UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA ESCOLAR DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN

Carolina Castañeda Martínez
Sebastián Castañeda Martínez

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
2019

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA ESCOLAR DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN

Carolina Castañeda Martínez
Código 201426015
Sebastián Castañeda Martínez
Código 201524550

Director:
Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
2019

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Licenciatura en Educ. Básica con énfasis en Matemáticas

Fecha:

Día	Mes	Año
11	06	2019

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ______

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto ecuación.

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director

Ligia Amparo Torres Rengifo

Nombre del Primer Evaluador

David Benítez Mojica

Nombre del Segundo Evaluador

Cristian Andrés Hurtado

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Carolina Castañeda H.	[illegible]	3469	castaneda.carolina@correounivalle	3148957348
Sebastián Castañeda H.	[illegible]	3469	sebastian.castaneda.martinez@correounivalle.edu.co	3046346633

Evaluación

Aprobado ☒ Meritorio ☒ Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ______ (máximo un mes) ante:
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente) se da un plazo máximo de ______ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el ____ ____ ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente)

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Anexo No. 4

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación

Autores:

Nombre: Sebastián Castañeda M. Firma: Sebastián Castañeda M.
C.C. 1144186355

Nombre: Carolina Castañeda Martinez Firma: Carolina CM
C.C. 1144195553

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha: Junio 12 2019

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-06-09
V-05-2011

Tabla de contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

Este trabajo tiene como propósito favorecer un acercamiento al álgebra escolar, mediante la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación, en estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa Veinte de Julio, de la ciudad de Santiago de Cali. Para lo anterior, se realizó el diseño y puesta en acto de una propuesta de aula que integra aspectos didácticos, curriculares y matemáticos del marco de referencia conceptual. La propuesta consta de dos situaciones, la primera se compone de cuatro problemas aritméticos y la segunda de cinco problemas aritméticos, la gran mayoría de estos contiene una serie de preguntas, que permiten guiar a los estudiantes en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños. La propuesta de aula fue implementada en nueve sesiones, los resultados y análisis de resultados, permiten inferir que los estudiantes de este ciclo de escolaridad, en primer lugar, identifican las relaciones entre las cantidades, asimismo los estudiantes reconocen la relación de equivalencia del total en relación con sus partes. Además, representan en lenguaje algebraico la estructura de los problemas planteados. Por último, se puede decir que este trabajo permitió a los estudiantes un acercamiento significativo al desarrollar el pensamiento algebraico por medio de la resolución de problemas aritméticos.

Palabras claves: Introducción al álgebra escolar, resolución de problemas aritméticos, ecuaciones reales de primer grado, pensamiento aritmético, pensamiento algebraico.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la Línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado surge como una motivación para favorecer un acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos, en estudiantes de la Institución Educativa Veinte de Julio, a través de una propuesta de aula basada en la resolución de problemas aritméticos.

Para esta propuesta, se toman en consideración algunos de los referentes conceptuales que se mencionan a lo largo de este trabajo, tales como Bednarz, Kieran y Lee (1996), centrando la atención en Bednarz y Janvier (1996), Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), Zill y Dewar (2012). Estos referentes permitieron la construcción y consolidación de la propuesta de aula, ya que en primer lugar desde lo didáctico se logró establecer una categorización de problemas desde el más simple al más complejo según sus relaciones y dominio numérico, desde la perspectiva curricular se logra evidenciar la resolución de problemas como un proceso que permite construir y desarrollar significativamente el pensamiento de los estudiantes, por último, la perspectiva matemática define los conceptos que se utilizaron en la construcción de la propuesta de aula.

Respecto a la organización del trabajo de grado, este se realiza de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta la problemática, los objetivos, la justificación y los antecedentes. Ahora bien, el problema está basado en algunas dificultades que reportan distintas investigaciones, respecto a la transición de la aritmética al álgebra, y la importancia de afrontar dichas dificultades a través de un acercamiento a conceptos y procesos significativos desde la resolución de problemas aritméticos.

En el segundo capítulo se expone el marco de referencia conceptual, el cual documenta la problemática y es la base para el diseño de la propuesta de aula. El marco de referencia conceptual se organiza en tres perspectivas de análisis: la Perspectiva Didáctica, Curricular y Matemática. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2015). En la tercera perspectiva se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

En el tercer capítulo se presenta la propuesta de aula, se describe la metodología e implementación de esta, los resultados y análisis de resultados, en el que se relaciona el marco de referencia conceptual con el diseño e implementación.

Lo anterior, se realiza con el propósito de caracterizar algunos desarrollos conceptuales y procedimentales al resolver problemas aritméticos, en estudiantes de grado octavo, de una Institución Educativa en particular.

En el cuarto capítulo del trabajo, se examinan los resultados presentados en el capítulo tres, con el fin de validar o refutar la pregunta problema y los objetivos del trabajo. Además, se realizan algunas sugerencias didácticas.

Por último, se presentan las referencias bibliográficas de todos los autores y textos que sirvieron de apoyo para la construcción de este documento. Además, los anexos permiten evidenciar el proceso realizado por algunos estudiantes.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

Capítulo 1. Aspectos generales del trabajo

En esta sección se abordan los aspectos generales que estructuran el trabajo, para lo cual se expone la problemática que se fundamenta en algunas dificultades y tratamientos registrados en distintas investigaciones en torno al tránsito entre la aritmética y el álgebra, además de la importancia de la resolución de problemas como un proceso fundamental para potenciar un aprendizaje significativo en el estudiante. Así mismo, se encuentran los objetivos de este ejercicio de investigación, tanto general como específicos, que permiten esclarecer las metas a alcanzar. También se expone la justificación que sustenta la importancia de abordar dicha problemática, y por último se reportan algunos antecedentes que tienen como objeto de estudio el tránsito entre la aritmética y el álgebra, la resolución de problemas y el concepto de ecuación, en diferentes niveles de escolaridad, los cuales están encaminados con nuestro objeto de estudio y por lo tanto aportan significativamente al desarrollo de la problemática.

1.1 Problemática

Las investigaciones realizadas en los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Freudenthal, 1983; Gallardo y Rojano, 1988; Brousseau, 1989; Kieran, 1992; Rojano, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Puig, 1998; Socas, 2007; Socas 2011; Castro 2012) dan cuenta de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Las dificultades presentes en los estudiantes parecen manifestarse en la falta de comprensión y funcionalidad de ese conocimiento, lo cual se evidencia por medio de errores conceptuales y procedimentales, que no permiten que los estudiantes analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, solucionen problemas relacionados con la vida diaria, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, entre otros.

Para Socas (1997) dichas dificultades se originan en el microsistema educativo, es decir, en las relaciones entre estudiante, materia, profesor e institución escolar, las cuales han llevado a que sean un foco de estudio e investigación en Educación Matemática de gran importancia.

La falta de comprensión parece tener sus causas en la naturaleza misma de los objetos matemáticos, dado que, entender los conceptos matemáticos, las bases del cálculo, el lenguaje de los símbolos matemáticos y ser capaces de resolver problemas matemáticos, se puede convertir en un verdadero desafío para los estudiantes. Algunos de los problemas relacionados con la naturaleza y la falta de comprensión de los objetos matemáticos se deben a su alto nivel de abstracción, la adquisición del lenguaje particular de representación que está sometido a reglas exactas, por ejemplo, dificultad al momento de leer los enunciados de los problemas y a la relación de los conceptos, que a su vez tienen diferente significado en el lenguaje común y en las matemáticas, además de conceptos que el estudiante escucha en su mayoría sólo en la clase de matemáticas, pueden ser mal entendidos y por ende ocasionar dificultades que impiden que los estudiantes se apropien de dicha área del conocimiento (Socas, 1997).

Particularmente, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, estas dificultades son categorizadas por Socas (2011) en cinco grandes dificultades, dos asociadas a la propia disciplina, es decir, a la complejidad de los objetos matemáticos y procesos de pensamiento matemático, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza, la cuarta asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y la quinta asociada a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Así mismo, Castro (1994) caracteriza las dificultades que se evidencian en los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje del álgebra como, dificultades intrínsecas al objeto (epistemológico), dificultades inherentes al propio sujeto (ontológico) y dificultades en las técnicas de enseñanza (didáctico).

Las dificultades intrínsecas al objeto se deben en gran medida a la naturaleza misma del álgebra, es decir, a su lenguaje formal, que se dota de símbolos y reglas (sintaxis), lo cual genera en los estudiantes errores de tipo procedimental y conceptual, como por ejemplo, errores al resolver problemas algebraicos como, al momento de convertir los enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal, errores con el uso de paréntesis y al considerar los valores de las incógnitas siempre positivas (x, y, z) y cuando están acompañadas del signo menos $(-)$ siempre negativas $[(-x), (-y), (-z)]$ además de concebirse solamente como números u objetos, errores al considerar el signo igual como se hacía en aritmética, es decir, tener la noción que a la izquierda del signo igual se encuentra una operación mientras que a su derecha se encuentra el resultado de dicha operación como por ejemplo, $2 + 7 = 9$ pero $2x + 7y \neq 9$ó $9xy$, en lugar de verlo como un signo de equivalencia entre dos polinomios.

Las dificultades inherentes al sujeto se enmarcan en la complejidad que supone la abstracción y la generalización de los conceptos algebraicos. Por último, las dificultades presentes en las técnicas de enseñanza se deben a la forma tradicional de enseñar de los docentes, que en su mayoría se dedican a proceder de forma mecánica y algorítmica, sin tener en cuenta el contexto.

En investigaciones como Gallardo y Rojano (1988), Filloy y Rojano (1984), se manifiesta que estas dificultades se presentan debido a una "ruptura[1]" o un "corte didáctico" del pensamiento aritmético, en el cual es necesario operar lo representado, como por ejemplo, en el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas, pasar de tratar ecuaciones de tipo aritmético, que poseen solo una ocurrencia de la incógnita, a ecuaciones no aritméticas, con doble ocurrencia de la incógnita, para que se produzca una nueva construcción del conocimiento. En efecto, para dar paso al conocimiento algebraico es necesario romper con los conceptos y hábitos aritméticos, es decir, romper con el plano de las cantidades para avanzar al plano de las relaciones, puesto que aunque el saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos, muchas veces estos modelos aparecen como obstáculos para el saber matemático nuevo.

Así pues, dicha ruptura se presenta como consecuencia de obstáculos didácticos, los cuales para Brousseau (1989) surgen de la enseñanza y por lo tanto se pueden evitar, pues impiden ver las cosas de una nueva manera. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, al presentarse esa ruptura, no significa que no se van a considerar los procesos matemáticos desarrollados por los estudiantes hasta el momento, sino que se abordará de tal manera que se propicie una reconstrucción y redefinición de los conceptos presentes en el pensamiento aritmético, colo lo son: las operaciones, la naturaleza de los números, etc.

[1] "La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico". (Gallardo y Rojano, 1998. p.2).

En consecuencia, se han desarrollado gran cantidad de investigaciones que buscan desarrollar diferentes métodos para que se produzca en los estudiantes un aprendizaje significativo en el tránsito de la aritmética al álgebra, la cual es una de las problemáticas que más ha interesado a los investigadores en los últimos años, y se sustenta por medio de los resultados obtenidos a través de diversas evaluaciones, a nivel nacional, pruebas SABER 3, 5 y 9, e internacional, como lo son las pruebas PISA y TIMSS**.** En las pruebas saber la evaluación involucra el saber hacer en contexto, con uso de conceptos y estructuras matemáticas (ICFES, 2015). Análogamente, las pruebas PISA se centran en la capacidad que debe tener el individuo para resolver problemas en contexto con base a los procesos de formular, emplear e interpretar, tan importantes para el desarrollo de dicha capacidad. Lo anterior denota la importancia que tiene la resolución de problemas para el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Por lo anterior se tendrá en cuenta la Resolución de Problemas como una de las aproximaciones al álgebra expuestas por Bednarz, Kieran y Lee (1996) que mencionan los posibles tratamientos o vías de aproximación al álgebra, tales como "la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la introducción de problemas funcionales." (p. 8).

La resolución de problemas como una alternativa para la aproximación al álgebra, permite diferenciar y caracterizar los problemas de tipo algebraico al transformar cantidades y encontrar relaciones entre las cantidades y de tipo aritmético al buscar cantidades conocidas y desconocidas, es decir, que existe un puente significativo, puesto que los problemas aritméticos abordados desde lo algebraico, podrían influenciar una iniciación al álgebra más flexible, puesto que al analizar un problema tanto desde la aritmética como el álgebra, se pueden identificar nuevas características en la estructura algebraica, y además le permiten al estudiante apropiarse de esos conocimientos, para así cambiar esa visión que limitaba la enseñanza del álgebra sólo al estudio de estructuras algebraicas, que marcó fuertemente el currículo en los años 60's con la influencia de la matemática moderna, y tuvo como consecuencia que en la mente del estudiante se concibiera la idea, que el aprendizaje del álgebra y las matemáticas en general se obtiene principalmente por la memorización de reglas y procedimientos, para cubrir la falta de comprensión.

Por lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo de la Educación Básica de una Institución particular de la ciudad de Santiago de Cali, a través de la resolución de problemas aritméticos?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Favorecer un acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Fundamentar la problemática, desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática, según los resultados de investigación en Educación Matemática.

- Articular en una propuesta de aula sobre la resolución de problemas aritméticos como alternativa para la introducción del álgebra escolar, los resultados del estudio didáctico, curricular y matemático sobre la problemática

- Caracterizar los avances y dificultades presentados por un grupo de estudiantes al acercarse al álgebra escolar a través del concepto de ecuación mediante el análisis de los resultados al implementar la estrategia de resolución de problemas aritméticos.

1.3 Justificación

En los últimos años se han realizado diversas investigaciones en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, que documentan las dificultades presentes en los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra y, así mismo, diferentes alternativas para introducir de manera significativa a los estudiantes en este campo (Gallardo y Rojano 1988; Kieran y Filloy, 1989; Kieran 1992; Bednarz, Kieran y Lee 1996, Socas 2011, Castro, 2012)**.**

A pesar de los diferentes aportes que se han hecho, se reconoce que muchas de esas dificultades registradas aún permanecen y siguen vigentes en las aulas de las instituciones escolares. Por esta razón, proyectos como éste aportan a la documentación existente y generan pautas específicas para el tratamiento de un tránsito significativo de la aritmética al álgebra.

En el presente trabajo de investigación, se pretende elaborar una propuesta de aula que permita que el estudiante se aproxime al álgebra, de tal forma que use sus conocimientos previos (pensamiento aritmético), y a partir de estos desarrolle un pensamiento algebraico por medio de las relaciones entre cantidades.

Por lo anterior, se presenta un gran interés en la resolución de problemas al ser un instrumento metodológico importante, que permite por medio de la reflexión y la ejemplificación de problemas de la vida cotidiana de los estudiantes, la construcción de los conceptos matemáticos y establecer relaciones entre ellos.

Análogamente, las ecuaciones matemáticas presentan un interés apremiante, debido a que en principio jugaron un papel importante en el nacimiento y desarrollo posterior del álgebra, son un foco prioritario en el estudio del álgebra en las aulas de clase, su campo de aplicación es inmenso y por eso hay gran número de investigadores dedicados a su estudio. Además, permiten expresar relaciones entre incógnitas, ayudan a desarrollar la capacidad creativa del intelecto y a resolver problemas de la vida cotidiana con mayor precisión.

Las ecuaciones son, como lo afirma Hurtado (2014) “un objeto matemático que permite la introducción al lenguaje algebraico, la modelación de un gran campo de fenómenos de la vida diaria y de la matemática misma y el desarrollo de pensamiento algebraico, siendo, de este modo, fundamental en los estudios algebraicos escolares.” (p.33).

Por ello, se dan esas dos escogencias la resolución de problemas y el concepto de ecuación al momento de abordar la introducción al álgebra, en el diseño e implementación de la propuesta de aula.

Se puede sustentar además la relevancia del presente trabajo, con la importancia que se le da a los procesos algebraicos y a la resolución de problemas en los documentos oficiales, como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2015), que determinan y orientan la educación, es decir, son mediadores en la construcción global del currículo institucional de Colombia.

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) el pensamiento métrico y el variacional se caracterizan principalmente por los cálculos numéricos y algebraicos. La modelación hace parte fundamental de dichos pensamientos, ya que la falta de cultivar el proceso de modelar mentalmente situaciones de la vida real, conlleva a que los estudiantes presenten dificultades al momento de resolver problemas. Por lo tanto, dicha actividad de modelación, promueve en los estudiantes que identifiquen distintos caminos de solución, ya sea mental o gráficamente, que logren estimar una solución a través de cálculos numéricos inicialmente y algebraicos posteriormente para el objetivo de este proyecto y ser capaces de identificar si es significativa dicha solución con respecto al problema planteado o por el contrario carece de sentido.

Es una realidad que durante varios años escolares predomina el pensamiento aritmético en los estudiantes, motivo suficiente para hacer uso de esos conocimientos previos al adquirir uno nuevo, pero la realidad es otra, debido a que muchos profesores empiezan desde cero para abordar la enseñanza del álgebra, tal vez porque en muchos casos es lo que conocen y saber hacer, pero como consecuencia se presentan tantas dificultades.

Por eso, se considera fundamental introducir el álgebra de tal manera que se propicie características del pensamiento aritmético, (informales e intuitivos) así como lo establecen los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006): “Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones” (p. 40). Entonces hay que seleccionar inicialmente problemas que faciliten su solución tanto aritmética como algebraicamente, para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas usando herramientas que conocen desde el pensamiento aritmético, para, posteriormente, hacer uso de problemas que generen en el estudiante la necesidad de resolverlos algebraicamente, es decir, hacer uso de ecuaciones no aritméticas, de tal forma que el estudiante entienda que las expresiones en ambos lados de la igualdad son de la misma naturaleza, y comiencen a operar con la incógnita no como un número específico sino como una entidad (Andrews y Sayers, 2012).

Se puede señalar, además, que el diseño de la propuesta de aula contribuye a cambiar la forma tradicional de enseñanza, (definición, ejemplo, ejercicio) que es una problemática expuesta por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que afirman: “Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos.” (p.80). Por ello, se pretende propiciar en los estudiantes una forma activa y autónoma de aprender, desarrollar estrategias para afrontar individual y colectivamente problemas en contexto, sin que se dejen de aprender nuevos conceptos, lo cual aporta significativamente a sustentar la importancia del presente trabajo de investigación.

En consecuencia, este proyecto pretende contribuir a docentes interesados en este campo y a la formación de los estudiantes objeto de estudio, con el fin de aportar estrategias que permitan una aproximación significativa al álgebra por medio de la resolución de problemas a través del concepto de ecuación, dado que, a partir de las limitaciones que tengan los estudiantes en ciertos conceptos, hay que crear recursos que contribuyan a la superación de los mismos.

Además, la propuesta que se presenta, podrá ser adaptada e implementada por docentes que busquen alternativas pertinentes para iniciar el álgebra en los estudiantes.

1.4 Antecedentes

En esta sección se mencionan algunas de las investigaciones que han realizado diferentes autores y que en los últimos años han contribuido al desarrollo de la problemática que se aborda en el presente trabajo de investigación. Dichas investigaciones son trabajos de grado, de pregrado y maestría, en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a nivel local y nacional, que tienen como objeto de estudio la introducción al álgebra, la resolución de problemas y el concepto de ecuación en diferentes niveles de escolaridad.

1.4.1 Investigaciones que abordan la problemática del paso de la aritmética al álgebra.

A nivel local se encontraron tres trabajos de pregrado de la Universidad del Valle, que sustentan la problemática mencionada anteriormente.

El trabajo de Moreno (2015), presenta una aproximación al pensamiento algebraico por medio de una secuencia de tareas matemáticas enfocadas en el Early Álgebra *(álgebra temprana),* que involucra ideas algebraicas como la variación, el cambio y generalización, a partir del trabajo con patrones numéricos para el grado tercero de la Educación Básica. El propósito de este trabajo era observar si los estudiantes alcanzan una aproximación al pensamiento algebraico y si son capaces de encontrar patrones y expresarlos de manera general.

Algunas de las conclusiones dan cuenta que la secuencia de tareas permite que los estudiantes analicen la forma en que cambia y aumenta una secuencia de números o figuras, y realicen conjeturas respecto a los términos siguientes de la secuencia en los patrones geométricos y numéricos. También permitió que los estudiantes le dieran sentido y significado a los contenidos aritméticos y algebraicos que intervienen en cada una de las tareas planteadas en las situaciones.

Un segundo trabajo que promueve el pensamiento algebraico es el de Hernández (2014), que tuvo como objetivo principal ayudar a los estudiantes de grado quinto de la educación básica primaria, a desarrollar el álgebra escolar por medio de una secuencia didáctica que involucra la generalización de patrones gráficos-icónicos. Lo anterior con el fin de aportar elementos conceptuales, metodológicos y propuestas de aula que muestran la posibilidad de desarrollar este razonamiento desde los primeros ciclos de escolaridad, para romper con la manera tradicional en que los sistemas simbólicos y algebraicos emergen en las aulas de clases, carentes de sentido para los estudiantes.

En algunas de las conclusiones se establece que los patrones gráficos - icónicos contribuyeron a que los estudiantes identificaran patrones y lograran abstraer variaciones de tipo cuantitativo que se presentaban en los gráficos. Además, el desarrollo de la secuencia didáctica a partir de situaciones problemas, que emergen en unos contextos asequibles al grado de escolaridad de los estudiantes, permitió incentivarlos en el desarrollo de un pensamiento matemático autónomo, que posibilita la aplicación de conocimientos fuera del ámbito escolar, particularmente en situaciones donde se relacionan cantidades.

Por último, se referencia el trabajo de Franco (2018) el cual va dirigido a estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, de la ciudad de Santiago de Cali, por medio de una propuesta de aula en relación con patrones numéricos de variación directamente proporcional, que consta de dos situaciones que integran aspectos de tipo curricular, didáctico, matemático, además de la propuesta curricular de los Estados Unidos conocida como Early Álgebra.

Los resultados arrojaron que los estudiantes identifican relaciones entre las cantidades involucradas, lo cual les lleva a reconocer la razón como una relación entre parejas de números y no como una fracción o resultado de una división. Además, el trabajo de la proporcionalidad directa a través de patrones numéricos permite a los estudiantes la construcción de generalidades, a partir del estudio de casos particulares. También se reconoce el poco desarrollo que tienen los estudiantes de su razonamiento, ya que se les dificulta en gran medida justificar las estrategias y procedimientos llevados a cabo en la resolución de un problema, o crear conjeturas de los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta los resultados de los tres trabajos de investigación mencionados, se observa que a nivel local el énfasis para abordar el tránsito de la aritmética al álgebra está puesto en la perspectiva de generalización de patrones, más aún, patrones numéricos, que promueven en los estudiantes un logro progresivo de ciertos niveles de abstracción, que analicen la forma en que varía o cambia una secuencia de números y realicen conjeturas para llegar a una generalidad, tan importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Además, es evidente la creciente importancia que se le ha venido dando a la |propuesta curricular de los Estados Unidos conocida como Early Álgebra que reconoce la importancia de introducir el álgebra en los primeros años de escolaridad para promover en los estudiantes un razonamiento algebraico que permita en los años de escolaridad posteriores comprender todas las potencialidades que puede brindar el álgebra para el desarrollo de las matemáticas.

1.4.2 Investigaciones que abordan la Resolución de Problemas

A continuación, se sintetizan dos trabajos de pregrado, uno a nivel local, del Instituto de Educación y Pedagogía, de la Universidad del Valle y otro a nivel nacional, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia que dan cuenta de la importancia de abordar el álgebra por medio de la resolución de problemas.

El trabajo realizado por Calderón y Dávalos (2011) presenta un enfoque dirigido a la resolución de problemas, que posibilita analizar los procedimientos que los estudiantes de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali de grado octavo, realizan al momento de resolver un problema, en este caso problemas algebraicos, con el fin de caracterizar los tipos de "heurísticas" que se presentan, e identificar las potencialidades que brinda la resolución de problemas en la construcción del pensamiento algebraico.

Para el análisis de las heurísticas se construyeron pruebas que contenían problemas variados, con el fin de tomar datos y analizarlos para así determinar las heurísticas que presentan los estudiantes al resolver problemas de ecuaciones de primer grado de una incógnita y determinar cuál es el rol que tienen las heurísticas en la resolución de los estudiantes. Las pruebas preliminares presentaron los errores y dificultades que tienen los estudiantes al resolver problemas relacionados con trabajo y mezcla, y una tendencia al resolver problemas de edades y variados; por tanto, para la prueba final solo se tuvieron en cuenta este tipo de problemas. Por otra parte, se identificó un mayor uso de conceptos aritméticos que algebraicos, debido a que la mayoría no llegaba a modelar el problema mediante una ecuación.

Entre las conclusiones se destaca que los estudiantes resolvieron los problemas algebraicos con métodos aritméticos, por lo cual se identificaron dificultades para poner problemas en ecuaciones, debido a que los estudiantes no reconocen las cantidades conocidas y desconocidas.

Ahora bien, el trabajo de Cartagena y Sossa (2016), tiene como propósito fortalecer el proceso de Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico a través de la implementación de una serie de tareas a 40 estudiantes de grado cuarto de la educación básica primaria de la Institución Educativa La Asunción, de Medellín. La fundamentación teórica se basó en las conceptualizaciones del Enfoque Ontosemiótico, el Razonamiento Algebraico y la Resolución de Problemas como proceso de pensamiento matemático. La investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo orientada por la metodología de Investigación Acción Educativa.

En la investigación se hace énfasis en la preocupación por los resultados de las pruebas Saber 2014 que evalúan en gran medida la resolución de problemas y el razonamiento, lo cual no se tiene muy en cuenta en las instituciones al momento de enseñar matemáticas, por esa razón tiene como consecuencia que los estudiantes presenten dificultades al establecer conjeturas frente a diversas situaciones matemáticas, de manera que es un obstáculo para que resuelvan problemas a partir de las experiencias, al establecer un modelo de solución que parta de hipótesis propias.

Algunas de las conclusiones evidencian que las implementaciones de las tareas propiciaron en los estudiantes avances significativos en cuanto al reconocimiento y establecimiento de relaciones de orden y equivalencia, a la identificación y análisis de patrones de cambio y secuencias en situaciones en contexto, para construir y expresar algebraicamente la generalización, con la variación como base fundamental para adquirir dichos conocimientos.

A modo de conclusión se puede prever que ninguno de los trabajos descritos anteriormente hace uso de la resolución de problemas para potencializar el tránsito de la aritmética al álgebra. La resolución de problemas se aborda con otro fin, el cual es desarrollar un razonamiento algebraico en los estudiantes que poco se logra debido a la falta de comprensión de las expresiones algebraicas por parte de los estudiantes al momento de dar la solución de los diferentes problemas presentados.

1.4.3 Investigaciones relacionadas con el concepto de ecuación de primer grado

Por esta parte, se analizaron dos trabajos de grado, y una tesis de maestría de la Universidad del Valle, relacionada con ecuaciones de primer grado, que son una herramienta fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico.

El trabajo de Benalcázar (2012), puesto en práctica en el aula de octavo grado, muestra una prueba diagnóstica relacionada con las ecuaciones lineales, más específicamente contenidos como: resolver ecuaciones, ecuaciones equivalentes y resolver problemas que se solucionen con ecuaciones lineales y relaciones entre magnitudes, de tal forma que se pueda identificar algunas dificultades que tienen los estudiantes de tipo procedimental y conceptual. Además, se diseña, pero no se desarrolla en el aula, una secuencia didáctica, que tiene como objetivo disminuir las dificultades con respecto a las ecuaciones de primer grado.

Las conclusiones dan cuenta del oportuno tratamiento que se hizo de las ecuaciones de primer grado, al permitir que el estudiante se concentre en el procedimiento y no en el resultado, que comprenda las relaciones existentes entre las operaciones y que pueda entender los diferentes significados que tiene el signo igual. Sin embargo, se detectaron en los estudiantes varias dificultades, como por ejemplo dificultades en relación con la producción de expresiones algebraicas equivalentes a una dada, no relacionaron el signo igual como relación de equivalencia. También se presentaron deficiencias para realizar buena coordinación entre el lenguaje natural y el simbólico, además había una permanencia en el pensamiento aritmético con la resolución de problemas, eludían la letra en términos que daba cuenta de una cantidad, y discriminaron las magnitudes que hacían parte de los problemas.

Por otra parte, el trabajo de Galeano y Váquiro (2015), tiene como alternativa desarrollar una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en estudiantes de grado octavo de Educación Básica, que vincula el modelo virtual de la balanza.

Algunas de las conclusiones evidencian que las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado se logran superar con el uso del modelo virtual de la balanza como, por ejemplo, el hecho de introducir a los estudiantes de manera más asequible en proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita por métodos formales, para dejar a un lado métodos intuitivos o por tanteo. Sin embargo, dicho modelo se queda corto al momento de hacer uso de ecuaciones con raíces negativas o con coeficientes racionales no enteros porque en sí, no permite abordarlas.

En segundo lugar, se pudo observar que en el proceso de solución de ecuaciones donde la incógnita se encuentra ubicada al lado derecho, los estudiantes fuerzan que esta quede finalmente en el lado izquierdo, lo cual produce en algunos casos procedimientos erróneos, que los lleva a generar la solución incorrecta de la ecuación.

En tercer lugar, se pudo observar que varias parejas de estudiantes cometen errores en la resolución de ecuaciones de primer grado, al no dejar el cero en ninguno de los miembros de la ecuación, lo cual permite afirmar que, en todos los estudiantes no hay un reconocimiento de que es posible tener una expresión igualada a cero.

Por último, se referencia la tesis de maestría de Hurtado (2014), que realiza una unidad didáctica con relación a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real para estudiantes de octavo grado de la Educación Básica, basada en el marco de la propuesta teórica y metodológica de los organizadores del currículo, el conocimiento didáctico y el análisis didáctico.

Este trabajo de investigación surge de varias inquietudes frente a la formación de profesores de matemáticas y las demandas formativas que se requieren para la planificación y diseño de actividades de aula en torno a un conocimiento matemático específico, en este caso, las ecuaciones de primer grado con una incógnita real.

