en palabras del profesor Recalde, (SF, p.8) significa que todos los segmentos son de un orden de magnitud comparable, por tanto, no existe ni una magnitud infinitamente pequeña ni una infinitamente grande, ni tampoco una magnitud de cantidad cero.

Sobre el concepto de cantidad y sistemas de cantidades

De acuerdo a esta última parte, al establecer una razón entre dos cantidades, es necesario intentar comprender lo que se entiende por el concepto de cantidad y sistemas de cantidades, al menos en términos generales, por ello, a continuación se expone una aproximación sobre el tema. En primer lugar se encuentra el concepto de cantidad:

> …Siguiendo la idea aristotélica de atributo, se puede decir que una atribución de cantidad es aquella que realizada sobre un fenómeno (objeto, evento, sucesión de eventos u objetos indexados de acuerdo a la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales) permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar

> o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada. Arboleda, Obando y Vasco, (2013, p. 978).

En resumen, a las propiedades de un fenómeno y cuerpos que se pueden medir (longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, etc.) son llamadas *magnitudes*, a estas magnitudes se les puede hacer una atribución llamada *cantidad*; podría decirse que la cantidad es la porción de una magnitud. Recalde (SF, p. 8) afirma: "Euclides no definió lo que entiende por magnitud, sin embargo, asumimos (y así se percibe en los *Elementos*) que Euclides conserva la concepción Aristotélica de magnitud lineal, como un "pedazo" de recta continuo."

En segundo lugar, se expone el concepto de sistema de cantidades:

> En toda atribución de cantidad es posible definir una relación de equivalencia (cuando dos instancias de la atribución son idénticas), una relación de orden (cuando una instancia es mayor o menor que la otra) y una operación aditiva (que permite agregar o juntar dos instancias de la atribución de cantidad para producir una tercera). La relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se puede definir como una cantidad en la atribución dada (por ejemplo, cuando la atribución de cantidad refiere a una longitud, las clases de equivalencia formadas se pueden llamar cantidades de longitud). Así entonces, el conjunto de cantidades con la relación de equivalencia y la operación aditiva forman un semigrupo aditivo conmutativo y se tiene entonces lo que Stein (1990) ha denominado un sistema de cantidades. Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C (2013, p. 978).

Por último y haciendo referencia al concepto de **razón**, es importante resaltar que la razón es una **relación**; sin embargo, no ha sido posible encontrar una representación del objeto matemático (razón) como tal.

> Nos hemos dado a la tarea de identificar figuras (propias o impropias)[4] que representen la idea de razón; sin embargo, no hemos encontrado figura alguna en los Libros V y VI –ni en Elementos (Puertas, 1991, 1994, 1996), ni en otra de las obras atribuidas a Euclides (McDowell & Sokolik, 1993) – que constituya una representación de la razón. Con base en

[4] Algunos historiadores y epistemólogos (v.g., Gardies, 1997, pp. 127-155) reconocen en Elementos el uso de dos tipos de figuras para representar los objetos geométricos: propias e impropias. Las primeras representan magnitudes geométricas específicas u objetos específicos (v.g., segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, círculos); las figuras impropias las utiliza para representar números o magnitudes geométricas en general. (citado por Guacaneme, 2008).

> esto, nos atrevemos a afirmar que no existe en la geometría euclidiana representación, mediante figuras, de la razón, concebida como relación. (Guacaneme, 2008)

Proporción.

A continuación se presenta la definición de proporción que se encuentra en el libro V de los Elementos de Euclides (Puertas, 1994, p. 9-54):

Definición V.5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

En lo que concierne a esta definición, para intentar una mejor comprensión, se le han atribuido varias interpretaciones, además porque esta definición como muchas de las contenidas en el libro V de los Elementos (Puertas, 1994, p. 9-54) está escrita de manera general, como muestra de ello se presenta la siguiente interpretación:

> Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: Si los múltiplos $A, 2A, 3A, \ldots\ y\ B, 2B, 3B, \ldots$ son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos $X, 2X, 3X, \ldots\ y\ Y, 2Y, 3Y, \ldots$, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que "la identidad" de las razones $A{:}B\ y\ X{:}Y$ significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón $A{:}B$ en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B. Fine (citado en Guacaneme, 2008, p. 5-6).

Según Guacaneme (2008), la anterior interpretación es una manera poco usual de la definición 5, en tanto que no toma parejas de múltiplos sino de secuencias, de este modo se trata de una correspondencia entre dos sucesiones ordenada de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Apoyado en Fine (1917) argumentando a favor de esta interpretación al advertir cómo ésta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24). La idea propuesta por Fine establece la necesidad de que las dos magnitudes de cada razón sean homogéneas, pues de no ser así, no se podría armar una sucesión con los múltiplos de éstas.

En complemento, aportes como la definición de proporción ofrecida por Arboleda, Obando y Vasco, (2013, p. 979) es gran importancia para este referente matemático:

> Siguiendo la noción clásica, se entiende la proporción como la equivalencia entre dos razones, es decir, la proporción se comprende como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones, o como un predicado cuaternario o tetrádico entre cuatro cantidades: si las *cantidades* x , y , $x´$, $y´$ son tales que $x = \delta * x´$ implica $y = \delta * y´$ (igual medida relativa de x a $x´$ que y a $y´$), entonces $x : y :: x´ : y´$. Esto implica que las nociones de medida relativa y equimultiplicidad son fundamentales en el proceso de comprensión tanto de la razón como de la proporción, y ambas permiten *objetivar* la razón a través de la clase de equivalencia de todas las parejas de cantidades que están en la misma razón (equivalencia significa designar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa).

Es conveniente subrayar que existen expresiones simbólicas que sirven como aportes a la interpretación de la definición 5, ejemplo de ello se los siguientes apoyos aportados por otros autores:

"*a:b = c:d*, si para todo par de enteros m, n, se tiene *ma > nc (o ma < nc, o ma = nc)* si y solo si *mb > nd (o mb < nd, o mb = nd)*, respectivamente)". (Corry, 1994, p.3)

"si a, b, c, d son magnitudes (de la misma clase), entonces *a:b = c:d* si y sólo si para cualquiera enteros positivos ("números" en el uso griego) *n, m, ma, nb y mc nd*". Filep (citado en Guacaneme, 2008, p.7)

"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción *a:b :: c:d* si y sólo si: o *((ma > nb) y (mc > nd)) o ((ma = nb) y (mc = nd)) o ((ma < nb) y (mc < nd))."* (Puertas, 1994, P.12)

"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a : b :: c : d$ si y sólo si:

(si ma > nb, entonces *mc > nd)* y *(si ma = nb)* entonces *(mc = nd)* *si ma < nb, entonces mc < nd).”* (Puertas, 1994, P.12)

En resumen, las definiciones expuestas son una recuperación de investigaciones relevantes que ayudan a fundamentar una dimensión matemática sobre el conocimiento de razón y proporción entre magnitudes geométricas, donde la razón no necesariamente es una expresión numérica; y a partir de la afirmación de proporción se le pueden asociar diversas interpretaciones que se adecuen a la definición 5, debido a la forma general del enunciado expuesto en la teoría de proporciones en los *Elementos* de Euclides.

2.2. DIMENSIÓN CURRICULAR

El desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado resalta la apreciación de integrar la geometría y el arte en particular, logrando vincularse y apoyarse con las políticas educativas fundamentales del currículo colombiano, por tal motivo se tiene en cuenta los actuales referentes curriculares de orden nacional, tomando algunos elementos de estas. En primer lugar se abordaran los elementos concernientes a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), en segundo lugar se presentara los aportes de Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), por último se enseña una red conceptual para las razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) en los documentos mencionados.

En primer lugar, Los lineamientos curriculares de Matemáticas, consideran tres aspectos para organizar el currículo nacional colombiano de la siguiente manera (MEN, 1998):

Procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

Referente a los conocimientos básicos, los pensamientos y sistemas matemáticos a desarrollar son los siguientes:

-Pensamiento numérico y sistemas numéricos

-Pensamiento espacial y sistemas geométricos
-Pensamiento métrico y sistemas de medidas
-Pensamiento aleatorio y sistemas de datos
-Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Estos pensamientos no se desarrollan de forma individual, sino que se complementan entre sí.

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

Para el desarrollo de este trabajo, los procesos generales asociados son: el razonamiento; la comunicación; y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. A continuación se esbozan algunos elementos de estos procesos generales:

El razonamiento: este tipo de proceso está presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes, según (MEN, 1998, p. 54) razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

En cuanto a la comunicación, es un proceso fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que sin ella no sería posible transmitir conocimientos unos a otros. Es la oportunidad que tienen los estudiantes para expresar lo que saben, de sus pensamientos y de arrojar sus preguntas acerca de su aprendizaje; no obstante, es la oportunidad del maestro para aprender a escuchar y enriquecer el conocimiento de sus estudiantes, ofreciéndoles un ambiente propicio, de acuerdo a las necesidades y al entorno en el que ellos están inscritos.

En resumen: “la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los estudiantes a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas, y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.” Muñoz y Sánchez (2012, p. 21).

Sobre la comparación y ejercitación de procedimientos: generalmente este tipo de proceso se ha entendido como un conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, por tanto, se le asocian a su vez el uso de expresiones simbólicas del lenguaje matemático; sin embargo, dentro del mismo currículo se logran destacar otros aspectos identificados como procedimientos que no necesariamente tienen ese carácter, por ejemplo las construcciones geométricas (MEN, 1998, p. 82); además se dice que: “El aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” es muy importante en el Currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana” (MEN, 1998, p. 81) y muestran las destrezas, estrategias , métodos, técnicas, etc., utilizadas por los estudiantes para desenvolverse frente diversas situaciones y actuaciones, adquiriendo habilidades.
Esto ha conllevado a que se determinen grupos de procedimientos, entre los que se describen los siguientes según Rico (1995, p. 16):

Los procedimientos de tipo aritmético son aquéllos necesarios para un correcto dominio del sistema de numeración decimal y de las cuatro operaciones básicas. Entre los más destacados podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con lápiz y papel y el empleo de la calculadora.

Los procedimientos de tipo métrico son los necesarios para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. También se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal.

Los procedimientos de tipo geométrico son las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.

Los procedimientos analíticos[5] tienen que ver con "álgebra", "funciones" y "cálculo diferencial e integral". Algunos ejemplos de este tipo de procedimientos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación, los intereses en un préstamo, entre otros.

Con respecto a lo anterior, se confirma que la Comparación y ejercitación de procedimientos está involucrada con la propuesta de este trabajo, y el grupo de procedimiento que más se asocia es el geométrico según la descripción; sin embargo esto no quiere decir que sea una omisión total a los demás procedimientos.

Teniendo en cuenta los propósitos de este trabajo, uno de los pensamientos a movilizar es el Pensamiento espacial y sistemas geométricos. El Pensamiento espacial y sistemas geométricos es definido por Lineamientos así: "… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 1998, p. 37).

Cabe recordar que según MEN (2006, p. 61), en un primer momento, en el pensamiento espacial se da relevancia a las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio; en otras palabras, era suficiente con decir que algo estaba cerca o lejos de algo, y por lo tanto no había una importancia por las mediciones y menos por resultados numéricos. Sin embargo en un segundo momento, se hace necesaria la metrización, debido a que los sistemas de representación del espacio se complejizan, debido a que las propiedades de los objetos se deben no solo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas, es decir, es necesario saber qué tan lejos o qué tan cerca se está algo de otra cosa.

Continuando con la idea anterior, se tiene que: "El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana" (MEN, 2006,

[5] (ver MEN, 1998, p. 82)

p. 61), de esta manera se logra rescatar la importancia de estudiar e incorporar en este trabajo el aporte del libro V de Elementos de Euclides a los conceptos de razón y proporción desde una perspectiva geométrica.

Teniendo en cuenta la necesidad de la metrización en la percepción geométrica, se considerará entonces la movilización de otro pensamiento como lo es el pensamiento métrico y sistemas de medidas en esta propuesta. A continuación se enuncian aspectos de este pensamiento para destacar en la esta propuesta, que son mencionados por el MEN (2006):

-La estimación de la medida de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".

-La apreciación del rango de las magnitudes.

- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.

-El papel del trasfondo social de la medición.

De acuerdo a lo anterior, en segundo lugar se han incluido Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), debido a que sirven de complemento a los documentos de política educativa ya expuestos, por ello, seguidamente se presentan los tipos de pensamientos mencionados a movilizar y la identificación de los estándares convencionales para el grado de Educación Básica a trabajar (grado 5°), de manera que se observe la respectiva coherencia horizontal y vertical que se proponen en este documento a continuación.

Coherencia Horizontal: según el MEN (2006, p. 78-79), la coherencia horizontal está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

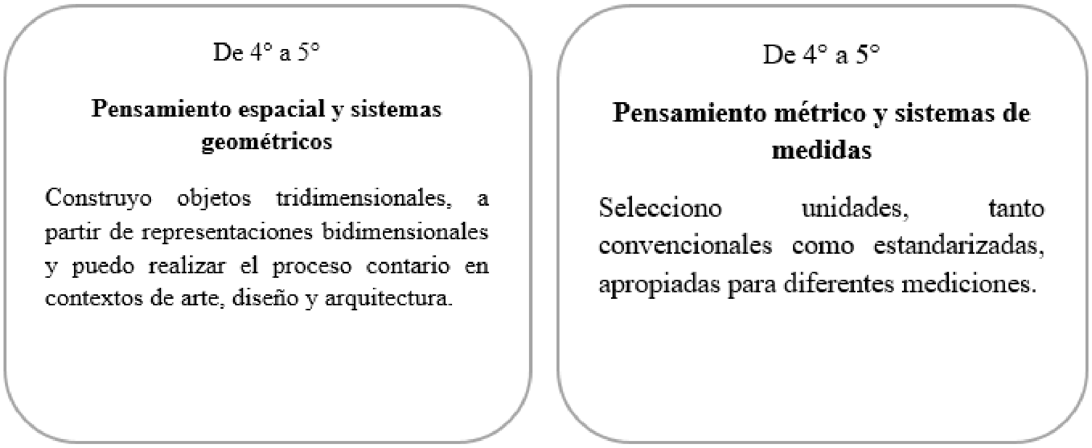


Figura 1. Coherencia horizontal según Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

Teniendo en cuenta la anterior coherencia horizontal se puede observar que, del pensamiento espacial y sistemas geométricos se ha escogido un determinado estándar que hace parte del grupo de grado 4° a 5° de Educación Básica, debido a que se acoge a los propósitos de esta propuesta de trabajo; además, también se le asocia otro estándar convencional, que hace parte del pensamiento métrico y sistemas de medidas.

En este caso, hay mayor enfoque en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, debido a razones expuestas anteriormente, además, porque de alguna manera se intenta rescatar lo visual, lo gráfico, lo perceptible visualmente para la construcción del concepto matemático de proporcionalidad, la cual implica el estudio de otros conceptos que lo conforman como la razón y la proporción.

Coherencia vertical: la coherencia vertical está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados (MEN, 2006).
Se presentan seguidamente la coherencia vertical de la propuesta y se trae a consideración los estándares más coherentes con la propuesta. Lo siguiente es conforme a lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006):

De 1° a 3°: Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas bidimensionales.

De 4° a 5°: Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contexto de arte, diseño y arquitectura.

De 6° a 7°: Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

De 8° a 9°: Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Figura 2. Coherencia vertical según Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

A partir de lo anterior, se afirma que el estándar más destacado en esta propuesta es el del grupo del grado de 4° a 5°, pues es el en grado quinto de Educación Básica donde se pretende dirigir este diseño para fortalecer el aprendizaje del concepto de proporcionalidad. Además, porque se pondrá en juego las representaciones bidimensionales y tridimensionales con la integración del arte pictórico, y así lograr un proceso en un contexto artístico.

Por último, en este apartado acerca de la dimensión curricular, se hace mención de aportes acerca de otras investigaciones, teniendo en cuenta la influencia de la enseñanza y el aprendizaje de las RPP en algunos documentos de política educativa, donde se aprecia y se destaca una gran red conceptual que se desarrollan en el proceso educativo, es decir, que las RPP no están aisladas o ajenas para apoyar la comprensión de otros conceptos. Según Obando (2015, p. 24-25):

> Una lectura detallada de los Lineamientos y los Estándares, permite proponer que las RPP se encuentran vinculadas a través de una red…las RPP ocupan un lugar importante en la organización curricular del sistema educativo colombiano, toda vez que se inicia desde la Educación Básica (con los primeros aprendizajes sobre la multiplicación) y se extiende hasta finales de la Educación Media (con el trabajo propio del cálculo sobre funciones), y además,

conectan los diferentes tipos de pensamiento (al menos de manera directa toca con lo numérico, lo variacional y lo métrico).

A continuación y de acuerdo a lo anterior, se presenta una red conceptual para razones, proporciones y proporcionalidad en Lineamientos y Estándares. Es un esquema proporcionado por uno de los trabajos del profesor Obando (2015):

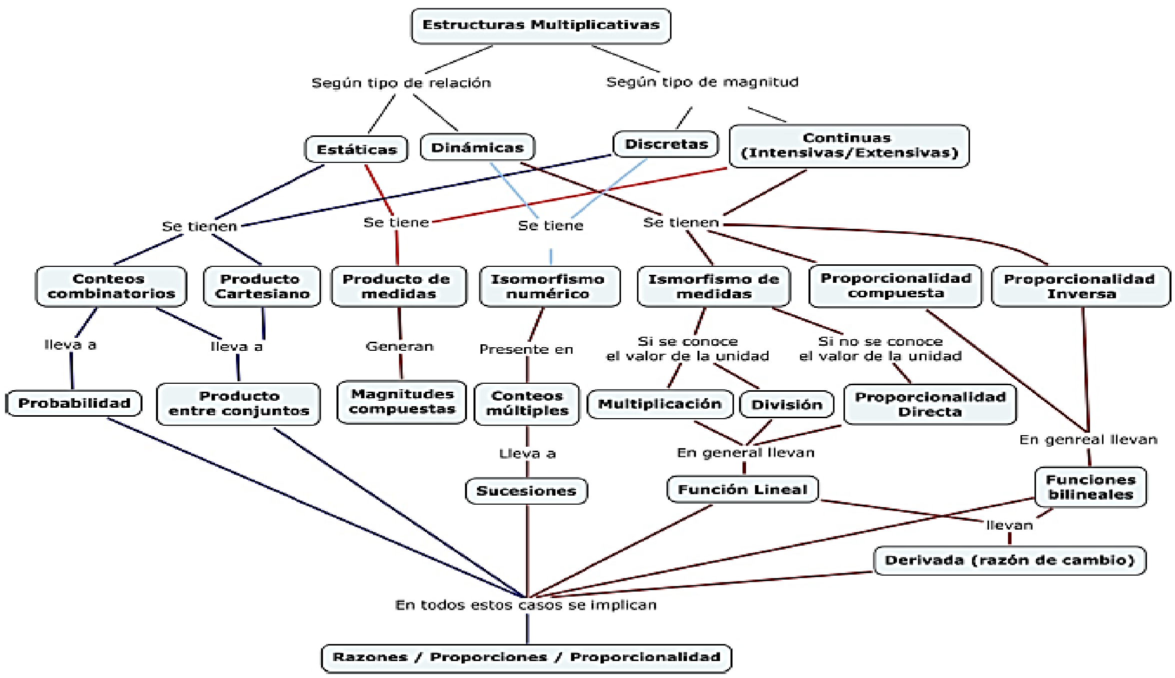


Figura 3. Red conceptual para razones, proporciones y proporcionalidad en Lineamientos y Estándares. (Obando, 2015, p. 24)

A pesar de que en el presente trabajo sobre proporcionalidad no se pretenda abordar todos los temas de la red conceptual expuesta, si es importante destacar que tener conocimiento, comprensión y buena interpretación del uso sobre las nociones fundamentales (razón, proporción y proporcionalidad) abre camino para estudiar y comprender toda la red en trabajos posteriores. De tal manera que, es existente el interés por promover un aprendizaje valioso acerca de las RPP en el presente trabajo.

