



ALGUNAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL  
ASOCIADAS A LA CONVERSIÓN ENTRE LOS REGISTROS GRÁFICO Y ALGEBRAICO  
EN GRADO NOVENO

CAROLD GISETH MONTAÑO ANGULO

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2019



ALGUNAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL  
ASOCIADAS A LA CONVERSIÓN ENTRE LOS REGISTROS GRÁFICO Y ALGEBRAICO  
EN GRADO NOVENO

CAROLD GISETH MONTAÑO ANGULO

Código: 1352561

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director:

JHON JAIR ANGULO VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2019



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO  
DE GRADO

Programa Académico Lic. Edu. Bas. enf. matemática

Fecha

Día	Mes	Año
4	06	2019

Código del programa: 3469

Resolución del programa: 046/2002

Título del Trabajo o Proyecto de Grado					
Algunas dificultades en la comprensión de la función lineal asociadas a la conversión entre los registros gráfico y algebraico en grado noveno					
Se trata de:					
Proyecto <input type="checkbox"/>		Informe Final <input checked="" type="checkbox"/>			
Director					
Jhon Jairo Angulo U.					
Nombre del Primer Evaluador					
Pether Sanchez					
Nombre del Segundo Evaluador					
Jorge E. Galeano					
Estudiantes					
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto	
Carold Giseth Montano	1352561	3469			
Evaluación					
Aprobado <input checked="" type="checkbox"/>	Meritorio <input type="checkbox"/>	Laureado <input type="checkbox"/>			
Aprobado con recomendaciones <input type="checkbox"/>	No Aprobado <input type="checkbox"/>	Incompleto <input type="checkbox"/>			
En el caso de ser <b>Aprobado con recomendaciones</b> (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado <input type="checkbox"/>		Primer Evaluador <input type="checkbox"/>	Segundo Evaluador <input type="checkbox"/>		
En el caso de que el Informe Final se considere <b>Incompleto</b> (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la <b>razón del desacuerdo</b> y las <b>alternativas</b> de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					
Firmas					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador			



## AGRADECIMIENTOS

*Agradezco primeramente a Dios todo poderoso por darme la vida, la salud y permitir que llegara hasta esta etapa en la que se culmina este trabajo.*

*En segundo lugar, a mi familia, en especial mis padres; Rosalba Angulo Viveros, Juan Riascos Mosquera y Fredy Montaña Riascos que han sido un gran apoyo desde siempre, con mucha paciencia y sabiduría para que cada día continuara sin desfallecer. Mi abuela Angela Viveros también ha sido un gran apoyo, todos lo han sido.*

*En tercer lugar, a la Universidad del Valle, donde tuve una formación íntegra de la mano de los mejores docentes, a la Lic. Dubaney Angulo M. una excelente orientadora en términos académicos y personales desde el inicio de este proceso. A mi profesora Andrea Quiñonez quien aportó ánimo y mucha sabiduría y a mi asesor el Lic. Jhon Jair Angulo por su dedicación y los comentarios en el proceso de elaboración del trabajo, más que un profesor; fue un padre que supo guiarme para cumplir un objetivo que nos trazamos, digo nos trazamos porque fuimos un equipo en el que tuvimos la fortuna de aprender el uno del otro.*

*Finalmente, gracias a todos mis compañeros por el apoyo y la tolerancia, en especial a mi compañero Einer Alfredo Asprilla Córdoba, un cómplice incomparable, en la aventura más bonita que es el Saber.*

*A todos los antes mencionados, infinitas gracias por el amor incondicional y los inolvidables momentos que hoy me hacen una mejor persona. Mis palabras no bastan para agradecerles su comprensión, y los consejos en todo momento. Espero no defraudarlos.*

*Dios los bendiga grandemente.*

# Contenido

Resumen.....	9
Introducción.....	10
Capítulo1.....	13
Aspectos Generales.....	13
1.1 Descripción y formulación del problema.....	14
1.2 Objetivos.....	20
1.2.1 Objetivo general.....	20
1.2.2 Objetivos específicos.....	20
1.3 Justificación.....	21
1.4 Antecedentes.....	26
Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia.....	37
2.1 Aspectos semióticos.....	37
2.1.1 Representación y operaciones cognitivas asociadas.....	37
2.1.2 Conversión y coordinación entre registros.....	40
2.1.3 Congruencia entre representaciones.....	43
2.1.4. Representaciones semióticas elementales de los registros gráficos y algebraicos.....	46
2.2 Aspectos matemáticos.....	50
2.2.1 Definición de la función lineal.....	50
2.2.2 Propiedades y procesos fundamentales de la función lineal.....	53
2.2.3 Formas de representación de las funciones lineales.....	57
Capítulo 3.....	63
Metodología De La Investigación.....	63
Capítulo 3. Metodología de la investigación.....	64
3.1 Contextualización.....	65
3.2 Elección y justificación de instrumentos.....	66
Análisis a priori.....	69
3.3 Recolección de la información.....	73
3.4 Organización y sistematización de los datos.....	73
3.4.1 Unidad de análisis.....	74
3.4.2 Descripción de las preguntas.....	76
Capítulo 4: Resultados y Análisis.....	86

4.1 Análisis del problema 1.....	86
4.2 Análisis del problema 2.....	98
4.3 Análisis del problema 3.....	105
4.4 Comparación de resultados de la IE San Vicente y Carpinello.....	122
4.4.1 <i>Caso # 1: Uso reiterativo de la lengua natural para describir unidades</i> .....	122
Capítulo 5.....	130
Conclusiones.....	130
Referencias.....	137
Bibliografía.....	140
Anexos.....	141

## Índice de figuras

<b>Figura 1:</b> Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento. Tomado de Duval (2006) .....	32
<b>Figura 2.</b> Las tres unidades visuales de la pendiente en una función lineal.....	48
<b>Figura 3.</b> Diagrama sagital de una relación que es función y otra que no lo es entre los conjuntos $x$ e $y$ ......	50
<b>Figura 4.</b> Plano cartesiano de un punto y gráfica de una función lineal a partir de dos puntos...52	
<b>Figura 5.</b> Gráfica de la pendiente de una recta dado dos puntos.....	56
<b>Figura 6.</b> Representación geométrica de la pendiente.....	57
<b>Figura 7.</b> Problema 1, planes de voz.....	65
<b>Figura 8.</b> Representación en el registro gráfico y algebraico de la compañía 1.....	73
<b>Figura 9.</b> Representación en el registro gráfico y algebraico de la compañía 2.....	73
<b>Figura 10.</b> Representación en el registro gráfico y algebraico de la compañía 3.....	74



## Índice de tabla

<b>Tabla 1.</b> Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro gráfico. (Tomada de Duval, 1992, p. 128).....	41
<b>Tabla 2.</b> Representación tabular de algunos valores que satisfacen la función $y=2x$ .....	52
<b>Tabla 3.</b> Modelo de rejilla de análisis.....	67
<b>Tabla 4.</b> Variables visuales y valores numéricos del dinero a pagar .....	72
<b>Tabla 5.</b> Parámetros para la representación del problema 2.....	76
<b>Tabla 6.</b> Conversión del problema 2 a la representación gráfica.....	77
<b>Tabla 7.</b> Variables y unidades significantes en lenguaje natural.....	78
<b>Tabla 8.</b> Posibilidades de la representación gráfica del problema 3.....	80
<b>Tabla 9.</b> Unidades significantes de los estudiantes del problema 1.a, 1.b.....	86
<b>Tabla 10.</b> Resultados de estudiantes que intentan determinar la pendiente.....	90
<b>Tabla 11.</b> Respuesta de estudiantes que intentan ir de la gráfica a una ecuación algebraico.....	90
<b>Tabla 12.</b> Dificultades de los estudiantes al convertir una expresión algebraica general al registro gráfico.....	97
<b>Tabla 13.</b> Valores y unidades significantes del problema 3.....	103
<b>Tabla 14.</b> Dificultades de los estudiantes al convertir una expresión algebraica general al registro gráfico .....	104
<b>Tabla 15.</b> Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.b.....	107

<b>Tabla 16.</b> Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.c.....	110
<b>Tabla 17.</b> Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.d.....	113
<b>Tabla 18.</b> Conversiones consideradas por los estudiantes para responder al ítem 3.e.....	115

## Resumen

El presente trabajo corresponde a un análisis de las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes de grado noveno cuando llevan a cabo los procesos de resolver problemas relacionados con la función lineal, particularmente al trabajar con el concepto de pendiente los registros gráficos y algebraicos. El análisis está fundamentado en los trabajos de Duval (1999) desde un enfoque semiótico y cognitivo sobre la comprensión de los objetos matemáticos a partir de los registros semióticos de representación. El trabajo se centra específicamente en estudiar el cambio de registro a partir de la identificación de las unidades significantes en cada situación problema.

El trabajo se realizó con estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora Consoladora del Carpinello y la Institución Educativa San Vicente del distrito de Buenaventura.

El desarrollo y análisis de las producciones permitió identificar algunas dificultades. En primer lugar, a los estudiantes les cuesta identificar e interpretar las unidades significantes en los registros de representación asociados a la función lineal. En segundo lugar, los estudiantes no son conscientes de las implicaciones que tiene la pendiente en cada una de las representaciones del objeto. Por último, les cuesta encontrar una nueva representación que conserve parte de las características del registro inicial pero que además ofrezca información distinta para dar respuesta a casos particulares en ese nuevo registro. Tal dificultad se hizo más evidente para los estudiantes cuando estaban involucrados fenómenos de no congruencia.

Por tanto, el trabajo aporta elementos prácticos al campo de la Educación Matemática al analizar las transformaciones (tratamientos y conversiones) y caracterizar las dificultades que presentan algunos estudiantes al efectuar estas operaciones. Pues reflexionar acerca de la naturaleza de tales dificultades aportaría elementos para su disminución.

**Palabras claves:** función lineal, pendiente, representaciones, registro gráfico, registro algebraico, unidades significantes.

## Introducción

Este trabajo se inscribe en la línea de formación Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de saberes Matemáticos del Área de Educación Matemática de la licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. La investigación se enmarca en la teoría de los registros de representación semiótica desarrollada por Duval (1992, 1998, 1999, 2004, 2006) con el objetivo de analizar las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes al resolver problemas relacionados con la función lineal, particularmente al trabajar con el concepto de pendiente cuando los registros gráficos y algebraicos son trabajados simultáneamente.

De manera puntual, el trabajo se centra en estudiar lo que ocurre cuando los estudiantes intentan cambiar de una representación a otra sobre la función lineal para dar respuesta a un caso particular relacionado con calcular el valor de una variable en función de otra sobre determinado problema. Con respecto a ello, Duval (2004) afirma que no se puede concebir el cambio como espontáneo o trivial en ninguno de los casos, aun cuando se haya tenido un acercamiento constante con los registros involucrados.

Así mismo, se centra el estudio de la función lineal a partir de la identificación de las unidades significantes que entran en juego en cada representación para la identificación de algunas propiedades del objeto. Lo anterior, es importante para la enseñanza de los objetos matemáticos en la medida en que dichas unidades permite observar propiedades distintas del objeto en cada representación. Como expresa Fernández (2015, pp. 31-147) es necesario ampliar las investigaciones para la comprensión de los objetos matemáticos a través del reconocimiento de los registros de representación, al estudio de las propiedades de dichos objetos y al papel que

juega la lengua natural en dicho estudio por medio de un análisis semiótico; pues generaría una reducción notable de las dificultades y aportaría de forma más significativa al control de las mismas. Ante ello, la organización del trabajo se presenta en cuatro capítulos.

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales de la investigación que incluye los componentes del planteamiento del problema. La descripción del problema en el cual se hace énfasis en las dificultades asociadas al trabajar las funciones lineales como objeto matemático de enseñanza, es decir, se precisan dificultades relacionadas con procesos algorítmicos para encontrar una expresión algebraica, lo que implica el trabajo mono-registro y los problemas de cambio de registro, entre otros elementos que conducen a la pregunta de investigación. Los objetivos con los que se desarrolló la investigación los cuales llevan elementos relacionados con las operaciones cognitivas, las unidades significantes y el énfasis en la pendiente como una propiedad de las funciones lineales. La justificación que conlleva la importancia de estudiar el objeto “función lineal” por sus potencialidades como objeto matemático, del mismo modo, lo pertinente de abordar éste a partir de los registros semióticos de representación. Y por último, se presentan los antecedentes, se consideran las investigaciones a nivel nacional, departamental y local llevadas a cabo alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales con diferentes propiedades, pero con el enfoque de la teoría semiótica.

En el segundo capítulo se exponen los referentes teóricos que se consideran pertinentes para abordar la problemática a describir, así como los fundamentos que permitan la selección de una situación propia del concepto de función lineal. En este sentido, el marco teórico está asociado a dos aspectos relacionados con la función lineal. Por un lado, la perspectiva semiótica en la cual se describen las operaciones cognitivas que están asociadas a toda representación, la conversión como actividad esencial para la comprensión y las unidades significantes de los

registros gráficos y algebraicos; por otro lado, una perspectiva matemática en la que se muestra todo lo que atañe al objeto desde sus definiciones, formalidad, propiedades hasta las distintas representaciones posibles sobre el objeto de estudio.

En el tercero se plantea el marco metodológico en el cual se explicita el tipo de metodología y lo que implica esta para la investigación, igualmente se mostró los procesos llevados a cabo para el análisis de las operaciones cognitivas de acuerdo con los objetivos específicos planteados. Aquí, se presentan tanto las características de la situación problema aplicada como los elementos que se tuvieron en cuenta para la re-colección de la información.

En el cuarto se presentan los resultados obtenidos de los problemas resueltos por los estudiantes que participaron en la investigación, se analizan las producciones de los mismos a la luz de los referentes teóricos trabajados. Igualmente se muestran las conclusiones generales producto del análisis previo de los resultados obtenidos de las pruebas de los estudiantes.

# Capítulo1

## Aspectos Generales

### 1.1 Descripción y formulación del problema

La Educación Matemática como disciplina científica aborda las matemáticas desde perspectivas muy variadas, algunas asociadas al proceso de enseñanza y aprendizaje, otras asociadas a la matemática misma, orientada bien sea a los conceptos, propiedades, definiciones, algoritmos, entre otros procesos propios de la disciplina.

Particularmente en el pensamiento variacional, el concepto de función lineal juega un papel importante debido que se puede trabajar como una relación en la que sus distintas aplicaciones permiten resolver situaciones que están en relación de dependencia, variación o proporcionalidad (Ramírez y Toro, 2012). Igualmente la función lineal es el punto de partida para obtener modelos sobre el comportamiento de magnitudes de naturalezas distintas como tiempo, espacio, precio, unidades, entre otras magnitudes que pueden ser utilizadas de manera conjunta para resolver distintas situaciones problemas.

Así mismo, las funciones lineales hacen grandes aportes al pensamiento variacional en el sentido en que sus distintas propiedades permiten ir de lo particular a lo general y viceversa Roldan (2013). Dichas propiedades tienen que ver con la naturaleza y las características propias del objeto. En este sentido, la comprensión de las propiedades juega un papel importante en la conceptualización de los objetos matemáticos puesto que son las que lo definen, le dan sentido y le brindan particularidades únicas en relación con otros objetos.

En particular, la pendiente como propiedad de las funciones lineales, se caracteriza porque el signo del parámetro  $m$  determina la inclinación en la representación gráfica. El parámetro  $m$  es fundamental en las funciones lineales, ya que representa el cambio proporcional que produce el aumento o disminución de una variable con respecto a otra. La pendiente tiene



mayor aplicación en el estudio de las ciencias. Los economistas por ejemplo basan la linealidad y el cambio que produce este parámetro, las leyes de la oferta y la demanda como elementos fundamentales para cualquier análisis financiero. Pues siempre es necesario conocer cuánto cuesta a una empresa producir una unidad del producto a vender, lo cual está relacionado con el concepto de pendiente (costo variable). Es decir, por cada unidad adicional que se produzca, cuánto le genera en gastos a la empresa para determinar el mejor precio de venta.

Conforme a lo anterior, por su potencial como objeto matemático, las funciones lineales han ocupado una cantidad importante de investigaciones Peralta, (2003); Hitt, (2003); García, (2005); Gutiérrez y Parada, (2007); Roldán, (2013) en Educación Matemática. Sin embargo, los procesos que involucran la enseñanza y aprendizaje de este objeto de conocimiento han presentado algunas dificultades por la forma como se aborda éste en la escuela. Pues en muchos casos, primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están contruidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación (Sánchez, 2016, p. 25).

Como afirman Azcárate (1992-1996), Sierpinska (1985-1988) y Ruiz (1998) citados por Roldán (2013, p. 47) tradicionalmente en la escuela los maestros centran su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto de función dejando de lado en muchas ocasiones un análisis profundo y detallado sobre los elementos propios que permitan consolidar un concepto con suficiente significado para ser aprendido convenientemente. Esto implica que cuando se trabajan problemas en los que las variables se relacionan linealmente, se hace mayor énfasis en uno de los registros (el algebraico) lo que probablemente provoca una concepción limitada del objeto en el sentido en que no se alcanza a distinguir todas las propiedades de este. Del mismo modo, se tiende a restringir el estudio de las funciones lineales a una mera manipulación algebraica en la

que se encuentra la expresión que genera cada uno de los puntos y finalmente se pide al estudiante encontrar los valores de  $y$  para casos particulares de la variable  $x$ , y luego graficar los puntos encontrados ( Hitt, 2003).

En esta misma dirección, Rey (2009) plantea que las situaciones ligadas a las diferentes concepciones de los alumnos, se refieren al uso de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, entre otros donde se utilizan las fórmulas como “recetas” sin aprovechar su gran poder modelizador. En otras palabras, las fórmulas son empleadas como un conjunto de técnicas eficaces para encontrar los valores de las incógnitas eliminando el sentido de la variación.

Así mismo Hitt (2003) enfatiza que en la construcción de gráficas a menudo se inicia con alguna expresión algebraica, se sustituyen algunos valores para formar una tabla, y enseguida se le solicita al estudiante unir esos puntos por medio de una curva; situación que produce dos tipos de conflictos. El primero relacionado con una falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones y el segundo a una concepción de función como función continua, es decir, el hecho de omitir funciones que cumplan ciertas restricciones.

Por otro lado, García (2016) muestra que el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que involucra, variación a través de diferentes registros de representación (gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural). En este sentido, el concepto de función lineal se puede trabajar como un fenómeno de cambio en el que las diversas representaciones ayudan a la comprensión del objeto en la medida en que cada registro empleado posee características particulares y cada uno proporciona elementos únicos para percibir la variación.

Con respecto a lo anterior, diferentes autores afirman que para la comprensión de los objetos matemáticos es necesario hacer énfasis en la diversidad de representaciones semióticas para el aprovechamiento de diferentes formas de percepción del objeto lo cual permite una mirada distinta a las propiedades del mismo. En efecto, lo importante de las representaciones es que involucran procesos y sistemas semióticos diferentes los cuales son fundamentales para la actividad matemática; por el hecho que la utilización de todas las posibles representaciones permite la comprensión del objeto a través del reconocimiento de sus distintas propiedades.

Sin embargo, como lo expresa Duval (2004) las dificultades asociadas al utilizar las diversas representaciones sobre los objetos matemáticos, están directamente relacionadas a que el cambio de registro no se presenta de manera espontánea debido a algunas razones.

La primera dificultad, tiene que ver con el uso limitado de las distintas representaciones sobre la función lineal. Es decir, trabajarlas como si fueran independientes y como si el cambio se presentara de manera natural.

La segunda, con relación al desconocimiento de las características propias de cada registro. En efecto, la dificultad se presenta al identificar las unidades significantes de cada representación; pareciera que para el estudiante no hay una relación directa entre los puntos de una línea recta con los parámetros  $m$  y  $b$  de una expresión algebraica al igual que el signo de la pendiente con la inclinación de la representación gráfica en la función lineal.

La tercera dificultad, está asociada a la no congruencia entre las representaciones a utilizar. Significa que, en caso de no congruencia no solo aumenta el tiempo de tratamiento, sino que la conversión puede resultar imposible de efectuar, o incluso de ser comprendida, sin un

aprendizaje previo concerniente a las especificidades semióticas de formación y tratamiento propias a cada uno de los registros.

Respecto con las dificultades antes mencionadas, el Ministerio de Educación Nacional plantea que es necesario proponer situaciones que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones, que a través de la coordinación entre ellas se haga acercamientos a la conceptualización y a las propiedades de los objetos matemáticos (MEN, 2006). En efecto, los objetos matemáticos poseen diversas formas de representación y a través de la utilización de cada una de ellas es posible acceder a distintas propiedades, diferenciar procesos (tratamientos), observar la generalidad y particularidad del objeto, afianzar el cambio entre una y otra representación (conversión), entre otros procesos que ayudan a la conceptualización, abstracción y comprensión de los objetos matemáticos.

De esta misma manera el MEN señala que:

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico. Pero éstas, también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo (p. 67).

En general, las dificultades para la comprensión de los conceptos matemáticos están asociadas tanto a los métodos de enseñanza, es decir, privilegiar algún registro, mecanizar procesos, enfatizar algoritmos; como al objeto matemático mismo; identificar relaciones, modelar situaciones, la no congruencia entre los registros, etc. Para el desarrollo de este trabajo se planteó el siguiente interrogante:

*¿De qué forma los estudiantes del colegio Nuestra señora consoladora del Carpinello y de la Institución educativa San Vicente llevan a cabo los procesos de resolver problemas relacionados con la función lineal, particularmente al trabajar con el concepto de pendiente en los registros de representación gráfico y algebraico?*

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

Identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes de las Instituciones Educativas Carpinello y San Vicente, en la comprensión de la función lineal, particularmente al trabajar con el concepto de pendiente en la conversión entre los registros gráfico y algebraico en grado noveno

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Constituir una situación a la luz de los registros de representación semiótica, que se resuelve mediante funciones lineales a partir de la interpretación del parámetro  $m$  (pendiente).
- Describir las unidades significantes en los registros gráficos y algebraicos que, en contraste con los procesos desarrollados por los estudiantes, son pertinentes para resolver los problemas planteados.
- Caracterizar los procesos de tratamiento y conversión a partir de las unidades significantes (numéricas y visuales) llevados a cabo por los estudiantes cuando se pone en juego las representaciones gráficas y algebraicas.

### 1.3 Justificación

En Educación Matemática, el estudio de las funciones lineales es de gran importancia debido a que permite desarrollar habilidades para resolver problemas que están directamente relacionados con situaciones en diferentes contextos.

En este sentido, como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional, lo importante de las funciones lineales es que permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales, sociales y de las matemáticas mismas (MEN, 2006). Lo anterior, tiene sentido en la medida en que muchos de los fenómenos de la vida diaria y de otras disciplinas se comportan de manera lineal. Es decir, algunas magnitudes covarían en función de otras y es ahí donde las funciones lineales constituyen una herramienta potente para modelar dichas magnitudes.

Las funciones lineales son punto de partida para los procesos de generalización del concepto de número y el concepto de variable, en el sentido que permiten obtener expresiones algebraicas generales sobre las magnitudes, lo cual posibilita encontrar valores específicos a través de dicha generalidad; elementos que son esenciales para el trabajo en matemáticas y los procesos de generalización y abstracción de los objetos matemáticos.

No obstante, para la comprensión, se hace necesario enfocar la atención en aquellas situaciones en las cuales los estudiantes deban identificar qué propiedad cumple o no cierto objeto matemático, por el hecho que son las propiedades las que le otorgan sentido a estos de acuerdo a las características que puedan en ellos percibirse. En concreto, la función lineal posee

ciertas propiedades que lo diferencian de otros objetos matemáticos y con los cuales los estudiantes pueden entender y resolver situaciones problemas propias del objeto.

Para este caso, interesa estudiar la pendiente como una propiedad de las funciones lineales puesto que esta representa un elemento clave para la representación y comprensión del objeto. La importancia de la comprensión de dicha propiedad radica en que representa un fundamento para el aprendizaje de otros objetos matemáticos como: la derivada, es decir la pendiente de la recta tangente a un punto en el cual se aborda este parámetro a partir del concepto de límite, la continuidad de una función en un punto o intervalo definido, el concepto de velocidad, la razón y la proporción, entre otros objetos que son esenciales para el aprendizaje de objetos matemáticos más complejos.

Sin embargo, la comprensión de la pendiente de una función lineal como una constante de número real presenta algunos inconvenientes para su interpretación con relación a que cuando se cambia de registro, cada una de las representaciones produce una imagen distinta y por ende una característica diferente de la pendiente, característica que no es evidente para muchos estudiantes.

Así mismo, cuando se está en el registro algebraico la pendiente se presenta de manera explícita en dicho registro y es posible extraer características de forma inmediata sin recurrir a ningún tratamiento. En cambio, cuando la función se presenta en el registro gráfico, muchas de esas características de la pendiente, aunque están ahí, no son evidentes para los estudiantes aun cuando han tenido un acercamiento constante con este registro. Dicho de otra manera, cuando la función es presentada gráficamente la discriminación de las unidades significantes e



interpretación de los parámetros es menos espontánea ya que este registro deja implícitos los elementos de manera que se hace más difícil interpretar y separar dichas unidades.

Así pues, pese a las posibilidades de representación que poseen las funciones lineales, numerosas investigaciones; Roldán (2013); Fernández (2015) y Sánchez (2016) confirman la problemática respecto al aprendizaje de este objeto matemático. Principalmente dificultades relacionadas con identificar los elementos que dan sentido a cada representación, señalan lo que hace difícil cambiar de una representación a otra.

Esta última dificultad establecida por Duval (1999, 2004) puede estar relacionada con que en la escuela se privilegia algunos registros en los que las funciones lineales pueden ser representadas, es decir, se enfatiza una enseñanza mono-registro. Así, cuando los conocimientos adquiridos han estado ligados a la formación y al tratamiento de representaciones efectuadas en un solo registro, o se le da importancia a un registro en particular (la escritura algebraica, los gráficos, las tablas, el discurso en lengua natural, etc.), los conocimientos adquiridos se limitan al contenido conceptual asociado a ese único registro.

Dicho aprendizaje mono-registro se da incluso en actividades donde han sido movilizados, simultánea o sucesivamente, varios registros de representación, dado que el manejo de los mismos, no asegura su coordinación y el conocimiento adquirido es incapaz de ser movilizadado en situaciones fuera del contexto en que el aprendizaje se realizó Duval (2004).

Ahora bien, considerando que la función lineal es fundamental para el desarrollo de la actividad matemática, conviene resaltar que debido a las diferentes representaciones (tabular, gráfica, algebraica, etc.) que ésta permite, garantiza las condiciones para su aprendizaje. Pues expresa Duval (2004), para que sea posible aprender y comprender en matemáticas se debe

disponer de al menos dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático. Dicho de otra manera, para comprender los conceptos matemáticos, es necesario que el objeto trabajado sea utilizado mínimamente desde dos de sus posibles representaciones; sea esta, el lenguaje verbal hacia la expresión algebraica, una tabla hacia su correspondiente gráfica, entre otras combinaciones que permiten observar elementos únicos sobre el objeto.

Sin embargo, realizar la conversión de un registro semiótico a otro no implica el éxito al hacer la conversión en sentido inverso y mucho menos su comprensión. Por tal motivo, es necesario explorar las posibilidades de conversión para todos los cambios posibles.

En este sentido, como la función lineal es un objeto rico en diversidad de representaciones semióticas, dicha variedad posibilita acercarse más conceptualmente al objeto representado. Por esto, es importante centrarse en la función lineal a partir de representaciones semióticas, que ayuden al estudiante a percibir las características de ésta.

Además, lo esencial de trabajar los objetos matemáticos a partir de las representaciones semióticas es que ayudan al estudiante a percibir las propiedades del objeto representado, situación que es indispensable para comprender el contenido matemático. Pues, Duval (2004) afirma, no se puede concebir a las representaciones solo para comunicar las ideas matemáticas, sino por las posibilidades de tratamiento y conversión que cada una de ellas permite.

De este modo, como la conversión representa una de las condiciones necesarias para la comprensión de los objetos matemáticos, este trabajo prioriza las representaciones gráficas y algebraicas del objeto matemático función lineal por las potencialidades de tratamiento que cada una de ellas ofrece. Pues ambos registros permiten observar las unidades significantes desde

miradas bien diferenciadas, lo que garantiza acercarse parcialmente a todas las propiedades del objeto.