En las conclusiones se logró identificar principalmente que la solución de problemas es el método por excelencia para la actividad algebraica, en particular, para la enseñanza de las ecuaciones. La perspectiva fenomenológica es de gran importancia al momento de describir, expresar y cuantificar las ecuaciones de primer grado, ejemplos de fenómenos pueden ser tales como fenómenos para determinar edades, precios, cantidades, de medidas, de variación y cambio en algún contexto particular. Además, se evidencia la necesidad de articular distintos sistemas de representación para el estudio de las ecuaciones de primer grado. El sistema simbólico-algebraico es potente para representarlas y tratarlas, su estudio no puede quedar reducido a las transformaciones posibles en dicho sistema. Además de esto, es necesario que el profesor reconozca la complejidad misma que se reviste en la traducción de un sistema de representación a otro, que van desde la designación misma de todas las cantidades involucradas en el problema hasta el planteamiento de la igualdad.

Las dificultades que se presentan bajo este tema se manifiestan por medio de errores en las producciones de los estudiantes, entre las cuales sobresalen: que no usen letras para designar las cantidades desconocidas, que establezcan mal las relaciones entre las cantidades expuestas en el enunciado del problema, que igualen dos expresiones que no representan una misma cantidad, que inviertan las operaciones al transponer alguna cantidad, que en el proceso de resolución de una ecuación operen expresiones que no son semejantes, y que reemplacen la solución hallada en algunas de las incógnitas y no en todas.

Por lo anterior, los anteriores trabajos dan cuenta de la importancia de las problemáticas y dificultades que presentan los estudiantes en el aula en el uso de las ecuaciones de primer grado, además están relacionados con el concepto desde una estructura algebraica, es decir, sus características de tipo simbólico. Por otra parte, el enfoque está en la ecuación, y poco se plantea la resolución de problemas como una alternativa para superar estas dificultades.

En conclusión, se considera que los antecedentes mencionados con relación al tránsito entre la aritmética y el álgebra, la resolución de problemas y el concepto de ecuación, aportan de manera significativa al desarrollo del presente trabajo, al hacer énfasis en primer lugar, a la propuesta de los Estados Unidos, conocida como *Early Álgebra,* en conjunto con la alternativa de generalización de patrones numéricos y geométricos, lo cual arroja resultados positivos, al permitir que los estudiantes alcancen cierto nivel de abstracción y generalidad a temprana edad. En segundo lugar, la Resolución de problemas asociado al razonamiento algebraico reporta grandes dificultades por parte de los estudiantes, que resuelven los problemas únicamente de forma aritmética, lo cual impide que se produzca un verdadero razonamiento algebraico al igual que las investigaciones realizadas con el uso del concepto de ecuación, que evidencian una cantidad significativa de dificultades en los estudiantes para comprender dicho concepto (errores de tipo procedimental y conceptual, permanencia en el pensamiento aritmético, pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico, entre otras).

Sin embargo, dichos antecedentes no potencializan la Resolución de Problemas para el Tránsito entre la aritmética al álgebra, al igual que el concepto de ecuación, simplemente se limitan a avanzar en un razonamiento algebraico que poco tienen los estudiantes. Por eso, se considera de gran importancia unir el concepto de ecuación con la resolución de problemas aritméticos para suavizar el tránsito entre la aritmética al álgebra.

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Capítulo 2. Marco de referencia conceptual

En esta sección se proponen las perspectivas didáctica, curricular y matemática para consolidar y fundamentar algunos referentes conceptuales que sustentan la problemática planteada, el diseño de la propuesta de aula y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en estudiantes de grado octavo de la Educación Básica Secundaria. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2015). En la tercera perspectiva se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

2.1 Perspectiva didáctica

En esta dimensión se exponen las dificultades que se presentan en el paso de la aritmética al álgebra que tiene como eje central la resolución de problemas como un proceso que permite un acercamiento y desarrollo del pensamiento algebraico. Por lo anterior es importante determinar qué tipo de problemas se abordarán en el diseño e implementación de la propuesta de aula, con el objetivo de proporcionar un acercamiento adecuado desde el pensamiento aritmético al algebraico.

2.1.1 Algunas dificultades en el paso de la Aritmética al Álgebra

En algunas investigaciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Gallardo y Rojano, 1988; Filloy y Kieran, 1989; Castro, 1994; Socas, 2011; Andrews y Sayers, 2012) se identifican ciertas dificultades generales en el paso de la aritmética al álgebra. Socas (2011) las categoriza en cinco grandes dificultades.

1. Complejidad de los objetos matemáticos.
2. Procesos de pensamiento matemático.
3. Procesos de enseñanza.
4. Procesos de desarrollo cognitivo.
5. Actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Estas dificultades están asociadas a los conceptos enfocados en las diversas formas de presentación del álgebra, como lo son la resolución de ecuaciones, la manipulación de expresiones algebraicas, la resolución de problemas y el tratamiento de conceptos fundamentales como el de variable. Dichas dificultades se manifiestan en los estudiantes por medio de errores que van desde los métodos de resolución de problemas, la permanencia en el pensamiento aritmético, la simplificación de expresiones, la manera de abordar el signo igual, la manera de concebir y tratar el signo de las variables (positivo y negativo), entre otros.

2.1.2 Algunas alternativas de introducción al álgebra en la escuela

Ahora bien, desde las mismas investigaciones se han presentado ciertos tratamientos para introducir el álgebra, como lo son, la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que rigen las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la resolución de ecuaciones apoyada en el uso de modelos concretos, la introducción de situaciones funcionales y de la modelización de fenómenos físicos y matemáticos (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

Particularmente, para efectos de este trabajo, interesa el tratamiento con base en la resolución de problemas, debido a su gran contribución en el desarrollo del conocimiento matemático.

2.1.3 Algunas características del pensamiento aritmético en la escuela

Para efectos de este trabajo se considera como punto de partida las consideraciones que realizan Verschaffel y De Corte (1996), al hacer una caracterización del pensamiento aritmético en la educación básica primaria de la siguiente manera:

- Conceptos numéricos y sentido de los números.
- El significado de las operaciones aritméticas.
- Control de hechos básicos de la aritmética.
- Lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas

Estos autores además incluyen implícitamente procesos de abstracción en la resolución de problemas, aunque las matemáticas de la década de los 90´ eran estrictas en la separación obligatoria que se hacía con respecto a la enseñanza de la aritmética solo para la educación básica primaria y la enseñanza de los procesos algebraicos limitados solo para la educación básica secundaria, lo cual se sigue evidenciando en la mayoría de los currículos a pesar de las diferentes investigaciones que se han desarrollado sobre el Early Álgebra o álgebra temprana.

Esa tradición curricular impulsó entonces investigaciones centradas en la búsqueda de *cortes* entre la aritmética y el álgebra (Filloy y Rojano, 1989) o nociones de obstáculos epistemológicos (Brouseau, 1997) que daban cuenta de las diferentes dificultades presentes en el aprendizaje del álgebra. Por lo anterior, muchos investigadores se dedicaron a analizar el pensamiento aritmético (Vershaffel y De Corte, 1996, Vergnaud, 1990) y el pensamiento algebraico (Filloy y Rojano, 1989, Kieran 2007, Kaput 2008, entre otros).

Por otra parte, en esta perspectiva curricular los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998) también caracterizan el pensamiento numérico afirmando que: “El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p. 26). De lo anterior, se puede decir que es de gran importancia que los estudiantes utilicen los números en contextos significativos, para el cual la resolución de problemas es un proceso que permite al estudiante relacionar operaciones y cantidades específicas como, por ejemplo, identificar que si una persona va a comprar en la tienda una bolsa de leche que cuesta $2.700 con un billete de $10.000 y le devuelven $5.000 se logre identificar que le devolvieron mal. Es por tal motivo que son necesarios los contextos y los problemas para el desarrollo de este pensamiento.

2.1.4 Algunas características del pensamiento algebraico en la escuela

Por otra parte, teniendo en cuenta las fronteras objeto de estudio de este trabajo entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, se parte de reconocer lo mencionado por Kaput (2000, 2008) que establece que el pensamiento algebraico debe considerar los siguientes aspectos:

- Realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera más formal y convencional, y
- Razonar con formas simbólicas, incluyendo la manipulación sintáctica guiada de estas formas simbólicas.

Es bajo estos aspectos que Kaput propone ciertas etapas, bajo una mirada holística en la formación del pensamiento algebraico, mientras que Radford (2010b) realiza una caracterización del pensamiento algebraico por medio de tres componentes estrechamente relacionadas:

- El sentido de indeterminancia
- La analiticidad
- La designación simbólica o expresión semiótica

Entendiéndose como *sentido de indeterminancia* objetos básicos como: incógnitas, variables, más específicamente ¨como algo opuesto a la determinancia numérica¨ (p. 39), *la analiticidad* como la forma de trabajar los objetos indeterminados y *la designación simbólica* como la forma específica de nombrar los objetos.

Por otro lado, Vergel y Rojas (2018) afirman que un componente del pensamiento algebraico es hacer uso del simbolismo como lo expresa Kieran (1989) “para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente” (p. 165). De lo anterior, es de gran importancia que en primer lugar los estudiantes establezcan las relaciones entre las cantidades, identifiquen estructuras, y resolver problemas.

Por último, la diferencia entre ambos pensamientos según Radford es que el pensamiento algebraico trata con cantidades desconocidas como si fueran conocidas, tratándolas de manera analítica, es decir, haciendo deducciones partiendo de premisas para conseguir un resultado, mientras que el pensamiento aritmético trabaja con cantidades conocidas.

2. 1.5 La resolución de problemas en el paso de la aritmética al álgebra

En Bednarz y Janvier (1996), se procura esclarecer las condiciones de la evolución del razonamiento algebraico en un contexto de resolución de problemas, al ser esta una de las perspectivas más significativas desde la historia y enseñanza del álgebra, es decir, solucionan problemas que se habían resuelto sin álgebra, para después resolver los mismos problemas usando métodos algebraicos. Además, cabe resaltar que, a pesar del contexto de resolución de problemas se desestimó la transición entre los dominios aritméticos y algebraicos. En consecuencia, el álgebra fue despojada de toda significación, al darle más importancia a la manipulación simbólica que al uso como herramienta poderosa para resolver problemas.

En la investigación, se considera importante y pertinente la resolución de problemas como una aproximación al álgebra para analizar los problemas planteados inicialmente a los estudiantes, de tal forma que se gradúe la complejidad de estos problemas y observar un progreso en el estudiante. Lo anterior, tiene en cuenta los procedimientos disponibles que poseen los estudiantes para manipular estos primeros problemas presentados en el álgebra para entender mejor el paso de la aritmética al álgebra utilizando los conocimientos previos.

Así mismo, hay que tener presente que al introducir el álgebra desde la perspectiva de resolución de problemas se debe considerar una construcción sobre una aritmética consistente, debido a que los estudiantes tienen un pasado aritmético de 6 años que los precede, por tanto fueron expuestos a un grupo de problemas, que tienen una característica y naturaleza propia del pensamiento aritmético, de modo que, hay que identificar si estos problemas pueden motivar a los estudiantes para la construcción del pensamiento algebraico.

De igual modo, los estudiantes desarrollan estrategias, modelos y convicciones para resolver problemas, los cuales se ven reflejados cuando ellos se enfrentan a problemas algebraicos. En efecto estas concepciones desarrolladas en la aritmética son el punto en el cual surgen nuevas soluciones, estas concepciones pueden ser consideradas como obstáculos o como principios en la construcción del conocimiento, debido a que por una parte los estudiantes tienen arraigado una forma o estrategia para resolver problemas, lo cual puede presentar una resistencia para una evolución del pensamiento aritmético al algebraico. Por otro lado, esas concepciones pueden ayudar al estudiante a identificar estrategias más efectivas, para reconstruir los conocimientos previos de tal forma que se propicie un acercamiento al pensamiento algebraico.

Así mismo, se deben determinar los criterios para entender el paso de la resolución de problemas aritméticos a los problemas algebraicos, para lo cual se tuvo en consideración los factores que podrían influir en el proceso de resolución como lo son el dominio numérico, la naturaleza de los datos conocidos o desconocidos y el contexto de la estructura de las relaciones involucradas. Por último, se tienen en cuenta los modelos y estrategias que desarrollan los estudiantes para resolver problemas con altos grados de complejidad.

El análisis de la complejidad del problema se determina gracias a la naturaleza del mismo, es decir, que a partir de las relaciones entre las cantidades se pueden encontrar el grado de dificultad para los estudiantes y la resolución posible de este. Los autores analizaron problemas de aritmética y de álgebra de varios grados con el objetivo de sistematizarlos. Por lo anterior se caracterizaron los problemas que se encuentran difíciles para los estudiantes, y se lograron identificar problemas relacionados con las cantidades presentadas y las relaciones entre estas.

Estas relaciones en la estructura del problema se pueden presentar de forma explícita, lo cual le permite al estudiante reconocer un camino de solución reconstruyendo el problema planteado, al operar cantidades conocidas, y también se da de forma implícita en el problema, y por tanto el estudiante tiene que reconocer las cantidades, asociarlas y encontrar una solución.

En efecto, se pueden analizar y detallar aspectos importantes relacionados con las dificultades para resolver problemas, entre ellos se tienen en cuenta el establecimiento de una relación entre los datos conocidos, si esta relación es implícita, se encontró que el estudiante organiza y opera cantidades conocidas y reconoce relaciones entre ellas con el fin de hallar las cantidades desconocidas. Además, se puede observar la dificultad que presentan los estudiantes al resolver problemas con dos tipos de relaciones (multiplicativa y aditiva), que constituye una compleja composición.

Por lo anterior, se identificaron diferencias entre problemas aritméticos y problemas algebraicos, de los cuales la naturaleza de las cantidades y sus relaciones permite evidenciar el primer paso de la aritmética al álgebra. En el caso de la aritmética los problemas planteados a los estudiantes son convexos, es decir, que pueden establecer relaciones fácilmente entre los datos conocidos. Por el contrario, en álgebra se plantean problemas desconvexos, en los cuales el estudiante no puede establecer una relación explícita entre las cantidades.

Por otra parte, en el análisis de los razonamientos de los estudiantes al resolver problemas algebraicos, se encontró que ellos lo reconstruyen y lo transforman en un problema convexo, es decir, que se organizan los datos conocidos y se encuentran vínculos para hallar los desconocidos.

Como resultado se identificaron cuatro categorías en los tipos de razonamiento aritmético. El primero de estos es *"Tomar el dato conocido en el problema como el punto de inicio"* (p.11), en el cual el estudiante identifica cantidades o datos conocidos y a partir de estos y en sus relaciones se encuentran datos desconocidos. El segundo es "*Crear un dato inicial al crear un número ficticio"* (p.11), el cual tiene un tipo de razonamiento por parte de los estudiantes que indica que sigue el orden establecido por el problema, al asignar un valor al dato desconocido, y realizar las respectivas operaciones y al final comparar los resultados, es decir, que el estudiante verifica si es correcto o no, al probar por medio de ensayo y error. La tercera es *"Repartir y entonces generar"* (p.12). Esta estrategia consiste en repartir el dato conocido, es decir, el total entre sus partes y con este generar un número que permita resolver el problema. La última categoría es *"tener en cuenta la estructura"* (p.12), en la cual el estudiante transforma el problema en uno totalmente distinto al propuesto, pero tiene en cuenta las relaciones entre las cantidades.

En consecuencia, se observan grandes diferencias en los razonamientos aritméticos por parte de los estudiantes al resolver problemas algebraicos antes de la introducción al álgebra, lo cual conlleva a que los estudiantes representen las cantidades y relaciones entre cantidades de distintas formas.

Por esta razón hay que tener presente las continuidades y discontinuidades para pasar a un modo algebraico para tratar problemas. Para ello se toma como ejemplo un problema en el cual el estudiante fija un número ficticio, sobre el cual realiza las transformaciones y operaciones con el fin de hallar una solución del problema, y encuentra características importantes en el desarrollo del pensamiento algebraico, sin embargo, ¿hasta qué punto el estudiante lo resuelve de forma algebraica? Para dar respuesta a lo anterior, en las investigaciones expuestas en ese documento, los autores realizaron entrevistas a los estudiantes con el fin de esclarecer este tipo de cuestiones. Las preguntas que se utilizaron en esta investigación permitían esclarecer si el estudiante identificaba las características de la resolución y si tenía solución un problema, con el fin de determinar las posibles dificultades que se pueden presentar en este tipo de resolución.

Estas entrevistas permiten reconocer cómo los estudiantes ven la solución del problema, algunos como antes se había mencionado buscan un dato como punto de partida y generan un número. Por otra parte, hay estudiantes que perciben la estructura del problema y determinan de entrada que con los datos que tienen, se pueden encontrar los que desconocen. Por último, pocos estudiantes dijeron que no se podía resolver el problema y buscan la forma de encontrar un número que les permita generar y encontrar las cantidades desconocidas.

Debido a esto, se identificaron obstáculos en la interpretación del razonamiento algebraico, ya que los estudiantes presentaron dificultades al usar una sola incógnita en la ecuación, además la sustitución para llegar a una sola incógnita es igual de difícil para los estudiantes, es decir, que a ellos se les hace complejo hallar cantidades desconocidas por medio de cantidades desconocidas, si en el contexto no hay una relación directa. Además, los estudiantes presentan gran dificultad al operar lo desconocido y manejar una representación simbólica presente en las ecuaciones.

En conclusión, dicha investigación permite entender el paso de los estudiantes para ir desde una solución aritmética a una algebraica. Para ello, se tiene presente la naturaleza en estos dos dominios y las diferencias entre el razonamiento aritmético y algebraico. Además, se pueden reconocer procedimientos aritméticos en la solución de los primeros problemas de tipo algebraico y en los que tienen un mayor grado de complejidad debido a la composición de varias relaciones. Este tipo de problemas rompen con procedimientos aritméticos a causa de su dificultad, y pueden ser utilizados para llegar al álgebra de tal forma que permita pensar en problemas que ayuden a la enseñanza y se gradúe el tipo de problema.

Para finalizar, los razonamientos aritméticos utilizados por los estudiantes en contraste con el razonamiento algebraico, se observa un cambio entre un modo de tratar a otro y la distancia entre ellos. Así mismo, los estudiantes que presentan un razonamiento algebraico reconocen las relaciones, la estructura del problema, las ecuaciones, y no presentan limitaciones a diferencia de los estudiantes que resuelven problemas por medio de una secuencia aritmética.

Ahora bien, las investigaciones realizadas en Rojano (1996), aportan apreciaciones importantes para este trabajo, debido a que se enfocan en el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático, desde lo informal “ensayo y error” a lo formal “fórmulas” en un contexto de resolución de problemas algebraicos al implementar hojas de cálculo.

En dichas investigaciones, se presentaron tres (3) etapas, en la primera se les planteó a los estudiantes la introducción de una regla en hoja de cálculo, en una segunda etapa se tenía como objetivo que los estudiantes identificaran equivalencias entre las reglas, y por último se plantearon problemas de palabras en una hoja de cálculo.

Los investigadores realizaron dos (2) pruebas y dos (2) entrevistas antes y después de las actividades en las tres etapas, en la última etapa la primera prueba consistió en proponer un problema a los estudiantes antes de la introducción de la hoja de cálculo, y la entrevista se enfocó en realizar preguntas relacionadas con las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Cabe resaltar que la población escogida para esta investigación fueron estudiantes con edades entre diez (10) y once (11) años, de México e Inglaterra con un total de 7 a 8 estudiantes por país.

En el análisis de las respuestas de los estudiantes, tanto en las pruebas como en la entrevista, se utilizaron unas categorías de solución algebraica y no algebraica, en la primera se tienen en cuenta las acciones que se realizan sobre datos desconocidos para llegar a la solución, y en la segunda se parte de datos conocidos para encontrar datos conocidos, como lo son la parte todo y el ensayo y error.

Ahora bien, el acercamiento realizado por los estudiantes a través de las hojas de cálculo, permitió una formalización de la incógnita, puesto que esta se puede observar como una celda, así mismo el software permitió un acercamiento a la manipulación de las fórmulas e identificar las relaciones entre las cantidades.

En consecuencia, al realizar la comparación del antes y el después de las pruebas se presentaron grandes progresos en los estudiantes debido a las concepciones formales que se pueden evidenciar en las resoluciones realizadas en las hojas de cálculo, pues lograron solucionar los problemas de palabras y llegaron a identificar una fórmula general a partir de lo particular.

Por otra parte, los estudiantes le dan significado y sentido al representar el problema en hojas de cálculo, puesto que este permite verificar si las relaciones planteadas son acordes con la situación problema, es decir, que el estudiante mismo evidencia el error y replantea la solución.

En conclusión, la investigación reafirma el uso de la resolución de problemas en el aula como una aproximación al álgebra de forma significativa, que debe ser tenida en cuenta en el currículo, además se realiza una reflexión acerca de la forma en la cual es enseñada el álgebra y cómo debería ser su evolución.

Por último, en Wheeler (1996) se retoman las investigaciones que se realizaron en Bednarz y Janvier (1996), y Rojano (1996), las cuales están enfocadas en el desarrollo del álgebra por medio de la resolución de problemas. Por otra parte, defiende las investigaciones dotandolas de gran importancia en el desarrollo de este campo debido a la falta de precisión en la definición de problema y el uso de herramientas para resolverlos.

Así mismo, las dos investigaciones anteriores están permeadas de historia en el desarrollo y evolución del álgebra, gracias a la resolución de problemas, por eso es considerada como una de las aproximaciones que proporcionan un mayor grado de significación. Además, enfatizan en las semejanzas y diferencias entre las resoluciones aritméticas y algebraicas al manejar tipos de problemas similares, con el objetivo de proponer una transición del pensamiento aritmético al algebraico, es decir, que el álgebra no se estudie desde cero, y por el contrario desde las bases aritméticas se construya y desarrolle el conocimiento algebraico.

Por consiguiente, el paso de la aritmética al álgebra, en un primer momento debe facilitar la transición sin eliminar obstáculos que se pueden presentar en ella. Puesto que es necesario que se produzcan rupturas con el fin de reconstruir los conocimientos previos y aprender algo nuevo.

Por su parte, Wheeler considera el aprendizaje como discontinuo y no lineal, al argumentar que no es aditivo, que constantemente avanza y retrocede, y es tan complejo que nunca termina, a diferencia de los aportes presentados en Bednarz y Janvier (1996) y Rojano (1996), donde se piensa el aprendizaje como algo evolutivo y sostenible.

Finalmente, las investigaciones mencionadas anteriormente son de gran importancia en el desarrollo y consolidación de la propuesta de aula, debido a que permiten la selección de problemas con características determinadas. Por otra parte, estas investigaciones proporcionan las categorías o tipos de razonamiento que presentan los estudiantes al resolver problemas algebraico-aritméticos, que son de gran importancia para el análisis del desarrollo de los problemas propuestos.

En particular, la investigación de Bednarz y Janvier (1996) proporcionan parte de la caracterización del tipo de problemas que se pretenden abordar en la propuesta de aula, es decir, permite observar la estructura de los problemas propuestos, con el objetivo de construir problemas con contextos reales. Además, la metodología cualitativa de entrevista semiestructurada utilizada permite analizar el tipo de pensamiento que desarrollan los estudiantes, al resolver problemas. (Ver en anexo 1 los problemas propuestos por Bednarz y Janvier (1996)).

2.2 Perspectiva Curricular

En esta sección se toma en consideración los lineamientos nacionales, que son elementos fundamentales al momento de elaborar una estructura curricular en el área de matemáticas dentro del Proyecto Educativo Institucional (PEI), de tal manera que se propicie un pensamiento matemático significativo en los estudiantes. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006), se promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones algebraicas, indispensables para la realización del presente trabajo, por lo cual se hará énfasis en estos dos modelos curriculares principalmente, mientras que los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015) se enuncian de manera crítica, a grandes rasgos y hacen una reflexión sobre los contenidos que en ellos se presentan, debido a que son una propuesta curricular que aún se encuentra en discusión a nivel nacional.

2.2.1 Sobre los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se propone una estructura que tiene como propósito fundamental desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes.

Para desarrollar dicho pensamiento se propone un currículo que no concibe los contenidos como eje central en la enseñanza. El currículo debe ser visto como un dispositivo que articula varios elementos: Procesos generales, Conocimientos Básicos y Contextos.

Los procesos generales se relacionan con el aprendizaje y tienen como ejes fundamentales, el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Para objeto de este trabajo se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, puesto que aparece como un proceso de pensamiento de gran importancia que debe tener todo sujeto que aprende matemáticas, debido a que favorece un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias. Es un contexto de gran importancia para fomentar el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para aportar significativamente al sentido y al uso de las matemáticas.

La resolución y planteamiento de problemas en las más recientes propuestas curriculares se plantea como un eje central en el currículo de matemáticas, es decir, es un objetivo principal en la enseñanza y por ende parte integradora de la actividad matemática, además promueve un contexto que permita que los conceptos y herramientas sean aprendidos. Su importancia se debe a la manera en cómo los estudiantes adquieren confianza, desarrollan una mente curiosa e insistente, aumentan su capacidad para comunicar y procesar el pensamiento con mayor fluidez en el uso de las matemáticas a medida que resuelven problemas.

Autores como George Polya y Allan Schoenfeld han contribuido en gran medida al reconocimiento de la resolución y planteamiento de problemas como base central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Polya (1981) definió la noción de problema como: “Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p.117).

Polya (1945) plantea la resolución de problemas basada en el método de los cuatro pasos:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecutar el plan
4. Examinar la solución

Estas cuestiones para Polya permiten que el estudiante a futuro pueda resolver cualquier tipo de problemas, pues cuando se hace la visión retrospectiva del problema, se puede utilizar la solución y el método de solución, como una nueva herramienta a la hora de enfrentar cualquier reto. Cabe resaltar que lo anterior se cuestiona mucho hoy en día, debido a que el método de los cuatro pasos deja por fuera muchas cuestiones.

Estos cuatro pasos planteados anteriormente, van a permitir al estudiante resolver un problema a partir de representaciones heurísticas, así como la visualización de los procedimientos, y realizar una aproximación a una generalidad del concepto de razón de acuerdo a la situación didáctica propuesta. Polya (1981) define el término de heurística como “el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas” (p.10).

Sin embargo, Schoenfeld considera insuficientes las estrategias planteadas por Polya para la resolución de problemas, manifiesta que son muy complejas y los estudiantes no las usan. Por lo anterior, Schoenfeld (1985), sostiene que, un estudiante no aprende a resolver problemas matemáticos, de manera mecánica y repetitiva, es decir, resolviendo cada vez más y más problemas y conociendo más y más estrategias, sino que es necesario que tenga un “*control”* en la actividad de la resolución de problemas. Si se toma una estrategia y se usa para intentar resolver un problema, hay que controlar lo que pasa e identificar cuando dicha estrategia ya no funciona como se esperaba.

Para Schoenfeld hay que tener en cuenta que en el proceso de resolver problemas actúan elementos tales como:

- **El dominio del conocimiento:** Son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante a la hora de resolver un problema, como por ejemplo las definiciones, intuiciones, concepciones, entre otros.

- **Estrategias heurísticas:** Son reglas o planteamientos generales que ayudan a desarrollar el problema, como, por ejemplo, probar por medio del ensayo y error, hacer uso de diagramas, tablas o listas ordenadas y demás.

- **Estrategias metacognitivas:** Hacen referencia al "*control*", específicamente a planificar, seleccionar metas, submetas y examinar constantemente el proceso que desarrolla para resolver el problema.

- **El sistema de creencias:** Son las ideas o percepciones que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas y su enseñanza. Además, determinan las técnicas y el esfuerzo que el estudiante emplea para llegar a su solución.

Investigaciones como las mencionadas anteriormente aportan de manera significativa al desarrollo de los contenidos matemáticos que deben ser aprendidos por los estudiantes. Para ello, es importante que los docentes conozcan lo que representa realmente un problema, sus características, etapas de resolución, al igual que las estrategias para su enseñanza, de manera que para el estudiante se vuelva un reto, que se interese realmente por llegar a su solución.

Ahora bien, los Conocimientos Básicos son los procesos que desarrollan el pensamiento matemático y tienen en cuenta los sistemas propios de las matemáticas. Cabe resaltar que el énfasis no está puesto en los contenidos, por ejemplo, enseñar ecuaciones, sino para qué enseñar ecuaciones, es decir, el énfasis está en preguntarse para qué enseñar y no en preguntarse qué enseñar. Los procesos específicos se agrupan en cinco tipos de pensamientos básicos: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional. Ahora bien, los sistemas se agrupan en: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos. De acuerdo a lo anterior, para efectos de este trabajo se centrará la mirada en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos respectivamente.

El estudio de los fenómenos que cambian es fundamental para estudiar el concepto de variación, lo cual permite superar la enseñanza de contenidos. Su conocimiento supone reconocer e inferir cómo se relacionan las cantidades en un problema particular. Más aún, permite calcular y examinar cómo cambian estas cantidades. Por ejemplo, cambios en el volumen de un cuerpo, cambios de la temperatura durante el día y la noche, cambios en un cuerpo en caída libre, entre otros.

En Vasco (2002) se afirma que:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p.111).

Cabe resaltar que el pensamiento variacional no se construye de forma aislada, por el contrario, requiere de los demás pensamientos para su desarrollo. El pensamiento espacial se hace necesario cuando en el problema planteado se establecen variables de tipo espaciales, y así mismo, cada uno de los pensamientos adquiere gran importancia para dar solución a un problema en particular.

Algunos de los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación se presentan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) de la siguiente manera:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.

Particularmente, la variación está asociada a los sistemas de representación, como lo son las representaciones tabulares, los enunciados verbales, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas y las gráficas de tipo cartesiano. Además, las situaciones problemas se pueden modelar mediante la variación y el cambio.

Es necesario entender que los Conocimientos Básicos les apuntan a no estudiar los objetos de forma aislada, que es a lo que a menudo se centra la enseñanza, por eso se da una importancia significativa a los sistemas. Un ejemplo de lo anterior es el sistema de los polinomios, que tiene su dominio en el conjunto de los números reales, cuenta con operaciones y relaciones. Al momento de igualar un polinomio con otro se presenta una relación entre polinomios llamada ecuación, lo mismo sucede si se aplica una relación de mayor que, menor que entre dos polinomios, llamada inecuación, sin embargo, en la escuela se limitan a enseñar las ecuaciones y las inecuaciones como conceptos aislados unos de otros, lo que conlleva a que los estudiantes no le encuentran mucho sentido al aprendizaje del álgebra.

Por último, los contextos tienen relación con los ambientes que rodean al estudiante, como las condiciones sociales, económicas, culturales, creencias, entre otras y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Estos contextos deben propiciar situaciones problemas, ya sea de las mismas matemáticas, de la vida diaria o de las otras ciencias. Para producto de este trabajo se enfocará la mirada preferiblemente en los contextos de la vida diaria.