2.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

En este apartado se presentan la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007), de la cual se describen las dos situaciones que propone esta teoría: situaciones didácticas y situaciones a-didácticas; aspectos que se tiene en cuenta para la guía del diseño de la secuencia didáctica del presente trabajo. Por otra parte se presentan reseñas de algunas investigaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad de los autores Guacaneme (2016) y Obando (2014), con la intención de obtener grandes aportes didácticos y reflexivos sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP.

2.3.1. Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) es una teoría que tiende a unificar e integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y regulación de la enseñanza de las matemáticas; específicamente se enfoca en una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre estudiantes, docentes y saberes matemáticos que acontecen en la clase, donde se condiciona lo que aprende el estudiante y cómo lo aprende.

De acuerdo a lo anterior, las interacciones entre profesor, estudiante y un saber determinado se desarrollan en un entorno denominado **situación**, el cual es diseñado y manipulado por el profesor para la difusión y adquisición de conocimientos dirigidos a los estudiantes; en complemento a esta situación o dispositivo se le integra un **medio** (textos, materiales, etc.) que sirven para apoyar la enseñanza de un saber.

Situación didáctica y situación a-didáctica

La Teoría de la Situaciones Didácticas presenta dos situaciones: una situación a-didáctica y una situación didáctica.

La **situación didáctica** es caracterizada por una situación en la que intervienen tres elementos un saber (a enseñar), un profesor (que desea enseñar ese saber) y un estudiante (o más) (que desean aprender ese saber). Vidal (2009) lo menciona como:

Se entiende una situación construida intencionalmente por el profesor con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado o en vías de constitución. La situación didáctica se planifica en base a actividades problematizadoras, cuya necesidad de ser resueltas o abordadas, implique la emergencia del conocimiento matemático que da sentido a la clase, la que ocurre en el aula, en un escenario llamado triángulo didáctico (ver figura 4), cuyos lados indican conjuntos de interacciones entre los tres protagonistas (indicados por los vértices). (p. 2-3):

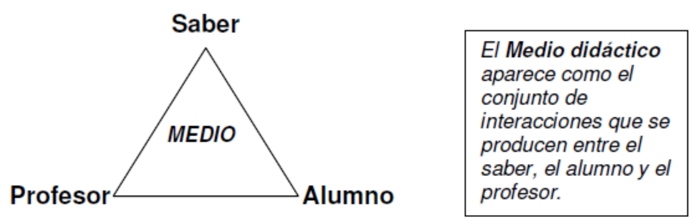


Figura 4. Triángulo didáctico, (Vidal, 2009, p.3)

La **situación a-didáctica** está incluida en la situación didáctica, según Vidal (2009):

Se caracterizan por el trabajo que realiza el alumno interactuando con el problema propuesto o bien discutiendo con sus compañeros acerca de éste, es decir, cuando interactúa con el medio preparado por su mentor. El profesor debe procurar que el alumno se responsabilice por trabajar en él y si no llega a su solución, al menos indique ciertas aproximaciones según los objetivos propuestos. Así, en estas situaciones a-didácticas interesa observar "cómo se las arregla" el estudiante ante el problema que le demanda el maestro.

En cuanto a las dos situaciones presentadas, la diferencia se enmarca en que la segunda (situación a-didáctica), la presencia o intervención del profesor no es directa con el estudiante, debido a que es el estudiante quien se apropia del problema que se le propuso, por lo tanto una secuencia diseñada de acuerdo a este tipo de situaciones puede funcionar sin requerir totalmente la intervención de un docente. En palabras de Brousseau (2007): "*entre el momento que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer"* (p. 31).

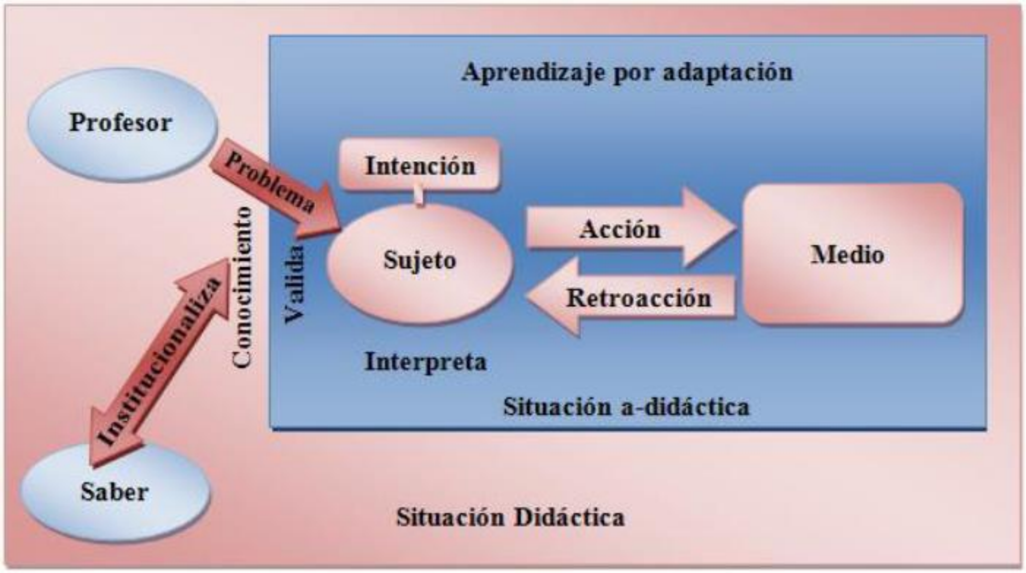


Figura 5. Situación didáctica y a-didáctica, (Acosta, 2010, p. 134)

Tipos de Situaciones a-didácticas

Por otro lado, Brousseau clasifica las situaciones didácticas, en distintos momentos para la aprehensión de un conocimiento. Estos son:

- Para el estudiante: situaciones de acción, situaciones de formulación y situaciones de formulación.
- Para el profesor: situación de institucionalización.

- **Situación de acción:** es una interacción y dialéctica del estudiante con el medio; en la medida en que el estudiante intenta resolver el problema propuesto, el medio le devuelve al estudiante informaciones sobre las consecuencias de sus acciones (retroacciones), de tal manera que el sujeto las toma en cuenta para sus próximas acciones y va aceptando o rechazando estrategias hasta una determinación, según corresponda la eficacia de estas. En la figura 5 se grafica lo que se plantea anteriormente:

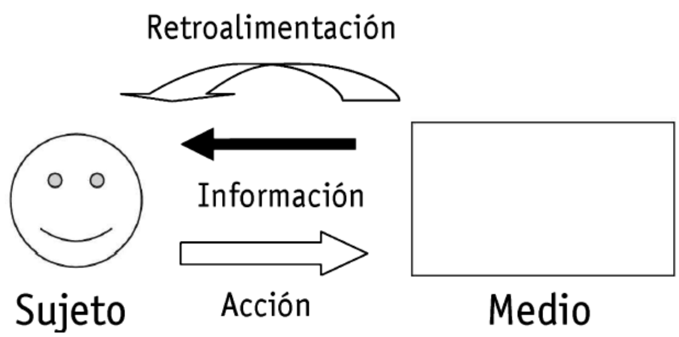


Figura 6. Esquema general de situación de acción, (Brousseau, 2007, p. 41)

- **Situación de formulación:** es la comunicación entre estudiantes de forma verbal o escrita acerca de sus pensamientos y estrategias. Según Brousseau (2007):

> La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación entonces debe involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información (Ver figura 6).

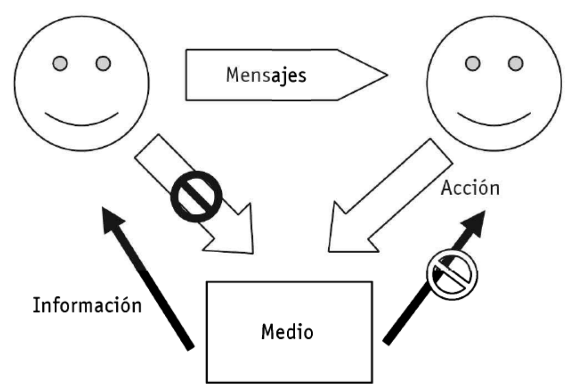


Figura 7. Esquema general de situación de formulación, (Brousseau, 2007, p. 26)

- **Situación de validación:** es la organización de argumentos que realizan los estudiantes para justificar y defender sus respuestas o soluciones al problema que se le ha propuesto, de esta manera logrará convencer a los demás o aceptar los argumentos de otros, por la veracidad de estos. La siguiente figura ilustra la situación de validación, teniendo en cuenta la discusión entre dos más estudiantes cuando se han participado en un juego (problema), donde ambos debaten:

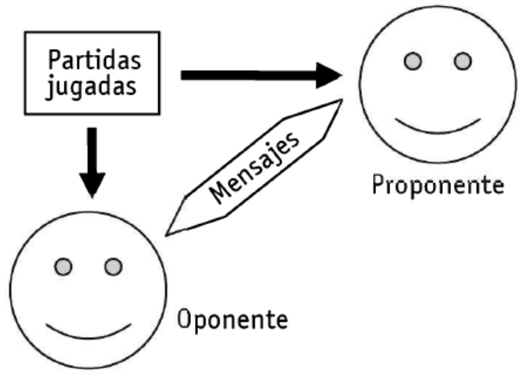


Figura 8. Esquema general de situación de validación, (Brousseau, 2007, p. 27)

- **Situación de institucionalización:** en esta situación, es el profesor quien se encarga de retomar las discusiones, argumentos, justificaciones y conclusiones acontecidas en las situaciones anteriores para organizarlos y realizar una presentación organizada, de manera que se note la construcción de un saber, con el fin de dar a entender a sus estudiantes la intención de la propuesta de trabajo o problema propuesto; es decir, exponer de forma general el saber o formalización.

A modo de conclusión acerca de la primera parte de esta dimensión, la anterior caracterización de la Teoría de la Situaciones Didácticas, se involucra en el presente trabajo porque se hace necesario una guía de diseño para la propuesta, por ello, se retoman los planteamientos de autores expertos en el tema como lo es Brousseau (2007), en cuanto a su exposición acerca de Situaciones Didácticas, la organización y caracterización estas situaciones.

Por otro lado, también permite distinguir y comprender el papel del docente y los estudiantes cuando se desea proponer una secuencia didáctica, además de tener en cuenta un medio, el cual sirve de apoyo tanto para el aprendizaje del estudiante como para la enseñanza del profesor.

Algunos aportes de trabajos en didáctica sobre proporcionalidad

Como ya se ha mencionado en la dimensión matemática del presente trabajo, en el diseño de este esta propuesta se tiene en cuenta y se integran las definiciones sobre razón y proporción del libro V de los *Elementos* de Euclides, puesto que hay investigaciones que resaltan la importancia de estudiar la proporcionalidad desde la perspectiva de las magnitudes geométricas, utilizando la Teoría euclidiana de la razón y la proporción. Un ejemplo de investigación sobre este interés es el profesor Guacaneme, el cual afirma lo siguiente:

> "Para el caso de las magnitudes geométricas, el libro V de los *Elementos* ofrece tal teoría y su análisis, a través de la Teoría de los significados sistémicos, brinda una visión que puede llegar a potenciar un quehacer docente, sobre la razón y la proporción, más consiente e incluso innovador." (Guacaneme, 2007, p. 2).

De acuerdo a lo anterior, hay un interés particular por mejorar el quehacer docente en el trabajo de Guacaneme, sin embargo, cabe aclarar que la presente propuesta quiere indicar la existencia del interés hacia el estudiante, es decir, hacia el aprendizaje de la proporcionalidad.

El interés común está en rescatar y reconocer significados de los conceptos de razón y proporción en el libro V de los *Elementos* de Euclides para proponer nuevas propuestas de enseñanza y aprendizaje, además de nuevas investigaciones en el tema. De esta manera Guacaneme afirma lo siguiente:

> "Usualmente la respuesta a las preguntas ¿qué es una razón entre magnitudes? y ¿qué es una proporción? identifican a la razón con un número racional y la proporción con la igualdad de dos de tales números. El análisis del Libro V de los *Elementos* de Euclides, permite reconocer nuevas alternativas de respuesta a tales preguntas, seguramente más acordes con la naturaleza epistemológica de tales nociones, a la vez que revela aspectos didáctico-matemáticos, que el conocimiento profesional del docente debería contener, con potenciales consecuencias para la gestión y tratamiento escolar de éstas." (Guacaneme, 2007, p. 1).

Según se ha citado, pueden existir nuevas alternativas para evitar trabajar la proporcionalidad de la misma manera que se ha venido presentando en una enseñanza tradicional de las matemáticas.

En este orden de ideas, se hace mención de uno de los trabajos acerca de la razón y proporción en matemáticas. *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica***,** es un trabajo presentado por el profesor Obando (2015) enmarcado en el campo del razonamiento proporcional, por lo cual se preocupa por estudiar los conceptos de razón, proporciones y proporcionalidad, a lo que él llama de forma abreviada como las

RPP; para ello toma en cuenta las prácticas matemáticas que se realizan en una institución educativa de la ciudad de Cali especialmente en dos grupos de estudiantes de 3° y 4° de Educación Básica; además, se interesa por indagar por el estatus epistemológico de los objetos de conocimientos, y por el sistema de prácticas que permiten su constitución como objetos de conocimiento.

De acuerdo a lo anterior, el autor plantea dos propósitos:

1. Caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes de los grados 3° y 4° de la Educación Básica primaria, con respecto a los objetos de conocimiento matemático razón, proporción y proporcionalidad.
2. Indagar por las configuraciones epistémicas para dichos sistemas de prácticas matemáticas.

En cuanto a la realización de la investigación, se tiene como soportes algunos elementos de la teoría de la actividad y de la filosofía de la práctica, que de forma general en este trabajo se extraen aspectos acerca de la construcción de la experiencia humana a partir de lo social y lo individual, es decir, el conocimiento adquirido en un individuo tiene origen inherente de procesos culturales, de las relaciones entre seres humanos, que de alguna manera se institucionaliza en las aulas de clase, combinándose con la acción mental y experiencia de cada individuo (estudiante) para influir en el desarrollo del propio conocimiento (de cada individuo); esto es lo que el profesor Obando nombra como una dialéctica entre lo individual y lo social, que a su vez esta mediada por los sistemas de práctica.

Teniendo en cuenta lo anterior y para mencionar a groso modo la metodología implementada se tiene que:

La investigación se organizó en dos etapas:

2 Un proceso de participación en las clases de matemáticas de estudiantes de tercero y cuarto de Educación Básica de una institución educativa de la ciudad de Cali.

3 Un estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas en épocas y lugares diferentes.

Estos son algunos hallazgos mencionados de forma breve por el mismo profesor Obando (2015, p.15); que también sirven como aportes al trabajo de grado que se desarrolla actualmente:

I. El lugar central de las magnitudes y la medición de cantidades de magnitud en los procesos de estudio de razones, proporciones y proporcionalidad, y de la noción de razón como uno de los fundamentos en las conceptualizaciones relativas a lo multiplicativo y los números racionales.

II. Una reconceptualización de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad a partir de principios presentes en los procesos de constitución histórico-epistemológica de dichos objetos, recuperando el carácter geométrico de la razón y su función epistémica con respecto a las cantidades que pone en relación.

a. La razón como medida relativa, si se define entre dos cantidades homogéneas, o como relativización a la unidad, si se define entre dos cantidades heterogéneas.
b. La razón como relator o como operador (cuando la razón se define entre cantidades homogéneas) o la razón como correlator o transformar (cuando se establece entre familias de cantidades, no necesariamente homogéneas).

Para dar continuidad a la exposición de la dimensión didáctica, se hace una exposición de una tesis doctoral elaborada por el profesor Edgar Alberto Guacaneme (2016); se denominó: *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*.

Para hacer mención acerca de la problemática de este trabajo, el autor se plantea la inquietud sobre el papel que la Historia de las Matemáticas puede llegar a desempeñar en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas; además porque se ha establecido el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas como línea de investigación de la educación Matemática; este interés particular del autor permite que en su elaboración de tesis doctoral, se restrinja al menos en dos direcciones: no abordar la totalidad de la Historia de las Matemáticas, por ello selecciona la historia de la teoría euclidiana de las proporciones en el campo de la geometría (expuesta en el libro V de los *Elementos de Euclides*); y, no pretende explicitar el papel efectivo de esta historia en el conocimiento del profesor de Matemáticas, pero sí de su carácter potencial.

Entre tanto, se encuentra formulada la siguiente pregunta inicial: ¿Cuál es el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el libro V de *Elementos,* en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas?

Con respecto a la estrategia metodológica, el tipo de investigación es fundamentalmente cualitativa e incluye estudios descriptivos e interpretativos, que requieren el estudio de literatura asociada a la temática.