Por todo esto, de acuerdo con Duval (1999), se pretende mostrar la importancia de abordar los objetos matemáticos a partir de la identificación de las unidades significantes que entran en juego en todos los registros semióticos de representación en los que un objeto matemático en particular pueda ser representado. Pues dichas unidades son necesarias para favorecer la operación conversión, la cual es importante para la coordinación y comprensión. Además, de mostrar la importancia de utilizar modelos de enseñanza a través del reconocimiento de diferentes representaciones semióticas sobre los objetos trabajados, en el cual el tratamiento y la conversión garanticen tener una visión más global sobre los objetos, particularmente a través de la coordinación, y así diferenciar el objeto de la representación.

Al mismo tiempo, el trabajo muestra la posibilidad de ampliar el estudio en el análisis de las operaciones cognitivas cuando los estudiantes abordan problemas sobre ciertos objetos matemáticos. Pues, conocer la naturaleza de tales procesos cognitivos podría ayudar a docentes a mejorar sus prácticas de enseñanza buscando nuevos elementos pedagógicos y didácticos para disminuir tales dificultades.

#### 1.4 Antecedentes

Teniendo en cuenta que este trabajo toma como referente el enfoque variacional del objeto matemático función lineal, así como el estudio de las representaciones asociadas al mismo, se revisaron algunos trabajos encaminados en esta dirección, tanto a nivel nacional como departamental y local con el propósito de establecer algunos referentes teóricos que puedan orientar el desarrollo de esta investigación.

A nivel nacional, la tesis de maestría sobre ***Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*** por Ospina, D. (2012) de la Universidad Autónoma de Manizales, con el objetivo de comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.

El estudio de Ospina (2012), se enmarca en la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (2004), de donde se toman elementos para identificar el papel que cumplen las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas en la comprensión del concepto de función lineal.

Dicha investigación recurre a la metodología cualitativa interpretativa y como instrumento de recolección de datos se presentan cuestionarios; las situaciones están diseñadas inicialmente en el registro verbal en las que los estudiantes debían describir e identificar características en el registro de formación para vincularla con otro registro que diera cuenta de la misma información. Las actividades llevadas a cabo fueron propuestas con la intención de observar el reconocimiento de las unidades significantes por parte de los estudiantes teniendo en cuenta categorías *a priori* de éstas unidades.

Luego de haber aplicado la prueba, se encontró que los estudiantes muestran dificultades en la conversión al registro algebraico desde otro registro que no sea el gráfico, esto por la falta de congruencia entre las representaciones semióticas del concepto.

Así mismo, la investigación confirmó la teoría de Duval (2004) en el cual se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se facilitan condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión y se logra que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre éstas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.

Este trabajo se relaciona con esta investigación, ya que muestra con respecto al marco teórico como describir las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas y además presenta el tipo de metodología que posibilita proponer situaciones problemas propias del concepto de función lineal.

Otra investigación a nivel nacional corresponde a Gutiérrez & Parada (2007) quienes realizaron la propuesta “**caracterización de tratamientos y conversiones “el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones”** con el objetivo de describir e interpretar los tratamientos y conversiones que hacen algunos estudiantes de cálculo diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería, en situaciones de variación.

La investigación se centra en los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes cuando se les propone una situación en registro verbal que se modela mediante la función afín y

que no explicita el registro de llegada. La escogencia del registro de partida en el trabajo se debe a que es el que generalmente ofrece mayores dificultades al estudiante para: establecer las relaciones entre la información presentada y el objeto matemático, interpretar, pasar a otros registros y solucionar el problema.

Adicionalmente, Gutiérrez & Parada (2007) deciden no explicitar el registro de llegada ni el tipo de función que modela la situación puesto que podría generarse alguna idea sobre las características de las representaciones que espontáneamente eligen los estudiantes así como el dominio que tienen de la función afín como herramienta.

Por otro lado, las situaciones propuestas contemplan fenómenos de congruencia y no-congruencia entre registros; la no congruencia es presentada por ejemplo, cuando el criterio de correspondencia semántica no se cumple en los enunciados que no sugieren explícitamente transformaciones en los otros registros tales como operaciones aritméticas o algebraicas, entre otros.

Con respecto a las situaciones, los estudiantes utilizan una metodología de enfoque cualitativo interpretativo en la cual se implementa un cuestionario escrito como medio para recoger y analizar la información. El instrumento está fundamentado en situaciones relacionadas con intervalos de covariación (en relación directa e inversa) y razón de cambio, unidades significantes asociadas a la función afín en los diferentes registros, el registro verbal y además presentan diferentes grados de complejidad en cuanto a su estructura, es decir, contemplan fenómenos de congruencia y no-congruencia entre registros. Finalmente concluyen que:

- El contexto de la situación de variación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para enfrentarlas.

- Las conversiones que realizan los estudiantes se ven afectadas cuando el enunciado de la situación incluye elementos que distraen la atención y que impiden la interpretación global de la misma.
- los estudiantes hacen conversiones a otros registros solamente cuando sienten la necesidad de ampliar la información para dar respuesta a cuestionamientos planteados; pero no se aprecia un interés por poner en correspondencia las unidades significantes entre registros para corroborar o verificar sus resultados.
- El registro seleccionado al hacer la primera conversión determina la utilización de uno o varios registros de representación a lo largo del desarrollo de la situación.

Gutiérrez & Parada (2007) encontraron importante caracterizar los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes en torno a la función afín, pues esto podría contribuir al desarrollo de propuestas curriculares y didácticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería encaminadas a mejorar el pensamiento variacional así como la comprensión de los conceptos del cálculo.

A nivel departamental, la investigación titulada ***Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobrejectividad asociadas a la conversión entre los registros cartesiano y algebraico*** realizada por Fernández, J. (2015) en la que se trazó el siguiente objetivo: Caracterizar y analizar algunas de las dificultades que emergen en la comprensión de la sobrejectividad asociadas a la operación de conversión entre los registros algebraico y cartesiano por parte de un grupo de estudiantes de las Licenciaturas del Área en Educación Matemática de la Universidad del Valle.

La investigación de Fernández (2015), se apoya en la teoría de “adquisición” de conocimientos por medio de los registros semióticos de representación desarrollada por Duval

(2004) el cual se centra específicamente en la discriminación de unidades significantes en dos representaciones de las funciones de variable real: la representación analítica y la representación gráfica.

En este estudio se pretendía abordar algunas de las dificultades que emergen en la conversión de un registro a otro, enfocándose en una de las propiedades de las funciones de variable real; en este caso la sobreyectividad. El trabajo consistía en efectuar la conversión del registro gráfico cartesiano a una expresión analítica, en la que se involucra también el pasaje inverso.

La metodología que se implementó en este estudio para alcanzar los objetivos propuestos, se dividió en varias etapas las cuales constaban de instrumentos para la recolección y el análisis de la información como: encuestas y rejillas de análisis, de esta manera se tomó la información de las encuestas para construir categorías y subcategorías que se organizaron en las rejillas.

Los resultados del análisis de las actividades realizadas permitieron identificar varias dificultades en la comprensión de la sobreyectividad; primero, que la sobreyectividad no puede asumirse como propiedad trivial o que se genera de forma espontánea en los estudiantes y segundo, que el análisis semiótico puede extenderse a propiedades de los objetos y no solamente a los objetos mismos.

Finalmente, se deduce que la tercera dificultad se debe a la sustitución de elementos pertinentes en las versiones formales por otros que no lo son y a la confusión de la sobreyectividad con otras propiedades de las funciones.



En esta investigación demostró la importancia de analizar las unidades significantes para el cumplimiento de los criterios de congruencia que permiten la conversión entre dos o más registros de representación diferentes. En efecto, permite ampliar el marco teórico del trabajo con elementos que posibilitan hacer un análisis a priori para la descripción de las actividades.

Otra investigación a nivel departamental, ***La función lineal, una noción que emplea los registros de representación semiótica para modelar la variación*** desarrollada por Ramírez & Toro (2012) de la Universidad del Valle sede en Zarzal.

Este trabajo buscó identificar las dificultades a las cuales se enfrenta el estudiante durante el estudio de la noción de función lineal, dificultades que conllevan a un bajo desempeño matemático en especial para interpretar y solucionar situaciones sujetas a una variación.

A partir del análisis de las dificultades encontradas, se hace un aporte didáctico haciendo uso de la función como una herramienta de modelación para la solución de situaciones de variación en diferentes contextos. Como consecuencia de la implementación propuesta trabajada desde una mirada práctica se recurre a la teoría de representaciones semióticas desarrolladas por Duval (1993, 2004), no solamente porque permite explicar el nivel de conceptualización con base en las operaciones cognitivas entre representaciones, sino porque además los problemas sujetos a una variación exigen al estudiante la familiaridad con diversos registros de representaciones para una función lineal.

Así mismo, el proceso de ejecución permitió observar una apropiación de aspectos fundamentales en la formación matemática de los estudiantes tales como: la necesidad de innovación en las situaciones que se presentan en el fomento del pensamiento variacional, las

cuales recreen un ambiente participativo que no se enfatice solo en el desarrollo de habilidades procedimentales y que estimulen la construcción autónoma de conocimiento.

Además la necesidad de exploración de los objetos matemáticos en diversos registros, donde el estudiante pueda caracterizar y comprender los objetos matemáticos, al igual que evaluar los alcances de cada uno con respecto a las operaciones cognitivas que puedan manejar o no.

Es así como el uso de diferentes registros es indispensable en el estudio de cualquier objeto matemático ya que los distintos tipos de representación que se utilizan permiten realizar observaciones importantes del objeto.

Por ejemplo, en el caso de la situación propuesta en este trabajo, las observaciones se centran en la variación entre cantidades desde cada registro de representación: tabular (variación vertical y horizontal de cada magnitud involucrada), cartesiana (relaciones entre las coordenadas y las variaciones que causa los cambios de cada una en la otra), etc. De esta manera la comprensión del objeto no se limita al contenido de un solo registro.

En ésta investigación es posible reconocer cómo el aprendizaje de la función lineal permite fortalecer la solución de situaciones en las que se estimule la construcción autónoma de conocimiento de los estudiantes y la necesidad de innovación en las situaciones que se presentan en el fomento del pensamiento variacional.

A nivel local el trabajo de Angulo (2017) denominado: ***Uso y evaluación de enunciados problemas contextuales para la conversión, tratamiento y comprensión de los parámetros ( $m$  y  $b$ ) de una función lineal  $y=mx+b$  , en grado octavo.*** Se trata de un trabajo de indagación

que busca aportar a la construcción de los parámetros propios de la función lineal en distintos registros de representación semiótica a partir de una propuesta didáctica contextualizada.

La propuesta fue abordada desde los planteamientos de la teoría semiótica de Duval (1988, 1999, 2006a), a partir del cual se buscó generar toma de conciencia por parte de las estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa San Vicente del Municipio de Buenaventura frente al objeto matemático en cuestión.

Los parámetros  $m$  y  $b$  abordados en el trabajo corresponden a las unidades significantes del objeto en el registro algebraico. La designación  $m$ , se le atribuye a la pendiente de una línea recta, más puntualmente a una razón de cambio en  $y$  a medida que  $x$  cambia en una unidad. La decisión de Angulo al estudiar este parámetro se debe a que es común observar que el análisis o cálculo de la pendiente, se fundamenta en el reemplazo en la ecuación  $m = \Delta y / \Delta x$ , sin tener en cuenta el significado que se le puede asociar al número hallado.

Así mismo, hay una imposibilidad de encontrar la ecuación de una recta partiendo de una gráfica cartesiana: al discriminar las variables visuales que ofrece una gráfica, los estudiantes no toman conciencia de la importancia que tienen cada uno de los elementos presentes entre la recta y los puntos de cortes con los ejes.

Por tal razón, Angulo (2017) expresa que estas situaciones de enseñanza obligan a reconsiderar la forma como se está “transmitiendo” este concepto en la enseñanza del álgebra, dado que, entre los errores reportados desde Duval (1988) se encuentra que se confunde la pendiente de una recta con la altura  $y$ , de la mano con eso, se crea un problema al no encontrar una correspondiente equivalencia con dicho concepto, pero que, aun así se sigue enseñando.

Por esto, el autor implementa una secuencia didáctica asociada al contexto de Buenaventura (marítimo), dado que las estudiantes están familiarizados con los elementos que hacen parte de las situaciones problemas, elementos tales como: la pesca artesanal y valores de ciertos mariscos. Además, del uso de conceptos allí utilizados, como; utilidad, costos, ingresos entre otros conceptos con lo cual se puede tener un aprendizaje más significativo con los objetos involucrados a través de diferentes representaciones.

Finalmente, los resultados de la secuencia aplicada permitieron obtener elementos significativos que enriquecen la labor docente. En general, Angulo (2017) concluye que:

- La actividad de un docente no se debe centrar en la transmisión de contenidos descontextualizados, que el estudiante por autoridad debe aceptar. Sino más bien, abordar elementos propios de la disciplina que obedezcan a un contexto particular que haga que lo transmitido cobre sentido y significado en la vida del educando, es decir, que tenga alguna funcionalidad.
- La función lineal no puede seguir siendo trabajada de forma fraccionada o peor aún de forma mecánica, donde por un lado se observa que un concepto no se relaciona con otros o que siempre se hace lo mismo. La función lineal debe ser abordada en toda su dimensión, lo cual implica la relación de las operaciones con los números reales y su representación en un sistema multirregistro.
- El análisis de la teoría semiótica cognitiva de Raymond Duval, permite que el docente tenga un soporte teórico importante que permite que éste lo use como un elemento didáctico consciente a la hora de implementar sus clases, dado que entre tantas cosas Duval dice: *No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar, sin la actividad de*

*representar*, lo cual deja ver que aunque somos conscientes que todo ser posee algún tipo de información no se puede asegurar que este sea consciente de ella, sino es capaz de comunicar, y para ello, lo debe representar.

De este modo, las investigaciones tratadas aportan aspectos teóricos y didácticos para el desarrollo de este trabajo. Pues se enmarcan en la teoría de registros de representación semiótica de Duval (1993, 1988, 1999, 2004) de donde se toman elementos que precisan el marco conceptual desde el cual se seleccionan situaciones de variación para los estudiantes.

## Capítulo 2

### Marco Teórico De Referencia

## **Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia**

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que se tuvieron en cuenta para el análisis de las operaciones cognitivas al trabajar problemas en el marco de la pendiente en una función lineal, y las unidades significantes asociadas. En este sentido, el apartado se centrará dos aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales. En primer lugar, la perspectiva semiótica que remite al concepto de representación, a las operaciones cognitivas que le son intrínsecas y los sistemas semióticos asociados gráfico y algebraico. En segundo lugar, la perspectiva matemática que da cuenta del aspecto formal del objeto matemático, es decir, lo relacionado con las definiciones, conceptos, propiedades, y características que atañen a las funciones lineales, en el cual se hará énfasis en la pendiente como propiedad fundamental de dicho objeto.

### **2.1 Aspectos semióticos**

#### **2.1.1 Representación y operaciones cognitivas asociadas**

Para empezar, el concepto de representación semiótica en matemáticas es definido por Duval (2004) como aquellos signos o marcas que los sujetos utilizan para pensar la matemática, es decir, los medios necesarios para comunicar las ideas matemáticas o para exteriorizar las ideas mentales; representaciones que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico y que pueden tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza.

En relación con Rico (2009) se define que las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas, signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos

matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas.

Así, una representación es la que permite en esencia mostrar algo a lo cual no se puede acceder a través de los sentidos. Lo potente de estas representaciones es que, además que pueden transformarse en otras representaciones, poseen propiedades que tienen los objetos matemáticos.

A pesar de que las representaciones cuentan con propiedades de los objetos, trabajar con la representación no es trabajar con el objeto representado. Pues bien para que la confusión entre el objeto y su representación no ocurra, la representación debe disponer de al menos dos sistemas semióticos diferentes para comunicarse y que se pueda ir de una a otra espontáneamente (Duval, 2004).

En general el proceso de pasar de una representación a otra hace referencia a una de las operaciones cognitivas propias a toda representación, específicamente a la conversión. Duval (1998) menciona al respecto, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas asociadas a la semiosis.

En primer lugar, la actividad cognitiva de formación la cual remite al conjunto de marcas que permiten expresar o evocar un objeto que está en la mente. Esta actividad implica se da en registro no discursivo, determinan lo que el sujeto quiere representar.

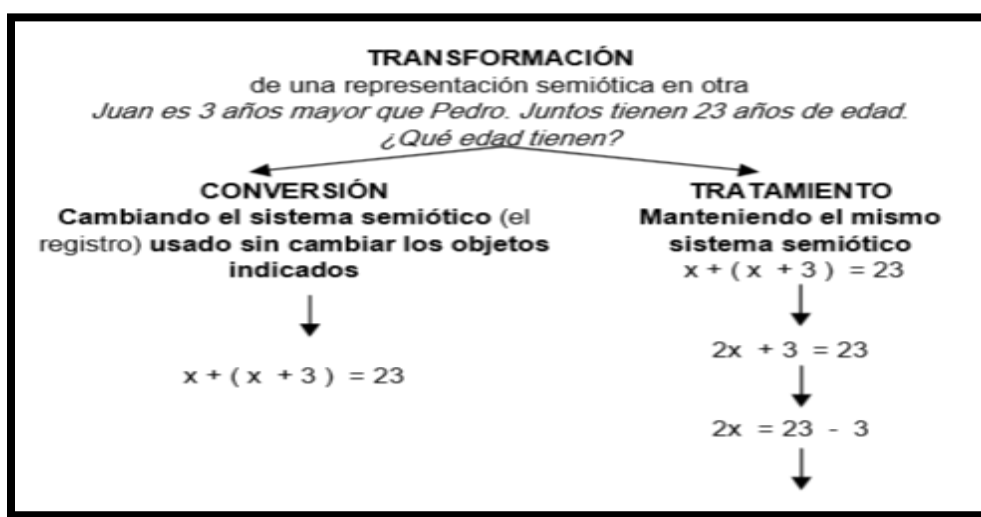
De este modo, es importante que la formación respete las reglas propias al sistema empleado no solo por razones de comunicación, sino también para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece el sistema semiótico empleado, como indica Duval (2004), la



formación es el primer acercamiento que se tiene con el objeto representado entonces, es necesario que los elementos propios de dicho sistema sean claramente identificables ya que como primer registro representa información parcial sobre las propiedades del objeto.

En segundo lugar, la actividad cognitiva de tratamiento. Un tratamiento es una transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema. Lo importante de esta actividad es que permite trabajar en el mismo registro de la representación inicial y cada registro empleado posee tratamientos particulares que posibilitan utilizar los mismos signos de la representación inicial.

En tercer lugar, la conversión como actividad cognitiva es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de ese mismo objeto, o de la misma información en otro registro. En otras palabras, la conversión es un cambio de una representación dada en un registro, en otra representación en un registro diferente, que conserva parte del significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado, de acuerdo a Duval (1999).



**Figura 1.** Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento. Tomado de Duval (2006)

Así pues, las tres actividades tratadas anteriormente constituyen el foco en la enseñanza de las matemáticas, pues ellas garantizan un acercamiento al objeto de manera tal que permiten manipular directamente las propiedades del objeto representado.

Estas diferentes actividades están reagrupadas y confundidas en lo que generalmente se llaman tareas de producción y tareas de comprensión. La producción de una respuesta, sea un texto o esquema, movilizan simultáneamente la formación de representaciones semióticas y su tratamiento. La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, movilizan ya sea actividades de conversión y de formación o bien las tres actividades cognitivas, según Duval (2004).

Por lo anterior, se prioriza la operación de conversión debido a que el cambio de registro representa una de las condiciones necesarias para la comprensión ya que cada registro presenta información parcial y bien diferenciada sobre el objeto matemático representado.

### **2.1.2 Conversión y coordinación entre registros**

Es evidente que en matemáticas existen muchas maneras de representar un objeto matemático; pues la actividad matemática se caracteriza por las diversas formas posibles de acceder al objeto para dar respuesta a una determinada situación. Lo importante de las representaciones es que permiten una mirada a las propiedades del objeto representado y además posibilitan las condiciones para trabajar y comunicar dichos objetos.

No obstante, Duval (1999) deja ver que, las representaciones semióticas no solo son indispensables para la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, por el hecho que permiten efectuar tratamientos, es decir, razonamientos, hacer cálculos, y pasar de un registro semiótico de representación a otro, en el sentido planteado por Duval (1999). En efecto, las representaciones tienen un papel fundamental en el funcionamiento

del pensamiento matemático, lo cual se debe no sólo a que los objetos matemáticos no son accesibles fuera de las representaciones semióticas, sino, sobre todo al hecho que los procesos de pensamiento se llevan a cabo mediante dos tipos de transformaciones de las representaciones puestas en juego, es decir la conversión y el tratamiento.

Por esto, la forma de acceder a las diversas representaciones sobre los objetos trabajados constituye un umbral para el aprendizaje. Duval (2004) expresa que es la actividad cognitiva menos espontánea y de más difícil adquisición, y esto debido a varios factores: en primer lugar, no obedece a reglas como si ocurre al hacer un tratamiento en un registro específico. En segundo lugar, la misma palabra implica un cambio de naturaleza, el paso de un contrario a otro, una ruptura que exige una toma de conciencia sobre lo que se percibe (Pontón, 2009)

La tercera es que en la enseñanza de las matemáticas se privilegia sobre todo las operaciones de formación y tratamiento. Lo que se traduce en que un cambio de registro puede hacerse solo por cuestiones de necesidad de ese nuevo registro y de las potencialidades en tratamiento que este ofrece. Es decir, simplemente una acción de recursividad al registro más adecuado en el momento. Por esto, la conversión y el tratamiento deben ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan a distintas situaciones problemas. La comprensión surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados y de identificar la información específica que cada representación o sistema semiótico ofrece.

La coordinación de dichos sistemas requiere que la conversión pueda ser efectuada para todos sus diferentes cambios de registro. En efecto, para favorecer tal coordinación, parece esencial proponer tareas que conduzcan a explorar sistemáticamente las variantes posibles de una representación en un registro y prever, u observar, las variaciones concomitantes de las representa-

ciones en el otro registro, en Duval (1992). En este sentido, a fin de favorecer la coordinación, la enseñanza no se puede restringir a la presentación de algunos ejemplos de conversión sino efectuar dicha actividad para todos los cambios posibles.

De hecho, la actividad de conversión tiene sentido por la existencia de múltiples registros para un mismo objeto matemático. Y para la coordinación es indispensable la toma de consciencia sobre una variedad de representaciones sobre un objeto en particular es decir, concebir el objeto desde miradas diferentes, con signos diferentes, estructuras diferentes y tratamientos diferentes. Al mismo tiempo y conociendo ya las distintas representaciones posibles sobre un objeto, se debe poder ir de una a otra de manera natural, identificando en ellos propiedades distintas del objeto. Por último, que sea posible establecer una correspondencia entre las unidades constitutivas de las representaciones que den cuenta del mismo contenido en registros distintos, teniendo consciencia de que los cambios en una representación de partida tienen efectos en otra representación de llegada en su respectivo registro.

Así pues, la conversión requiere que se perciba de manera consciente la diferencia entre el contenido de una representación y lo que se representa; pues son los sistemas semióticos los que aumentan la capacidad de aprehensión del pensamiento. En general, lo importante de la conversión es que presenta dos características que no se encuentran en la operación de tratamiento y que cimientan una operación cognitivamente más compleja y mucho más evolucionada que los tratamientos en los registros mono funcionales: está orientada, en otras palabras, siempre es necesario precisar cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada. Y puede ser congruente o no congruente, es decir, el pasaje de dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en sentido contrario Duval, en Ospina (2012).

Como se ha dicho, para la operación de conversión Duval (2004) menciona que es la actividad cognitiva más difícil de adquirir de lo que se tiene la tendencia a creer. Esto es, el cambio de registro presupone la habilidad para distinguir los elementos significantes que entran en juego en cada registro lo cual no es considerado en muchas ocasiones cuando se trabaja en matemáticas. Indiscutiblemente la dificultad en el cambio de registro está asociada al pasaje de una representación a otra cuando ellas no son congruentes. Por esto, es importante abordar que implica la congruencia entre dos o más representaciones.

### **2.1.3 Congruencia entre representaciones**

En la actualidad no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Precisamente la matemática es una actividad rica en diversidad de representaciones, las cuales garantizan la posibilidad de ir de una a otra cambiando de forma pero manteniendo el mismo objeto cuando se resuelve una situación matemática. Sin embargo, como se ha dicho anteriormente la conversión puede hacerse imposible de efectuar posiblemente por la no congruencia entre las representaciones a utilizar.

Así pues, la congruencia entre dos representaciones de un mismo objeto matemático en registros distintos se presenta, cuando el paso de una representación a la otra se da de forma casi natural o espontánea. En caso contrario, se habla de no-congruencia entre dichas representaciones Duval (2004). La no congruencia puede darse en mayor o menor grado, dependiendo de la cantidad de criterios que se dejen de cumplir. Por esto, es importante precisar lo que significan e implican dichos criterios.

El primero de estos criterios, *correspondencia semántica entre las unidades significantes propias a cada registro*, hace referencia a las unidades significantes en cada representación

pero en términos de lo que significan, lo que evocan convencionalmente. Para que se cumpla este criterio es necesario que las unidades estén casi que explícitas en los dos registros y que además se mantenga el contenido en términos de significado en cada representación. Esto requiere que la interpretación de cada unidad en el registro de partida pueda ser correspondida semánticamente con una unidad en el registro de llegada. Es importante que las unidades no den lugar a interpretaciones distintas Duval (2004).

En otras palabras, que a partir de la representación dada en un registro inicial, cada uno de los elementos característicos puedan ponerse en relación con los elementos característicos de otra representación, y que además tengan igual significancia al interior de cada representación.

El segundo criterio, *univocidad semántica terminal*, hace referencia al número de unidades significantes en cada representación pero en términos de correspondencia biunívoca. Es decir, que cada unidad significativa elemental de la representación de partida se relaciona con una única unidad significativa elemental en el registro de llegada Duval (2004).

Dicho de otra manera, una misma unidad significativa en un registro solo puede estar en correspondencia con una y solo una unidad significativa dada en el otro registro. Implica esto que la relación entre unidades debe ser uno a uno, ni más ni menos.

El tercer y último criterio, *orden de arreglo de las unidades que componen cada representación*, refiere a que la forma en la que se interiorizan las unidades que se ponen en correspondencia debe darse “en el mismo orden en las dos representaciones” Duval, (2004). Es decir, es pertinente la conservación del orden en que estén organizadas las unidades significantes en las representaciones a utilizar. Así mismo, que en la misma secuencia en que se presenten en la representación de partida, se deben poder percibir en una representación de llegada.

De esta manera, lo importante de estos criterios es que permiten determinar la congruencia entre dos representaciones semióticamente diferentes y que, al menos parcialmente, representan el mismo contenido Duval (2004).

De este modo, para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar segmentándolas en sus respectivas unidades. Significar de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. (Duval, 2004) Esto es, analizar la operación conversión entre representaciones semióticas, implica identificar los detalles por los que está compuesta cada representación y extraer de ellas los elementos que le otorgan sentido, de manera que tales unidades puedan ser puestas en correspondencia unas con otras, para lograr la conversión. Segmentar las unidades de cada representación significa extraer las particularidades, los parámetros que permiten reconocer en una representación para lograr ver en otra representación la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. Es decir, dos representaciones semióticamente diferentes y que matemáticamente representan el mismo objeto.

Puede notarse, que algunas de las dificultades en la conversión entre registros están asociadas a la congruencia o no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto. Sin embargo, la conversión es la actividad que le permite al estudiante llegar a comprender el objeto en la medida en que permite obtener información distinta en cada registro. Información que se pone en juego cuando se identifican los criterios de congruencia que puedan cumplirse o no entre dos o más representaciones. Esta información se recoge a partir de la significación que toma cada unidad significativa en cada representación lo cual permite que se efectúen cambios de registro en dónde cada unidad significativa en una representación se corresponda con otra que tenga igual significancia.

Por lo anterior, se podría decir que para la comprensión, la conversión no es una condición suficiente pero, que representa uno de los medios necesarios para acercarse a ella. Es decir, es posible otorgarle a la conversión el carácter de consecuencia directa de la actividad conceptual por el hecho de que requiere una apropiación de la significación que tiene cada unidad en un determinado registro. Por esto, vale la pena explicitar los elementos característicos que de cada representación posibilitan la interpretación global del objeto matemático función lineal.

#### **2.1.4. Representaciones semióticas elementales de los registros gráficos y algebraicos**

Las representaciones semióticas juegan un papel primordial en la enseñanza de las matemáticas, ya que son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos. Dichas representaciones constituyen los medios necesarios para trabajar con los objetos matemáticos, así pues, para comprenderlos se debe disponer de al menos dos formas de representación sobre ellos. Pues la construcción conceptual de los objetos matemáticos depende de la capacidad de usar varios registros de representación semiótica de dichos conceptos Duval (1999, 2004).

