

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE EN LOS ESTUDIANTES DEL
GRADO SEPTIMO UNO (7-1) DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA
INDUSTRIAL GERARDO VALENCIA CANO DEL DISTRITO DE BUENAVENTURA.
CASO: IMPLEMENTACIÓN DE UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL
RECONOCIMIENTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

JENNYFER ALZAMORA CAICEDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE PACÍFICO
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUENAVENTURA - COLOMBIA
2019

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO SEPTIMO UNO (7-1) DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA INDUSTRIAL GERARDO VALENCIA CANO DEL DISTRITO DE BUENAVENTURA. CASO: IMPLEMENTACIÓN DE UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL RECONOCIMIENTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

JENNYFER ALZAMORA CAICEDO

Código: 1252262

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

ASESOR
JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE PACÍFICO
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUENAVENTURA - COLOMBIA
2019



Programa Académico Licenciatura en Sdv. Bas. enf. mat Fecha

Código del programa: 3469

Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
19	02	2019

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Caracterización de los niveles de van Hiele en los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura. Caso: Implementación

Se trata de:

Proyecto

Informe Final

Director

JORGE ENRIQUE GALEANO

Nombre del Primer Evaluador

GILBERT ANDRES CRUZ

Nombre del Segundo Evaluador

FREYDER PAREDES

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
JENNIFER ALZAMORA	201252262	3469	jennyfer.alzamora@correounivalle.edu.co	

Evaluación

Aprobado

Meritorio

Laureado

Aprobado con recomendaciones

No Aprobado

Incompleto

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes, expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Agradecimientos

A Dios por la sabiduría y la fuerza para seguir cada día con la construcción de este trabajo y no detenerme ante los contratiempos. Agradezco a mi madre por su gran apoyo recibido durante toda la carrera, a mi padre que desde el cielo me guía y acompaña, a mi hermano y demás familiares por su apoyo y paciencia, a mi asesor y directora por su orientación y apoyo profesional. También agradezco al profesor Marcelino Ruiz Montaña por sus enseñanzas, sacrificios y tiempo brindado, a los estudiantes y directivos de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano, les agradezco por su disponibilidad de tiempo y espacios para la fase experimental de este trabajo.

Resumen

Las nuevas formas de aprender obligan a los docentes a desarrollar otras habilidades con el fin de mejorar el desempeño de los estudiantes en asignaturas como la geometría. Según diferentes investigaciones como las de (González, 2015) y (León, 2012) los estudiantes presentan diversas dificultades para obtener estos conocimientos.

En el marco de este panorama, se plantea el diseño e implementación de una serie de actividades, articuladas en un ambiente de geometría dinámica, a partir de las cuales se pretende identificar los *niveles de razonamiento* presentes en un grupo de estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano, del distrito de Buenaventura y a su vez promover el tránsito hacia *niveles* más sofisticados, propuestos por el Modelo de Van Hiele (*MVH*), en el reconocimiento de las propiedades de los cuadriláteros.

Las fases de aprendizaje delimitadas en el *MVH*, proporcionan elementos para orientar la implementación y gestión de las actividades propuestas, las cuales fueron aplicadas a un grupo de diez estudiantes, escogidos por el docente quien orientaba el curso. Inicialmente, se reconocen aspectos matemáticos, didácticos y curriculares concernientes a la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros con los estudiantes, para delimitar los conocimientos previos del grupo. Una vez examinados estos aspectos, se estructura una secuencia de actividades para determinar y caracterizar los *niveles de razonamiento* asociados al grupo.

Los resultados obtenidos permiten constatar que las actividades propuestas, desde un ambiente de geometría dinámica, promueven la consolidación del *nivel de razonamiento* denominado *visualización* a la vez que promueve el tránsito de los estudiantes hacia los niveles intermedios de *análisis y deducción informal*.

Palabras claves: Modelo de Van Hiele, Software Geogebra, cuadriláteros.

Tabla de contenido

Introducción	1
CAPÍTULO 1.	4
Aspectos generales de la investigación	4
1.1. Descripción del problema	4
1.2. Objetivos	9
1.2.1. Objetivo general	9
1.2.2. Objetivos específicos	9
1.3. Justificación	10
1.4. Antecedentes	12
1.4.1. Internacionales	12
1.4.2. Nacionales	17
CAPÍTULO 2.	21
Marco de referencia conceptual	21
2.1. El Modelo De Van Hiele (MVH)	21
2.1.1. Niveles de razonamiento	22
2.1.2. Fases para el aprendizaje	24
2.2. Referente matemático	27
2.3. Referente didáctico	29
2.4. Referente curricular	31
CAPÍTULO 3.	34
Metodología de la investigación	34
3.1. Diseño Metodológico	34
3.2. Diseño del estudio de casos	35
3.2.1. Contexto y población de estudio	35
3.2.2. Instrumentos para la recolección de datos	36
3.2.3. Diseño de la secuencia de actividades	37
3.3. Categorías de análisis	38

CAPÍTULO 4.	42
Intervención didáctica, análisis y conclusión de la investigación	42
4.1. Momentos de intervención didáctica	42
4.1.1. Implementación de la secuencia de actividades	43
4.1.2. Resultados de la secuencia de actividades	46
4.2. Análisis de la secuencia de actividades	60
4.3. Conclusiones	67
Bibliografía	70
Anexos	73
▪ Actividades de la secuencia	73
▪ Imágenes Acerca de la Aplicación de Actividades y Exploración de la Plataforma Didáctica Geogebra	78
▪ Imágenes de actividades de cuadriláteros en la plataforma virtual Geogebra	80
▪ Representación de los niveles que alcanzaron los estudiantes en cada una de las actividades	81

Lista de figuras

<i>Figura 1.</i> Cuadrado.....	28
<i>Figura 2.</i> Rectángulo	28
<i>Figura 3.</i> Rombo.....	28
<i>Figura 4.</i> Romboide.....	28
<i>Figura 5.</i> Trapecio Rectángulo	29
<i>Figura 6.</i> Trapecio Isósceles.....	29
<i>Figura 7.</i> Trapecio escaleno	29
<i>Figura 8.</i> Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 1.1	47
<i>Figura 9.</i> Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 1.2	47
<i>Figura 10.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 1.3	48
<i>Figura 11.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 1.4	48
<i>Figura 12.</i> Solución Dada Por El Estudiante I, Actividad 2. P1	49
<i>Figura 13.</i> Solución Dada Por El Estudiante C, Actividad 2. P1	49
<i>Figura 14.</i> Solución Dada Por El Estudiante I, Actividad 2. P3	50
<i>Figura 15.</i> Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 2.a.....	51
<i>Figura 16.</i> Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 2.b.....	51
<i>Figura 17.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 2.c	52
<i>Figura 18.</i> Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 2.d.....	52
<i>Figura 19.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 2.e	52
<i>Figura 20.</i> Solución Dada Por El Estudiante H, Actividad 3.1	53
<i>Figura 21.</i> Solución Dada Por Estudiante C, Actividad 4.P1.a.....	53
<i>Figura 22.</i> Solución Dada Por Estudiante B, Actividad 4.P1.b.....	54
<i>Figura 23.</i> Solución Dada Por Estudiante E, Actividad 4.P1.c	54
<i>Figura 24.</i> Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 4. P1.d	55
<i>Figura 25.</i> Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 4. P2.a	56
<i>Figura 26.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 4. P2.b.....	56
<i>Figura 27.</i> Solución Dada Por El Estudiante B, Actividad 4. P2.c	57
<i>Figura 28.</i> Solución Dada Por El Estudiante D, Actividad 4. P2.d.....	57
<i>Figura 29.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 5.1	58

<i>Figura 30.</i> Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 6.1	58
<i>Figura 31.</i> Solución Dada Por El Estudiante J, Actividad 7.1	59
<i>Figura 32.</i> Solución Dada Por El Estudiante C, Actividad 8.1	59
<i>Figura 33.</i> Resultados De La pregunta 1, De la Actividad 3.....	62
<i>Figura 34.</i> Construcción Y Resultados De La Actividad 5	63
<i>Figura 35.</i> Resultados De La Actividad 6	64
<i>Figura 36.</i> Diseño De Actividades	78
<i>Figura 37.</i> Construcciones en Geogebra de la actividad 2	78
<i>Figura 38.</i> Estudiantes Practicando En El Software Geogebra	79
<i>Figura 39.</i> Estudiantes Determinado Actividades	79
<i>Figura 40.</i> Construcción De Los Cuadriláteros	80
<i>Figura 41.</i> Construcción De Rectángulo	80
<i>Figura 42.</i> Construcción De Cuadrado	80

Lista de tablas

Tabla 1. <i>Resultados prueba saber 2017</i>	5
Tabla 2. <i>Resultados de los componentes geométrico-métrico 2017</i>	6
Tabla 3. <i>Características y propiedades de los cuadriláteros paralelos</i>	28
Tabla 4. <i>Características y propiedades de los cuadriláteros no paralelogramos</i>	29
Tabla 5. <i>Coherencia horizontal</i>	32
Tabla 6. <i>Categorías de análisis de los niveles de razonamiento para el trabajo con cuadriláteros</i>	40
Tabla 7. <i>Aplicación de los niveles en las diferentes actividades</i>	41
Tabla 8. <i>Niveles alcanzados por los estudiantes en las actividades</i>	81

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemáticas* del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática de la Universidad del Valle Sede Pacífico. En términos generales esta investigación se ocupa de la identificación, caracterización y análisis de los niveles de razonamiento propuestos por el Modelo de Van Hiele, configurados en un grupo de estudiantes del grado séptimo uno (7-1), cuando trabajan en la resolución de actividades, relacionadas con cuadriláteros y enmarcadas en un ambiente de geometría dinámico.

Para desarrollar el objetivo propuesto, la presente investigación se sustentó en los aportes teóricos del Modelo de Van Hiele (MVH). Este modelo consiste en reconocer que los estudiantes presentan diferentes niveles de pensamiento en la construcción de los objetos geométricos. De esta manera, este modelo considera una secuencia de tipos de razonamientos, denominados *niveles de razonamiento*, a través de los cuales se puede estudiar el progreso de los estudiantes desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual (Gutiérrez & Jaime, 1990). Otro aspecto importante del modelo, se conoce como *fases de aprendizaje*, las cuales sugieren algunas directrices para que los profesores puedan ayudar a sus estudiantes a alcanzar con mayor facilidad un nivel superior de razonamiento (Corberán, y otros, 1994).

Las *fases de aprendizaje* fueron fundamentales para orientar el diseño e implementación del conjunto de actividades relacionadas con los cuadriláteros. Esta secuencia está constituida por ocho actividades enmarcadas en un ambiente de lápiz y papel y de geometría dinámica. Este último, permitió una visualización y manipulación de las representaciones matemáticas de los

cuadriláteros, pues tal como lo mencionan (MEN, 2006, pág. 62), los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas “los distintos programas de computación permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional”.

La implementación de la secuencia de actividades se desarrolló en la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano, ubicada en la zona urbana del distrito de Buenaventura. El diseño metodológico considera elementos de un *estudio de caso*, en el que participan diez estudiantes con diferentes desempeños en la asignatura de matemáticas.

Para efectos de organización, la presente investigación se ha dividido en cuatro capítulos, los cuales se describen a continuación. En el capítulo 1 se discuten los aspectos generales de la investigación, los cuales incluyen: la contextualización y formulación del problema, su justificación, algunos antecedentes y los respectivos objetivos. De manera particular, en este apartado se reconoce un problema asociado con el aprendizaje de los cuadriláteros que puede ser abordado a partir de la exploración de los tipos de razonamiento que se configuran en el trabajo matemático de los estudiantes. Entre los antecedentes revisados se destaca la investigación de Maguiña (2013), puesto que propone una secuencia didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros en la educación básica primaria.

El capítulo 2, se caracteriza por enfocarse en elementos teóricos considerados necesarios para la conceptualización pertinente en la investigación. El referente teórico utilizado en este caso es el modelo de Van Hiele (MVH), teoría creada por Pierre Van Hiele y Dina Geldof; en el cual, se explica la evolución del razonamiento geométrico por parte de los estudiantes. El MVH, se constituye por el componente descriptivo e instructivo. En el primer caso, se sugieren los diferentes niveles de razonamiento en los estudiantes y, en el segundo caso, se consideran las pautas para que el docente guíe en esa área a sus estudiantes. Este capítulo también contiene el

referente matemático, que define y describe cada una de las formas y propiedades de los cuadriláteros. Posteriormente, está el referente didáctico, que especifica los beneficios e importancia de usar las herramientas tecnológicas (Geogebra). Finalmente, está el referente curricular que, basado en lo expuesto por el Ministerio de Educación Nacional, propone los contenidos temáticos que deben ser enseñados por el docente en el aula, ajustado al respectivo nivel académico de los estudiantes.

El capítulo 3, contiene la metodología de la investigación, se encarga de describir de forma detallada y completa la situación, esta sección se compone de cuatro elementos. Primero, el diseño metodológico, este define el enfoque y el caso de estudio en el que se inscribe la investigación; segundo, contiene el diseño del estudio de casos en el que se incluye el contexto de la población de estudio, instrumentos para la recolección de datos. Finalmente, las categorías de análisis, sustentadas en los niveles de razonamiento del modelo Van Hiele y las fases de aprendizajes.

El capítulo 4, está compuesto inicialmente por los momentos de intervención, que se realizó en la secuencia de actividades, induciendo a unos resultados, que permitieron realizar el análisis de cada una de las actividades; en este apartado se sistematizan las producciones de acuerdo a los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes. Finalmente se describe la conclusión, en donde se determinan los resultados obtenidos de la investigación.

CAPÍTULO 1.

Aspectos generales de la investigación

En este capítulo se presentan los aspectos generales de la investigación, se inicia con la descripción del problema en la cual se describen los resultados que obtienen los estudiantes en las pruebas nacionales y las dificultades que presentan en la prueba de matemática en los aspectos de geometría; se continua con el planteamiento del objetivo general y tres específicos que se derivan del general. La justificación plantea la importancia de enseñar geometría para la humanidad y la de ser abordada por los docentes desde un punto de vista dinámico, por los beneficios que se obtienen al ser implementados en el aula de clases, por último los antecedentes de investigaciones de la implementación del modelo de los Van Hiele que proporciona un soporte teórico a la investigación.

1.1. Descripción del problema

De acuerdo con los resultados de las pruebas externas de matemáticas realizadas por el ICFES y aplicada por los estudiantes de los grados 3°, 5°, 9° del Distrito de Buenaventura, en el documento denominado resultados 2017 publicado en la página web del ICFES interactivo muestran que las instituciones públicas urbanas en el grado tercero tiene 82% de sus estudiantes en los niveles más bajos (mínimo e insuficiente), en el grado quinto en estos mismos niveles esta el 93% de los estudiantes y para el grado noveno el 94% de los estudiantes de las instituciones educativas publicas urbanas (Icfes interactivo, 2018).

De lo anterior, se puede inferir que es importante que la comunidad de educadores matemáticos se interese por la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, ya que es una rama

transversal en las matemáticas, tan importante como la aritmética, el álgebra y el cálculo. Además, su estudio es fundamental para modelar el entorno inmediato, puesto que en cualquier lugar donde nos encontremos es posible reconocer diversas relaciones y conceptos geométricos, asociados con las formas de los objetos físicos, disposiciones entre ellos (e.g., relación de paralelismo) e incluso, transformaciones geométricas, tales como: traslaciones, rotaciones y simetrías (Garcia & Lopez, 2008).

En cuanto a los resultados consecutivos que se han presentado en el transcurso de las pruebas nacionales, cabe mencionar que en las pruebas SABER (grados 3°, 5° y 9°) los resultados obtenidos por los estudiantes del distrito de Buenaventura son desalentadores, en contraste con la media nacional. De hecho, los resultados obtenidos por Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura presentan un nivel de desempeño muy bajo en matemáticas (Ver tabla 1). Estos resultados permiten inferir que los estudiantes están presentando dificultades en la comprensión analítica de textos y la solución de problemas complejos (MEN, 2006).

Tabla 1. Resultados prueba saber 2017

RESULTADOS PRUEBA SABER 2017 (MATEMÁTICA)				
Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura				
GRADOS	INSUFICIENTE	MÍNIMO	AVANZADO	SATISFACTORIO
3°	30%	43%	21%	6%
5°	55%	37%	6%	2%
9°	40%	54%	6%	1%

Fuente: Pruebas SABER 3°, 5° y 9° del 2017

En el caso de los componentes evaluados en matemáticas, específicamente en el geométrico-métrico, los resultados obtenidos por los estudiantes de esta institución son similares a las instituciones oficiales de Buenaventura (ver tabla 2).