Teniendo en cuenta la cuestión inicial y otras[6] que, a partir de allí lograron desembocarse. En primera medida realizar la aproximación al *estado del arte* de la reflexión e investigación en torno a la relación: "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática".

Posteriormente, se procura explorar si en efecto el papel del conocimiento histórico –posible integración de la Historia de las Matemáticas- en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas podría constituir una línea de investigación e intervención, y de esta manera comenzar el estado de desarrollo de la misma.

Seguidamente, se estudian los documentos que se han identificado y precisado sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción del libro V de *Elementos*, para obtener una perspectiva y apreciación de acuerdo a una categoría de análisis elaborada por el autor.
Por último, se determina el potencial formativo que los documentos versan sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción tienen a favor del conocimiento del profesor.

Debido a que es un trabajo bastante extenso, la idea no es describir cada capítulo, más bien dar una aproximación de la esencia de la obra y resaltar en sí, el foco de atención por el cual se ha escogido este trabajo como un gran apoyo para la elaboración de un propio trabajo de grado; por tal motivo es de destacar el capítulo cuarto (titulada: Estudio de la Historia de la teoría Euclidiana de la proporción en el libro V de Elementos de Euclides) de esta tesis de doctorado.

[6] Para conocer específicamente cuáles son las otras cuestiones, es preciso revisar el apartado 1.5 El problema de investigación. Trabajo de doctorado del Profesor Guacaneme (2016, p. 38-39).

En este capítulo, como ya se indicó, se hace un estudio de la historia de la proporción. Para comenzar se hace un estudio detallado de la teoría euclidiana de la razón y la proporción del libro V de Elementos de Euclides; de tal forma que se presenta una estructura de este libro. Se muestra una organización tabular de las dieciocho definiciones y las veinticinco proposiciones; se contemplan seis categorías (Situaciones problemas / tareas matemáticas; lenguaje matemático; procedimientos / procesos matemáticos; conceptos / definiciones; propiedades; y, argumentos) – propuesta por el autor para un satisfactorio análisis del libro V de elementos de Euclides.

Se listan y se reseñan numerosos documentos referentes a la historia de la proporción. Se identifican seis hitos para ofrecer una organización: a) Teorías pre-euclidianas, b) Teoría euclidiana, c) La proporción en la época helenística, d) Traducciones árabes y latinas, e) Adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el renacimiento, y, f) influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales.

De acuerdo a lo manifestado en este capítulo, es de vital importancia valorar la mayor parte de estos aspectos estudiados acerca de la teoría euclidiana de la proporción, puesto que ofrece un estudio de carácter histórico-epistemológico de las nociones (razón y proporción) para comprender el concepto de proporcionalidad; además de presentar una organización estructural del libro V de *Elementos*; existen también el aporte de diversas reflexiones (a medida en que se aborda la lectura) de esta gran magnífica obra doctoral, para influir en el desarrollo del presente trabajo de grado.

CAPÍTULO 3: DISEÑO METODOLÓGICO

3. METODOLOGÍA

En esta dimensión se toman en cuenta aspectos fundamentales de la Ingeniería Didáctica (ID) propuesta por Artigue (1995), para presentar la metodología guía de este trabajo, pues la ID es un esquema experimental basado en la "realizaciones didácticas" en clase (Artigue, 1995, p.36); además, toma la forma de secuencias de lecciones –lo que involucra: la concepción, realización, observación, y análisis de secuencias de enseñanza-, partiendo de un trabajo teórico y luego lo pone a prueba o en marcha dentro de un aula de clase (puede ser otro espacio de enseñanza) (Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., Wilhelmi, M. R. ,2013, p. 7).

Según Artigue (1995), la metodología de la ID, comprende por lo general dos niveles: el de *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*. De lo cual se precisa el enfoque del reciente trabajo que es a nivel de micro-ingeniería, debido a que tiene una orientación local en cuanto a la complejidad de los fenómenos de la clase.

En el proceso experimental de la ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases:

Primera fase: Análisis preliminares.

Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.

Tercera fase: Experimentación.

Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y evaluación.

Teniendo en cuenta que en la elaboración de esta propuesta, se pretende aportar en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad en el grado quinto de educación básica, y a su vez destacar la relación e integración entre arte pictórico y geometría; se procede a describir las fases mencionadas fases para la elaboración de esta propuesta.

- **Primera fase: Análisis preliminares.**

Se trata de documentar la problemática, por ello se tomó como primera medida investigar y abordar una variedad de documentos con el tema de estudio de la propuesta a desarrollar.

En esta primera parte, se aborda la búsqueda de todo tipo de evidencia entre la relación de arte y matemática, que poco a poco se va puntualizando entre arte pictórico y geometría.

Posteriormente, existe el interés de indagar sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, teniendo en cuenta que debe existir un objeto matemático al cual involucrar en la investigación de tipo de trabajo. Sin embargo, se tiene en cuenta que al estudiar sobre proporcionalidad, requiere del estudio de sus dos constituyentes principales: el concepto de razón y el concepto de proporción.

Por otro lado, se consideraron documentos sobre política educativa y didáctica para lograr justificar aún más la presente propuesta.

En segunda medida se realizó la identificación, selección y clasificación de la documentación mencionada, para ello se utilizó la siguiente rejilla que sirvió para clasificar la información a grandes rasgos de toda la información obtenida.

Interés inicial y general	**Puntualización del interés general**	**Elementos más específicos del estudio**	**Elementos finales**
Aspectos Artísticos	Arte pictórico	Historia del arte pictórico. Técnicas utilizadas en el arte pictórico.	Técnicas artísticas relacionadas con el concepto de proporcionalidad.
Aspectos Matemática	Geometría	Revisión histórica de la geometría. Proporcionalidad Geométrica.	Estudio de la concepto de razón. Estudio de la concepto proporción.
Aspectos de las Políticas educativas	Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (EBCM) y Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM).	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.	Coherencias verticales y horizontales correspondientes a los (EBCM)
Aspectos Didácticos	Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)	Situación didáctica y situación a-didáctica. Micro-ingeniería.	Situación didáctica y situación a-didáctica. Micro-ingeniería.

Tabla 4. Clasificación de la documentación de los análisis preliminares.

Para concretar esta primera fase, todo este estudio que se realizó para hallar, manifestar y justificar la problemática, se ha definido en las tres dimensiones del marco teórico expuesto en el segundo capítulo: dimensión matemática, dimensión curricular y dimensión didáctica.

- **Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.**

En esta fase se concibe un elemento fundamental de la presente propuesta, que se trata de un diseño genuino de esta propuesta, la cual es una secuencia didáctica para introducir el concepto de proporcionalidad en el aula de clase; además, se tienen en cuenta algunos aspectos descritos por Artigue (1995) como:

> • Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
> • Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
> • Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

- **Tercera fase: experimentación.**

En esta fase hace referencia la implementación de la SD, sin embargo cabe aclarar que no será puesto en acto como tal en un aula de clase, por ello se requiere la revisión de un experto en el tema acerca de las RPP como concepto matemático o profesores de matemáticas que desde su conocimiento y experiencia como maestros del grado quinto de básica primaria, evalué la presente propuesta. Lo anterior, requiere hacer la presentación de la problemática y justificación a los profesores y luego proceder a que ellos desarrollen la SD, por último se les realiza una pequeña entrevista escrita a fin de que den la respectiva valoración, sugerencias y aportes a la SD experimentada por ellos mismos.

- **Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y evaluación.**

Esta es la última fase que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella (Artigue, 1995), de igual manera, se analiza si ocurrieron los hechos previstos en el análisis a priori y los que ocurrieron fuera de este; por lo cual, la cuarta fase permite confrontar los dos análisis: el a priori y a posteriori y así se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Por otro lado, nuevamente se hace mención de que no hay un análisis a posteriori propiamente de los resultados de una puesta en acto con estudiantes, sino con algunos profesores del área de matemáticas que tienen a cargo el grado escolar a la cual va dirigida la secuencia; permitiendo así, concretar por ahora solo el diseño de la secuencia didáctica. Lo que quiere decir que la valoración de los docentes entrevistados a la SD se tiene en cuenta para concluir la propuesta, además, es un apoyo para garantizar el desarrollo de las situaciones en aulas de clases con los estudiantes del grado quinto de básica primaria.

La tercera y cuarta fase serán presentadas en el cuarto capítulo.

CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En el siguiente apartado se presenta la estructura general de la secuencia y los respectivos análisis de las situaciones I y II, se realiza una descripción de cada una, se menciona el propósito, se analiza cada tarea propuesta, se nombran los materiales, los contenidos matemáticos que se movilizan, las expectativas de desempeño para los estudiantes y los análisis de las fases que intervienen en la situación.

4.1 ESTRUCTURA GENERAL DE LA SECUENCIA.

Secciones	Número de tareas	Nombre de las tareas.	Número de ítems.	Tiempo
Situación I. Acercamiento al concepto de la razón.	Cuatro tareas	**Tarea 1.** Armando a colorín coraza.	Dos.	2 horas
		Tarea 2. Comparando fichas de colores.	Siete.	
		Tarea 3. Comparando cantidades del color amarillo y naranja en fichas.	Dos.	
		Tarea 4. Haciendo mis propias comparaciones de cantidades del colores en fichas.	Dos.	
Situación II. Acercamiento al concepto de proporción.	Tres tareas	**Tarea 1.** Ubicando la primera mariposa del muro.	Dos.	2’ 30 horas.
		Tarea 2. Comparación de cuadriculas.	Tres.	
		Tarea 3. Pintando el muro de mariposas.	Paso 1: tres. Paso 2: cuatro. Paso 3: cinco. Paso 4: cuatro. Paso 5: uno.	

Tabla 5. Estructura general de la secuencia didáctica.

4.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS SITUACIONES I Y II

En los siguientes análisis se hace mención de los contenidos matemáticos que se movilizan, las expectativas de desempeño para los estudiantes, se describen cada una de las situaciones I y II que conforman la secuencia, su respectivo propósito, el análisis de cada tarea propuesta, se nombran los materiales, y los análisis de las fases que intervienen en la situación.

4.2.1 Análisis a priori de la situación I: Colorín coraza.

La siguiente tabla despliega los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño que están en marcha durante la experimentación de la situación I.

Situación I: Colorín coraza

Propósito: hacer una aproximación a la concepto de razón de proporcionalidad a partir de la visualización y la comparación de figuras geométricas.

Tareas	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Tarea 1. **Armando a colorín coraza**	• Semejanza de figuras. • El triángulo como figura geométrica. • Proporcionalidad.	• Identificar a partir de la visualización una relación de proporcionalidad entre las dos figuras (una figura dada y una figura resultante).
Tarea 2. **Comparando fichas de colores**	• Figuras geométricas (triángulo). • Congruencia y semejanza de figuras geométricas (triángulos). • Conteo. • Razón.	• Establecer una razón a partir del reconocimiento de un patrón de frecuencia.
Tarea 3. **Comparando cantidades del color amarillo y naranja.**	• Números naturales. • La multiplicación de números naturales. • Variación.	• Identificar una relación entre el número de triángulos naranja con el número de triángulos amarillos o viceversa, a partir de la observación e interpretación de la información dada. • Describir en lenguaje natural la interpretación

		de relaciones identificadas anteriormente. • Representar numéricamente las razones a partir de la relación del número de triángulos naranja y el número de triángulos amarillos. • Establecer una razón general a partir de la interpretación de resultados registrados en una tabla.
Tarea 4. **Haciendo mis propias comparaciones de cantidades del colores en fichas.**	• Números naturales. • La multiplicación de números naturales. • Variación.	• Identificar una relación entre el número de una figura de un color escogido con el número de otra figura de un color determinado. • Describir en lenguaje natural la interpretación de relaciones identificadas anteriormente. • Representar de forma numérica, razones a partir de la relación del número de triángulos naranja y el número de triángulos amarillos. • Establecer una razón general a partir de la interpretación de resultados registrados en una tabla.

Tabla 6. Análisis a priori de la situación I.

Descripción situación I:

La situación I, inicia con la lectura sobre la historia de Ángel que se titula “Colorín coraza”; desde un comienzo al estudiante se le propone un diálogo entre él y Ángel, este último es el personaje que protagonizó la historia de la introducción. Este diálogo se presenta durante toda la secuencia didáctica.

A partir de la lectura realizada se presentan cuatro tareas que el estudiante debe empezar a resolver en orden, utilizando el material manipulativo y una guía que contiene la primera parte de la secuencia, titulada “Colorín coraza”.

El propósito: hacer una aproximación al concepto de razón de proporcionalidad a partir de la visualización y la comparación de figuras geométricas.

Los Materiales:

- Guía del estudiante # 1.
- Grupo de fichas “CORAZA”.
- Imagen: “COLORÍN CORAZA”.
- Desplegables de bolitas con nombres C1, C2 y C3 (stikers).

Análisis de cada tarea de la situación 1.

A partir de la lectura realizada se presentan cuatro tareas que el estudiante debe empezar a resolver en orden.

GUÍA DEL ESTUDIANTE # 1 **Fecha: ___/___/___**

NOMBRES: ____

Colorín Coraza

Esta es la historia de Ángel, un joven pintor que una vez caminado por la playa, se encontró una pequeña concha perteneciente a una clase de molusco que se conoce como **Nautilus**. Ángel estaba maravillado por la forma de la concha, sus colores y su tamaño; se la llevó a su casa para enseñársela a su familia y amigos.

Ángel tiene un gran taller de pintura en su casa, en ese taller colocó la concha del molusco. Siempre que podía la observaba e investigaba información acerca de la especie del animal acuático, que habitó la coraza.

Después de tanto analizarla y admirarla, se le ocurrió la idea de hacer una pintura inspirada en aquella criatura marina, por lo que tuvo como resultado una obra de arte que tituló "**Colorín Coraza". ** Y para quedar totalmente satisfecho, también elaboró un tipo de rompecabezas para poder jugar con sus amigos, este rompecabezas estaba compuesto por 12 fichas.

Ahora, Ángel ha querido dar a conocer su rompecabezas a muchas personas, a este rompecabezas lo ha llamado CORAZA. Él ha sido invitado a tu escuela; él desea que puedas disfrutar de su juego y además te invita a que logres conocer algo de geometría y proporcionalidad a través de sus instrucciones.

A partir de este momento Ángel te guiara con algunas tareas que debes cumplir para que logres aprender, comprender y apreciar su creación.

Figura 9. Situación I, lectura introductoria.

En la **tarea 1**: "**ARMANDO A COLORÍN CORAZA"**, se requiere armar un rompecabezas teniendo en cuenta una pintura artística, la cual se pondrá a vista todos los estudiantes que van a desarrollar la secuencia, además de un grupo de fichas que se entregarán para realizar dicha tarea, como se muestra a continuación:

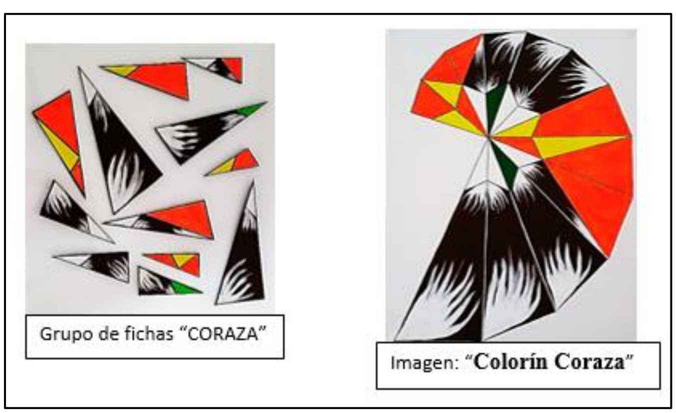


Figura 10. Situación I, materiales.

Después de que el estudiante arme el rompecabezas, se formula la siguiente pregunta:

a. ¿Qué tuviste en cuenta para iniciar y terminar de armar la figura de la imagen presentada con las fichas CORAZA?

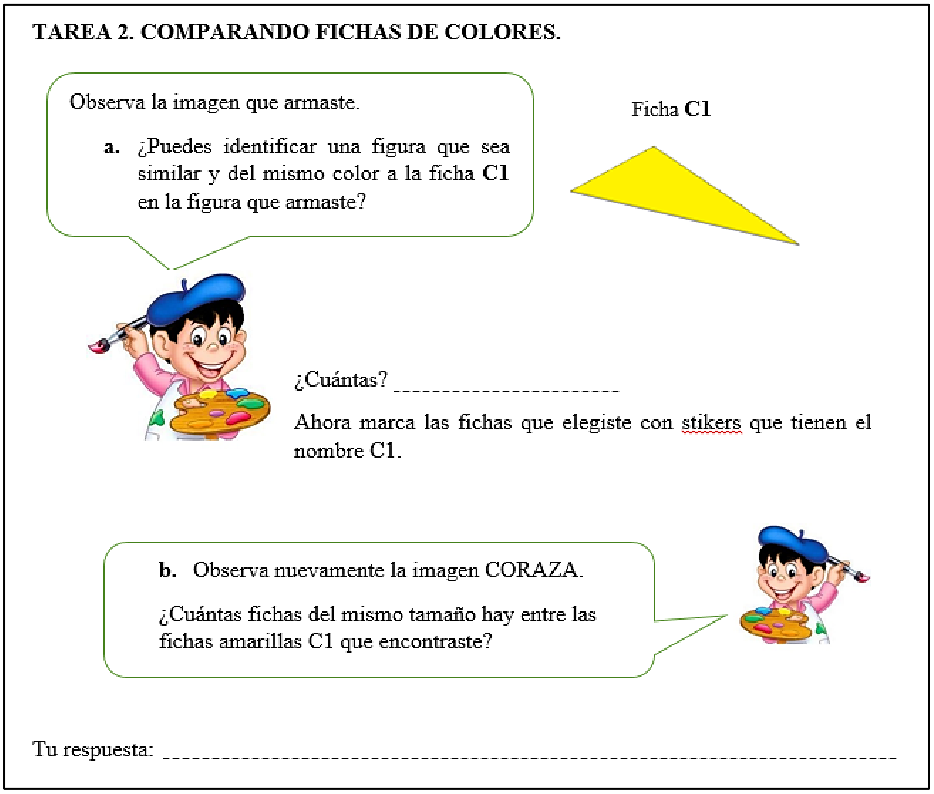
Se espera que el educando mencione aspectos correspondientes en las fichas con la representación puesta en frente como: los colores, el tamaño, las formas, la organización de la composición de la figura de referencia, entre otros. De manera que se realice un proceso de visualización y comparación de objetos geométricos semejantes y a escalas diferentes; evidenciando de esta manera un acercamiento al razonamiento proporcionalidad de modo exploratorio y visual.