De este modo, para describir las dificultades en la conversión entre las representaciones gráficas y algebraicas asociadas a la función lineal es necesario conocer los elementos que caracterizan a cada una de ellas. La representación gráfica tiene por excelencia, la potencialidad del entendimiento que da la visualización, es decir, está relacionada a los aspectos geométricos del objeto; la representación algebraica requiere claramente el continuo uso del lenguaje del álgebra.

En este sentido, la teoría semiótica permite explicitar las unidades significantes correspondientes a ambos registros. Pues la conversión y la coordinación entre dos registros requieren



la discriminación de las unidades significantes de cada uno para lograr establecer la correspondencia.

El registro algebraico aunque generalmente es el primer contacto que tiene el estudiante con las funciones lineales, implica ciertas dificultades; pues para encontrar una expresión algebraica lineal se debe recurrir a una serie de procesos característicos de dicho registro. Las dificultades están asociadas entre otras a la determinación de la pendiente, el desconocimiento de que es posible encontrar la ecuación conociendo un punto y la pendiente, la dificultad para identificar la relación entre cantidades conocidas y desconocidas y la aplicación inadecuada de la ecuación punto pendiente.

De manera general, en la ecuación de toda línea recta de la forma  $y = mx + b$ , se reconocen dos constantes que son el coeficiente  $m$  o  $a$  y el término independiente  $b$ . Se explicitan entonces las unidades significantes propias a la expresión algebraica.

- los signos relacionales ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ )
- los símbolos de operación o de signo ( $+$ ,  $-$ )
- los símbolos de variable ( $x$ ,  $y$ )
- los símbolos de exponente, coeficiente y constante ( $a$ ,  $b$ )

Por otro lado, el registro gráfico representa uno de los principales registros al cual se acude cuando se trabajan las funciones lineales. Este registro se caracteriza por presentar de manera global las características del objeto matemático. (Duval, 2009)

Las representaciones gráficas movilizan dos tipos de variables generales, valores visuales significantes o pertinentes que son presentados como un todo, es decir no son dados por separado como en la escritura algebraica y tres variables visuales que corresponden a una simple modificación de la configuración trazo-realizado/ejes orientados los cuales son esenciales para la

discriminación de las propiedades de las figuras de una representación gráfica (Duval, 1992). Las dos variables generales son:

- La implantación de la tarea, es decir lo que se desprende como figura sobre fondo: un trazo o una zona.
- La forma de la tarea: el trazo realizado que delimite o no una zona, es recto o es curvo.

Los tres valores visuales de las funciones lineales y afines son:

Variables visuales	Valores de las variables visuales	Unidades simbólicas
El sentido de la inclinación del trazo:	El trazo sube de izquierda a derecha El trazo desciende de izquierda a derecha El trazo es una línea recta paralela al eje $x$	Ascendente US: $a > 0 (+)$ Descendente US: $a < 0 (-)$ US: $a = 0$
Los ángulos del trazo con los ejes	<b>Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado:</b> El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical Cuando la recta trazada no pasa por el origen, es suficiente desplazar el eje vertical, hasta el punto de intersección de la recta con el eje horizontal.	Ángulo mayor que el formado por la bisectriz del primer cuadrante. US: $a > 1$  Ángulo menor que el formado por la bisectriz del primer cuadrante US: $a < 1$
La posición del trazo respecto al origen del eje vertical	El trazo corta el eje y arriba del origen El trazo corta el eje y abajo del origen El trazo corta el eje y en el origen	Pasa por encima o por debajo del origen US: <b>Se suma o se resta una constante</b>  Pasa por el origen US: <b>No hay constante</b>

**Tabla 1.** Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro gráfico. (Tomada de Duval, 1992, p. 128)

La tabla anterior representa los elementos que están en juego en toda representación gráfica de las funciones lineales. Así mismo, cuando se trabaja sobre el conjunto trazo/ejes que

forma una imagen que a su vez representa un objeto descrito por una expresión algebraica, toda modificación de esa imagen conlleva a una modificación en escritura de la expresión algebraica lo cual determina lo que se llama variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica.

Por todo esto, Duval (1992) señala que la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro, por lo que estas pueden ser diferentes. Pero, a pesar de que las unidades significantes son propias a cada uno de los registros de representación, dichas unidades no pueden ser entendidas y utilizadas de manera independiente ya que la modificación de una unidad significativa en un registro de partida cambia parcialmente las unidades de los otros registros. De este modo, se muestran las relaciones entre las unidades significantes que caracterizan a la función lineal.

- Cada característica visual particular se combina con una característica semántica de la ecuación y no con la función representada.
- La red de características visuales distintivas para cada registro pueden o no tener la misma cantidad de elementos.
- La red no depende de algún contenido o “concepto” matemático específico sino de las posibilidades de representación Duval (2006).

Por consiguiente, los conceptos teóricos mencionados anteriormente servirán de base para seleccionar algunas situaciones dadas en un registro inicial (formación) asociadas a la función lineal en los cuales se pueda realizar la actividad de tratamiento y conversión de acuerdo a las cuestiones involucradas. La discriminación de las variables y unidades significantes correspondientes a cada registro, es un componente importante en esta tarea, así como la coordinación de dichas unidades.

## 2.2 Aspectos matemáticos

### 2.2.1 Definición de la función lineal

Desde inicios de la educación media, los estudiantes están enfrentados a una teoría matemática basada en una transposición didáctica; pues elementos como definiciones, propiedades, teoremas y procesos son presentados por el docente de acuerdo a una filosofía sobre las matemáticas; los cuales orientan el quehacer y la actividad matemática. Por ello, en esta perspectiva se hace referencia a la teoría que rige la manera como se aborda el concepto de función lineal en la escuela.

En particular, existen diversas formas de definir las funciones lineales, sin embargo para efectos de este trabajo se presenta la definición de Swokowski (1988) y la forma canónica debido a que toma como referente la relación entre variables de naturalezas distintas y además la definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y el rango.

Según Swokowski (1988) Una función  $f$  de un conjunto  $D$  a un conjunto  $E$  es una correspondencia que asigna a cada elemento  $x$  de  $D$  un elemento único  $y$  de  $E$ . El elemento  $f$  de  $E$  es el valor (funcional) de  $f$  en  $x$  y se denota por  $f(x)$  (notación que se lee “ $f$  de  $x$ ”). El conjunto  $D$  se llama dominio de la función. El rango de  $f$  es el subconjunto de  $E$  que consta de todos los valores posibles  $f(x)$  para  $x$  en  $D$ .

Lo importante de esta definición es que lleva implícito la noción de correspondencia que aparece frecuentemente en situaciones de la vida diaria; correspondencia entre magnitudes que pueden ser modeladas mediante funciones lineales.

En general, las funciones lineales hacen parte del conjunto de funciones polinómicas de la forma  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  donde los números  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  son números reales que representan los coeficientes del polinomio y el número natural  $n$  expresa su grado (Si  $a_n \neq 0$ ). Así, se puede notar que según el grado del polinomio planteado, dichas funciones se pueden clasificar en: constante, lineal, cuadrática, cúbica y polinómica general.

En concreto, si  $f(x)$  es un polinomio de primer grado es decir, con  $n=1$  entonces  $f(x) = ax + b$  para  $a \neq 0$ . Lo cual indica que  $f$  es una función lineal. De manera semejante, la función lineal puede ser presentada de la forma  $f(x) = mx + b$  donde  $m$  y  $b \in \mathbb{R}$  y  $m \neq 0$ .

La anterior relación se denomina expresión canónica de las funciones lineales y constituye una de las formas para su representación. Lo importante de dicha representación es que es posible observar características de manera inmediata sin recurrir a tratamiento alguno al igual que permite generalizar y particularizar las variables a cualquier tipo de magnitudes  $x$  e  $y$ .

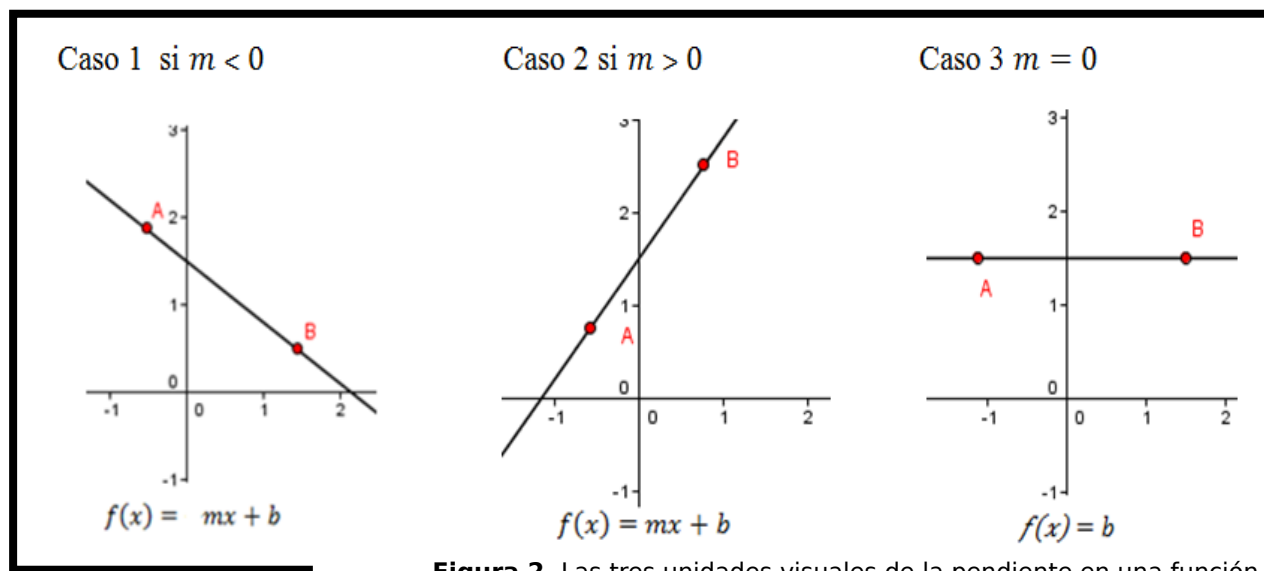
Por su parte, la representación gráfica de una función lineal es una línea recta de pendiente  $m$  que pasa por el punto  $(0, b)$ . Los valores numéricos de  $m$  y  $b$  son de gran importancia puesto que determinan el grado de inclinación y el punto de corte con el eje  $y$ ; elementos que gráficamente permiten tener una visión global sobre el comportamiento de la función.

Sabiendo que  $m$  representa el grado de inclinación, el signo de este parámetro es fundamental para la interpretación general de las funciones lineales.

Pues:

$$\text{Dado } f(x) = mx + b \rightarrow \begin{cases} \text{si } m < 0, \text{ a medida que } x \text{ aumenta } f(x) \text{ disminuye} \\ \text{si } m > 0, \text{ a medida que } x \text{ aumenta } f(x) \text{ aumenta} \\ \text{si } m = 0, f(x) \text{ es una línea paralela al eje } x \\ \text{si } m \text{ es indefinido entonces la recta es } x = k, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Puede notarse que el signo de la constante  $m$ , es decir los rangos de valores en  $\mathbb{R}$  que puede tomar este coeficiente representa una unidad significativa elemental para la interpretación del comportamiento de la función. Así mismo, todo cambio en la expresión algebraica produce una modificación en la representación gráfica; por ello es preciso analizar visualmente qué pasa cuando el valor de  $m$  cambia entre valores en el conjunto numérico de los reales.



**Figura 2.** Las tres unidades visuales de la pendiente en una función lineal.

Existen tres tipos de posibilidades distintas que pueden ser visualmente observadas debido a la relevancia que tienen los rangos numéricos que podría tomar el coeficiente  $m$  en  $\mathbb{R}$ . La primera gráfica tiene pendiente negativa lo cual implica que la línea posea una inclinación hacia abajo, es decir decrece linealmente a medida que  $x$  aumenta. Para el segundo caso, el coeficiente de variación es positivo lo cual produce en la representación gráfica una línea que crece hacia arriba a medida que  $x$  cambia de izquierda a derecha. Es decir, la función es cre-

ciente. Para el último caso, la expresión algebraica tiene pendiente cero lo cual elimina la variable  $x$  produciendo en la representación gráfica una línea horizontal paralela al eje de las abscisas. La implicación al desaparecer la variable  $D$  está relacionada con que para todos los valores posibles de la variable independiente, el resultado es la misma constante  $b$ , es decir  $f(k)=b$  para todo  $k \in R$ .

De este modo, cuando se observan las gráficas en relación con las expresiones, el valor de la pendiente  $m$  y el del punto de corte en el eje  $E$  ( $b$ ), determinan el comportamiento y sentido de la dirección de la recta. Sin embargo, las expresiones algebraicas y las gráficas son solo algunas de las formas en que es posible visualizar el comportamiento de una función. Por esto es importante explicitar las distintas formas en que las funciones lineales pueden ser presentadas.

### 2.2.2 Propiedades y procesos fundamentales de la función lineal

Las funciones se pueden clasificar según como se relacionen los elementos del dominio con los elementos del rango. Por ello, algunas funciones pueden ser inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Sin embargo, estas propiedades pueden ser cumplidas por cualquier tipo de funciones de variable real sea esta polinómica, exponencial o logarítmica.

Para este caso, la función lineal tiene como característica ser biyectiva; pues cumple las condiciones de ser uno a uno es decir, geométricamente ninguna recta horizontal interseca su gráfica en más de un punto. Lo que simbólicamente se puede ver como  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  o  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Y además, el rango de toda función lineal es igual al codominio; esto es, todos los elementos del conjunto de llegada son

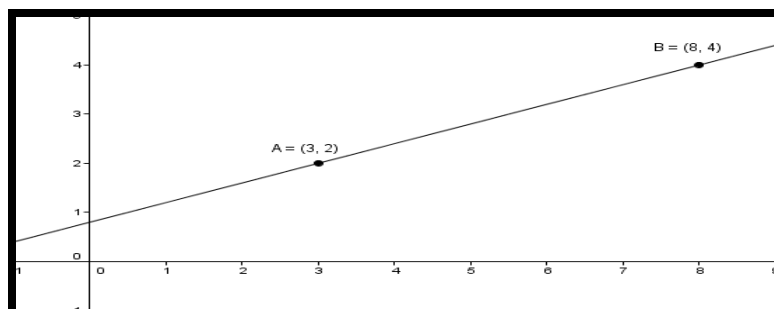
imagen de, por lo menos, un elemento del dominio. Es decir,  $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$ , con  $m \neq 0$ .

Pese al cumplimiento de esta importante propiedad, las funciones lineales poseen otras propiedades que la diferencian de otros tipos de funciones. Propiedades como dominio e imagen, paridad, signos de la función, monotonía, ceros entre otras pueden ser analizadas en cualquier forma en que el objeto matemático puede ser representado. Lo importante de lo anterior es que la comprensión de la función como objeto matemático está íntimamente relacionada con la comprensión de dichas propiedades, por lo que es necesario precisar cada una de ellas.

El **dominio e imagen** son una característica particular de las funciones. Para las que son lineales, el dominio y el codominio de las variables  $x$  e  $y$  está compuesto por todos los números reales  $\mathbb{R}$ , mientras que el rango es también  $\mathbb{R}$ . No obstante, existen situaciones dónde es necesario restringir los valores que puede tomar la variable independiente  $x$  por el hecho que los valores negativos no tienen sentido para ciertas magnitudes.

La **paridad** de una función está relacionada con una serie de relaciones particulares de simetría. Con respecto a sus funciones adictivas inversas. De este modo, las líneas rectas son constitutivas de la función impar puesto el valor del exponente es un entero impar igual a uno por lo que satisface la igualdad  $f(-x) = -f(x)$ . Con respecto a esta igualdad, la propiedad indica que al sumar ambas funciones el resultado es cero.

La **monotonía** en la función está relacionada directamente con la pendiente. La pendiente es un valor que representa la inclinación de una recta. Si la recta es horizontal tiene pendiente cero, una recta que se eleva hacia la derecha tiene

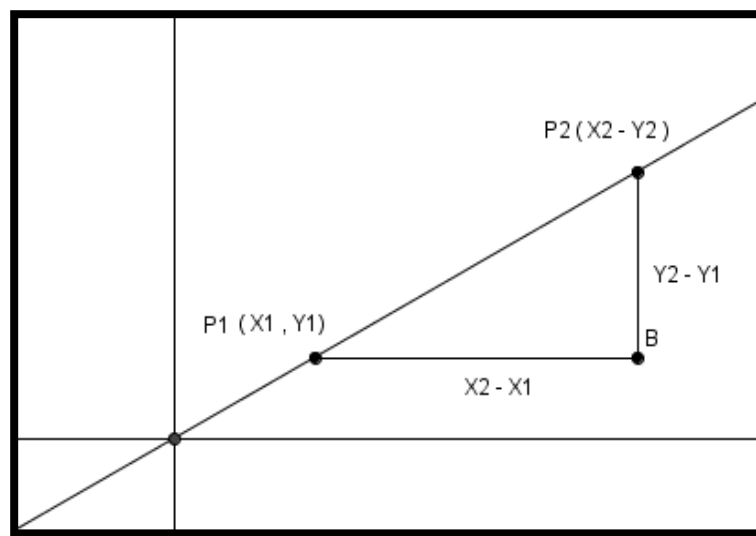




pendiente positiva y una recta que desciende a la derecha tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada será la recta. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido, ya que implicaría la división entre cero. Por tanto, la pendiente para una recta vertical es indefinida. Gráficamente la pendiente se puede ver así:

**Figura 5.** Gráfica de la pendiente de una recta dado dos puntos

La recta de la figura pasa por los puntos  $A$  y  $D$ . Del punto  $A$  al punto  $B$  existe una elevación (cambio vertical) de 2 unidades y un avance (cambio horizontal) de 5 unidades. Por dicho cambio, la recta tiene una pendiente de  $2/5$ . En términos generales, geométricamente la pendiente puede analizarse de esta forma.



**Figura 6.** Representación geométrica de la pendiente

Algebraica-  
pendiente  $m$  es:

mente la

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la figura se muestran los puntos típicos  $P_1$  y  $P_2$  sobre una recta. El numerador  $y_2 - y_1$  en la fórmula  $m$  es igual al incremento de ordenada (cambio vertical) al ir de  $P_1$  a  $P_2$ , y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador  $x_2 - x_1$  es el incremento de abscisas (cambio horizontal) al ir de  $P_1$  a  $P_2$ , este también puede ser positivo o negativo, pero no puede ser cero.

Para calcular la pendiente de una recta, es necesario conocer al menos dos puntos cualesquiera que pasen por la recta. Conociendo ya la pendiente, es posible encontrar una ecuación para una recta que tiene pendiente  $m$ . Esta expresión general se puede calcular de dos formas.

$$\checkmark \quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o} \quad y = mx + b$$

La primera ecuación, **punto-pendiente** de la recta se caracteriza porque se conoce un punto que pasa por la recta y además la pendiente  $m$ . Así pues, conociendo el punto  $(x_1, y_1)$  y  $m$ , es posible encontrar la expresión algebraica que pasa por todos los puntos de dicha recta.

La segunda ecuación, **pendiente-intersección** se caracteriza porque permite leer de manera inmediata su pendiente e intersección con el eje  $y$ . Esta ecuación se calcula conociendo la pendiente  $m$  y sabiendo que la recta interseca al eje  $y$  en  $(0, b)$ . De este modo, es posible encontrar la expresión general de cualquier línea recta de acuerdo a los casos antes tratados.

Por otro lado, los **ceros** como propiedad de las funciones se refieren a los puntos donde la curva corta el eje de abscisa en el plano cartesiano. Es decir, las raíces de la ecuación cuando

$f(x)=0$  . En la función lineal se obtiene de la siguiente manera:  $x=\frac{-b}{m}$  de donde resulta el

punto  $f$  .

Por lo anterior, puede verse que cada una de las propiedades de la función lineal muestra elementos particulares relacionados con el concepto. Por esto, la comprensión de estas propiedades de las funciones lineales juega un papel decisivo en la comprensión tanto del objeto mismo como de otros conceptos matemáticos un poco más avanzados.

Por consiguiente, se muestra la importancia que cumplen las propiedades del objeto matemático y la relevancia de estas para resolver distintas situaciones problemas, propiedades que serán de gran interés para el análisis de las actividades. Igualmente, se hace necesario y explícito establecer las vías por las cuales es posible llegar a la determinación de las propiedades a través de los registros de representación, pues estos son los que permiten la identificación y comunicación de dichas propiedades.

### **2.2.3 Formas de representación de las funciones lineales**

Las funciones lineales son uno de los objetos matemáticos con más posibilidades de representación en Educación Matemática; dicha diversidad aumenta las posibilidades para su comprensión. Pues el objeto puede percibirse a través de: diagramas sagitales, expresiones algebraicas, tablas, gráficas cartesianas, entre otras representaciones que permiten identificar elementos importantes en cada una de ellas.

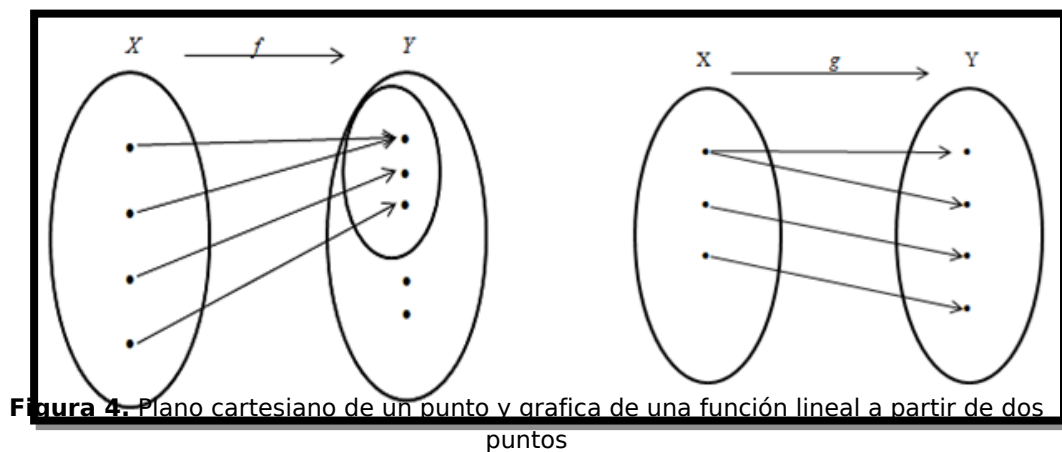
No obstante, para conocer las formas de representar una función, es necesario conocer la notación con las que esta se puede identificar. Dado que una función puede considerarse como

una correspondencia, esta se puede escribir de diferentes formas. Así, para expresar que  $E$  es una función de  $X$  en  $Y$  se usan las siguientes notaciones:

$$f : A \rightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B \qquad f = \{(x, y) / y = f(x), x \in R, y \in R\}$$


La notación  $f(x)$  se utiliza para indicar el elemento que en el rango corresponde a  $x$  por la función  $f$ , y se le llama la imagen de  $x$  por  $f$ . Cuando la regla para la función está dada por medio de una ecuación de la forma  $f(x)=y$  “que se lee  $f$  de  $x$  igual a  $y$ ”, llamamos a la  $x$  variable independiente y a la “ $y$ ” variable dependiente. Dichas notaciones permiten distinguir a las funciones entre cualquier otro objeto matemático, aún con las relaciones que no son función.

La representación **sagital** se caracteriza porque permite visualizar por medio de flechas la forma en que se relacionan los elementos del dominio y del codominio, facilitando la verificación de las condiciones que debe cumplir una relación para ser función. Es decir, si a cada elemento de un conjunto  $A$  se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto  $B$ , se dice que esta correspondencia es una función, Roldan (2013).



**Figura 3.** Diagrama sagital de una relación que es función y otra que no lo es entre los conjuntos  $x$  e  $y$ .

El  
pri-  
mer  
dia-

grama permite ver que todos los elementos del primer conjunto solo están relacionados a través de  $f$  con un único elemento del segundo conjunto. Pues cada elemento del conjunto de salida se vincula mediante una flecha con un elemento del conjunto de llegada. De esta manera, se establece la noción de función a través de la correspondencia establecida. Este tipo de representaciones permite ver claramente la relación entre dos conjuntos o magnitudes que se relacionan mediante una regla de asignación . El segundo diagrama no representa una función puesto que no cumple con la definición de la misma, pues existe un valor en el dominio  $X$  que está relacionado con más de un valor en el codominio.

Por otro lado, la representación **algebraica** como ya se expresó, es la forma de representar una función por medio de una expresión escrita en la que se explicita la relación entre las variables, esta expresión analítica puede ser algebraica (polinómica) o no y, corresponde a la regla de correspondencia o dependencia entre cantidades o magnitudes. La forma que más se emplea es:

$$y=f(x)=mx+b$$

Con esta representación se forma una triada que está mutuamente vinculada a una tabla y una gráfica; pues cada ecuación genera una y solo una gráfica cartesiana que se corresponde unívocamente con un conjunto de parejas ordenadas, pero a su vez una ecuación produce un conjunto de parejas ordenadas posibles de disponer parcialmente en una tabla que a su vez origina una y solo una gráfica cartesiana Roldán (2013).

La representación **tabular** se caracteriza porque permite mostrar y expresar las funciones a partir de casos particulares y precisos. En ella se ordena la información para presentar la correspondencia entre cantidades en dos filas o columnas; la primera corresponde al conjunto de

salida y la segunda al de llegada. Por ejemplo si se considera la relación funcional, por cada hora de trabajo un obrero fabrica 2 unidades de cierto artículo. Dicha situación se podría tabular de la siguiente forma:

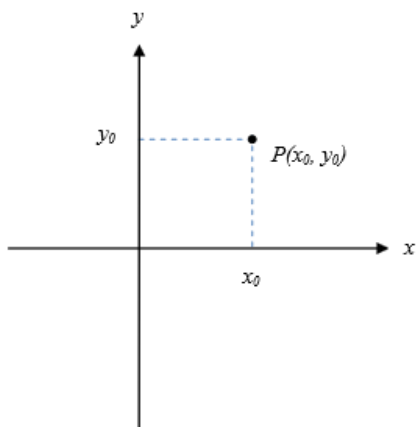
$x$	0	1	2	4	7	8
$y$	0	2	4	8	14	16

**Tabla 2.** Representación tabular de algunos valores que satisfacen la función  $y=2x$

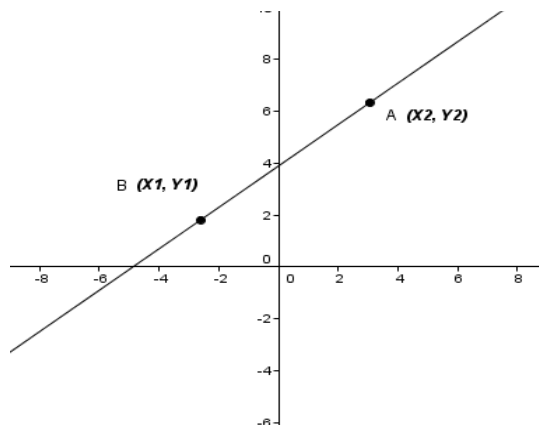
De este modo se puede ver la relación entre el número de artículos producidos para  $x$  cantidad de horas. En general, la forma tabular consiste en una tabla de valores de los cuales los valores de  $x$  corresponden a valores particulares del dominio, y los valores de  $y$  corresponden a valores del codominio. Una de las ventajas que presenta elaborar tablas es que: “permite descubrir regularidades como son diferencias constantes, diferencias que crecen (o decrecen) regularmente, productos o cocientes constantes, etc.

La representación **gráfica-cartesiana** de una función lineal se considera como la representación geométrica de la misma, es importante debido a la posibilidad de análisis y la observación de atributos que permite distinguir como la pendiente (inclinación) e interceptos con los ejes. En general, la gráfica consiste en un trazo hecho sobre un plano cartesiano, formado por dos rectas perpendiculares conocidas como ejes coordenados. Dicho trazo se considera formado por puntos, en donde cada punto corresponde a una pareja ordenada  $(x, y)$ . Los valores de  $x$  e  $y$  son valores ubicados en los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Esta representación geométrica se puede construir a partir de la ubicación de dos puntos en el plano.

fi-  
de



la



La  
gura  
iz-

quiera representa un punto ubicado en el plano cartesiano que consta de dos coordenadas  $(x, y)$ . Los puntos permiten ver las parejas ordenadas formadas por los elementos del dominio junto con el elemento del codominio con el cual están relacionados. La figura de la derecha representa la función lineal que puede ser trazada a partir de la ubicación de dos puntos que pertenezcan a ella. Generalmente se grafica asignando valores a la variable independiente  $x$  para encontrar su correspondiente valor en  $y$ . Luego se ubica cada punto en el plano cartesiano y se traza la gráfica que pasa por cada uno de los puntos antes ubicados.