Tabla 2. Resultados de los componentes geométrico-métrico 2017

GRADOS	<p style="text-align: center;">COMPONENTES EVALUADOS EN MATEMÁTICAS, PRUEBA SABER 2017. Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura</p>
3°	<p style="text-align: center;">3.2. Componentes evaluados. Matemáticas - grado tercero</p> <p>Este diagrama muestra los resultados para el grado 3°. En la categoría de Fortalezas, el componente Aleatorio está representado por un cuadrado negro en la línea superior. En la categoría de Debilidades, los componentes Numérico-variacional y Geométrico-métrico están representados por triángulos verdes con punta hacia abajo, y el componente Aleatorio está representado por un cuadrado negro en la línea superior.</p>
5°	<p style="text-align: center;">3.2. Componentes evaluados. Matemáticas - grado quinto</p> <p>Este diagrama muestra los resultados para el grado 5°. En la categoría de Fortalezas, el componente Geométrico-métrico está representado por un triángulo verde con punta hacia arriba, y el componente Aleatorio está representado por un cuadrado negro en la línea superior. En la categoría de Debilidades, el componente Numérico-variacional está representado por un triángulo verde con punta hacia abajo.</p>
9°	<p style="text-align: center;">3.2. Componentes evaluados. Matemáticas - grado noveno</p> <p>Este diagrama muestra los resultados para el grado 9°. En la categoría de Fortalezas, los componentes Geométrico-métrico y Aleatorio están representados por triángulos verdes con punta hacia arriba, y el componente Numérico-variacional está representado por un triángulo verde con punta hacia abajo. En la categoría de Debilidades, el componente Numérico-variacional está representado por un triángulo verde con punta hacia abajo.</p>

Fuente: Prueba saber 3°, 5° y 9° del 2017

Teniendo en cuenta que los contenidos geométricos hacen parte de la matemática evaluada en las pruebas SABER, se hace necesario desarrollar competencias asociadas a la exploración y representación del espacio, como aspecto característico del *pensamiento espacial* y *los sistemas geométricos*. Además, una mejor comprensión matemática demanda que los estudiantes construyan un significado amplio sobre las magnitudes y cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos en diferentes situaciones (MEN, 2006).

Por otro lado, la incompreensión teórica de la geometría, por parte de los estudiantes, es producto del tipo de enseñanza que han recibido, lo cual afecta las concepciones que el estudiante tiene acerca de ¿Qué es la geometría?, ¿Cómo se aprende?, ¿Qué significa saber de esta rama de las Matemáticas? y ¿Para qué se enseña? (Garcia & Lopez, 2008). Si bien, no es el centro de estudio dar respuesta a estos interrogantes, es necesario considerarlos y adoptar un modelo de enseñanza que promueva la construcción significativa de los objetos geométricos.

En relación con lo anterior, el MVH se constituye en un instrumento útil para orientar los procesos de enseñanza de la geometría, porque concibe el aprendizaje de los conceptos geométricos a partir de varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes. Si bien, sostiene que no se puede enseñar a razonar de una determinada forma, propone algunas directrices en la enseñanza de la geometría para que los estudiantes transiten a niveles de razonamiento cada vez más sofisticados (Corberán, y otros, 1994).

Una temática particular de la geometría está relacionada con el estudio de los cuadriláteros, sus propiedades y relaciones. De hecho, algunas investigaciones (González, 2015, pág. 16) indican que la mayoría de los estudiantes entre los 9 y 12 años de edad, presentan dificultades para describir las propiedades y relaciones de este objeto matemático. Al respecto, Dickson et al. (1991) señalan entre tales dificultades que los estudiantes a) no reconocen que el

cuadrado es a su vez un rectángulo y b) tienen problemas para nombrar correctamente a la cometa, el rombo o el trapecio. Otra dificultad que presentan los estudiantes frente a esta temática, es citada por (León, 2012) y se relaciona con la posición canónica (la posición usual en que se presenta un objeto) que al ser modificada a través de una rotación causa dudas acerca del objeto geométrico observado. Es decir que, el hecho que la figura geométrica o cuadrilátero como es el presente caso no se manifieste con su forma canónica, los estudiantes reflejan dificultades para reconocer un cuadrilátero una vez su forma haya sido sometida a transformaciones. Por lo tanto, sugiere que la enseñanza de la geometría sea adecuada y sobre todo experiencial, resaltando que la misma, forma parte de la cotidianidad del ser humano.

Según (Gamboa & Ballestro, 2010, pág. 127), dado que en el aula de clases, aún se siguen presentando contenidos geométricos desde un formalismo vacío, sin sentido para los estudiantes, parece importante incorporar en los procesos de enseñanza los ambientes de geometría dinámica para mejorar las capacidades exploratorias de los estudiantes.

La importancia de introducir ambientes dinámicos para la enseñanza de la geometría, se fundamenta en que son útiles para la exploración de las propiedades y relaciones de los conceptos geométricos. Además, posibilitan el desarrollo de destrezas en la resolución de tareas y son, usualmente, atractivos para los estudiantes, dándole un lugar protagónico en su proceso de aprendizaje (Arias, Guillén, & Ortiz, 2011).

Siendo notorias las dificultades que presentan los estudiantes, uno de los intereses de la presente investigación es diseñar e implementar una secuencia de intervención en el aula que, eventualmente, ayude a los estudiantes a tener un mejor desempeño en el mediano plazo en el área de matemáticas, especialmente en geometría.

En el marco de las consideraciones y problemáticas anteriores, se formula la siguiente pregunta:

¿Cuáles son los niveles que permiten la implementación del modelo de Van Hiele con el objeto matemático los cuadriláteros en el grupo séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Caracterizar el avance de los niveles de razonamiento matemático, en los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura, en relación al desarrollo de actividades con cuadriláteros, sustentados en el MVH y con la medición del software Geogebra.

1.2.2. Objetivos específicos

- Reconocer aspectos matemáticos, didácticos y curriculares concernientes a la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros con los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano del distrito de Buenaventura en el diseño de actividades sustentadas en el modelo de Van Hiele.
- Diseñar e implementar una secuencia de actividades relativas a los cuadriláteros, enmarcadas en un ambiente de geometría dinámico (Geogebra), que permita estudiar la configuración de niveles de razonamiento en el grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano.

- Validar la adquisición del nivel 3 del modelo Van Hiele en el grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano.

1.3. Justificación

La geometría es una rama de las matemáticas que tiene gran importancia para la humanidad y su desarrollo, porque de manera directa o indirecta, se relaciona con múltiples actividades para el progreso de la sociedad, el estudio o para la recreación. Además, favorece en los estudiantes el desarrollo de múltiples habilidades que son útiles para comprender otras áreas de las matemáticas y los prepara para entender mejor el mundo que los rodea (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000).

Por lo anterior, para los docentes de matemáticas es necesario abordar desde un punto de vista dinámico la enseñanza de la geometría, lo cual implica romper los esquemas a los que se habituaron, para dedicarse a la investigación, exploración y aplicación de nuevas actividades dentro y fuera del aula (Escudero-Domínguez & Carrillo, 2014). Se trata entonces de proponer currículos adecuados en la formación de la geometría como parte fundamental en el área de matemáticas y como elemento necesario en la interpretación de la vida (León, 2012).

Por otra parte, la implementación de ambientes de geometría dinámico (AGD) para el desarrollo del proceso educativo en el aula, se hace necesario dado que favorece nuevas formas de concebir el aprendizaje, al imprimirle dinamismo y motivación que pueden conllevar a que los estudiantes adquieran mayor interés por la práctica y aprendizaje de la geometría (Jurado & Suarez, 2013), aspecto que puede ser expresado en la obtención de mejores resultados en las pruebas nacionales e internacionales.

De esta manera, es útil considerar la intervención del AGD, Geogebra. Particularmente, porque es un software libre, es decir, que se puede descargar desde la página web de manera gratuita, en el computador, tabletas o celulares con sistema Android. Si bien, permite trabajar en áreas como el álgebra y el cálculo, su principal fortaleza se encuentra en el área de la geometría. Además, se pueden realizar demostraciones visuales para un uso práctico y ameno en las clases (Arias & Leiva, 2013).

Entre sus ventajas en el trabajo con los cuadriláteros, se destaca el hecho de dotarlos de dinamismo, y por consiguiente de temporalidad y movimiento, sin que estos pierdan sus relaciones geométricas y propiedades implícitas; confirmando la idea de que sus propiedades deben conservarse ante las diversas posiciones que adopten en la pantalla. Además, Geogebra ayuda a los estudiantes a constatar las propiedades de los cuadriláteros, a través de herramientas, tales como: ángulo y distancia o longitud (Ramírez, 2014).

Teniendo en cuenta los intereses de esta investigación, el MVH se muestra apropiado para estudiar las formas de razonamiento geométrico que se configuran en el trabajo matemático de los estudiantes. Por un lado, es considerado uno de los modelos teóricos de referencia con mayor auge en las investigaciones y diseños curriculares relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría (Jaime A. , 1993). Por otra parte, y en correspondencia con el objeto matemático de interés, el MVH ha sido empleado en recientes investigaciones locales para problematizar la enseñanza de los cuadriláteros (Ramírez, 2014) & (Maguiña, 2013).

El MVH cumple con unos criterios, para que los estudiantes lleguen a un aprendizaje más efectivo y a un conocimiento más profundo. Y señala la necesidad de que los profesores estudien la capacidad de razonamiento de sus estudiantes en el momento de decidir la forma y el rigor de sus clases, porque su centro de atención, finalmente no es el aprendizaje de hechos y destrezas,

sino la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento (Corberán, y otros, 1994).

1.4. Antecedentes

A continuación, se relacionan una serie de antecedentes con la finalidad de proporcionar un soporte teórico a la presente investigación. En este sentido, se exponen tres investigaciones internacionales y tres investigaciones locales, desarrolladas durante los últimos diez años. Las mismas fueron seleccionadas, principalmente, porque abordan el objeto matemático de interés (cuadriláteros); además, integran en su mayoría, ambientes de geometría dinámicos y al menos dos de esas investigaciones se enmarcan en el MVH.

1.4.1. Internacionales

En el ámbito internacional se exponen las investigaciones de Gonzales (2015), Escudero-Domínguez y Carillo (2014), Maguiña (2013) y Carhuapoma & Huaman (2018).

La investigación desarrollada por (González, 2015) se denomina: *errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria*. Dicha investigación se propone identificar y estudiar los errores y dificultades que usualmente presentan los estudiantes entre los 9 y 12 años, cuando aprenden los cuadriláteros.

Para llevar a cabo tal objetivo, se diseñaron cuestionarios que fueron implementados a 88 estudiantes de cuarto y sexto grado de educación primaria y secundaria. Entre sus resultados señala que un porcentaje elevado de esos estudiantes a) no incluye el caso cóncavo en la selección de cuadriláteros, b) no tienen en cuenta las relaciones de inclusión dadas en los

enunciados (e.g., considerar el cuadrado como un caso particular del rombo y del rectángulo) y c) presentan dificultades para aceptar un cuadrilátero en una posición no canónica.

En síntesis, esta investigación revela que las respuestas de los estudiantes están permeadas por distractores de orientación y estructuración. Los primeros tienen que ver con la posición canónica de los cuadriláteros (e.g., rectángulo apoyado en uno de sus lados) y los segundos se relacionan con una estructura particular de los cuadriláteros (e.g., únicamente los trapecios rectángulos).

El antecedente citado es fundamental para el desarrollo de la presente investigación porque sus resultados revelan diferentes dificultades que deben atenderse en el diseño y ejecución de actividades relacionadas con los cuadriláteros. Además, este antecedente permite justificar el interés sobre los cuadriláteros, al poner de manifiesto que el aprendizaje de las propiedades y relaciones de esos objetos matemáticos no es un asunto trivial. Finalmente, cabe resaltar que la identificación y caracterización de los distractores citados pueden resultar útiles para enriquecer el análisis de las producciones de los estudiantes.

El estudio de (Escudero-Domínguez & Carrillo, 2014), titulado *conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro* tiene como propósito investigar sobre los conocimientos que poseen los estudiantes para maestros (EPM) sobre los cuadriláteros.

Su desarrollo metodológico, consistió en llevar a cabo un cuestionario dividido en dos partes. La primera parte consta de una serie de preguntas con respuestas cerradas, es decir que entre las respuestas solo una es la correcta y dentro de las otras respuestas se coloca una en la que consideran que es la que elegirán los estudiantes. La segunda parte está constituida por actividades con respuestas abiertas, significando ello que, los estudiantes tienen la opción de responder libremente. Las preguntas generalmente están basadas en la clasificación de los

cuadriláteros como, por ejemplo: caracterización del rombo y la relación que tiene este objeto con el cuadrado. Estas encuestas fueron resueltas por 51 estudiantes de segundo curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla, quienes con anterioridad han trabajado en la parte de matemáticas y geometría, sin caso omiso los cuadriláteros incluyendo propiedades, definiciones, clasificaciones y transformaciones geométricas.

Los resultados obtenidos durante el proceso investigativo, permitieron evidenciar que hay estudiantes que caracterizan el objeto matemático sin importar la posición que esté tenga. Sin embargo, otros estudiantes no respondieron correctamente, porque algunas de las representaciones del objeto matemático no se encontraba en su posición canónica. El estudio citado también expresa que los estudiantes presentan dificultades para dibujar más de cinco cuadriláteros, porque no consideran los cuadriláteros cóncavos, sino únicamente los convexos. Por lo tanto, concluyen que el método elegido para obtener los resultados de la investigación, les permitió describir el conocimiento que los estudiantes para maestros (EPM) poseen sobre el conocimiento geométrico.

La citada investigación provee aspectos importantes en la construcción de actividades y sugiere formas de trabajo que pueden ser consideradas para el estudio de interés. Se destaca, por ejemplo, el papel de una indagación que permitirá identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnico Industrial Gerardo Valencia Cano acerca de los cuadriláteros y sus propiedades, sin importar la posición canónica.

Finalmente, se referencia a (Maguiña, 2013) cuya investigación titulada: *una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele con apoyo del software de geometría dinámica Geogebra* propone el diseño de una propuesta didáctica

sustentada en el modelo de Van Hiele con miras a promover que los estudiantes de grado cuarto de secundaria alcancen el nivel tres de razonamiento, a través del trabajo con actividades enmarcadas en el uso del software de geometría dinámica Geogebra.

Destaca que, por lo general, cuando se trabaja un tema teniendo como referencia el modelo de Van Hiele, la mejor herramienta para la evaluación es la entrevista. Sin embargo, menciona que esta requiere disponer de un tiempo didáctico extenso con el que usualmente no se cuenta. Como alternativa a este hecho, sugiere utilizar pruebas escritas con ítems de respuestas abiertas, las cuales permiten que el estudiante pueda proporcionar justificaciones, argumentaciones o comentarios. Según la autora, esta situación le permite al docente identificar el tipo de lenguaje que utilizan los estudiantes en la exposición de sus ideas. De esta manera, implementa un conjunto de actividades (pruebas escritas) y las evalúa a partir de los aportes de Jaime (1993).

Como resultado, la investigación de Maguiña señala que, con el uso de una estrategia didáctica apoyada en el software de geometría, los estudiantes mejoraron sustancialmente sus niveles de razonamiento; aspecto que deja entre ver que la experiencia de la práctica de la geometría con el uso del software Geogebra, generó resultados positivos.

En ese sentido, se resalta que los estudiantes respondieron debido a que, se encontraron directamente con la plataforma didáctica virtual Geogebra, lo que les permitió trabajar en la resolución de los problemas y no se limitó específica y tradicionalmente a las explicaciones del docente, por el contrario, ellos tuvieron la oportunidad de explorar las características, propiedades y transformaciones de los cuadriláteros, durante su encuentro con la plataforma.

El antecedente citado es fundamental para el desarrollo de la presente investigación porque sus resultados revelan que la aplicación de la propuesta, permitió que los estudiantes

lograran la adquisición de un nivel más sofisticado de razonamiento, justificando la importancia del diseño de actividades didácticas, basados en el MVH, y la exploración de la plataforma didáctica, Geogebra.

La investigación de (Carhuapoma & Huaman, 2018), titulada: *Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de cuadriláteros, en estudiantes del cuarto grado de “José Carlos Mariátegui”; Pampachacra – Huancavelica* tiene como propósito, determinar la influencia del modelo Van Hiele en el aprendizaje de cuadriláteros, en los estudiantes del cuarto grado de la Institución Educativa “José Carlos Mariátegui”.