Fases que intervienen en la tarea 1:

Acción: cuando el estudiante se encuentre armando la figura de "colorín coraza", ya estará ocurriendo una interacción entre él y el medio.

Por otro lado, existe la posibilidad que el estudiante coloque algunas fichas en lugares que no correspondan, de lo cual el medio provocará retroacciones tales como: mostrar espacios que no deben ir entre las fichas, provocar el cambio de una ficha muy pequeña al estar junto a una ficha muy grande porque la imagen de modelo muestra un orden, además de ayudar a corregir la correspondencia de los colores entre las fichas.

En la **tarea 2**: "**COMPARANDO FICHAS DE COLORES"**. Con el rompecabezas armado, se pide hallar una figura geométrica (triángulo) del grupo de fichas que sea semejante al triángulo **C1** que aparece en la guía.



TAREA 2. COMPARANDO FICHAS DE COLORES.

Observa la imagen que armaste.

a. ¿Puedes identificar una figura que sea similar y del mismo color a la ficha **C1** en la figura que armaste?

Ficha **C1**

¿Cuántas? ______________________

Ahora marca las fichas que elegiste con stikers que tienen el nombre C1.

b. Observa nuevamente la imagen CORAZA.

¿Cuántas fichas del mismo tamaño hay entre las fichas amarillas C1 que encontraste?

Tu respuesta: ____

Figura 11. Situación I, tarea 2, literal a y b.

Se espera que el estudiante logre identificar dos fichas amarillas del grupo “CORAZA”, las cuales corresponden a las características que tiene la ficha C1 y de esta manera se hace manifiesto la semejanza de triángulos como contenido matemático. Después de esto, en el literal b se espera como respuesta que hay cinco fichas entre las dos fichas C1 determinadas; de manera similar en los literales siguientes c, d, e y f se repiten las preguntas a y b, pero cambiando el color y el nombre de las fichas por naranjas con el nombre C2 y verdes con el nombre C3.

Las respuestas de las preguntas anteriores, permite a formular la pregunta el siguiente literal:

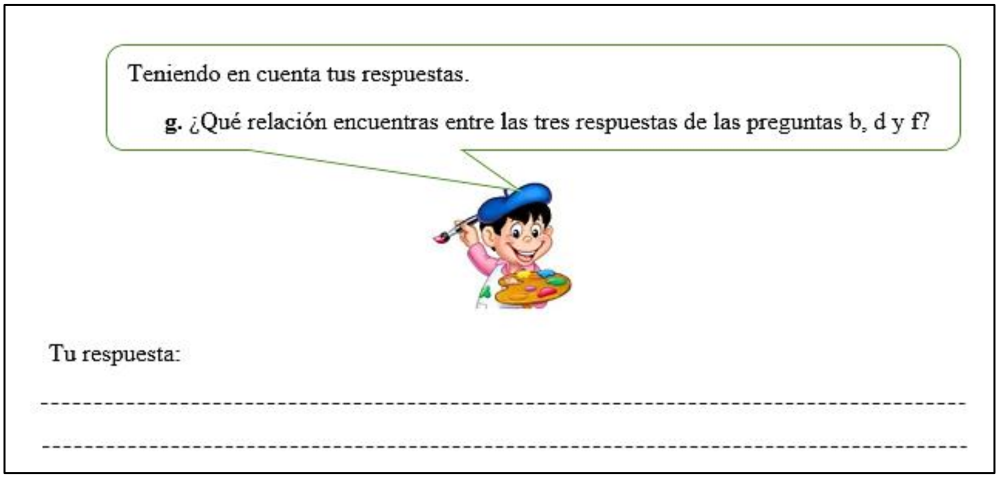


Figura 12. Situación I, tarea 2, literal g.

Este cuestionamiento, permite la comparación de las últimas preguntas de cada caso C1, C2 y C3, para que se reconozca un patrón de respuesta, el cual es estar cinco veces entre unas fichas determinadas; así, esta última relación entre cantidades propone el acercamiento al concepto de razón, a partir de la observación y el conteo.

Fases que intervienen en la tarea 2:

Acción: a medida que el estudiante busque las fichas semejantes a una ficha dada (C1, C2, C3), puede toparse con otras fichas del mismo color, pero al compararlas detenidamente, se dará cuenta que sus lados no son correspondientes como es el caso de los triángulos amarillos, es decir, no serán figuras semejantes a pesar de tener el mismo color.

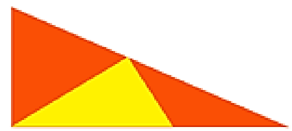
Formulación: en esta tarea se requiere que el estudiante identifique o reconozca aspectos en común (aproximación al concepto de razón) entre las respuestas cuando se les compare o en la medida en que se desarrolle los ítems, de esta manera el estudiante tendrá que retomar sus respuestas y comunicará por escrito la relación o relaciones encontradas.

En la **tarea 3**: **COMPARANDO CANTIDADES DEL COLOR AMARILLO Y NARANJA**. No es necesario que el rompecabezas se encuentre armado; en primera medida se pide buscar y analizar una figura dada con características dadas en un recuadro, como información previa que servirá para completar una tabla como se muestra a continuación en la figura 13.

TAREA 3. COMPARANDO CANTIDADES DEL COLOR AMARILLO Y NARANJA.

Busca la siguiente ficha en la figura armada, lee la nota del recuadro y analiza la información dada.

Nota: Por un triángulo de color amarillo hay dos triángulos de color naranja.



a. Teniendo en cuenta la información anterior completa la siguiente tabla:

Número de Triángulos amarillos	Número de triángulos naranjas	Escribe con tus palabras la relación	Representación de la relación o razón en números
1	2	*Por un triángulo de color amarillo hay dos triángulos de color naranja.*	1:3 o $\frac{1}{3}$ *(se lee: una de cada tres)*
2			
3			
	8		
30			

Figura 13. Situación I, tarea 3, literal a.

En la tabla que se pide completar hay tres columnas, en las cuales las dos primeras existe una relación entre el número de triángulos amarillos y el número de triángulos naranja, mostrando una dependencia de unas cantidades con otras (ejemplo: *por un triángulo de color amarillo, hay dos triángulos de color naranja*), que hace referencia a la proporcionalidad directa, sin embargo no es necesario presentar que es una proporcionalidad directa, lo que se espera es que el aprendiz logre identificar y comprender la relación mencionada por medio de la información dada. De esta manera podrá escribir los números correspondientes en las dos primeras columnas.

En las dos segundas columnas, se requiere escribir las relaciones establecidas en palabras del estudiante y escribir la relación en una representación numérica (fracciones) como última medida. Nótese que en la segunda fila de la tabla hay un ejemplo que también servirá de apoyo.

Para finalizar esta tarea, se genera la siguiente pregunta del literal b que aparece en la figura 14. Según la respuesta a esta cuestión, se evidenciará la comprensión correcta o errada del estudiante para satisfacer el propósito de esta situación I.

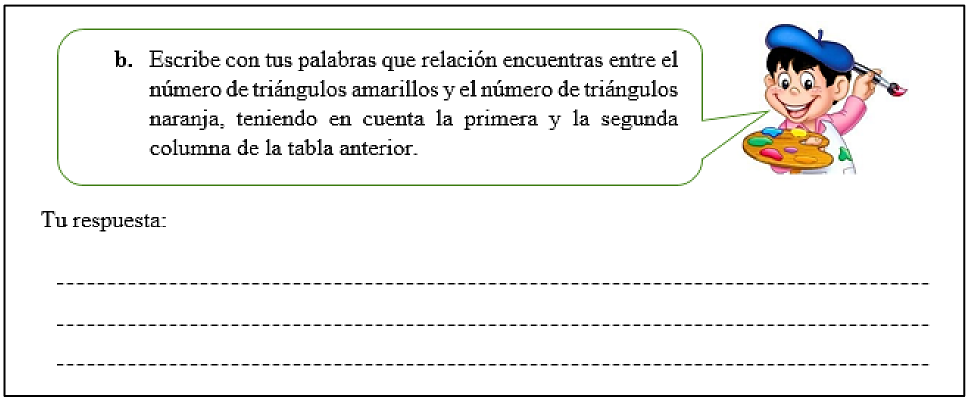


Figura 14. Situación I, tarea 3, literal b.

Cuando el educando comprenda las relaciones determinadas con la información, las pueda escribir haciendo uso del lenguaje natural y las represente numéricamente. Se está aproximando al concepto de razón que se propone en este trabajo.

Fases que intervienen en la tarea 3:

Formulación: esta tarea permite que el estudiante tome en cuenta una información dada sobre relaciones entre dos cantidades, la interprete para lograr encontrar más relaciones solicitadas, las cuales expresará en forma escrita y verbal durante la puesta en acto de la situación en clase.

La **tarea 4: "HACIENDO MIS PROPIAS COMPARACIONES DE CANTIDADES DEL COLORES EN FICHAS"**, es similar a la tarea 3 porque se requiere hacer comparaciones de figuras con respecto a sus colores por parte del estudiante. Se le aclara al estudiante que no pueden ser las mismas figuras que se utilizaron en la tarea 3, sino que es él quien debe elegir con que figuras del rompecabezas va a trabajar, de las cuales deben ser dos.

TAREA 4. HACIENDO MIS PROPIAS COMPARACIONES DE CANTIDADES DEL COLORES EN FICHAS.

a. Si desarmaste la figura, ármala nuevamente. Luego escoge y reúne fichas de otros colores y sigue haciendo comparaciones como en la tarea 3 utilizando la siguiente tabla.

Nota: apóyate observando la imagen 1

Número de Figuras **m** (Pinta aquí el color)	Número de la figuras **n** (Pinta aquí el color)	Escribe con tus palabras la relación	Representación de la relación o **razón**

Figura 15. Situación I, tarea 4, literal a.

De acuerdo a lo anterior, un ejemplo es tomar las fichas de color café y las fichas de color verde, para realizar relaciones como: *por una ficha de color verde, hay cuatro fichas de color café o viceversa.* Otro ejemplo puede ser escoger fichas de color café y blanco, para establecer una relación como: *por cada tres fichas de color blanco, hay cuatro fichas de color café o viceversa.*

Esta tarea ejercita de algún modo lo aprendido en las tareas anteriores y le exige al estudiante a establecer sus propias relaciones teniendo en cuenta el medio que se le está ofreciendo.

Fases que intervienen en la tarea 4:

Formulación: teniendo en cuenta el análisis anterior en esta última tarea, es evidente que los estudiantes tienen que poner en práctica lo que han aprendido hasta el momento en el proceso de esta situación I, por lo cual al pedirles que propongan sus propias comparaciones haciendo uso de las fichas y apoyándose en ejemplo anterior en la tarea 3, está indicando la capacidad de los educandos para formular o crear sus propias comparaciones, sin embargo deben tener en cuenta talantes indicados como: escoger solo dos colores y no necesariamente se deben comparar triángulos.

4.2.2 Análisis a priori de la situación II: Mariposas en el jardín.

La siguiente tabla despliega los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño que están en marcha durante la experimentación de la situación II.

Situación II: mariposas en el jardín

Propósito: hacer una aproximación al concepto de proporción a partir de la visualización.

Tareas	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Tarea 1. **Ubicando la primera mariposa del muro.**	• Dibujos o figuras geométricas bidimensionales. • Semejanza de figuras. • Dirección, distancia y posición en el espacio. • Nociones de horizontalidad y verticalidad. • Sistemas de coordenadas. • La rotación como transformación geométrica. • Proporcionalidad.	• Comparar y clasificar figuras bidimensionales, de acuerdo con sus componentes y sus características. • Uso de sistemas de coordenadas para ubicar figuras planas u objetos. • Construcción de figuras a partir de condiciones dadas.
Tarea 2. **Comparación de cuadriculas.**	• Semejanza de figuras. • Coeficiente de razón. • Multiplicación.	• Encontrar una relación entre dos magnitudes, a partir de la comparación de los cuadrados correspondientes a cada cuadricula para indicar un coeficiente de razón. • Reconocer semejanza entre figuras.

			• Justificación de relaciones de semejanza y congruencia entre figuras. •
Tarea 3. **Pintando el muro de mariposas.**	**Paso 1**	• Semejanza de figuras. • Números naturales. • Conteo. • Multiplicación de números naturales. • Tablas de frecuencia. • Razón como escalar multiplicativo. • Proporcionalidad directa.	• Comparar y clasificar figuras bidimensionales (las fichas de mariposas), de acuerdo con sus componentes y sus características. • Construcción de figuras a partir de condiciones dadas. • Reconocer semejanza entre figuras. • Identificar un coeficiente de razón multiplicativo cuando se relacionan dos magnitudes (el número de elementos y el número de mariposas). • Describir en lenguaje natural la interpretación de relaciones identificadas anteriormente. • Representar numéricamente razones a partir de la relación del número de elementos y el número de mariposas. • Justificación de resultados para completar tabla de frecuencia. • Identificar una constante de proporcionalidad o razón a partir de la comparación y variación de magnitudes.
	Paso 2	• Números naturales. • Conteo.	• Establecer una relación entre la cantidad de dos magnitudes.

	• Multiplicación de números naturales. •	• Identificar una constante de proporcionalidad o razón entre la cantidad de dos magnitudes. •
Paso 3	• Números naturales. • Conteo. • Multiplicación de números naturales. • Proporcionalidad directa. • Razón como escalar multiplicativo.	• Reconocer la relación entre cantidades de dos magnitudes (la cantidad de mariposas azules y la cantidad de mariposas amarillas). • Descripción y escritura en lenguaje natural la interpretación de relaciones identificadas anteriormente. • Representación numérica de razones a partir de la relación del número de elementos y el número de mariposas. • Establecer una razón general a partir de la interpretación de resultados registrados en una tabla.
Paso 4	• Simplificación de números fraccionarios. • Razón y proporciones geométricas.	• Comparación de figuras bidimensionales. • Construcción de figuras (elementos) a partir de condiciones dadas. • Representación numérica de razones a partir de cantidades de magnitudes. • Comparación de resultados para establecer una razón.
Paso 5	• Razón y proporciones geométricas.	

Tabla 7. Análisis a priori de la situación II.

Descripción situación II:

La situación II, inicia con la lectura sobre la historia de Sara y Miguel quienes contratan a Ángel para que les colabore con la decoración de su jardín, de manera que Ángel les pinte un mural en su jardín. En esta situación, el estudiante ya se ha familiarizado con Ángel, pues ya trabajaron juntos en la primera situación.

Antes de que se propongan las tareas, el estudiante debe comprender que Ángel ya ha realizado un trabajo previo (el dibujo y los trazos de las cuadrículas de la figura 1 y la figura 2) para comenzar a trabajar en el muro.

A partir de la lectura realizada se presentan tres tareas que el estudiante debe empezar a resolver en orden, utilizando el material manipulativo y una guía que contiene la segunda parte de la secuencia, titulada "mariposas en el jardín".

El propósito: hacer una aproximación al concepto de razón y proporción a partir de la visualización y la comparación de magnitudes figuras geométricas.

Los Materiales:

- Guía del estudiante # 2.
- Grupo de fichas de mariposa.
- Imagen: "MARIPOSAS EN EL JARDÍN".
- Lámina metálica verde.

Análisis de cada tarea de la situación II.

En la **terea 1**: "**UBICANDO LA PRIMERA MARIPOSA DEL MURO"**, se espera que el estudiante ubique un grupo de tres fichas de mariposas amarillas sobre la cuadrícula que se ha denominado figura 2, pero esta distribución está definida observando la cuadrícula de la figura 1, es decir, la figura 2 debe ser una figura semejante a la figura 1. De acuerdo a esto, se deben guardan las proporciones respectivas ya que se trata de figuras semejantes, para ello, se hace útil haber nombrado las columnas con letras y las filas con números, facilitando la ubicación de las fichas amarillas. Lo anterior, se representa en la figura 16 que sigue continuación.

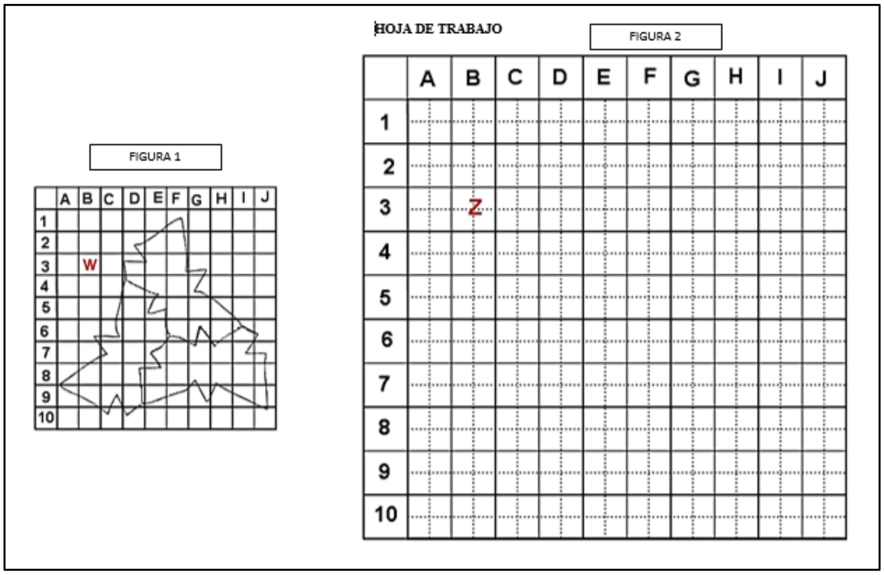


Figura 16. Situación II, hoja de trabajo.

La tarea permite que el estudiante maneje una proporción visual entre ambos planos de cuadriculas con escalas diferentes pero semejantes.

Fases que intervienen en la tarea 1:

Acción: en el intento de la ubicación correcta de las tres fichas, la figura 1 muestra la guía de los espacios correspondientes para colocar las tres fichas escogidas, y la figura 2 posee los espacios de correspondencia, por lo que si una ficha no queda bien puesta, la comparación de ambas figuras servirá de verificación.

En la **terea 2**: “**COMPARACIÓN DE CUADRÍCULAS”**, lo que se quiere es que el aprendiz compare un cuadrado homólogo (cuadrado W y cuadrado Z) de ambas cuadriculas o figuras 1 y 2, para que responsa la siguiente pregunta del literal **a**: *¿Qué relación existe entre estos dos cuadrados?*, de acuerdo a esto, la respuesta correcta seria expresar que el cuadrado W esta contenido cuatro veces en el cuadrado Z, o que W es un cuarto de Z.