Estas y otras son las distintas formas de representar una función lineal. Sin embargo, la representación algebraica y gráfica-cartesiana son las de mayor abstracción y por tanto son las más complejas pues proporcionan más y mejor información que las anteriores. La representación algebraica requiere del conocimiento de los símbolos empleados y el empleo de ellos para interpretar conceptos abstractos, la ecuación permite la determinación de valores de forma precisa y la gráfica por su lado da valores aproximados y permite la observación de atributos de forma más intuitiva (Roldán, 2013).

En general, las distintas formas de entender una función están asociadas a la noción o idea de las que parten ya sea correspondencia, transformación, dependencia o aplicación. Por

otro lado, las funciones pueden ser representadas de diversas formas y cada una de ellas favorece una noción, característica o elemento particular del concepto de función.

Pese a las posibilidades de los registros utilizados en la representación del objeto función lineal, se hará mayor énfasis en el registro algebraico, en donde se presenta la función mediante una expresión algebraica y el registro gráfico cartesiano. Las razones de la elección de estos registros está relacionado con que se ha mostrado que la dificultad de los estudiantes se presenta en la conversión entre los dos registros mencionados. Duval (1992, p. 125). Particularmente a los estudiantes se les facilita trazar una curva a partir de una expresión algebraica, pero todo cambia en el sentido contrario, es decir las dificultades llegan cuando se solicita encontrar una expresión general a partir de una representación geométrica. (Duval, 2004).

Así pues, la forma en que se relacionen los elementos de la función, la notación algebraica, con el comportamiento del gráfico, se pueden establecer algunos criterios que permitan analizar algunas propiedades y características sobre las cuales es necesario tratar. Así, habiendo determinado lo que se concibe en matemáticas como función y cada uno de sus representaciones, se procederá a definir algunas propiedades que cumplen las funciones lineales.



## Capítulo 3.

# Metodología De La Investigación

### Capítulo 3. Metodología de la investigación

En este capítulo se presentan los elementos metodológicos que se tuvo en cuenta para el desarrollo de ésta investigación. Para empezar, se presenta el tipo de metodología utilizada en la cual se destacan cada una de las etapas que ésta conlleva. De esta manera, se presenta la caracterización de la población, justificación del conjunto de situaciones problemas, el proceso de recolección de la información y finalmente se describe el proceso de constitución y análisis de los datos.

Este trabajo, que pretende analizar las transformaciones (tratamiento y conversión) hechas por los estudiantes de la Institución Educativa Carpinello y San Vicente, al abordar problemas sobre la función lineal, es de carácter descriptivo. Por ésta razón, tiene un enfoque investigativo soportado en la investigación cualitativa. Para ello, se retoman algunos apartados de Asprilla (2018).

De acuerdo con la investigación cualitativa Vera (2008) citado en (Fraenkel & Wallen, 1996) describe que en este proceso investigativo se presentan algunas particularidades que deben ser consideradas: Formulación del problema a investigar, Identificación de los participantes, la colección de los datos, el análisis de los datos y Conclusiones.

Por lo anterior, el enfoque investigativo elegido implica un énfasis en los procesos y significados los cuales son medidos en términos cualitativos, es decir, el tipo de registros a los que se acude para abordar y resolver los problemas, la forma como presentan las respuestas, los elementos que traen a colación para trabajar con la función lineal, los procesos que utilizan para determinar la pendiente, las unidades significantes que exponen los estudiantes en las produccio-

nes, entre otros. Adicionalmente, este enfoque permite al investigador adoptar un particular punto de vista relacionado con las variables involucradas para estudiar el fenómeno.

### 3.1 Contextualización

El trabajo se desarrolló en los colegios *Nuestra Señora Consoladora del Carpinello* y la Institución educativa *San Vicente* los cuales están ubicados en el distrito especial de Buenaventura (Valle del Cauca-Colombia) el colegio *Nuestra Señora Consoladora del Carpinello* cuenta aproximadamente con unos 250 estudiantes en total y la Institución educativa San Vicente que cuenta con aproximadamente 120 estudiantes en el grado noveno.

Ahora bien, con el fin de investigar las transformaciones que realizan los estudiantes al trabajar con la función lineal y en particular la pendiente como una propiedad fundamental del objeto, el estudio se desarrolló con un grupo de estudiantes con edades entre 13 y 15 años que cursan grado noveno de dichas instituciones. Para efectos de la investigación, la aplicación y análisis de la situación problema se hizo con la población del grado noveno de los colegios antes mencionados de los cuales se seleccionó un grupo conformado por 12 estudiantes en cada Institución.

Específicamente en esta investigación se interesó por el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en el nivel educativo básico, en grado noveno.

La escogencia de este grado está relacionada con que el MEN (1998, 2006) presenta el objeto matemático función lineal en el conjunto de grados 8° y 9° en los cuales se abordan procesos generales como: el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de situaciones de variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos

o algebraicos propios del pensamiento variacional. Lo que resulta importante para que los estudiantes puedan darle solución a cada problema puesto que es indispensable haber tenido un acercamiento con situaciones relacionadas con la variación.

Por ende, estar en grado noveno como es el caso de los estudiantes, abre la posibilidad de que haya habido dicho manejo del cambio y la variación con objetos matemáticos como las ecuaciones o las funciones.

### 3.2 Elección y justificación de instrumentos

Para el caso específico de este trabajo, se eligió de algunos trabajos relacionados con el objeto matemático función lineal y la teoría de los registros de representación semiótica, algunos problemas que fueron ajustados a las necesidades y objetivos de la investigación. Dichos problemas parten de elementos “cotidianos” como utilizar minutos en un teléfono celular, descarga de un aparato electrónico y el estudiante las debe modelar utilizando los registros y tratamientos propios de las matemáticas para lograr encontrar valores particulares a partir de los registros involucrados en cada situación.

En relación a los fundamentos de las actividades, se tuvo en cuenta aspectos semióticos y cognitivos en cual se privilegian los distintos registros en que las funciones lineales pueden ser representadas. Se hizo énfasis en los registros gráficos y algebraicos por las potencialidades de tratamiento que ellos ofrecen. En este sentido, cada problema está orientado para que el estudiante encuentre la expresión general que representa cada problema para luego realizar la operación conversión al registro solicitado. Con base en lo anterior, se estructura una situación que consta de 3 problemas.

### **Problema 1. Planes de voz**

Este problema es tomado de las tareas diseñadas en el trabajo de maestría en Educación titulado “Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula” realizada por Sánchez (2016) de la universidad distrital Francisco José de Caldas. Ver anexos.

El problema Planes de voz está propuesto para que el estudiante inicialmente compare tres compañías telefónicas a partir de un gráfico dado, la comparación debe dar cuenta de la relación que el estudiante establezca en cada compañía entre el número de minutos y el valor a pagar por ellos, como indica Sánchez (2016).

El problema presentado mediante el registro gráfico pretende posibilitar que los estudiantes reconozcan y establezcan una relación funcional entre las variables, y puedan expresarla a través del registro simbólico-algebraico. El objetivo de esta tarea es enfrentar a los estudiantes a una situación problema en la que deban comparar gráficos cartesianos visualmente semejantes, que representan funciones muy diferentes, y elegir convenientemente la mejor opción, la cual deberán respaldar con argumentos apoyados en la identificación de las variables involucradas y la relación de dependencia entre ellas, la cual deben generalizar a través de una fórmula o expresión algebraica, en el sentido planteado por Sánchez (2016).

### **Problema 2. Expresión general**

Este problema construido por el I CEMACYC<sup>1</sup> (2013) “Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas” forma parte de una investigación destinada a estudiar la incidencia de las representaciones visuales de los conceptos en el aprendizaje de matemáticas. En esta propuesta, se busca saber si el estudiante

---

<sup>1</sup> I congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe.

puede interpretar geoméricamente los parámetros que intervienen en las funciones lineales. Para ello, las funciones son presentadas de manera literal en su forma canónica agregándose las restricciones sobre el signo de los coeficientes que se deben utilizar y así, los educandos puedan tomar determinaciones al respecto.

En este sentido, evitar la asignación de valores particulares para los parámetros pendiente y punto de corte en el eje  $y$ , permite conocer si los alumnos son capaces de establecer una relación directa entre las variables que intervienen en los registros gráfico y algebraico evitándose la mediación del registro tabular.

### **Problema 3. Nivel de descarga del portátil**

El portátil es un problema tomado de las actividades propuestas en el trabajo de Roldán (2013) titulado “El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grado de educación básica”. Las preguntas allí planteadas fueron ajustadas teniendo en cuenta las posibilidades de tratamiento y conversión que pudieran permitir para los objetivos del trabajo.

Esta actividad es propuesta para que el estudiante pueda encontrar una expresión matemática que le permita describir la relación que hay entre el nivel de carga de un portátil y el tiempo que transcurre. La expresión matemática debe dar cuenta de la dependencia de una variable con respecto a la otra. Al final con los datos hallados el estudiante debe representar la situación, lo que significa que debe haber un paso del lenguaje natural a una expresión matemática (registro algebraico) o del lenguaje natural al registro gráfico.

Debe entenderse en el enunciado que el portátil se descarga un 1% al pasar 50 minutos cuando está cargado totalmente y es dejado en reposo. Lo que significa que la carga de la batería

depende del tiempo transcurrido, así por cada 50 minutos transcurridos se descargará 1% la batería.

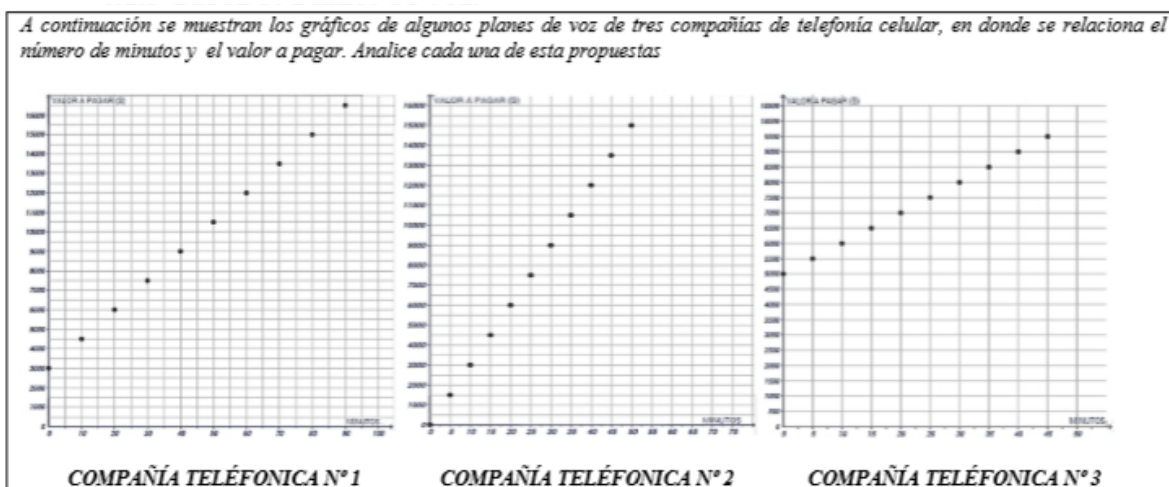
### Análisis a priori

Teniendo en cuenta los elementos presentados en el marco teórico con respecto a las representaciones semióticas y la metodología propuesta, se esperaría que los estudiantes interpreten los enunciados correspondientes a cada problema para luego realizar la conversión al registro indicado, con el propósito de utilizar los tratamientos propios de cada registro y puedan dar solución a las preguntas específicas.

Como se mencionó en la metodología, para las actividades se tuvo en cuenta aspectos semióticos asociados con los diferentes registros de representación y aspectos matemáticos que tienen que ver con contextos de variación asociados a la función lineal. Estos elementos conforman dos ejes principales, uno dirigido a las representaciones y el otro a la variación; Es así, como en cada pregunta se analizan de manera conjunta los aspectos matemáticos relacionados con la variación, la determinación de expresiones algebraicas generales, la determinación de la pendiente y las características referentes con el cambio de registro.

En este sentido, se presenta con respecto a los objetivos específicos la descripción de los elementos y unidades significantes que entran en juego cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de cada problema:

### Problema 1. Planes de voz



1. Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, ¿Qué plan tomaría?

COMPañÍA TELÉFONICA N° 1	
COMPañÍA TELÉFONICA N° 2	
COMPañÍA TELÉFONICA N° 3	

2. ¿Qué razones justificarían que el plan elegido corresponde a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro.
3. Encuentre una expresión algebraica que le permita determinar el valor a pagar para un número  $n$  de minutos del plan elegido.

**Figura 7.** Problema 1, planes de voz

El registro cartesiano muestra la relación existente entre dos variables. Esto es, el número de minutos a utilizar en un plan determinado con relación al valor a pagar por el respectivo plan.

Para este problema, el estudiante debe tener en cuenta que el valor que corresponde a la pendiente representa un parámetro fundamental para tomar la decisión respecto a que compañía



elegir. Pues, entre mayor es el valor de este coeficiente, el precio a pagar por el plan aumenta rápidamente más con respecto a los otros planes. En este sentido, el plano cartesiano muestra una forma de comparar y elegir correctamente el plan más favorable. Es decir, la inclinación de la recta que representa cada compañía permite comparar los valores de sus pendientes. En este caso, identificar la recta que se encuentra más inclinada y considerarla como una razón importante para su elección. En efecto, entre más inclinada se encuentre la recta, el precio aumenta paulatinamente y el cambio porcentual entre el valor a pagar por un tiempo  $t$  y su valor consecutivo  $(t+1)$  es menor.

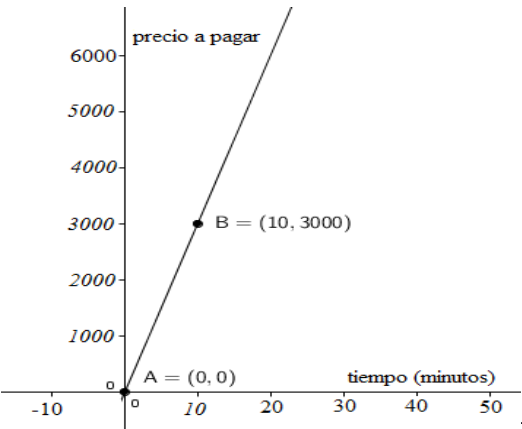
Por esto, se muestran las unidades significantes que entran en juego en el problema 1.

Variables	Unidades significantes en el registro algebraico
Valor a pagar	Los valores posibles que puede tomar la variable dependiente $y$ . $y = C(t)$  <b>Cargo fijo:</b> Dinero mínimo a pagar Compañía 1: <b>3000</b> Compañía 2: <b>0</b> Compañía 3: <b>5000</b>
Número de minutos	Valores ubicados en el eje $x$ $x = t$

**Tabla 4.** Variable y valores numéricos del dinero a pagar.

Las unidades significantes de la representación gráfica son: el sentido de la inclinación de la recta y el punto de corte con el eje vertical. Así pues, las rectas punteadas en cada compañía están dirigidas hacia arriba, es decir tienen una inclinación positiva, entre más aumentan los minutos utilizados, el valor a pagar por el plan es mayor, lo que corresponde a la unidad significativa  $m > 0$ . El valor de este coeficiente en las compañías 1, 2 y 3 es respectivamente.  $m_1 = 150$ ,  $m_2 = 300$  y  $m_3 = 100$  los cuales representan la razón del precio a pagar con respecto al tiempo.

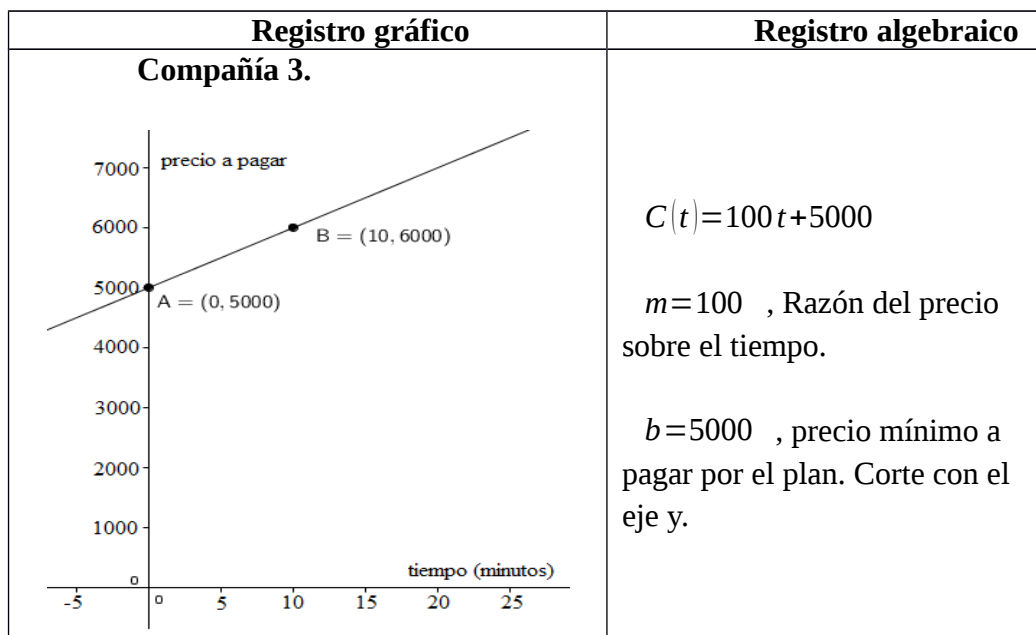
De igual forma en el registro algebraico le corresponde a cada compañía una expresión



de la forma  $y=mx+b$  . Donde  $b$  representa el valor mínimo que se debe pagar por un plan en particular. En la tabla se muestra la representación del problema anterior en los registros gráfico y algebraico.

registro gráfico	Registro algebraico
<p><b>Compañía 1.</b></p> <p>A line graph with 'tiempo (minutos)' on the x-axis (ranging from -10 to 60) and 'costo (precio a pagar)' on the y-axis (ranging from 0 to 9000). The line starts at point A = (0, 3000) and passes through point B = (20, 6000).</p>	$C(t)=150t+3000$ $m=150$ , Razón del precio con respecto al tiempo. $b=3000$ , precio mínimo a pagar por el servicio. Corte con el eje $y$ .
Registro gráfico	Registro algebraico
	$C(t)=300t$ $m=300$ , Razón del precio con respecto al tiempo. No hay precio mínimo a pagar.

**Figura 9.** Representación en el registro gráfico y algebraico de la compañía 2.



**Figura 10.** Representación en el registro gráfico y algebraico de la compañía 3.

### 3.3 Recolección

#### de la información

El proceso de recolección de la información estuvo basado fundamentalmente en las producciones escritas de los estudiantes. En concreto, la prueba escrita es el elemento fuerte para este trabajo, pues, contribuye a la construcción del análisis teniendo en cuenta los elementos que han sido presentados en el marco teórico. Adicionalmente, la información recogida por medio de ésta es útil para analizar lo que los estudiantes hacen y lo que consideran que es permitido matemática y semióticamente en cada problema.

### 3.4 Organización y sistematización de los datos

Esta fase se llevó a cabo teniendo en cuenta algunas categorías de análisis consideradas en la tesis de maestría de Gutiérrez & Parada (2007) quienes tenían como objetivo describir e interpretar los tratamientos y conversiones que hacen algunos estudiantes de cálculo diferencial en

situaciones de variación. Pues no se puede olvidar que las actividades cognitivas asociadas a todo registro semiótico representan elementos necesarios para acercarse a la comprensión. De este modo, se tuvo en cuenta los siguientes elementos para agrupar las respuestas y presentar el análisis a posteriori.

### 3.4.1 Unidad de análisis

Las unidades de análisis que intervienen en el estudio están relacionadas con las representaciones y transformaciones (operaciones cognitivas) que movilizan los estudiantes y las unidades cognitivamente pertinentes que ellos utilizan; es así como nos interesa indagar por:

- Las conversiones que realizan entre el registro gráfico y algebraico.
- Los tratamientos que efectúan una vez han realizada conversión a un registro diferente al inicial.
- Las unidades significantes que consideran pertinente para abordar los problemas.

De acuerdo con lo anterior, para obtener el análisis de la información que ofrecen las producciones de los estudiantes se construye una rejilla de análisis que incluye una visión cualitativa de cada una de las preguntas de la situación problema. A continuación se presenta la estructura de la rejilla

<b>Ítem (n).</b> Proporciona información sobre el enunciado principal o el registro de formación de cada pregunta y la pregunta a analizar.			
<b>Unidades significantes</b>	<b>Tipo de respuesta Operaciones cognitivas</b>	<b>Número de estudiantes</b>	<b>Porcentaje</b>
Unidad explícita en las producciones. Elementos que podrían llegar a constituirse cognitivamente pertinentes para dar solución a cada ítem.	Elementos que traen a colación. Descripción y presentación de un caso o casos múltiples.	Cantidad de estudiantes que utilizaron una unidad particular.	Proporción de estudiantes vinculado con cada unidad.

Tabla 3. Modelo de rejilla de análisis.

Los elementos objeto de estudio para el análisis de la información están presentados en la tabla 3. En la primera columna las *unidades significantes* que fueron consideradas por los estudiantes al responder cada ítem; en la segunda, se permiten dos componentes principales, uno dirigido *al tipo de respuesta*, es decir una característica particular encontrada en las producciones y el otro dirigido a las *operaciones cognitivas* asociadas a las representaciones. En la tercera y cuarta columna, se explicita el número de estudiantes vinculado con cada unidad signifiicante y su respectivo porcentaje. El porcentaje se hace explícito para determinar la proporción de estudiantes que logra o no establecer una transformación en los registros involucrados de los problemas planteados.

La tabla 3 lleva implícitos los elementos relacionados con las transformaciones que los estudiantes tienen en cuenta para responder a cada ítem. Específicamente la información indaga por los siguientes elementos.

En cuanto a los contextos de variación se consideran:

- Precio a pagar por minutos utilizados, forma canónica, nivel de carga de la batería.

En cuanto a las nociones asociadas a la variación, están involucradas:

- Razón de cambio entre magnitudes: (unidades, precio, tiempo, carga, descarga)

En cuanto a las representaciones y las operaciones cognitivas, los problemas:

- Están dados en registro verbal, gráfico o algebraico.

- Se modelan mediante funciones lineales o afines (discretas o continuas), dadas por una o más condiciones.
- Remiten a un algoritmo o procedimiento determinado, obligan a realizar conversiones y tratamientos en un registro específico.

Para efectos de la realización de este trabajo se hizo una descripción general de cada una de las producciones de los estudiantes.

### 3.4.2 Descripción de las preguntas

**Pregunta 1.** Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, ¿Qué plan tomaría?

**Justificación:** Esta pregunta fue planteada para explorar las diversas formas en que los estudiantes establecen comparaciones cualitativas entre gráficas teniendo en cuenta la inclinación de la recta como elemento relevante para tomar una decisión. La inclinación de cada recta, proporciona información sobre qué tanto varía el precio con relación al número de minutos utilizados. Por ejemplo, para la compañía 1, 2 y 3, si el número de minutos aumenta de 0-10, el cambio en el precio es respectivamente 1500, 3000 y 1000. Es decir, para la compañía N° 3 la constante de variación es menor, lo que indica que puede ser una posible opción. Es aquí donde se espera que el estudiante relacione el concepto de razón para interpretar que entre menor sea el valor que corresponde a este parámetro la recta subirá menos con respecto a un parámetro mayor.

**Pregunta 2.** ¿Qué razones justificarían que el plan elegido corresponde a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro

**Justificación:** El objetivo de esta pregunta es saber si el estudiante es consciente de la relación entre la pendiente y el aumento en el precio a pagar. Así mismo, la pregunta permite co-

nocer los elementos que los estudiantes traen a colación para la interpretación global de una representación gráfica.

**Pregunta 3.** Encuentre una expresión algebraica que le permita determinar el valor a pagar para un número  $n$  de minutos del plan elegido.

**Justificación:** Con esta pregunta se pretende averiguar si los estudiantes pueden establecer una relación entre la información que ofrece un gráfico y su respectiva expresión algebraica. Es decir, si pueden identificar las unidades significantes de la representación inicial para vincularla en otro registro de representación. Aunque la determinación de dicha expresión algebraica corresponde a un fenómeno de no congruencia en el sentido que no se cumple el criterio de univocidad semántica. Así mismo, no hay correspondencia en el número de unidades significantes y por último, no hay un orden para percibir las unidades significantes en la gráfica para vincularlas con las unidades significantes en la representación algebraica.

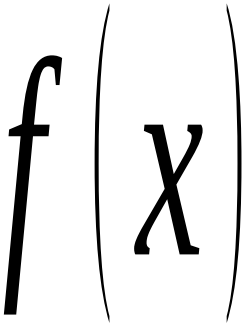
Con respecto al valor de la pendiente corresponde a un parámetro visual que relaciona puntos, eje horizontal y eje vertical. Lo que obedece un fenómeno de no congruencia debido a que no hay una relación entre la identificación y elección de un par de puntos en el registro gráfico y el valor que representa la razón de aumento a pagar en el registro algebraico.

### **Problema 2:** Expresión general

**Objetivo:** Identificar los problemas que surgen al convertir la ecuación canónica de la función lineal al registro gráfico.

**Realizar una gráfica que represente una función de ecuación  $y = mx + b$ , en la que  $m > 0$  y  $b < 0$ , sin dar valores numéricos a  $m$  y  $b$**

Es evidente que todo cambio en la representación algebraica produce un cambio en el registro gráfico. Así mismo, toda dificultad presente en este registro, presenta gráfico, se verá reflejado en el algebraico. Por ello, se muestran las unidades significantes que entran en juego en la situación, de tal forma que el estudiante las pueda considerar y colocar en juego para el desarrollo de cada situación.

Representación		
Registro algebraico	Unidad significativa	Registro gráfico
$y = mx + b$	$m > 0$	
	$b < 0$	

**Tabla 5.** Conversión del problema 2 a la representación gráfico.

En la tabla anterior, es claro que solo se representa un caso particular, pues son muchas las posibilidades que permiten las correspondientes restricciones. Sin embargo, el problema representa un fenómeno de no congruencia. Aunque ambas representaciones muestran aspectos generales del objeto, no hay una relación que asocie directamente los parámetros del registro gráfico, con la inclinación y la utilización de la parte inferior del eje vertical.

**Justificación:** Con esta pregunta se pretende averiguar si los estudiantes pueden interpretar gráficamente los parámetros que intervienen en las funciones lineales. De esta manera, la situación puede permitir identificar las características visuales que corresponden a las caracterís-



ticas de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales Duval (2006, p. 150)

### Problema 3. Nivel de descarga del portátil

Debido a la capacidad de almacenamiento que tiene el portátil marca HP, la experiencia de los usuarios indica que; la carga de la batería consume 1% cada 50 minutos cuando la carga alcanza el 100% y se deja en reposo. Suponiendo que las variables se relacionan linealmente.

- Represente en el registro algebraico el problema anterior a medida que pasa el tiempo.
- ¿Cuánto tarda la batería en descargarse un 80%?
- ¿Cuánto tiempo tarda en pasar de 100% a 80%? Justifique
- ¿En cuánto tiempo se habrá descargado por completo el portátil?
- Represente gráficamente el problema teniendo en cuenta la expresión encontrada en el literal a.

Este problema de variación relaciona dos variables a considerar; por un lado, la carga de la batería y por otro, el tiempo en que se descarga el portátil. Las unidades que corresponden a las variables mencionadas se muestran a continuación.

Variables	Unidades significantes
Tiempo	Cada <b>50 minutos</b> disminuye la carga de la batería
Descarga de la batería	Se descarga a <b>razón de 1%</b> cuando el portátil se deja en reposo
Porcentaje inicial	<b>100%</b> carga <b>0%</b> descarga

**Tabla 7.** Variables y unidades significantes dados en lengua natural.

Las unidades significantes en el problema anterior corresponden en el registro algebraico al coeficiente  $m$ , es decir, valor de la pendiente y el término independiente  $b$ . En el problema el valor que representa la razón a la que se descarga el portátil cuando se deja en reposo puede analizarse de dos formas distintas. Por un lado, puede analizarse la relación entre la

descarga del portátil con respecto al tiempo, y por otro, la relación entre el nivel de carga por el tiempo transcurrido. Es decir, que la unidad significativa  $m$  tiene dos posibilidades de representación e interpretación y por tanto puede corresponder con dos valores en el registro algebraico,  $m > 0$  y  $m < 0$ . En este sentido, en el registro gráfico le puede corresponder un segmento dirigido tanto hacia arriba como hacia abajo. La recta tendrá una inclinación positiva o negativa.