La resolución de problemas por medio de contextos de la vida diaria, debe permitir a los estudiantes que exploren, planteen preguntas y reflexionen sobre los posibles modelos a utilizar para llegar a su solución. Así mismo, dichos problemas deben tener lugar durante el aprendizaje y no después de él, ya que propicia que los estudiantes descubran y reinventen las matemáticas de una forma más asequible para ellos, es decir, hacen uso de un lenguaje que sea conocido y puedan relacionarlo posteriormente con un lenguaje más simbólico.

De lo anterior, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aportan elementos claves para el desarrollo del presente trabajo, puesto que hacen énfasis en desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes e invitan a cuestionar el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

2.2.2 Sobre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), establecen que las competencias matemáticas no surgen de la nada, por el contrario, se necesitan ambientes de aprendizaje en los cuales se vean reflejadas situaciones problema significativas y comprensivas, puesto que permiten desarrollar competencias en los estudiantes con un mayor grado de complejidad. Por lo anterior, se consideran necesarias e importantes las situaciones problema en la aproximación al álgebra, puesto que se evidencian grandes dificultades en el paso de la aritmética al álgebra por parte de los estudiantes, es decir, que se presenta una ruptura entre estos dos dominios.

En consecuencia, para moderar algunas de las dificultades que se presentan en el paso de la aritmética al álgebra los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006) plantean cinco (5) procesos generales al igual que los lineamientos curriculares (MEN, 1998) que son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Los anteriores procesos permiten significar qué es ser matemáticamente competente. Por lo cual, se escogerá la resolución de problemas como un proceso central, que se considera necesario para superar los obstáculos que se presentan en la enseñanza y en el aprendizaje del álgebra con el objetivo de construir una propuesta didáctica, para la cual se tendrán en cuenta además la comunicación, la modelación y el razonamiento, como procesos complementarios en el paso de la aritmética al álgebra.

La resolución de problemas es un proceso expresado constantemente a lo largo de los Estándares Básicos de competencia, al ser un proceso que permite potenciar y dotar de gran significado, distintas áreas de las matemáticas, en este caso particular al álgebra y a la aritmética, debido a la gran variedad de resoluciones e interpretaciones que los estudiantes pueden plantear al resolver un problema, permite una interacción significativa entre el docente y los estudiantes.

Por otro lado, los Estándares Básicos de Competencia al igual que los Lineamientos Curriculares proponen cinco pensamientos, de los cuales se hará énfasis en el pensamiento variacional, definido por los estándares como:

> Lo tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66).

Así mismo, los estándares proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado octavo a noveno, relacionados con el proceso de resolución de problemas en un contexto real. La siguiente tabla explicita lo anterior:

Tabla 1 *Coherencia vertical en los Estándares básicos de competencias.*

De 8° a 9°: **PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS.** Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	
COHERENCIA VERTICAL	**De 10° a 11°:** Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. **De 6° a 7°:** Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. **De 4° a 5°:** Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales. **De 1° a 3°:** Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

Obtenida de la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Elaboración propia.

Tabla 2 *Coherencia horizontal en los Estándares básicos de competencias.*

COHERENCIA HORIZONTAL	
Pensamiento numérico y sistemas numéricos.	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).

Obtenida de la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Elaboración propia.

2.2.3 Sobre los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas

Los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2015) indican en un primer momento que están estructurados en concordancia con los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), posteriormente plantean una serie de actividades para los diferentes grados de escolaridad. Las siguientes figuras ejemplifican lo anterior:

Ejemplo

En clase de matemáticas el profesor pidió a los estudiantes analizar tres expresiones y hablar acerca de sus posibles relaciones. Las tres expresiones fueron:

- ❑ x - 1
- ❑ 4x+1
- ❑ 5

Al respecto Carlos y José escribieron:

Figura 1. Ejemplo de actividades propuestas en los DBA para grado8º. (Tomado de MEN, 2015)

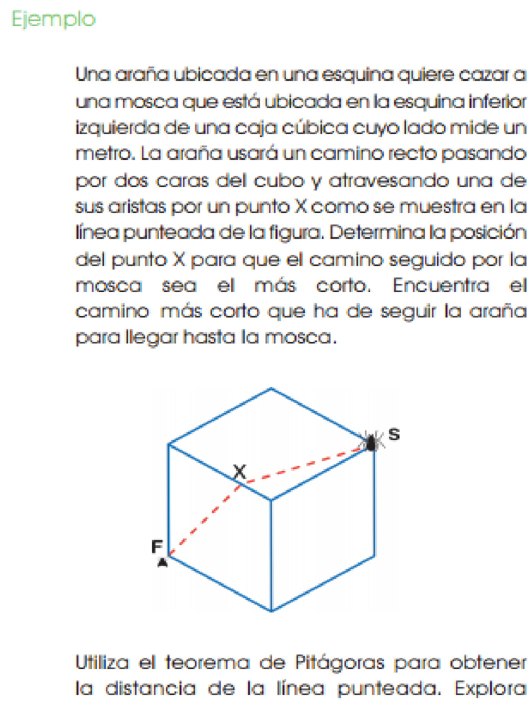
Ejemplo

Encuentra valores para b, c, d, e, etc., que satisfagan las ecuaciones propuestas y argumenta cómo cambian las respuestas obtenidas si se cambia el valor de a por 6 o por 8.

$$a = 4$$
$$a + 2b = 10$$
$$a + 2b + 3c = 28$$
$$a + 2b + 3c + 4d = 68$$
$$a + 2b + 3c + 4d + 5e = 93$$
$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f = 123$$
$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g = 200$$

Describe los procedimientos para obtener valores numéricos que satisfagan las ecuaciones segunda y tercera, si se desconoce el valor de a.

Figura 2. Ejemplo de actividades propuestas en los DBA para grado octavo. (Tomado de MEN, 2015)



Ejemplo

Una araña ubicada en una esquina quiere cazar a una mosca que está ubicada en la esquina inferior izquierda de una caja cúbica cuyo lado mide un metro. La araña usará un camino recto pasando por dos caras del cubo y atravesando una de sus aristas por un punto X como se muestra en la línea punteada de la figura. Determina la posición del punto X para que el camino seguido por la mosca sea el más corto. Encuentra el camino más corto que ha de seguir la araña para llegar hasta la mosca.

Utiliza el teorema de Pitágoras para obtener la distancia de la línea punteada. Explora

Figura 3. Ejemplo de actividades propuestas en los DBA para grado octavo. (Tomado de MEN, 2015)

Para el desarrollo de este trabajo más que seguir o tener en consideración las actividades propuestas en los DBA, lo que se pretende es tener una mirada crítica acerca de dicho documento propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, debido a que aún se encuentra en discusión al no ser aceptado por diferentes comunidades (docentes, establecimientos educativos, familias, entre otros) debido a su contenido mismo.

Particularmente se consideran los DBA como una contradicción y retroceso con respecto a lo que se había logrado hasta el momento con los Lineamientos y los Estándares. Las estrategias de aprendizaje que se conciben en los Derechos Básicos de Aprendizaje dejan de lado la resolución de problemas que es eje central en nuestro proyecto, (la mayoría de los enunciados se enmarcan en el contexto de las mismas matemáticas), además solo hace referencia a los procesos de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos y deja a un lado los otros procesos generales establecidos en los Lineamientos (Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., Pinzón, A.,2016).

Ahora bien, en comparación con los Estándares Básicos de Competencias, en los DBA no se evidencia la necesidad de formar ciudadanos matemáticamente competentes, tampoco se promueve la coherencia horizontal que promueven los Estándares, además se puede identificar la manera de avanzar apresurada en los contenidos, adelantándose a grados superiores sin tener una consideración o una preocupación porque los contenidos de dicho grado (por ejemplo los de grado octavo) sean entendidos y se pueda desarrollar un aprendizaje significativo para los estudiantes, sino que avanzan a contenidos de grado 9° (siguiendo el ejemplo) y pasan por alto estándares de gran importancia que permitirían a los estudiantes pasar de un conocimiento a otro de manera más propicia (Gómez et al., 2016).

Por lo anterior, y además, se considera que los DBA se limitan a concebir las matemáticas como un conjunto de temáticas, que se deben desarrollar en un periodo de tiempo, lo cual genera un retroceso en las expectativas de aprendizaje, ya que dejan a un lado las competencias o procesos generales y vuelven a tomar los contenidos como eje central sin aportar una inclusión significativa de los recursos tecnológicos y didácticos. Por el contrario, el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar pensamiento matemático en el estudiante.

2.3 Perspectiva matemática

Como se mencionó anteriormente en este trabajo, existen dificultades en la naturaleza misma del álgebra, es decir, problemas de concepciones y conceptualizaciones de conceptos algebraicos (polinomio, ecuación, variable, etc.), es decir, que las dificultades del paso de la aritmética al álgebra no tienen su origen solamente desde la perspectiva didáctica. Por lo anterior se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, las cuales son de vital importancia en la construcción de la propuesta didáctica, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el paso de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

2.3.1. Expresiones Algebraicas

Las variables están representadas por letras, para lo cual Zill y Dewar (2012) considera conveniente usar los símbolos *x* o *y* para expresar las variables, las cuales permiten hacer la construcción de expresiones algebraicas, por tanto, son consideradas como el resultado de operaciones (sumas, restas, multiplicaciones, etc.) de variables y números reales.

A continuación, se presentan algunas expresiones algebraicas:

- x - 3
- $\sqrt{x^2 - 9}$
- $\sqrt{\frac{25x+5}{5(5x+1)}}$

Las expresiones algebraicas en algunas ocasiones representan un número real dependiendo de los valores que pueden tomar ciertas variables, por lo tanto, en algunas ocasiones hay que delimitar los valores posibles que pueden tomar las variables (dominio *de las variables)* con el fin que la expresión algebraica representa siempre un número real. Por ejemplo, la expresión algebraica “ $\sqrt{x - 9}$ ” para este caso los valores posibles que puede tomar la variable *x* son: los números reales mayores o iguales a 9 representado matemáticamente como $\{x/x \geq 9\}$.

2.3.2. Polinomios

Los polinomios son una expresión algebraica, los cuales tienen una característica fundamental y es que su dominio son todos los reales, y además los valores para cada variable siempre representan números reales. Un polinomio de grado *n* en la variable *x* se representa de la siguiente forma:

$$a_n x^n + \ a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \ a_2 x^2 + \ a_1 x + a_0 \ \ con \ a_n \ \neq 0$$

donde *n* es un entero no negativo y $a_i = 0,1,2,3, \ldots, n$ son números reales.

A continuación, se presenta una figura que ejemplifica la representación anterior:

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

Figura 4. Ejemplo de polinomios. Tomado de (Zill y Dewar, 2012).

2.3.3. Ecuaciones

Una ecuación es una relación de equivalencia que establece la igualdad entre dos expresiones algebraicas, específicamente cuando en una de las igualdades aparece una variable se dice que está en una ecuación de una sola variable, así:

- $2x - 4 = 2$
- $7x + 3 = 5x - 2$
- $\sqrt{x - 1} = 4$

En particular una ecuación polinómica está definida como:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

En donde n es un entero no negativo y los coeficientes $a_i = 0,1,2,3,\ldots,n$ son números reales siendo $a_n \neq 0$, y las raíces de la ecuación polinómica son los valores de x para los cuales se cumple la igualdad, es decir, $0 = 0$. Particularmente en definida la ecuación lineal o de grado 1 a la ecuación cuyo exponente de la variable es $n = 1$, siendo la ecuación general $a_1x + a_0 = 0$, de la cual despejando la variable x se tiene $x = \frac{-a_0}{a_1}$.

En conclusión, para el diseño de la propuesta de aula se resaltan y sintetizan aspectos relevantes desde las tres perspectivas planteadas anteriormente puesto que permite articular y relacionar cada una de estas perspectivas para la consolidación de la propuesta basada en la resolución de problemas. La figura 5 evidencia lo anterior así:

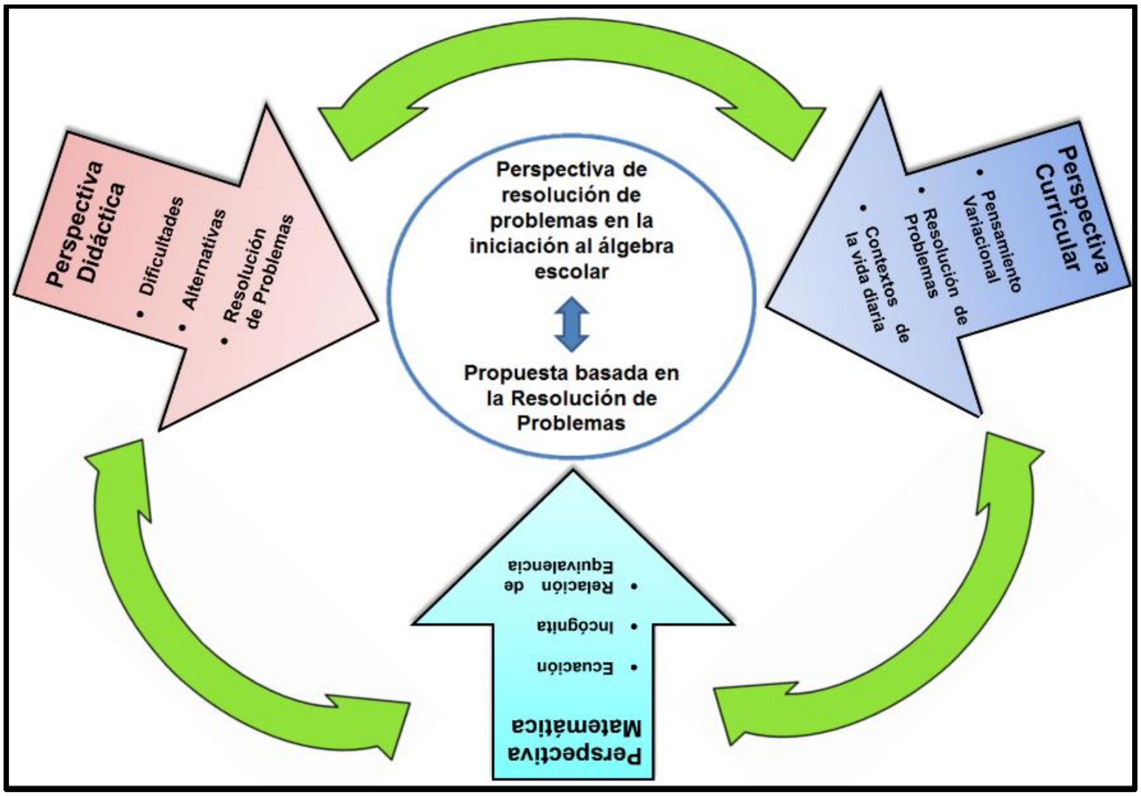


Figura 5. Diagrama de la relación entre las perspectivas didáctica, matemática y curricular.

En el diagrama anterior se presentan las relaciones de lo realizado en la propuesta de aula para abordar la problemática de la resolución de problemas en la iniciación del álgebra escolar, desde las perspectivas, didáctica, matemática y curricular. Además, como se puede observar las anteriores perspectivas tienen relaciones entre sí, resaltando lo más relevante de cada una de estas con el fin de consolidar una propuesta de aula basada en resolución de problemas y poder cumplir con los objetivos propuestos en este trabajo.

Por lo anterior, la perspectiva didáctica aporta para la construcción de la propuesta de aula desde las investigaciones realizadas por Bednarz y Janvier (1996), las cuales identifican y categorizan los tipos de razonamiento aritmético de los estudiantes. Además, realizan categorizaciones de problemas de acuerdo a las relaciones entre las cantidades, presentándolas desde las más simples a las más complejas, siendo de gran importancia para la elaboración de los problemas y la estructura de la propuesta de aula.

Asimismo, la perspectiva curricular aporta para la construcción dela propuesta un proceso como es el de la resolución de problemas con el fin de que el paso de la aritmética al álgebra sea significativo para los estudiantes des de contextos de la vida diaria, además, los estándares y lineamientos son la guía para ubicar el grado pertinente para implementar la propuesta de aula.

Por último, la perspectiva matemática define los conceptos que se pretenden desarrollar en la propuesta de aula con el propósito de que sean significativos para los estudiantes.

CAPÍTULO III

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN EL TRÁNSITO DEL PENSAMIENTO ARITMÉTICO AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Capítulo 3. La Resolución de Problemas Aritméticos en el tránsito del Pensamiento Aritmético al Pensamiento Algebraico

En esta sección se presentan los aspectos que corresponden al diseño e implementación de la propuesta de aula, para lo cual se hace una descripción de los elementos que la conforman, la organización de las situaciones de la propuesta que involucra conceptos matemáticos y las expectativas de desempeño. En adición, se presentan los resultados y análisis de los resultados de los registros de los estudiantes que participaron en la investigación.

3.1 Sobre el diseño experimental

Para el diseño, puesta en acto y análisis de las situaciones, se toman en consideración los referentes conceptuales mencionados a lo largo de este trabajo, tales como Bednarz, Kieran y Lee (1996), centrando la atención en Bednarz y Janvier (1996), Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), Zill y Dewar (2012).

3.1.1 Sobre la Propuesta de Aula

La propuesta de aula consta de dos situaciones en contexto real, la primera situación está relacionada con el día de Halloween y la segunda situación está relacionada con la Navidad. Dicha propuesta está dirigida a estudiantes de grado 8° de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de la ciudad de Santiago de Cali. Las situaciones se diseñaron a partir del marco conceptual presentado en el segundo capítulo, que recalca la importancia de la resolución de problemas, como una alternativa para favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra.

La tabla 3 contiene la estructura de la propuesta de aula, es decir, el número de situaciones que la componen, y a partir de cada situación se definen la cantidad de problemas que se realizan y y las respectivas preguntas que tiene cada uno. La tabla se realizó con el fin de estructurar y organizar la propuesta de aula según la complejidad de los problemas de cada situación.

Tabla 3 *Situaciones, Problemas y Tareas de la Propuesta de aula*

Situaciones	Problemas	Tareas
Situación 1: Fiesta de los niños y problemas aritméticos	**Problema 1**: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas. **Problema 2:** Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas. **Problema 3:** Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas. **Problema 4:** Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.	**Tarea 1:** No. de preguntas: 7 **Tarea 2:** No. de preguntas: 7 **Tarea 3:** No.de preguntas: 10 **Tarea 4:** No. de preguntas: 6
Situación 2: Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos	**Problema 1:** Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas. **Problema 2:** Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas **Problema 3:** Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones. **Problema 4:** Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas **Problema 5:** Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.	**Tarea 1:** No. de preguntas: 5 **Tarea 2:** No. de preguntas: 5 **Tarea 3:** No. de preguntas: 5

Elaboración propia.

La tabla 4, permite evidenciar los contenidos matemáticos y los desempeños que se esperan desarrollar en la propuesta de aula, permitiendo una estructuración apropiada para la organización de la misma.

Tabla 4 *Contenidos matemáticos y desempeños de las Situaciones de la Propuesta de aula*

Situaciones	Contenidos Matemáticos	Desempeños
Situación 1: Fiesta de los niños y problemas aritméticos	• Enteros positivos • Expresiones algebraicas • Ecuaciones de primer grado con una incógnita	• Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de problemas. • Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema. • Identificar en situaciones problema cantidades conocidas y desconocidas. • identificar las relaciones que se presentan entre las cantidades en una situación problema. • Establecer relaciones de equivalencia a partir de situaciones problemas. • Representar la informa que brindan situaciones problemas por medio de expresiones algebraicas (ecuación).
Situación 2: Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos	• Racionales positivos • Expresiones algebraicas • Ecuaciones de primer grado con una incógnita	• Identificar la posibilidad de crear varias expresiones algebraicas equivalentes que representan una situación problema • Construir a partir de una situación problema, una expresión algebraica que evidencie cada una de las relaciones inmersas • Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema.

Elaboración propia

La tabla 5 permite describir como está estructurado cada uno de los problemas desde el dominio numérico, la naturaleza de las cantidades, las relaciones entre las cantidades y las relaciones implícitas.

Tabla 5 *Análisis de cada problema de la propuesta de aula*

Situaciones	Problemas	Análisis
Situación 1	Pb1 / Pb2	**Dominio Numérico**: Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de estudiantes que asistieron / Total de dulces recogidos **Datos desconocidos:** Estudiantes que asistieron / dulces recogidos en los grados 3°,4°,5°. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones aditivas $(16+,10+)/(80+,50+)$ **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Pb3	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Gasto total de la compra de Pelucas Máscaras y Maquillaje. **Datos desconocidos:** Costo de las Pelucas, Máscaras y Maquillaje. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Pb4	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de dulces entre los tres estudiantes. **Datos desconocidos:** Dulces de Carolina, Karen y Sebastián. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea de dos relaciones $(3X, 28+)$ **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
Situación 2	Pb1	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de tazas de masa de buñuelos. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de agua, de queso costeño y de maizena. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones aditivas $(1+,2+)$ **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Pb2 / Pb4	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números racionales positivos. **Datos conocidos:** Total de tazas de arequipe / Total de tazas de dulce de leche cortada. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche / Cantidad de tazas de azúcar, de zumo de limón y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas. **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Pb3	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de tazas de arroz con leche. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de arroz, de azúcar y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea con dos relaciones $(2+,2X)$ **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Pb5	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números racionales positivos. **Datos conocidos:** Total de tazas de natilla. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de fécula de maíz, de azúcar y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea con dos relaciones $(2X, \frac{5}{2}+)$ **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.

Fuente. Elaboración propia

3.1.2 Propósito de la Propuesta de aula

El propósito de la propuesta de aula es acercar a los estudiantes de grado octavo de una forma significativa al álgebra por medio de la resolución de problemas aritméticos, para el cual se establecen los propósitos de cada situación así:

La situación 1 pretende que los estudiantes comprendan el enunciado de un problema, por medio de una serie de preguntas orientadoras que permitan una interpretación acertada, y logren resolverlo. Asimismo, se tendrán en cuenta los pasos para resolver un problema propuestos por Polya (1845) y las heurísticas que se pueden presentar al momento de resolver un problema como el ensayo y error, realizar diagramas o tablas, etc. (Schoenfeld, 1985).

En la situación 2 se espera que el estudiante logre resolver el problema, de forma directa, es decir, con pocas preguntas orientadoras en los tres primeros problemas y que solucione los problemas 4 y 5 sin ningún tipo de ayuda u orientación. Lo anterior, con el objetivo de observar el progreso del estudiante al resolver problemas, en el sentido que él logre ver la estructura algebraica y la manipule para resolver el problema. Por otra parte, el dominio numérico son los racionales positivos en contraste con la situación 1 que se trabajan los enteros positivos. Además, se pretende que los estudiantes logren identificar expresiones algebraicas que representen las relaciones expuestas en cada problema y logren resolverlo a partir de esta expresión.

3.1.3 La propuesta de aula

Situación 1. Fiesta de los niños y problemas aritméticos

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños y niñas. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado 3°, 4° y 5° de primaria disfrazados a pedir dulces por los salones.

Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentan.

Problema 1: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Tarea 1

1. Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.

2. De acuerdo con el problema,

- **a.** Indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
- **b.** Explica tu respuesta.

3. Sí Mariana, estudiante de grado 4° afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5° es de 20 estudiantes,

- **a.** Escribe la validez de esta afirmación.
- **b.** Explica tu respuesta.

4. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.

5.
- **a.** Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 3°.
- **b.** Escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 5°.

6.
- **a.** Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 4°.
- **b.** Escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4°.

7. Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3°, 4° y 5°.

Problema 2: Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° en compañía de la profesora Mayerleny recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Tarea 2

1. Daniel estudiante de grado 4° afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.

   a. Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
   b. Explica tu respuesta.

2. Según el problema, los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo a la afirmación de Daniel, los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.

3. Escribe cómo se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo.

4. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°.

5. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°.

6. Si x representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de dulces de grado 4º	x
Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5º	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

7. Ahora sí, encuentra la cantidad de dulces recogió cada grado.

Problema 3: Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

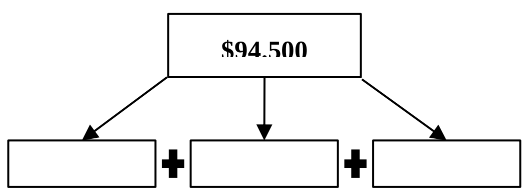
La profesora Mayerleny ayudó a disfrazar a los niños de grado 3º, para lo cual los dividió en tres grupos, los que querían usar pelucas, los que querían usar máscaras y los que querían pintarse la cara con maquillaje. La profesora en total gastó $94.500. Si las máscaras cuestan el doble que el maquillaje y las pelucas cuestan el triple de las máscaras. ¿Cuánto tiene que pagar cada grupo?

Tarea 3

1. **a.** Escribe los datos conocidos del problema.
   b. Escribe los datos desconocidos del problema.

2. Juan estudiante de grado 4° afirma que los $94.500 corresponden a sumar la cantidad de dinero que se gasta en máscaras, maquillaje y pelucas.

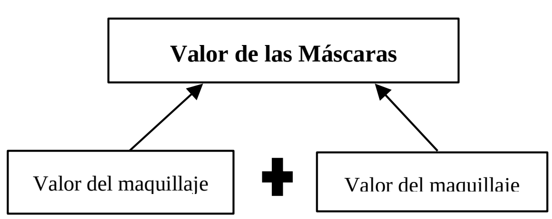
   a. Escribe si Juan tiene la razón.
   b. Teniendo en cuenta la respuesta anterior, completa la siguiente figura con las cantidades que hacen falta.



3. Marca con una (*x*) el valor que debe conocer la profesora Mayerleny para obtener la cantidad total de dinero que los estudiantes que se disfrazan con máscaras deben pagar.

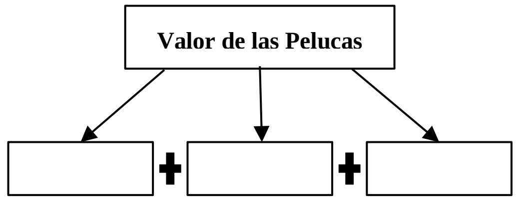
   a. El valor que deben pagar los estudiantes que se maquillaron ( )
   b. El valor que deben pagar los estudiantes que se colocaron pelucas ( )

4. Indica si la siguiente figura que hace Juan para comprender las relaciones entre las cantidades desconocidas, es decir, el valor de las máscaras y el valor del maquillaje es correcto.



a. Escribe si el gráfico anterior representa el valor de las máscaras.
b. Justifica tu respuesta.

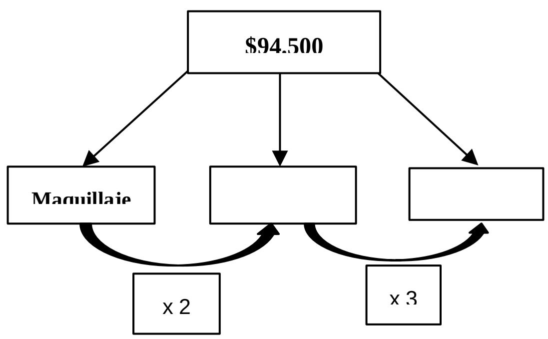
5. Completa la siguiente figura teniendo en cuenta las relaciones involucradas entre las cantidades desconocidas, es decir, explica la relación para encontrar el valor de las pelucas.



6. Teniendo en cuenta las figuras anteriores que representan las relaciones entre las cantidades,

a. Establece cuántos maquillajes representan fel gasto total de la profesora Mayerleny.
b. Escribe cuánto cuesta un solo maquillaje.

7. Completa las relaciones entre cantidades que se presentan en la siguiente figura, teniendo en cuenta el problema anterior.



8. Si (x) representa el valor del maquillaje, encuentra una expresión que permita resolver el problema.

9. Cristián afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = x + (2x) + 3(2x), siendo x el valor del maquillaje"* y Gabriela afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = 2x + 2x + 2(3x), siendo x el valor del maquillaje"*

a. Escribe la validez de cada afirmación.
b. Justifica tu respuesta.
c. Compara la expresión que encontraste en la pregunta No. 8 con la expresión dada por Cristián.

10. Si el valor del maquillaje es de $ 13.500, escribe cuánto habría invertido la profesora Mayerleny.

Problema 4: Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

La profesora Mayerleny accidentalmente juntó los dulces de Carolina, Karen y Sebastián, estudiantes de grado 4º. Ayúdala a saber cuántos dulces tenía cada uno, sabiendo que entre los tres estudiantes hay 147 dulces. Si Carolina tiene tres veces tantos dulces como Sebastián y Karen tiene 28 dulces más que Carolina. ¿Cuántos dulces tiene cada estudiante?

Tarea 4

1. Escribe los datos conocidos y desconocidos del problema.

2. Escribe de qué cantidad de dulces (de Karen o de Sebastián) depende la cantidad de dulces de Carolina.

3. Según las relaciones entre las cantidades del problema, completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de dulces de Sebastián	
Cantidad de dulces de Carolina	$3x$
Cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	

4. Si los dulces de Sebastián son 17, indica cuántos tiene

   a Carolina
   a Karen

5. Comprueba la afirmación de Carmen si se sabe que Sebastián tiene 17 dulces ($x=17$). “$147 = x + 3x + (3x + 28)$”
6. Escribe la cantidad de dulces que tiene cada estudiante.

Situación 2. Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos

La navidad es una fecha en la que tiene lugar comidas especiales que se realizan para estar en familia y compartir momentos agradables. La institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio propuso recetas para la elaboración de un plato navideño que consta de buñuelos, arroz con leche, arequipe, leche cortada y natilla. Los estudiantes de la Institución y las familias ayudaron a preparar cada una de las recetas que hacen parte del plato navideño y pasar un momento agradable en familia.

A continuación, se presentan las recetas que realizaron algunas familias.

Problema 1: Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

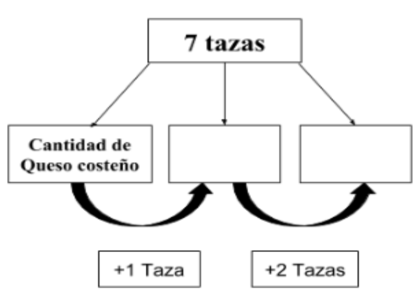
La abuela Ana quiere preparar 7 tazas de masa de buñuelos, para la cual se necesita una cierta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena. Si la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad de agua, ¿qué cantidad se necesita de cada ingrediente para que tú y tu familia puedan hacer esta receta en casa?

Tarea 1

1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina cuales son conocidas o desconocidas.