En esta tarea, el profesor puede dar la indicación de recortar el cuadrado de la figura 1 para superponerla sobre la figura 2 y así, determinar la relación, sin necesidad de que el profesor dé aún la respuesta.

Teniendo en cuenta que ya se ha encontrado una razón o relación identificada como la cuarta parte entre los cuadrados estudiada en un caso particular, ahora se propone responder la pregunta del literal **b**. *¿De qué manera se relaciona cada cuadrado de la* ***figura 1*** *con los cuadrados de las* ***figura 2****?*, si bien ya hay se ha encontrado una relación, esta misma relación aplica para el resto de los cuadrados de las dos cuadriculas.

Por último, está escrita esta pregunta: **c.** *¿Es correcto afirmar que la figura 2 es el triple de la figura 1? ¿Por qué?* Aquí es correcto contradecir la pregunta, pues como ya se ha estudiado, la figura 2 es el cuádruple de la figura 1, aunque esta pregunta puede conducir a que algunos estudiantes revisen la respuesta que les permite aclarar tal afirmación y argumentarla.

Fases que intervienen en la tarea 2:

Formulación: cada vez que los estudiantes intenten dar solución a una pregunta planteada, deben debatir entre su grupo de trabajo, en este caso encontrar cual es la razón determinada en la colación de los cuadrados homólogos, buscando los argumentos más convincentes.

Validación: esta fase puede ser evidenciada en la medida en que los estudiantes hayan respondido su propia guía de trabajo, tendrán la oportunidad de compartir sus respuestas, de manera que cada grupo pueda defender sus posturas dependiendo de sus razonamientos y estrategias utilizadas.

En la **tarea 3**, denominada: "**PINTANDO EL MURO DE MARIPOSAS"**. Para dar inicio, se da a conocer los materiales que se deben tener a disponibilidad para cumplir con dicha tarea 3, los cuales son: las fichas completas de mariposas (46 mariposas) que constan de cuatro tríos azules y doce tríos amarillos, una lámina verde metálica y el cuadro de pintura que se llama "mariposas en el jardín".

Después de presentar los materiales, se procede a seguir una serie de pasos que van enumerados del uno al cinco; en cada uno de estos pasos se van formulando preguntas hacia los estudiantes, aquellas son las que a continuación se van analizar.

En el **paso 1**, se debe buscar tres mariposas amarillas que tengan los mismos colores, en el ejemplo aparecen tres mariposas amarillas con rojo, pero no se pueden formar de otros colores, lo que interesa es que logren encajar. La indicación en la guía del estudiante se presenta de la siguiente manera:

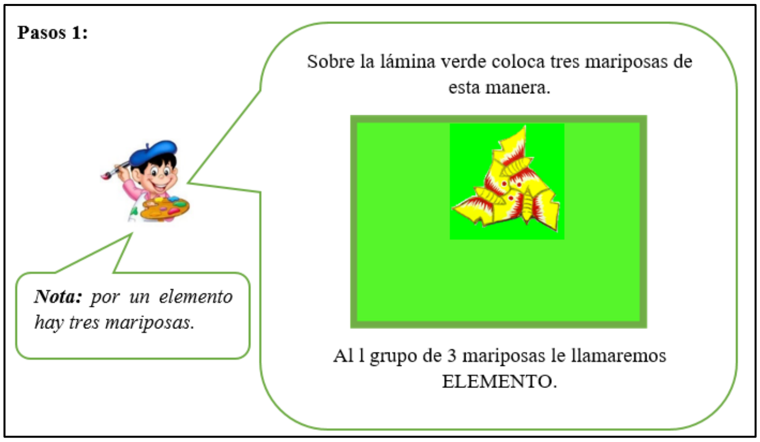


Figura 17. Situación II, hoja de trabajo.

Los estudiantes deben comprenden muy bien que un grupo de tres mariposas es denominado como **elemento**, así, se prosigue a completar la siguiente tabla:

a. Teniendo en cuenta la información anterior completa la siguiente tabla:

Número de elementos	Número de mariposas	Escribe con tus palabras la relación	Representación numérica de la relación o **razón**
1	3	*Por un elemento se tiene tres mariposas*	$1:3$ ó $\frac{1}{3}$
2			$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	12		$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$
9			$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	30		$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	48		$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$

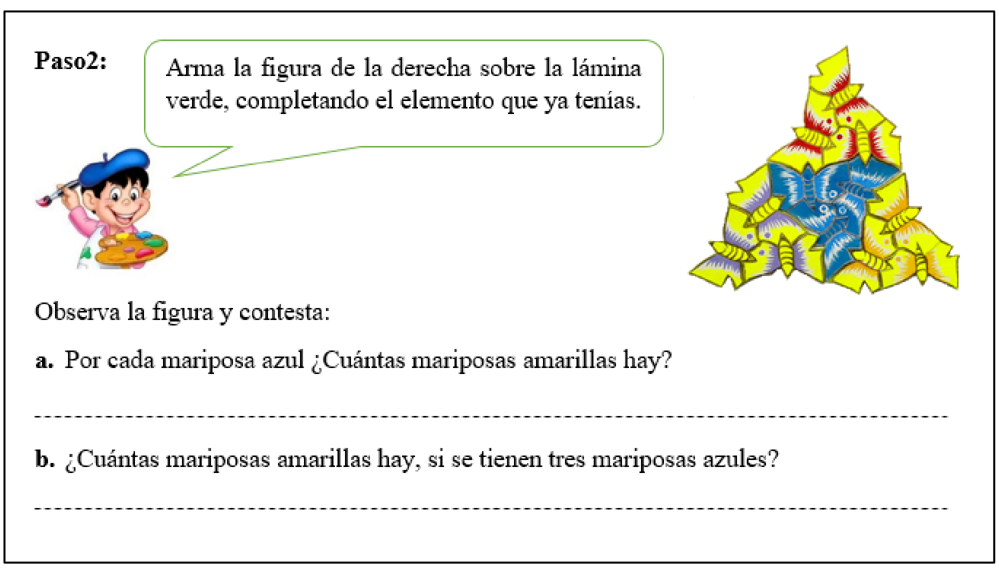
Figura 18. Situación II, tarea 3, paso 1, literal a.

Como se puede apreciar en la fila dos de la tabla, se ha dado un ejemplo, este es indicado con la intervención del profesor a cargo, de manera que sirva de apoyo para comenzar a deducir y escribir la información que falta. Lo que se quiere es que el estudiante logre descubrir las cantidades de mariposas contenidas por elemento, teniendo una información dada que le servirá para realizar proporciones, por ejemplo: si por cada elemento hay tres mariposas, entonces por cada dos elementos habrá seis mariposas y así sucesivamente.

Las proporciones que se han podido descubrir, permitirán hallar la razón de proporcionalidad entre ellas, para ello surge la cuestión **b.** *¿Qué relación encuentras entre los resultados de las dos primeras columnas de la tabla anterior?*, aquí es donde los estudiantes tendrán la posibilidad de establecer dicha razón o relación como cada seis veces.

La siguiente pregunta finaliza este paso uno*:* **c.** *¿Tuviste algo más que la información dada para completar la tabla? Escríbelo.* La intención de esta última es conocer si existe alguna estrategia o apoyo extra además de la información dada para cumplir con lo pedido.

En el **segundo paso**, ocurre algo similar con la tarea anterior, sin embargo en esta ocasión se enmarca la distinción entre los dos colores principales: azul y amarillo de las fichas de mariposas, cabe aclarar que los demás colores se tuvieron en cuenta para resaltar detalles como parte de una obra artística, además, ordena las fichas teniendo en cuenta estos detalles para ir formando poco a poco el muro total, ya que no siempre encajarán perfectamente.


Paso2:

Arma la figura de la derecha sobre la lámina verde, completando el elemento que ya tenías.

Observa la figura y contesta:

a. Por cada mariposa azul ¿Cuántas mariposas amarillas hay?

----

b. ¿Cuántas mariposas amarillas hay, si se tienen tres mariposas azules?

Figura 19. Situación II, tarea 3, paso 2, literal a y b.

En la figura 18, las preguntas tienen la misma intencionalidad del paso uno en cuanto de hallar proporciones entre cantidades de mariposas, pero esta vez entre la dependencia entre dos colores (azul y amarillo), es decir, comprender que por cada cantidad de un mariposas azules, habrá cierta cantidad de mariposas amarillas, reconociendo que las mariposas azules también forman elementos como se vio en el primer paso.

Posteriormente se dispone a los grupos de estudiantes que completen nuevamente una tabla, la cual conforma el literal **c**, ejercitando lo aprendido con la integración de nuevos objetos (mariposas azules) y por último en el literal **d,** redescubrir la razón de proporcionalidad que se está movilizando, definida en cada seis veces.

Paso 3, en este paso se tiene como propósito comparar dos muros: un muro triangular y el muro de las mariposas, para establecer proporciones entre dichos muros.

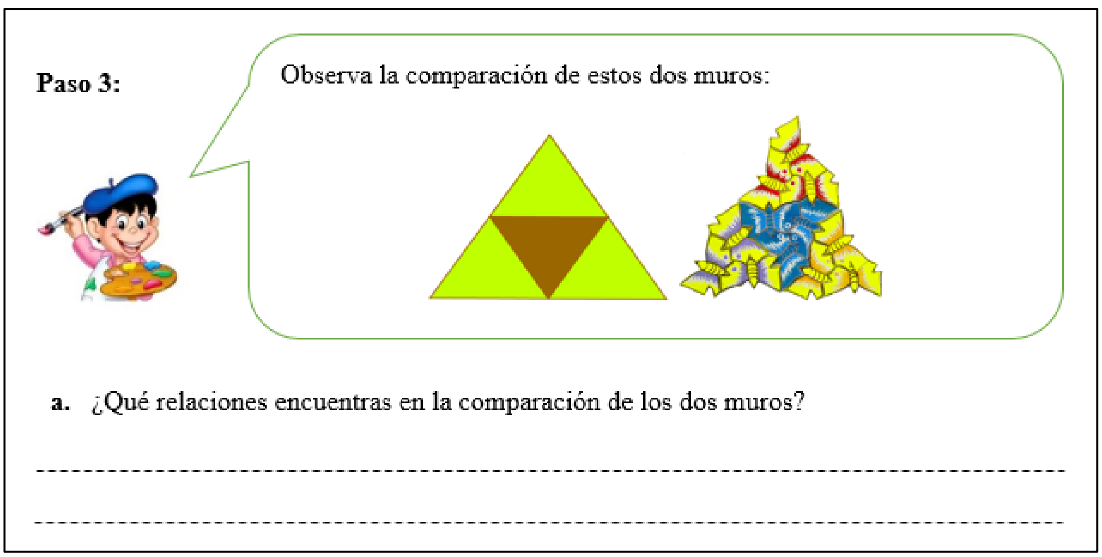


Figura 20. Situación II, tarea 3, paso 3, literal a.

En el interrogante de la figura 20, se pretende en primera medida que el estudiante relacione los dos muros por su forma geométrica (triángulo), de manera que esto le permita corresponder el triángulo café con el trio de mariposas azules y cada triangulo verde con los tríos de mariposas amarillas como se puede observar en la figura 20. En caso de que el grupo de estudiantes se desvíen del propósito, el profesor deberá intervenir con preguntas que dirijan a los estudiantes a establecer las mencionadas relaciones entre los dos muros.

En tanto que el grupo satisfaga la pregunta del literal inicial, se prosigue con los literales **b** y **c** respectivamente; en los cuales se sitúa a los estudiantes en la construcción del muro de mariposas, sugiriéndole adoptar la forma triangular que tiene el muro dado de colores verde y café, no obstante, incluyendo la analogía entre los colores de ambas construcciones (azul-café y verde-amarillo) como se muestra a continuación en la figura 21 y 22.

b. Ahora, sobre la lámina verde y con las mariposas, arma un muro parecido al que aparece en la siguiente tabla y termina de completar la tabla:

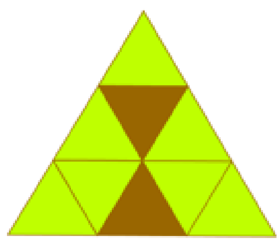
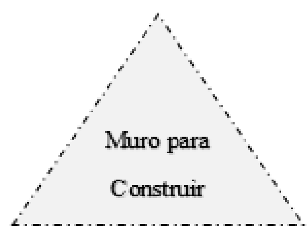
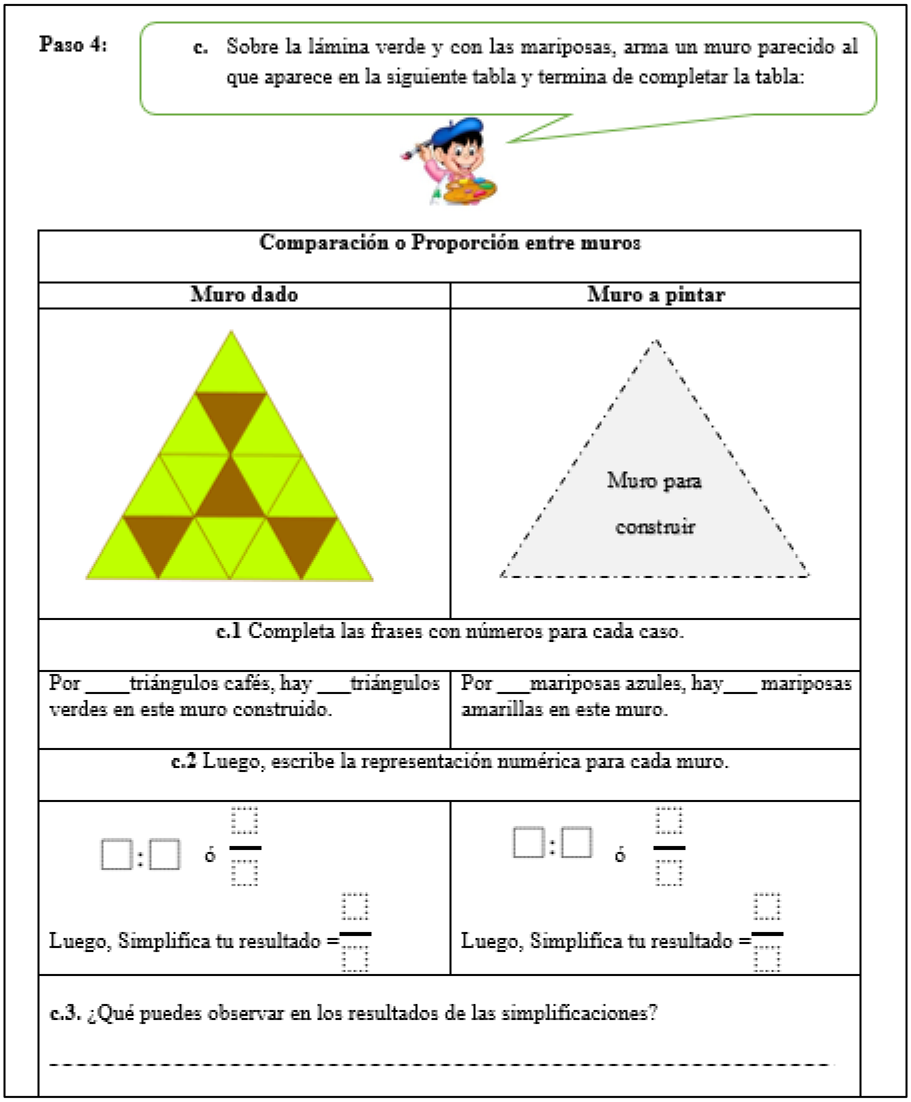
Comparación o Proporción entre muros	
Muro dado	**Muro a pintar**
	
b.1 Completa las frases con números para cada muro.	
Por ____triángulos cafés, hay ___triángulos verdes en este muro construido.	Por ___mariposas azules, hay___ mariposas amarillas en este muro.
b.2 Luego, escribe la representación numérica para cada muro.	
$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$ Luego, Simplifica tu resultado $=\frac{\square}{\square}$	$\square:\square$ ó $\frac{\square}{\square}$ Luego, Simplifica tu resultado $=\frac{\square}{\square}$
b.3. ¿Qué puedes observar en los resultados de ambas simplificaciones? --	

Figura 21. Situación II, tarea 3, paso 3, literal b.



Paso 4:

c. Sobre la lámina verde y con las mariposas, arma un muro parecido al que aparece en la siguiente tabla y termina de completar la tabla:

Comparación o Proporción entre muros	
Muro dado	**Muro a pintar**
	Muro para construir
c.1 Completa las frases con números para cada caso.	
Por ____triángulos cafés, hay ___triángulos verdes en este muro construido.	Por ___mariposas azules, hay___ mariposas amarillas en este muro.
c.2 Luego, escribe la representación numérica para cada muro.	
☐:☐ ó ☐/☐ Luego, Simplifica tu resultado = ☐/☐	☐:☐ ó ☐/☐ Luego, Simplifica tu resultado = ☐/☐
c.3. ¿Qué puedes observar en los resultados de las simplificaciones? ---	

Figura 22. Situación II, tarea 3, paso 4, literal c.

Como se puede apreciar la figura 22 constituye el paso 4, pero en ambos casos (pasos 3 y 4) se tiene básicamente el mismo propósito de construcción haciendo uso de las fichas de mariposas, motivando a que se complete los espacios vacíos de las tablas en cada caso, en los cuales se establecen y se evidencia razones y proporciones entre figuras. Todo esto como resultado a lo largo de los planteamientos y soluciones de las tareas anteriores.

Finalmente el **paso 5** es el cierre de la situación II, aquí se da por finalizada la pared de las mariposas en el jardín, no obstante se requiere responder al último interrogante para concluir el proceso, como aparece en la figura 23 seguidamente:

Paso 5: Al terminar todo el paso anterior (paso 4) debes tener un muro como se muestra a continuación:

a. En tus palabras escribe como se ha logrado comparar el muro de triángulos verdes y el muro de las mariposas ¿qué logras concluir de esto?

Figura 22. Situación II, tarea 3, paso 5.

En lo que se refiere a la respuesta a esta pregunta, es una confirmación exitosa del tiempo dedicado al desarrollo de toda la situación II e incluso de la ejercitación de la situación I; de tal manera que los estudiantes hayan comprendido a determinar razones y proporciones como producto de la comparación entre figuras, teniendo en cuenta la composición de colores, posiciones, formas y cantidades.