Para llevar a cabo el objetivo, diseñaron unas pruebas pedagógicas, que fueron implementadas a 12 estudiantes del grado cuarto de la institución. Las pruebas, se diseñaron teniendo en cuenta el método experimental, el cual permite controlar y manipular intencionalmente a la variable independiente, para así obtener respuestas con mayor precisión.

Para obtener respuestas del propósito, parten aplicando una prueba inicial, que les permitió reconocer los saberes previos que tenían los estudiantes sobre los cuadriláteros, los resultados fueron importantes porque permitió diseñar la prueba de aprendizaje, la cual se denominan también como prueba de proceso, para la estructura, tuvieron en cuenta las fases y los niveles del modelo Van Hiele. Como resultado, se logró en los estudiantes el desarrollo de habilidades para reconocer de manera fácil los cuadriláteros. Concluyen con una prueba final, para evidenciar el avance en cuanto a su nivel de conocimiento, por lo tanto, los resultados fueron satisfactorios porque mejoro en sus conocimientos los cuadriláteros. Finalmente concluyen que el modelo Van Hiele influye de manera significativa en el aprendizaje de los cuadriláteros.

El antecedente citado es fundamental para el desarrollo de la presente investigación porque justifica la importancia de implementar, en sesiones de aprendizajes modelos

matemáticos como el de Van Hiele y materiales didácticos en la enseñanza de los cuadriláteros, favoreciendo a los estudiantes en el aprendizaje y como motivación un mayor interés por aprender.

1.4.2. Nacionales

En el ámbito nacional se exponen las investigaciones de Ramírez (2014), Jurado & Suarez (2013) y Mazo & Suarez (2009).

El estudio de (Ramírez, 2014) denominado: *estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientados por el modelo Van Hile y Geogebra* se centra en caracterizar los avances en el proceso cognitivo de visualización en estudiantes de grado séptimo mediante la clasificación de triángulos y cuadriláteros.

A partir de las fases propuestas por el modelo de Van Hiele (información, orientación dirigida y explicitación) diseñó una estrategia didáctica que favoreció la observación del cambio en los niveles de razonamiento por parte de los estudiantes. En las fases de información y orientación se contó con la interacción del software Geogebra como herramienta y gracias a su carácter dinámico, permitió que las representaciones de los objetos tuvieran transformaciones; lo que llevó a los estudiantes a construir conclusiones y a establecer relaciones entre las figuras presentadas.

Por lo tanto, hubo avances en las habilidades de procesamiento visual por parte de los estudiantes, permitiendo identificar y caracterizar los avances en el proceso cognitivo de visualización del triángulo y cuadriláteros, a partir de características e indicadores que los estudiantes muestran frente a una situación geométrica determinada.

Entre la citada investigación y el presente estudio, existe correlación en términos de los objetivos propuestos, pues en ambos el interés gira en torno a la caracterización del avance en los procesos cognitivos de los estudiantes de grado séptimo uno (7-1) frente al tema de los cuadriláteros.

La investigación de (Jurado & Suarez, 2013) titulada, *una secuencia didáctica en grado cuarto: cuadriláteros en un AGD*. Estableció como objetivo, reconocer efectos de la mediación instrumental de un ambiente de geometría dinámica (AGD), como Cabri II Plus, integrado al diseño de una secuencia didáctica respecto a la exploración de las propiedades de los cuadriláteros en cuarto grado de educación básica. Para llevar a cabo el objetivo diseñaron una secuencia didáctica, compuesta por varias situaciones.

En consecuencia, se tiene que el resultado obtenido, se relaciona con la importancia de diseñar el dispositivo experimental. En esa línea, las tres dimensiones fundamentales fueron: 1) Por un lado la dimensión matemática; marcó la certeza de las propiedades y fue importante al plantearse las diferencias y similitudes fundamentales que se presentan entre las figuras geométricas trabajadas. 2) La dimensión cognitiva que está totalmente ligada a este trabajo en el sentido de entender la función que tiene el AGD que ha sido integrado al diseño, como este puede cambiar y como juega un papel primordial en la construcción del conocimiento matemático. Y por último, 3) la dimensión didáctica, fue la base para el diseño de esta secuencia didáctica.

En este caso, el estudio citado con la investigación desarrollada encuentra similitud en el abordaje de los cuadriláteros, como el objeto matemático de la investigación, otra similitud es la necesidad de aplicar una herramienta didáctica para el desarrollo investigativo con los estudiantes; no obstante, distan en términos de los enfoques debido que, en el primer caso; es

decir la investigación citada, se refine básicamente a la mediación instrumental del ambiente de geometría dinámica por el contrario, el interés investigativo de este estudio, está focalizado en identificar el nivel de razonamiento matemático de los estudiantes.

La investigación desarrollada por (Mazo & Suárez, 2009). Titulada: *las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo*. Tiene como objetivo identificar la forma como construyen los estudiantes las relaciones entre las propiedades de los rectángulos, rombo y paralelogramo. Para llevar a cabo el objetivo de esta investigación, se diseñaron entrevistas y actividades de aula, que fueron implementadas a los 3 más aptos en geometría de un grupo de 38 estudiantes, estos fueron seleccionados de manera directa a raíz de lo observado en las clases.

Entre sus resultados señalan, a) los estudiantes perciben en cuanto a la posición de las figuras, que esta pierde sentido sino está presentada en la posición canónica (e.g., el cuadrado cuando no está en su posición clásica debe considerarse como rombo). b) Los estudiantes dibujaron a los cuadrados, rombos y rectángulos como clásicamente se han dado a conocer en el aula de clases y en libros de geometría, porque que generalmente presentan que las bases del cuadrado y del rectángulo son horizontales y el rombo se encuentra ubicado de punta. Pero no hay evidencias del dibujo del paralelogramo porque los estudiantes no están familiarizados con ellos.

Entre los resultados de las entrevistas para indagar por las relaciones interfigurales, los estudiantes establecieron diferencias entre los cuadriláteros presentados, y sobre todo en la medida de sus lados y la percepción de las medidas de las figuras. Entre sus resultados a) los estudiantes afirman que las diagonales de un rectángulo son iguales, la cual es una de las características principales de ellas (e.g., se cruzan por la mitad). Finalmente, esto permitió que

los estudiantes dejaran de lado las características irrelevantes de las figuras para dar paso a la acción cognitiva que generó la asociación entre la figura geométrica como tal y sus relaciones estructurales.

El antecedente citado es fundamental para el desarrollo de la presente investigación porque justifica las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros, lo que significa que, permite observar las características de los cuadriláteros cuando los mismos son modificados.

CAPÍTULO 2.

Marco de referencia conceptual

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que sustentan la presente investigación. Inicialmente se discuten los aspectos teóricos concernientes al Modelo de Van Hiele (MVH), los cuales incluyen: niveles de razonamiento y fases de aprendizaje. Posteriormente, se expone la manera en la cual esta investigación define, matemáticamente, los cuadriláteros. Seguidamente se expone la importancia de usar herramientas tecnológicas (Geogebra). Finalmente, se discuten algunos elementos de tipo curricular. Entre ellos, los estándares que el MEN (2006) considera necesario trabajar con los estudiantes de grado séptimo, así como su coherencia horizontal.

2.1. El Modelo De Van Hiele (MVH)

El MVH surgió como resultado de las reflexiones conjuntas que hicieron los esposos y profesores Pierre Van Hiele y Dina Geldof, al intentar explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes.

En sus inicios (década de los 60's y 70's) el MVH tuvo un gran impacto en los desarrollos curriculares para la enseñanza de la geometría, tanto en la Unión Soviética, como en los países bajos. Si bien, este modelo fue ignorado en los EEUU por muchos años, poco a poco fue aceptado y reconocido como una estrategia eficaz para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Ramírez, 2014) ; (Jaime A. , 1993).

El MVH está constituido por dos componentes: descriptivo e instructivo. El primero sugiere diferentes niveles de razonamiento matemático en los estudiantes, como indicadores para

valorar sus progresos en la comprensión de los conceptos geométricos. El otro componente, indica pautas que pueden seguir los profesores para favorecer el progreso de los estudiantes a través de los diferentes niveles de razonamiento.

2.1.1. Niveles de razonamiento

El MVH está conformado por cinco niveles de razonamiento, a saber: 1) reconocimiento o visualización, 2) análisis, 3) deducción informal, 4) deducción formal, y 5) rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. Dichos niveles cumplen con la propiedad de *jerarquización* y *secuencialidad*, lo cual implica que el paso de un nivel a otro más sofisticado, requiere el tránsito por los niveles precedentes.

Además, cada nivel guarda su propio lenguaje, lo que significa que existe una *relación de dependencia entre el lenguaje y los niveles de razonamiento*. Otra característica de estos niveles es la *localidad* que se entiende como la capacidad de los estudiantes para razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría.

Finalmente, el MVH plantea que el paso de un nivel a otro se produce de manera brusca como si se tratara de un salto, característica que se reconoce como *continuidad en los niveles de razonamiento*.

A continuación, se exponen las características principales de cada uno de los niveles de razonamiento tomando como referente la investigación de Jaime (1993) y Ramírez (2014).

- **Nivel 1. Reconocimiento o visualización:** El individuo tiene una percepción global y una percepción individual de las figuras, es decir, reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de las figuras. Logran producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No suelen reconocer o explicar las

propiedades o partes que componen las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

- **Nivel 2. Análisis:** El individuo puede ya reconocer y describir las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas, pero no establecen relaciones o clasificaciones entre las propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones dadas por los libros de texto o los profesores de matemáticas, de la geometría que se establecen a partir de propiedades, no logran elaborar definiciones.

- **Nivel 3. Deducción informal:** En este nivel de clasificación los estudiantes o el individuo pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. También definen correctamente conceptos y tipos de figuras. El individuo ubicado en el nivel 2 no era capaz de entender que unas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora puede entender, por ejemplo, que en un cuadrilátero la congruencia entre ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados opuestos. Pero no logran hacer una demostración formal completa es decir no pueden realizar razonamientos lógicos formales ya que no comprenden ni tienen una visión manera global de las demostraciones y no comprenden su estructura.

- **Nivel 4. Deducción formal:** El individuo en este nivel ya realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Tienen capacidad de adquirir una visión global de las demostraciones y también para comprender la estructura axiomática de las matemáticas. Interpretan cómo se puede llegar a los

mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado.

- **Nivel 5. Rigor:** El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas axiomáticos, deductivos y compararlos entre sí. Entienden la geometría en forma abstracta basándose en un sistema de axiomas específico.

Es importante aclarar que, en la presente investigación, únicamente, se considera el trabajo con los primeros tres niveles de razonamiento, puesto que el nivel de escolaridad sobre el cual se ejecuta el estudio no incluye actividades, enmarcadas en demostraciones formales y rigurosas que dan cuenta de los niveles 4 y 5.

2.1.2. Fases para el aprendizaje

El MVH integra un componente instructivo, el cual consiste en una serie de fases que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje de sus estudiantes. En cada uno de los niveles se plantean cinco fases de aprendizaje: i) interrogación o información, ii) orientación dirigida, iii) explicitación, iv) orientación libre, v) integración.

Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel, lo cual implica que en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la fase i) y continua así, de tal forma que al terminar la fase v) debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Jaime A. , 1993).

Fase i) Interrogación o información: En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este. Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

La finalidad es que el docente obtenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y que los estudiantes, logren adquirir esos conocimientos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula de clases.

Fase ii) Orientación dirigida: Se orienta a los estudiantes mediante actividades que lo guíen a una solución (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor debe seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades cuando lo necesiten.

De acuerdo con Jaime (1993), esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. El papel del profesor resulta primordial en esta fase, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento.

Fase iii) Explicitación: Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel.

En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de

conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

Fase iv) Orientación libre: En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna.

Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele (1986; p. 54 citado por Jaime 1993), “los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales”. Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

Fase v) Integración: Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si ya se ha conseguido.

Finalmente, el MVH lo que pretende de acuerdo a las dificultades que presentan los estudiantes, es que a través de los niveles de razonamiento se logren reconocer los obstáculos que presentan los estudiantes con respecto a ciertos conceptos y relaciones geométricas y con la fases de aprendizaje se diseñan las clases y actividades que beneficien a los estudiantes en su aprendizaje permitiéndole tener un avance en los niveles.

2.2. Referente matemático

En este apartado se presenta definiciones, características y propiedades de los diferentes cuadriláteros que son objeto de interés en esta investigación. Para ello, se toma como principal referente los libros de textos de (Rodriguez de abajo & Alvarez, 2005, págs. 86-87) y (Grupo fénix, 2014, págs. 142-143)

Cuadriláteros: Definiciones, características y propiedades.

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Clases de cuadriláteros:

- **Paralelogramos:** tienen paralelos dos a dos los lados opuestos.

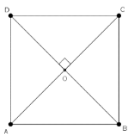
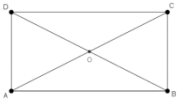
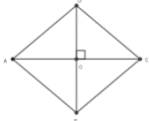
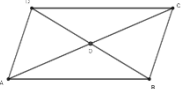
Pueden ser: **cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.**

- **Trapezios:** tienen dos lados paralelos.

Pueden ser: rectángulos, isósceles y escalenos.

Paralelogramos

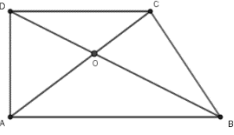
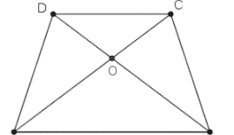
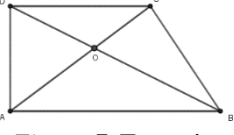
Tabla 3. Características y propiedades de los cuadriláteros paralelos

Cuadriláteros	Lados	Diagonales	Ángulos	
 <p><i>Figura 1. Cuadrado</i></p>	Congruentes	Congruentes y perpendiculares	Congruentes y rectos	Los cuatro lados son iguales; ángulos de 90°. Las diagonales son iguales y perpendiculares y se bisecan, es decir se cortan en el punto medio.
 <p><i>Figura 2. Rectángulo</i></p>	Opuestos congruentes	Congruentes	Congruentes y rectos	Dos a dos lados iguales y paralelos; cuatro ángulos de 90°. Las diagonales son iguales, oblicuas y se bisecan.
 <p><i>Figura 3. Rombo</i></p>	Congruentes	Congruentes, no perpendiculares	Opuestos congruentes	Los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos pero oblicuos los lados consecutivos. Las diagonales son desiguales, perpendiculares y se bisecan
 <p><i>Figura 4. Romboide</i></p>	Opuestos congruentes	No congruentes	Opuestos congruentes	Dos a dos los lados son iguales y paralelos. Las diagonales son desiguales, oblicuas y se bisecan.

Fuente: Elaboración propia 2019

No paralelogramos

Tabla 4. Características y propiedades de los cuadriláteros no paralelogramos

Cuadriláteros	Lados	Diagonales	Ángulos	
 <p>Figura 5. Trapecio Rectángulo</p>	Desiguales	Desiguales	Dos ángulos rectos	Dos lados paralelos y dos ángulos rectos. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.
 <p>Figura 6. Trapecio Isósceles</p>	No paralelos congruentes	Congruentes	Dos agudos y dos obtusos	Dos lados paralelos y los ángulos iguales dos a dos. Las diagonales son iguales, oblicuas y no se bisecan.
 <p>Figura 7. Trapecio escaleno</p>	Desiguales	Desiguales	Desiguales	Dos lados paralelos y los ángulos desiguales. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.

Fuente: Elaboración propia 2019

Se tomaron estas definiciones y características por la actualidad de sus conceptos y la ampliación de aplicaciones sin desconocer que las dadas por Euclides sirvieron de base para el desarrollo de estos objetos matemáticos y que por el uso de las TIC se descubren nuevas características y nuevos desarrollos de los mismos.

2.3. Referente didáctico

La importancia de implementar el software Geogebra en la secuencia de actividades, consiste en facilitar la visualización y manipulación del objeto matemático, a los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano.

Las TIC en las aulas hacen que se evidencie la necesidad de nuevas definiciones de roles, tanto para estudiantes como profesores. Las nuevas tecnologías, permiten a los estudiantes adquirir mayor autonomía y responsabilidad en el proceso de aprendizaje, obligando al docente a salir de su rol clásico como única fuente de conocimiento. Esto finalmente, genera incertidumbres, tensiones y temores; realidad que obliga a una readecuación creativa de la institución escolar (Lugo 2018 citado por la UNESCO, 2013, pág. 16).