Con respecto a la posición del segmento de recta, se trata de una magnitud continua la cual tiene igualmente dos posibilidades. La primera relación (carga sobre tiempo), parte de 100% de carga, es decir, le corresponde una unidad significativa  $(0, 1)$  que representa el corte con el eje vertical, donde la coordenada  $x=0$  representa el tiempo inicial en minutos desde que se ha dejado el portátil en reposo, la coordenada  $y=1$  representa el 100% de la carga del portátil. Para este caso, la recta baja a medida que el tiempo aumenta. La segunda relación (descarga sobre tiempo) parte del 100% de descarga, en este caso le corresponde una unidad significativa  $(0, 0)$  que representa el punto de corte en  $y$  lo cual indica que en el tiempo inicial, el portátil no lleva ningún porcentaje de descarga.

Es importante anotar con respecto a la variable independiente  $x$  que el problema solo tiene sentido para valores positivas que representan la variación del tiempo. Así, la siguiente tabla muestra el problema en los registros algebraico y gráfico.

Representación	
Registro algebraico	Registro grafico
<p><b>Relación entre el tiempo y el porcentaje de descarga:</b></p> <p>En 50min se descarga 1%</p> <p>En 100min se descarga 2%</p> <p><math>m=0.0002</math></p> <p><math>y=0.0002 t</math></p>	
<p><b>Relación entre el tiempo y el porcentaje de carga:</b></p> <p>99% de carga en 50min</p> <p>0% de carga en 5000min</p> <p><math>m=-0.0002</math></p> <p><math>y=-0.0002 t+1</math></p>	

**Tabla 8.** Posibilidades de la representación gráfica del problema 3.

La tabla anterior muestra las dos posibilidades en que puede ser interpretado el problema. Aunque en las situaciones anteriores se abordan procesos similares, el grado de complejidad

aquí es mayor puesto que el problema puede entenderse y plantearse de dos formas. La primera relación puede hacerse entre el tiempo y el porcentaje de descarga del portátil es decir, cuando se ha descargado 3%, implica que el porcentaje de carga del aparato es de 97%. En otras palabras, es posible responder tanto a la descarga del portátil como a la carga del mismo. La segunda relación puede establecerse solamente entre el tiempo transcurrido y el porcentaje de carga. Es decir, entre más tiempo transcurra el porcentaje de carga será menor.

Puede notarse que existe una diferencia entre las dos relaciones, la primera es directamente proporcional es decir, a medida que el tiempo aumente, la descarga también lo hace. Mientras que la segunda relación es inversamente proporcional, mientras el tiempo aumenta la carga disminuye. Así pues, la interpretación acertada de estas relaciones es indispensable para el desarrollo del problema y poder responder los casos particulares que son solicitados por cada ítem.

**Pregunta a.** Represente en el registro algebraico el problema anterior a medida que pasa el tiempo.

**Justificación:** El propósito de esta pregunta es indagar sobre la conversión que realizan los estudiantes desde el registro verbal, al registro algebraico. Para esta situación, la conversión puede hacerse de dos formas. La primera donde se consideran las variables porcentaje de descarga por tiempo transcurrido, lo cual implica en la representación gráfica una recta que se dirige hacia arriba, es decir con  $m > 0$ . La segunda con respecto al nivel de carga sobre el tiempo transcurrido lo que implica un segmento de recta dirigido hacia abajo, con  $m < 0$ . La conversión del registro verbal al gráfico no es congruente. Pues la unidad significativa  $m$  en el registro verbal no corresponde con el valor de la representación algebraico. Aunque la unidad signifi-

cante punto de corte en el eje vertical se pueda identificar y ubicar directamente en el registro algebraico para ambas posibilidades.

**Pregunta b:** ¿Cuánto tiempo tarda la batería en llegar al 80% de descarga?

**Justificación:** El objetivo de esta pregunta es examinar cómo los estudiantes establecen relaciones entre magnitudes y utilizan el tratamiento propio del registro algebraico para responder a la pregunta. Así mismo, la pregunta permite ver la forma en que los estudiantes interpretan y utilizan el parámetro de la pendiente. De este modo, la respuesta se puede obtener utilizando la expresión algebraica encontrada en el literal a. Es decir, sustituyendo en la variable independiente y el valor correspondiente para encontrar el tiempo. Este valor se puede hallar de dos formas, en primer lugar en la relación entre el tiempo y el porcentaje de descarga, se debe sustituir en la ecuación  $y = 0.8$  con la cual se hallaría el tiempo en que la descarga ha llegado a 80%. En segundo lugar, el mismo valor puede ser encontrado a partir de la relación entre el tiempo y el porcentaje de carga, es decir, sustituir en la variable dependiente  $y = 0.2$  lo cual implica hallar el tiempo en el que la carga del portátil está en 20%.

**Pregunta c.** ¿Cuánto tiempo tarda en pasar de 100% a 80% de descarga?

**Justificación:** Esta pregunta se hace con el fin de explorar el manejo y la interpretación que tienen los estudiantes en el trabajo de la covariación entre magnitudes en un intervalo definido. Es así como se indaga por los valores de la variable dependiente conocidos los de la variable independiente. Esta pregunta está formulada para determinar el tiempo en el que ocurre la variación en el intervalo. Sin embargo, es necesario establecer una relación no funcional entre el porcentaje de descarga y el nivel de carga de la batería, pues esta relación es indispensable para dar respuesta a la pregunta. En general, esta pregunta puede ser analizada como la pregunta del lite-

ral **b**. Sin embargo, exige un nivel de complejidad más alto ya que requiere la interpretación del 100% de descarga para ubicarlo en una de las relaciones algebraicas encontradas en el literal **a**.

**Pregunta d.** ¿En cuánto tiempo se habrá descargado por completo el portátil?

**Justificación:** El objetivo de esta pregunta es averiguar por el manejo de la invarianza de la situación, dada por el instante en el que el portátil queda sin batería. En este caso, se podría analizar la pregunta desde el porcentaje de descarga como también el nivel de carga. La interpretación de la pregunta es esencial para su desarrollo. Pues, el tiempo en que se descarga por completo el portátil, implica que el porcentaje de descarga es de 100%. Esta pregunta puede ser resuelta a partir de una regla de tres simple que asocie las dos magnitudes de la situación. Es decir, la determinación de la respuesta implica la realización de tratamientos en un registro diferente al inicial.

**Pregunta e.** Represente gráficamente el problema teniendo en cuenta la expresión encontrada en el literal **a**.

**Justificación:** Esta pregunta se hizo con el objetivo averiguar si el estudiante puede construir la representación gráfica relacionando las variables que intervienen en la situación. Así mismo, la pregunta permite ver el tipo de registro al cual los estudiantes acuden para realizar la conversión. Es decir, si utilizan la mediación del registro tabular con ayuda del tratamiento en el registro algebraico para llegar a la representación gráfica. Debido al uso de los parámetros en la representación algebraica y tabular, hay congruencia para convertir el registro gráfico.

En general, es importante destacar que cada pregunta mostró en sí misma un conjunto de elementos que servían para identificar, lo cual conlleva a precisar que eran ricas marcas significantes, que permitirían dar respuesta a lo que se pedía.

## Capítulo 4

### Resultados y Análisis

## Capítulo 4: Resultados y Análisis

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este trabajo es identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes de las Instituciones Educativas Carpinello y San Vicente, en la comprensión de la función lineal, particularmente al trabajar con el concepto de pendiente en la conversión entre los registros gráfico y algebraico en grado noveno. Se presenta a continuación el análisis que da cuenta de algunas transformaciones que surgieron a partir de la interpretación de la pendiente en los diferentes registros de representación involucrados, hasta las unidades significantes que los estudiantes tuvieron en cuenta al tratar de resolver los problemas. Inicialmente se presentarán los análisis y resultados de la Institución Educativa Carpinello, tomando como insumo la rejilla propuesta en la metodología (ver página 74), seguido de ello, se muestra la comparación de esos resultados obtenidos con los de la Institución Educativa San Vicente, pues el interés central de esta indagación es identificar las dificultades que presentan los estudiantes de ambas instituciones, por ello, no se consideró necesario mostrar en detalle los resultados de la Institución Educativa San Vicente, sino más bien, que en el proceso de comparación se muestra lo más significativo de ella.

### **4.1 Análisis del problema 1.**

El problema 1 consistía en comparar en el registro gráfico los planes de voz que ofrecen tres compañías para elegir el más favorable tomando a los estudiantes como clientes. En la siguiente tabla se presentan las respuestas de los estudiantes en el cual se muestran los elementos importantes considerados por ellos para decidir sobre el plan de minutos más conveniente. En la primera columna aparecen las unidades significantes que los estudiantes realizan cuando intentan justificar el plan elegido; en la segunda se presentan algunos ejemplos de las respuestas dadas



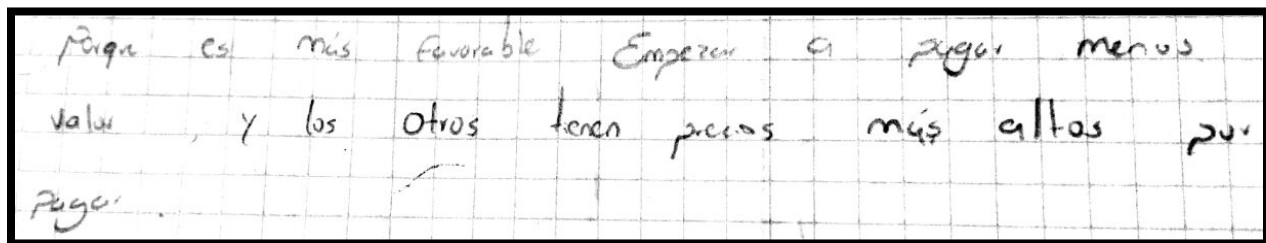
por los estudiantes en las cuales se resaltan los elementos importantes considerados en la argumentación; en la tercera se muestra el número de estudiantes vinculado con cada unidad significativa.

<b>Pregunta a y b.</b> Si tuvieras que tomar la decisión como cliente y determinar cual es el plan más favorable, ¿Qué razones justificarían que el plan elegido, corresponde a la decisión más acertada?			
<b>Elementos importantes (Unidades significantes)</b>	<b>Tipo de respuesta</b>	<b>N° de est.</b>	<b>Porcentaje</b>
Estudiantes que consideran el <i>valor inicial</i> para tomar la decisión. Es decir, lo qué ocurre cuando no se consume minutos.	La compañía número 2 porque ofrece más minutos por menos dinero, <i>además cuando no se consume minutos, no se paga.</i> La compañía número 2 porque <i>por tan solo 0 minutos</i> en la compañía 1 tengo que pagar \$3000, en la compañía 3 por tan solo 0 minutos tendría que pagar un valor de 6000. En cambio en la compañía 2 cuando <i>se usa 0 minutos se paga 0</i> . Es decir, el punto de corte es la unidad significativa fuerte para estos estudiantes.	4	33.3%
Estudiantes que relacionan la inclinación de la recta ( <i>la pendiente</i> ) para tomar la decisión.	Escogí este ya que entre más inclinada este la recta, más favorable es. Porque en el plan número 3 la subida de cada 5 minutos es de mil y menor que los 5 minutos para las otras facturas. La razón e inclinación, unidad significativa para los estudiantes.	2	16.6%
Estudiantes que toman la decisión a partir de <i>casos particulares</i> . Es decir, recurren a un número de minutos y el precio a pagar por ellos para decidir.	La compañía 2 porque no hay que pagar gran cantidad de dinero al inicio de cada plan. Un punto $P(x, y)$ que relaciona los minutos y el precio es la unidad significativa fuerte.	6	50%

**Tabla 9.** Unidades significantes de los estudiantes del problema 1.a, 1.b

Se evidencia que en el problema 1 ítem a y b, los estudiantes fueron capaces de relacionar el número de minutos y el valor a pagar por ellos, pues las respuestas dadas hacen referencia al cambio en el precio con respecto al tiempo posible a utilizar. Aunque la unidad significativa de la representación gráfica correspondía a la inclinación de la recta. Es decir, la que visualmente estaba más *acostada*, la mayoría de los estudiantes eligió el plan número 2, el cual correspondía a la opción más costosa. Las justificaciones para la elección son del tipo: “*porque es más favorable empezar a pagar menos valor*”, “*cuando no se consume minutos, no se paga*”, “*porque sale mejor pagar \$1500 por 5 minutos que pagar \$5500 por los mismos 5 minutos*” o bien “*porque las otras compañías son más caras desde que comienza hasta que*

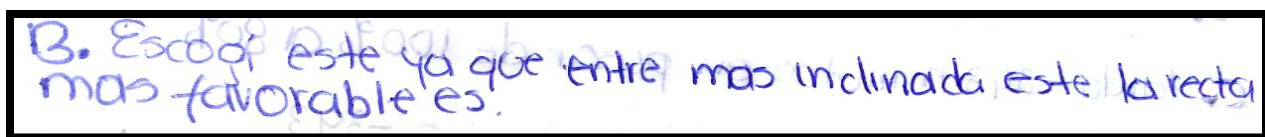
**termina**". Es decir, ninguno de los estudiantes asoció la unidad significativa *inclinación* de la recta con la posibilidad de pagar menos dinero. Prueba de ellos, se muestra la justificación de un estudiante.



Justificación propuesta por un estudiante que decide a partir del punto de corte en el eje y.

De este modo, puede notarse que las unidades significantes consideradas por aquellos que eligieron la compañía 2, fueron: ***“si no se consume, no se paga”***, ***“empezar a pagar menos”***, ***son más caras desde que “comienza”***; unidades que no corresponden con las que son cognitivamente pertinentes para tomar una decisión. En este sentido, hubo poca interpretación de la implicación y relación entre los parámetros  $m$  y  $b$  de la gráfica que garantizan elegir el plan más conveniente.

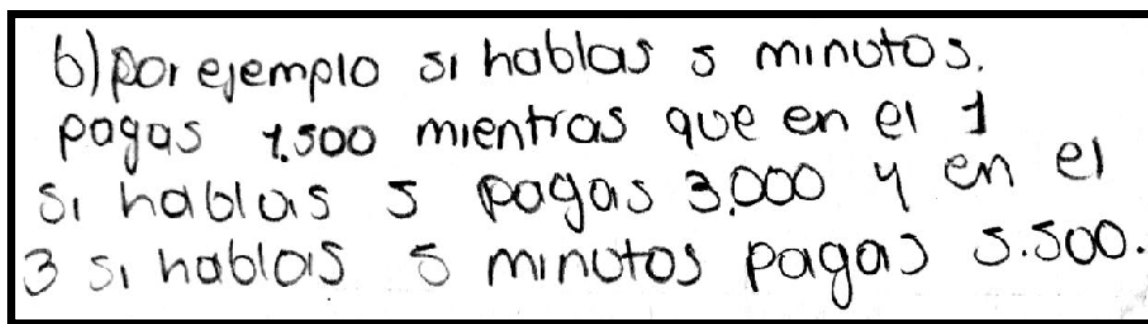
Por otro lado, aquellos que eligieron la compañía 3, utilizaron justificaciones del tipo: ***“es la que más bajo precio tiene”***, ***“en los otros planes el gasto es mayor”*** Es decir, no hubo consideración de la unidad significativa y cognitivamente pertinente *inclinación* para elegir el plan. No obstante, la única estudiante que consideró la inclinación de la recta para tomar la decisión, eligió la compañía número 2. Lo que indica el desconocimiento de la implicación del parámetro  $m$  en la representación gráfica.



B. Escoger este ya que entre mas inclinada este la recta mas favorable es.

Justificación propuesta por un estudiante que utiliza el concepto de pendiente para decidir por el plan.

Análogamente en la tabla 8, se puede apreciar que el 83.3% de los estudiantes no logró identificar las unidades significantes en el registro gráfico cartesiano. El 50% tomó la decisión a partir de la visualización e identificación de casos particulares. Es decir, recurren a un punto, un número  $x$  **de minutos** y su **precio**  $y$  correspondiente para la elegir la compañía sin considerar una relación para cualquier cantidad de minutos. Un ejemplo de ello es lo expresado por un estudiante, “elegí el plan número 2 **ya que en 10 minutos pagaríamos 1500, mientras en la compañía 1 y 3 pagaríamos por 10 minutos \$4500 y \$6000** respectivamente”. Esta justificación indica la falta de interpretación correcta hacia todas las unidades significantes en el registro de formación. Es decir, a los estudiantes se les dificulta relacionar lo particular y lo general que ofrece el registro gráfico. Prueba de ello, se muestra la justificación de otro estudiante.

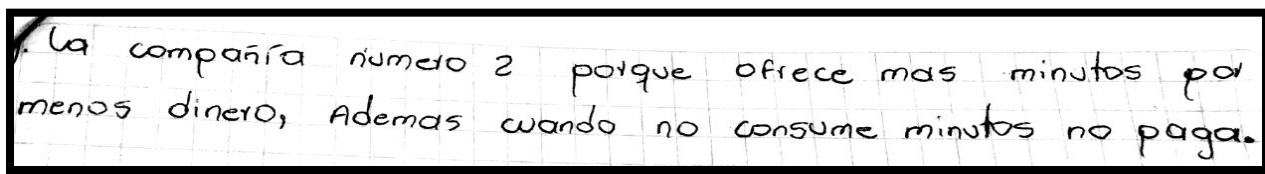


b) por ejemplo si hablas 5 minutos, pagas 1.500 mientras que en el 1 si hablas 5 pagas 3.000 y en el 3 si hablas 5 minutos pagas 3.500.

Justificación de estudiante que responde a partir de un caso particular

El otro 33.3% de los estudiantes que no pudo responder correctamente a la pregunta, basó su elección a partir del valor inicial que se debía pagar en cada compañía. Es decir, utilizaron la unidad significativa **corte en “y”** quizás sin tener en cuenta que ocurrirá para **más minutos**. En efecto, el parámetro  $b$  en el registro gráfico no corresponde a la unidad significativa

clave y suficiente para tomar la decisión más conveniente. Pues era necesario establecer una relación entre el cargo fijo a pagar y lo que se debía pagar por cada minuto utilizado. En este sentido, se puede ver que a los estudiantes les costó identificar, relacionar e interpretar la pendiente  $m$  en el registro gráfico como característica valiosa para analizar el comportamiento del precio en relación al tiempo en minutos utilizados.

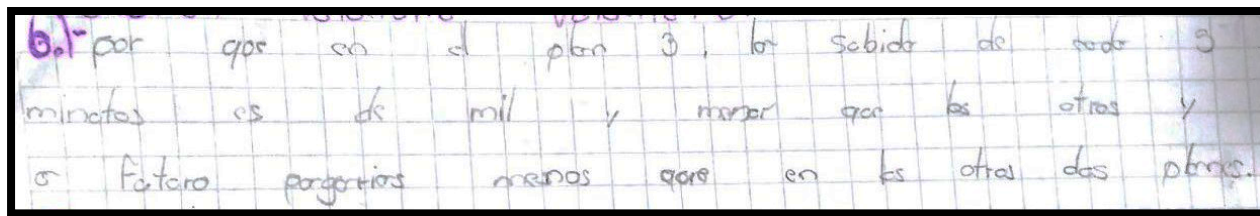


Justificación de estudiante que responde a partir del valor inicial

Puede notarse que las dificultades para elegir el plan más favorable están relacionadas con la identificación de las unidades significantes en el registro gráfico. Como también, al desconocimiento de la implicación de las mismas. En efecto, la mayoría de los estudiantes eligió la compañía 2 como la mejor opción.

Dicha elección se debió sobre todo a la consideración de ***b punto de corte***, es decir, el precio cuando  $t=0$  como única razón para tomar la decisión sin tener en cuenta qué ocurría más adelante. Solo un estudiante tuvo en cuenta la unidad significativa que resulta pertinente para elegir el plan más conveniente.

Aunque no puede asegurarse que efectivamente haya hecho referencia a este elemento. Este estudiante además de elegir la compañía correcta, presenta una forma de establecer una relación covariacional así ***“la subida de 5 minutos es de mil y menor que la subida de 5 min...”*** lo cual representa una aproximación directa al concepto de pendiente. Es decir, elementos que podrían llegar a constituirse como unidades visuales y numéricas cognitivamente pertinentes en el registro cartesiano.



Justificación propuesta por un estudiante que acude a la pendiente para decidir por el plan.

En general, el registro de formación pudo ser una de las causas de las dificultades para elegir la opción más favorable, pues las gráficas del problema presentan los parámetros y las variables como un todo lo que contribuyó a que la mayoría de los estudiantes hicieran un análisis desde lo particular, es decir, punto por punto sobre la relación entre el precio y el tiempo.

Para el ítem 1c, se solicitaba a los estudiantes encontrar una expresión algebraica que representará la situación. Es decir, una ecuación que dé cuenta del precio a pagar con relación al número de minutos utilizados para el plan elegido. Se presenta a continuación en la tabla 10 el número de estudiantes que alcanzó a determinar el valor de la pendiente a partir del registro gráfico. Y en la tabla 11, las conversiones realizadas por los estudiantes que representan o no las variables involucradas.

Unidades significantes	Tipo de respuesta	N° estudiantes	Porcentaje
Identifica dos puntos correctos en el registro gráfico y determina el parámetro $m$ entre el tiempo- precio	Relaciona el tiempo como variable independiente. Elige la compañía 2. $P_1(5,1500)$ $P_2(20, 6000)$ $m = 300$	3	25%
Identifica dos puntos correctos en la gráfica pero no determina el valor correcto de la pendiente.	Relaciona el tiempo como variable independiente. Elige la compañía 2. $P_1(50,15000)$ $P_2(30, 9000)$ $m = 12000$	2	16.6%
No identifica los puntos correctos en la gráfica y el parámetro $m$ no corresponde con el registro inicial.	Compañía 2. $P_1(5,1500)$ $P_2(10, 2000)$	7	58.3%

**Tabla 10.** Resultados de estudiantes que intentan determinar la pendiente.

Pregunta c. Encuentre una expresión algebraica que le permita determinar el valor a pagar para un número $n$ de minutos del plan elegido.			
Unidades significantes	Operación cognitiva	N° de est.	Porcentaje
Estudiantes que encuentran una expresión algebraica correcta.	$y = 6$ minutos (tiempo) + valor "ecuación escrita por un estudiante" Efectúan el cambio de registro, pero las variables y	3	25%

	unidades significantes no corresponden con el registro inicial.		
Estudiantes que logran determinan una expresión algebraica pero no corresponde con la representación gráfica.	Las transformaciones no muestran la misma información del registro de formación, es decir, les cuesta coordinar ambos registros.	9	75%

**Tabla 11.** Respuesta de estudiantes que intentan ir de la gráfica a una ecuación algebraica.

En la tabla 11 se puede apreciar que el 75% de los estudiantes tuvo dificultad para encontrar una expresión general que representará de manera correcta el plan elegido en el ítem 1.a. Esta pregunta requería en los estudiantes determinar los parámetros  $m$  y  $b$  para realizar la conversión al registro algebraico. Pese a que el 41.6% de los estudiantes logró discriminar las unidades significantes en la representación gráfica pertinentes para determinar el valor de la pendiente  $m$ . No fue suficiente para hacer la conversión satisfactoriamente, pues corresponde a un fenómeno de no congruencia entre los parámetros “*unidades visuales*” en la gráfica vistos como un todo y los mismos parámetros vistos en el registro algebraico de manera explícita, es decir, se pierde la univocidad semántica terminal por el hecho que los parámetros y unidades visuales en ambos registros parecen significar características distintas y el orden en que se presentan las unidades se pierde, en el sentido en que la gráfica muestra una serie de elementos, rectas perpendiculares, rectas que suben, números que representan minutos, números que indican precios, entre otros, los cuales no remiten a una ecuación lineal que explicita dos parámetros.

La no congruencia se dio, porque no se cumplió el criterio de correspondencia semántica, es decir, con respecto a las dificultades que tuvieron los estudiantes al identificar,

$$Y = 15.000 = 3.000 (N - 15)$$

$$Y = 3.000 N - 45.000 + 15.000$$

$$Y = 3.000 N + 3.000$$

Conversión de estudiante que elige la compañía 2 que pasa por el origen y encuentra una expresión con un cargo fijo

interpretar y relacionar las unidades significantes en el registro gráfico analizado en el ítem 1.b, se nota que para los estudiantes hay poca relación entre la inclinación de la recta (cambio en el precio con respecto al cambio en minutos) y el parámetro  $m$  (proporción entre el precio sobre el número de minutos) en la representación algebraica. A lo que resultan respuestas relacionadas con expresiones sin pendiente o la elección de representaciones gráficas que pasan por el origen y que en la expresión algebraica aparecen con una constante  $b$ , etc.

En este sentido, se esperaba que al menos, aquellos estudiantes que lograron identificar dos puntos en el plan elegido, pudieran hacer la conversión al registro algebraico de manera correcta. Sin embargo, no fue el caso, pues el tratamiento numérico era fundamental para hallar una expresión general después de haber determinado los dos puntos en el registro cartesiano. Si bien la gran mayoría de los estudiantes utiliza la ecuación adecuada para encontrar una expresión general, los tratamientos efectuados por ellos son poco consecuentes con lo que permite el registro, es decir, les cuesta realizar cálculos literales en el registro algebraico con relación a términos semejantes, suma y diferencia de enteros, simplificación de fracciones.

$$\begin{aligned}
 y - 2000 &= 5(x - 10) \\
 y &= 5x - 5 + 2000 \\
 y &= 5x + 1995 \\
 y &= 5(5) + 1995 \\
 y &= 25 + 1995 \\
 y &= 2020
 \end{aligned}$$

rsión de un estudiante que no logra coordinar las unidades significantes del registro inicial.

Del total de estudiantes que identificó dos puntos en el gráfico elegido, solo uno encontró una expresión general que representaba el plan elegido. Los demás estudiantes al efectuar las operaciones en la ecuación punto pendiente tuvieron dificultades distintas: por ejemplo, la variable  $x$  desaparecía de la ecuación por lo que obtenían ***un número particular como expresión general***.

En este sentido, el tratamiento fue desarrollado de forma incorrecta para expresar el precio a pagar en términos del número de minutos. En tal caso, una de las gráficas en el registro de formación debería ser una línea recta horizontal, paralela al eje  $x$ , lo cual no correspondía con los planes ofrecidos, pues ningún plan tenía el mismo precio para cualquier cantidad de minutos. La imagen muestra un ejemplo de la situación.



$$y - 2000 = 400(x - 10)$$

$$y = 400 - 4000 + 2000$$

$$y = 400 - 2000$$

Conversión de un estudiante que utiliza un número como expresión general.

Otra dificultad se evidenció al operar términos semejantes en la ecuación, pues a números iguales con signos distintos los estudiantes obtenían un número *k distinto de cero*. Lo cual contribuyó a que no pudieran encontrar una expresión correcta. La mayoría de los estudiantes que efectuaron los tratamientos de manera incorrecta, eligieron la compañía número 2 que pasa por el origen del plano cartesiano, lo cual implica *que no se suma ni resta una constante fija*, es decir, con respecto al marco teórico se pierde el orden de arreglo de las unidades. De esta manera, las ecuaciones de las respuestas de los estudiantes alteran el precio a pagar para *todos* los minutos  $x$  posibles.

$$y - 9000 = 72.000(x - 30)$$

$$y - 9000 = 72.000x - 30 = 36.000$$

$$y = 72.000x - 600 + 900$$

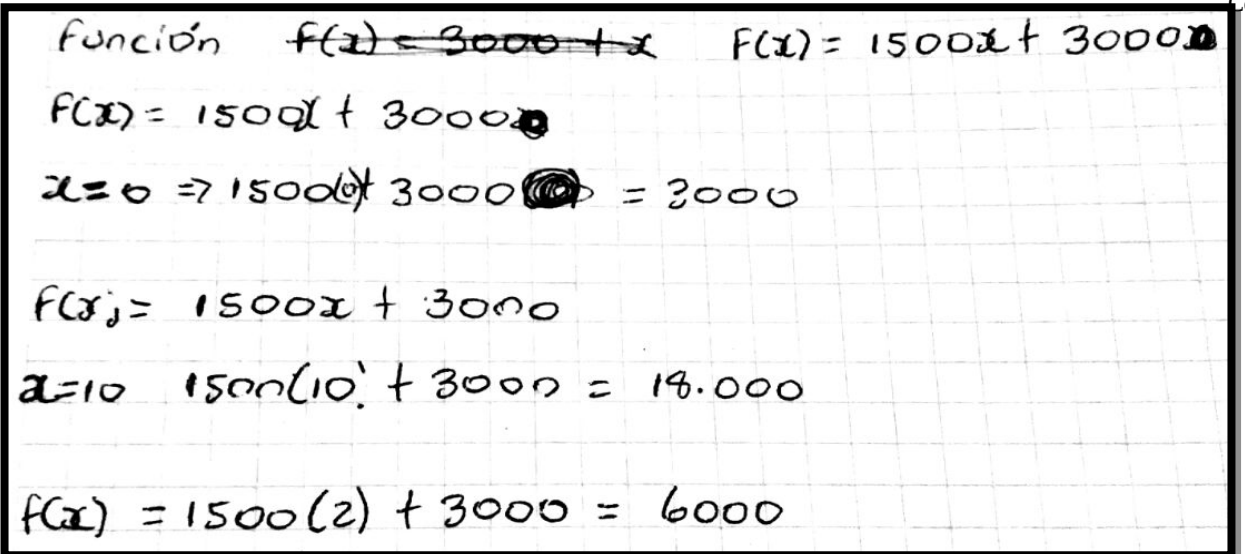
$$y = 72.000x + 300$$

Conversión de

un estudiante que busca una expresión que pase por el origen y obtiene una expresión con un costo fijo.