Fases que intervienen en la tarea 3:

Institucionalización: en esta última etapa de la situación II, el profesor es el encargado de formalizar los resultados obtenidos de los estudiantes, organizando y presentado el concepto matemático que se encuentra como trasfondo en toda la situación.

4.3 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS SITUACIONES I Y II

En este capítulo se presentan los resultados de la experimentación de la secuencia didáctica implementada, que como bien se mencionó, no hay un análisis a posteriori propiamente de los resultados de una puesta en acto con estudiantes, sino con algunos profesores del área de matemáticas que tienen a cargo el grado escolar a la cual va dirigida la secuencia; entre tanto permite concretar por ahora solo el diseño de la secuencia didáctica.

Contexto de la experimentación.

La fase de experimentación de la secuencia didáctica, tuvo como participantes dos profesoras de matemáticas, las cuales enseñan en el grado quinto de Educación Básica; una de ellas es docente en la Institución Educativa Centro Docente Cauca, y la otra docente trabaja en la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta; ambos ubicados en el municipio de Santander de Quilichao, Cauca.

Para la selección de las maestras se tuvo en cuenta su disponibilidad y sus intereses que actualmente existen con respecto a su enseñanza en la Educación Básica. Se concreta una cita con cada una para realizar una presentación de la problemática y la justificación del trabajo.

Una vez hecho esto, ellas afirman estar interesadas en la propuesta de grado y admiten dar apoyo para el desarrollo de la valoración de las situaciones del diseño de la SD, de esta manera, reciben el material en los siguientes días para evaluarlo.

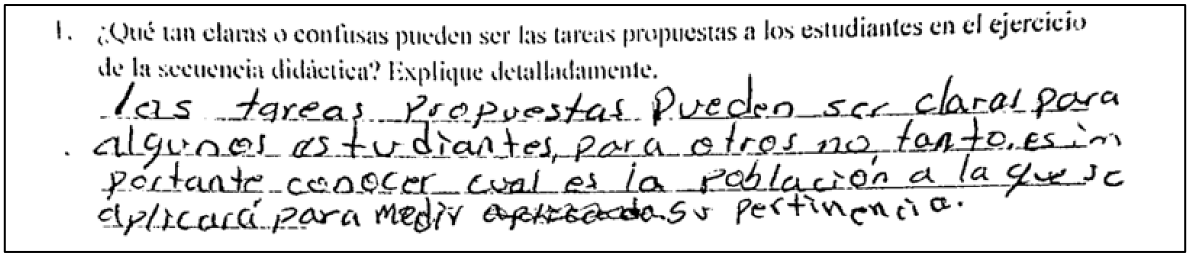
El material que se entrega hace referencia a lo siguiente: un documento con el diseño escrito completo de la secuencia, que son dos guías correspondientes a las dos situaciones: "Colorín coraza" y "mariposas en el jardín" (ver anexos 1 y 2), una hoja de trabajo (ver anexo 3); por otra parte, material manipulativo, un documento con la estructura general de la secuencia y los contenidos matemáticos, además de las expectativas de desempeño; finalmente, la entrevista en forma de cuestionario escrito con siete preguntas.

Después de esto, en dos semanas se recogieron los resultados aportados por las docentes.

Análisis de las entrevistas

Pregunta 1

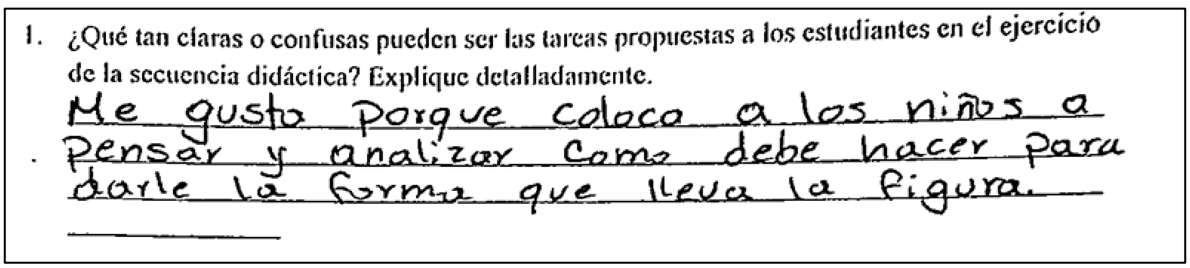
¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.



1. ¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.

las tareas propuestas pueden ser claras para algunos estudiantes, para otros no tanto, es importante conocer cual es la población a la que se aplicará para medir ~~aplicada~~ su pertinencia.

Figura 23. Entrevista docente 1. Pregunta 1.



1. ¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.

Me gusto porque coloca a los niños a pensar y analizar como debe hacer para darle la forma que lleva la figura.

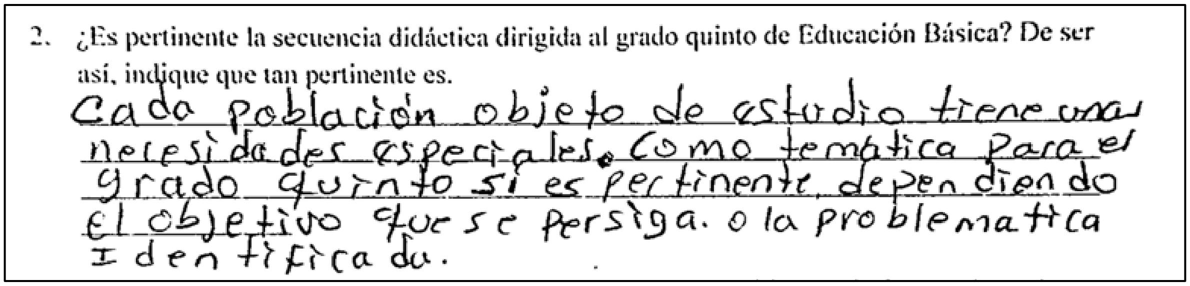
Figura 24. Entrevista docente 2. Pregunta 1.

De acuerdo a lo anterior, se evidencia el contraste entre ambas respuestas, por un lado existe la incertidumbre de saber si las tareas son realmente claras o no para todos los estudiantes, por tal motivo sugiere especificar un grupo de estudiantes para aplicar las situaciones y lograr dar cuenta de ello. La otra maestra, no presenta tener en cuenta lo anterior, más bien se puede inferir por su respuesta que las tareas no serán confusas en la compresión a la hora de la resolución de los educandos.

Estos aportes permiten reflexionar acerca de dar continuidad con el diseño y completarlo con la puesta en acto en un aula de clase y realizar un análisis más profundo.

Pregunta 2

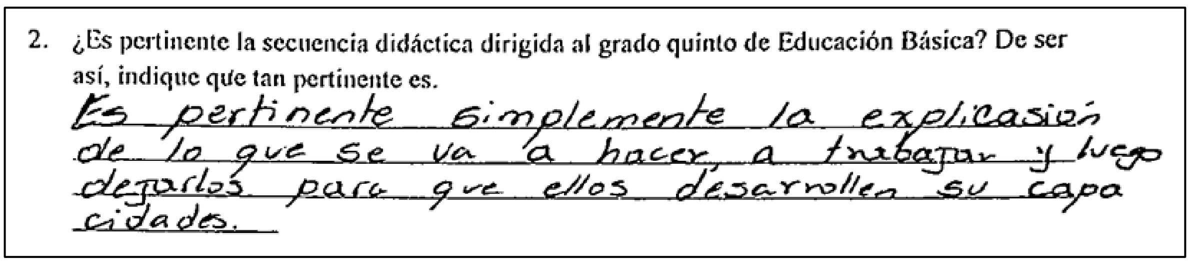
¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.



2. ¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.

Cada población objeto de estudio tiene una necesidades especiales. Como temática para el grado quinto sí es pertinente, dependiendo el objetivo que se persiga. o la problematica Identificada.

Figura 25. Entrevista docente 1. Pregunta 2.



2. ¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.

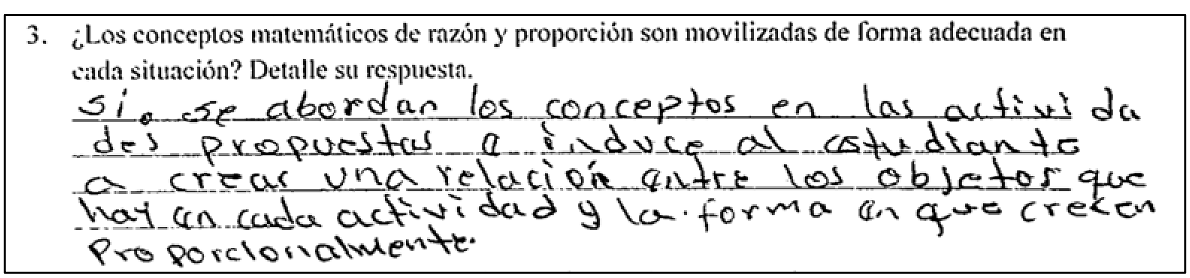
Es pertinente simplemente la explicasión de lo que se va a hacer, a trabajar y luego dejarlos para que ellos desarrollen su capacidades.

Figura 26. Entrevista docente 2. Pregunta 2.

Según ambas respuestas, es notorio que las maestras convergen en la pertinencia de la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica, que aunque hay pertinencia y un objetivo, se puede indagar y reconocer diferentes necesidades dependiendo del gripo de trabajo, donde se consideren las capacidades de cada niño.

Pregunta 3

¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.



3. ¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.

Sí, se abordan los conceptos en las actividades propuestas a induce al estudiante a crear una relación entre los objetos que hay en cada actividad y la forma en que crecen proporcionalmente.

Figura 27. Entrevista docente 1. Pregunta 3.

3. ¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.

Si, porque los coloca a analizar las figuras para mirar sus formas, tamaños y colores.

Figura 28. Entrevista docente 2. Pregunta 3.

En relación con lo anterior, se preserva la movilización de los conceptos de razón y proporción en las situaciones y por ende en las tareas que se presentan, visto que hay mutuo acuerdo en las respuestas de las docentes, mencionando algunas relaciones como la comparación de formas, tamaños, colores en los objetos y figuras geométricas elaboradas.

Pregunta 4

¿Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta?

4. Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta.

Hay coherencia entre el concepto de propor cionalidad y las actividades propuestas, pero no se puede decir con certeza si son alcan zables o coherentes sin conocer cual es el objetivo que se persigue.

Figura 29. Entrevista docente 1. Pregunta 4.

4. Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta.

Si, este trabajo me gusto para realizar con los niños.

Figura 30. Entrevista docente 2. Pregunta 4.

Como puede observarse, la primera respuesta indica que tuvo en cuenta el documento entregado, referente a los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño, sin embargo, no tiene convencimiento de que sean alcanzables y coherentes los elementos que se han comparado para trabajar durante la futura aplicación de la secuencia con estudiantes y desde la experiencia actual de las profesoras al desarrollarla; lo anterior, porque se avista en ella no tener claridad acerca del objetivo del trabajo, a pesar de que en el documento que contiene la tabla de contenidos matemáticos y expectativas de desempeño se incluye el propósito de la respectivas situaciones I y II.

Por otra parte, la segunda profesora no responde a la pregunta propuesta, debido a que solo menciona el gusto que tiene por la secuencia y su posibilidad de trabajarla con sus estudiantes; en tal sentido se puede considerar que la pertinente lectura de los contenidos matemáticos y expectativas de desempeño elaboradas para la secuencia, ha provocado una respuesta general, por tanto era necesario precisar un poco más la pregunta a la maestra.

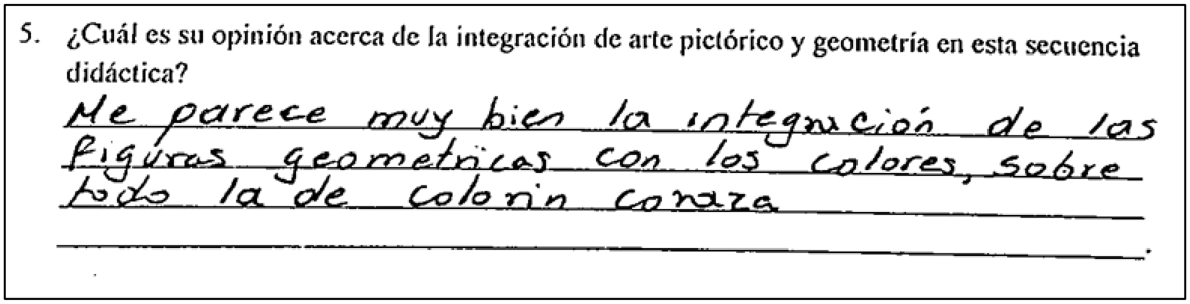
Pregunta 5

¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?

5. ¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?

es interesante la propuesta. pero vuelvo y hago enfasis en el tipo de población a la que se aplicará ya que pienso que las actividades son mas llamativas si se relacionan con el contexto.

Figura 31. Entrevista docente 1. Pregunta 5.


5. ¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?

Me parece muy bien la integración de las figuras geometricas con los colores, sobre todo la de colorin coraza

Figura 32. Entrevista docente 2. Pregunta 2.

Con respecto a la opinión inicial, hay continuación con la sugerencia de determinar un grupo de estudiantes en especial, pues esto permitiría estudiar las formar de aprendizaje en ellos y tener en cuenta su contexto, con el fin de adecuar o reelaborar la propuesta que integra arte pictórico y geometría para garantizar la apreciación de la SD por parte de los educandos; no obstante, la presente no carece de interés hacia la maestra. Por otro lado, en una segunda opinión se manifiesta la valoración del diseño en cuanto al material manipulativo elaborado, destacando a la situación I.

Teniendo en cuenta lo anterior, ambas opiniones no se concentran en los elementos aportantes de la geometría y el arte pictórico que se utilizaron para la construcción de las obras artísticas que se prepararon, como lo es “colorín coraza” en la situación I y “mariposas en el jardín” referente a la situación II.

En el caso de la situación I: para trazar a “colorín coraza” se utilizó la construcción de una espiral logarítmica y la armonía de los colores tienen coherencia con el progreso de cada tarea perteneciente a esta primera. En el caso de la situación II, la experiencia de desarrollar cada tarea, se podrá notar el uso de mosaicos con tres mariposas para simular triángulos equiláteros hasta conformar un teselado finalizado en forma triangular; cabe destacar que los colores en la fichas de mariposa son convencionales para la ubicación de las mismas, durante la lectura y comprensión de cada tarea propuesta en la respectiva situación.

Pregunta 6

Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí__________ No__________

Porqué

6. Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí X No ___
Porqué como teórica del grado quinto la secuencia presenta unas actividades claras y dinamiza el aprendizaje del concepto.

Figura 33. Entrevista docente 1. Pregunta 6.

6. Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí X No ___
Porqué Es una forma creativa y amena de orientar las clases y esto hace que los niños se concentren más en lo que están haciendo,

Figura 34. Entrevista docente 2. Pregunta 6.

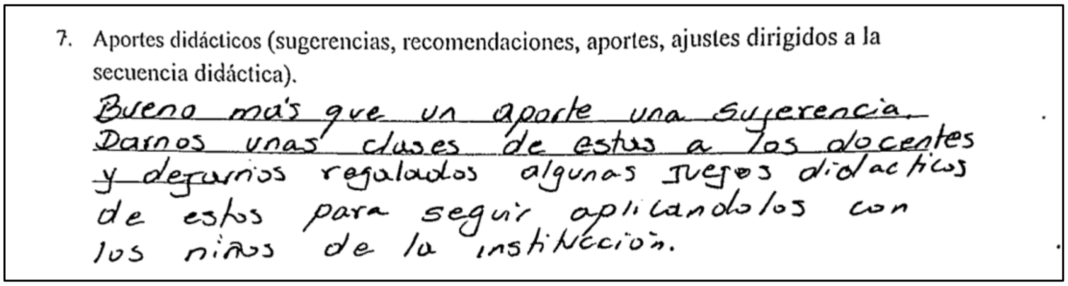
Como se puede evidenciar, la propuesta de trabajo de grado ha sido aceptada por las ambas docentes; en sus breves apreciaciones finales se confirma que hay movilización del concepto matemático de proporcionalidad del cual se quiere fomentar su aprendizaje, de igual manera se rescata el dinamismo, la fácil comprensión de las situaciones y la creatividad en la elaboración de la secuencia; concertando la pertinencia al grado quinto de Educación Básica

Pregunta 7

Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).

7. Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).
Es importante poder utilizar un lenguaje más sencillo y comprensible para los niños ya que algunas preguntas de las que hay en las actividades pueden no ser tan claras, o demaciado abiertas. las dos actividades que presenta la secuencia son muy similares, sería interesante que se pudiera integrar más la parte geométrica al concepto de proporcionalidad diferenciando un poco más la actividad 1 de la 2 a la vez que se integran los conceptos.

Figura 35. Entrevista docente 1. Pregunta 7.



7. Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).

Bueno más que un aporte una sugerencia. Darnos unas clases de estos a los docentes y dejarnos regalados algunos juegos didácticos de estos para seguir aplicandolos con los niños de la institución.

Figura 36. Entrevista docente 2. Pregunta 7.

En última instancia, se han expuesto las aportaciones de cada una. La primera hace énfasis en obtener un escrito más simple a la hora de redactar las tareas hacia los estudiantes, confirmando su respuesta a la pregunta 1, pues la redacción de la secuencia didáctica puede ser clara o confusa para algunos de los niños participantes a futuro; además de esto, sugiere replantear las dos situaciones, debido a que a su parecer son muy similares.

La segunda maestra se inclina más bien por mostrar un interés en dar a conocer la presente propuesta a sus compañeros de profesión en la institución en la cual imparten su enseñanza, y adquirir material referente a lo abordado para complementar sus clases de matemáticas.

A modo de conclusión referente al análisis de las entrevistas realizadas, las opiniones de las maestras aportan en la reflexión continua de la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos como es el caso de las RPP, sus observaciones hacia el trabajo realizado influyen en las posibles modificaciones o reconstrucciones de todo el diseño de la SD con respecto a la redacción, contexto propuesto, rangos de dificultad y coherencia de tareas, la muestra de participantes, entre otros.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES FINALES

CONCLUSIONES

En este apartado se pone en manifiesto las conclusiones teniendo en cuenta la pregunta de investigación como sigue: ¿Qué estrategias se pueden emplear en una propuesta de aula para que los estudiantes de grado quinto de Educación Básica, puedan profundizar en el concepto de proporcionalidad desde lo geométrico a través la integración de la geometría y el arte pictórico?