(Arias, Guillén, & Ortiz, 2011) sustentan que el uso apropiado de las tecnologías posibilitan, una mejor visualización de los problemas y entes matemáticos ayudando desde distintos puntos de vista, a comprender de mejor manera los temas esenciales y desapareciendo algunos obstáculos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, pero se debe ser inteligentes en el momento de su uso, ya que no es sustituto de los conocimientos básicos, sino una herramienta que permite potenciar a los estudiantes, adquiriendo finalmente un conocimiento más profundo que permita a docentes y educandos reflexionar, razonar y resolver problemas.

La tecnología no debe ser utilizada solo por el afán de usarla, su manejo se basa en buscar la manera de que la tecnología se convierta en un apoyo para que la experiencia de aprendizaje sea enriquecedora (Cordoba & Cardeño, 2013).

Software Geogebra

Geogebra es un software de matemática dinámica para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos de geometría, álgebra y cálculo. También es un software que proporciona imágenes que ayudan a entender, comprender o plantear situaciones geométricas con las que desarrollar o aplicar contenidos que se recogen en el currículo de la asignatura de matemáticas (Cordoba & Cardeño, 2013).

El software Geogebra, es un Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para educación en todos sus niveles. “Geogebra fue creado para ayudar a los estudiantes a obtener una mejor comprensión de las matemáticas. Orientada a los problemas, promoviendo experimentos y descubrimientos en el aula”. (Ramírez, 2014)

2.4. Referente curricular

De acuerdo con lo expresado por el (MEN, 1998), se argumenta que la geometría posee herramientas que permiten al individuo interpretar, entender y apreciar un mundo eminentemente geométrico, estableciendo una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial, procesos de nivel superior y también diversas formas de argumentación.

Además, en el énfasis del hacer matemático escolar estarían en aspectos tales como: la comprensión y uso de las propiedades de las figuras, las interrelaciones entre estas mismas, los efectos de las diferentes transformaciones que se ejercen sobre las figuras, el reconocimiento de propiedades del objeto matemático, relaciones a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas, resolución de situaciones problemas que favorecen diferentes miradas desde lo analítico, lo sintético y lo transformacional.

Según el (MEN, 1998), los sistemas geométricos se hacen con énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones..

Según (MEN, 2006), los sistemas geométricos y el pensamiento espacial de los grados 6-7, logran en los estudiantes la capacidad de clasificar polígonos en relación con sus propiedades

y la de resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales; lo cual, forma parte de la coherencia horizontal, que debe tener el aprendizaje de la geometría en el grado 6 -7 de básica secundaria, de acuerdo con lo expresado por el MEN.

Tabla 5. *Coherencia horizontal*

Grado 6º-7º		
Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.	Pensamiento geométrico: Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.	Pensamiento métrico y sistemas de medidas: Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

Fuente: Estándares Básico de Competencia en Matemáticas del MEN 2006

De acuerdo con la tabla 3, se puede establecer que la competencia básica del estudiante del grado séptimo, corresponde al manejo de los polígonos y su clasificación con relación a sus propiedades a través de la representación espacial. Teniendo en cuenta que el estudio de estas propiedades espaciales en el que se involucran la métrica son las que en un momento, se convierten en conocimientos formales de la geometría, caso particular, en teoremas de la geometría euclidiana.

Según el (MEN, 1998), lo anterior implica trabajarlo con objetos artesanales y tecnológicos, para que el desarrollo del pensamiento espacial sea motivador y enriquecedor. Por lo tanto, el MEN construye unos lineamientos para la incorporación de las Nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas. Estas le permiten al estudiante tener una actitud más activa, es por eso que el uso de las herramientas tecnológicas en la escuela, conllevan a enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos (Castrillón, 2013).

Por lo tanto, se anota que los referentes curriculares son aquellos elementos temáticos contenidos de metodologías, estrategias, conceptos, temas, y enfoques de un área específica, útiles para la promoción de la enseñanza y del aprendizaje en el aula. Por lo tanto, puede decirse

que los referentes curriculares se inscriben como la ruta para que el proceso educativo se haga efectivo, involucrando tanto actores, como escenarios, contenidos y metodologías que son elementos constitutivos del acto de la educación.

Los estándares son herramientas que están dentro de la educación, ya sea en el desarrollo del plan de áreas, asignaturas o para preparar clases. También están incluidas en el diseño de las diferentes pruebas que presentan los estudiantes de manera nacional e internacional, por lo tanto es un elemento de gran importancia en el marco.

CAPÍTULO 3.

Metodología de la investigación

En este capítulo se dará a conocer los elementos del método de investigación implementado. Inicialmente se presenta el enfoque en el cual se inscribe la investigación, el estudio de caso, los elementos metodológicos proporcionados para la investigación y los pasos que se deben seguir para alcanzar el objetivo propuesto. Luego se discute el contexto, la población en donde se llevó a cabo el estudio de casos, el instrumento que se utilizó para recolectar los datos de la investigación y para finalizar se presentan las categorías de análisis y el análisis de las actividades.

3.1. Diseño Metodológico

En concordancia con los objetivos propuestos en esta investigación, el diseño metodológico se inscribe en el *enfoque cualitativo*, el cual posibilita la explicación detallada de los fenómenos, sus comportamientos y manifestaciones, favoreciendo la exploración del contexto a través de descripciones más detalladas y completas de la situación (Martinez, 2006).

Se ha optado por un *estudio de casos descriptivo* (Morra & Friedlander, 2001). Dicha perspectiva permite examinar una situación particular de interés, añadir realismo, ejemplos de fondo y generar hipótesis para posteriores investigaciones.

Los elementos metodológicos proporcionados por un estudio de casos descriptivo no constituyen una delimitación absoluta para la presente investigación. Adicionalmente se consideran los aspectos metodológicos proporcionados por el *MVH*, particularmente las *fases de*

aprendizaje. Finalmente, se rescatan algunos elementos metodológicos utilizados por investigaciones con intereses similares, las cuales han sido documentadas en los antecedentes.

Este trabajo de investigación, tiene como propósito diseñar e implementar una secuencia de actividades, para caracterizar el nivel que alcanzan los estudiantes.

Para lograr el objetivo propuesto en el presente trabajo, se ha considerado continuar los siguientes pasos.

Paso 1: examinar los aspectos que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

Paso 2: diseñar cada una de las actividades orientadas por el MVH e implementarlas con los estudiantes.

Paso 3: identificar el nivel que alcanzan los estudiantes en cada una de las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis.

3.2. Diseño del estudio de casos

3.2.1. Contexto y población de estudio

La población de estudio se conformó con 10 de 30 estudiantes que cursan séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano, de carácter oficial, ubicado en la zona Urbana del distrito de Buenaventura. Estos estudiantes fueron sugeridos por el docente del área de matemáticas quien orientaba el curso, al señalar mayor atención y compromiso por parte de los mismos.

Al indagar con el docente del área se verificó que los estudiantes habían trabajado con anterioridad el tópico de los cuadriláteros y que tenían los conocimientos previos necesarios, al menos desde lo curricular, para afrontar las actividades propuestas.

Las actividades fueron desarrolladas en el contexto de aula de clases, específicamente en una de las salas de sistemas de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano.

La verdadera identidad de los 10 estudiantes será protegida, por lo tanto, estos serán nombrados a través de diferentes letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, para así identificar los resultados de cada uno ellos.

3.2.2. Instrumentos para la recolección de datos

El instrumento de recolección de datos fue la observación participante de las actividades que los estudiantes realizaron en papel y el software Geogebra. Estas constituyen una fuente de información importante para la configuración del caso, porque ponen de relieve la actividad matemática desplegada por los estudiantes para su posterior estudio a través de una rejilla de análisis.

Según (Kawulich, 2005, pág. 7) la observación participante permite la descripción detallada de los comportamientos, intenciones, situaciones y eventos que son comprendidos por los informantes, también mejora la calidad de la recolección e interpretación de datos, facilitando el desarrollo de preguntas nuevas o hipótesis de investigación.

En cuanto a los instrumentos tecnológicos empleados, cabe mencionar que cada estudiante que conforma el caso tiene acceso a su propio computador de escritorio, para un total de diez computadores con el software Geogebra instalado.

Adicionalmente, se emplea una cámara fotográfica de un celular con el objetivo de registrar el trabajo de los estudiantes en algunas de las actividades propuestas.

3.2.3. Diseño de la secuencia de actividades

Teniendo en cuenta la investigación de Maguiña (2013) se consideran elementos constitutivos para el diseño de las actividades de la *secuencia*.

La secuencia consta de 8 actividades, cada actividad está orientada por una de las fases del modelo de Van Hiele; también, tienen un propósito y diferentes pasos a seguir.

Las actividades 1, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, fueron tomadas de la tesis de Maguiña (2013), se denomina: “Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele. Pero las actividades 1, 3, 4, 5, 8 están modificadas porque el problema de la tesis de Maguiña (2013), es diferente a esta investigación.

A la actividad 1 se le anexó una serie de preguntas, entre ellas; justificar por qué las figuras que seleccionó eran cuadriláteros y finalmente escribir las diferencias entre un cuadrilátero y otras figuras geométricas como es el caso del triángulo, circunferencia y pentágono.

A la actividad 3, se le modificó la forma de presentar la pregunta, pero finalmente conserva el contenido, como lo expone Maguiña (2013).

La actividad 4, con relación a lo propuesto por Maguiña (2013), se le anexo un segundo procedimiento acompañado de unas preguntas, en este procedimiento tenían que identificar e indicar en el software Geogebra, cuál de los cuadriláteros construidos era el romboide y el trapecio, luego justificar las semejanzas y diferencias entre ambas figuras y finalmente indicar porque la figura que seleccionó era un romboide y luego hacer lo mismo con el trapecio.

Con relación a la actividad 5 se le agregó una pregunta, donde los estudiantes tenían que mencionar los cuadriláteros que identificaban en la figura que reconstruirían y a la actividad 8 solo se le modificó la forma de presentar la pregunta.

La tesis de Maguiña (2013), ha sido de gran apoyo para este trabajo, dando uso a referentes y herramientas como el modelo Van Hiele, el software Geogebra y el objeto matemático.

La tesis de Maguiña (2013) a diferencia de esta investigación, la llevó a cabo con estudiantes cuarto año de educación secundaria de la Institución Educativa Particular Buenas Nuevas (Lima _ Perú).

3.3. Categorías de análisis

Las producciones de los estudiantes son interpretadas en términos de unas categorías de análisis sustentadas en los *niveles de razonamiento* del *MVH* y en las *fases de aprendizaje*. Inicialmente, se describe la actividad matemática asociada a cada nivel, en el marco del trabajo con cuadriláteros. Para ello fue fundamental la investigación desarrollada por Maguiña (2013) puesto que ayudó a delimitar, con mejor claridad, las características de los niveles de razonamiento cuando los estudiantes resuelven actividades con cuadriláteros enmarcados en un ambiente de geometría dinámica.

- **Nivel 1. Reconocimiento:** los estudiantes identifican, en diferentes contextos, varios tipos de cuadriláteros por su aspecto físico, aunque tal reconocimiento queda supedito a la posición de los mismos en el plano. Además, los estudiantes pueden reproducir los diferentes tipos de cuadriláteros conocidos.

- **Nivel 2. Análisis:** los estudiantes definen los cuadriláteros mediante una enumeración exhaustiva de sus propiedades, pero no son capaces de establecer propiedades mínimas para caracterizarlos. Siguen percibiendo los cuadriláteros de manera aislada, aunque pueden deducir propiedades mediante experimentación.
- **Nivel 3. Deducción informal:** los estudiantes caracterizan los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales, para establecer relaciones entre las principales propiedades de los mismos. De esta manera, los estudiantes pueden deducir de manera informal unas propiedades a partir de otras.

Posteriormente, estas categorías de análisis se enriquecen mediante la consideración del componente instructivo del *MVH* (las fases de aprendizaje). Por un lado, la *fase de explicitación* permite reconocer el papel que juega el lenguaje en cada uno de los niveles; es decir, la importancia que tiene identificar lo que los estudiantes expresan en palabras o por escrito acerca de los resultados obtenidos.

Por otra parte, la fase de *orientación libre* permite reconocer que, en cada nivel, los estudiantes pueden resolver ciertos tipos de problemas empleando unas estrategias específicas. De esta manera, la tabla 6 propone unos indicadores para cada nivel, en el trabajo con cuadriláteros, destacando el aporte de las fases de aprendizaje.

Tabla 6. Categorías de análisis de los niveles de razonamiento para el trabajo con cuadriláteros

Niveles	Cuadriláteros	Lenguaje	Resolución de problemas
<i>Nivel 1: Reconocimiento</i>	Identifica varios tipos de cuadriláteros a partir de su forma global, pero esta identificación esta supedita a la posición del cuadrilátero en el plano	No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a los cuadriláteros por su nombre	Resuelve problemas que involucran la clasificación de cuadriláteros empleando como estrategia de resolución la forma global de la figura
<i>Nivel 2: Análisis</i>	Reconoce propiedades de los cuadriláteros pero no establece propiedades mínimas para definir un cuadrilátero dado.	No hay un lenguaje desarrollado para elaborar una definición precisa de las propiedades de un cuadrilátero, aunque puede explicar y justificar los resultados obtenidos.	Resuelve problemas enmarcados en la búsqueda de propiedades de los cuadriláteros, utilizando la exploración y la manipulación.
<i>Nivel 3: Deducción informal</i>	Relaciona los diferentes tipos de cuadriláteros estableciendo unas propiedades a partir de otras	Se utiliza un lenguaje apropiado para definir correctamente diversos tipos de cuadriláteros estableciendo condiciones mínimas	Resuelve problemas que requieren la relación entre varias propiedades de un cuadrilátero.

Fuente: Elaboración propia 2018.

Finalmente, con base a las categorías de análisis construidas en la tabla 6 y los objetivos propuestos para cada una de las actividades de la secuencia, se construyeron los indicadores de los niveles de razonamiento. De esta manera, se explicita la actividad cognitiva que delimita el nivel de razonamiento matemático en el que puede inscribirse un estudiante (ver tabla 7).

Tabla 7. Aplicación de los niveles en las diferentes actividades

Actividad	Nivel 1: Reconocimiento	Nivel 2: Análisis	Nivel 3: Deducción informal
1	Los estudiantes reconocen los cuadriláteros por su forma global.	No aplica, porque los estudiantes no reconocen las propiedades de los cuadriláteros.	No aplica, porque no establecen relaciones de inclusión entre cuadriláteros.
2	Los estudiantes reconocen que un cuadrilátero queda determinado por cuatro lados.	Los estudiantes, reconocen algunas propiedades de los cuadriláteros, a través medición de lados y ángulos.	Los estudiantes establecen relaciones, partiendo de las similitudes y diferencias entre algunos cuadriláteros.
3	No aplica, porque esta actividad implica la identificación de propiedades de los cuadriláteros.	Los estudiantes identifican propiedades de los cuadriláteros.	Los estudiantes establecen relaciones con las propiedades de los cuadriláteros.
4	Los estudiantes reconocen los cuadriláteros por su forma global.	Los estudiantes reconocen propiedades de los cuadriláteros, a través de construcciones en el software de geometría dinámica.	Los estudiantes establecen relaciones de inclusión entre algunos cuadriláteros. Por ejemplo: señalando semejanza entre un cuadrado y un rombo.
5	Identifican los diferentes cuadriláteros a partir de la construcción de una figura.	Reconocen los diversos tipos de cuadriláteros, sin establecer propiedades.	No aplica, porque la actividad no implica establecer relaciones de inclusión entre cuadriláteros.
6	Los estudiantes deben establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.	Reconocen propiedades principales de los cuadriláteros.	No aplica, porque no implica establecer relaciones entre los diferentes tipos de cuadriláteros.
7	No aplica, porque esta actividad implica la identificación de propiedades de los cuadriláteros.	Identifican propiedades principales de los cuadriláteros.	No aplica, porque la actividad no incluye establecer relaciones entre los diferentes tipos de cuadriláteros.
8	No aplica, porque la actividad implica caracterizar a los cuadriláteros a través de algunas propiedades.	Reconocen propiedades principales de los cuadriláteros.	Los estudiantes caracterizan a los cuadriláteros, conforme a sus lados, ángulos y diagonales.

Fuente: Elaboración propia 2018.

Las diferentes categorías de análisis expuestas en el estudio, conllevan al planteamiento analítico de los cuadriláteros y el nivel de razonamiento de los estudiantes frente a estos. Por tanto, el reconocimiento, análisis y deducción informal, son conceptos clave que, en este caso particular, se tienen en cuenta en el contexto propio de las competencias en el conocimiento de los cuadriláteros, su clasificación y propiedades.