Lo anterior deja ver que a los estudiantes les cuesta reconocer las implicaciones de los parámetros en la ecuación algebraica en su forma explícita y reconocer los mismos parámetros

en el registro gráfico cartesiano; pues fueron recurrentes las confusiones en lo que tiene que ver con encontrar el plan más favorable y determinar su correspondiente expresión algebraica. Por ejemplo, se logró identificar la intencionalidad de un estudiante para encontrar una expresión que pasará por el origen, sin embargo, al determinar la ecuación aparece un costo variable más un costo fijo, lo cual implica en la gráfica una recta que pasa por *encima* o por *debajo* del eje x. En este sentido, se pierde la univocidad semántica terminal entre el precio que corresponde a no utilizar los minutos y la constante  $b$  que aparece en la ecuación.



Handwritten student work on graph paper:

Función  $f(x) = 3000 + x$   $F(x) = 1500x + 3000$

$f(x) = 1500x + 3000$

$x=0 \Rightarrow 1500(0) + 3000 = 3000$

$f(x) = 1500x + 3000$

$x=10 \quad 1500(10) + 3000 = 18.000$

$f(x) = 1500(2) + 3000 = 6000$

versión de un estudiante que prueba la expresión algebraica obtenida y no representa las unidades del problema.

En este sentido, se puede afirmar que las dificultades para efectuar la conversión entre registros, está directamente asociado con la dificultad en los estudiantes para discriminar las unidades significantes en el registro gráfico. Pues Duval (1998) afirma: “esta conversión exige que se discriminen las unidades significantes de cada registro, es decir es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados.” (p.23)

En general, las dificultades observadas en las producciones de los estudiantes fueron de naturalezas distintas:

En primer lugar, como se ha expresado reiteradamente dificultades relacionadas con la identificación y consideración de unidades significantes que en realidad no son pertinentes para relacionar las variables precio y minutos observados en la representación gráfica. Es decir, la gran mayoría de las justificaciones de los estudiantes no dan cuenta de las implicaciones que los parámetros  $m$  y  $b$  producen en situaciones propias sobre función lineal. Parte de ello se pudo observar cuando los estudiantes hacían referencia a algunos puntos particulares como elementos generales para decidir por un plan o los elementos que traían a colación no correspondían con las que cognitivamente eran pertinentes y representaban la situación escogida. Así como el caso de estudiantes que no discriminaron ninguna de las unidades significantes en el registro gráfico.

En segundo lugar, dificultades para determinar el valor de la pendiente tanto al identificar al menos dos puntos en la representación gráfica como los tratamiento efectuados en el registro numérico. Pues las operaciones de cálculo literal para algunos estudiantes eran realizados de manera incorrecta en el sentido en que encontraban valores que no correspondían con la razón entre el precio y el número de minutos.

Por último, dificultades para convertir la gráfica en una expresión algebraica por motivos de tratamientos erróneos en el registro algebraico, por el hecho, de que fueron recurrentes las confusiones en lo que tiene que ver con los elementos característicos de las gráfica. Aspectos que a su vez dificultan la construcción de una expresión algebraica que represente y muestre otras características de las variables involucradas.

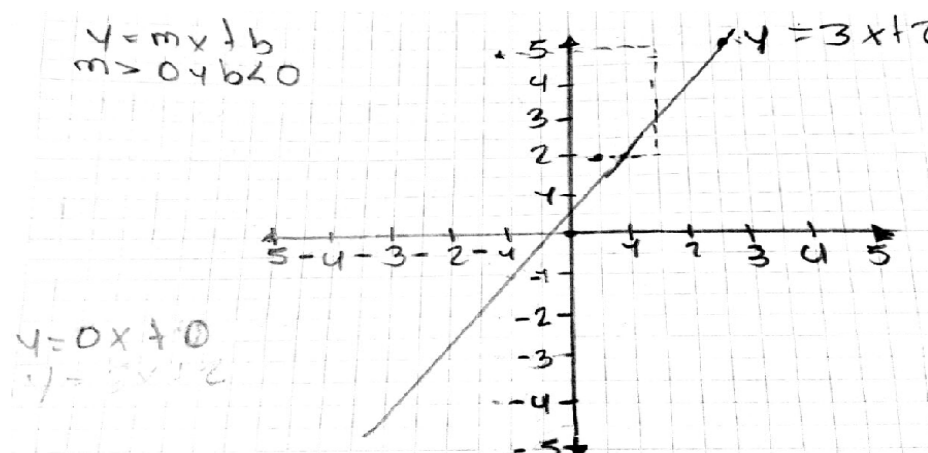
## 4.2 Análisis del problema 2.

La tabla 11 muestra las consideraciones de los estudiantes para trazar la gráfica cuando el registro de formación es la representación algebraica de ecuación explícita en forma general. En este sentido, se presentan las características de los elementos que los estudiantes trajeron a colación para realizar la conversión como también ejemplos de dichos elementos y el número de estudiantes que llevó a cabo tal proceso.

<b>Pregunta</b> Realiza una gráfica que represente una función de ecuación $y=mx+b$ , en donde $m>0$ y $b<0$ , sin dar valores numéricos a $m$ y $b$ .			
<b>(Unidades significantes)</b>	<b>Tipo de respuesta</b>	<b>N° de est.</b>	<b>Porcentaje</b>
No asignan ningún valor a los parámetros y construyen una gráfica que corresponde con las unidades significantes de la ecuación.	Hay coordinación entre las unidades significantes del enunciado principal y la representación gráfica. La conversión incluye las restricciones dadas.	2	16.6%
No asignan valores, pero las representaciones no son consecuentes con las unidades significantes de la expresión algebraica.	La conversión no incluye las restricciones del enunciado principal. No hay coordinación entre las unidades significantes.	5	41.6%
Construyen una expresión algebraica con valores particulares de los parámetros	No pueden evitar asignar números reales a los parámetros de la expresión para trazar la línea recta correspondiente.	5	41.6%

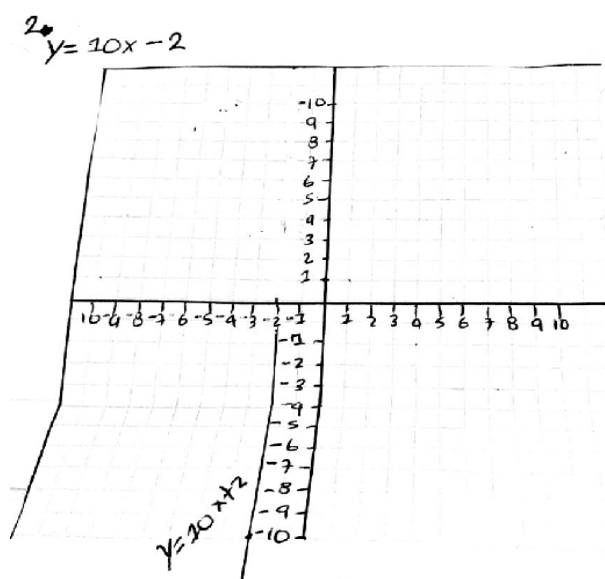
**Tabla 12.** Dificultades de los estudiantes al convertir una expresión algebraica general al registro gráfico.

Las respuestas consignadas en la tabla 12 evidencian las dificultades de los estudiantes para interpretar todas las características de las expresiones algebraicas que producen cambios en el registro gráfico. Las interpretaciones que surgen a partir de las restricciones fueron distintas. Por un lado, se hizo notable el arraigo de algunos estudiantes a asignar valores numéricos a los parámetros restringidos para continuar con el procedimiento de encontrar algunos puntos específicos y graficar la expresión. Pues en la tabla 12 se logra identificar como el 41.6% de los estudiantes pone números enteros en la ecuación quizás como único medio para coordinar los dos registros. Aun habiendo dejado explícito evitar la asignación de valores.



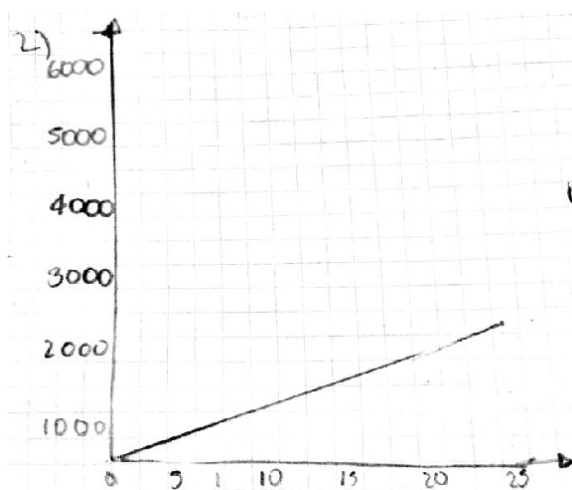
Gráfica propuesta por un estudiante que asigna valores a los parámetros para efectuar la conversión.

Este aspecto es congruente con el hecho de que a los estudiantes les cuesta ver en la expresión algebraica y con respecto al signo del parámetro  $m$ , una recta que parte desde abajo y crece indefinidamente. Por ello, algunos estudiantes decidieron utilizar números particulares que les permitieran observar de manera más detallada los elementos en la expresión que producen cambios en la gráfica; pese a que no era lo que el problema requería. Ver gráfico.



Gráfica de un estudiante que asigna valores a los parámetros para efectuar la conversión.

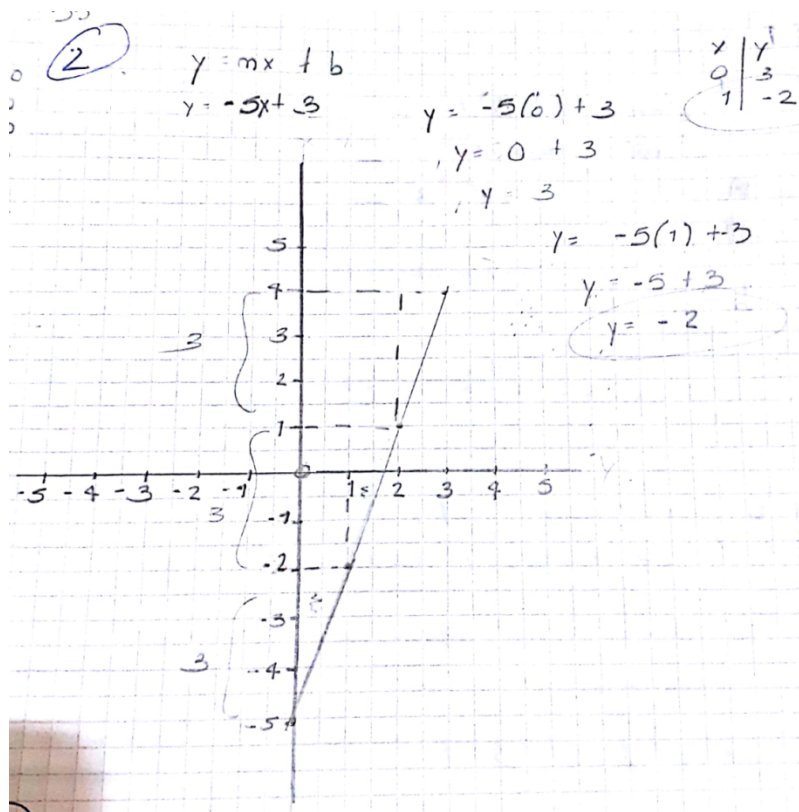
De otro lado, aunque la mayoría de los estudiantes construye una recta que sube a medida que aumentan los valores de la variable independiente, las gráficas muestran que interpretaron las restricciones  $m > 0$  y  $b < 0$  como si fuera el punto por el cual la gráfica empezaba. Es decir, recurren al punto origen en el plano como unidad significativa quizás sin tener claro lo que implican las restricciones. En este sentido, se pierde la correspondencia semántica al introducir una nueva unidad que no corresponde semánticamente con ninguna característica en la gráfica solicitada; pues el hecho de que una gráfica pase por el punto  $P(0,0)$  tampoco implica a la línea recta empezar desde allí. Del mismo modo, se pierde la univocidad semántica terminal en el sentido en que aumentan el número de unidades en la conversión cuando se introduce el punto de origen.



Representación de un estudiante que utiliza las restricciones como un punto de la gráfica.

Otro estudiante además de asignar valores numéricos a los parámetros, recurrió al registro tabular para completar el ejercicio de construir la gráfica. Este hecho, muestra la dificultad para coordinar de manera directa la ecuación y la representación en el plano cartesiano en el sentido en que el estudiante siente la necesidad de conocer características elementales “diferentes puntos” para trazar la curva correspondiente. Aunque logra construir una gráfica que

refleja las unidades significantes, les generó dificultad la conversión hacia la gráfica de manera directa tal vez por la generalidad de las unidades significantes involucradas.



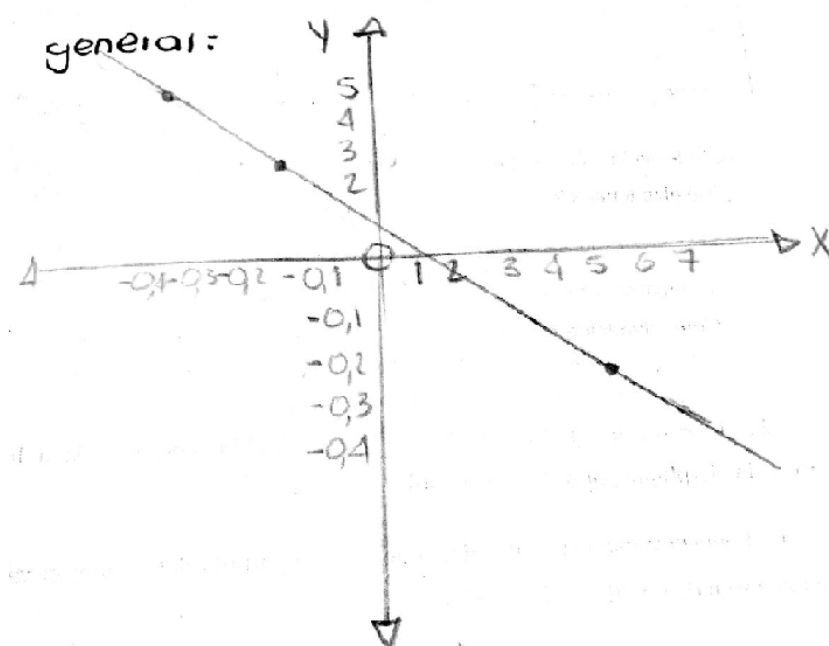
Representación de un estudiante que asigna valores a los parámetros y acude al registro tabular para efectuar la conversión.

Con respecto a la asignación de valores particulares, pudo notarse que algunos estudiantes tuvieron dificultad para ubicar valores correctos a los parámetros. Pues algunas asignaciones tampoco correspondían con lo que matemáticamente solicitaban las restricciones en relación a las propiedades de los números reales. Es decir, a algunos estudiantes les costó interpretar de forma correcta los símbolos de *comparación* para sustituir los números en los parámetros de la expresión algebraica.

Ahora bien, respecto al parámetro  $b$ , la unidad significativa solicitaba trazar una gráfica que cortara al eje  $y$  por debajo del eje  $x$ . No obstante, la mayoría de los estudiantes tuvo

dificultad para interpretar esta unidad, pues al igual que la inclinación, corresponde a un fenómeno de no congruencia en el sentido que se pierde la correspondencia semántica al trazar líneas rectas que cortan el eje  $y$  por encima de eje  $x$  o que pasan por el origen. Al igual que se deja de cumplir el orden de las unidades que componen las dos representaciones.

Se logra identificar estudiantes que relacionan de manera correcta solo una unidad significativa es decir, presentan correspondencia semántica para un parámetro de la ecuación sin discriminar la implicación de la otra. Como también aquellos que no discriminan ninguna unidad aunque hayan evitado asignar valores numéricos a los parámetros.

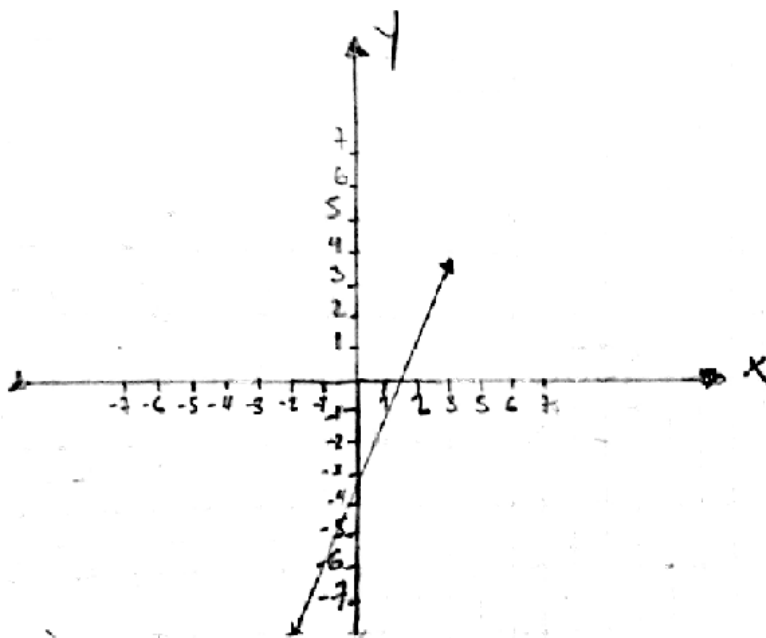


Representación de un estudiante que no coordina ninguna de las unidades significantes del registro inicial.

En

general, hubo serios errores para trazar la línea recta requerida dadas las condiciones iniciales del ejercicio. Sin embargo, dos estudiantes lograron coordinar de manera correcta ambos registros. Además de no asignar valores, en lo relativo a las unidades significantes logran trazar rectas con inclinación positiva y que cortan el eje  $y$  por debajo del eje  $x$ .





Gráfica de un estudiante que coordina las unidades significantes del registro inicial.

Es interesante observar como las dificultades hacia la conversión de un registro semiótico a otro cambian cuando se modifican las variaciones concomitantes o se reducen de manera notable los elementos que los estudiantes pueden considerar para realizar dicha conversión. Esto porque, los referentes teóricos muestran que las dificultades están mayormente centradas al pasar del registro gráfico a una expresión algebraica, pero se reconoce el pasaje inverso más espontáneo, proceso hecho generalmente por la vía del punteo. Es decir, generalmente este último pasaje es coordinado de manera inmediata por la mayoría de los estudiantes.

Sin embargo, este problema que solicitaba ir de una expresión general al plano cartesiano fue poco exitoso. Pues la mayoría de las respuestas incluyen representaciones que poco cumplen con todas las unidades significantes en el registro inicial.

Quiere decir que la generalidad de las restricciones posiblemente ofreció a los estudiantes información insuficiente para coordinar los dos registros con respecto a las unidades involucradas. De hecho, las unidades elementales del nuevo registro no están de forma coordinada debido a la errónea lectura de los parámetros.

En general, las dificultades en la coordinación de los registros se observan tanto en el concepto de pendiente como en el corte en  $y$ . Si bien se había previsto la posible dificultad de los estudiantes para conectar el parámetro  $m$  de la expresión  $y=mx+b$  con la inclinación de la recta, resultó un tanto sorpresivo que las dificultades de articulación se manifestaran también con respecto al concepto de intercepto con el eje  $y$ .

#### 4.3 Análisis del problema 3.

Debido a la capacidad de almacenamiento que tiene el portatil marca HP, la experiencia de los usuarios indica que, la carga de la bateria consume 1% cada 50 minutos cuando la carga alcanza el 100% y se deja en reposo. Discriminando la información del problema, corresponde a una tabla de doble entrada en la que se relacionan las variables tiempo y descarga de la bateria. A continuación se muestran las unidades significantes correspondientes a las dos variables.

Variables asociadas	Unidades significantes
Tiempo	Cada <b>50 minutos</b> disminuye la carga de la batería
Descarga de la batería	Se descarga a <b>razón de 1%</b> cuando el portátil se deja en reposo

**Tabla 13.** Valores y unidades significantes del problema 3.

<b>Pregunta a.</b> Represente en el registro algebraico el problema anterior a medida que pasa el tiempo.			
Unidades significantes	Operaciones cognitivas y coordinación	N° de est.	Porcentaje
Realiza conversión al registro algebraico relacionando el tiempo como variable independiente.	Identifica dos puntos en el registro de formación, pero el tratamiento en la determinación de la pendiente no es correcto y por tanto, la expresión algebraica no representa las variables del problema. El cálculo para determinar la pendiente no es correcto. Además el tratamiento en la ecuación se realiza de forma equivocada pues aparece un nuevo valor de la pendiente que no corresponde con el inicial. Y en algunas ocasiones aparece dos veces el coeficiente que genera la proporcionalidad.	2	<b>16.6%</b>

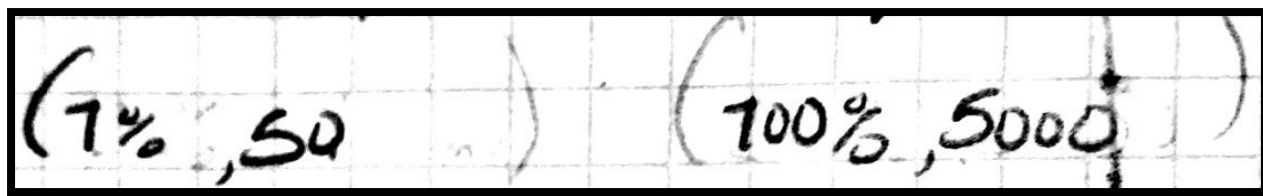
Convierte el enunciado a una expresión algebraica con el porcentaje de descarga comovariable independiente.	Identifica dos puntos en el registro inicial pero la relación entre los puntos para determinar la pendiente es incorrecto. Por tanto, la expresión general no corresponde con el problema. Además la expresión determinada debía pasar por el origen y la encontrada tiene un punto de corte. La relación entre las unidades significantes no es congruente con el problema y el valor de la pendiente es negativo en ciertas respuestas.	4	33.3%
Encuentra una expresión que incluye las unidades significantes del enunciado. Pero no representa el problema.	Se realiza conversión pero no se coordina con el registro de formación. Las unidades fueron tomadas tal cual estaban en el registro verbal y la correspondencia semántica entre ellas deja de existir. Se asocia 50 minutos con la constante que genera la variación 1% de descarga como el corte en $y$ . Es decir, no se presentan elementos significativos y una interpretación de las unidades significantes del problema.	1	8.3%
No establece ningún modelo algebraico que relacione las variables.	No establecen ninguna transformación que relacione las variables involucradas. Es decir, no discriminan las unidades significantes del enunciado principal para coordinar los dos registros.	5	41.6%

**Tabla 14.** Dificultades de los estudiantes al convertir una expresión algebraica general al registro gráfico.

En la tabla anterior, se puede ver de manera notoria las dificultades de los estudiantes para encontrar una expresión algebraica que represente el problema 3. Esto puede atribuirse directamente al fenómeno de no congruencia entre las unidades significantes del registro de formación y el ítem 3.a. Pues, el problema deja explícito la razón a la que se descarga el portátil, sin embargo poco corresponde directamente con los parámetros en el registro de llegada. Por esto, la correspondencia semántica deja de existir. Al mismo tiempo, se pierde la univocidad semántica terminal cuando no es posible ubicar el número de unidades significantes del registro inicial “50 minutos”, “a razón de 1% “y” 100% carga o 0% descarga” con las unidades significantes  $m$  y  $b$  del registro algebraico. Hecho que permite entender las dificultades de los estudiantes para coordinar el enunciado con una expresión que represente de manera correcta el problema.

Por otro lado, hay un faltante en el número de unidades del registro de partida cuando se indica la razón a la que se descarga el portátil, es decir, 1% cada 50 minutos, explícita un único punto el cual no es suficiente para determinar el valor de la pendiente para la representación algebraica. En este sentido, la univocidad semántica terminal también deja de existir.

Es así que las dificultades observadas en las producciones de los estudiantes se debieron a varios factores. En primer lugar, radicó en que a los estudiantes les costó interpretar la unidad significativa 1% cada 50 minutos para determinar la razón a la que disminuye la carga con relación al tiempo. Pues el 41.6% de los estudiantes tuvieron dificultad para determinar al menos dos puntos con base a la proporcionalidad entre las variables. Y aquellos que lograron identificar dos puntos, asumieron el porcentaje de descarga como variable independiente del tiempo, lo cual se debe a que posiblemente interpretaron las unidades significantes tal cual como fueron presentados por el enunciado principal del problema, es decir en el mismo orden, lo cual produce una razón entre las variables que no corresponde con la que se esperaba.



Puntos establecidos por un estudiante para las variables porcentaje de descarga y tiempo respectivamente.

En segundo lugar, al efectuar los tratamientos en el registro numérico para calcular el valor de la pendiente, las dificultades se presentaron al operar números naturales asociados al tiempo y valores en porcentaje asociados a la descarga. Pues la razón encontrada por aquellos que identificaron dos puntos, no corresponde ni siquiera considerando la relación que tuvieron en cuenta.

Valor

$$a. \begin{matrix} (0, 50) & (1, 0) \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{matrix}$$

$$m = \frac{0 - 50}{1 - 0.01} = \frac{-50}{0.99} = -50.50$$

de la pendiente propuesto por un estudiante que no representa las condiciones del registro inicial.

En este sentido, la dificultad en la conversión radica en que el ítem 3.a implica tomar el tiempo en primera instancia y luego el valor del porcentaje de descarga como variable “*que depende de*” para que la expresión relacione las dos variables de manera correcta. Situación que fue omitida por la mayoría de los estudiantes.

Conve

$$\begin{aligned} y &= 0 = -505(x-1) \\ y &= 0 = -505x - 505 \\ y &= -505x - 505 + 0 \\ y &= -505x + 100 \end{aligned}$$

rsión propuesta por un estudiante que no representa las variables y unidades del registro inicial.

Así mismo, los tratamientos efectuados en la ecuación fueron poco coherentes y por tanto producían ecuaciones que no representaban las variables del problema. Es decir, el 100% de los estudiantes hacen transformaciones inadecuadas en el mismo registro (tratamientos) y por tanto les cuesta coordinar el enunciado principal con una ecuación general que diera cuenta de la misma información que el registro de formación.

$$\begin{aligned}
 y - 50 &= -50.50(x - 0.01) \\
 y - 50 &= -50.50x + 0.505 \\
 y &= -50.50x + 0.505 + 50 \\
 y &= -50.50x + 50.505
 \end{aligned}$$

Conversión propuesta por un estudiante que no representa las variables del registro inicial.

De lo anterior, se observó que la mayor dificultad que tuvieron los estudiantes para realizar la conversión fue porque las unidades significantes no fueron comprendidas en su totalidad debido a la no congruencia entre dichas unidades y por la dificultad para aplicar la operación de tratamiento en los registros involucrados. Por un lado, a los estudiantes les cuesta en el registro de formación identificar más de un punto y que además asociara la dependencia del porcentaje de descarga a medida que pasaba el tiempo de manera correcta y por otro, los errores al efectuar cálculos literales en el registro numérico y algebraico en el sentido en que encontraban expresiones y valores que no tenían ningún sentido con las variables involucradas.