2. Escribe las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas que se presentan en el problema.

3. Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



4. Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, escribe la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena que se necesitan para preparar 7 tazas de masa de buñuelos.

5. Si Anderson necesita preparar 14 tazas de masa de buñuelos, ¿cuánta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena necesita?

6. Si Marcos tiene 3 tazas de queso costeño para preparar una cierta cantidad de masa de buñuelos, ¿qué cantidad de agua y de maizena necesita? ¿cuántas tazas de masa de buñuelos se obtienen?

Problema 2: Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

Daniela en compañía de su madre desean preparar una receta de arequipe, ayúdales a encontrar las cantidades exactas de cada uno de los ingredientes de acuerdo a la información que se presenta a continuación:

Para preparar 4 tazas de arequipe se necesita una cierta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche. Si se sabe que la cantidad de tazas de azúcar es 3 veces la cantidad de tazas de bicarbonato y la cantidad de tazas de leche es 4 veces la cantidad de azúcar, ¿qué cantidad de tazas se necesita de cada ingrediente para que Daniela y su madre puedan preparar la receta?

Tarea 2

1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina si son conocidas o desconocidas.

2. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de tazas de bicarbonato	x
Cantidad de tazas de azúcar	
Cantidad de tazas de leche	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4	

3. Escribe la cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche que se necesitan para preparar 4 tazas de arequipe.

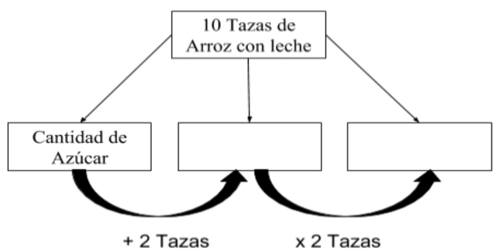
4. Si Marcela quiere preparar 16 tazas de arequipe, ¿Cuánta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche necesita?

Problema 3: Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Una familia desea preparar 10 tazas de arroz con leche, para lo cual se necesita una cierta cantidad de arroz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz. ¿Qué cantidad de arroz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

Tarea 3

1. Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



2. Gustavo afirma que la preparación de 10 tazas de arroz con leche requiere más cantidad de tazas de azúcar que de leche.

   a. Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
   b. Justifica tu respuesta.

3. Gustavo además afirma que la expresión que le permite encontrar las cantidades en tazas de cada ingrediente es "$10 = x + (x + 2) + 2 * (x + 2)$"siendo x la cantidad de tazas de azúcar.

   a. Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
   b. Justifica tu respuesta.
4. Escribe la cantidad de tazas de arroz, de azúcar y de leche que se requiere para preparar 10 tazas de arroz con leche.

5. Si Luisa utiliza 1 taza de azúcar, escribe cuántas tazas de arroz con leche preparó.

Problema 4: Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas.

Doña Marlene quiere preparar 11 tazas de dulce de leche cortada, para lo cual se necesita una cierta cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche. Si se sabe que la cantidad de azúcar es 5 veces la cantidad de zumo de limón y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche se necesita para preparar la receta?

Problema 5: Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Mariana desea preparar 5 tazas de natilla, para lo cual se necesita una cierta cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de fécula de maíz es 2 veces la cantidad de azúcar y la cantidad de leche tiene 5/2 de taza más que la cantidad de fécula de maíz. ¿Qué cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

3.2 Sobre la implementación

En esta sección se precisan algunos detalles de la población, la metodología de implementación, los resultados y análisis de los resultados basados en las respuestas generadas por los estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa. Cabe resaltar que los resultados y análisis de los resultados se obtienen en un primer momento con la organización de los datos obtenidos en las respuestas de los estudiantes por medio de tablas de acuerdo con la situación, la pregunta y la tipificación de la respuesta y justificación, además de la frecuencia absoluta y relativa de las mismas.

3.2.1 La población

La propuesta de aula se desarrolló en la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio, sector oficial, de la ciudad de Santiago de Cali.

La Institución Educativa es de calendario A, está ubicada en una zona urbana, más específicamente comuna 4 en el nororiente de la ciudad, con jornada completa en mañana y tarde, además es de género mixto, con carácter académico, técnico y con un modelo de educación tradicional.

La Institución la conforman tres sedes, Veinte de Julio (sede principal), Ignacio Rengifo y Cristina Serrano respectivamente.

El desarrollo de la propuesta de aula se llevó a cabo en la sede Cristina Serrano en la jornada de la mañana, en el grado 8°, conformado por un grupo de 35 estudiantes con edades comprendidas entre los 13 y 16 años de edad, la mayoría de los estudiantes asisten de manera regular a las clases, sin embargo, con el objetivo de llevar una constancia y evolución en la propuesta de aula, se seleccionaron 20 de los 35 estudiantes, los cuales estuvieron constantes en cada una de las situaciones. Cabe resaltar, que ninguno de los estudiantes tiene conocimientos previos formales en álgebra.

En adición, la selección de los sujetos fue intencional, considerando el nivel educativo que cursan los estudiantes y la disponibilidad de la institución para colaborar en esta investigación.

3.2.2 Metodología de implementación

La propuesta de aula se desarrolló en nueve sesiones, cuatro con una duración de dos horas y cinco con una duración de una hora. En la última sesión, el día viernes 22 de febrero de 2019 en una hora de clase equivalente a 55 minutos, se realizó una plenaria con el propósito de generar una discusión de las situaciones de tal manera que los estudiantes expusieran y opinaran acerca de las diferentes estrategias utilizadas al momento de responder las preguntas que conducían a la resolución de los problemas, posibilitando una retroalimentación conjunta de la propuesta presentada a los estudiantes.

La situación 1 se compone de cuatro problemas, el problema 1 y 2 consta de siete preguntas cada uno, las cuales se aplicaron en dos sesiones, el problema 1 el día jueves 22 de noviembre de 2018 y el problema 2 el día viernes 23 de noviembre de 2018, cada sesión con una duración de dos horas de clase equivalentes a 110 minutos, el tercer problema consta de diez preguntas, aplicadas en dos sesiones los días 23 y 27 de noviembre de 2018, cada sesión con una hora de clase equivalente a 55 minutos, por último, el problema 4 consta de seis preguntas, aplicadas en una sesión el día lunes 3 de diciembre de 2018, en dos horas de clase equivalentes a 110 minutos. El tiempo total de implementación para la situación 1 es de 440 minutos.

La situación 2 se compone de cinco problemas, el problema 1 consta de seis preguntas, aplicadas en una sesión el día lunes 11 de febrero de 2019, en una hora de clase equivalente a 55 minutos, los problemas 2 y 3 constan de cuatro y cinco preguntas cada uno, las cuales se aplicaron en una sesión, el día martes 12 de febrero de 2019, en dos horas de clase equivalentes a 110 minutos, los problemas 4 y 5 no tienen preguntas y se aplicaron en una sesión de clase el día viernes 15 de febrero de 2019 en una hora de clase equivalente a 55 minutos. El tiempo total de implementación para la situación 2 es de 220 minutos. En la última sesión, como se dijo anteriormente, se realizó una plenaria que tuvo como propósito hacer una retroalimentación conjunta de la propuesta de aula, por lo que se hizo una discusión completa tanto del problema 1 de la situación 1 como del problema 5 de la situación 2, de tal manera que el docente fuera un guía o mediador en el proceso de discusión y solución de los problemas por parte de los estudiantes, actividad que fue muy enriquecedora para los investigadores además de la importancia de que los estudiantes construyan significativamente el álgebra por medio de la resolución de problemas.

Cabe resaltar que la implementación de la propuesta de aula se desarrolló teniendo en cuenta los tiempos y el grado de escolaridad apropiado con el fin de seguir con la continuidad de las clases de acuerdo a lo que plantean los documentos nacionales y el plan de área de la institución, además se realizó con la profesora encargada del área de matemáticas una revisión previa de la propuesta de aula antes de ser presentada a los estudiantes.

En el momento de la implementación, se entrega a cada estudiante una copia de la situación con el problema a desarrollar y una hoja en blanco para las respuestas, se hace la respectiva lectura en voz alta, además se establece que el desarrollo de cada problema debe ser de manera individual, y ante cualquier duda pueden recurrir a los investigadores para tratar de dar solución a la misma. Al finalizar cada problema se recogen las copias y la hoja de respuesta.

3.2.3 Resultados y análisis de los resultados

A continuación, se presentan los registros y sistematización de las respuestas dadas por los estudiantes de grado 8°, de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de la ciudad de Santiago de Cali, a las preguntas de la propuesta de aula constituida por dos situaciones (S1, S2) cada una con cuatro y cinco problemas respectivamente (Pb1, Pb2, Pb3, Pb4) (Pb1, Pb2, Pb3, Pb4, Pb5).

Los resultados obtenidos en la implementación se organizan en tablas, a partir de la tipificación de las respuestas y justificaciones expuestas en los registros, el número y porcentaje de estudiantes que corresponden a cada tipo, frecuencia absoluta y relativa. Cabe resaltar que, en la tipificación de las respuestas, se especifican cada uno de los estudiantes que pertenecen a esta, por ejemplo, Estudiante 1 (E1).

En la realización de las tablas se utilizan algunas convenciones para organizar los datos.

Sn: Significa situación n, donde n=1, 2.
Pbn: Significa Problema n, donde n=1, 2, 3, 4.
Pn: Significa pregunta n, donde n=1, 2, 3...10.
En: Significa Estudiante n, donde n=1, 2, 3... 26.
Fa: Significa frecuencia absoluta
Fr: Significa frecuencia relativa

3.2.3.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 1 (S1): Fiesta de los niños y problemas aritméticos.

Problema 1: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Situación 1: Problema 1, Pregunta 1 (S1, Pb1, P1)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 6 *Tipificación S1, Pb1, P1*

Pregunta 1: Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que el total de estudiantes está conformado por los estudiantes de grado 3°, 4° y 5° sin indicar el total. (E4,E5,E6,E7,E8,E9,E11,E13,E14)	9	45%
2	Estudiantes que indican que el total de estudiantes está conformado por 90 estudiantes entre los tres grados. (E1,E2,E16.E18,E20)	5	25%
3	Estudiantes que indican que el total de estudiantes está conformado por los estudiantes de grado 3°, 4° y 5°, además establecen cantidades por cada grado. Ej. 30,20,40. (E12,E15,E17)	3	15%
4	Estudiantes que dan respuestas que no corresponden a la pregunta. Ej. Niños y niñas. 8-1, 8-2. (E3,E10,E19)	3	15%

En relación con los resultados de los estudiantes correspondiente a la pregunta 1, Problema 1, de la Situación 1, tipificados en la tabla 6, se observa que 17 de 20 estudiantes responden cómo está conformada la cantidad total de estudiantes, 9 indicando los grupos que conforman la cantidad total de estudiantes, es decir, 3°, 4° y 5° y 5 indicando el valor numérico, es decir, el total que corresponde a 90 estudiantes, además, 3 estudiantes reconocen cómo se conforma la cantidad total, pero indican valores numéricos para cada grado.

La mayoría de los estudiantes reconocen la primera relación del problema, pero de manera diferente, en tanto unos lo hacen numéricamente y otros de manera cualitativa, sin embargo, 3 estudiantes dan respuestas ligadas a la situación real en tanto los grupos son mixtos y son de grado 8° y no a la situación del problema.

Particularmente, E11 realizó un diagrama que permite evidenciar las relaciones entre cantidades que se presentan en los grados 3°, 4° y 5° respecto a la cantidad total de estudiantes, es decir, expresó las relaciones de manera gráfica, lo que permite reconocer una comprensión del problema que involucra todas las relaciones de éste en forma esquemática como se ve a continuación. (ver figura 6).

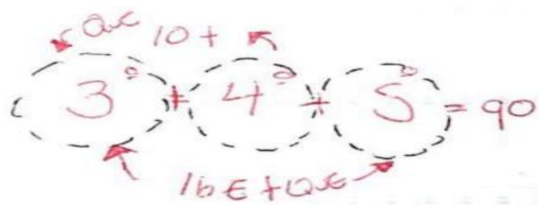


Figura 6 *S1, Pb1, P1, E11*

Situación 1: Problema 1, Pregunta 2 (S1, Pb1, P2)
Población: 20 estudiantes

Tabla 7 *Tipificación S1, Pb1, P2*

Pregunta 2: De acuerdo con el problema,
a. Indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
b. Explica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr	JUSTIFICACIÓN	Fa	Fr
1	Estudiantes que afirman que los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado.	12	60%	Estudiantes que dan valores a cada uno de los grados obteniendo como resultado 90. Ej. 30+30+30, 16+32+42. (E5,E7,E9,E17,E18)	5	25%
				Estudiantes que establecen por medio de esquemas o lenguaje natural las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas enunciadas en el problema. (E2,E10,E16)	3	15%
				Estudiantes que afirman que el total de estudiantes se puede hallar por medio de una operación o ecuación. (E6,E15.E19)	3	15%
				Estudiantes que no justifican la respuesta. (E11)	1	5%
2	Estudiantes que afirman que los datos involucrados no permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada	6	30%	Estudiantes que afirman que hace falta conocer el total de estudiantes de uno de los tres grados. Ej. Grado 5°. (E4,E8,E12,E14)	4	20%
				Estudiantes que enuncian en lenguaje natural las relaciones entre cantidades. Ej. 3°=16 más que 5° y	1	5%

	grado.			4°= 10 más que 3°. (E13)		
				Estudiantes que no justifican la respuesta. (E20)	1	5%
4	Estudiantes que no dan respuesta a la pregunta.	2	10%	Estudiantes que realizan un esquema para establecer relaciones entre las cantidades del problema o realizan operaciones entre cantidades. (E1,E3)	2	10%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 2, problema 1, Situación 1, que se presentan en la tabla 7, se observa que el 60% de los estudiantes responden que los datos involucrados en el problema permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado. De estos, el 25% justifican su respuesta realizando un procedimiento que les permita resolver el problema, es decir, hacen uso del tanteo para dar respuesta al número de estudiantes de cada grado. Los estudiantes E9 y E17 tuvieron en cuenta sólo la primera relación (total de estudiantes en los tres grados), ya que realizan particiones iguales con respecto a la cantidad total, (3°=30, 4°=30 y 5°=30), mientras que E5 y E7 tuvieron en cuenta que se conservara tanto el total de estudiantes en los tres grados como las relaciones existentes entre los mismos, concluyendo que grado 3° debía tener 32 estudiantes, grado 4° 42 estudiantes y grado 5° 16 estudiantes.

Ahora bien, el 15% de los estudiantes que responden correctamente justifican su respuesta realizando esquemas que representan las relaciones entre las cantidades enunciadas en el problema, (ver figura 7) o expresando dichas relaciones por medio de un lenguaje natural, como lo expresa E10 al decir que "*grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5° y el grado 4° tiene 10 más que el grado 3°".* Sin embargo, se considera que no dieron una justificación precisa, ya que solo enuncian las relaciones dadas en el problema, pero no explican cómo por medio de ellas van a llegar a la solución del problema.

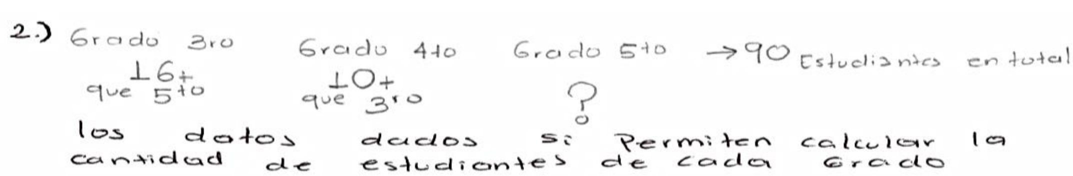


Figura 7. S1, Pb1, P2, E2

El otro 15% restante de los estudiantes que responden correctamente, justifican indicando que por medio de un procedimiento se puede calcular la cantidad de estudiantes en cada grado, de estos, E6 y E19 afirman que si se hace una operación correcta se podrá dar solución al problema, mientras que E15 afirma que por medio de una ecuación se puede resolver el problema, pero ninguno muestra cómo sería posible, es decir, no plantean ningún tipo de operación o ecuación que les ayude a resolver el problema, lo cual no está de acuerdo a lo solicitado.

Por otra parte, el 30% de los estudiantes afirman que los datos involucrados no permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado. De estos, el 20% indican que hace falta conocer por lo menos el número de estudiantes de uno de los tres grados, por ejemplo, E4, E12 y E14 afirman que hace falta conocer el número de estudiantes de grado 5° para dar respuesta al problema, lo cual parece indicar que reconocen la incógnita del problema, entienden que a partir de ella se conocen la cantidad de estudiantes de grado 3° y grado 4°, lo cual es correcto a pesar de su respuesta errada. (ver figura 8).

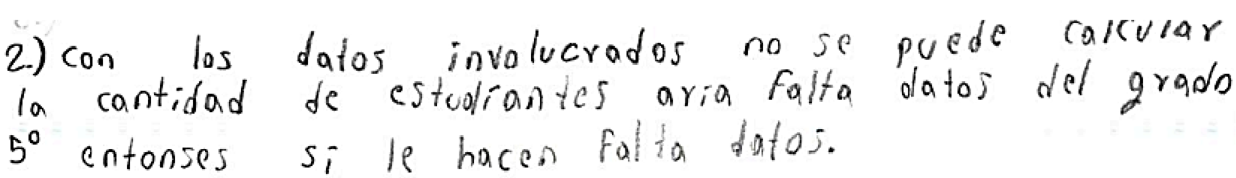


Figura 8. S1, Pb1, P2, E4

Ahora bien, el 10% de los estudiantes no responden la pregunta. Sin embargo, realizan operaciones con las posibles cantidades de los estudiantes en cada grado o esquemas que evidencian el posible reconocimiento de equivalencia entre las relaciones entre cantidades y el total de estudiantes en los tres grados. (Ver figura 9). De lo anterior se infiere que, a pesar de no responder la pregunta, los estudiantes dan manifestaciones de la comprensión del enunciado.

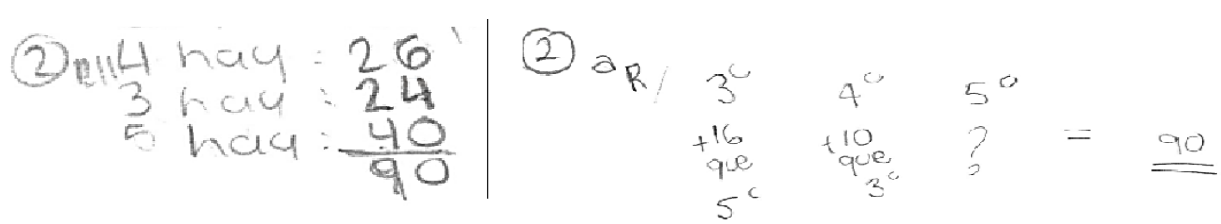


Figura 9. S1, Pb1, P2, E1, E3.

Teniendo en cuenta las investigaciones realizadas por Bednarz y Janvier (1996) es de gran importancia que los estudiantes en su gran mayoría reconocieron cómo se conforma la cantidad total en relación con sus partes, en este caso, 90 estudiantes es igual a la suma de los estudiantes de los grados 3°, 4° y 5°, lo que permite que los estudiantes identifiquen la estructura del problema. Por otro lado, es importante cómo los estudiantes interpretan si los datos presentados en un problema permiten solucionarlo o no, ya que esa es la base que les permite construir una idea acerca de cómo solucionar el problema.

Particularmente es interesante ver que alguno de los estudiantes al afirmar que no se puede resolver el problema a causa de no conocer la cantidad de estudiantes de grado 5°, siendo esta la incógnita que permite resolver el problema, es decir, que estos estudiantes están pensando algebraicamente.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 3 (S1, Pb1, P3)
Población: 20 estudiantes

Tabla 8 *Tipificación S1, Pb1, P3*

<table>
<tr><td colspan="7">Pregunta 3: Si Mariana, estudiante de grado 4º afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5°es de 20 estudiantes.
a. Escribe la validez de esta afirmación.
b. Explica tu respuesta.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TIPOS DE RESPUESTA</th><th>Fa</th><th>Fr</th><th>JUSTIFICACIÓN</th><th>Fa</th><th>Fr</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Estudiantes que indican que la afirmación de Mariana es falsa.</td><td rowspan="4">17</td><td rowspan="4">85%</td><td>Estudiantes que afirman o realizan operaciones y establecen que el total de estudiantes no sería igual a 90 lo cual contradice el enunciado del problema. Ej. 102, 101. Habrían más de 90 estudiantes. (E2,E3,E6,E9,E10,E11,E13,E14,E17,E18,E20)</td><td>11</td><td>55%</td></tr>
<tr><td>Estudiantes que afirman que en grado 5º hay 16 estudiantes. (E7,E15,E16)</td><td>3</td><td>15%</td></tr>
<tr><td>Estudiantes que afirman que con esa información se solucionaría el problema. (E8)</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Estudiantes que no justifican la respuesta (E4,E12)</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Estudiantes que indican que la afirmación de Mariana es verdadera.</td><td>1</td><td>5%</td><td>Estudiantes que afirman que el grado 3° tiene 10 estudiantes y por tanto el grado 5° tiene 20 estudiantes. (E1)</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
</table>

3	Estudiantes que no responden la pregunta.	2	10%	Estudiantes que no justifican la respuesta. (E5,E19)	2	10%

Con relación a los resultados expuestos en la tabla 8, se observa que el 85% de los estudiantes responden acertadamente la pregunta, es decir, indican que la afirmación de Mariana es falsa. De estos, el 55% afirman o realizan operaciones en las que obtienen un total de estudiantes diferente al enunciado del problema, más específicamente, los estudiantes E2, E6, E11, E13 y E20 expresan en lenguaje natural que realizando una operación se obtiene un resultado mayor a 90 (algunos dicen que 102) lo cual hace la afirmación de mariana falsa, pero no indican ninguna operación específica, mientras que E9, E10, E17 y E18 resuelven una ecuación en la cual a pesar de llegar a una solución incorrecta, reconocen la incógnita del problema (número de estudiantes de grado 5°), le asignan un valor *"x"* e intentan a partir de esa variable establecer relaciones para así dar una respuesta a la pregunta. Ahora bien, E3 Y E14 realizan directamente una operación aditiva, estableciendo en 3°, 4° y 5° un número de estudiantes igual a 26, 46 y 20 respectivamente, para lo cual obtienen como resultado 101 o 102, lo cual les permite aseverar que no es posible considerar la afirmación de Mariana. Ejemplo de ello, se evidencia en la figura 10.

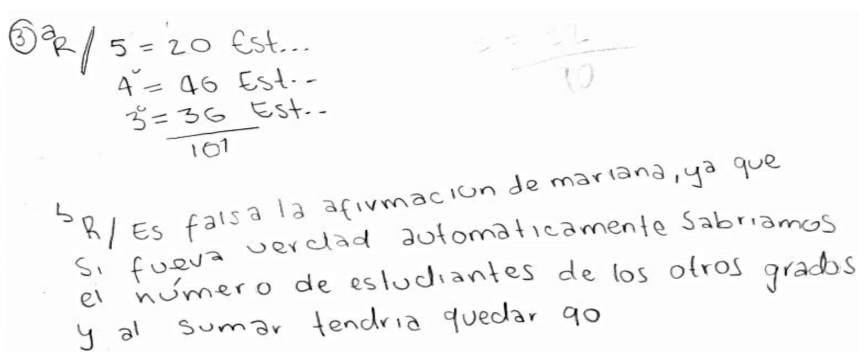


Figura 10. S1, Pb1, P3, E3.

En adición, el 15% de los estudiantes justifican la falsedad de la afirmación de Mariana asegurando que la cantidad de estudiantes de grado 5° es igual a 16 estudiantes, para lo cual E15 y E16 establecen esa cantidad haciendo uso sólo del lenguaje natural, por lo que no es posible determinar el procedimiento que los llevó a esa conclusión, a diferencia de E7 que realiza una operación aditiva en la cual toma tres valores que dan como resultado 90, es decir, tiene en cuenta la relación implícita de las cantidad total de estudiantes para dar respuesta a la pregunta. Sólo el 5% de los estudiantes aseguran que si la afirmación de Mariana fuera verdadera el problema quedaría solucionado, lo cual parece indicar que el estudiante no vio viable dicha afirmación en el sentido de que no habría necesidad de seguir respondiendo las siguientes preguntas, además, el 10% de los estudiantes a pesar de que aseveran la falsedad de la afirmación de Mariana no establecen una justificación que la sustente, al decir que el grado 5° puede tener más de 20 estudiantes o menos de 20 estudiantes.

Por otra parte, sólo el 5% de los estudiantes indican que la afirmación de Mariana es verdadera, justificando que grado 3° tiene 10 estudiantes y que grado 5° tiene 10 estudiantes más que grado 3°, lo cual parece indicar una interpretación errada de las relaciones. Sólo el 10% de los estudiantes no dan respuesta a la pregunta.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 4 (S1, Pb1, P4)
Población: 20 estudiantes

Tabla 9 *Tipificación S1, Pb1, P4*

Pregunta 4. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que grado 4°tiene el mayor número de estudiantes. (E2,E3,E4,E6,E11,E12,E13,E14,E15,E16,E17,E20)	12	60%
2	Estudiantes que indican que el mayor número de estudiantes está en el grado 3°. (E1,E5,E7,E19)	4	20%
3	Estudiantes que indican que el mayor número de estudiantes está en el grado 5°. (E9,E10,E18)	3	15%
4	Estudiantes que no responden la pregunta. (E8)	1	5%

Según lo que se observa en la tabla 9, de los resultados correspondientes a la pregunta 4, problema 1, de la Situación 1, el 60% de los estudiantes contestan de manera correcta la pregunta al indicar que el mayor número de estudiantes está en grado 4°, aunque no se solicita que se justifique la respuesta, los estudiantes E3, E14, E15 y E16 justificaron su afirmación indicando que grado 4° tiene 42 estudiantes, lo cual permite evidenciar cómo algunos estudiantes en la mitad del proceso para llegar a la solución del problema son capaces de realizar operaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas para llegar a la solución correcta, mientras que los estudiantes E2, E4, E6, E11, E12, E13, E17 y E20 expresan en lenguaje natural que grado 4° tiene más estudiantes pero no hacen ningún procedimiento que valide su afirmación.

Ahora bien, el 20% de los estudiantes indican que grado 3° tiene mayor número de estudiantes, de los cuales E1, E5 y E7 no establecen ninguna justificación al respecto, mientras que E19 argumenta su aseveración al determinar que grado 3° tiene 16 estudiantes más que grado 5° y 4°, lo cual permite evidenciar la posibilidad de una interpretación incorrecta del problema o lectura rápida en la cual se lee lo que considera necesario, ya que si bien en el problema se enuncia: "*el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°"* por lo cual se pudo haber pasado por alto la coma (,) y considerar que no era necesario seguir leyendo.

En adición, el 15% de los estudiantes indican que el mayor número de estudiantes está en grado 5°, de los cuales E9 y E18 justifican la afirmación asegurando que grado 5° tiene 38 estudiantes, grado 3° tiene 16 estudiantes y grado 4° tiene 26 estudiantes, por lo que se puede inferir una posible interpretación que tienen del problema, es decir, con datos que si bien pudieron surgir de una interpretación no acertada del problema, el número de estudiantes de grado 3° y 4° posiblemente surgieron de tomar como referencia que "*grado 3° tiene 16 estudiantes más que…"* como la cantidad de estudiantes de grado 3° y no como relaciones entre cantidades (Gallardo y Rojano, 1988). Sin embargo, por medio de esa información errada interpretan de forma acertada la relación "*grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°"* lo que les permite decir que grado 4° tiene 26 estudiantes, por lo tanto, sí alcanzan a dimensionar algunas relaciones en el problema, pero no tienen en cuenta una relación implícita de gran importancia que es el total en relación con sus partes, ya que si bien, la suma de los estudiantes en los 3° grado da 80 y no 90 como se indica en el problema.

Por último, el 5% de los estudiantes no responden la pregunta.

Se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes tuvo en cuenta las relaciones entre las cantidades, ya que afirman que grado 4° tiene mayor cantidad de estudiantes y aunque en las respuestas no se evidenció procedimientos o justificación de dicha afirmación, es en la plenaria que los estudiantes justifican su respuesta indicando que siempre se parte de grado 5° y a partir de este dato se conoce el número de estudiantes de grado 3° y luego con el número de estudiantes de grado tercero se conoce el número de estudiantes de grado 4° (min. 7:02-7:29), es decir, las relaciones que se presentan entre los tres grados siempre son de forma aditiva.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5a (S1, Pb1, P5a)
Población: 20 estudiantes

Tabla 10 *Tipificación S1, Pb1, P5a*

Pregunta 5. a. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 3°.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que el número de estudiantes de grado 3º depende del número de estudiantes de grado 5°. (E3,E4,E6,E10,E11,E12,E14,E18, E20)	9	45%
2	Estudiantes que establecen una relación de cantidad entre grado 3º y grado 5º. Ej. 3º tiene 16 estudiantes más que 5º. (E8,E9,E13,E15,E16)	5	25%
3	Estudiantes que indican que el número de estudiantes de grado 3º depende del número de estudiantes de grado 4°. (E2)	1	5%
4	Estudiantes que no dan una respuesta acorde con lo que se pregunta.(E5,E7,E17,E19)	4	20%
5	Estudiantes que no responden la pregunta. (E1)	1	5%

De acuerdo con la tabla 10, el 70% de los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta planteada, es decir, identifican que el número de estudiantes de grado 3° depende del número de estudiantes de grado 5°, de estos, el 45% responden de manera directa, ya que aseguran que grado 3° depende de grado 5°, a diferencia del 25% restante que establece una relación entre las cantidades de ambos grados "*grado 3° tiene 16 estudiantes más que grado 5°"* de lo cual se logra inferir que comprenden la relación de dependencia entre grado 3° y grado 5°.

Por lo anterior, es de gran importancia que los estudiantes logren establecer e identificar las relaciones entre las cantidades debido a que es una característica relevante dentro del estudio del álgebra. Ya que los estudiantes ven la expresión "tiene 16 estudiantes más que" como una relación entre los estudiantes de grado 3° y grado 5° y no como una cantidad perteneciente a alguno de los dos grados.

Ahora bien, el 5% de los estudiantes indica que grado 3° depende del número de estudiantes de grado 4°, al no solicitarse en la pregunta justificación de la respuesta no es posible inferir la comprensión que tuvo para llegar a esa conclusión. Sin embargo, el estudiante pudo interpretar que la relación de dependencia es *"el grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°".* Por lo anterior, se puede inferir que el estudiante pudo haber interpretado que grado 3° tiene 10 estudiantes menos que grado cuarto.