Para procurar una respuesta a la pregunta anterior, se presentaron tres objetivos específicos; el primero hace referencia a la revisión de los referentes teóricos, para seleccionar los elementos más relevantes en el aprendizaje de la proporcionalidad en el grado quinto desde el punto de vista geométrico y pictórico.

En cuanto a este primer objetivo específico se concluye lo siguiente:

- La teoría euclidiana de la razón y la proporción del libro *Elementos* es un aporte que se destaca por mantener la idea de razón y proporción utilizando magnitudes geométricas generalizadas, sin que la idea de número intervenga directamente. Sin embargo no se hallan en la geometría euclidiana representación, mediante figuras de la razón, concebida como relación, por tanto no lo hay de la proporción; las figuras que existen en la actualidad son de carácter propio o impropio al libro de los Elementos.
- Las fuentes curriculares corroboran la necesidad de estudiar, integrar otras disciplinas y generar propuestas de enseñanza y aprendizaje acerca del razonamiento proporcional en los estudiantes de Educación Básica, puesto que el aprendizaje del concepto de razón y proporción es importante para introducir la variedad de otros conceptos matemáticos dependientes a estos, desprendiendo una gran red conceptual referente a la proporcionalidad.
- Se logró reconocer y adquirir elementos teóricos fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con respecto a la distinción entre a una situación a-didáctica

de una situación didáctica y las fases que caracterizan estos tipos situaciones; acción, formulación, validación e institucionalización.

- Se destaca el papel del docente y los estudiantes para influir en el desarrollo de conocimientos propios, debido a que se tiene en cuenta que la experiencia individual en entornos culturales, se complementa con la experiencia en las aulas de clase, de tal modo que esta última posibilita la institucionalización de saberes antepuestos, estableciendo así un dialogo entre ambas partes y constituyendo conocimiento en cada individuo.
- La metodología implementada para la elaboración del trabajo denominada micro ingeniería didáctica, adecuó la organización y orientación de todos los elementos a tener en cuenta según las fases que presenta la misma, a pesar de esto, cabe anotar que en la cuarta fase referente al análisis a posteriori y evaluación, no se a bordo de la manera como lo propone Artigue (1995), puesto que la secuencia didáctica no fue aplicada para analizar los datos con las respuestas de estudiantes del grado escolar a los cuales está dirigida.

Con respecto al segundo objetivo, en referencia a articular en una Secuencia Didáctica algunos de los elementos teóricos seleccionados, que integre a su vez el arte pictórico y la geometría como una estrategia que favorezca el aprendizaje de la proporcionalidad. Se obtiene lo siguiente:

- La concepción de la secuencia permitió estudiar y seleccionar elementos representativos de la geometría y el arte pictórico, de manera que se lograran composiciones artísticas genuinas, donde se aprecia su esteticismo y armonización de colores con las figuras geométricas, de lo cual la presencia de la naturaleza ayuda a organizar y se evidencia en la presentación de cada obra en ambas situaciones; todo esto a su vez dirigen un trasfondo matemático importante.
- El estudio del objeto matemático permitió preparar la presentación y orden adecuado de los conceptos de razón y proporción, puesto que el concepto de razón precede al concepto de proporción, de este modo la primera situación hace énfasis en introducir el concepto de razón y la segunda situación comprende el aprendizaje del concepto de proporción.

- El diseño de cada una de las tareas que constituyen las respectivas situaciones I y II dan cuenta de las fases de acción, formulación y validación, que fueron útiles como guía para su elaboración, de este modo se identifican momentos determinados que se trabajan con los estudiantes.
- Por último se logra evidenciar que es posible y significativo articular todos los aspectos mencionados para generar una propuesta de aprendizaje diferente a las convencionales que sugieren el tratamiento aritmético acerca del estudio de la proporcionalidad.

En cuanto al tercer objetivo específico que se refiere a identificar las ventajas y limitaciones de la Secuencia Didáctica para la aproximación del concepto de proporcionalidad. Se tiene que:

- La integración de arte pictórico en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos conduce a reformular estrategias en la planificación de clases por parte de los docentes, pues la manipulación de elementos artísticos ayuda a desplegar la oferta de formas, coordinación de colores y objetos de un contexto determinado, para progresar en la capacidad creativa de los individuos participantes de nuevas experiencias en clase, como los son los estudiantes y los maestros; a esto se le suma el carácter dinámico y atractivo que posee.
- Se redescubre la necesidad de colaboración en las aulas acerca de recursos pedagógicos, con respecto al diseño de situaciones con sentido a la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos; por lo que, se destaca la pertinencia de esta propuesta.
- Es preciso identificar y seleccionar una población en particular para reconocer y estudiar el contexto de la misma, para futuras propuestas o proyectos educativos similares, considerando que todos los grupos de estudiantes no están inmersos en los mismos contextos sociales y culturales, por tanto sus necesidades de aprendizaje requieren de explorar y plantear otras estrategias.
- La ausencia de aplicación de la secuencia didáctica en un aula de clase omite aspectos fundamentales para analizar los datos con las respuestas de estudiantes del grado escolar a los cuales está dirigida, pues estos resultados mejorarían la confrontación

de los análisis a priori con los análisis a posteriori que se proponen como última fase en la metodología implementada en el presente trabajo.

Conectar conceptos matemáticos con el área artística puede parecer complicado, pero durante el proceso se trae a cuenta que el arte hace parte del entorno de los seres humanos desde hace mucho tiempo, lo cual indica que es posible construir conocimientos a disposición de la educación, donde en este trabajo se hace precisión al interés de impulsar el aprendizaje del concepto la proporcionalidad en la Educación Básica, no obstante en todo el diseño propuesto fue necesario profundizar en varios campos de conocimientos para alcanzar los objetivos que fueron propuestos.

Finalmente este trabajo de pregrado se postula como introductorio para la construcción de nuevas propuestas que compartan el mismo interés o que relaboren el presente diseño expuesto, integrando geometría y arte pictórico para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos comprendidos dentro de las Razones, proporciones y Proporcionalidad.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M. (2010). *Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica.* Curso dictado en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de octubre de 2010). Bogotá, Colombia.

Anacona, M., Arbeláez, G. y Recalde, L. *Número y Magnitud: Una perspectiva histórica.* Cali, Artes gráficas Univalle, 1998.

Antón, a. & Gómez, M. (2016). La geometría a través del arte en educación infantil

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. Douady, L., Moreno., & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A de C.V.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativa y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar, *Enseñanza de las ciencias.* Vol., 22 (2), pp. (241-250).

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas. (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 10(1), 1-24.

Edo, M. (2006). Matemática y Arte, un contexto interdisciplinario. En *Actas del I Congreso Internacional de Lógico-Matemática en Educación Infantil*. Madrid: World Assotiation of Early Childhood Educations.

Edo, M. (2008). Matemáticas y arte en la Educación Infantil. *Uno*, 47, 37-53.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics*, *Second Series*, *19*(1), 70-76.

Gamboa, A; Vargas, V. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA* Vol. 27, Nₒ. 1, (74-94).

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. *Universidad de granada*. P.1-15.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Doctorado Interinstitucional en Educación Énfasis en Educación Matemática. Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2012a). *Aspectos de la teoría euclidiana de la proporción que favorecen la educación del profesor de Matemáticas.* In L. Sosa Moguel, E. Aparicio Landa & F. M. Rodríguez Vásquez (Eds.), Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Desarrollo de la Matemática Educativa y los Cimates (pp. 3-11). México, D. F.: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Guacaneme, E. A (2008). *Interpretaciones de las definiciones de razón y proporción.* Magister en Educación – Énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A (2008). ¿*Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales*? Conferencia presentada a la Segunda Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática. Popayán, 10 a 12 de noviembre de 2008.

Guacaneme, E. A. (2007). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los *Elementos*. (Ensayo presentado en el Seminario de Énfasis *Fundamentos de la Investigación en Didáctica de la Matemática: Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*, dirigido por el doctor Juan D. Godino, y en el Seminario de Énfasis *Historia de las Matemáticas II*, dirigido por los doctores Luis Carlos Arboleda y Luis Cornelio Recalde).

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de* *matemáticas.* Magister en Educación - Énfasis en Educación Matemática Tesis no publicada, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2002). *Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas*. Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7(1), 3-42.

Martínez, Vivian. (2014). *Algunas anotaciones históricas sobre arte y matemáticas: una herramienta didáctica en perspectiva.* Trabajo especial de grado para optar el título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas. Trabajo de grado publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

MEN. (2009). *Desarrollo infantil y competencias en la Primera Infancia.* Unidad de Educación para la Primera Infancia. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

Mochón, Simón. (2012*). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres*. Educación matemática, 24(1), 133-157.

Mora, J. (2011*). Alberto Durero: relación geometría y experiencia*. Trabajo especial de grado para optar el título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas. Trabajo de grado publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Muñoz, A; Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos.* Trabajo de grado para optar el título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas. Trabajo de grado publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa* *de la Educación Básica.* Tesis para optar por el título de Doctor en Educación. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. En R. Flórez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). México, DF.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Obando, G; Vasco, C. E; & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17(1), 59-81.*

Pérez, S; Guillén, G. (2007). *Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza.* En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), Investigación en educación matemática (pp. 295-306). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Prieto, J. L. (1992). Historia de la geometría Griega: *La Geometría en la Cultura Griega.* Actas del Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Canarias.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Ramírez, M; y Block, D (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. Educ. mat [online]., vol.21, n.1, pp.63-90. ISSN 1665-5826.

Recalde (SF). Lecciones de Historia de las Matemáticas. Segunda lectura: Número y Magnitud en los Elementos, p. 1-22.

Rico, L (1997). Consideraciones sobre *el currículo de matemáticas para la educación secundaria.* Revista EMA, 1(1), pp. 4-24.

Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación* (6), p. 5-2.

Vidal, C. (2009). La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones. Cuaderno de educación. Universidad Alberto Hurtado. Facultad de educación. Santiago, chile.

Zapico et. al. (2009). *Matemática en su salsa:* Historia, arte y juegos. Buenos Aires: Lugar Editorial.

ANEXOS

Anexo A. Guía del estudiante #1

GUÍA DEL ESTUDIANTE # 1 **Fecha: ___/___/___**

NOMBRES: ____

Colorín Coraza

Esta es la historia de Ángel, un joven pintor que una vez caminado por la playa, se encontró una pequeña concha perteneciente a una clase de molusco que se conoce como **Nautilus**. Ángel estaba maravillado por la forma de la concha, sus colores y su tamaño; se la llevó a su casa para enseñársela a su familia y amigos.

Ángel tiene un gran taller de pintura en su casa, en ese taller colocó la concha del molusco. Siempre que podia la observaba e investigaba información acerca de la especie del animal acuático, que habitó la coraza.

Después de tanto analizarla y admirarla, se le ocurrió la idea de hacer una pintura inspirada en aquella criatura marina, por lo que tuvo como resultado una obra de arte que tituló "**Colorín Coraza".** Y para quedar totalmente satisfecho, también elaboró un tipo de rompecabezas para poder jugar con sus amigos, este rompecabezas estaba compuesto por 12 fichas.

Ahora, Ángel ha querido dar a conocer su rompecabezas a muchas personas, a este rompecabezas lo ha llamado CORAZA. Él ha sido invitado a tu escuela; él desea que puedas disfrutar de su juego y además te invita a que logres conocer algo de geometría y proporcionalidad a través de sus instrucciones.

A partir de este momento Ángel te guiara con algunas tareas que debes cumplir para que logres aprender, comprender y apreciar su creación.

TAREA 1. ARMANDO A COLORÍN CORAZA.

¡Hola soy Ángel! En este momento te entregare mi rompecabezas CORAZA y pondré una imagen que nombrado "**Colorín Coraza**", como te muestro a continuación:

Rompecabezas "CORAZA"

Imagen: "**Colorín Coraza**"

Toma el rompecabezas CORAZA y arma la imagen "**Colorín Coraza**" y luego responde las preguntas.

a. ¿Qué tuviste en cuenta para iniciar y terminar de armar la figura de la imagen presentada con las fichas?

Tu respuesta:

____

____

____

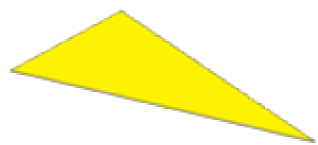
____

TAREA 2. COMPARANDO FICHAS DE COLORES.

Observa la imagen que armaste.

a. ¿Puedes identificar una figura que sea similar y del mismo color a la ficha **C1** en la figura que armaste?

Ficha **C1**



¿Cuántas? ______________________

Ahora marca las fichas que elegiste con stikers que tienen el nombre C1.

b. Observa nuevamente la imagen CORAZA.

¿Cuántas fichas del mismo tamaño hay entre las fichas amarillas C1 que encontraste?

Tu respuesta: ____

Repitiendo en mismo proceso anterior responde:

c. ¿Puedes identificar una figura que sea similar y del mismo color a la ficha **C2** en la figura que armaste?

Ficha **C2**

¿Cuántas?___________________

Ahora marca las fichas que elegiste con stikers que tienen el nombre C2.

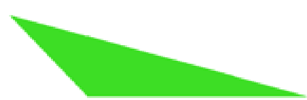
Observa nuevamente la imagen CORAZA.

d. ¿Cuántas fichas del mismo tamaño hay entre las fichas naranja que encontraste?

Tu respuesta: ____

e. ¿Puedes identificar una figura que sea similar y del mismo color a la ficha **C3** en la figura que armaste?

Ficha **C3**



¿Cuántas?______________________

Ahora marca las fichas que elegiste con stikers que tienen el nombre C3.

f. ¿Cuántas fichas del mismo tamaño hay entre las fichas verdes que encontraste?

Tu respuesta:

Teniendo en cuenta tus respuestas.

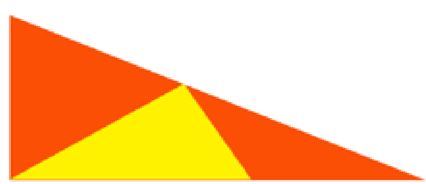
g. ¿Qué relación encuentras entre las tres respuestas de las preguntas b, d y f?

Tu respuesta:

TAREA 3. COMPARANDO CANTIDADES DEL COLOR AMARILLO Y NARANJA.

Busca la siguiente ficha en la figura armada, lee la nota del recuadro y analiza la información dada.

Nota: *Por un triángulo de color amarillo hay dos triángulos de color naranja.*



a. Teniendo en cuenta la información anterior completa la siguiente tabla:

Número de Triángulos amarillos	Número de triángulos naranjas	Escribe con tus palabras la relación	Representación de la relación o **razón** en números
1	2	*Por un triángulo de color amarillo hay dos triángulos de color naranja.*	1:3 o $\frac{1}{3}$ *(se lee: una de cada tres)*
2			
3			
	8		
30			

b. Escribe con tus palabras que relación encuentras entre el número de triángulos amarillos y el número de triángulos naranja, teniendo en cuenta la primera y la segunda columna de la tabla anterior.

Tu respuesta:

5

TAREA 4. HACIENDO MIS PROPIAS COMPARACIONES DE CANTIDADES DEL COLORES EN FICHAS.

a. Si desarmaste la figura, ármala nuevamente. Luego escoge y reúne fichas de otros colores y sigue haciendo comparaciones como en la tarea 3 utilizando la siguiente tabla.

Nota: *apóyate observando la imagen 1*

Número de Figuras **m** *Pinta aquí el color*	Número de la figuras **n** *Pinta aquí el color*	Escribe con tus palabras la relación	Representación de la relación o **razón**

b. Escribe con tus palabras qué relación que encuentras entre el número de las figuras **m** y el número de las figuras **n**, teniendo en cuenta la primera y la segunda columna de la tabla anterior. (toma como ejemplo la respuesta de la tarea 3-b).

Tu respuesta:

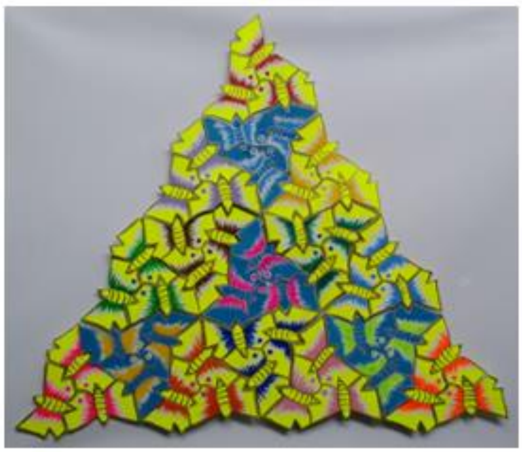
Anexo B. Guía del estudiante #2

GUÍA DEL ESTUDIANTE # 2 **Fecha: __ /___/___**

NOMBRES: ____

MARIPOSAS EN EL JARDÍN

Sara y Miguel desean pintar el muro de su jardín, para ello han escogido la siguiente imagen:

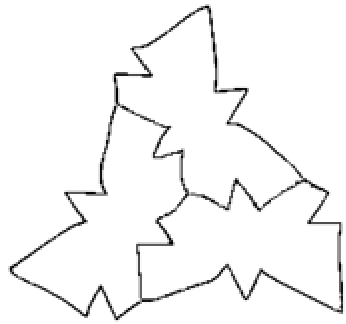


Sara y Miguel han escogido a Ángel como el artista que pintará su mural, y afirman pagarle muy bien por un excelente trabajo.

¡Hola de nuevo!

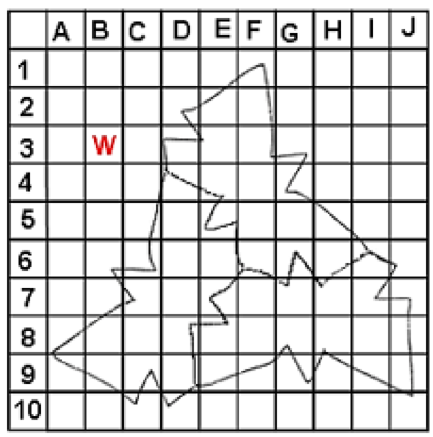
En esta ocasión quiero que me ayudes a trabajar en la pintura de las mariposas sobre el muro para Sara y Miguel.

Ángel se sentó en medio del jardín e hizo este dibujo en una hoja de papel:



He trazado una cuadrícula sobre el dibujo que realicé. A las columnas las nombré con letras y a las filas las nombré con números. Además, a esta figura la llamé figura 1.