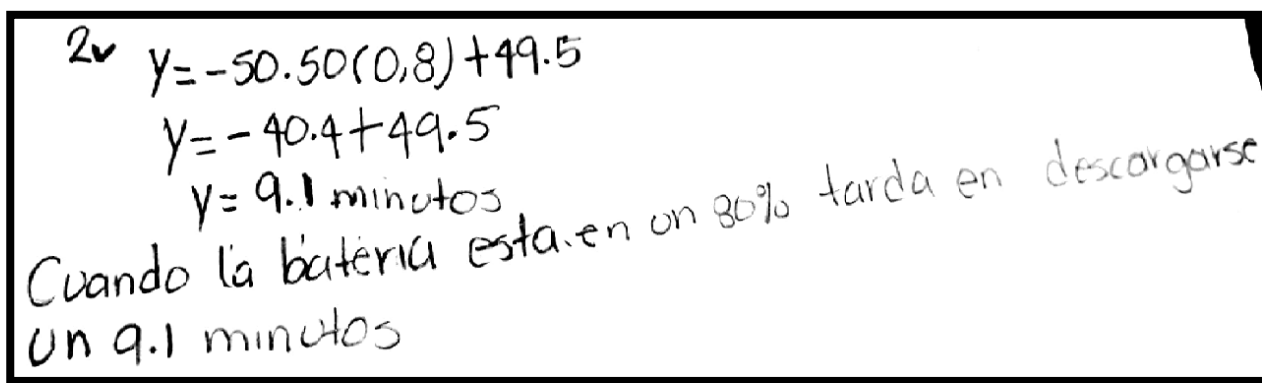
<b>Pregunta b. ¿Cuánto tarda la batería en descargarse un 80%?</b>			
<b>Unidades significantes</b>	<b>Operaciones cognitivas</b>	<b>N° de est.</b>	<b>Porcentaje</b>
Responde a partir de la expresión encontrada en el ítem 3.a.	Se evidencian cálculos literales correctos y desplazamientos coherentes en la ecuación, sin embargo los resultados no son correctos de acuerdo al 80% de descarga.	3	25%
Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. La pregunta es abordada a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico.	Acuden a operaciones de multiplicación y división para determinar un valor específico. Sin embargo, las relaciones consideradas son incorrectas. Las justificaciones tampoco son consecuentes con las unidades significantes.	4	33.3%
No utiliza ningún registro para justificar la respuesta. No responden a la pregunta planteada.	No presentan ningún registro en específico para responder a la pregunta. Es decir, les cuesta identificar y coordinar las unidades significantes para ubicarlas en otro registro.	5	41.6%

**Tabla 15.** Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.b.

Debido a la dificultad que tuvieron los estudiantes para realizar la conversión al registro algebraico en el ítem *a* y que además representara las unidades significantes del registro inicial, la tabla 13 muestra también las dificultades para responder a casos específicos. Pues solo el 25% utilizó el registro algebraico para determinar el tiempo en que la descarga correspondía a 80%.

Pese a la utilización de la ecuación, los resultados no son favorables, pues era necesario coordinar de forma correcta el problema y el ítem a para encontrar un valor correcto.

Si bien, los tres estudiantes que lograron establecer una expresión algebraica reemplazaron el 80% en la ecuación y la variable correspondiente, el resultado obtenido no corresponde con la relación inicial entre la descarga y el tiempo. Pues era necesario haber coordinado los dos registros para obtener el tiempo correcto para tal porcentaje. En este sentido, la dificultad no radica en la operación de tratamiento sino en la conversión efectuada.



Handwritten work by a student:

$$2\checkmark \quad y = -50.50(0.8) + 49.5$$

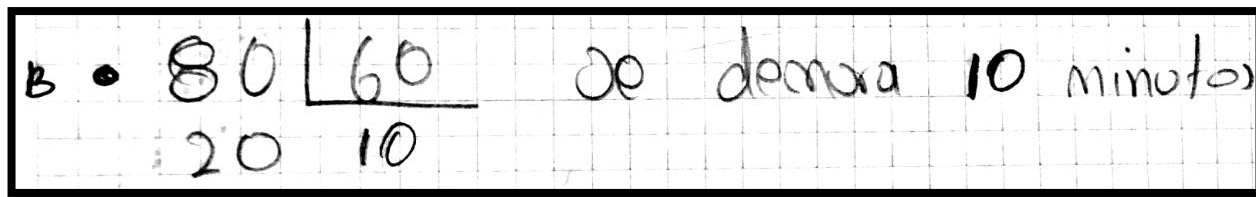
$$y = -40.4 + 49.5$$

$$y = 9.1 \text{ minutos}$$

Cuando la batería está en un 80% tarda en descargarse  
un 9.1 minutos

Tratamiento propuesto por un estudiante que no representa las variables involucradas en el registro inicial.

Por otro lado, se aprecia una gran diversidad de procesos por aquellos que no utilizaron la expresión general para determinar el tiempo en que la descarga es 80%. Los tratamientos incluyen, reglas de tres, multiplicaciones, divisiones, y procesos por tanteo que si bien podrían resultar favorables, no corresponden con lo que se había previsto desde el marco teórico con respecto a las operaciones cognitivas.



Handwritten work by a student:

$$B \bullet \begin{array}{r} 80 \overline{) 60} \\ 20 \quad 10 \end{array} \quad \text{de demora } 10 \text{ minutos}$$

Tratamiento propuesto por un estudiante que incluye una operación aritmética básica y que no es coordinado con el ítem.

Los resultados indican que pese a la utilización de una estrategia y tratamiento en registros distintos al esperado “registro algebraico”, las dificultades continúan para coordinar el enunciado y un proceso que vincule de manera completa las unidades significantes. Pues la mayoría de los estudiantes encuentra un tiempo distinto a los 4000 minutos que corresponden cuando el portátil ha tenido un 80% de descarga.

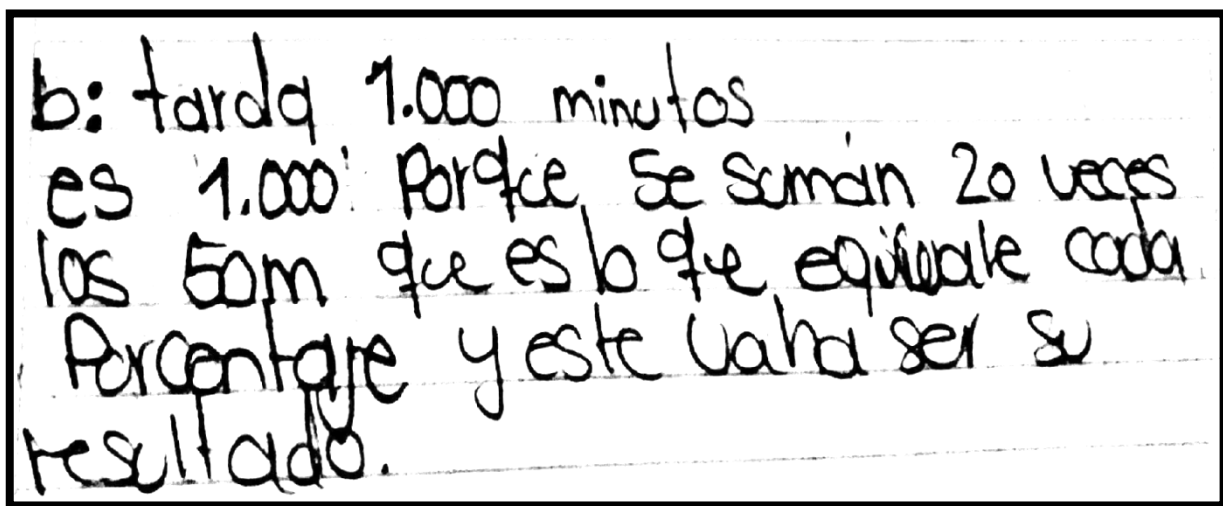
Tratamiento

1 = 50	37 = 1850	65 = 3300	93 = 4800
2 = 100	38 = 1900	66 = 3350	94 = 4850
3 = 150	39 = 1950	67 = 3400	95 = 4900
4 = 200	40 = 2000	68 = 3450	96 = 4950
5 = 250	41 = 2050	69 = 3500	97 = 5000
6 = 300	42 = 2100	70 = 3550	98 = 5050
7 = 350	43 = 2150	71 = 3600	99 = 5100
8 = 400	44 = 2200	72 = 3650	100 = 5150
9 = 450	45 = 2250	73 = 3700	
10 = 500	46 = 2300	74 = 3750	
11 = 550	47 = 2350	75 = 3800	
12 = 600	48 = 2400	76 = 3850	
13 = 650	49 = 2450	77 = 3900	
14 = 700	<del>50 = 2500</del>	78 = 3950	
15 = 750	51 = 2550	79 = 4000	
16 = 800	52 = 2600	80 = 4050	
17 = 850	53 = 2650	81 = 4100	
18 = 900	54 = 2700	82 = 4150	
19 = 950	55 = 2750	83 = 4200	
20 = 1000	56 = 2800	84 = 4250	
21 = 1050	57 = 2850	85 = 4300	
22 = 1100	58 = 2900	86 = 4350	
23 = 1150	59 = 2950	87 = 4400	
24 = 1200	60 = 3000	88 = 4450	
25 = 1250	61 = 3050	89 = 4500	
26 = 1300	62 = 3100	90 = 4550	
27 = 1350	63 = 3150	91 = 4600	
28 = 1400	64 = 3200	92 = 4650	
29 = 1450			
30 = 1500			
31 = 1550			
32 = 1600			
33 = 1650			
34 = 1700			
35 = 1750			

propuesto por un estudiante que establece una relación entre las variables a través de un proceso recursivo.

Así mismo, para aquellos que tuvieron dificultad para coordinar el enunciado con alguna ecuación general sobre las variables, los procesos por tanteo fueron poco certeros y las justificaciones no muestran una interpretación clara de las variables asociadas al problema.





b: tarda 1.000 minutos  
 es 1.000 porque se suman 20 veces  
 los 50m que es lo que equivale cada  
 porcentaje y este va a ser su  
 resultado.

Justificación propuesta por un estudiante que no logra coordinar el problema con una expresión algebraica.

En cuanto al concepto de ecuación, pocos estudiantes acudieron a este registro para dar respuesta a la pregunta. Situación que causó curiosidad, pues desde el marco teórico se ha previsto un énfasis en los tratamientos en el registro algebraico para resolver distintas situaciones problemas por parte de los estudiantes. En este sentido, las dificultades estuvieron asociadas al uso equivocado de las unidades significantes del enunciado, y por la dificultad para encontrar una expresión que representará la situación. Aspecto que a su vez dificulta utilizar una ecuación como medio para dar respuesta a otras cuestiones planteadas.

Adicionalmente, consideramos que la utilización de la regla de tres y la operación producto como estrategia de solución en la mayoría de los casos, incide en la dificultad para plantear relaciones generales, pues se reduce el esfuerzo que los estudiantes deben hacer con respecto a los tratamientos. Lo que se traduce en un cambio de registro solo por cuestiones de necesidad de ese nuevo registro y por las potencialidades en tratamiento que este ofrece. Es decir, simplemente una acción de recursividad al registro más adecuado en el momento Duval (2004).

<b>Pregunta c.</b> ¿Cuánto tiempo tarda en pasar de 100% a 80%? Justifique			
<b>Características importantes</b>	<b>Tipo de respuesta</b>	<b>N° de est.</b>	<b>Porcentaje</b>
Utiliza una expresión para encontrar una incognita dado el valor de la otra variable.	La sustitución en la expresión no corresponde con lo que se pedía y por tanto, el tratamiento aunque bien efectuado, no concide con lo que se esperaba.	3	25%
Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. La pregunta es abordada a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico.	La respuesta es obtenida a partir de multiplicaciones y reglas de tres. Sin embargo, no son claros los procesos para determinar el valor. Se intenta responder a partir de justificaciones en el registro en lengua natural.	3	25%
No hay evidencia de un procedimiento en específico que permita saber los tratamientos efectuados.	Las respuestas son presentadas sin algún tipo de justificación procedimental.	6	50%

**Tabla 16.** Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.c.

Este ítem tiene la particularidad de plantear la pregunta de manera explícita. Sin embargo, exige deducir la información por la cual se cuestiona. Pues los datos contienen elementos que tienden a confundir por el tipo de variable solicitado. Al igual que la pregunta anterior, los estudiantes utilizaron procedimientos diversos para dar una respuesta pero se nota gran ausencia en utilizar el registro algebraico para efectuar el tratamiento correspondiente y determinar el valor del tiempo en que el porcentaje de descarga pasa de 100% a 80%.

Aunque el 50% de los estudiantes respondió de manera correcta a la pregunta, no se logra observar una interpretación clara de la pregunta. La mayoría de las respuestas, resultaban de procesos por tanteo que si bien es válido, no permite identificar las transformaciones al interior de un registro como medio para relacionar las variables en una situación funcional.

Por otro lado, aquellos que no lograron coordinar la pregunta con las unidades significantes del problema se limitaron a hacer una interpretación superficial. Algunos consideran que al efectuar *la resta* entre el *100% y 80%* de descarga era suficiente para responder a la pregunta. Como también estudiantes que responden a la pregunta como si fuera la *misma* del ítem b. es decir, a los estudiantes les cuesta diferenciar ambos ítem posiblemente por la complejidad sintáctica y semántica de las unidades significantes involucradas.

Handwritten student work showing a subtraction method for percentage difference:

$$C - 7 = 70 \quad 700\% = 7.000 \quad 80 \rightarrow 700 = 20$$

Para pasar de 700% a 80% pasa  
200 minutos

Tratamiento propuesto por un estudiante que utiliza la diferencia para dar respuesta al ítem.

Handwritten student work showing a division method for percentage difference:

$$B \bullet 80 \overline{) 60} \quad \text{se demora 10 minutos}$$

$\begin{array}{r} 20 \\ 10 \end{array}$

$C \bullet 20\% \uparrow$  por la división

Tratamiento propuesto por un estudiante que acude a la división para dar respuesta al ítem.

A su vez, el 25% que utilizó una expresión algebraica para responder a la pregunta, tuvo dificultad para interpretar lo que se solicitaba. Pues asocian ambos porcentajes y los suman obteniendo un valor en porcentaje superior a las posibilidades de carga o descarga. En este sentido, se logra ver las dificultades para comprender el enunciado y las unidades significantes para vincularlas con elementos coherentes en la expresión. Así mismo, un estudiante utilizó una ecuación que vinculaba una de las unidades significantes del problema, tuvo dificultad para sustituir en la variable correspondiente y en efectuar el tratamiento de forma correcta.

Tratamiento

C  $1 + 0.8 = 1.8$

$$y = -50.50(1.8) + 50.505$$

$$y = -90.9 + 50.505$$

$$y = -40.395$$

propuesto por un estudiante que encuentra un tiempo con signo negativo.

Tratami

C  $\checkmark$  tarda -393 minutos en pasar de 100% a 80%

$$0,001$$

$$-0,08$$

$$\hline -0,079$$

$$0,02x + 50,02(-0,079) = -393$$

ento propuesto por un estudiante que utiliza el registro algebraico pero no representa las variables del problema.

Se nota que estos estudiantes son conscientes de las posibilidades que ofrece el registro algebraico para encontrar valores superiores a los que ofrecen otros registros. Sin embargo, les cuesta hacer una lectura correcta de los elementos característicos. Así mismo, los resultados dejan ver las dificultades para interpretar las respuestas después de efectuar tratamientos en el registro algebraico, pues no son coherentes de acuerdo a las posibilidades que ofrece la variable tiempo. Es decir, este valor nunca puede ser negativo, como le resulta a algunos estudiantes.

$$\begin{aligned}
 3) & -50.5(1.8) + 50.505 \\
 & -90.9 + 50.505 \\
 & = -40.3
 \end{aligned}$$

Tratamiento propuesto por un estudiante que no logra vincular las unidades y variables, además determina un tiempo negativo.

En general, los errores al igual que en el ítem b se deben al interpretar lo que demandaba el problema y por las dificultades en comprender los elementos característicos del enunciado principal.

<b>Pregunta d. ¿En cuánto tiempo se habrá descargado por completo el portátil?</b>			
<b>Unidades significantes</b>	<b>Operaciones cognitivas</b>	<b>Nº de est.</b>	<b>Porcentaje</b>
Utiliza una expresión para encontrar una incógnita dado el valor de la otra variable.	Se realiza una transformación en el mismo registro, reemplazando la coordenada igual a cero para responder a la pregunta sin haber coordinado las unidades significativas al efectuar la conversión. Es decir, las ecuaciones no representan los las variables asociadas al problema.	2	16.6%
Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. La pregunta es abordada a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico.	Se utiliza multiplicación entre las cantidades numéricas concernientes a 50min por el 100% de descarga total. Se utiliza el ítem anterior para responder a la pregunta.	1	8.3%
No hay evidencia de un proceso en específico para dar respuesta al ítem.	Las respuestas no dan cuenta de ser obtenidas por algún tipo de tratamiento.	8	66.6%
No responden a la pregunta	Posiblemente el registro de formación y la conversión en el ítem a no ofreció información suficiente.	1	8.3%

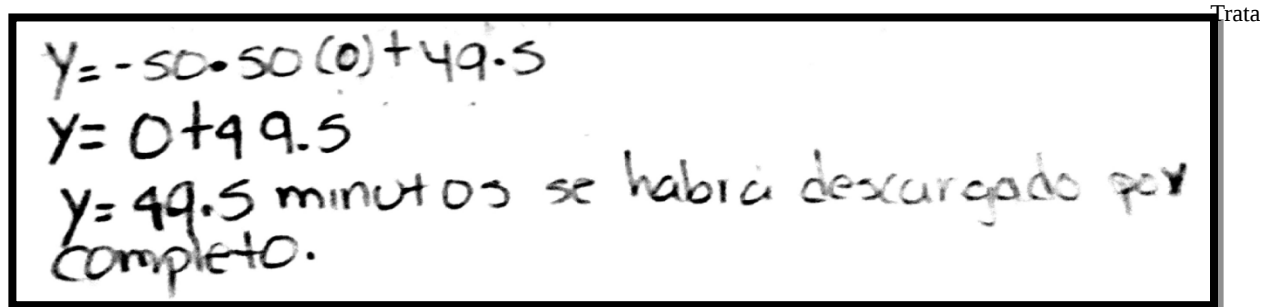
**Tabla 17.** Tratamientos considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.d.

La tabla 17 permite ver un marcado porcentaje de estudiantes que responde a este ítem sin utilizar un registro específico como medio para encontrar el tiempo que el portátil se descarga por completo. Al igual que en el ítem b y c, los estudiantes tuvieron dificultades para determinar el valor específico cuando se conoce el valor de la otra variable.

Una primera dificultad tiene que ver con algo que se ha insistido constantemente relacionado con el tratamiento en una expresión algebraica cuando las unidades significantes y

variables no han sido coordinadas al efectuar la conversión. Parte de ello se pudo observar cuando los tres estudiantes que utilizaron el registro algebraico encontraron un valor que no corresponde con el tiempo cuando la carga del portátil llega a cero aun habiendo efectuado el tratamiento de manera correcta.

Trata



Handwritten algebraic work showing a linear equation and its solution:

$$y = -50 \cdot 50(0) + 49.5$$

$$y = 0 + 49.5$$

$y = 49.5$  minutos se habia descargado por completo.

miento propuesto por un estudiante en el registro algebraico pero que no representa las unidades significantes del problema.

Otra dificultad que se pudo observar para aquellos que no utilizan la expresión como medio, está asociada a que en varias ocasiones las respuestas eran obtenidas a partir de procesos por tanteo que si bien, son una buena estrategia, el ítem exigía una relación entre las unidades significantes del problema y además de diferentes procesos lo cual pudo ser la causa de las respuestas erradas.

La tabla anterior también deja ver que un estudiante no logró responder al ítem posiblemente no pudo discriminar ninguna unidad significativa en el registro verbal que relacionara la variable tiempo para cuando el portátil se apagaba.

Vemos como el éxito para resolver un problema depende directamente de las posibilidades para interpretar las unidades significantes, las posibilidades de coordinación de dichas unidades en otro registro y por último las respuestas que se puedan obtener con ese nuevo registro sobre las variables involucradas.

**Pregunta e.** ¿En cuánto tiempo se habrá descargado por completo el portátil?

Unidades significantes	Operaciones cognitivas	N° de est.	Porcentaje
Traza una gráfica que involucra las variables involucradas en el problema.	Se realiza conversión al registro algebraico desde el registro verbal debido a la dificultad para encontrar una expresión algebraica que representara las variables del problema.	2	16.6%
Traza una gráfica que no corresponde con una función lineal.	Se evidencia un cambio de registro entre el enunciado principal y una gráfica que si bien relaciona las variables del problema, no corresponde con la representación de una función lineal.	3	25%
No se logra vincular las variables del problema con algún gráfico.	No se evidencia ninguna representación gráfica sobre las variables y unidades significantes del problema.	7	58.3%

**Tabla 18.** Conversiones considerados por los estudiantes para responder al ítem 3.e.

Nótese que hay congruencia entre la posible expresión algebraica que hallaron los estudiantes en el ítem a y este ítem. Sin embargo, por las dificultades que tuvieron los estudiantes para coordinar las unidades significantes con una expresión de naturaleza lineal que representara las variables, las gráficas fueron trazadas teniendo en cuenta la información que ofrecía el registro inicial.

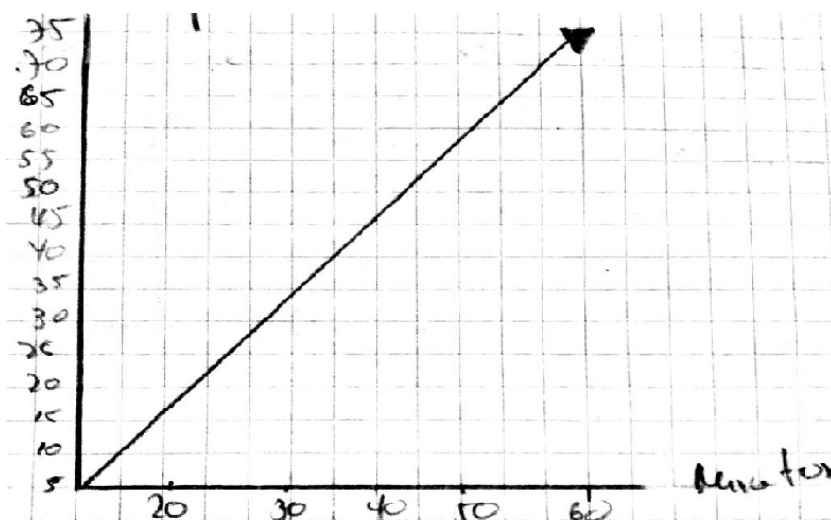
Los resultados muestran lo difícil que es para los estudiantes trazar la gráfica de una función lineal cuando no tienen a la mano una expresión algebraica, pues el 58.3% de los estudiantes que no logró convertir el enunciado principal con una ecuación también tuvo dificultades para trazar la representación gráfica sobre las variables.

Se esperaba que al menos los tres estudiantes que lograron hallar una posible expresión algebraica sobre la variables tiempo y porcentaje de descarga y que, utilizaron este registro para responder al ítem b, c y d hicieran uso de éste como medio para trazar la gráfica. Sin embargo, los resultados muestran que les costó realizar la conversión. Pues no fueron capaces de trazar una línea que posibilitara identificar las variables y unidades significantes. Uno de ellos, utilizó el plano cartesiano y ubicó un punto que relaciona el tiempo y la descarga en el cuadrante II, es decir, utiliza una coordenada con un tiempo negativo. En este sentido, la univocidad semántica

terminal deja de existir porque ningún elemento del registro de formación puede ubicarse para tal punto.

Por otro lado, el mismo porcentaje de estudiantes que no logra coordinar las unidades significantes del enunciado principal con una expresión algebraica, utiliza una representación que no corresponde con la representación característica de una línea recta sobre un plano cartesiano graduado. Pese a que habían tenido un acercamiento con el registro gráfico en los problemas 1 y 2.

Así mismo, la tabla 18 muestra que solo dos estudiantes logran trazar una gráfica que representa las variables del problema. Sin embargo, en una de ellas también se pierde la correspondencia semántica por el hecho que el punto de inicio corresponde a las coordenadas (0,5) lo que significa que inicialmente el portátil tiene un 5% de descarga, lo que no corresponde con la unidad significativa 100% cuando el portátil se deja en reposo.



Representación propuesta por un estudiante que no relaciona las variables involucradas en el registro inicial.

En general, un alto porcentaje de estudiantes hacen conversiones que no corresponden a la relación entre el tiempo y la descarga del portátil. Por ejemplo se aprecia que la mayoría de los



estudiantes que no logró encontrar una expresión cualquiera para responder al ítem a, presentó dificultad para interpretar las unidades significantes de los otros ítem y vincularlos con algún tratamiento en un registro que incluya una de las representaciones de la función lineal.

En este sentido, es claro que el grado de dificultad del problema 3 es superior a los anteriores por el hecho que implica una comprensión de las unidades significantes para coordinarlas en otro registro de representación y además, exige el manejo adecuado de las reglas que ofrece cada registro para efectuar tratamientos en ellos. Por último implica un cambio de perspectiva relacionado con que los estudiantes no han tenido un acercamiento con este tipo problemas que implican porcentajes entre las variables utilizadas.

Lo anterior puede ser una de las causas de las dificultades por las cuales los estudiantes tuvieron poco éxito para responder a los problemas pues los porcentajes implican hacer una interpretación distinta con respecto a las que son posibles con el conjunto de los números reales.

#### 4.4 Comparación de resultados de la IE San Vicente y Carpinello

A continuación se presentan cuatro casos en los cuales se describen algunas semejanzas y diferencias de los procesos que llevan a cabo los estudiantes de la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello y de la Institución San Vicente a partir de unidades significantes de la función lineal. En cada caso, se hace una descripción de las respuestas de los estudiantes, mostrando de ellas, los procesos que reflejan comprensión como también dificultades al abordar cada registro propuesto.

#### *4.4.1 Caso # 1: Uso reiterativo de la lengua natural para describir unidades significantes en actividades que vinculan el registro gráfico y algebraico.*

En la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello y en la Institución San Vicente se presentan las unidades significantes que consideraron los estudiantes, en el caso de este trabajo las unidades solo fueron enunciadas para dejar claro que la lengua natural fue el recurso más privilegiado ya que, a partir de este registro los estudiantes lograron detallar algunas de las unidades significantes (el valor inicial para tomar la decisión, la inclinación de la recta es decir; la pendiente y los casos particulares para tomar la decisión) de cada compañía telefónica. A demás, se evidencia que en el problema 1 ítem a y b, los estudiantes fueron capaces de relacionar el número de minutos y el valor a pagar por ellos, pues las respuestas dadas hacen referencia al cambio en el precio con respecto al tiempo posible a utilizar. Así mismo para la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello se creó una tabla de respuestas con varias categorías para definir el tipo de respuesta dada por los estudiantes. Se evidenció lo siguiente: Elementos importantes (Unidades significantes): Estudiantes que consideran el valor inicial para tomar la decisión. Es decir, lo que ocurre cuando no se consume minutos. Estudiantes que relacionan la inclinación de la recta (la pendiente) para tomar la decisión. Estudiantes que toman la decisión a partir de casos particulares. Es decir, recurren a un número de minutos y el precio a pagar por ellos para decidir.

En la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello aunque la unidad significativa de la representación gráfica correspondía a la inclinación de la recta. Es decir, la que visualmente estaba más acostada, la mayoría de los estudiantes eligió el plan número 2, el cual correspondía a la opción más costosa. Las justificaciones para la elección son del tipo: “por-

que es más favorable empezar a pagar menos valor”, “cuando no se consume minutos, no se paga”, “porque sale mejor pagar \$1500 por 5 minutos que pagar \$5500 por los mismos 5 minutos” o bien “porque las otras compañías son más caras desde que comienza hasta que termina”. Es decir, ninguno de los estudiantes asoció la unidad significativa inclinación de la recta con la posibilidad de pagar menos dinero.

En cambio, en la Institución San Vicente se encontró que las respuestas de los estudiantes corresponden a este tipo: Escogería el que cuesta \$ 100 porque no se me iría tanto dinero, Porque el plan # 1 es el que ofrece más minutos, otros manifestaron que escogieron la opción 1 porque me da una idea de cómo resolver un plan y hacerlo de manera exacta y que escogieron la compañía N° 3 ya que sale más favorable al pagar. (Ver imagen 1).