En adición, el 20% de los estudiantes no asignan una respuesta acorde con lo que se pregunta, sin embargo, todos contestan de manera contextualizada, E5 y E7 indican que la cantidad de estudiantes de grado 3° es de 42 estudiantes, por lo que se puede inferir que identifican la relación de dependencia con la cantidad total de estudiantes en dicho grado, mientras que E17 por medio de un lenguaje natural bastante simple, deja su respuesta a especulación al decir "el número de estudiantes que tenga 3° y 5°, lo cual parece indicar que comprende la relación al escribir 3° y 5°, pues se sabe que 3° depende de 5°, pero no lo indica de forma clara, entretanto, E19 sigue evidenciando una comprensión basada en cantidad y no en relaciones al decir que grado 3° tiene 16 estudiantes, de los cuales 8 son niñas y 8 son niños. Por último, solo el 5% de los estudiantes no responden la pregunta.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5b (S1, Pb1, P5b)
Población: 20 estudiantes

Tabla 11 *Tipificación S1, Pb1, P5b*

Pregunta 5. b. Escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 5°.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que afirman que grado 3° tiene 16 estudiantes más que grado 5°. (E5,E6,E8,E9,E10,E11,E13,E14,E15,E18, E19)	11	55%
2	Estudiantes que afirman que hallar la cantidad de estudiantes de grado 5º permite hallar la cantidad de estudiantes de grado 3º. (E3, E4,E12,E16)	4	20%
3	Estudiantes que indican que los grados 3° y 5° tienen menor cantidad de estudiantes que el grado 4°.(E2,E17,E20)	3	15%
4	Estudiantes que indican la cantidad de estudiantes de cada grado. Ej: 3º tiene 24 estudiantes y 5º tiene 40 estudiantes. (E1,E7)	2	10%

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 11, el 90% de los estudiantes logran hallar relaciones válidas que se pueden establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 5°. De estos, el 55% afirma que grado 3° tiene 16 estudiantes más que grado 5°, siendo esta una de las respuestas más claras con base al enunciado del problema. Un 20% infiere de manera acertada que hallar la cantidad de estudiantes de grado 5° permite conocer la cantidad de estudiantes de grado 3°, dando muestra que de manera implícita y por medio de un lenguaje natural logran identificar que grado 5° es la incógnita del problema y por tanto a partir de ella se puede dar solución al problema. En adición, el 15% indica que los grados 3° y 5° tienen menor cantidad de estudiantes que grado 4°, lo que permite inferir que han comprendido de forma apropiada las relaciones que se establecen entre las cantidades conocidas y desconocidas del problema.

Ahora bien, el 10 % restante de los estudiantes no indican relaciones sino que establecen directamente una cantidad numérica para el número de estudiantes de grado 3° y 5°, para lo cual, E1 indica que grado 3° tiene 24 estudiantes y grado 5° tiene 40 estudiantes, más no deja constancia de algún procedimiento que permita inferir dichos datos, entretanto, E7 establece que grado 3°= 32 y grado 5°=16, lo que parece indicar que a pesar de no hablar de relaciones si las comprende para dar con la cantidad acertada de estudiantes en ambos grados.

En consecuencia, las respuestas a esta pregunta permiten evidenciar que los estudiantes en comparación con las preguntas anteriores están interpretando ya el número 16 como una relación entre dos cantidades y no como la cantidad de estudiantes en un grado, siendo este un paso significativo del pensamiento aritmético al algebraico.

Es de gran importancia que los estudiantes identifiquen los tipos de relaciones que se presentan en el problema, es decir, relaciones de tipo aditivo. Por lo anterior se logra identificar que un gran porcentaje de estudiantes han desarrollado el pensamiento numérico algebraico al identificar los vínculos que se presentan entre dos cantidades, específicamente la dependencia entre las cantidades.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 6a (S1, Pb1, P6a)
Población: 20 estudiantes

Tabla 12 *Tipificación S1, Pb1, P6a*

Pregunta 6. a. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 4º.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que el número de estudiantes de grado 4º depende del número de estudiantes de grado 3º. (E2,E3,E4,E8,E9,E11,E12,E13,E14,E15,E18,E20)	12	60%
2	Estudiantes que afirman que el número de estudiantes de grado 4º depende del número de estudiantes de grado 3º y grado 5º. (E6,E10,E16)	3	15%
3	Estudiantes que afirman que el número de estudiantes de grado 4ºdepende de una cantidad específica. Ejs: 42,32,26,10. (E1,E5,E7,E19)	4	20%
4	Estudiantes que no responden la pregunta. (E17)	1	5%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 6 a, de la situación 1, problema 1, presentes en la tabla 12, se infiere que el 75% de los estudiantes responden correctamente la pregunta. De estos, el 60% determinaron que el número de estudiantes de grado 4° depende del número de estudiantes de grado 3°, mientras que el 15% restante afirma que el número de estudiantes de grado 4° depende tanto del número de estudiantes de grado 3° como del número de estudiantes de grado 5°, lo cual es válido y permite evidenciar cómo están situando la solución del problema con base en grado 5° que es la incógnita del problema, y por tanto, a partir de ella, se se puede conocer el número de estudiantes de los otros dos grados, es decir, aunque grado 3° y grado 4° están relacionados directamente "*grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°*" si no se conoce el número de estudiantes de grado 5° según el orden de las relaciones del problema sería complejo hallar la cantidad de estudiantes de grado 3° y grado 4°.

Por ejemplo, E16 (ver figura 11) en su respuesta permite evidenciar el tipo de comprensión que tuvo del problema y la forma como planea dar respuesta al mismo, por medio de la cantidad de estudiantes de grado 3° y grado 5°, los cuales los pudo obtener por medio de tanteo, y haciendo la suma entre ellos y restando el total (90 estudiantes) puede hallar la cantidad de estudiantes de grado 4°, lo cual es válido, y de gran importancia que utilice procedimientos en los cuales identifique ese relación implícita de equivalencia que se establece entre el total con la suma de los tres grados.

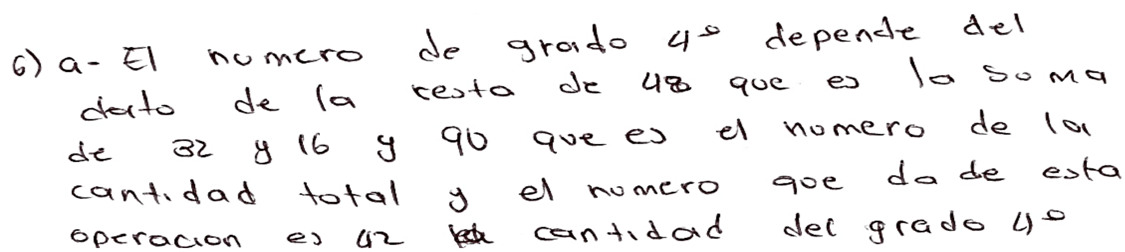


Figura 11 S1, Pb1, P6a, E16.

Ahora bien, el 20% de los estudiantes no dan una respuesta correcta a la pregunta, ya que entienden por dependencia el número exacto de un grado, E29 indica que grado 4° tiene 10 estudiantes, de forma que, sigue considerando las relaciones como cantidades específicas, algo similar sucede con E1 que indica que grado 4° tiene 26 estudiantes, lo que parece indicar que asoció las relaciones como cantidad de estudiantes de grado 5° y grado 3°, 16 y 10 estudiantes respectivamente, y asociaron la cantidad de estudiantes de grado 4° como la suma de los anteriores, para tener un total de 26 estudiantes, mientras que E5 y E7 indican que grado 4° depende de 32 estudiantes, lo cual parece indicar que posiblemente el estudiante halló la cantidad de estudiantes de grado 3° y de esa cantidad dependen los estudiantes de grado 4°, lo cual es válido, pues aunque hable de cantidad, entiende las relaciones que se necesitan para llegar a dichas cantidades.

Lo anterior, permite inferir que este porcentaje de estudiantes tiene arraigado el pensamiento aritmético al momento de comprender el problema, ya que establecen cantidades numéricas para cada uno de los grados y a partir de ellas reemplazar los valores teniendo en cuenta las cantidades. Según las investigaciones presentadas en el marco teórico este tipo de razonamiento es encontrar un numero ficticio y a partir de él generar las cantidades faltantes. Por otra parte, un estudiante dice que la cantidad de estudiantes de grado 4° depende de 32 estudiantes. Con respecto al 10% restante de los estudiantes no dan una respuesta acorde con lo que se pregunta.

De lo anterior, se puede decir, que es de gran importancia que los estudiantes logren identificar de que cantidad depende otra cantidad, en este caso la relación presente entre la cantidad de dulces de grado 3° y de grado 4°. Resaltando que la gran mayoría de estudiantes afirmo que si se saben la cantidad de estudiantes de grado 3° es posible hallar la cantidad de estudiantes de grado 4°. Además, a partir de estos resultados se puede inferir se han aproximado al álgebra por medio de la comprensión de las relaciones de dependencia entre dos cantidades.

En cuanto al 5 % restante, no dio respuesta a la pregunta.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 6b (S1, Pb1, P6b)
Población: 20 estudiantes

Tabla 13 *Tipificación S1, Pb1, P6b*

Pregunta 6. b. Escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3º y grado 4º			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que la relación entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° es qué grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°. (E3,E5,E6,E9,E10,E11,E12,E13,E14,E15,E18)	1	55%
2	Estudiantes que afirman que la relación entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° es que si no se conoce el número de estudiantes de grado 3° no se puede hallar el número de estudiantes de grado 4°. (E4)	1	5%
3	Estudiantes que indican que la relación entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° es que ambos grados tienen una mayor cantidad de estudiantes que grado 5°. (E2,E20)	2	10%
4	Estudiantes que establecen la relación entre el número de estudiantes de grado 3º y grado 4º con cantidades numéricas específicas. Ej. 3º tiene 32 estudiantes y 4º tiene 42 estudiantes. (E7)	1	5%

5	Estudiantes que no dan una respuesta acorde con lo que se pregunta. (E1,E8,E19)	3	15%
6	Estudiantes que no responden la pregunta. (E16,E17)	2	10%

De la tabla 13 se infiere que el 70% de los estudiantes logra identificar una relación acertada entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4°. De estos, el 55% afirma que grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°, lo cual parece indicar que entienden las relaciones que se establecen en el problema, además, un 5% de los estudiantes afirma que si no se conoce el número de estudiantes de grado 3° no se puede hallar el número de estudiantes de grado 4°, que es igualmente válido, porque comprenden la relación que se establece entre ambos grados "*grado 4° tiene 10 estudiantes más que grado 3°"* y al no conocer la cantidad numérica de grado 3° no se le puede sumar 10 estudiantes para hallar el número de estudiantes de grado 4° por lo cual va a resultar más complejo hallar la cantidad numérica de grado 4° si se llegase a buscar con otro tipo de relación.

Por su parte, el 10% de los estudiantes indica que la relación entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° se debe a que ambos grados tienen una mayor cantidad de estudiantes que grado 5°, lo cual si bien no es la relación principal, es de gran importancia porque permite reflejar cómo comprenden el hecho de que a partir de la incógnita (número de estudiantes de grado 5°), las relaciones que se establecen siempre son de composición aditiva, "*3° tiene 16 más (+), 4° tiene 10 más (+)*", con lo cual se puede intuir que grado 5° tendrá menor cantidad de estudiantes que los grados 3° y 4° aún sin saber una cantidad numérica específica por grado.

Ahora bien, un 20% de los estudiantes no logra responder de manera correcta a la pregunta, de estos, el 5% responde estableciendo para grado 3° una cantidad de 32 estudiantes y para grado 4° una cantidad de 42 estudiantes, lo cual parece indicar que no entendió la pregunta pero si ha comprendido las relaciones enunciadas en el problema para llegar al número de estudiantes correcto en ambos grados, mientras que, un 15% no da una respuesta acorde con la pregunta, de los cuales, e1 indica que la relación entre los grados 3° y 4° se puede establecer por medio de la unión de éstos y así mirar su cantidad total, E8 hace algo muy interesante y es escribir las relaciones que se establecen en grado 3° y grado 4° en función de las cantidades 16 más y 10 más, es decir, " *grado 3° tiene 16 estudiantes más y grado 4° tiene 10 estudiantes más"* lo cual es válido, fue la forma como interpretó la pregunta y no está fuera de contexto. En cuanto a E19 se observa que sigue en el mismo plano de las cantidades y además interpreta la palabra "*relación*" en la pregunta en términos de las relaciones mayor o menor de sus experiencias pasadas en matemáticas, ya que responde a la pregunta diciendo que grado 3° tiene 16 estudiantes, por lo tanto, es mayor que grado 4° que tiene solo 10 estudiantes.

En consecuencia, se puede afirmar que la mayor parte de los estudiantes comprenden los vínculos presentes entre dos cantidades enunciados en el problema, particularmente la relación entre los estudiantes de grado 3° o 4°, ya sea expresando que 4° tiene más estudiantes que tercero, o que si se desconoce una cantidad no se puede saber la otra, y, por último, establecer relaciones numéricas a cada una de las cantidades. Lo anterior, evidencia que los estudiantes presentaron una ruptura del pensamiento aritmético al algebraico al trabajar sobre las relaciones entre las cantidades. Al final, solo el 10% restante de los estudiantes no responde la pregunta.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 7 (S1, Pb1, P7)
Población: 20 estudiantes

Tabla 14 *Tipificación S1, Pb1, P7*

Pregunta 7.Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3º, 4º y 5º			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que en el grado 3° asistieron 32 estudiantes, en el grado 4° asistieron 42 estudiantes y en el grado 5° asistieron 16 estudiantes. (E2,E3,E4,E6,E9,E11,E12,E14,E15,E16,E17,E18,E20)	13	65%
2	Estudiantes que afirman que asistieron 90 estudiantes en los grados 3°,4° y 5°. (E1,E7E10)	3	15%
3	Estudiantes que establecen una cantidad incorrecta de estudiantes por cada grado. Ejs: 3º, 4º y 5º tienen 16, 10 y 16 estudiantes respectivamente, 3º, 4º y 5º tienen 42, 32 y 16 estudiantes respectivamente.(E5,E8,E13,E19)	4	20%

Respecto a los resultados presentes en la tabla 14 se observa que el 80% de los estudiantes logran identificar de forma correcta el número de estudiantes en los grados 3°, 4° y 5°, de estos, el 65% afirma como se esperaba que en el grado 3° asistieron 32 estudiantes, en el grado 4° asistieron 42 estudiantes y en el grado 5° asistieron 16 estudiantes, mientras que un 15% indicó que asistieron 90 estudiantes en los tres grados, lo cual no era la respuesta que se espera, al ser un dato conocido en el problema, sin embargo, es válido debido a que posiblemente la redacción de la pregunta se presta para interpretar que se pide la cantidad total de estudiantes en los 3 grados (90), y no a la cantidad de estudiantes en cada uno de los grados.

Por otro lado, el 20% de los estudiantes establecen cantidades numéricas incorrectas para cada grado, de estos E5, indica que grado 5° tiene 16 estudiantes, es decir, reconoce de forma correcta el valor de la incógnita, pero al hallar el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° invierte las relaciones al decir que grado 4° tiene 32 estudiantes y grado 3° tiene 42 estudiantes, lo cual parece indicar una falta de concentración en lo que escribió y no una equivocación en la forma como interpreta el problema, ya que encuentra el valor de la incógnita, las otras dos cantidades son correctas aunque no pertenezcan al grado que indica, y también parece entender la relación implícita del total en relación con las partes que lo componen. Ahora bien, E8 escribe solamente en su respuesta “64”, por lo cual queda difícil entender el tipo de comprensión que tuvo que lo llevó a este resultado descontextualizado del problema dado. En cuanto a E13 indica que el número de estudiantes en los grados 3°, 4° y 5° son 16, 10 y 16 respectivamente (ver figura 12), lo que parece indicar que para el número de estudiantes de grado 3° y grado 4° interpretó las relaciones “*grado 3° tiene 16 estudiantes más*” “*grado 4° tiene 10 estudiantes más”* como la cantidad numérica por grado, al igual que para grado 5° con la relación “*grado 3° tiene 16 estudiantes más que grado 5°*” pudo entender que tanto 3° como 5° tienen 16 estudiantes, lo cual supone que el estudiante sigue en el plano de las cantidades, lo cual le impide ver las relaciones que se establecen, al igual que la relación implícita del total en relación con sus partes, pues no tiene en cuenta que $16 + 16 + 10 \neq 90$.

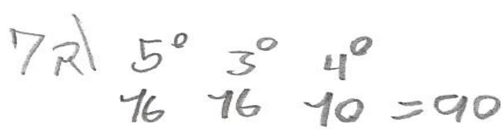


Figura 12 S1, Pb1, P7, E13.

Por lo que se refiere a E19 solo indica la cantidad numérica para los grasos 3° y 4° igual que en el caso anterior, interpretando las relaciones de ambos grados como la cantidad de estudiantes, pero además los divide en niños y niñas en partes iguales, es decir, para grado 3° indica que hay 16 estudiantes, para los cuales 8 son niñas y 8 son niños, para grado 4° indica que hay 10 estudiantes de los cuales 5 son niños y 5 son niñas, para grado 5° no indica cantidad de estudiantes, debido tal vez a que en el enunciado no indican una relación directa con dicho grado, lo anterior, parece indicar que el estudiante sigue en el plano de las cantidades y se descontextualiza un poco del problema.

Por último, se puede decir que este problema permitió un acercamiento al álgebra, debido a que los estudiantes lograron comprender el problema y la gran mayoría logró resolverlo utilizando diferentes métodos, como lo son encontrar un número ficticio y a partir de él generar las otras cantidades, evidenciándose procedimientos como ensayos numéricos, de los cuales se parte estableciendo un valor a una cantidad desconocida y a partir de ese valor reconstruir las demás cantidades desconocidas. También usan el método de tomar el dato conocido del problema como el punto de inicio, es decir, 90 estudiantes y a partir de ese dato y guiándose por las relaciones entre cantidades buscar el número de estudiantes que podría tener cada grado, de tal forma que la suma de los tres grados conserve el dato inicial de la cantidad total. Además, los estudiantes tuvieron presente las relaciones entre las partes (estudiantes de cada grado) y el todo (total de estudiantes). Por otro lado, es de gran importancia que la mayoría de los estudiantes identificaran las relaciones entre las cantidades, y que no le dieran el valor de cantidad, lo cual parece indicar que se está presentando una ruptura entre el pensamiento aritmético para introducirse en un pensamiento algebraico.

Problema 2: Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° en compañía de la profesora Mayerleny recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Situación 1: Problema 2, Pregunta 1 (S1, Pb2, P1)

Población: 20 estudiantes.

Tabla 15 *Tipificación S1, Pb2, P1*

Pregunta 1. Daniel estudiante de grado 4°afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.
a. Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
b. Explica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr	JUSTIFICACIÓN	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Daniel es falsa.	19	95%	Estudiantes que afirman que lo enunciado en el problema no coincide con la afirmación de Daniel. Ej. 3° recogió 80 dulces más que grado 4° y 5° recogió 50 dulces más que grado 3°. (E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,E8, E9, E10, E11,E12,E13, E14,E15,E16, E20)	17	85%
				Estudiantes que afirman que sólo un grado puede tener 100 dulces y los otros dos grados menos de 100 dulces. (E17,E18)	2	10%
2	Estudiantes que indican que la afirmación de Daniel es verdadera.	1	5%	Estudiantes que afirman que Daniel repartió en cada grado 100 dulces lo cual da un total de 300 dulces entre los tres grados. (E19)	1	5%

Según lo que se observa en la tabla 15, de los resultados correspondientes a la pregunta 1, problema 2, de la Situación 1, se observa que el 95% de los estudiantes contestan de manera correcta indicando que la afirmación de Daniel es falsa, mientras que solo el 5% de los estudiantes indican que la afirmación de Daniel es verdadera justificando que, al repartirse 100 dulces entre cada grado, se obtiene como resultado 300 dulces, dato que se enuncia en el problema.

Ahora bien, del 95% de los estudiantes que respondieron correctamente, el 85% justifica que la afirmación de Daniel no coincide con el enunciado del problema, de estos, E1, E2, E3, E4, E6, E15 y E16 justifican su respuesta afirmando que hay grados que recogieron más dulces que otros, mientras que E5, E7, E10, E11,E12, E13 y E14 indican que la afirmación de Daniel es incorrecta debido a que en el enunciado del problema se establece que los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que grado 4° y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que grado 3°. Ejemplo de ello es el estudiante E11 (ver figura 13), que por medio de una ilustración deja ver el tipo de razonamiento que tiene frente a la pregunta y la comprensión que tiene frente a las relaciones que se enuncian en el problema, es decir, entiende que las relaciones entre los dulces de cada grado son de forma aditiva, y que con base en la cantidad de dulces de un grado en específico se le suma otra cantidad para obtener el número de dulces del siguiente grado.

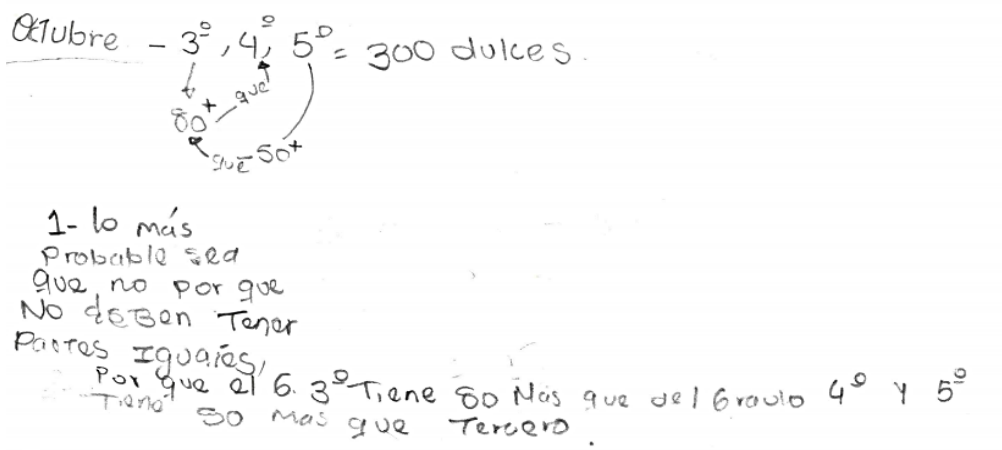


Figura 13. S1, Pb2, P1, E11.

En cuanto a E8, E9 y E20 no hacen una justificación fuerte que sustente su respuesta, E8 dice que es incorrecta la afirmación de Daniel porque todos los grados tendrían la misma cantidad de dulces, mientras que E9 y E20 indican solo que no es la cantidad correcta, pero no establecen ningún tipo de procedimiento o explicación en lenguaje natural.

Por lo que se refiere al 10% restante, los estudiantes E17 y E18 afirman que solo un grado puede tener 100 dulces y los otros dos grados menos de 100 dulces, lo cual parece indicar que no han relacionado el total (300 estudiantes) con el número de dulces recogidos en cada grado, lo cual es fundamental para que no se produzcan este tipo de errores.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 2 (S1, Pb2, P2)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 16 *Tipificación S1, Pb2, P2*

Pregunta 2. Según el problema, los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo a la afirmación de Daniel, los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Daniel es falsa e indican las relaciones entre las cantidades de dulces de cada grado. Ej. si grado 4° tiene 100 dulces, entonces grado 3° tendría 180 dulces y grado 5° tendría 230 dulces lo cual difiere del total (300 dulces). (E3,E10,E11,E12,E13,E14, E16,E17,E18)	9	45%
2	Estudiantes que indican que la afirmación de Daniel es falsa porque ya no habría 300 dulces entre los tres grados. (E1,E2,E5,E6,E7,E9,E20)	7	35%
3	Estudiantes que realizan operaciones para explicar la situación. (E4,E15)	2	10%
4	Estudiantes que no dan una respuesta acorde a lo que se pregunta. Ej. En total hay 180 dulces. (E8,E19)	2	10%

En relación con los resultados presentados en la tabla 16, se observa que el 80% de los estudiantes responden a la pregunta de manera correcta. De estos, el 45% indica que la afirmación de Daniel es falsa y la justifican basándose en el total de dulces entre los tres grados que obtuvieron al suponer que la cantidad de dulces de grado 4° es igual a 100, y aplicando las relaciones entre cantidades, lo cual difiere con el total de dulces presentado en el problema (ver figura 11), mientras que el 35% restante solo indica que el total de dulces ya no sería igual al que se da en el problema si se considera la afirmación de Daniel, pero no realizan procedimientos que avalen dicha afirmación.

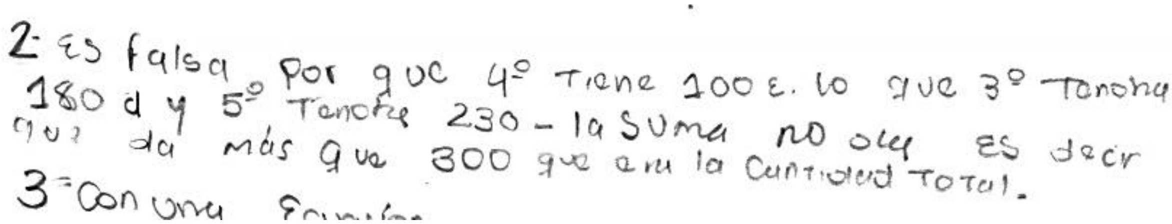


Figura 14. S1, Pb2, P2, E3

Ahora bien, el 20% de los estudiantes no logra dar una explicación concisa de la situación planteada, sin embargo, no se considera que el tipo de respuesta presentada sea incorrecta o descontextualizada, sino con falta de información. De estos, el 10% realiza operaciones para explicar la situación y al no dar detalles es difícil interpretar la percepción que tenían al momento de realizar dichas operaciones, ejemplo de ello es E4 (ver figura 15), quien hace una serie de sumas, pero no especifica a qué hace referencia las cantidades numéricas en el contexto del problema.

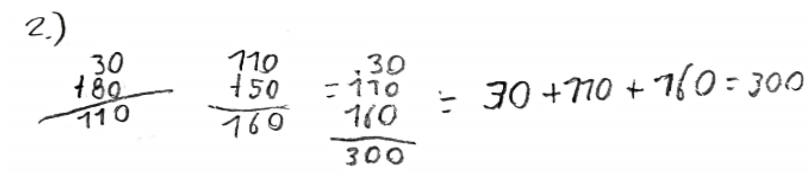


Figura 15. S1, Pb2, P2, E4

En cuanto al 10% restante, afirman que no es posible determinar si la afirmación de Daniel es verdadera o falsa debido a que no se conoce la cantidad de dulces que tiene cada grado (E8), lo cual es verdadero, lo que falta es identificar que por medio de las relaciones entre cantidades presentadas en el problema es posible dar solución al mismo, además establecen un total de dulces que debido a la falta de información no se puede interpretar el porqué de dicho resultado (E19).

Situación 1: Problema 2, Pregunta 3 (S1, Pb2, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 17 *Tipificación S1, Pb2, P3*

Pregunta 3. Escribe cómo se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que el total de dulces recogidos de acuerdo a lo recogió cada grupo se puede calcular sumando los dulces de cada grado. Ej. 30+110+160=300. (E9,E10E15,E16,E17,E18,E20)	7	35%
2	Estudiantes que escriben las relaciones entre las cantidades que interpretan del problema para calcular los dulces de cada grado. Ej. Hay que encontrar un número y sumarle 80 y a ese resultado sumarle 50 para que de 300. (E2,E4,E6,E13,E14,E19)	6	30%
3	Estudiantes que indican que el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo se puede calcular por medio de una ecuación. (E5,E7,E11,E12)	4	20%
4	Estudiantes que no dan una respuesta acorde a lo que se pregunta. Ej. 3° igual a 180, 5° y 4° igual a 50. (E1,E3,E8)	3	15%

Según lo que se observa en la tabla 17, el 85% de los estudiantes contestan de manera correcta la pregunta, mientras que el 15% de los estudiantes no dan una respuesta acorde a la misma, pues responden en relación con la pregunta anterior, en la que se pide explicar la situación. Del 85% de los estudiantes que contestaron correctamente o de forma válida, el 35% indica que se puede calcular el total de dulces recogidos, sumando los dulces de cada grado, de estos, E9, E10, E16, E17, E18 y E20 lo indican en lenguaje natural, con diferentes palabras, E9, E10 y E20 indican que se obtiene sumando los dulces de todos los grados, E16 indica que se deben buscar 3 números que al sumarlos den 300, E17 y E18 indican que se obtienen sumando lo que recogió cada grado, mientras que E15 realiza una operación aditiva en la cual suma los dulces de cada grado y obtiene como resultado 300 (ver figura 16).

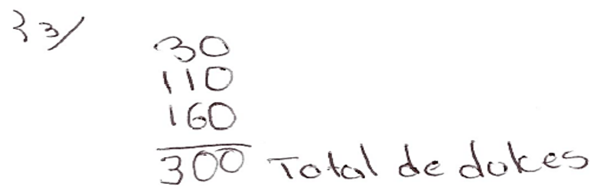


Figura 16. S1, Pb2, P3, E15

Un 30% escribe las relaciones entre las cantidades que interpretan del problema para calcular los dulces de cada grado. Sin embargo, en este último caso, no todas las relaciones que establecieron los estudiantes están correctamente interpretadas, E2 indica que a los dulces de grado 3° se le debe sumar 80 para hallar los dulces de grado 4° y a ese resultado se le debe sumar 50 para hallar los dulces de grado 5°, lo cual parece indicar que relaciona los dulces de grado 3° como la incógnita del problema y a partir de ella encuentra los dulces de los demás grados, lo cual es incorrecto (ver figura 17).

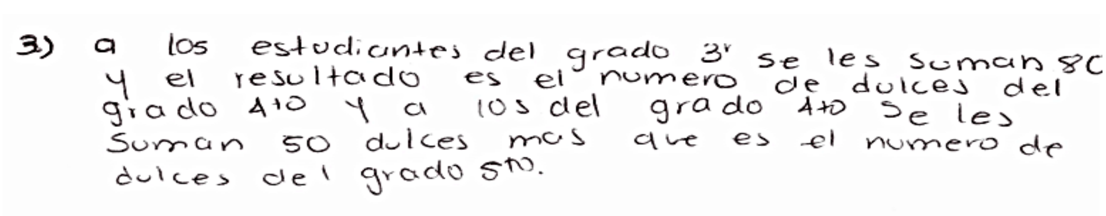

3) a los estudiantes del grado 3r se les suman 8C
y el resultado es el numero de dulces del
grado 4to y a los del grado 4to se les
suman 50 dulces mas que es el numero de
dulces del grado 5to.