FIGURA 1



Como el dibujo anterior tiene un tamaño muy pequeño para dibujarlo y pintarlo en el muro, Ángel realiza una ampliación de la **figura 1**, a esta ampliación la llama **figura 2** y es la siguiente:

FIGURA 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3		Z								
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Hasta el momento Ángel solo ha dejado lista la cuadrícula para comenzar a dibujar.

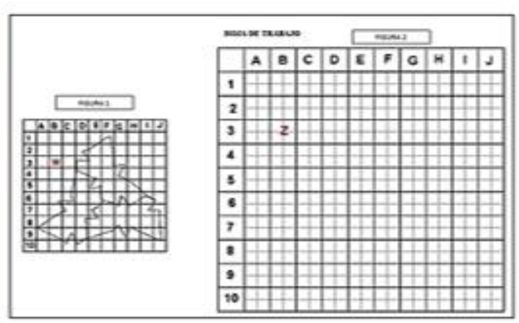
TAREA 1: UBICANDO LA PRIMERA MARIPOSA DEL MURO.

¡Vamos a comenzar!
A continuación te mostraré los materiales que utilizaremos, luego debes los pasos que están más adelante.

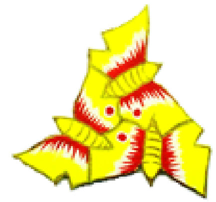
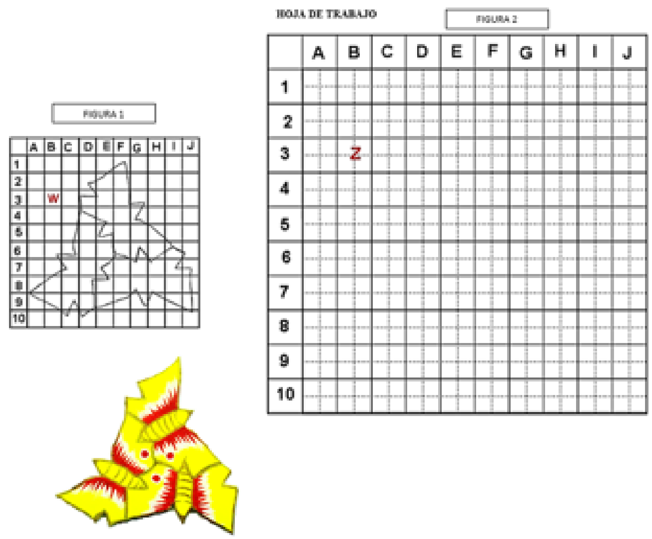
Materiales:

Fichas de mariposa

Hoja de trabajo



Pasos:

a. Busca entre las fichas tres mariposas amarillas con rojo.	
b. Utilizando la hoja de trabajo. Arma la figura 1 con las mariposas escogidas sobre la **figura 2**. Utiliza la cuadrícula como guía.	

TAREA 2: COMPARACIÓN DE CUADRÍCULAS.

Observa la hoja de trabajo.
Si W es un cuadrado que pertenece a la figura 1 y Z es uno de los cuadrados de la figura 2.

a. ¿Qué relación existe entre estos dos cuadrados?

Tu explicación:

b. ¿De qué manera se relaciona cada cuadrado de la **figura 1** con los cuadrados de las **figura 2**?

Tu explicación:

c. ¿Es correcto afirmar que la figura 2 es el triple de la figura 1? ¿Por qué?

Tu respuesta:

TAREA 3: PINTANDO EL MURO DE MARIPOSAS.

Es el momento de pintar completamente el muro, pero a medida que vayas completando el muro te seguiré enseñando algo de matemáticas.
A continuación te mostraré los materiales que utilizaremos, luego debes los pasos que están más adelante.

Materiales:

Fichas de mariposa

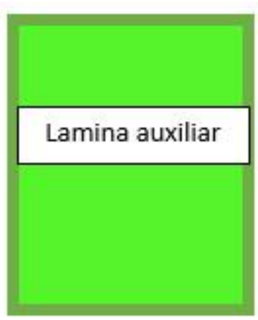
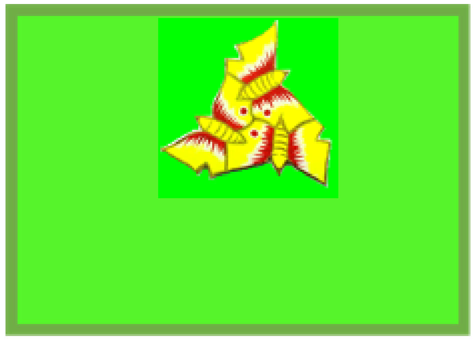


Imagen: **"mariposas en el jardín"**

Pasos 1:

Sobre la lámina verde coloca tres mariposas con los mismos colores de esta manera.



Al 1 grupo de 3 mariposas le llamaremos ELEMENTO.

Nota: *por un elemento hay tres mariposas.*

a. Teniendo en cuenta la información anterior completa la siguiente tabla:

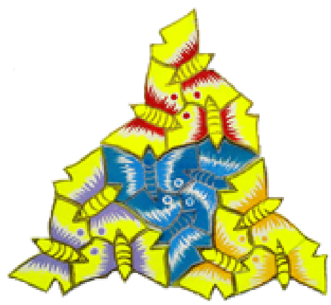
Número de elementos	Número de mariposas	Escribe con tus palabras la relación	Representación numérica de la relación o **razón**
1	3	*Por un elemento se tiene tres mariposas*	1 : 3 ó $\frac{1}{3}$
2			$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	12		$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
9			$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	30		$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	48		$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$

b. ¿Qué relación encuentras entre los resultados de las dos primeras columnas de la tabla anterior?

----

c. ¿Tuviste algo más que la información dada para completar la tabla? Escríbelo.

Paso2: Arma la figura de la derecha sobre la lámina verde, completando el elemento que ya tenías.



Observa la figura y contesta:

a. Por cada mariposa azul ¿Cuántas mariposas amarillas hay?

----

b. ¿Cuántas mariposas amarillas hay, si se tienen tres mariposas azules?

----

c. Completa la siguiente tabla haciendo construcciones de elementos con las mariposas. Tomando como ejemplo el paso anterior.

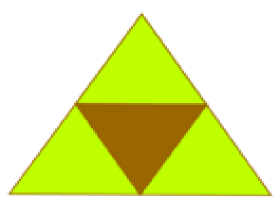
13

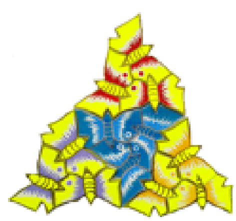
Cantidad de mariposas azules	Cantidad de mariposas amarillas	Escribe con tus palabras la relación	Representación de la relación o **razón**
3	9	*Por tres mariposas azules, hay nueve mariposas amarillas.*	3 : 9 ó $\frac{3}{9}$
6			$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	27		$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
	36		$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$

d. ¿Qué relación encuentras entre los resultados de las dos primeras columnas de la tabla anterior?

Paso 3:

Observa la comparación de estos dos muros:

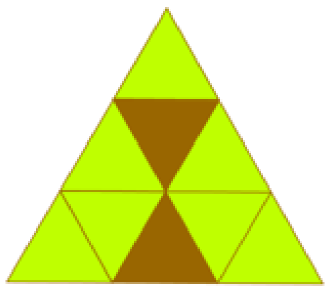
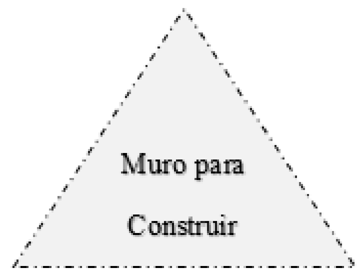




a. ¿Qué relaciones encuentras en la comparación de los dos muros?

----

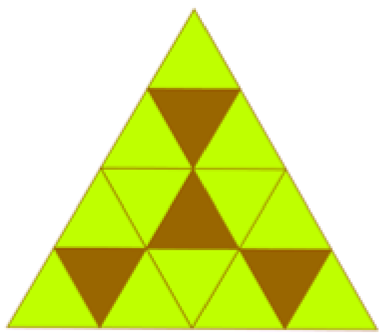
b. Ahora, sobre la lámina verde y con las mariposas, arma un muro parecido al que aparece en la siguiente tabla y termina de completar la tabla:

<table>
<tr><th colspan="2">Comparación o Proporción entre muros</th></tr>
<tr><th>Muro dado</th><th>Muro a pintar</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">b.1 Completa las frases con números para cada muro.</td></tr>
<tr><td>Por ____triángulos cafés, hay ___triángulos verdes en este muro construido.</td><td>Por ___mariposas azules, hay___ mariposas amarillas en este muro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">b.2 Luego, escribe la representación numérica para cada muro.</td></tr>
<tr><td>$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
Luego, Simplifica tu resultado $= \frac{\square}{\square}$</td><td>$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$
Luego, Simplifica tu resultado $= \frac{\square}{\square}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b.3. ¿Qué puedes observar en los resultados de ambas simplificaciones?

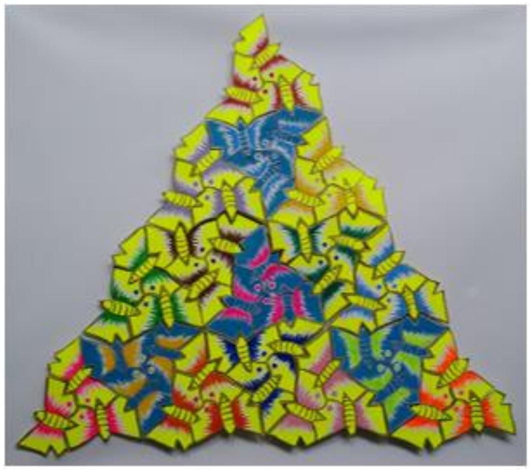
--</td></tr>
</table>

Paso 4:

> **c.** Sobre la lámina verde y con las mariposas, arma un muro parecido al que aparece en la siguiente tabla y termina de completar la tabla:

Comparación o Proporción entre muros	
Muro dado	**Muro a pintar**
	
c.1 Completa las frases con números para cada caso.	
Por ____triángulos cafés, hay ___triángulos verdes en este muro construido.	Por ___mariposas azules, hay___ mariposas amarillas en este muro.
c.2 Luego, escribe la representación numérica para cada muro.	
$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$ Luego, Simplifica tu resultado $= \frac{\square}{\square}$	$\square : \square$ ó $\frac{\square}{\square}$ Luego, Simplifica tu resultado $= \frac{\square}{\square}$
c.3. ¿Qué puedes observar en los resultados de las simplificaciones? --- --- --- ---	

Paso 5: Al terminar todo el paso anterior (paso 4) debes tener un muro como se muestra a continuación:

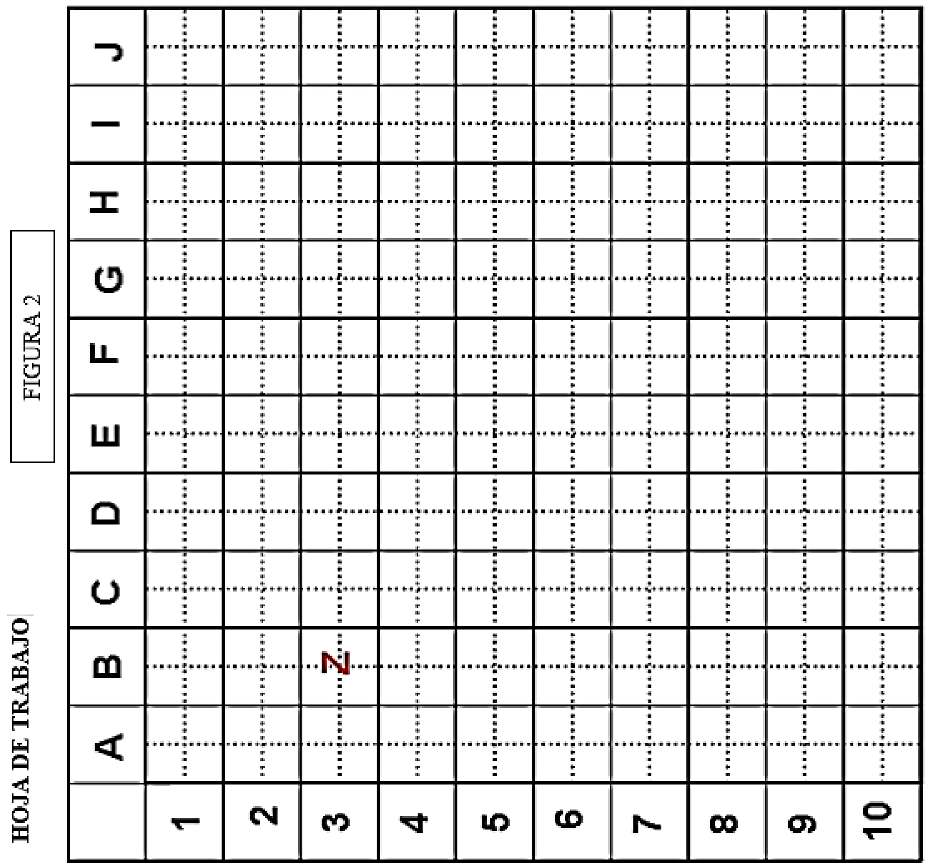


a. En tus palabras escribe como se ha logrado comparar el muro de triángulos verdes y el muro de las mariposas ¿qué logras concluir de esto?

Eso quiere decir que hemos terminado el muro de Sara y Miguel completamente.
¡Felicitaciones!

17

Anexo C. Anexo 3. Hoja de trabajo



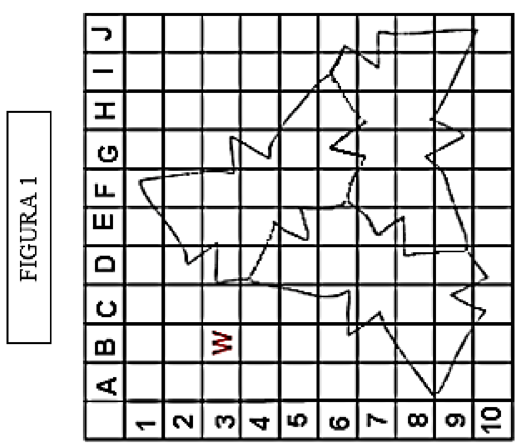


Figura 37. Hoja de trabajo

Anexo D. Entrevista Docente

Área profesional de desempeño: ____

Dé respuesta a las siguientes preguntas tomando en consideración el análisis realizado a la secuencia didáctica.

1. ¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.
   ____
   ____
   ____
   ___

2. ¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.
   ____
   ____
   ____
   ___

3. ¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.
   ____
   ____
   ____
   ___

4. Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta.
   ____
   ____
   ____
   ____.

5. ¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?
   ____
   ____
   ____
   ____.

6. Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí__________ No__________

Porqué____
____
____.

7. Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).
____
____
____

Anexo E. Entrevista docente #1

Área profesional de desempeño: Magister en Educación

De respuesta a las siguientes preguntas tomando en consideración el análisis realizado a la secuencia didáctica.

1. ¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.

   las tareas propuestas pueden ser claras para algunos estudiantes, para otros no tanto, es importante conocer cual es la población a la que se aplicará para medir ~~[illegible]~~ su pertinencia.

2. ¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.

   Cada población objeto de estudio tiene unas necesidades especiales. Como temática para el grado quinto si es pertinente, dependiendo el objetivo que se persiga. o la problematica Identificada.

3. ¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.

   si, se abordan los conceptos en las actividades propuestas a induce al estudiante a crear una relación entre los objetos que hay en cada actividad y la forma en que crecen proporcionalmente.

4. Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta.

   Hay coherencia entre el concepto de proporcionalidad y las actividades propuestas, pero no se puede decir con certeza si son alcanzables o coherentes sin conocer cual es el objetivo que se persigue.

5. ¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?

   es interesante la propuesta. pero vuelvo y hago enfasis en el tipo de población a la que se aplicará ya que pienso que las actividades son más llamativas si se relacionan con el contexto.

6. Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí___X___ No________

Porqué como teorética del grado quinto la secuencia presenta unas actividades claras y dinamiza el aprendizaje del concepto.

7. Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).

Es importante poder utilizar un lenguaje más sencillo y comprensible para los niños ya que algunas preguntas de las que hay en las actividades pueden no ser tan claras, o demasiado abiertas. las dos actividades que presenta la secuencia son muy similares, sería interesante que se pudiera integrar más la parte geométrica al concepto de proporcionalidad diferenciando un poco más la actividad 1 de la 2 a la vez que se integran los conceptos.

Anexo F. Entrevista docente #2

Área profesional de desempeño: Docente

Dé respuesta a las siguientes preguntas tomando en consideración el análisis realizado a la secuencia didáctica.

1. ¿Qué tan claras o confusas pueden ser las tareas propuestas a los estudiantes en el ejercicio de la secuencia didáctica? Explique detalladamente.
   Me gusto porque coloca a los niños a pensar y analizar como debe hacer para darle la forma que lleva la figura.

2. ¿Es pertinente la secuencia didáctica dirigida al grado quinto de Educación Básica? De ser así, indique que tan pertinente es.
   Es pertinente simplemente la explicasión de lo que se va a hacer, a trabajar y luego dejarlos para que ellos desarrollen su capacidades.

3. ¿Los conceptos matemáticos de razón y proporción son movilizadas de forma adecuada en cada situación? Detalle su respuesta.
   Si, porque los coloca a analizar las figuras para mirar sus formas, tamaños y colores.

4. Las expectativas de desempeño son alcanzables y coherentes con los conceptos matemáticas abordadas y con la pregunta.
   Si, este trabajo me gusto para realizar con los niños.

5. ¿Cuál es su opinión acerca de la integración de arte pictórico y geometría en esta secuencia didáctica?
   Me parece muy bien la integración de las figuras geometricas con los colores, sobre todo la de colorin coraza

6. Finalmente, ¿valida usted la propuesta didáctica? Sí X No
   Porqué Es una forma creativa y amena de orientar las clases y esto hace que los niños se concentren más en lo que estan haciendo,

7. Aportes didácticos (sugerencias, recomendaciones, aportes, ajustes dirigidos a la secuencia didáctica).

Bueno más que un aporte una sujerencia.
Darnos unas clases de estos a los docentes
y dejarnos regalados algunas juegos didacticos
de estos para seguir aplicandolos con
los niños de la instituccion.