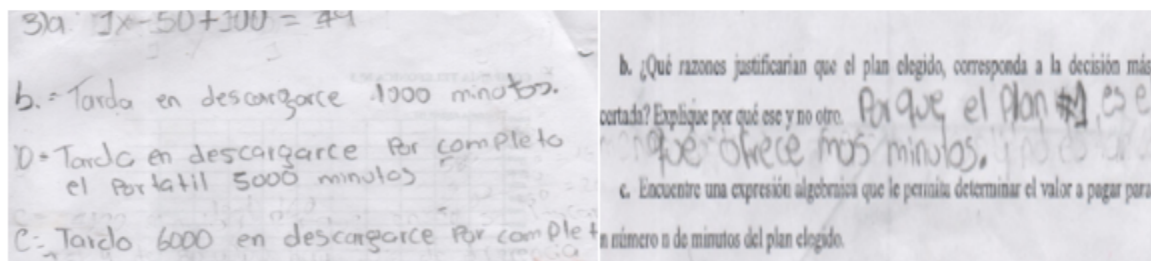


Imagen 1: Uso reiterativo de la lengua natural para dar respuesta a lo planteado  
4.4.2 Caso #2: Determinación de parámetros ( $m$  y  $b$ ) en la representación gráfica de una recta

En la Institución San Vicente las unidades significantes de la ecuación con respecto al registro gráfico corresponden a la inclinación de la recta y al punto de corte con el eje vertical. Del proceso realizado, se reconocen algunas características que los estudiantes traen a colación, entre ellas sobresalen: La no asignación de ningún valor a los parámetros y construc-

ción de gráficas que corresponde con las unidades significantes de la ecuación, de igual forma, la determinación de una expresión algebraica con valores particulares de los parámetros. Que esbozará en términos generales lo que se quería representar. (Ver imagen 2).

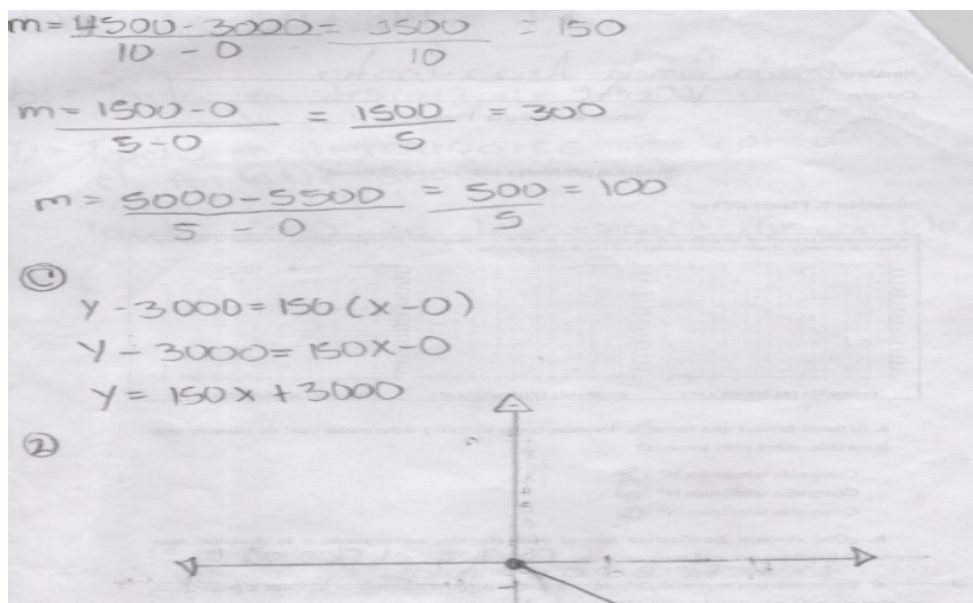


Imagen 2: Determinación de la pendiente de una recta en relación con una grafica

De la misma manera, en el trabajo realizado en la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello se encontraron unidades significantes como: La no asignación de ningún valor a los parámetros y la construcción de gráficas que corresponden con las unidades significantes de la ecuación.

De igual forma, no asignaban valores, pero las representaciones no eran consecuentes con las unidades significantes de la expresión algebraica, así mismo, no construían una expresión algebraica con valores particulares de los parámetros.

En la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello se muestra que de acuerdo al tipo de representación realizada por los estudiantes se asignan categorías de respuestas como: la coordinación entre las unidades significantes del enunciado principal y la representa-

ción gráfica. La conversión incluye las restricciones dadas. De esta manera la conversión no incluía las restricciones del enunciado principal. La no coordinación entre las unidades significantes y el hecho de asignar números reales a los parámetros de la expresión para trazar la línea recta correspondiente.

En el trabajo realizado en la Institución San Vicente el tipo de respuesta de los estudiantes corresponde a lo siguiente: la no realización de gráficas que corresponda con las características de la situación, debido a que los estudiantes no mostraban coordinación entre las unidades significantes (la dirección de la recta, el punto de corte con el eje y (b) y considerar que los parámetros  $m$  y  $b$  eran puntos pertenecientes a un plano cartesiano.

#### *4.4.3. Caso # 3: Operaciones aritméticas como respuestas a la relación de las variables involucradas (carga de batería vs tiempo de descarga).*

En la Institución San Vicente se encuentra que en la situación 3 se relacionan dos variables; por un lado, la carga de la batería y por otro, el tiempo en que se descarga el portátil. Así las unidades significantes que corresponden a las variables mencionadas son: cada 50 minutos disminuye la carga de la batería y se descarga a razón de 1% cuando el portátil se deja en reposo.

Algunos estudiantes acuden a la operación de división para dar solución a los interrogantes, de esta manera intentan repetir el proceso en cada uno de los ítems. Del mismo modo, algunos estudiantes no logran realizar ningún modelo algebraico que relacione las variables del enunciado para poder dar respuesta a lo que se les pide. (Ver imagen 3).

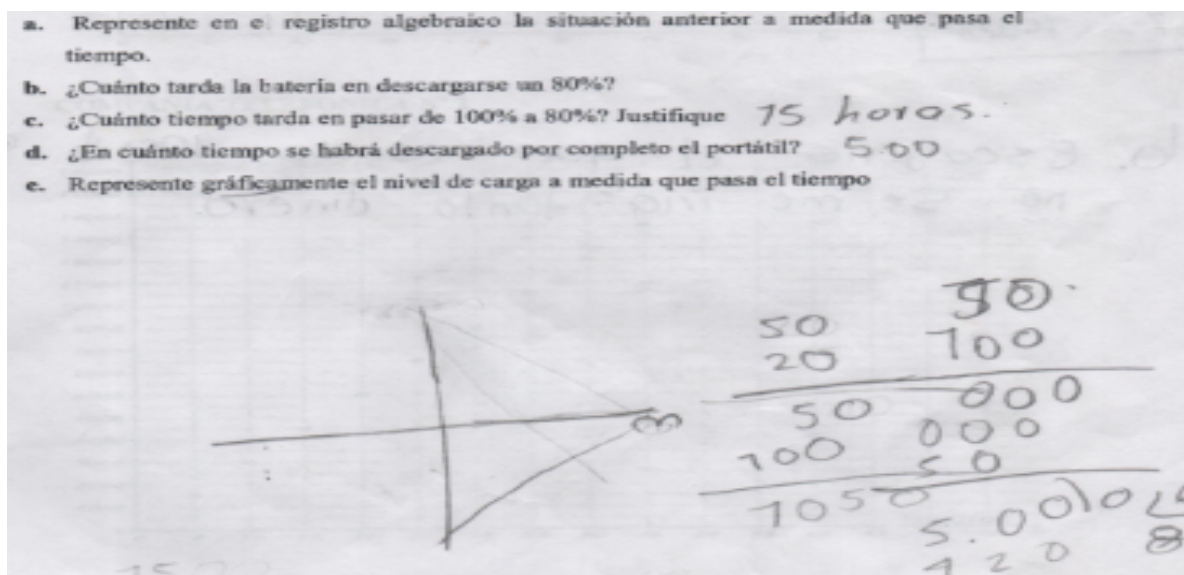


Imagen 3: operación aritmética expuesta por estudiantes de la IE San Vicente

Del mismo modo en la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello, se describen algunas variables asociadas que son: Tiempo y Descarga de la batería. Con unidades significantes respectivamente cada 50 minutos disminuye la carga de la batería y se descarga a razón de 1% cuando el portátil se deja en reposo.

Algunos estudiantes que lograron identificar dos puntos, asumieron el porcentaje de descarga como variable independiente del tiempo, lo cual se debe a que posiblemente interpretaron las unidades significantes tal cual como fueron presentados por el enunciado principal del problema, es decir en el mismo orden, lo cual produce una razón entre las variables que no corresponde con la que se esperaba.

#### 4.4.4. Caso # 4: Conversión de registros de representación, a partir de la identificación de unidades significantes.

En la Institución San Vicente no se establecieron categorías que dieran cuenta de los procesos que realizaron los estudiantes en cada uno de los ítems a diferencia de la situación 3 ítem a, en la que se describen las siguientes unidades significantes: el tiempo y el ni-

vel de carga o el porcentaje de descarga (ver imagen 4), en la Institución Nuestra señora consoladora del Carpinello en lo que los estudiantes realizan conversión al registro algebraico relacionando el tiempo como variable independiente. Convierte el enunciado a una expresión algebraica con el porcentaje de descarga como variable independiente. Encuentra una expresión que incluye las unidades significantes del enunciado pero no representa el problema, de manera que no establece ningún modelo algebraico que relacione las variables.

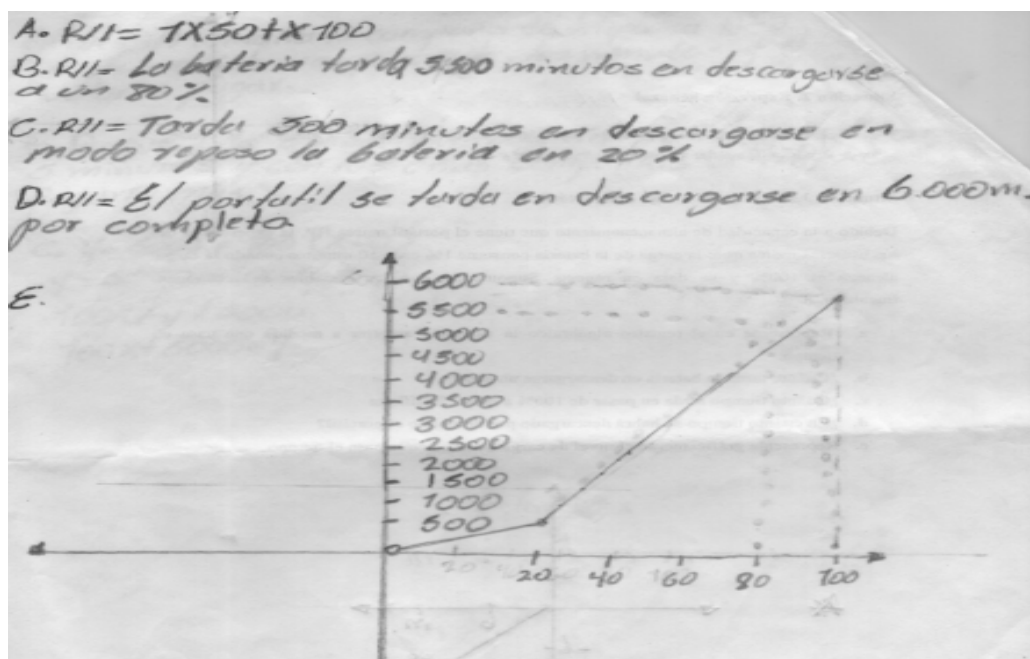


Imagen 4: relación algebraica y grafica del tiempo de descarga de un portátil

Se observa que las dificultades de los estudiantes para encontrar una expresión algebraica que represente el problema se atribuye directamente al fenómeno de no congruencia entre las unidades significantes del registro de formación y el ítem 3.a. Pues, el problema deja explícito la razón a la que se descarga el portátil, sin embargo poco corresponde directamente con los parámetros en el registro de llegada. Por esto, la correspondencia semántica deja de existir. Al mismo tiempo, se pierde la univocidad semántica terminal cuando no es posible

ubicar el número de unidades significantes del registro inicial “50 minutos”, “a razón de 1% “y” 100% carga o 0% descarga” con las unidades significantes  $m$  y  $b$  del registro algebraico. Hecho que permite entender las dificultades de los estudiantes para coordinar el enunciado con una expresión que represente de manera correcta el problema.

Al igual que para la situación 3 ítem a, se describen las siguientes Unidades significantes para el ítem b: Responde a partir de la expresión encontrada en el ítem 3.a. Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. Así como también las preguntas abordadas, de igual forma a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico. Los estudiantes no hacen uso de ningún tipo de registro para justificar la respuesta, así como tampoco responden a la pregunta planteada.

Algunas características importantes de la situación 3 ítem c: Utiliza una expresión para encontrar una incógnita dado el valor de la otra variable. Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. La pregunta es abordada a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico. No hay evidencia de un procedimiento en específico que permita saber los tratamientos efectuados.

Unidades significantes de la situación 3 ítem d: Utiliza una expresión para encontrar una incógnita dado el valor de la otra variable. Utiliza un registro distinto a la expresión algebraica para responder. La pregunta es abordada a partir de operaciones básicas sin utilizar el registro algebraico. No hay evidencia de un proceso en específico para dar respuesta al ítem. No responden a la pregunta.



Unidades significantes de la situación 3 ítem e: Traza una gráfica que involucra las variables involucradas en el problema. Traza una gráfica que no corresponde con una función lineal. No se logra vincular las variables del problema con algún gráfico.

Por las dificultades que tuvieron los estudiantes para coordinar las unidades significantes con una expresión de naturaleza lineal que representara las variables, las gráficas fueron trazadas teniendo en cuenta la información que ofrecía el registro inicial.

En general, un alto porcentaje de estudiantes hacen conversiones que no corresponden a la relación entre el tiempo y la descarga del portátil. Por ejemplo se aprecia que la mayoría de los estudiantes que no logró encontrar una expresión cualquiera para responder al ítem a, presentó dificultad para interpretar las unidades significantes de los otros ítem y vincularlos con algún tratamiento en un registro que incluya una de las representaciones de la función lineal.

En este sentido, es claro que el grado de dificultad del problema 3 es superior a los anteriores por el hecho que implica una comprensión de las unidades significantes para coordinarlas en otro registro de representación y además, exige el manejo adecuado de las reglas que ofrece cada registro para efectuar tratamientos en ellos. Por último implica un cambio de perspectiva relacionado con que los estudiantes no han tenido un acercamiento con este tipo de problemas que implican porcentajes entre las variables utilizadas.

## Capítulo 5

### Conclusiones

## Conclusiones

En este apartado se presentan las reflexiones generales relacionadas con las transformaciones (tratamiento y conversión) que llevaron a cabo los estudiantes al resolver los

Problemas sobre función lineal y las dificultades para comprender el concepto de pendiente en situaciones de variación, reflexiones que se espera sean significativas para maestros en ejercicio, maestros en formación e investigadores en el campo de la Educación Matemática.

Las conclusiones son presentadas a partir del análisis de las operaciones cognitivas, a la luz de las investigaciones hechas por Duval (1988, 1992, 1999, 2004 & 2006) sobre los registros de representación semiótica y su papel para la comprensión de los objetos matemáticos. A partir de esto, se muestran los elementos que constituyen el eje fundamental para las dificultades encontradas.

- ✓ En lo concerniente a la pendiente se puede concluir que las principales dificultades se manifiestan con la incapacidad de los estudiantes para interpretar de forma adecuada el parámetro en cada uno de los registros asociados y de llevar a cabo un procedimiento claro para su determinación, de manera que represente las variables y unidades involucradas en los problemas planteados. Como se mencionó en el capítulo 4, esta dificultad se debe a una interpretación superficial de las relaciones que produce las variaciones relacionadas con este parámetro en los registros gráficos y algebraicos. En efecto, el desconocimiento de las variaciones concomitantes que produce el parámetro  $m$  en el registro algebraico dificulta vincularlo con una característica inmediata en la representación gráfica cartesiana.
- ✓ En lo que respecta a las unidades significantes, las dificultades se presentaron con la identificación, transformación y comprensión de éstas en las representaciones gráficas,

algebraicas o en lengua natural como registro de formación. Esta dificultad radicó en la imprecisa escogencia que hacen los estudiantes sobre las unidades o características que aportan información relevante para efectuar transformaciones en cada uno de los registros y que permitan vincular todas las variables involucradas para dar respuesta a los problemas.

En este sentido, la no discriminación de las unidades significantes en el registro inicial disminuye las posibilidades para realizar conversiones de manera espontánea. Pues se aprecia que a los estudiantes les cuesta expresar de manera general la relación entre magnitudes involucradas en los problemas planteados. Particularmente al tratar conversiones en sentido gráfica-expresión algebraica o lenguaje natural-expresión algebraica. Aunque no se puede olvidar que las dificultades para coordinar los registros estuvo fuertemente evidenciado cuando estaban involucrados fenómenos de no congruencia en un sentido de la conversión.

- ✓ La tercera dificultad está directamente relacionada con elementos tanto semióticos como matemáticos. Aunque se nota en las producciones el uso correcto de una ecuación general para encontrar una expresión que relacione las variables de los problemas, el bajo porcentaje de éxito al realizar conversiones hacia el registro algebraico estuvo precedido por los errores cometidos al efectuar tratamientos correspondientes a dicho registro. Pues se evidenció que a los estudiantes les es difícil efectuar procesos (operaciones y propiedades con los números reales) de forma coherente puesto que el registro algebraico implica un alto grado de precisión en los procedimientos.
- ✓ Es importante que en el campo de la educación en matemáticas se haga reconocimiento de las formas como los estudiantes desarrollan los procesos, dado que, solo de esta mane-

ra se pueden reconocer las variedades de accionar de los estudiantes en el salón de clase. Y, así, por un lado se hace un acercamiento a las distintas formas como en el salón se desarrolla la actividad matemática, lo cual remite al reconocimiento al modo de comunicación y de presentación de la información de los estudiantes, y por otro, permitiría acceder al salón de clase como un laboratorio, en el cual, a partir de los resultados descritos, el docente los toma como una oportunidad para hacer ajustes oportunos que favorezcan el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

- ✓ En clase de matemáticas se hace importante el reconocimiento de las unidades significantes por parte de los estudiantes. Puesto que, a partir de las unidades o características que aportan información relevante para efectuar transformaciones en cada uno de los registros, el estudiante puede movilizar de manera consciente los tratamientos, conversiones y procesos asociados a la comunicación, sobre una situación y así podrá vincular todas las variables involucradas que dan respuestas a las situaciones planteadas. Dado que, en el proceso de transformar una información de un registro a otro, no siempre se logra ver con claridad lo que facilita ese paso, por ello, Duval (1998), menciona que el proceso de conversión es un umbral en el proceso de enseñanza de las matemáticas.
- ✓ Ahora bien, con respecto a los procesos de tratamiento y conversión, las dificultades se revelan con mayor fuerza al identificar las unidades significantes en todos los registros involucrados en los problemas planteados. Particularmente cuando el registro de partida es la representación gráfica, las dificultades para realizar la conversión aumentan considerablemente. Pues aparecen en las producciones los inconvenientes que son expuestos

generalmente en las clases de matemáticas cuando los estudiantes no logran coordinar los diferentes registros de representación semiótica en una situación problema.

En general, las dificultades se revelan con mayor fuerza con identificar las unidades

Significantes en todos los registros involucrados en los problemas planteados.

Particularmente cuando el registro de partida es la representación gráfica, las dificultades

para realizar la conversión aumentan considerablemente. Pues aparecen en las

producciones los inconvenientes que son expuestos generalmente en las clases de

matemáticas cuando los estudiantes no logran coordinar los diferentes registros de

representación semiótica en una situación problema.

Como Acuña (2001) lo expresa claramente:

Los estudios desarrollados por Duval nos permiten percatarnos de que los estudiantes no han sido instruidos respecto a las mutuas relaciones significativas entre las gráficas y las ecuaciones, en particular por el tratamiento parcial dado al paso de la ecuación a la gráfica a través del punteo, por un lado, y por el desconocimiento de las leyes semióticas que vinculan a las distintas representaciones, por otro.

Por esto, los aportes que deja este trabajo están relacionados con mostrar la importancia

que tiene para la enseñanza de las matemáticas la identificación, reconocimiento, y

discriminación de las unidades significantes de las funciones lineales y el uso de todas

las

posibles representaciones sobre estas. Pues el trabajo a través de las operaciones cognitivas y las reglas que las rige permite un acercamiento a la comprensión de los objetos a partir de sus propiedades y elementos característicos.

### **Recomendaciones**

El trabajo adelantado, sus resultados y conclusiones permite expresar ideas que podrían generar a la comunidad Matemática “maestros e investigadores” inquietudes para seguir estudiando la naturaleza de las dificultades asociadas a otros objetos matemáticos. Al mismo tiempo, posibilita utilizar las dificultades aquí reportadas como base para encontrar metodologías y procesos propios de la disciplina que permitan de manera notable su reducción. Se presentan entonces algunas ideas en lo que respecta:

- A los objetos matemáticos, priorizar situaciones problemas en las que los estudiantes deban identificar que propiedad cumple o no cierto objeto matemático por el hecho de que son las propiedades las que le otorgan sentido a los objetos. Del mismo modo, evitar reducir el trabajo a la aplicación directa de fórmulas y ejercicios mecánicos que en realidad, no muestran el nivel de comprensión que han tenido los estudiantes con los objetos trabajados.
- A las representaciones, proponer situaciones en las que los estudiantes sientan la necesidad de ir a todas las representaciones sobre un objeto matemático en particular así como abordar los cambios de registro en todos los sentidos posibles. Pues desde la teoría se ha dicho que este pasaje es fundamental para su comprensión.
- A las unidades significantes, favorecer situaciones a través de la identificación de los elementos característicos “unidades cognitivamente pertinentes” y de las variaciones con-

mitantes que estas pueden producir en otro registro de representación. Por un lado, son indispensables para el cambio de registro y son necesarios para entender las particularidades que cada registro de representación ofrece, por otro. En particular, la discriminación de las unidades significantes debe hacerse de manera explícita en los distintos registros involucrados con el objeto, de manera que el estudiante tenga la capacidad de decidir utilizar el registro más adecuado cuando resuelve un problema en particular.



## Referencias

- Acuña, C (2001). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos (Vol. 13, pp. 75-92)
- Angulo, J (2017). *Uso y evaluación de enunciados problemas contextuales para la conversión, tratamiento y comprensión de los parámetros (m y b) de una función lineal  $y=mx+b$  , en grado octavo*. Universidad Nacional de Colombia (Palmira). Tesis de maestría no publicada.
- Asprilla, E (2018). Algunas dificultades en la comprensión de la función lineal asociadas a la conversión entre los registros gráficos y algebraicos en grado noveno. (Trabajo de grado). Universidad del Valle Sede Pacifico.- Buenaventura.
- Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. pp. 173-201. *Investigaciones en Matemática Educativa*. Ed. Hitt, Fernando. México.
- Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

- Fernández, J (2015). *Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobreyectividad asociadas a la conversión entre los registros cartesiano y algebraico [recurso electrónico]* (Doctoral dissertation).
- García, J. (2016) *Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo*. Universidad de Medellín
- Gutiérrez, S., & Parada, D. (2007). Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones (Doctoral dissertation, Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá (Colombia)).
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacán University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (México)*.
- Lozano, M. E. D., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. M. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Año XI–Número 41–Marzo 2015 Monográfico: FISEM y Sociedades que la integran ÍNDICE, 20.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- Ospina, D. (2012) *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*. (Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales)
- Pontón, T. (s.f). “La conversión: punto fundamental para lograr la comprensión en matemáticas”. Seminario: Representaciones Semióticas en la Teoría de Raymond Duval. Universidad del Valle, Cali – Colombia.
- Ramírez, R., & Toro, J. (2012). La función lineal, una noción que emplea los registros de representación semiótica para modelar la variación. Universidad del Valle. Cali (Colombia).

- Rey, G., Boubée, C., Sastre, P & Cañibano, A. (2009) *Aportes didácticos para abordar el concepto de función*. Número 20–Diciembre de 2009 (pp. 153-162)
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. p, 4(1), 1-14.
- Roldán (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).
- Sánchez, D. (2016) *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula* (tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).
- Swokowski, E. (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (quinta edición). Boston, EE.UU: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Vera, L. (2008). La investigación cualitativa. (Recuperado el 25 de Abril del 2017).

## Bibliografía

- CABRA, D. & GÓMEZ, J. (2003). La función lineal en diferentes contextos. Programa de capacitación y acompañamiento docente de Cundinamarca y Duitama.

- Casilimas, C. A. S. (1996). Investigación cualitativa. Ifces.
- García, J. X. P. (2002). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. de XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Hermosillo, Sonora, México.
- Gómez, W. (2011). Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la comprensión del concepto de función lineal. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- González Chica, G., & García Castro, L. I. (2015). Tratamiento de las representaciones semióticas de las funciones cuadráticas.
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional (Doctoral dissertation). Tesis de maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín).

## Anexos

**Nombre:** \_\_\_\_\_

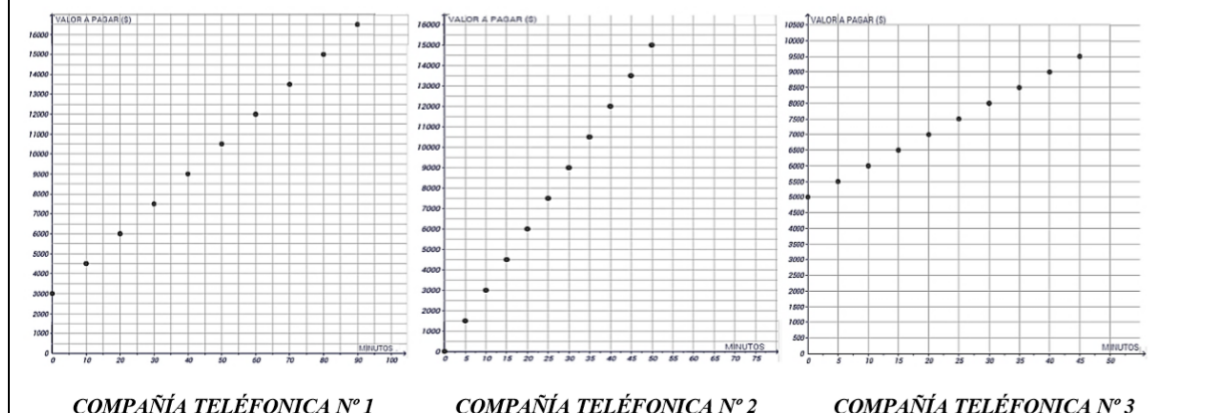
**Colegio:** \_\_\_\_\_

**Grado:** \_\_\_\_\_ **Nivel: Secundaria** **Fecha:** \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### Situación problema sobre función lineal

#### Situación 1. Planes de voz

A continuación se muestran los gráficos de algunos planes de voz de tres compañías de telefonía celular, en donde se relaciona el número de minutos y el valor a pagar. Analice cada una de estas propuestas



- a. Si usted tuviera que tomar la decisión como cliente y determinar cuál de ellos es más favorable, ¿Qué plan tomaría?

Compañía telefónica N° 1\_\_

Compañía telefónica N° 2\_\_

Compañía telefónica N° 3\_\_

- b. ¿Qué razones justificarían que el plan elegido, corresponda a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro.

- c. Encuentre una expresión algebraica que le permita determinar el valor a pagar para un número  $n$  de minutos del plan elegido.

## Situación 2. Expresión general

Realizar una gráfica que represente a una función de ecuación  $y = mx + b$ , en donde  $m > 0$  y  $b < 0$ , sin dar valores numéricos a  $m$  y  $b$ .

## Situación 3. Nivel de descarga del portátil

Debido a la capacidad de almacenamiento que tiene el portátil marca HP, la experiencia de los usuarios indica que; la carga de la batería consume 1% cada 50 minutos cuando la carga alcanza el 100% y se deja en reposo. Suponiendo que las variables se relacionan linealmente.

- a. Represente en el registro algebraico la situación anterior a medida que pasa el tiempo.
- b. ¿Cuánto tarda la batería en descargarse un 80%?
- c. ¿Cuánto tiempo tarda en pasar de 100% a 80%? Justifique
- d. ¿En cuánto tiempo se habrá descargado por completo el portátil?
- e. Represente gráficamente el nivel de carga a medida que pasa el tiempo

**Nota:** Las imágenes del problema 1 fueron divididas y ampliadas de tal manera que los números que representan minutos y precio fueran claramente identificados por parte de los estudiantes.

Estudiante resolviendo las actividades



Estudiantes en la presentación de la actividad