Figura 17. S1, Pb2, P3, E2

En cuanto a E4, establece primeramente una cantidad numérica específica igual a 30, de la cual no deja evidencia de ningún procedimiento que lo haya llevado a ese resultado, luego, a partir de esa cantidad establece la primera relación entre cantidades “*Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°”,* por lo cual se creería que toma el número 30 como la cantidad de dulces de grado 4° para cumplir con la primera relación, pero luego cuando establece la segunda relación “*los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado 3°”,* indica que es para conocer los dulces de grado 4° y luego con esa cantidad conocer los dulces de grado 5°, sin lograr identificar correctamente la relación entre cantidades, y sobre todo la relación implícita que hay entre el total en relación con sus partes, ya que en los resultados que obtiene por grado, al sumarlos darán más de 300 dulces (ver figura 18).

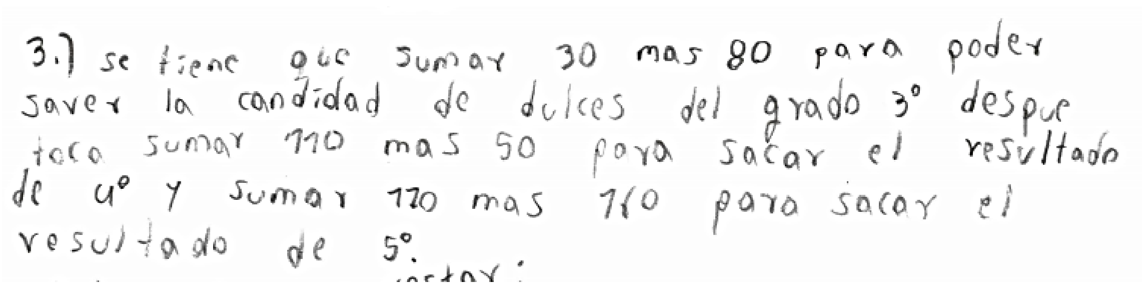


Figura 18. S1, Pb2, P3, E4

Con lo que se refiere a E6 y E14 indican con diferentes palabras que se debe encontrar un número (es consciente de la existencia de una incógnita) y a ese número se le suma 80, y a ese resultado se le suma 50 para lo cual todo eso debe sumar 300, lo que parece indicar que aunque no mencionan las relaciones por grados si entienden el orden de las relaciones que se establecen en el problema y que el resultado de esas dos sumas más el número que hallaron inicialmente debe ser igual a 300 dulces, lo cual es correcto. E19 en cambio, establece la relación “*grado 3° recogieron 80 dulces más*” como la cantidad de dulces de grado 3°, además indica que grado 4° recogió 100 dulces y se separaron en dos grupos para que cada uno tuviera 50 dulces, lo que parece indicar que trata de vincular la relación “*grado 5° recogieron 50 dulces más*” pero lo hace de forma incorrecta.

Ahora bien, la respuesta que estable E13 es bien interesante, ya que por medio de un lenguaje gráfico no solo establece las relaciones de los dulces recogidos en cada grado de manera correcta, sino que trae a colación el problema anterior, (ver figura 19)

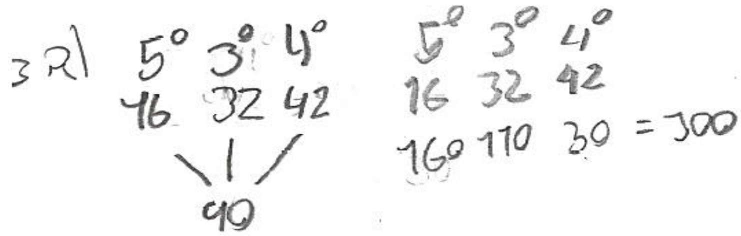


Figura 19. S1, Pb2, P3, E13

Por otra parte, el 20% restante de los estudiantes que respondieron correctamente indican que el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo se puede calcular por medio de una ecuación, más no realizan ningún tipo de gráfica u operación que sustente dicha respuesta.

Lo anterior, permite evidenciar que algunos estudiantes no entendieron muy bien la pregunta, ya que establecen relaciones entre los tres grados, pero no indican que el total se conforma por los dulces recogidos en los grados 3°, 4° y 5° que era lo esperado. Sin embargo, dichas respuestas son de gran importancia, ya que permiten ver el tipo de razonamiento o la manera como están interpretando y comprendiendo, tanto el problema como la pregunta.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 4 (S1, Pb2, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 18 Tipificación S1, Pb2, P4

Pregunta 4. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3° se obtiene sumando 80 dulces más a la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4°. (E1,E2,E3,E6,E7,E8,E9,E11,E12,E13,E14,E17,E18,E20)	14	70%
2	Estudiantes que indican por medio de una operación o lenguaje natural que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3° se obtiene efectuando una resta de las relaciones entre cantidades del problema (80-50) que da como resultado 30. (E4,E15)	2	10%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de grado 3° se obtiene sumando 50 dulces más al grado 3°. (E5)	1	5%
4	Estudiantes que no dan una respuesta acorde a lo que se pregunta. Ejs: Se obtiene multiplicando la cantidad de grado 3°. grado 3° tiene 80 dulces. (E10,E19)	2	10%
5	Estudiantes que no responden la pregunta. (E16)	1	5%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 4, problema 2, situación 1, que se muestran en la tabla 18, se observa que el 70% de los estudiantes logran responder correctamente, al indicar por medio de un lenguaje natural que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3° se obtiene sumando 80 dulces más a la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4°.

Por otro lado, el 25% de los estudiantes no contestan acertadamente la pregunta, ya que establecen relaciones incorrectas para hallar la cantidad de dulces de grado 3° o dan respuestas que no tienen relación con la pregunta. De estos, E4 quien a pesar de no responder la pregunta encuentra una forma diferente de dar solución al problema, teniendo en cuenta la existencia de una incógnita y de las relaciones entre cantidades que se establecen, creyendo que solamente había que restar las dos relaciones (80-50) para obtener el valor de *x*, lo cual logra ser acertado por una coincidencia, ya que la operación no es válida. (ver figura 17), algo parecido sucede con E15 quien por medio de un lenguaje natural indica que la cantidad de dulces de grado 3° se obtiene restando 80 con 50 lo cual da como resultado 30. Lo anterior parece indicar que ambos estudiantes interpretan los dulces de los estudiantes grado 3° como la incógnita del problema, lo cual no es correcto.

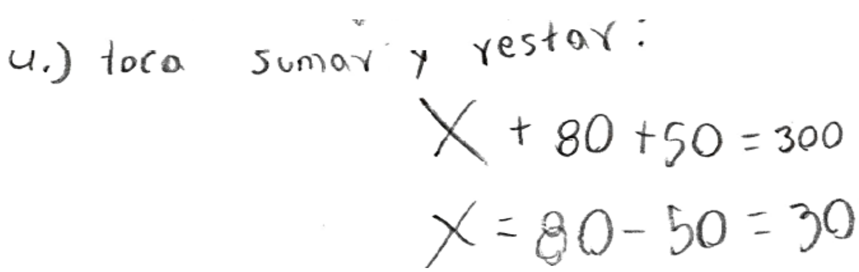


Figura 20. S1, Pb2, P4, E4

Solo el 5% de los estudiantes no responden a la pregunta.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 5 (S1, Pb2, P5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 19 *Tipificación S1, Pb2, P5*

Pregunta 5. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° se obtiene sumando 50 dulces más a la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°. (E2,E3,E4,E7,E8,E9,E11,E12,E13,E14,E17,E18,E20)	13	65%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° se obtiene realizando una operación. Ej. sumando 50 a 110. 30+80=110+50=160. (E6,E15)	2	10%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° se obtiene sumando 80 dulces más a la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4°. (E5)	1	5%
4	Estudiantes que no dan una respuesta acorde a lo que se pregunta. Ej. La cantidad de dulces de grado 5° es igual a 130. (E1,E10,E19)	3	15%
5	Estudiantes que no responden la pregunta. (E16)	1	5%

En relación con los resultados de la pregunta 5, problema 2 de la situación 1, presentados en la tabla 19, se observa que el 75% de los estudiantes contestan de manera correcta la pregunta. De estos, el 65% indica que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° se obtiene sumando 50 dulces más a la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3° mientras que el 10% restante realiza una operación que igualmente da cuenta del procedimiento a seguir para obtener la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° (ver figura 21).

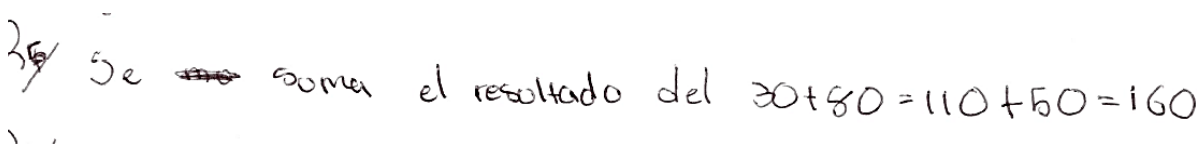


Figura 21. S1, Pb2, P4, E15

Ahora bien, el 20% de los estudiantes no contesta a la pregunta de manera correcta, de estos, el 15% da una respuesta no acorde con lo que se pregunta, más específicamente, E1 indica que la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5° es 130, E10 afirma que se obtiene dividiendo la cantidad de grado 5° y E19 indica que los estudiantes de grado 5° tienen 100 dulces, pero no realizan ningún procedimiento que sustente su afirmación, por lo cual resulta difícil entrar a analizar el tipo de comprensión que los llevó a esos resultados. Sólo el 5% de los estudiantes no responden la pregunta.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 6 (S1, Pb2, P6)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 20 *Tipificación S1, Pb2, P6*

Pregunta 6. Si x representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Cantidad de dulces de grado 4°	x
Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5°	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$x + x + 80 + x + 80 + 50$, la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "$x + x + 80 + x + 80 + 50 = 300$".(E5,E7,E9,E13,E16,E17,E18)	7	35%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "110", la cantidad de dulces de grado 5° es "160",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$30 + 110 + 160$", la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "300".(E3,E4,E8)	3	15%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$30 + 110 + 160$", la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "300".(E1,E6,E15,E20)	4	20%
4	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$x + 80 + 50$, la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "$x + 80 + 50 = 300$".(E2,E11,E12,E14)	4	20%
5	Estudiantes que llenan la tabla con otro tipo de valores. Ej. 80/50/300/300 (E10,E19)	2	10%

Con base en los resultados obtenidos en la tabla 20, se observa que el 65% de los estudiantes completan la tabla de manera acertada, de estos, el 35% indica que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$x + x + 80 + x + 80 + 50$, la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "$x + x + 80 + x + 80 + 50 = 300$"lo cual representa el tipo de respuesta esperada, ya que logran asociar de manera precisa el contexto del problema tanto en lenguaje natural como en lenguaje algebraico, que es tan difícil de comprender para los estudiantes cuando inician sus estudios algebraicos. Ahora bien, un 15% de los estudiantes establece que la cantidad de dulces de grado 3° es "110", la cantidad de dulces de grado 5° es "160",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$30 + 110 + 160$", la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "300",de modo que es igualmente válido, porque aunque no expresen el lenguaje natural por medio de un lenguaje simbólico, si comprenden las relaciones que los llevó a indicar una cantidad numérica acertada por grado, y a establecer relaciones por medio de operaciones aditivas entre los tres grados. Además, un 20% de los estudiantes afirman que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$30 + 110 + 160$", la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "300", lo cual parece indicar que asocian el lenguaje natural con el lenguaje simbólico hasta cierto punto y luego decidieron continuar estableciendo las cantidades numéricas como tal que representan lo enunciado en lenguaje natural, lo cual es igualmente válido.

Por otro lado, el 30% de los estudiantes completan de forma incorrecta la tabla, de ellos, el 20% indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "$x + 80$", la cantidad de dulces de grado 5° es "$x + 80 + 50$",la cantidad de dulces entre los tres grados es "$x + 80 + 50$, la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "$x + 80 + 50 = 300$",de manera que encuentran común la expresión “$x + 80 + 50$” para representar la cantidad de dulces en grado 5° y en los tres grados, tal vez creyendo que la x simboliza la cantidad de dulces de grado 4°, el ”80” la cantidad de dulces de grado 4° y el “50” la cantidad de dulces de grado 5°.

En cuanto al 10% restante de los estudiantes completaron la tabla con otras cantidades, más específicamente, E10 y E19 indican que la cantidad de dulces de grado 3° es "80", la cantidad de dulces de grado 5° es "50",la cantidad de dulces entre los tres grados es "300, la cantidad total de dulces en los tres grados es 300 es "300",de modo que se logra evidenciar el tipo de comprensión que tienen de las relaciones en forma de cantidades específicas por grado, es decir, se encuentra muy ligados aún en el plano de las cantidades.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 7 (S1, Pb2, P7)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 21. *Tipificación S1, Pb2, P7*

Pregunta 7. Ahora si, encuentra la cantidad de dulces que recogió cada grado.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que grado 3° recogió 110 dulces, grado 4° recogió 30 dulces y grado 5° recogió 160 dulces. (E2,E5,E7,E9,E11,E12,E13,E14,E16,E17,E18,E20)	12	60%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces recogidos en todos los grados es 300. (E4,E10)	2	10%
3	Estudiantes que indican que grado 3° recogió 30 dulces, grado 4° recogió 110 dulces y grado 5° recogió 160 dulces. (E6,E8,E15)	3	15%
4	Estudiantes que no responden la pregunta. (E1,E3,E19)	3	15%

Respecto a los resultados presentados en la tabla 21 se observa que el 70% de los estudiantes logra identificar de forma correcta la cantidad de dulces en los grados 3°, 4° y 5°. De estos, el 60% afirma como se esperaba que los estudiantes de grado 3° recogieron 110 dulces, grado 4° recogió 30 dulces y grado 5° recogió 160 dulces, mientras que un 10% indicó que en los tres grados se recogieron 300 dulces, lo cual no era la respuesta que se espera, al ser un dato conocido en el problema, sin embargo, es válido debido a que posiblemente la redacción de la pregunta pudo interpretarse con respecto a la cantidad total de dulces en los 3 grados (300)

Por otro lado, el 15% de los estudiantes indican que grado 3° recogió 30 dulces, grado 4° recogió 110 dulces y grado 5° recogió 160 dulces, lo cual permite evidenciar una comprensión de la incógnita errada, o falta de atención al momento de dar la respuesta, ya que si bien las cantidades numéricas están correctas de acuerdo a las relaciones que se establecen en el problema. El 15% restante de los estudiantes no responden la pregunta.

Por último, se puede decir que este problema permitió un acercamiento al álgebra más evidente con respecto al problema anterior, específicamente en el punto 6, se trató de guiar al estudiante a un lenguaje algebraico por medio del lenguaje natural, lo cual tuvo buena recepción por parte los estudiantes, debido a que la mayoría logró interpretar a partir del dato dado "*cantidad de dulces de grado 4°= x" las* demás relaciones que se establecen en función de la misma.

Problema 3: Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

La profesora Mayerleny ayudó a disfrazar a los niños de grado 3º, para lo cual los dividió en tres grupos, los que querían usar pelucas, los que querían usar máscaras y los que querían pintarse la cara con maquillaje. La profesora en total gastó $94.500. Si las máscaras cuestan el doble que el maquillaje y las pelucas cuestan el triple de las máscaras. ¿Cuánto tiene que pagar cada grupo?

Situación 1: Problema 3, Pregunta 1a (S1, Pb3, P1a)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 22 *Tipificación S1, Pb3, P1a*

	Pregunta 1.a. Escribe los datos conocidos del problema.		
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que el total gastado ($ 94.500) en máscaras, maquillaje y pelucas es una cantidad conocida. (E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,E9,E10,E11,E12,E15,E16,E17,E18,E19,E20)	17	85%
2	Estudiantes que indican que los datos conocidos son que al maquillaje se duplica para obtener las máscaras y a este último se triplica para saber el valor de las pelucas. (E13,E14)	2	10%
3	Estudiantes que indican que el dato conocido es que la profesora ayuda a disfrazar a los estudiantes de grado 3°. (E8).	1	5%

Conforme a los datos de la Tabla 22, el 85% de los estudiantes logran identificar que el dato conocido es el total gastado por la profesora Mayerleny en máscaras, maquillaje y pelucas. Cabe resaltar que es de gran importancia que los estudiantes logren establecer la relación entre las partes (maquillaje, máscaras y pelucas) y el total, con el fin de solucionar el problema e identificar qué datos se necesitan encontrar. Por otra parte, el 10% de los estudiantes indicó que las relaciones entre las cantidades desconocidas es el dato conocido, a pesar de no responder a la pregunta, de lo anterior se puede inferir que los estudiantes identifican las relaciones presentadas en el problema. Por último, el 5% interpreta como dato conocido la acción que realizó la profesora Mayerleny al ayudar a los estudiantes de grado 3°, interpretando los datos conocidos en el contexto del problema.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 1b (S1, Pb3, P1b)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 23 *Tipificación S1, Pb3, P1b*

Pregunta 1.b. Escribe los datos desconocidos del problema.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que dicen que se desconoce el valor de las máscaras, maquillaje y pelucas. (E1,E3,E4,E6,E9,E10,E11,E13,E16,E17,E18,E20)	12	60%
2	Estudiantes que dicen que se desconoce el valor de las máscaras y el maquillaje (E2)	1	5%
3	Estudiantes que indican que el dato desconocido es el número *x o "el valor del maquillaje"* (E12,E14)	2	10%
4	Estudiantes que escriben las relaciones entre las cantidades (E8,E15)	2	10%
5	Estudiantes que dicen que se desconoce el porcentaje que cada estudiante va a pagar (E5,E7)	2	10%
6	Estudiantes que no dan respuesta (E19)	1	5%

De acuerdo a los datos presentados en la tabla 23, se puede identificar que el 60% de los estudiantes dicen que el valor desconocido es de las máscaras, el maquillaje y las pelucas, siendo de gran importancia ya que logran identificar las cantidades desconocidas del problema.

Asimismo, el 5% dice que el valor desconocido es el de las máscaras y el maquillaje, lo anterior, parece indicar que el estudiante no tuvo en cuenta el valor de las pelucas, es decir, que no se puede decir si el valor es conocido o desconocido. Además, el 10% de los estudiantes indican que x es el valor desconocido (asumiendo x como el valor del maquillaje) siendo este la incógnita del problema y a partir de este se pueden establecer relaciones y encontrar el valor de las máscaras y las pelucas.

Igualmente, el 10% de los estudiantes escriben las relaciones entre las cantidades como desconocidas, lo que parece indicar que posiblemente encuentren que las cantidades (maquillaje, máscaras y pelucas) no tienen un valor definido y por esto expresan sus relaciones.

Por otro lado, el 10% de los estudiantes afirma que desconoce el porcentaje que cada estudiante debe pagar, si bien es cierto se desconoce, sin embargo, en ninguna parte del problema se afirma cuántos estudiantes hay en cada grupo, puede ser que los estudiantes asocian el problema anterior con este y quisieran hallar el valor que debe pagar cada estudiante. No obstante, el 5% de los estudiantes no dieron respuesta a la pregunta.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 2a (S1, Pb3, P2a)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 24 *Tipificación S1, Pb3, P2*

Pregunta 2. Juan estudiante de grado 4° afirma que los $94.500 corresponden a sumar la cantidad de dinero que se gasta en máscaras, maquillaje y pelucas.
a. Escribe si Juan tiene la razón.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que dicen que juan tiene la razón al sumar el dinero gastado entre el maquillaje, las máscaras y las pelucas. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20)	20	100%

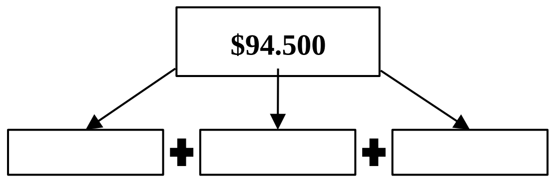
El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes identifiquen la relación entre las partes y el todo, de no haberlo identificado en la pregunta anterior. Conforme a la tabla 24 se puede identificar que el total de estudiantes, es decir, el 100% afirma que la relación propuesta por Juan es verdadera respecto al problema planteado. Asimismo, se puede identificar una relación importante presente en el pensamiento algebraico, y es la relación de equivalencia que se puede establecer entre el dinero gastado en las máscaras, el maquillaje y las pelucas y el total gastado entre los tres. Por otra parte, si los estudiantes logran establecer las relaciones entre las cantidades desconocidas (valor de las máscaras, el maquillaje y las pelucas) y el total, se puede observar que el estudiante ha identificado la estructura del problema y a partir de esta es posible que logre encontrar una solución.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 2b (S1, Pb3, P2b)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 25 *Tipificación S1, Pb3, P2b*

Pregunta 2: Juan estudiante de grado 4° afirma que los $94.500 corresponden a sumar la cantidad de dinero que se gasta en máscaras, maquillaje y pelucas.

b Teniendo en cuenta la respuesta anterior, completa la siguiente figura con las cantidades que hacen falta.



	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el gráfico sumando el maquillaje, las máscaras y las pelucas, adicionando el valor en pesos. (E2, E3, E10, E16, E20)	5	25%
2	Estudiantes que completan el gráfico sumando valores en pesos, teniendo en cuenta las relaciones entre el valor del maquillaje, las máscaras y las pelucas. (E4, E6, E11, E14, E15)	5	25%
3	Estudiantes que completan el gráfico sumando el valor de las palabras maquillaje, las máscaras y las pelucas. (E1,E5,E7,E8,E12,E13,E17,E18,E19)	9	45%
4	Estudiantes que no completan el gráfico (E9)	1	5%

Teniendo en cuenta la tabla 25 se puede observar que el 95% de los estudiantes responden de forma acorde al problema, de lo anterior el 50 % de los estudiantes logran establecer los valores del maquillaje, las máscaras, y las pelucas, es decir, que en la resolución de esta pregunta la mitad de los estudiantes lograron resolver el problema teniendo en cuenta la estructura del problema, en otras palabras, los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y la relación entre las partes y el todo. Sin embargo, las respuestas de los estudiantes no permiten evidenciar cuál fue el razonamiento o procedimiento realizado para responder a esta pregunta, pero se puede suponer que realizaron un tanteo encontrado un número ficticio que cumpla con todas las relaciones y sea coherente con la información planteada en el problema (Bednarz y Janvier 1996), ya que no se evidencia por que el gráfico debe contener estos valores. Por otro lado, al completar este tipo de gráficos puede ser una heurística o representación, en el cual los estudiantes pueden identificar la estructura del problema e igualmente permite realizar un procedimiento para solucionar el problema.

Por otra parte, el 45% de los estudiantes completan el gráfico con las palabras maquillaje, máscaras y pelucas, lo cual permite evidenciar que los estudiantes identifican la estructura del problema estableciendo las relacione entre las partes y el todo, lo cual permite decir, que los estudiantes comprenden el problema al representarlo en el gráfico. Además, 5% de los estudiantes no logra responder a la pregunta.

Recapitulando, la pregunta anterior permite al estudiante organizar y categorizar el problema, permitiendo en algunos casos identificar la estructura y en otros les permite resolver el problema identificando cada uno de los valores de los objetos comprados.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 3 (S1, Pb3, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 26 *Tipificación S1, Pb3, P3*

Pregunta 3. Marca con una (*x*) el valor que debe conocer la profesora Mayerleny para obtener la cantidad total de dinero que los estudiantes que se disfrazan con máscaras deben pagar.

- **a.** El valor que deben pagar los estudiantes que se maquillaron ( )
- **b.** El valor que deben pagar los estudiantes que se colocaron pelucas ( )

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que marcaron la opción a (E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20)	16	80%
2	Estudiantes que marcaron la opción b (E1)	1	5%
3	Estudiantes que no marcaron ninguna opción (E2,E3,E4)	3	15%

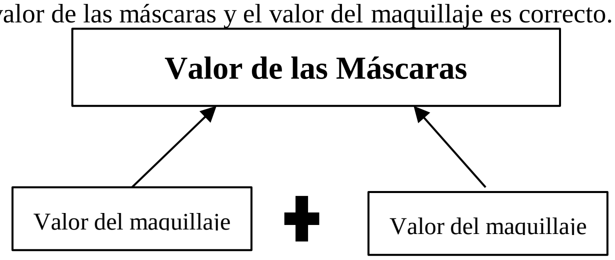
El objetivo de esta pregunta es determinar si los estudiantes comprenden las relaciones entre las cantidades desconocidas, al identificar cual es la mejor opción para encontrar el valor de las máscaras , por lo tanto en la tabla 26 se logra identificar que el 80% de los estudiantes marcaron la opción b, es decir, que estos estudiantes identificaron que al saber el valor del maquillaje se podría obtener el valor de las máscaras, lo anterior siendo de gran importancia puesto que el valor del maquillaje se puede identificar como la incógnita del problema y a partir de ella se establecen las relaciones entre las cantidades. Además, el 5% de los estudiantes marcaron la opción b, se puede inferir que no es la mejor opción para hallar el valor de las máscaras, pero puede ser que tienen en cuenta la relación entre las máscaras y las pelucas. Por último, el 15% de los estudiantes no dio respuesta a la pregunta.

Por otra parte, se hace menester aclarar que un problema se puede resolver de distintas formas, para el caso anterior un estudiante puede reestructurar el problema con el fin de identificar cada uno de los valores solicitados del problema, aunque esta resolución sea compleja y diferente se puede realizar, según Bednarz y Janvier (1996) los estudiantes pueden representar de una forma distinta un problema, es decir, colocar todo en función de una cantidad, por ejemplo, que el E1 decidiera que la incógnita son las pelucas y las otras cantidades dependen de esta.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 4 (S1, Pb3, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 27 *Tipificación S1, Pb3, P4*

Pregunta 4. Indica si la siguiente figura que hace Juan para comprender las relaciones entre las cantidades desconocidas, es decir, el valor de las máscaras y el valor del maquillaje es correcto.



a. Escribe si el gráfico anterior representa el valor de las máscaras.
b. Justifica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr	JUSTIFICACIÓN	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Juan es verdadera.	18	90%	Estudiantes que justifican que el valor de las máscaras es dos veces el valor del maquillaje. (E1, E2, E3, E5, E6. E7, E8, E9, E11, E12, E13, E16)	12	60%
				Estudiantes que justifican que al sumar el maquillaje se obtiene el valor de la máscaras (E10, E14, E15, E20)	4	20%
				Estudiantes que justifican que la máscara tiene un mayor valor que el maquillaje.(E18)	1	5%
				Estudiantes que indican que el valor de las máscaras es igual al valor del maquillaje.(E17)	1	5%
2	Estudiantes que no responden de acuerdo a la pregunta	1	5%	Estudiantes que no justifican. (E19)	1	5%
3	Estudiantes que no responden.	1		Estudiantes que no justifican.(E4)	1	5%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 4, problema 3, Situación 1, que se muestran en la tabla 27, se observa que el 90% de los estudiantes indican que la afirmación de Juan es verdadera. De lo anterior, el 60% de los estudiantes Justifican que el valor de las máscaras es igual a dos veces el valor del maquillaje, lo que parece indicar que los estudiantes verificaron la respuesta anterior con las relaciones entre las cantidades desconocidas, asimismo, logran establecer la relación entre el gráfico y la estructura del problema, siendo de gran importancia al momento de resolver el problema.

Además, el 20% de los estudiantes justifican que al sumar dos veces el valor del maquillaje se obtiene el valor de las máscaras, es decir, que los estudiantes identifican la operación y relación que se establece entre estas dos cantidades *"las máscaras cuestan el doble que el maquillaje"* (máscaras = 2 maquillaje o máscaras= maquillaje + maquillaje).

Por otra parte, el 5% de los estudiantes, es decir, que el E18 (ver figura 22) afirma que el valor de las máscaras es mayor que el valor del maquillaje, de lo anterior, el estudiante dice que el gráfico realizado por Juan representa al valor de las máscaras y además a partir de este gráfico el estudiante puede inferir que las máscaras cuestan más que el maquillaje, siendo este un análisis acertado por el estudiante.

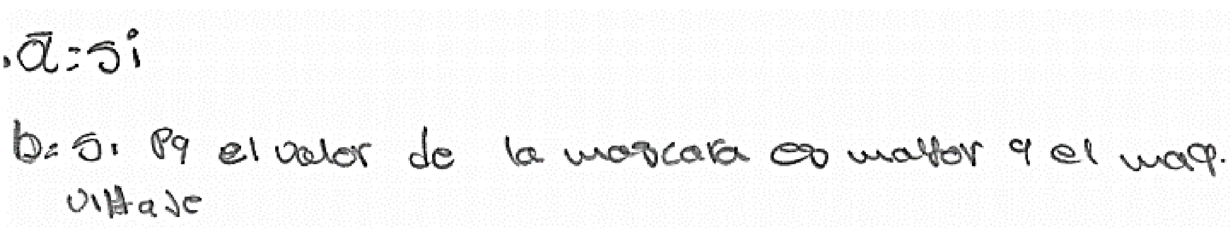


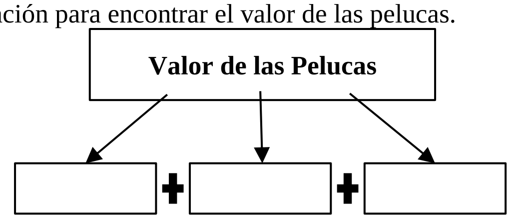
Figura 22 S1, Pb3, P3, E18

Sin embargo, el 5% de los estudiantes afirma que el gráfico es correcto pero la justificación no es coherente. y el último 5% de los estudiantes no responde a la pregunta.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 5 (S1, Pb3, P5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 28 *Tipificación S1, Pb3, P5*

Pregunta 5. Completa la siguiente figura teniendo en cuenta las relaciones involucradas entre las cantidades desconocidas, es decir, explica la relación para encontrar el valor de las pelucas.