CAPÍTULO 4.

Intervención didáctica, análisis y conclusión de la investigación

En este capítulo se presentan los momentos de intervención, incluyendo la forma en cómo se llevó a cabo la implementación y los resultados. Finalmente se plantea la conclusión del trabajo de investigación, permitiendo establecer el alcance del objetivo general y la pregunta problema, a partir de los objetivos específicos de la investigación, teniendo en cuenta los aportes de tipo teórico y metodológico.

4.1. Momentos de intervención didáctica

Se presentó a los estudiantes un diseño de introducción al software Geogebra, debido a que los alumnos no tenían conocimientos previos sobre el software.

La utilización del software Geogebra, con los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa Técnica Industrial Gerardo Valencia Cano, se llevó a cabo con la finalidad de familiarizar al grupo con la plataforma educativa y más allá de familiarizar a los estudiantes con la herramienta virtual, se hizo con el propósito que los mismos se relacionen con el manejo de la plataforma Geogebra haciendo uso exploratorio de la misma, enfatizando en los cuadriláteros, de manera que los mismos, contaron con la oportunidad de confrontar sus conocimientos previos, usando el software pero a su vez, avanzar en la comprensión de un tema que a simple vista parece no generar dificultades a los estudiantes en su abordaje y comprensión lógica, pero que evidencia la existencia de sentidas debilidades en cuanto a la comprensión y conocimiento de sus propiedades, específicamente cuando se trata de las modificaciones a las

cuales los cuadriláteros son expuestas, cuando se requiere identificar el nivel de conocimiento del alumno, en relación al tema planteado.

Es así como, se considera que la herramienta virtual Geogebra, es un elemento indispensable en el marco de la actual investigación. Geogebra, permite realizar construcciones de geometría elemental, teniendo en cuenta que los objetos que se construyen pueden ser definidos por propiedades cualitativas, una vez realizada la construcción está se puede mover y deformar, pero las condiciones que definen a los objetos no se alteran.

Según (Rodríguez, 2017, págs. 13-14), El uso de Geogebra, permite interactuar dinámicamente con contenidos temáticos en las áreas de las ciencias, las tecnologías y la vida cotidiana, enriqueciendo la parte visual (figuras en varias dimensiones) que permite observar las matemáticas desde diferentes perspectivas, ayudando en la retroalimentación.

En relación con la enseñanza tradicional el software Geogebra permite que los estudiantes puedan verlo desde diferentes planos mientras que en el papel o el tablero, era dificultoso mostrar las distintas dimensiones del objeto matemático por lo tanto este software permite unas dinámicas que ayudan a mejorar el conocimiento del objeto en sus características como también su maniobrabilidad.

4.1.1. Implementación de la secuencia de actividades

Las actividades de la secuencia didáctica se distribuyeron en dos sesiones, éstas se desarrollaron en la sala de sistemas de la Institución Educativa de manera individual con un grupo de diez estudiantes. Pero, las producciones de las actividades que conforman la secuencia se realizaron en el contexto de papel y lápiz.

Sesión 1:

En esta sesión se desarrolló con los estudiantes la actividad 1 que corresponden a la fase información, y las actividades 2 y 3 pertenecientes a la fase orientación dirigida por el modelo de Van Hiele. Con un tiempo determinado de 2 Horas (120 minutos) el día 17 de noviembre del 2016.

Actividad 1. Esta actividad se desarrolló de manera física con el uso del software, su diseño presentaba diferentes figuras geométricas. Y el estudiante tenía que colorear aquellas que consideraba que eran cuadriláteros, luego de que reconociera y coloreara las figuras que consideraba cuadriláteras, tenía que responder una serie de preguntas, en un tiempo determinado de 40 minutos.

Se observó que los estudiantes trabajaron sin ninguna dificultad, no realizaron ningún tipo de pregunta. Por lo que identificaron perfectamente los cuadriláteros basándose en la definición que ellos tenían de que los cuadriláteros tienen cuatro lados, permitiéndoles identificar las diferencias que tienen los cuadriláteros con algunas figuras planas tales como: los triángulos, circunferencias (círculos) y los pentágonos.

Actividad 2. El estudiante halló a cada uno de los cuadriláteros sus medidas seleccionando las herramientas de distancia y de ángulo, para luego dar respuestas a una serie de preguntas. En esta actividad el estudiante entraba nuevamente en contacto con la herramienta computacional, manipulando el software Geogebra dando uso a algunas de sus herramientas, el cual fue algo increíble y emocionante para los estudiantes. Se realizó de manera individual con tiempo estipulado de 50 minutos.

Se evidencio que los estudiantes colocaron los datos que se les solicitaba y con la simulación que se les pedía hacer en el siguiente punto de la actividad, ellos describieron, compararon claramente lo solicitado, dando respuestas a cada una de las preguntas.

En esta actividad, se trabaja con los 5 cuadriláteros seleccionados para el trabajo de grado. La actividad se diseñó con el propósito de que estos cuadriláteros fueran identificados por sus nombres, teniendo en cuenta también las medidas de sus lados y las medidas de sus ángulos.

Actividad 3. Su desarrollo fue de manera individual con una duración de 30 minutos, en esta actividad tenían que observar detenidamente los diferentes cuadriláteros que les presentaba en un archivo de Geogebra. Luego tenían que identificar si alguno de los cuadriláteros construidos cumplía con las características presentadas en la tabla. Y realmente los resultados fueron satisfactorios resaltando que, algunos de los estudiantes en esta sección tuvieron inquietud, porque estaban presentando confusión entre el significado de los lados paralelos y perpendiculares, pero ya una vez teniendo clara cual correspondían a quien, lograron cumplir con el objetivo de la actividad.

Sesión 2:

En esta sesión, se aplicó con los estudiantes inicialmente la actividad 4 correspondientes a la fase de explicitación, seguido la actividad número 5 de la fase orientación libre, las actividades 6 y 7 pertenecientes a la fase de integración y finalmente la actividad número 8 de la fase información del modelo de Van Hiele. Con un tiempo determinado de 1h: 50 min (110 minutos) el día 18 de noviembre del 2016.

Actividad 4. Esta actividad se desarrolló en la sala de sistema del Instituto, dando uso del software Geogebra, los estudiantes tenían que observar los cuadriláteros que se le presentan y luego identificar el cuadrilátero que se le menciona para finalmente explicar con sus palabras el por qué lo seleccionó.

Se desarrolló en un periodo de tiempo de 20 minutos, no presentaron ninguna dificultad en el momento de identificar y explicar, porque los estudiantes desde la actividad 2 venían familiarizados con los 5 cuadriláteros a trabajar, teniendo en cuenta sus nombres y propiedades básicas como ángulos y lados.

Actividad 5. En la hoja de preguntas, se le muestra al estudiante la imagen que debe reconstruir en el software Geogebra, luego de realizar la reconstrucción, en la hoja de respuestas debe mencionar los diferentes cuadriláteros que conforman la figura. Los estudiantes no presentaron dificultad para resolver la actividad y su duración fue de 30 minutos.

Actividad 6. Se desarrolló en un periodo de tiempo de 10 minutos, de manera individual, a papel y lápiz, el estudiante tenía que completar un diagrama realizando la clasificación de los cuadriláteros, que son paralelogramos y los no paralelogramos.

Actividad 7. Los estudiantes desarrollaron la actividad completando una tabla donde debían marcar con una X los elementos y propiedades principales que corresponde a los diferentes tipos de cuadriláteros. Se realizó de manera individual, a papel y lápiz en un tiempo determinado de 20 minutos.

Actividad 8. Esta actividad la desarrollaron en 30 minutos, a papel y lápiz. Los estudiantes tenían que leer detenidamente las 12 fichas que se les presentaba en esta actividad y luego escribir en la tabla cuales correspondían al cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y trapecio.

4.1.2. Resultados de la secuencia de actividades

Actividad 1. El 100% de los estudiantes que conforman el caso respondieron todas las preguntas propuestas. Además, colorearon acertadamente aquellas figuras geométricas que

representaban un cuadrilátero. Con relación a la pregunta 1 (¿Por qué consideras que las figuras que coloreaste son cuadriláteros?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante G (ver figura 8) quien indica que: “son cuadriláteros porque tienen cuatro lados y las figuras que tengan cuatro lados serán cuadriláteros”.

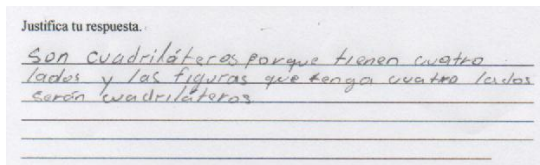


Figura 8. Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 1.1

En la pregunta 2 (¿Cuál es la diferencia entre los cuadriláteros y los triángulos?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta, ninguno respondió de manera incorrecta. A continuación, se muestra la respuesta dada por el estudiante G (ver figura 9).

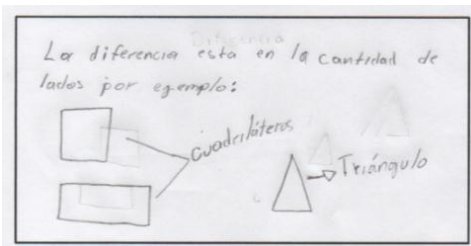


Figura 9. Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 1.2

Para la pregunta 3 (¿Cuál es la diferencia entre los cuadriláteros y la circunferencia?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta. En este caso, la mayoría de los estudiantes utilizaron el hecho de señalar que un cuadrilátero tiene lados y una circunferencia no. A continuación se muestra la respuesta dada por el estudiante A (ver figura 10).

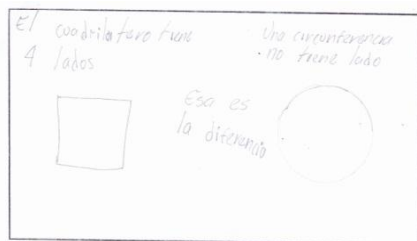


Figura 10. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 1.3

Con relación a la pregunta 4 (¿Cuál es la diferencia entre los cuadriláteros y el pentágono?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta, en este caso la mayoría de los estudiantes utilizaron el hecho de señalar la cantidad de lados que tiene cada figura. A continuación, se muestra la respuesta dada por el estudiante A (ver figura 11).

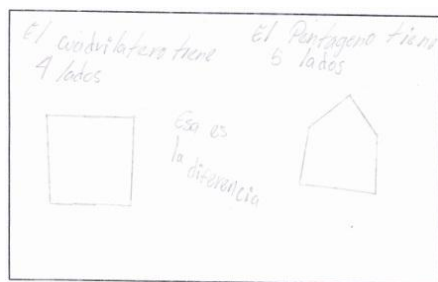


Figura 11. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 1.4

Actividad 2. El 100% de los estudiantes que conforman el caso respondieron todas las preguntas propuestas. Además, realizaron la medición de distancias y ángulos a cada uno de los cuadriláteros construidos en el software de geometría dinámica. Con relación al procedimiento 1 (colocar los datos obtenidos de cada una de las figuras geométricas en las siguiente tabla) el 100% registraron en la tabla los datos obtenidos. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante I (ver figura 12).

CUADRILÁTEROS	DISTANCIA DE CADA LADO				MEDIDA DE CADA ÁNGULO			
	AB	BC	CD	DA	1	2	3	4
Cuadrado	5	5	5	5	90°	90°	90°	90°
Rectángulo	7	3.5	7	3.5	90°	90°	90°	90°
Rombo	3.58	3.58	3.58	3.58	80.12°	99.88°	80.12°	99.88°
Romboide	5	4	4	5	46.77°	126.77°	59.49°	126.87°
Trapecio	5	3.16	3	3.16	71.57°	71.57°	108.43°	108.43°

Figura 12. Solución Dada Por El Estudiante I, Actividad 2. P1

En el procedimiento 2 se formula a través de una pregunta (¿Describe qué sucede cuando mueves el punto A del cuadrado con respecto a la medida de sus ángulos y de sus lados? Haz el mismo proceso con las otras figuras: rectángulo, rombo, romboide y trapecio) el 100% de los estudiantes dieron respuestas a la pregunta, la mayoría dieron respuestas similares, por ejemplo se muestra la solución dada por el estudiante C (ver figura 13) “si muevo el punto A del cuadrado y del rectángulo sus ángulos no cambiarían, pero sus lados solo cambiarían en la medida conservando la forma y si mueve el punto A del rombo, romboide y trapecio cambia sus ángulos y la medida de sus lados pero sigue teniendo la forma”.

CUADRILÁTEROS	DESCRIPCIÓN
Cuadrado	Si muevo el punto A del cuadrado sus ángulos no cambian, pero sus lados solo cambia en medida.
Rectángulo	Si muevo el punto A del rectángulo sus ángulos no cambian, pero sus lados solo cambia la medida conservando la forma del rectángulo.
Rombo	Si muevo el punto A del rombo sus ángulos cambian y también sus lados cambian en medida pero sigue teniendo la forma de rombo.
Romboide	Si muevo el punto A del romboide cambian sus ángulos y la medida de sus lados, pero sigue teniendo la forma de romboide.
Trapecio	Si muevo el punto A del trapecio cambian sus ángulos y la medida de sus lados, pero sigue teniendo la forma de la figura.

Figura 13. Solución Dada Por El Estudiante C, Actividad 2. P1

En el procedimiento 3 (Escribe lo que observas con respecto a la medida de los lados y ángulos del cuadrado, del rectángulo, del rombo, del romboide y el trapecio). El 100% de los estudiantes respondieron la pregunta, pero el 60% respondieron de acuerdo a lo observado en las construcciones y la tabla, para ilustrar este hecho se muestra la solución dada por el estudiante I (ver figura 14) quien indica que: “El cuadrado tiene todos sus lados iguales, todos sus ángulos miden 90° , el rectángulo tiene 4 lados y dos de ellos son diferentes, todos ángulos miden 90° , el rombo todos sus lados son iguales pero sus ángulos no, romboide tiene 4 lados pero dos de ellos son diferentes y sus ángulos son diferentes y el trapecio tiene 4 lados, dos iguales pero los otros no sus ángulos son dos diferentes dos de ellos miden 71.57° y los otros dos 108.43° ”.

CUADRILÁTEROS	Compara las medidas de cada cuadrilátero y escribe lo que observas.
Cuadrado	Todos sus lados son iguales y todos sus ángulos miden 90°
Rectángulo	Tiene 4 lados y dos de ellos son diferentes, todos sus ángulos miden 90° son rectos.
Rombo	Todos sus lados son iguales pero sus ángulos no.
Romboide	Tiene 4 lados pero dos de ellos son diferentes y sus ángulos son diferentes.
Trapecio	Tiene 4 lados, dos de ellos iguales pero los otros no, sus ángulos son dos diferentes, dos de ellos miden 71.57° y los otros dos 108.43° .

Figura 14. Solución Dada Por El Estudiante I, Actividad 2. P3

Luego de finalizar los 3 procedimientos los estudiantes tenían que responder diversas preguntas, la pregunta a (Es igual un cuadrado y un rombo. Marca con una X, SI o NO. Justifica tu respuesta) el 60% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta, en cambio el 40% respondieron de manera inadecuada. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: El estudiante E (ver figura 15) indica que: “Si, los dos tienen cuatro lados iguales y ángulos que miden 90° ”.

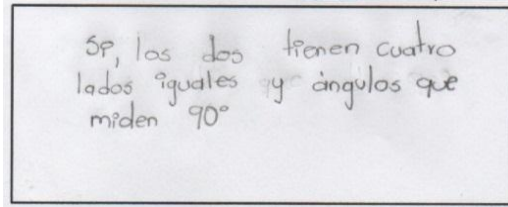


Figura 15. Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 2.a

La pregunta **b** (¿Qué similitudes hay entre un rectángulo y el romboide con respecto a la medida de sus lados y sus ángulos) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta, pero el 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta, en cambio el 40% dan respuestas adecuadas pero no lo suficientemente argumentadas. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: “Tienen cuatro lados y dos de sus lados son iguales” como es el caso del estudiante G. (ver figura 16).

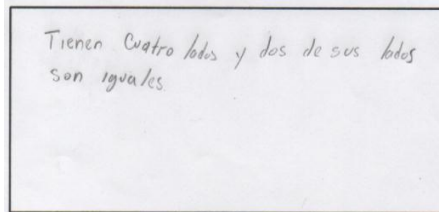
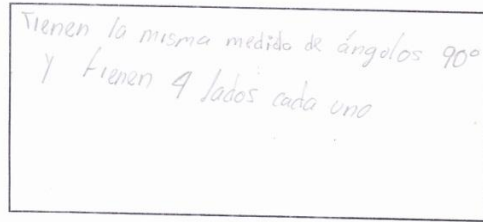


Figura 16. Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 2.b

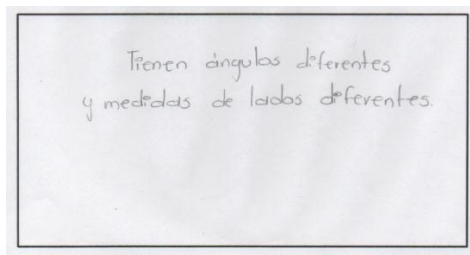
La pregunta **c** (¿Qué similitudes hay entre un cuadrado y un rectángulo con respecto a la medida de sus lados y sus ángulos?) el 100% de los estudiantes dieron respuestas a la pregunta, el 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante A (ver figura 17) quien indica que: “Tienen la misma medida de ángulos 90° y tiene 4 lados cada uno”.



Tienen la misma medida de ángulos 90°
y tienen 4 lados cada uno

Figura 17. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 2.c

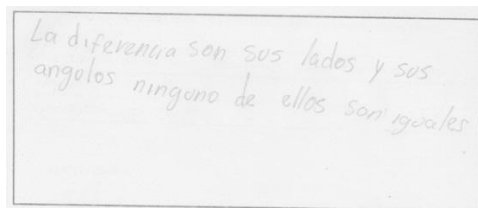
En la pregunta **d** (¿Qué diferencias existen entre un rombo y un rombide?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: “Tienen ángulos diferentes y medidas de lados diferentes”. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante E (ver figura 18).



Tienen ángulos diferentes
y medidas de lados diferentes.

Figura 18. Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 2.d

En la pregunta **e** (¿Qué diferencias existen entre un Cuadrado y un trapecio?) el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante A (ver figura 19) quien indica que: “la diferencia son sus lados y sus ángulos ninguno de ellos son iguales”.



La diferencia son sus lados y sus
ángulos ninguno de ellos son iguales

Figura 19. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 2.e

Actividad 3. El 100% de los estudiantes que conforman el caso respondieron todas las preguntas propuestas. Además, de observar detenidamente las figuras construidas, la pregunta 1 le indica al estudiante (identifique si alguno de los cuadriláteros construidos cumple con alguna de las siguientes características) el 40% no respondieron de manera correcta, en cambio el 60% de los estudiantes si respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante H, quien indica que (*ver figura 20*):

CARACTERÍSTICAS	ABCD	EFE'F'	GHG'H'	IJKL	MNOP
Tiene 4 ángulos rectos	X	X			
Tiene 2 ángulos rectos.					
No tiene ningún ángulo recto			X	X	X
Tiene 2 pares de lados paralelos	X	X	X	X	
Tiene un par de lados paralelos.					X
No tiene ningún par de lados paralelos					
Tiene diagonales perpendiculares		X	X	X	

Figura 20. Solución Dada Por El Estudiante H, Actividad 3.1

Actividad 4. El 100% de los estudiantes que conforman el caso respondieron todas las preguntas propuestas. Además, los estudiantes en el procedimiento 1, indicaron acertadamente la figura geométrica que representaba a un cuadrado y un rombo. Con relación a la pregunta a (¿Cuál es la diferencia entre el cuadrado y el rombo?). El 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta. Algunos escribieron, por ejemplo: “La diferencia entre estos es la posición” y otros estudiantes respondieron “la diferencia entre el cuadrado y el rombo está en la posición y la medida de sus ángulos, el cuadrado tiene ángulos rectos y el rombo no” como es el caso del estudiante C (*ver figura 21*).

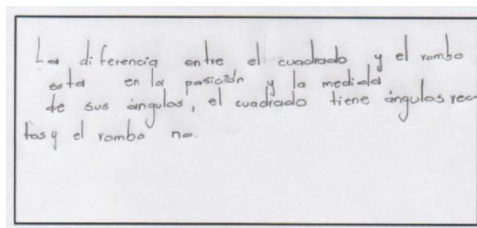


Figura 21. Solución Dada Por Estudiante C, Actividad 4.P1.a

La pregunta **b** (¿Existe alguna semejanza entre estas dos figuras geométricas? si las hay, ¿Cuáles son?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta a diferencia del 40%, estos, aunque respondieron bien no argumentaron lo suficiente. A continuación, se muestra la respuesta de dos estudiantes: El estudiante C, dice “si las hay, ambas tienen cuatro lados que miden iguales y sus lados son paralelos”, y otro estudiante responde “Si la hay, sus ángulos y sus lados.” como es el caso del estudiante B (ver figura 22).

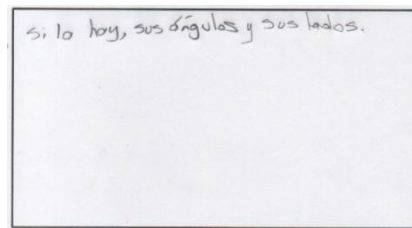


Figura 22. Solución Dada Por Estudiante B, Actividad 4.P1.b

Con relación a la pregunta **c** (¿Por qué la figura que seleccionó es un cuadrado?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta, la mayoría de los estudiantes dieron respuestas similares. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: “Por la posición en que esta se encuentra y por la medida de sus lados y ángulos”. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante E (ver figura 23).

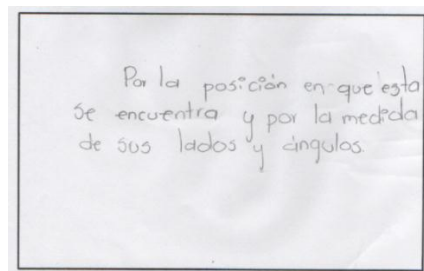


Figura 23. Solución Dada Por Estudiante E, Actividad 4.P1.c

La pregunta **d** (¿Por qué la figura que seleccionó es un rombo?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 40% de los estudiantes respondieron que, por la forma que tiene la figura, en cambio el 60% de los estudiantes tuvieron en cuenta lo que observaron en la construcción de la figura en el software Geogebra.

Algunos estudiantes respondieron que “por la posición y la forma que tiene la figura” y otros “por la medida de sus lados y por los ángulos que tiene” como es el caso del estudiante E (ver figura 24).

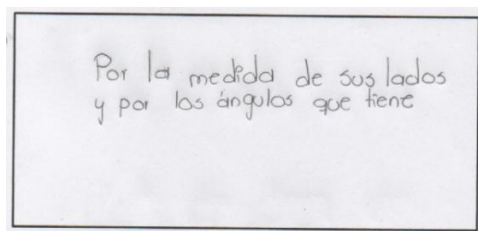
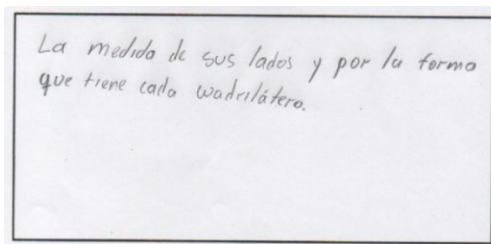


Figura 24. Solución Dada Por El Estudiante E, Actividad 4. P1.d

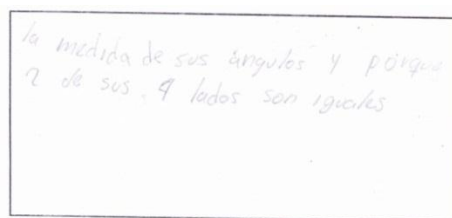
En el procedimiento 2, indicaron acertadamente la figura geométrica que representaba al trapecio y al romboide. Con relación a la pregunta **a** (¿Cuál es la diferencia entre el trapecio y el romboide?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta, en cambio el 40% respondieron bien, pero no con base a los cuadriláteros construidos. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: “la medida de sus lados y por la forma que tiene cada cuadrilátero” como es el caso del estudiante G (ver figura 25).



La medida de sus lados y por la forma que tiene cada cuadrilátero.

Figura 25. Solución Dada Por El Estudiante G, Actividad 4. P2.a

La pregunta **b** (¿Existe alguna semejanza entre estas dos figuras geométricas? Si hay ¿Cuáles son?), el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante: “la medida de sus ángulos y porque 2 de sus 4 lados son iguales” como es el caso del estudiante A (ver figura 26).



la medida de sus ángulos y porque 2 de sus 4 lados son iguales

Figura 26. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 4. P2.b

Con relación a la pregunta **c** (¿Por qué la figura que seleccionó es un romboide?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 60% de los estudiantes respondieron de manera correcta, en cambio el 40% respondieron bien pero no argumentaron lo suficiente. A continuación se muestra la respuesta de dos de los estudiantes: el estudiante G lo seleccionó “Por la forma que tiene la figura” pero él otro lo seleccionó “por sus ángulos y la forma de sus lados” como es el caso del estudiante B (ver figura 27).

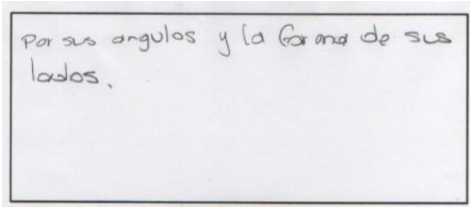


Figura 27. Solución Dada Por El Estudiante B, Actividad 4. P2.c

La pregunta **d** (¿Por qué la figura que seleccionó es un trapecio?) el 100% de los estudiantes respondieron la pregunta. El 60% respondieron de manera correcta a diferencia del 40% que aunque responden con coherencia no argumentan lo suficiente. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante.

“Por la forma que tiene sus lados en comparación a los otros cuadrilateros” como en el caso del estudiante D (*ver figura 28*)

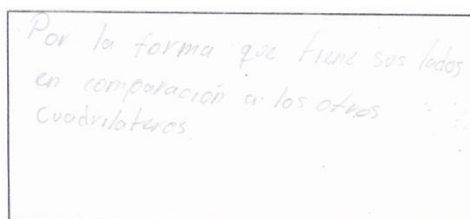


Figura 28. Solución Dada Por El Estudiante D, Actividad 4. P2.d

Actividad 5. El 100% de los estudiantes dieron respuesta a lo solicitado en la actividad, lograron armar nuevamente la figura en Geogebra. Con relación a la pregunta 1 (¿Cuáles cuadriláteros identificas en la figura?) el 100% respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante A (*ver figura 29*) quien indica que las figuras que identifico son: “trapecio, cuadrado, rombo, rectángulo”.

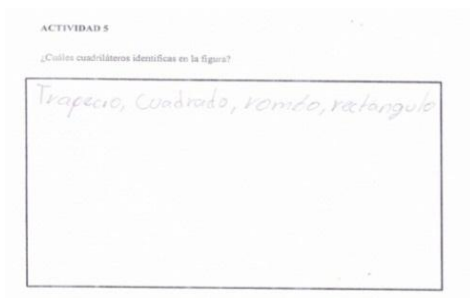


Figura 29. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 5.1

Actividad 6. El 100% de los estudiantes resolvieron la actividad, además, completaron acertadamente el diagrama. Con relación al procedimiento 1 (Complete el diagrama mostrado con los nombres colocados en los recuadros de manera que se presente una clasificación de los cuadriláteros) el 100% respondieron de manera correcta. Para ilustrar este hecho, se muestra la solución dada por el estudiante A (ver figura 30).



Figura 30. Solución Dada Por El Estudiante A, Actividad 6.1

Actividad 7. Con relacion al procedimiento 1 (complete la siguiente tabla marcando con una (x) según corresponda) el 90% de los estudiantes resolvieron el procedimiento propuesto en la actividad, pero el 10% no completo la tabla en su totalidad, sin embargo se ilustrará el resultado de uno de los estudiantes que completo la tabla, como es el caso del estudiante J (ver figura 31).

	Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide	Trapecio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.	X	X	X		
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos.					X
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares.	X		X	X	
Cuadrilátero con diagonales congruentes.	X	X	X		X
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes.	X	X	X	X	
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes.				X	
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes.	X	X	X		

Figura 31. Solución Dada Por El Estudiante J, Actividad 7.1

Actividad 8. El 100% de los estudiantes resolvieron la actividad, el 40% de los estudiantes no completaron el procedimiento 1 (Lee detenidamente las 12 fichas y luego escribir en la tabla cuales corresponden al cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y trapecio). En este caso se ilustra la producción de un estudiante que completo la actividad, estudiante C (ver figura 32).

CUADRILÁTEROS	DESCRIPCIÓN (LADOS, ÁNGULOS Y DIAGONALES)
Cuadrado	<ul style="list-style-type: none"> • La suma de sus ángulos internos es de 360°. • Todos sus lados son iguales. • Diagonales perpendiculares. • Ángulos opuestos congruentes. • Diagonales congruentes. • Todos sus ángulos son congruentes. • Sus diagonales son bisectrices. • Diagonales se interseccionan en punto medio. • Todos sus lados congruentes.
Rectángulo	<ul style="list-style-type: none"> • La suma de sus ángulos internos es 360°. • Ángulos opuestos congruentes. • Diagonales congruentes. • Todos sus ángulos son congruentes. • Sus diagonales son bisectrices. • Diagonales se interseccionan en punto medio. • Dos de sus lados iguales.
Rombo	<ul style="list-style-type: none"> • Todos sus lados son iguales. • Diagonales perpendiculares. • Ángulos opuestos congruentes. • Sus diagonales son bisectrices. • Diagonales se interseccionan en punto medio. • Todos sus lados congruentes.
Romboide	<ul style="list-style-type: none"> • Sus ángulos internos congruentes. • Diagonales perpendiculares. • Sus diagonales son bisectrices. • Diagonales se interseccionan en punto medio. • Dos de sus lados iguales. • Los dos ángulos internos son congruentes.
Trapecio	<ul style="list-style-type: none"> • Ángulos opuestos congruentes. • Diagonales congruentes. • Diagonales se interseccionan en punto medio. • Dos de sus lados iguales.

Figura 32. Solución Dada Por El Estudiante C, Actividad 8.1

4.2. Análisis de la secuencia de actividades

Se sistematizarán las producciones de los estudiantes de acuerdo con los niveles de razonamientos alcanzados, con el objetivo de seleccionar una muestra con mejores perspectivas de progreso en los niveles de comprensión. Teniendo en cuenta las tablas 6 y 7 se realiza el respectivo análisis.

La secuencia está constituida por 8 actividades, cada una de ellas están diseñadas de acuerdo a las fases de aprendizajes que proponen los esposos Van Hiele en su modelo. Como resultado, estas conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento nulo aun nivel de razonamiento avanzado.

Análisis de los Resultados:

Actividad 1

Todos los estudiantes de acuerdo con la percepción global que tienen de las figuras geométricas y específicamente de los cuadriláteros, dieron respuestas a cada una de las preguntas realizadas en la actividad sin ninguna dificultad.

Se logró observar que en la actividad 1, los estudiantes se pueden situar en el nivel 1, dado que responden las preguntas de acuerdo con la idea que tienen de los cuadriláteros por su forma, incluyendo propiedades básicas que los caracterizan.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la actividad 1, se evidencia que los estudiantes reconocen la cantidad de lados que poseen los polígonos, se puede afirmar que el 100% de los estudiantes alcanzan el primer nivel del modelo de Van Hiele.

Actividad 2

La actividad dos, está diseñada para que los estudiantes alcancen el nivel de razonamiento número tres por la información que se les está transmitiendo.

En esta actividad, algunos de los estudiantes presentaron dificultades, en el manejo de la herramienta ángulo del software Geogebra. Aunque fue uno de los puntos que se explicó cuando se expuso y se manipuló el software por primera vez con los estudiantes, estos habían olvidado que el ángulo de las figuras geométricas se hallaba en contra de las manecillas del reloj.

Como consecuencia, se realizó una intervención de cómo se calculan los ángulos en el software, luego de esto, el 60% de los estudiantes logró resolver el resto de la actividad sin acompañamiento alguno, consiguiendo ser situados en el nivel tres, por las resoluciones de las preguntas realizadas en la actividad; es decir, estos estudiantes realizan las inclusiones correctamente con los diferentes cuadriláteros trabajados. Pero, el 40% de los estudiantes, aunque realizaron el mismo procedimiento, no dieron respuestas con relación a la información que obtenían de la actividad, estos aún seguían mirando las figuras geométricas por su forma y no por las propiedades que ya se estaban trabajando en la actividad. Es decir que aún seguían situados en el nivel uno.