	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el gráfico con las palabras máscaras, máscaras, máscaras cada uno de los espacios en blanco (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E20)	17	85%
2	Estudiantes que no completan el gráfico (E4,E9,E19)	3	15%

Conforme a lo presentado en la tabla 28 se puede inferir que el 85% de los estudiantes comprende las relaciones entre las cantidades desconocidas, particularmente en este caso la relación entre el valor de las máscaras y el valor de las pelucas (ver figura 23), lo anterior al establecer que tres veces la suma del valor de las máscaras es igual al valor de las pelucas. Por otra parte, Gallardo y Rojano (1988) afirman que es de gran importancia romper con el plano de las cantidades y avanzar en el plano de las relaciones, siendo esta una característica de gran importancia en el estudio del álgebra.

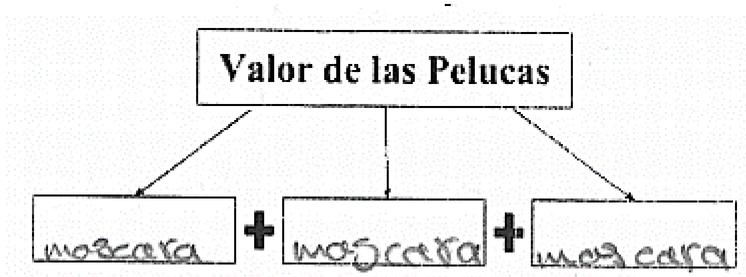


Figura 23. *S1, Pb3, P5, E18*

Sin embargo, el 15% de los estudiantes no completo el gráfico, lo anterior puede ser a causa de que los estudiantes no han entendido las relaciones hasta el momento, particularmente en los casos de E19 y E4, debido a que en la anterior pregunta no la han respondido correctamente. Por otra parte, puede ser que E9 entienda las relaciones, pero no comprenda cómo se pueden establecer las relaciones o simplemente no encuentre la relación "triple" como sumar tres veces una cierta cantidad.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 6a (S1, Pb3, P6a)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 29 *Tipificación S1, Pb3, P6a*

Pregunta 6. Teniendo en cuenta las figuras anteriores que representan las relaciones entre las cantidades, **a.** Establece cuánto maquillaje representan el gasto total de la profesora Mayerleny			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que nueve (9) veces el valor del maquillaje es igual al total gastado por la profesora Mayerleny, es decir, $94.500 (E5, E7, E10, E11, E13, E14, E15, E17, E18)	9	45%
2	Estudiantes que no responden de acuerdo a la pregunta (E8,E19)	2	10%
3	Estudiantes que no responden la pregunta (E1, E2, E3, E4, E6, E9, E12, E16, E20)	9	45%

La tabla 29 permite evidenciar que el 45% de los estudiantes dicen que 9 veces el valor del maquillaje es igual al total gastado por la profesora Mayerleny, de lo anterior el 20% de los estudiantes asumió como dato conocido el valor del maquillaje igual a $10.500 desde la pregunta 2b. completando el gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades y el total. En consecuencia, el 10% de estos estudiantes realizó la multiplicación de $10.500 por 9 siendo igual a $94.500, afirmando que 9 veces el valor del maquillaje es igual al valor gastado por la profesora Mayerleny (ver figura 24). Asimismo, se puede asumir que el otro 10% realizó la misma operación teniendo como dato inicial el valor del maquillaje (ver figura 25). Por otra parte, el 25% restante de estudiantes afirma que 9 veces el valor del maquillaje es igual al total gastado por la profesora Mayerleny, sin embargo, los estudiantes no realizan ningún procedimiento en la hoja de trabajo, por tanto, no se puede identificar cuál fue el proceso de resolución.

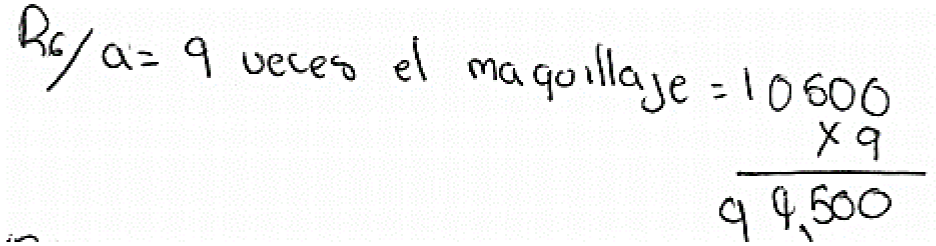


Figura 24. *S1, Pb3, P6a, E15*

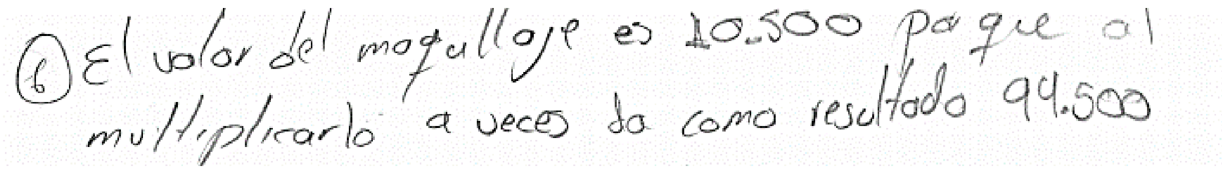


Figura 25. *S1, Pb3, P6a, E7*

Por otro lado, el 10% de estudiantes no responde de acuerdo a la pregunta, por ejemplo, E8 escribe la relación entre las pelucas y las máscaras y E19 escribe el total gastado por la profesora Mayerleny (ver figura 26). Al parecer los estudiantes interpretaron de forma inadecuada la pregunta, en el primer caso puede que E8 comprendió la pregunta cómo "teniendo en cuenta las relaciones anteriores" y no leyó el complemento de la pregunta, en el segundo caso E19 el estudiante lo interpreto como "el total gastado por la profesora Mayerleny".

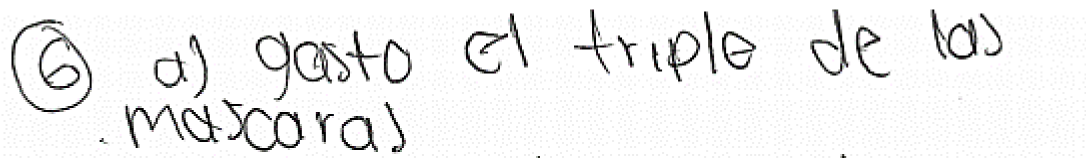


Figura 26. *S1, Pb3, P6a, E8*

Ahora bien, el 45% de los estudiantes no respondió a esta pregunta, puede ser que el estudiante no entendió el enunciado de la pregunta, la pregunta fue un poco compleja para ellos o la redacción no propició a que la entendieran. En la puesta en acto, se logró observar que la gran mayoría no entendieron la pregunta "Establece cuánto maquillaje representan el gasto total de la profesora Mayerleny", por consiguiente se explicó que debían hallar cuántas veces el valor del maquillaje es igual al dinero gastado por la profesora, esta explicación la entendieron y fue gracias a ella que lograron responder, particularmente el caso de un estudiante que realizó un razonamiento en el cual se tenían presentes las relaciones entre las cantidades, es decir, que el logro identificar que el valor de las máscaras es igual a dos maquillajes y por tanto las pelucas tienen un valor de 6 maquillajes más el valor del maquillaje inicial da un total de 9 veces el valor del maquillaje, que es igual al total gastado por la profesora, pero el estudiante no escribió este razonamiento en las hojas de trabajo. Sin embargo, algunos estudiantes no preguntaron nada en relación con la pregunta.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 6b (S1, Pb3, P6b)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 30. *Tipificación S1, Pb3, P6b*

Pregunta 6. Teniendo en cuenta las figuras anteriores que representan las relaciones entre las cantidades,
b. Escribe cuánto cuesta un solo maquillaje

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que el valor del maquillaje es igual a $10.500 (E2, E3, E5, E7, E8, E10, E11, E13, E16, E17, E18, E20)	14	70%
2	Estudiantes que no responden de acuerdo a la pregunta (E19)	1	5%
3	Estudiantes que no responden la pregunta (E1, E4, E6, E9, E12, E14, E15)	5	25%

Según la tabla 30, el 70% de los estudiantes le dio el valor correspondiente al maquillaje, particularmente los estudiantes E13, E17, E18 realizan una división del total gastado por la profesora Mayerleny, es decir, $94.500 entre 9 para hallar el valor de un solo maquillaje (ver figura 27). Lo anterior, parece indicar que los estudiantes asocian los valores de la siguiente manera si 9 veces el valor del maquillaje es igual a $94.500 entonces para hallar cuánto vale un solo maquillaje reparten el total entre nueve realizando la división. Además, el resto de los estudiantes no realizó ningún procedimiento o explicación de la respuesta. Sin embargo, los estudiantes E2, E3, E10, E11, E16, E20, anteriormente en la pregunta 2b completaron en gráfico en el que se asume un valor de $10.500 al maquillaje, por lo tanto se puede decir que a partir de este dato se dio respuesta a la pregunta.

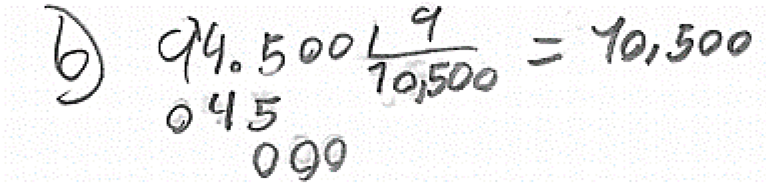


Figura 27. *S1, Pb3, P6b, E13*

Por otra parte, el 5%de los estudiantes no respondieron a la pregunta y no se logra identificar un razonamiento válido. Además, el 25% no dan respuesta a la pregunta, del cual se puede inferir que no se interpretó de una forma adecuada el valor de un solo maquillaje o los estudiantes no encontraron una relación que les permitiera encontrar este valor. Sin embargo, los estudiantes E4. E6, E14, E15 le dieron el valor de $10.500 en la pregunta 2b teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades.

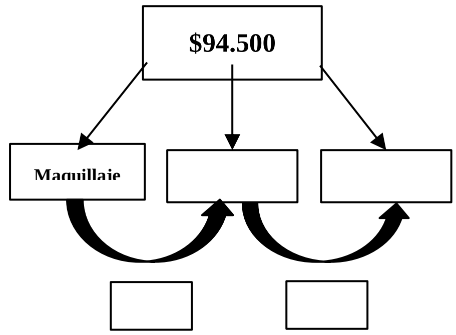
Por consiguiente, se puede decir que el propósito de las preguntas 6a y 6b era que el estudiante en un primer momento lograra expresar las relaciones en términos de la incógnita, para este caso el valor del maquillaje, sin embargo, la mayoría de los estudiantes conocían previamente la incógnita y fue a partir de esta que se produjeron las respuestas. Ahora bien, los estudiantes que no tenían este dato responden correctamente a la pregunta, pero no se encontró ningún procedimiento que permitiera evidenciar que los estudiantes expresaran las relaciones por medio de una sola cantidad.

Por lo anterior, es de gran importancia trabajar este tipo de ejercicios, ya que como lo plantean Bednarz y Janvier (1996) en su investigación es muy complejo representar las relaciones en términos de una sola incógnita, por tanto, a pesar de no obtener los resultados esperados, es un común denominador que se puede presentar en el desarrollo del razonamiento algebraico.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 7 (S1, Pb3, P7)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 31. *Tipificación S1, Pb3, P7*

Pregunta 7. Completa las relaciones entre cantidades que se presentan en la siguiente figura, teniendo en cuenta el problema anterior.



	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha con las palabras máscaras y pelucas. (E1,E2,E3,E5,E6,E7,E8,E10,E12,E13,E14,E15,E16,E17,E18,E20)	16	80%
2	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha con pelucas y máscaras. (E11)	1	5%
3	Estudiantes que no responden (E4,E9,E19)	3	15%

Conforme a la tabla 31, se puede decir que el 80% de los estudiantes completan el gráfico teniendo en cuenta la estructura del problema, es de gran importancia debido a que tienen en cuenta las relaciones entre el valor de cada uno de los objetos, es decir, el maquillaje, las máscaras y las pelucas, además de las relaciones entre las partes y el todo. Por otra parte, es de gran importancia realizar este tipo de gráficos ya que permiten al estudiante organizar los valores y determinar de cuál valor se originan los demás.

Sin embargo, el 20% de los estudiantes no completo el gráfico de forma correcta o no completo el gráfico, por consiguiente, se puede decir que los estudiantes no comprendieron el problema o no tienen presente las relaciones entre las cantidades.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 8 (S1, Pb3, P8)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 32 *Tipificación S1, Pb3, P8*

Pregunta 8. Si (*x*) representa el valor del maquillaje, encuentra una expresión que permita resolver el problema.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que escriben la expresión "x+(x2) +3(x2) =94500" para solucionar el problema. (E14, E15 ,E18)	3	15%
2	Estudiantes que escriben la expresión "2x+2x3+x" para solucionar el problema (E2, E3, E10, E11, E13, E16, E17, E20)	8	40%
3	Estudiantes que no responden a la pregunta. (E1,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E12,E19)	9	45%

De la tabla anterior, el 40% de los estudiantes dicen que la expresión *"2x+2x.3+x"* (ver figura 28) siendo *x* el valor del maquillaje, se puede identificar un razonamiento algebraico en los estudiantes a pesar de no tener en cuenta la igualdad que presenta esta expresión con la cantidad total de dinero gastado por la profesora Mayerleny. Asimismo, de la expresión *"2x+2x.3+x"* re puede inferir que *2x* es igual al valor de las máscaras, 2*x.3* es igual al valor de las pelucas y *x* es igual al valor del maquillaje, además cada una de estas expresiones se conectan por medio de sumas, lo cual permite inferir que, aunque los estudiantes no escriben la igualdad, se está pensando en una. En consecuencia, se puede decir que se presenta una ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico, puesto que representan las relaciones entre las cantidades en un lenguaje simbólico algebraico, el cual está cargado de significado para el estudiante.

Figura 28. *S1, Pb3, P8, E2*

Por otro lado, el 15% de los estudiantes escriben la expresión *"x+(x2) +3(x2) =94500"* siendo *x* el valor del maquillaje (ver figura 29), se puede decir que los estudiantes ven el signo igual como una relación de equivalencia entre el valor de de cada uno de los objetos y el total, es decir, que 94.500 equivalen a la expresión *"x+(x2) + 3(x2)"*. Según Gallardo y Rojano (1988) es de gran importancia que los estudiantes vean en el signo igual una relación de equivalencia siendo este una evolución de la igualdad en aritmética.

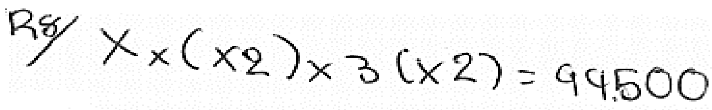


Figura 29. *S1, Pb3, P8, E14*

Ahora bien, el 45% de los estudiantes no responden a la pregunta, lo anterior puede presentarse ya que es complejo para los estudiantes manejar un lenguaje algebraico y encontrar la expresión que le permita resolver el problema. Lo que parece indicar una resistencia en el pensamiento aritmético y en el lenguaje natural.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 9a y 9b (S1, Pb3, P9a y P9b)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 33. *Tipificación S1, Pb3, P9a y P9b*

Pregunta 9. Cristián afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = x + (2x) + 3(2x), siendo x el valor del maquillaje"* y Gabriela afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = 2x + 2x + 2(3x), siendo x el valor del maquillaje"*

- **a.** Escribe la validez la validez de cada afirmación.
- **b.** Justifica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**	**JUSTIFICACIÓN**	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que dicen que la afirmación de Cristián es verdadera.	10	50%	Estudiantes que justifican que la de Gabriela está mal porque inició con 2x (E14,E15)	2	10%
				Estudiantes que dicen que no da el resultado esperado (E3,E10,E11,E13,E16,E18,E20)	7	35%
				Estudiantes que no responden(E17)	1	5%
2	Estudiantes que no responden.	10	5%	Estudiantes que no justifican (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E12, E19)	10	50%

La tabla 33, muestra los tipos de respuesta de la pregunta 9a y su justificación en la pregunta 9b,, las cual tiene como objetivo contrastar las respuestas a la pregunta anterior, con el fin de identificar similitudes y diferencias con la expresión anterior, en la cual se puede evidenciar que el 50% de los estudiantes dicen que la afirmación de Cristian es verdadera, lo interesante de esta pregunta es que todos los estudiantes que dieron respuesta tipo 1 y tipo 2 a la pregunta anterior, son los que afirman que afirman que la solución de Cristian es verdadera.

Por consiguiente, se puede afirmar que los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones y estructura del problema al identificar la expresión de Christian como la correcta.

Sin embargo, como se mencionó anteriormente en la pregunta anterior puede resultar complejo para los estudiantes expresar la estructura del problema en una expresión algebraica, por tal motivo se considera que el 50% de los estudiantes no logró responder a la pregunta.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 9c (S1, Pb3, P9c)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 34. *Tipificación S1, Pb3, P9c*

Pregunta 9. Cristián afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = x + (2x) + 3(2x), siendo x el valor del maquillaje"* y Gabriela afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = 2x + 2x + 2(3x), siendo x el valor del maquillaje"*

c. Compara la expresión que encontraste en la pregunta No. 8 con la expresión dada por Cristián.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que es igual (E3,E10,E11,E13,E16,E18,E20)	7	35%
2	Estudiantes que se empieza distinto pero al fin es la misma operación (E14)	1	5%
3	Estudiantes que no responden (E1,E2,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E12,E15,E17,E19)	12	60%

De acuerdo a la tabla 34 se puede inferir que el 35% de los estudiantes afirma que la expresión es igual, cabe resaltar que solo E18 respondió en la pregunta No. 8 que la expresión *"x+(x2)+3(x2)=94500"* le ayuda a resolver el problema, al comparar esta expresión con la de Cristian " *94500 = x + (2x) + 3(2x)",* se puede observar que en primer lugar el estudiante logra identificar la igualdad como una relación de equivalencia pues al presentarse en diferente orden el estudiante identifica que son las mismas expresiones. Asimismo, el estudiante tiene presentes las propiedades del producto pues para el *x2* es igual a *2x.*

Por otro lado, el resto de los estudiantes respondió en la pregunta No. 8 que la expresión *"2x+2x3+x"* les ayuda a resolver el problema, comparándola con la expresión de Cristian "94500 = *x + (2x) + 3(2x)",* se puede observar que la expresión planteada por los estudiantes no presenta una relación de equivalencia por medio del signo igual. Sin embargo, puede ser que los estudiantes consideren obvia esta relación sin expresarla o puede ser que los estudiantes se percataron que la expresión de la derecha de Cristián es igual a la de ellos y por tanto afirmaron que eran iguales, de considerarlo es de gran importancia que los estudiantes tienen un buen dominio de la propiedad conmutativa en la adición y en la multiplicación.

Ahora bien, el 5% de los estudiantes, es decir que E14, respondió que se empieza distinto pero al fin es la misma operación (ver figura 30), el estudiante en la pregunta No. 8 respondió *"x+(x2)+3(x2)=94500"* igual que E18. Se puede reconocer que el estudiante identificó que visualmente las expresiones empiezan de diferente forma, pero afirma que en esencia son la misma operación. Lo anterior permite afirmar que el estudiante reconoce cuando una expresión es equivalente a otra al reconocer la igualdad como relación de equivalencia.

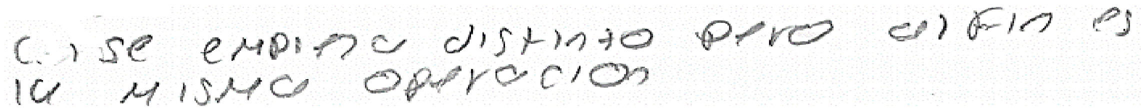


Figura 30. *S1, Pb3, P9c, E14*

No obstante, el 60% de los estudiantes no respondió a la pregunta. Lo anterior, pudo tener sus causas en que el 45% de los estudiantes no respondieron a la pregunta No. 8, además puede resultar complejo comparar las estructuras de dos expresiones algebraicas, como por ejemplo comparar una expresión algebraica que posea una igualdad y otra que no.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 10 (S1, Pb3, P10)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 35. *Tipificación S1, Pb3, 10*

Pregunta 10. Si el valor del maquillaje es de $ 13.500, escribe cuánto habría invertido la profesora Mayerleny.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades y como resultado obtienen que la profesora Mayerleny gasto $121.500 (E14,E15).	2	10%
2	Estudiantes que tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades, sin embargo, realizan mal una operación, por ejemplo, multiplicar o sumar mal. (E18, E20)	2	10%
3	Estudiantes que hayan el valor de las máscaras y el de las pelucas pero no encuentra el total gastado por la profesora Mayerleny (E13)	1	5%
4	Estudiantes que no tienen en cuenta las relaciones para hallar los valores del maquillaje y el de las máscaras (E3,E10,E11,E16)	4	20%
5	Estudiantes que no responden (E1,E2,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E12,E17,E19)	11	55%

Conforme a la tabla 35, se exponen las soluciones a la pregunta 10, cuyo objetivo era que los estudiantes lograran tener en cuenta las relaciones entre las cantidades y hallaran el valor de las máscaras y las pelucas y al final sumar el valor del maquillaje, las máscaras y las pelucas con el fin de hallar cuanto gastaría si el valor del maquillaje para este caso sería de $13.500.

En primer lugar, el 10% de los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades y como resultado obtuvieron que la profesora Mayerleny gasto $121.500, por ejemplo, E15 realizó la suma de 13.500, 27.000, y 81.000, obteniendo como resultado 121.500 (ver figura 28) , del cual se puede inferir que 13.500 es el valor del maquillaje, 27.000 es el valor de las máscaras puesto que vale el doble que el maquillaje, y por último, 81.000 es el valor de las pelucas ya que es tres veces el valor de las máscaras, como resultado se obtiene que la profesora Mayerleny gasto 121.500. Es de gran importancia que los estudiantes lograran reconocer el maquillaje como la incógnita del problema y a partir de este dato hallar los valores restantes.

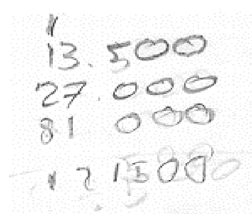


Figura 31. *S1, Pb3, P10, E14*

Por otra parte, el 10% de los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades, sin embargo, presentaron errores en las operaciones aritméticas, por ejemplo, E18 encuentra los valores del maquillaje las pelucas y las máscaras, pero al momento de realizar la suma de 13.500, 27.000 y 81.000 no tuvo en cuenta el orden para realizarla (ver figura 32). Asimismo, el estudiante E20 realiza mal la operación de 27.000 por 3 (ver figura 33), cabe resaltar que a pesar que los estudiantes no llegaron a obtener el resultado esperado es de gran importancia que ellos reconocieran la estructura y las relaciones presentados en el problema.

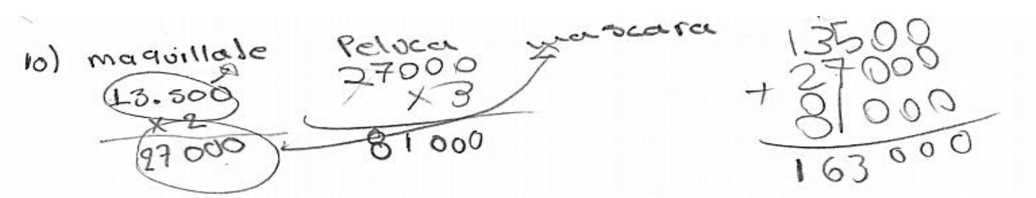


Figura 32. S1, Pb3, P10, E18

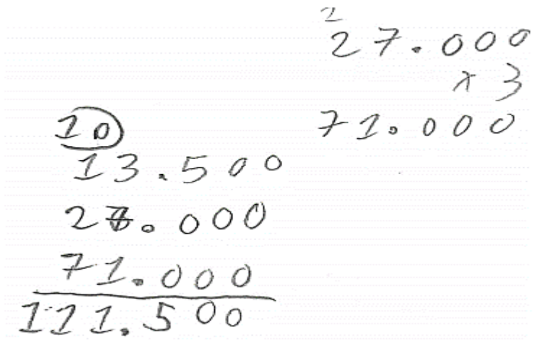


Figura 33. S1, Pb3, P10, E20

Ahora bien, el 5% de los estudiantes encuentra cada uno de los valores teniendo en cuenta las relaciones del problema (ver figura 34), pero no halla el total gastado por la profesora Mayerleny, lo anterior pudo pasar debido a que en la pregunta no se pide hallar el total y el estudiante halla los valores de cada objeto en los cuales invirtió la profesora, por tal motivo es necesario aclarar que la respuesta no es errónea, sino que es una interpretación por parte del estudiante.

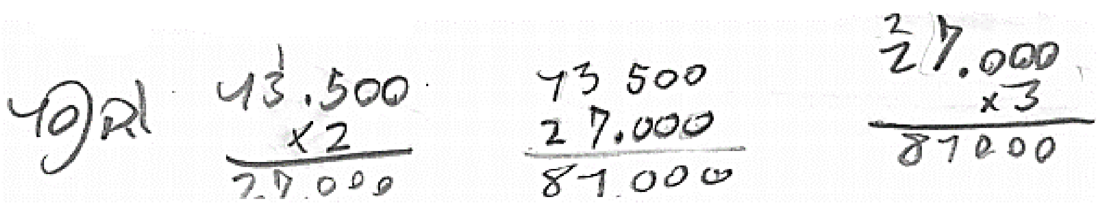


Figura 34 S1, Pb3, P10, E13

Además, el 20% de los estudiantes respondió a la pregunta, pero en ocasiones no se tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades, por ejemplo, E10 halla el valor del maquillaje multiplicando 13.500 por 2, al no percatarse de que inicialmente se dio el valor del maquillaje, además realiza la suma de 13.500 y 27.000 obteniendo el valor de las pelucas y por último realiza la multiplicación de 27.000 por 3 asociando el resultado con el valor de las máscaras (ver figura 35). Por lo anterior, se puede inferir que este porcentaje de estudiantes no logra identificar el dato que le permite generar los demás, es decir, ver la incógnita como un dato que permite resolver la situación.

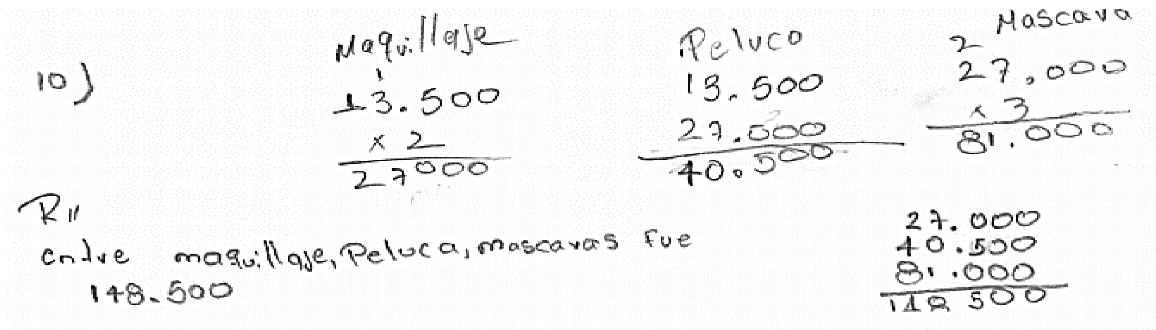


Figura 35. S1, Pb3, P10, E10

No obstante, el 60% de los estudiantes no respondieron a la pregunta, puede ser que este alto porcentaje se deba a la complejidad de las preguntas presentadas en la resolución de este problema o la dificultad que presentan los estudiantes al comprender las relaciones y la estructura del problema, debido a que el objetivo de esta pregunta era replantear el problema presentado con el fin de que el estudiante identificará las estructuras presentadas en el problema.

Problema 4: Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

La profesora Mayerleny accidentalmente juntó los dulces de Carolina, Karen y Sebastián, estudiantes de grado 4º. Ayúdala a saber cuántos dulces tenía cada uno, sabiendo que entre los tres estudiantes hay 147 dulces. Si Carolina tiene tres veces tantos dulces como Sebastián y Karen tiene 28 dulces más que Carolina. ¿Cuántos dulces tiene cada estudiante?

Situación 1: Problema 4, Pregunta 1 (S1, Pb4, P1)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 36 *Tipificación S1, Pb4, P1*

Pregunta 1: Escribe los datos conocidos y desconocidos del problema.			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que los datos conocidos son los dulces en total (147) y los datos desconocidos son la cantidad de dulces de cada estudiante (E2,E3,E5,E7,E8,E9,E10,E11,E12,E14,E16,E17,E18,E19,E20)	15	75%

2	Estudiantes que responden que los datos conocidos son el accidente de la profesora y los datos desconocidos los dulces de cada estudiante.(E1)	1	5%
3	Estudiantes responden que se desconoce la cantidad de dulces de Sebastian pero se conocen los datos de Carolina y Karen.(E6).	1	5%
4	Estudiantes que responden que el dato desconocido es el de Carolina y se saben el de los otros estudiantes.(E4).	1	5%
5	Estudiantes que establecen las relaciones entre las cantidades desconocidas(E13)	1	5%
6	Estudiantes que no responden a la pregunta (E15)	1	5%

De la tabla anterior, se puede decir que el 75% de los estudiantes responden que los datos conocidos son los dulces en total, es decir, 147 dulces y establecen que los datos desconocidos son la cantidad de dulces de cada estudiante. Por consiguiente, se puede inferir que los estudiantes comprenden la naturaleza de las actividades presentadas en el problema, y a partir de esto es posible que los estudiantes interpretan de forma adecuada la situación que se plantea en el problema, lo anterior se puede evidenciar cuando ellos utilizando cantidades conocidas logren hallar las cantidades desconocidas. Asimismo, los estudiantes interpretan el enunciado *"Karen tiene 28 dulces más que Carolina"* como una relación que se presenta entre la cantidad de dulces de Karen y Carolina. este pensamiento del estudiante permite evidenciar el desarrollo de un pensamiento aritmético a uno algebraico.

Además, el 5% de los estudiantes respondió que el dato conocido es el accidente que cometió la profesora Mayerleny al mezclar los dulces de los estudiantes y el dato desconocido es la cantidad de dulces de cada estudiante. Lo anterior, parece indicar que los estudiantes comprendieron el problema en contexto y respondieron de acuerdo a la interpretación del problema, además estudiantes identificaron las cantidades desconocidas del problema, como se menciona anteriormente es gran importancia que el estudiante identifique las cantidades del problema.