Actividad 3

Como consecuencia de la actividad anterior, en esta, el estudiante tiene la ventaja de observar y afirmar algunas de las propiedades que tienen los cuadriláteros. En el proceso de las soluciones a las actividades, se observó que en esta actividad algunos estudiantes no identificaron realmente las expresiones paralelas y perpendiculares, generando en ellos obstáculos para resolver uno de los puntos de la actividad. Es decir, presentaban confusión entre las expresiones, pese a que eran temas ya vistos en el curso.

La confusión de los estudiantes observada por el docente en el aula, le permitió realizar una intervención que logró como resultado esclarecer todas las falencias que los alumnos tenían y la pronta solución de la actividad por parte de los estudiantes. Pero, sus resultados no fueron los mejores; hecho que impidió que el 40% de los estudiantes alcanzaran el nivel tres, es decir, quedaron en el nivel dos y el 60% de los estudiantes si alcanzaron el nivel tres. Además, como menciona (Corberán, y otros, 1994, pág. 101): “la determinación del nivel de razonamiento de un estudiante no debe deducirse de qué cuestiones conteste, sino de cómo las conteste”.

La actividad no está diseñada solamente para que los estudiantes queden situados en el nivel dos, sino, para que alcancen realmente el nivel tres; aunque la actividad trata de marcar respuestas correctas, el estudiante tiene la opción de observar las figuras construidas en Geogebra y luego seleccionar las propiedades correspondientes del cuadrilátero indicado. Es decir, los estudiantes caracterizan propiedades de los cuadriláteros, como por ejemplo (*ver figura 33*):

CARACTERÍSTICAS	ABCD	EFE'F'	GHG'H'	IJKL	MNOP
Tiene 4 ángulos rectos	X	X			
Tiene 2 ángulos rectos.					
No tiene ningún ángulo recto			X	X	X
Tiene 2 pares de lados paralelos	X	X	X	X	
Tiene un par de lados paralelos.					X
No tiene ningún par de lados paralelos					
Tiene diagonales perpendiculares		X	X	X	

Figura 33. Resultados De La pregunta 1, De la Actividad 3

Las letras que están en mayúsculas como ABCD, representan los puntos de los cuadriláteros construidos en el software Geogebra.

Actividad 4

Esta actividad está diseñada para que los estudiantes alcancen el nivel tres. En este caso, los estudiantes tuvieron la opción de observar, relacionar, diferenciar y describir algunas de las propiedades que los cuadriláteros poseen. El 60% de los estudiantes resolvieron la actividad sin presentar dificultad alguna; es decir, sus respuestas fueron coherentes, realizando las inclusiones entre algunos cuadriláteros de forma precisa, donde fue posible que los mismos, alcanzaran el nivel tres. Pero, 40% de los estudiantes quedaron situados en el nivel 2, por lo que seguían dando respuestas muy escasas de información, es decir que aún no utilizaban un lenguaje apropiado para definir correctamente los diferentes tipos cuadriláteros estableciendo condiciones mínimas.

Actividad 5

El objetivo de la actividad fue que los estudiantes lograran reconocer y nombrar diversos tipos de cuadriláteros por su forma global en una situación práctica. Es decir, los estudiantes tienen la opción de apreciar las figuras a través de construcciones; pero también, tienen la libertad de observar, manipular y clasificar los cuadriláteros.

Las actividades que se han desarrollado anteriormente, permite a los estudiantes resolver con facilidad las actividades siguientes. En esta actividad 100% los estudiantes lograron resolver sin impedimento alguno, por lo tanto, se ubican en el nivel dos. (Ver figura 34)

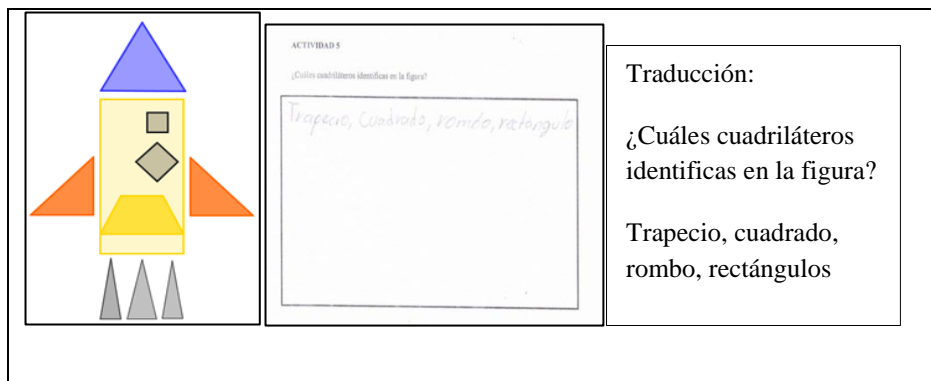


Figura 34. Construcción Y Resultados De La Actividad 5

Actividad 6

El 100% de los estudiantes de acuerdo al conocimiento adquirido a través de las actividades ya trabajadas, lograron solucionar la actividad 6, sin ninguna dificultad.

En ese punto, se logró evidenciar que los estudiantes se pueden situar en el nivel dos, tenían la tarea de completar un diagrama, determinando cuál de los cuadriláteros eran paralelogramos y cuales no lo eran. Y aunque no tienen un lenguaje técnico desarrollado para hacer una definición precisa de las propiedades de un cuadrilátero, estos pueden reconocer propiedades de los cuadriláteros. Como por ejemplo (ver figura 35):

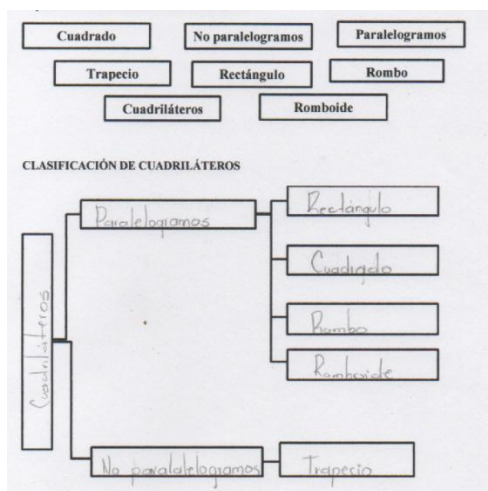


Figura 35. Resultados De La Actividad 6

Actividad 7

Esta actividad fue diseñada para que los estudiantes alcancen el nivel 2, pero el 100% presentaron dificultades para la resolución de la actividad. En la actividad 7, los estudiantes tenían que clasificar elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros. El inconveniente, exactamente lo presentaron en los términos congruente y congruencia, por lo cual les impidió identificar a cual correspondía los lados o los ángulos congruentes.

El 10% no completo la actividad por lo tanto no alcanza el nivel exigido a diferencia del 90% de los estudiantes, que completaron la actividad, alcanzando finalmente el nivel propuesto.

Actividad 8

En la actividad 8, los estudiantes tenían la tarea de caracterizar las propiedades de los cuadriláteros. Conduciéndolos finalmente al nivel tres.

El 40% de los estudiantes, por el desconocimiento del termino bisectrices y congruencia, presentaron obstáculos para resolver parte de la actividad. Por lo tanto, estos a diferencia del 60% de los estudiantes no alcanzaron el nivel 3.

Como consecuencia, el desconocimiento de los términos se debe, a que estos no manejan un lenguaje formal ni apropiado para definir correctamente los diversos tipos de cuadriláteros o ya sea para establecer relaciones mínimas entre estos y sus propiedades.

Finalmente se puede decir que los estudiantes A, C, E, H, I, J, como muestra **la tabla 8 (ver anexos)** obtuvieron un mismo nivel en los resultados de las diferentes actividades que desarrollaron. Sus resultados fueron acertados y similares, respecto a estos estudiantes no hay mayor comentario por la naturaleza de los resultados obtenidos

En resumen, estos estudiantes de acuerdo a las categorías de análisis, establecieron diferencias entre un cuadrilátero y otras figuras geométricas, ya sean triángulos u otras figuras. Además, identifican, reconocen y relacionan los diferentes tipos de cuadriláteros teniendo en cuenta algunas propiedades a partir de otras. Ello significa en el grupo de estudiantes del grado séptimo uno (7-1) de la Institución Educativa, la capacidad de interpretar la diferenciación de las propiedades de los cuadriláteros, en relación a otras figuras geométricas.

Los estudiantes B, D, F, G, como lo enseña la **tabla 8 (ver anexos)** fueron aquellos que no alcanzaron el nivel 3, no solo por los diferentes obstáculos evidenciados en el transcurso de la solución de las actividades, sino, por las respuestas que registraron en la hoja de resultados. Estos estudiantes, en varias de las resoluciones se quedaron con una misma argumentación en varias actividades, es decir no profundizaban de acuerdo a lo que evidenciaban en las diferentes construcciones o en lo solicitado de la actividad.

En síntesis, estos estudiantes de acuerdo con las categorías de análisis, identifican los cuadriláteros por su forma global y establecen diferencias entre un cuadrilátero y otras figuras geométricas y aunque reconocen propiedades de los cuadriláteros, no establecen ni tienen un lenguaje formal desarrollado para elaborar una definición precisa de las propiedades de un cuadrilátero. Además, no relacionan los diferentes tipos de cuadriláteros estableciendo unas propiedades con las otras.

Se realiza intervenciones porque en el MVH, el docente debe intervenir en las dificultades que presentan los estudiantes. El hecho que el docente identifique las debilidades o limitaciones expresas en el estudiante en relación al trabajo con los cuadriláteros, le permitirá al educador tener la capacidad de desarrollar metodologías propicias que se adecúen al medio y necesidades académicas del alumno en ese respecto y a su vez, contribuir significativamente con la superación de esas dificultades y apuntar a mejorar el nivel en cuanto a la comprensión lógica de los cuadriláteros, profundizando en el manejo de sus propiedades. Para ello, se considera indispensable que el docente enfatice en la presencia constante de la geometría en la cotidianidad del alumno, para que este a su vez, se relacione con el tema sin mayores limitaciones, ya que la geometría y específicamente los cuadriláteros, hacen parte de la existencia y desarrollo tanto humano como social.

4.3. Conclusiones

De acuerdo al primer objetivo específico se pudo evidenciar que los aspectos matemáticos, didácticos y curriculares del proceso de enseñanza y aprendizaje presentan dificultad en cuanto que los estudiantes no muestran dominio de los conceptos formales, lo cual les dificultaba una interpretación adecuada para comprender los libros de textos y cualquier presentación que se hiciera utilizando ese lenguaje; se entiende que el docente al contextualizar el tema con los estudiantes utilizaron un lenguaje natural acorde a su contexto, que en sí mismo es un acierto pero que no solo debe quedarse allí sino trascender a un lenguaje formal que le permita una mayor comprensión en su aprendizaje autónomo.

También hay que destacar, que la implementación de la secuencia de actividades permitió que el 60% de los estudiantes del grado séptimo uno (7-1) alcanzaran el nivel tres, teniendo en cuenta que este nivel está soportado en los anteriores es decir que para adquirir el nivel de deducción informal debe haber adquirido los anteriores, como lo dice (Fouz, 2006, pág. 35) quien afirma “que al subir de nivel se hacen explícitos los conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior”, lo cual indica que va aumentando de esta manera el grado de comprensión y dominio del conocimiento por el nivel de reconocimiento o visualización como también el nivel de análisis; el restante 40% de los estudiantes alcanzaron el nivel dos.

Para el cumplimiento del objetivo específico tercero el cual consistía en la validación de la adquisición del nivel propuesto del modelo Van Hiele se realizó tanto en el papel como en el software de Geogebra; el software tuvo la función de la visualización de las figuras y el papel y lápiz en las respuestas a los interrogantes definidos por las actividades.

Esta investigación reafirma lo expresado por Maguiña (2013) en cuanto a que la utilización del software de Geogebra y las actividades diseñadas con el modelo de Van Hiele permiten un mayor nivel de aprehensión de los estudiantes del objeto matemático de los cuadriláteros, ya que el hecho de interactuar con dicho objeto de forma virtual le da otro matiz a los estudiantes que hacerlo solo de forma tradicional donde le profesor explica y ellos se transcriben.

Para terminar, esta investigación puede reafirmar que el software Geogebra y el modelo Van Hiele permite que los estudiantes accedan de una forma más adecuada al objeto matemático, pero también deja evidencia que la mediación del profesor es importante.

El conocimiento y comprensión de las propiedades de los cuadriláteros es la debilidad fehaciente presentada por los estudiantes en los resultados de las diferentes actividades de la secuencia y hallada durante el proceso investigativo, lo anterior permite evidenciar la necesidad de reforzar de forma dinámica y didáctica el problema del tratamiento de las propiedades de los cuadriláteros de manera que se fortalezca esa área, la capacidad de analizar e interpretar. En ese sentido, se acentúa que la utilización de la herramienta didáctica geométrica Geogebra, es un elemento importante para vincular al estudiante con metodologías apropiadas motivadoras de su desarrollo académico en ese respecto.

Parafraseando a Ramírez (2014) en el marco de esta investigación, se logró evidenciar que el reconocimiento de las propiedades de los cuadriláteros es un punto importante para que los estudiantes avancen en el conocimiento y comprensión del tema, de manera que logren alcanzar el nivel máximo en cuanto al abordaje de la temática expuesta y las dificultades reflejadas. Es por ello, que la utilización de herramientas virtuales propicias para consolidar el conocimiento en esa área es fundamental; la pronta familiarización que tienen los estudiantes

frente a ese tema, conlleva a que con mayor facilidad y entusiasmo los mismos se interesen por la adquisición de conocimientos profundos (de acuerdo con su nivel escolar) en relación al tema y apuntar a mejorar de forma consecuyente su nivel académico.

Es de notar que tanto los antecedentes como los referentes usados buscan la mejoría de los desempeños de los estudiantes en el tema de las matemáticas en general y en particular en la geometría que permitan disminuir la tensión que genera esta área en los estudiantes sobre todo de las instituciones educativas de la básica, como también desinhiban un poco a los docentes que tienen cierta resistencias para tomar caminos distintos de la enseñanza de las matemáticas con herramientas interactivas y con el modelo de los Van Hiele.

Finalmente, surgieron cuestiones abiertas que pueden ser estudiadas, entre esas podemos señalar las siguientes:


- Reformular diseño de actividades hasta lograr el alcance satisfactorio del objetivo, con la ayuda de los estándares de competencias incluyendo los currículos escolares.
- Diseñar secuencias de actividades con un objetivo similar, pero con otros objetos matemáticos.


Bibliografía

- Arias, R., & Leiva, L. (2013). *Construcciones dinámicas con Geogebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática*. Santo Domingo: ICEMACYC.
- Arias, R., Guillén, C., & Ortiz, L. A. (2011). *Geogebra, una herramienta para la enseñanza de la Matemática*. Brasil: CIAEM.
- Bressan, A. M., Bogisic, B., & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aires: Novedades Educativas .
- Carhuapoma, L., & Huaman, A. (2018). *Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de cuadriláteros, en estudiantes del cuarto grado de "Jose Carlos Mariátegui", Pampachacra - Huancavelica*. Huancavelica: Universidad Nacional De Huancavelica .
- Castrillón, L. G. (2013). *Estrategia didáctica de enseñanza utilizando las TIC para aritmética de números enteros en grado octavo: estudio de caso*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Corberán, S., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y otros. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Secretaría General Técnica.
- Cordoba, F., & Cardeño, J. (2013). *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra conferencia latinoamericana Colombiana XVII departamental de Matemáticas*. Medellín: Instituto Tecnológico Metropolitano.
- Escudero, S. G. (2008). *La enseñanza de la geometría*. México: Institución Nacional para la Evolución de la Educación .
- Escudero-Domínguez, A., & Carrillo, J. (2014). *Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro*. Salamanca: Investigación en Educación Matemática XVIII.
- Fouz, F. &. (2005). modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. un paseo por la geometría. (pp. 67-81).
- Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele. *Sigma revista de matemáticas*, 33-58.
- Gamboa, R., & Ballestro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 125-142.

- García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. México: Institución Nacional Para la Evolución de la Educación.
- González, A. (2015). *Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria*. Cantabria: UC Universidad de Cantabria.
- Grupo fénix. (2014). *MATEMÁTICA UN ENFOQUE CON BASE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS* (1a ed ed.). Alajuela, Costa Rica: GRUPO FÉNIX.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En A. Jaime, & A. Gutiérrez, *Capítulo VI* (págs. 295-384). Sevilla: Teoría y práctica en educación matemática.
- Icfes interactivo. (25 de agosto de 2018). www.icfeinteractivo.edu.co. Recuperado el 27 de Febrero de 2019, de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co>
- Jaime, A. &. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Linares y M.V. Sánchez (Eds), *Teoría y práctica en educación matemática*,. En G. &. Almendros, *La didáctica de la geometría y el modelo de Van Hiele* (págs. 295-384). Sevilla.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de isometrías del plano. La evolución del nivel de razonamiento*. Valencia : Universitat de València.
- Jurado, D. J., & Suarez, S. (2013). *Una secuencia didáctica en grado cuarto: cuadriláteros en un AGD*. Cali: Universidad del Valle.
- Kawulich, B. (Mayo de 2005). La observación participante como método de recolección de datos. 6(2).
- León, O. L. (2012). Cien años de reformas y problema actual en la enseñanza de la geometría. En O. L. León, *Investigaciones en Educación Geométrica* (págs. 30-40). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lugo 2018 citado por la UNESCO. (2013). Enfoque estratégico sobre las TICs en educación en América Latina y el Caribe. 16.
- Maguiña, A. T. (2013). *Una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele*. Lima: Pontificia Universidad Católica de Perú.
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis Conceptual). *Revista de Investigación en Psicología*, 9(1), 1-24.

- Mazo, O. L., & Suárez, V. M. (2009). *Las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros: Rectángulo, Paralelogramo y Rombo*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fé de Bogotá.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Colombia.
- MEN. (Enero-Marzo de 2006). *MinEducación*. (Altablero, Editor) Recuperado el 13 de 3 de 2016, de MinEducación: <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-107522.html>
- Morra, L., & Friedlander, A. (2001). *Evaluaciones mediante Estudios de Caso*. Madrid: Departamento de Evaluación de Operaciones del Banco Mundial.
- Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, C., & Preuschoff, C. (2012). *TIMSS 2011 Marcos de la evaluación*. Madrid: Secretaría General Técnica.
- Ramírez, N. V. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Rodriguez de abajo, J., & Alvarez, V. (2005). *Curso de dibujo geométrico y de croquización*. España: Donostiarra,S.A.
- Rodríguez, L. (2017). *GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior*. Bogotá: Universidad Militar Nueva Granada.
- Vargas, G. M. (19 de 01 de 2017). *Magisterio*. Recuperado el 15 de 3 de 2017, de magisterio: <https://www.magisterio.com>
- Vargas, G., & Gamboa, R. (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICENCIA*, 27(1), 74-94.

a. Selecciona la herramienta distancia o longitud  luego, presiona clic en los siguientes puntos: A y B, B y C, C y D, D y A, para que logres identificar las medida de cada uno de los lados de la figura.

b. Ahora, selecciona la herramienta ángulo , da clic en los puntos: (ADC), (DCB),(CBA) y (BAD). Esta herramienta se aplica en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj.

Y así sucesivamente, abre los archivos **RECTÁNGULO**, **ROMBO**, **ROMBOIDE** y **TRAPECIO**. A cada una de estas figuras le haces el mismo proceso que realizaste con el **CUADRADO**.

1. Colocar los datos obtenidos de cada una de las figuras geométricas en la siguiente tabla.

CUADRILÁTEROS	DISTANCIA DE CADA LADO				MEDIDA DE CADA ÁNGULO			
	AB	BC	CD	DA	1	2	3	4
<i>Cuadrado</i>								
<i>Rectángulo</i>								
<i>Rombo</i>								
<i>Romboide</i>								
<i>Trapecio</i>								

2. ¿Describe qué sucede cuando mueves el punto A del cuadrado con respecto a la medida de sus ángulos y de sus lados? Haz el mismo proceso con las otras figuras (**RECTANGULO**, **ROMBO**, **ROMBOIDE** y **TRAPECIO**).

CUADRILÁTEROS	DESCRIPCIÓN
<i>Cuadrado</i>	
<i>Rectángulo</i>	
<i>Rombo</i>	
<i>Romboide</i>	
<i>Trapezio</i>	

3. Escribe lo que observas con respecto a la medida de los lados y de los ángulos del cuadrado, del rectángulo, del rombo, del romboide y el trapecio.

CUADRILÁTEROS	Compara las medidas de lados y los ángulos de cada cuadrilátero y escribe lo que observas.
<i>Cuadrado</i>	
<i>Rectángulo</i>	
<i>Rombo</i>	
<i>Romboide</i>	
<i>Trapezio</i>	

Responder:

- Es igual un cuadrado y un rombo. Marca con una X, SI o NO. Justifica tu respuesta.
- ¿Qué similitudes hay entre un rectángulo y el romboide con respecto a la medida de sus lados y sus ángulos?
- ¿Qué similitudes hay entre un cuadrado y un rectángulo con respecto a la medida de sus lados y sus ángulos?
- ¿Qué diferencias existen entre un rombo y un romboide?
- ¿Qué diferencias existen entre un cuadrado y un trapezio?

Actividad 3:

FASE 2: orientación dirigida (Modelo de Van Hiele).

OBJETIVO: Establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero independientemente de su posición canónica.

Abra el archivo *actividad 3* de la carpeta **ACTIVIDADES (SECUENCIA)** que se encuentra en el escritorio.

- Observe detenidamente los cuadriláteros ABCD, EFE'F', GHG'H', IJKL y MNOP que están contruidos. Luego, identifique si alguno de los cuadriláteros contruidos cumple con alguna de las siguientes características:

CARACTERÍSTICAS	ABCD	EFE'F'	GHG'H'	IJKL	MNOP
Tiene 4 ángulos rectos					
Tiene 2 ángulos rectos.					
No tiene ningún ángulo recto					
Tiene 2 pares de lados paralelos					
Tiene un par de lados paralelos.					
No tiene ningún par de lados paralelos					
Tiene diagonales perpendiculares					

Actividad 4:

FASE 3: explicitación (Modelo de Van Hiele).

OBJETIVO: Mostrar que la construcción de una figura responde a propiedades matemáticas.

Abra el archivo *actividad 4 parte 1* de la carpeta **ACTIVIDADES (SECUENCIA)** que se encuentra en el escritorio y use la herramienta insertar texto para escribir sus repuestas.

- 1) Observe los cuadriláteros: ABCD, EFE'F', GHG'H' y IJKL, e indique cuál es un cuadrado y cuál es un rombo.
 - a) ¿Cuál es la diferencia entre el cuadrado y el rombo?
 - b) ¿Existe alguna semejanza entre estas dos figuras geométricas? Si las hay, ¿Cuáles son?
 - c) ¿Por qué la figura que seleccionó es un cuadrado?
 - d) ¿Por qué la figura que seleccionó es un rombo?

Abra el archivo *actividad 4 parte 2* de la carpeta **ACTIVIDADES (SECUENCIA)** que se encuentra en el escritorio y use la herramienta inserta texto para escribir sus repuestas.

- 2) Observe los cuadriláteros: ABCD, EFE'F', GHG'H', IJKL y MNOP, e indique cual es un trapecio y cual es un romboide.
 - a) ¿Cuál es la diferencia entre el trapecio y el romboide?
 - b) ¿Existe alguna semejanza entre estas dos figuras geométricas? Si hay ¿Cuáles son?
 - c) ¿Por qué la figura que seleccionó es un romboide?
 - d) ¿Por qué la figura que seleccionó es un trapecio?

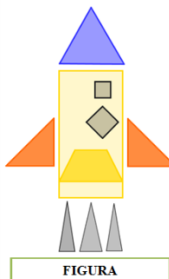
Actividad 5.

FASE 4: orientación libre (Modelo de Van Hiele).

OBJETIVO: Reconocer y nombrar diversos tipos de cuadriláteros por su forma global en una situación práctica.

Abrir el archivo ACTIVIDAD 5, luego selecciona la herramienta arrastre, para que construyas la figura propuesta en la guía.

- 1) Rusia enviará, en el 2017, a un grupo de astronautas para una expedición al planeta de Júpiter, para ello fue necesario construir un modelo especial de cohete. El modelo de este cohete es el que se muestra en la figura.



Reconstruye este modelo, abriendo el archivo ACTIVIDAD 5. Luego selecciona la herramienta arrastre, para que realices lo pedido de la figura propuesta en la guía.

¿Cuáles cuadriláteros identificas en la figura?

Actividad 7.

Fase 5: integración (Modelo de Van Hiele).

OBJETIVO: Establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

Complete la siguiente tabla marcando con una (x) según corresponda.

	Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide	Trapezio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos.					
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares.					
Cuadrilátero con diagonales congruentes.					
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes.					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes.					
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes.					

Actividad 8.

FASE 1: información (Modelo de Van Hiele).

OBJETIVO: Caracterizar a los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales.

Lee detenidamente las 12 fichas y luego escribir en la tabla cuales corresponden al cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y trapezio.

Sin ángulos Internos Congruentes	La suma de sus ángulos internos es 360°	Sólo dos ángulos internos son congruentes	Todos sus lados son iguales
Diagonales perpendiculares	Ángulos opuestos Congruentes	Diagonales congruentes	Todos sus ángulos son congruentes
Sus diagonales son bisectrices	Diagonales se intersectan en punto medio	Todos sus lados son congruentes	Dos de sus lados iguales

Tabla:

CUADRILÁTEROS	DESCRIPCIÓN (LADOS, ÁNGULOS Y DIAGONALES)
<i>Cuadrado</i>	
<i>Rectángulo</i>	
<i>Rombo</i>	
<i>Romboide</i>	
<i>Trapezio</i>	

- Imágenes Acerca de la Aplicación de Actividades y Exploración de la Plataforma Didáctica Geogebra

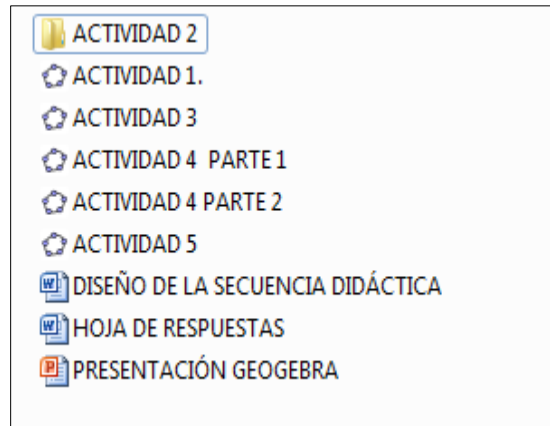


Figura 36. Diseño De Actividades
Fuente. Elaboración Propia. 2018

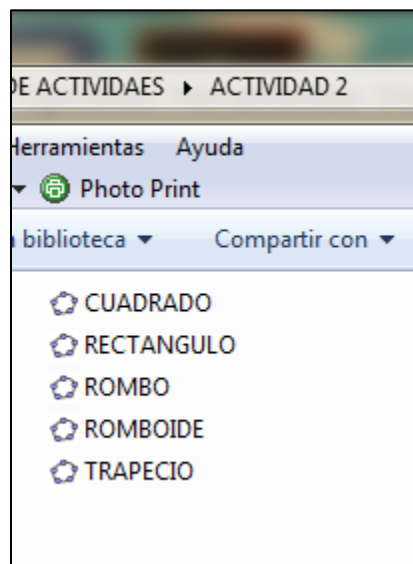


Figura 37. Construcciones en Geogebra de la actividad 2
Fuente. Elaboración propia. 2018



Figura 38. Estudiantes Practicando En El Software Geogebra

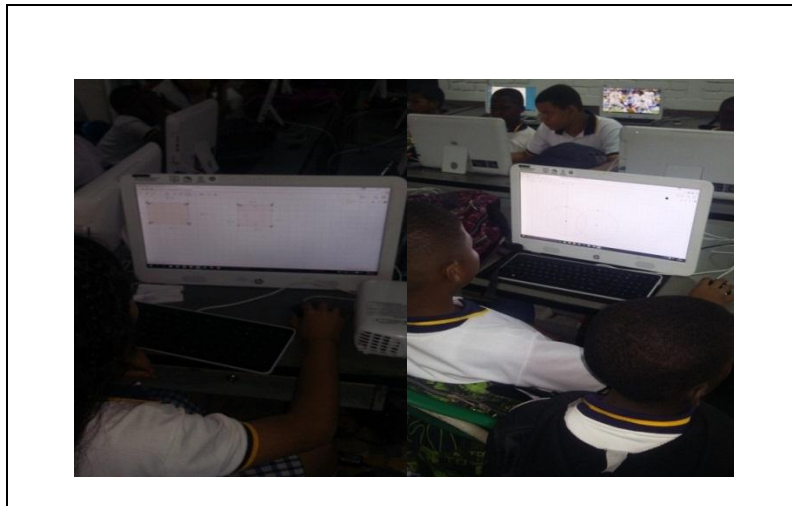


Figura 39. Estudiantes Determinado Actividades

- Imágenes de actividades de cuadriláteros en la plataforma virtual Geogebra

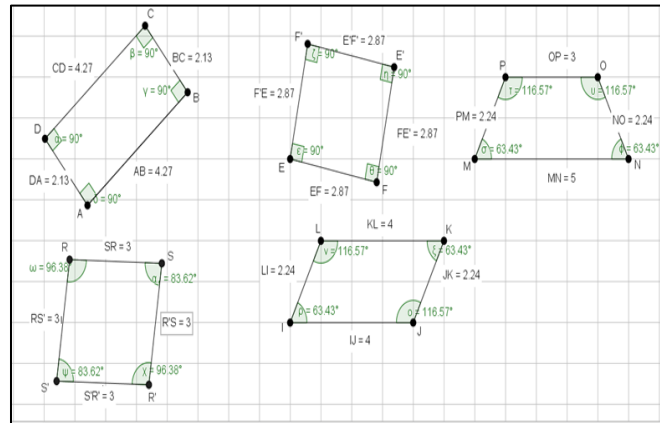


Figura 40. Construcción De Los Cuadriláteros
Fuente. Geogebra.

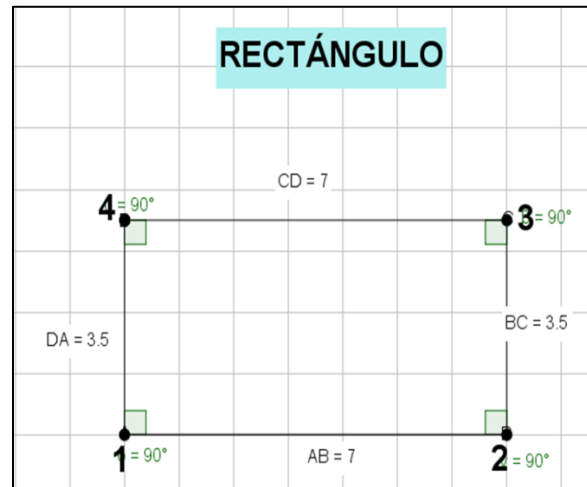


Figura 41. Construcción De Rectángulo
Fuente. Geogebra.

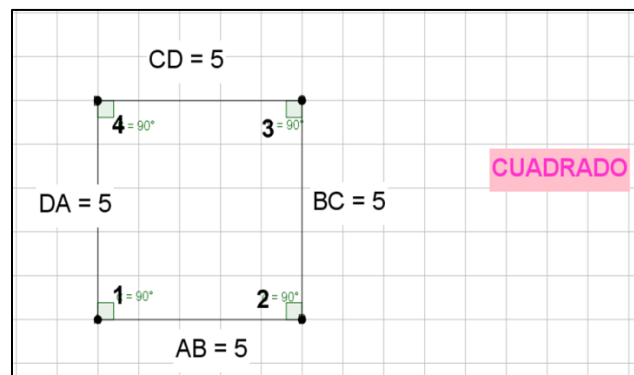


Figura 42. Construcción De Cuadrado
Fuente. Geogebra.

- Representación de los niveles que alcanzaron los estudiantes en cada una de las actividades

En la **tabla 8**, se presentan los niveles que alcanzaron los estudiantes en cada una de las actividades.

El número 1, representa el *Nivel 1: Reconocimiento*.

El número 2, representa el *Nivel 2: Análisis*.

El número 3, representa el *Nivel 3: Deducción informal*

Tabla 8. Niveles alcanzados por los estudiantes en las actividades

Estudiantes	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Actividad 6	Actividad 7	Actividad 8
A	1	3	3	3	2	2	2	3
B	1	1	2	2	2	2	1	2
C	1	3	3	3	2	2	2	3
D	1	1	2	2	2	2	2	2
E	1	3	3	3	2	2	2	3
F	1	1	2	2	2	2	2	2
G	1	1	2	2	2	2	2	2
H	1	3	3	3	2	2	2	3
I	1	3	3	3	2	2	2	3
J	1	3	3	3	2	2	2	3

Fuente propia, con base de los resultados de las actividades desarrolladas por los estudiantes.