Por otra parte, el 5% de los estudiantes dice que la cantidad de dulces de Sebastián es desconocida además dicen que las cantidades de dulces de Karen y Carolina son conocidas. Por consiguiente, se puede decir que el E6 al no poder asociar un valor numérico a los dulces de Sebastián y dice que el dato es desconocido, además piensa que las cantidades conocidas son la cantidad de dulces de Karen y Carolina (ver figura 36), lo anterior puede ser debido a la interpretación del estudiante en el enunciado *"Karen tiene 28 dulces más que Carolina"* en cual E6 pudo haber asociado la relación *28 "dulces"* con el valor numérico de los dulces de Karen y de Carolina.

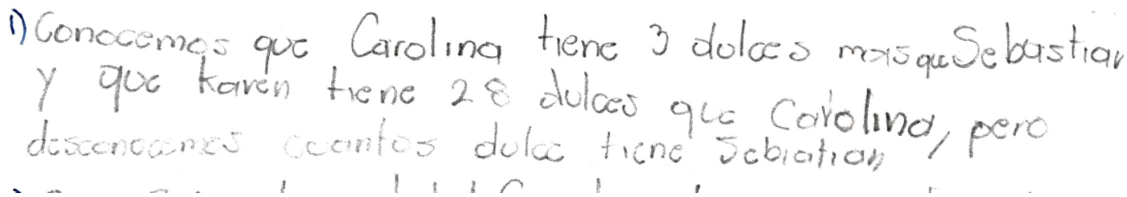

1) Conocemos que Carolina tiene 3 dulces mas que Sebastian y que Karen tiene 28 dulces que Carolina, pero desconocemos cuantos dulce tiene Sebastian /

Figura 36. *S1, Pb4, P1, E6*

Además, el 5% de estudiantes afirma la cantidad desconocida son los dulces que tiene Carolina, y la cantidad conocida son los dulces de los otros estudiantes, es decir, los dulces de Karen y Sebastián. Por lo anterior, se puede inferir que E4 No reconoce las cantidades conocidas y desconocidas del problema (ver figura 37), esto puede causar dificultades para la resolución de este, ya que por un lado no identifica las cantidades conocidas sobre las cuáles puede trabajar y encontrar las cantidades desconocidas.

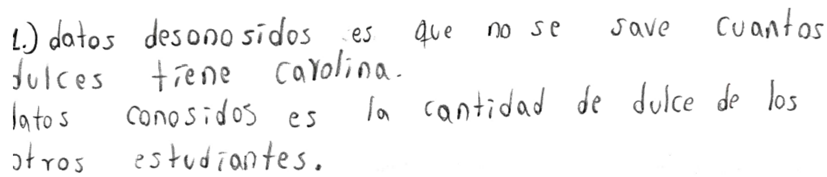

1.) datos desonosidos es que no se save cuantos dulces tiene carolina.
datos conosidos es la cantidad de dulce de los otros estudiantes.

Figura 37. *S1, Pb4, P1, E4*

Ahora bien, el 5% de los estudiantes escriben las relaciones entre las cantidades desconocidas, por ejemplo, E13 relaciona los dulces de Sebastián con la variable x, los dulces de Carolina con x3 y, por último, Karen tiene 28 más que Carolina (ver figura 38). Por consiguiente, se puede decir que el estudiante está pensando en las relaciones que se presentan en el problema, a pesar de no responder a lo que se le pregunta la respuesta que presentó permite inferir que el estudiante ha comprendido la estructura del problema. Por otra parte, el 5% de los estudiantes no dio respuesta a la pregunta.

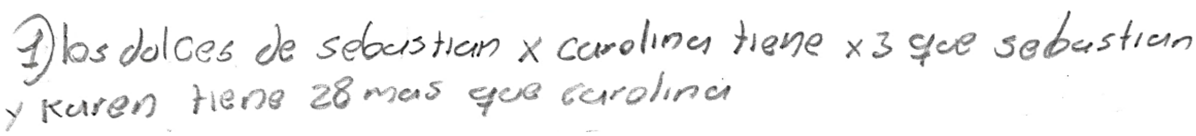


Figura 38. *S1, Pb4, P1, E13*

Situación 1: Problema 4, Pregunta 2 (S1, Pb4, P2)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 37 *Tipificación S1, Pb4, P2*

Pregunta 2: Escribe de qué cantidad de dulces (de Karen o de Sebastián) depende la cantidad de dulces de Carolina.			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de Carolina depende de la cantidad de dulces de Sebastián. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 ,E13 ,E14, E16, E17 ,E18 ,E19 ,E20)	19	95%
2	Estudiantes que no responden a la pregunta (E15)	1	5%

La pregunta 2 en este problema tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen la dependencia de las cantidades, particularmente la relación explícita que se presenta en el problema entre las cantidades de dulces de Carolina y Sebastián, debido a que las cantidades de dulces de Carolina y Karen se pueden presentar en función de la cantidad de dulces de Sebastián de acuerdo a las relaciones presentadas en el problema. La tabla 37 permite evidenciar los tipos de respuesta de los estudiantes al identificar la dependencia de la cantidad de dulces de Carolina.

Por consiguiente, el 95% de los estudiantes respondió que la cantidad de dulces de Carolina depende de la cantidad de dulces de Sebastián. Además, se puede inferir que los estudiantes identificaron la relación textual del problema *"Carolina tiene tres veces tantos dulces como Sebastián".* Particularmente, E13 justificó que Carolina tiene *x3* más dulces que Sebastián, en el cual se puede identificar la expresión *x3* donde x representa la cantidad de dulces de Sebastián (ver figura 39).

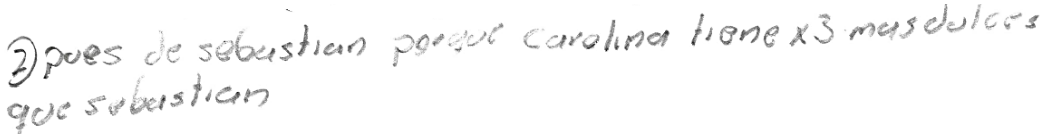


Figura 39 *S1, Pb4, P2, E13*

Por otra parte, cabe resaltar que E8 afirmó que los dulces de Carolina dependen de los dulces de Sebastián porque ella tiene el triple de dulces que tiene Sebastián, además afirma que es necesario conocer la cantidad de dulces de Carolina para conocer la cantidad de dulces de Karen (Ver figura 40). Por tanto, se puede afirmar que E8 comprendió la dependencia presente entre las tres cantidades diciendo que es necesario saber la cantidad de una para conocer la otra, siendo de gran importancia en el desarrollo del pensamiento algebraico.

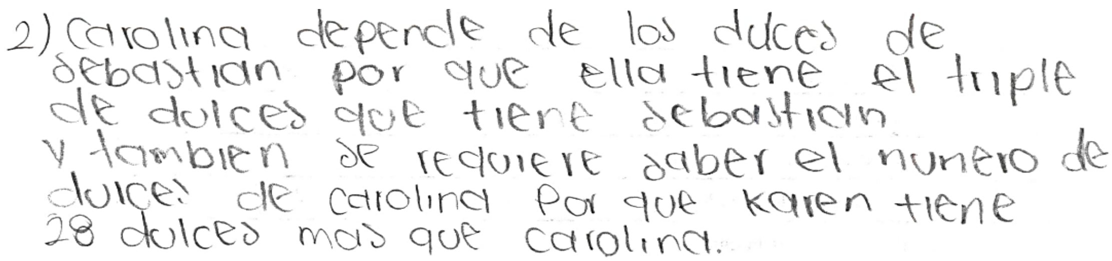

2) Carolina depende de los dulces de sebastian por que ella tiene el triple de dulces que tiene sebastian y tambien se requiere saber el numero de dulces de carolina por que karen tiene 28 dulces mas que carolina.

Figura 40. *S1, Pb4, P2, E8*

Sin embargo, el 5% de los estudiantes no respondió la pregunta, siendo algunas de las causas la falta comprensión del enunciado o el estudiante no logró identificar la dependencia entre las cantidades.

Situación 1: Problema 4, Pregunta 3 (S1, Pb4, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 38 *Tipificación S1, Pb4, P3*

Pregunta 3: Según las relaciones entre las cantidades del problema, completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de dulces de Sebastian	
Cantidad de dulces de Carolina	*3x*
Cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x" y* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x =147"*(E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11 ,E12 ,E13 ,E14 ,E15 ,E16, E17, E18, E20)	17	85%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x" y la* suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x=17. x+3x+28+3x =147"*(E1)	1	5%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x" y la* suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x".* (E5)	1	5%
4	Estudiantes que indican que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"78+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+34+28+3x" y la* suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28xx5+".* (E19)	1	5%

El objetivo de la pregunta 3 presentada en la tabla 38, es retomar las expresiones simbólicas presentadas en el problema 2, se puede observar que el 85% de los estudiantes completan de forma correcta al realizar las relaciones entre las cantidades indicando que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x" y* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x =147"*. Por lo anterior, se puede inferir que los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas anteriores han comprendido las relaciones que se pueden expresar en un lenguaje algebraico.

Por otra parte, es menester resaltar la respuesta del estudiante E1, ya que el estudiante escribe la representación en lenguaje simbólico indicando que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa con *"x+3x+28+3x" y la* suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa con *"x=17. x+3x+28+3x =147"* (ver figura 41). En este último, el estudiante además de escribir la expresión algebraica escribe a que es igual *"x",* al parecer el estudiante reconoce el valor de la incógnita.

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de dulces de Sebastian	x
Cantidad de dulces de Carolina	*3x*
Cantidad de dulces de Karen	(3x+28)
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	x+3x(3x+28) =147
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	x=17. 147= x+3x(3x+28)

Figura 41 *S1, Pb4, P3, E1*

Además, el 5% de los estudiantes indicó que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"28+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x" y* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28+3x".* En este caso, E5 no reconoce la igualdad presentada al final de la tabla (ver figura 42), por esto repite la expresión anterior escrita en la tabla, por consiguiente, se puede decir que el estudiante no reconoce la relación de equivalencia entre el total y la relación de sus partes.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de dulces de Sebastian	X
Cantidad de dulces de Carolina	*3x*
Cantidad de dulces de Karen	78+3X
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	X+34+28X+3X
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	X+3x+28xx5+

Figura 42. *S1, Pb4, P3, E5*

En cuanto al 5% restante, E19 respondió que la cantidad de dulces de Sebastián se expresa en lenguaje simbólico con *"x",* la cantidad de dulces de Karen se expresa en lenguaje simbólico con *"78+3x",* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante se expresa en lenguaje simbólico con *"x+34+28+3x" y* la suma de la cantidad de dulces de cada estudiante es 147 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+28xx5+".* Lo anterior, parece indicar que el estudiante no comprende la estructura algebraica del problema debido a que varias expresiones no corresponden a lo expresado en lenguaje natural (ver figura 43), por consiguiente, consideramos que el estudiante presenta dificultades para representar la estructura algebraica utilizando variables.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de dulces de Sebastian	x
Cantidad de dulces de Carolina	*3x*
Cantidad de dulces de Karen	78+3X
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	x+34+28x+3x
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	x+3x+28xx5+

Figura 43. *S1, Pb4, P3, E19*

Situación 1: Problema 4, Pregunta 4 (S1, Pb4, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 39. *Tipificación S1, Pb4, P4*

Pregunta 4: Si los dulces de Sebastián son 17, indica cuántos tiene: a. Carolina b. Karen			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que la cantidad de dulces que tiene Carolina es igual a 51 y la cantidad de dulces que tiene Karen es igual a 79. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7,E8,E9,E10, E11, E12, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20)	19	95%
2	Estudiantes que no indican cuántos dulces tiene Karen y Carolina(E13)	1	5%

La tabla 39, presenta que el 95% de los estudiantes que responden que la cantidad de dulces que tiene Carolina es igual a 51 y la cantidad de dulces que tiene Karen es igual a 79. Particularmente, E1 realizó las respectivas operaciones teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades, es decir, que E1 multiplicó 17 x 3 para hallar la cantidad de dulces de Carolina y al resultado le suma 28 para hallar la cantidad de dulces de Karen (ver figura 44). Asimismo, E2 realiza la suma de 3 veces 17 para hallar la cantidad de dulces de Carolina y al resultado le suma 28 para hallar la cantidad de dulces de Karen. Por lo anterior, se puede decir que los estudiantes comprenden las relaciones entre las cantidades desconocidas y además en algunos casos comprueban si la suma de los datos coincide con el total.

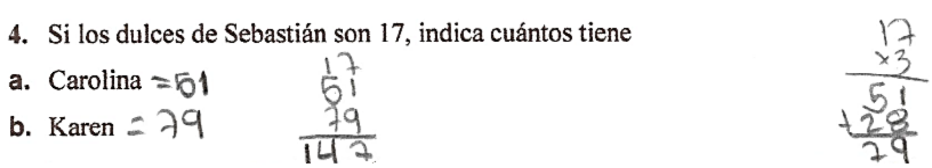


Figura 44 *S1, Pb4, P4, E1*

No obstante, el 5% de los estudiantes, es decir, E13 no responde cuántos dulces tiene Carolina y Karen, pero realizan operaciones que indican que tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades, por ejemplo, E13 multiplica 17x 3 y al resultado le suma 28, además realiza la suma de 17, 51 y 79 comprobando que el resultado es el total de dulces planteado en el problema (ver figura 45). Por consiguiente, lo anterior se puede interpretar como que el estudiante sabe que los resultados hallados corresponden a la cantidad de dulces de cada estudiante y por ello obvia mencionarlos o por el contrario no comprende el enunciado del problema y solo realiza operaciones que no tienen significado en el contexto del problema.

Figura 45. *S1, Pb4, P4, E13*

Situación 1: Problema 4, Pregunta 5 (S1, Pb4, P5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 40. *Tipificación S1, Pb4, P5*

Pregunta 5: Comprueba la afirmación de Carmen si se sabe que Sebastián tiene 17 dulces (*x=17).* “ *147 = x + 3x + (3x + 28)*”			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que dicen que la afirmación de Carmen es verdadera porque al despejar la ecuación *x=17* (E11, E14, E15)	3	15%
2	Estudiantes que responden que dicen que la afirmación de Carmen es verdadera por que la suma da la respuesta de cada uno de los 3 niños (E5, E6, E7, E8)	4	20%
3	Estudiantes que responden que dicen que la afirmación de Carmen es verdadera. (E1, E2, E3 ,E4, E9, E10, E12, E16, E17, E18, E19, E20)	12	60%
2	Estudiantes que realizan una operación y dicen que la afirmación de Carmen es falsa (E13)	1	5%

Conforme a la tabla 40. se puede decir que el 95% de los estudiantes dicen que la afirmación de Carmen es verdadera, de los cuales el 15% despejo “*x”* llegando al resultado de que “*x=17”* (ver figura 46). De lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes tienen un acercamiento al álgebra debido al despeje que realizaron en la ecuación, es de gran importancia en el desarrollo del pensamiento algebraico ya que según Bednarz y Janvier (1996) existe un pensamiento en el cual el estudiante mantiene la estructura del problema y logra resolverlo realizando expresiones equivalentes a la anterior, siendo este el cuarto tipo de razonamiento aritmético para resolver problemas que se pueden resolver utilizando aritmética o algebra.

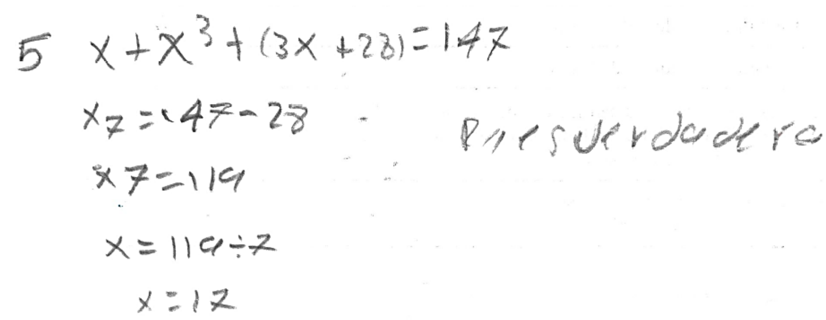


Figura 46*. S1, Pb4, P5, E14*

Además, el 20% de los estudiantes dice que la afirmación de Carmen es verdadera por que la suma da la respuesta de cada uno de los 3 niños, de lo anterior se puede suponer que los estudiantes realizaron una operación para determinar la veracidad de la expresión, en la cual hallaron la cantidad de dulces de cada estudiante, este es una característica importante en el desarrollo del pensamiento algebraico debido a que los estudiantes hallaron la cantidad de dulces teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades desconocidas y el total.

Por otra parte, el 60% de los estudiantes dicen que la afirmación de Carmen es verdadera, pero no realizan ninguna justificación o procedimiento. Sin embargo, se puede hacer la suposición de que los estudiantes realizaron una comparación entre los datos obtenidos en la tabla y la expresión de Carmen encontrando similitudes entre las expresiones.

Sin embargo, el 5% de los estudiantes realiza un procedimiento en el cual se puede evidenciar que no reemplaza en su totalidad *"x"* en la expresión "*147 = x + 3x + (3x + 28)*" solo lo reemplaza cuando la "*x"* está sola así: "*147 = 17 + 3x + (3x + 28)*" (ver figura 44). Por esta razón, es E13 infiere que la afirmación es incorrecta a pesar de haber reemplazado en la pregunta anterior los valores teniendo en cuenta la estructura del problema, además no es capaz de realizar operaciones teniendo en cuenta una estructura algebraica.

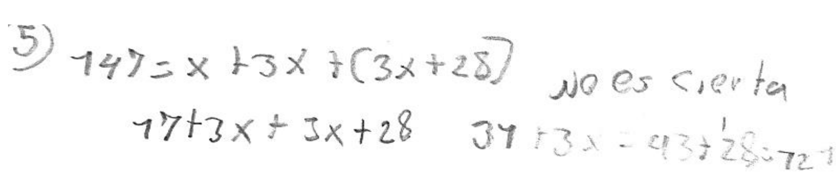


Figura 47*. S1, Pb4, P5, E13*

Situación 1: Problema 4, Pregunta 6 (S1, Pb4, P6)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 41 *Tipificación S1, Pb4, P6*

Pregunta 6. Escribe la cantidad de dulces que tiene cada estudiante.			
TIPOS DE RESPUESTA		**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que la cantidad de dulces de Carolina, Karen y Sebastián es 51,79 y 17 respectivamente y además realizan la suma correspondiente de las cantidades para confirmar el total (E2, E3, E7, E10, E14, E16, E19, E20)	8	40%
2	Estudiantes que responden que la cantidad de dulces de Carolina, Karen y Sebastián es 51,79 y 17 respectivamente.(E1, E4, E5, E6, E8, E9, E12, E13, E15, E17, E18)	11	55%
2	Estudiantes que no responden a la pregunta (E11)	1	5%

Según la tabla 41, el 95% de los estudiantes afirma que la cantidad de dulces de Carolina, Karen y Sebastián es 51, 79 y 17 respectivamente. De los cuales, el 40% de los Estudiantes responden que la cantidad de dulces de Carolina, Karen y Sebastián es 51, 79 y 17 respectivamente y además realizan la suma correspondiente de las cantidades para confirmar el total, de lo anterior se puede decir que el problema le da un significado a las cantidades presentadas en él, en el cual permite realizar la verificación de los procesos realizados al tener en cuenta las relaciones entre las cantidades.

Además, el 55% de los estudiantes solo presenta los valores correspondientes a cada estudiante, de lo anterior se puede inferir que los estudiantes tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades, e identificaron que lo planteado en preguntas anteriores era verdadero y por tal razón resolvieron el problema.

No obstante, el 5% de los estudiantes no respondió a la pregunta, sin embargo, E11 fue uno de los estudiantes destacados por hallar el valor de *"x"* despejando la ecuación, además halló las cantidades presentadas en la pregunta cuatro cuando se afirma que la cantidad de dulces de Sebastian es igual a 17. Por consiguiente, se puede afirmar que el estudiante implícitamente resolvió el problema presentado.

3.2.3.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 2 (S2): Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos.

Problema 1: Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La abuela Ana quiere preparar 7 tazas de masa de buñuelos, para la cual se necesita una cierta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena. Si la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene dos tazas más que la cantidad de agua, ¿qué cantidad se necesita de cada ingrediente para que tú y tu familia puedan hacer esta receta en casa?

Situación 2: Problema 1, Pregunta 1 (S2, Pb1, P1)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 42 *Tipificación S2, Pb1, P1*

Pregunta 1: Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina cuales son conocidas o desconocidas.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de la masa de buñuelos es conocida y las cantidades de agua, de queso costeño y de maizena son desconocidas. (E1,E3,E4,E5.E6,E7,E8,E9,E10,E11,E12,E13,E14,E15,E16,E17,E18,E20)	18	90%
2	Estudiantes que afirman que los datos conocidos son las relaciones entre cantidades y los datos desconocidos son cada una de las cantidades. (E2)	1	5%
3	Estudiantes que afirman que el total de la masa para hacer buñuelos y la cantidad de maizena es conocida, mientras que la cantidad de agua es desconocida. (E19)	1	5%

De la tabla 42 se infiere que el 95% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, de estos, el 90% identifica la cantidad de tazas de masa de buñuelos (7 tazas) como un dato conocido en el problema, mientras que la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena las identifican como datos desconocidos en el problema, de lo cual se puede inferir que identifican la cantidad conocida con el valor numérico (7 tazas), y las cantidades desconocidas a pesar de que existen cantidades que están involucradas en ellas (1 más, 2 más) entienden que no son conocidas, que solo hacen parte de relaciones que se establecen entre ellas, lo que permite evidenciar que hay una comprensión del enunciado del problema y de la clase de cantidades que ahí intervienen. Análogamente hay un avance o acercamiento al pensamiento algebraico en el cual se trabaja con cantidades conocidas y desconocidas en un mismo nivel.

Ahora bien, el 5% restante indica como dato conocido las relaciones entre cantidades, es decir, que "*la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene dos tazas más que la cantidad de agua",* además identifica como datos desconocidos cada una de las cantidades, es decir, la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena, lo cual es válido, a pesar de que en un primer momento esta respuesta podría considerarse como incorrecta porque no identifica específicamente qué es lo conocido y que es lo desconocido. El análisis nos permite identificar que el razonamiento de este estudiante es importante, en tanto él dice que lo conocido son las cantidades donde se especifican las relaciones más no la cantidad conocida, es decir, identifica lo que se conoce del problema. El error está en que hace equivalente las relaciones conocidas como si fueran las cantidades conocidas, lo cual no es cierto, puesto que, a pesar de que la relación *"una taza más que la cantidad de queso costeño"* es conocida, no es una cantidad conocida en el problema. En cuanto a lo que indica como desconocido es correcto, ya que son los valores numéricos de esas cantidades. (ver figura 48).

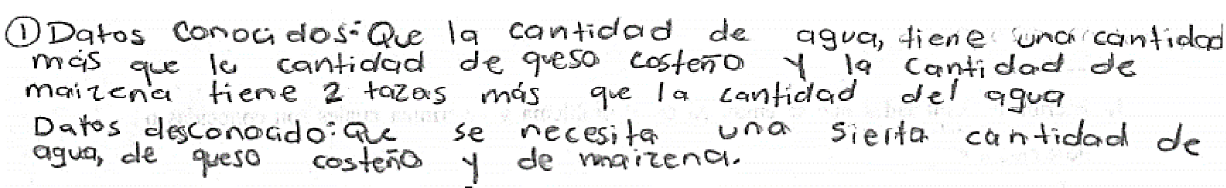

① Datos conocidos: Que la cantidad de agua, tiene una cantidad más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad del agua
Datos desconocido: Que se necesita una sierta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena.

Figura 48. *S2, Pb1, P1, E2*

Solo el 5% de los estudiantes no responde correctamente una parte de la pregunta, ya que, a pesar de que identifica el dato conocido (7 tazas de masa de buñuelos), indica como otro dato conocido la cantidad de maizena y como dato desconocido solo la cantidad de agua lo cual no es correcto.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 2 (S2, Pb1, P2)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 43 *Tipificación S2, Pb1, P2*

Pregunta 2: Escribe las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas que se presentan en el problema.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que identifican las relaciones entre la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena, es decir, "*la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad de agua"*. (E1,E2,E3,E5.E6,E7,E8,E9,E10,E12,E15,E16,E17,E18)	14	70%
2	Estudiantes que no responden de acuerdo a la pregunta. (E4,E11,E13,E14.E19,E20)	6	30%

De acuerdo con los datos presentados en la tabla #, se puede decir que el 70% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, ya que identifican las relaciones que se establecen en el problema *"la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad de agua",* solo E2 indica además el dato conocido "*la abuela Ana quiere preparar 7 tazas de masa de buñuelos".*

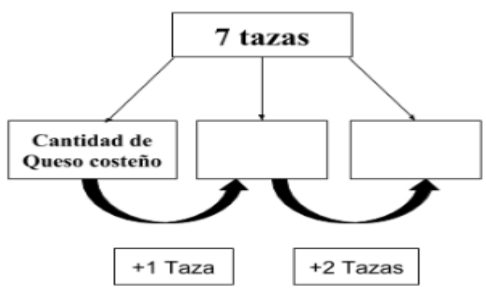
Lo anterior permite identificar que los estudiantes ya saben que en los problemas se pueden establecer relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas para llegar conjugadas entre ellas a resolver problemas, es decir, identificar las relaciones conocidas y desconocidas es fundamental no solo para resolver problemas sino para tener un acercamiento a un pensamiento algebraico donde lo algebraico trabaja con relaciones y no con cantidades. Por lo tanto, la manipulación de lo conocido y lo desconocido en el mismo nivel es una cuestión de gran importancia en el razonamiento algebraico.

Ahora bien, el 30% restante de los estudiantes dan otros tipos de respuestas, que aunque no logran responder en términos de las relaciones enunciadas en el problema, no pueden ser catalogadas en su mayoría como incorrectas, por tener cierta lógica y contexto. De estos, E4, E13 y E20 indican que se conocen las 7 tazas de masa de buñuelos que se deben preparar, más no lo que hay dentro de esas 7 tazas, lo cual es cierto, pues es lo que hay que averiguar, la cantidad de cada ingrediente dentro de las 7 tazas. Algo parecido contesta E11 al decir que se conoce lo que se quiere hacer, (7 tazas de masa de buñuelos), pero no lo que se necesita (cantidad de agua, de queso costeño y de maizena). En cuanto a E14 y E19 se puede decir que no responden de acuerdo a la pregunta, o contesta de manera incorrecta debido a que indican que mediante los datos conocidos se encuentran los conocidos, (E4) y que tanto la cantidad de maizena como la masa de buñuelos es conocida (E19) para lo cual no es mucho lo que se pueda interpretar.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 3 (S2, Pb1, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 44 *Tipificación S2, Pb1, P3*

Pregunta 3: Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha indicando “cantidad de agua” y “cantidad de maizena” respectivamente. (E3,E15,E16)	3	15%
2	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha con la palabra agua y la palabra maizena respectivamente. (E1,E2,E4,E5.E6,E7,E8,E9,E11,E12,E13,E14,E17,E18,E20)	15	75%
3	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha con maizena y agua respectivamente. (E10,E19)	2	10%

De la tabla 44, se infiere que el 90% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, de estos, el 75% completan el gráfico de izquierda a derecha con la palabra agua y la palabra maizena, mientras que el 15% completan el gráfico de izquierda a derecha indicando cantidad de agua y cantidad de maizena. Aunque ambas respuestas son correctas, es de gran importancia que los estudiantes hablen de cantidades, del tipo de medida que se está utilizando en la situación en contexto, ya que lo que se pregunta va directamente relacionado con las cantidades *“¿qué cantidad se necesita…*” por ello, el motivo de separar una respuesta con la palabra “*agua*” a otra con “*cantidad de agua*”.

Ahora bien, sólo el 10% de los estudiantes completan de manera incorrecta la tabla al escribir de izquierda a derecha las palabras maizena y agua respectivamente, lo cual parece indicar que no tuvieron en cuenta, o no se percataron de analizar toda la gráfica, como por ejemplo los recuadros con + 1 taza y + 2 tazas, que eran parte fundamental para comprenderlo.

En general los estudiantes reconocen que la cantidad de maizena y la cantidad de agua están relacionadas con la cantidad de queso costeño, es decir, reconocen la direccionalidad de las flechas y las relaciones que están descritas abajo (+1 taza, +2 tazas) del gráfico. A pesar de que el 75% de los estudiantes solo escriben el nombre del ingrediente mientras un 15% escriben la cantidad del ingrediente, se reconoce que esa cantidad es la que va allí, aunque no esté propiamente la palabra.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 4 (S2, Pb1, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 45 *Tipificación S2, Pb1, P4*

Pregunta 4: Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, escribe la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena que se necesitan para preparar 7 tazas de masa de buñuelos**.**

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que la cantidad de queso costeño es igual a 1 taza, la cantidad de agua es igual a 2 tazas y la cantidad de maizena es igual a 4 tazas, más no realizan procedimientos. (E5.E8, E11, E14).	4	20%
2	Estudiantes que afirman que la cantidad de queso costeño es igual a 1, la cantidad de agua es igual a 2 y la cantidad de maizena es igual a 4, desconociendo la unidad de medida (tazas), además no realizan procedimientos. (E3, E4, E9, E12, E13, E16, E17, E18, E20).	9	45%
3	Estudiantes que desarrollan una ecuación para determinar las cantidades de cada ingrediente. Uno de ellos responde correctamente. (E7,E15)	2	10%
6	Estudiantes que desarrollan operaciones en las cuales no hay un resultado numérico, o no son equivalentes con el total (7 tazas). (E1,E2,E6,E10,E19)	5	25%

De la tabla 45, se infiere que el 75% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, es decir, establecen las cantidades numéricas correctas para cada ingrediente (se necesita 1 taza de queso costeño, 2 tazas de agua y 4 tazas de maizena para preparar las 7 tazas de masa de buñuelos). De estos, el 20% responde teniendo en cuenta la unidad de medida para cada ingrediente, más no dejan evidencia de procedimientos, mientras que un 45% solo indica la cantidad numérica de cada ingrediente desconociendo la unidad de medida en tazas, y no dejan evidencia de procedimientos para dichos resultados. Un 5% de los estudiantes expresa mediante una ecuación (ver figura 49) las relaciones que se enuncian en el problema, más no logra vincular ese lenguaje natural con el lenguaje simbólico, debido a que solo escribe correctamente una de las tres relaciones, y es finalmente por medio del tanteo, es decir, dando valores a la *x* para encontrar las cantidades numéricas de cada ingrediente, que da respuesta a la pregunta de manera acertada, pero no se devuelve a la ecuación planteada para rectificar que la ecuación no es correcta.

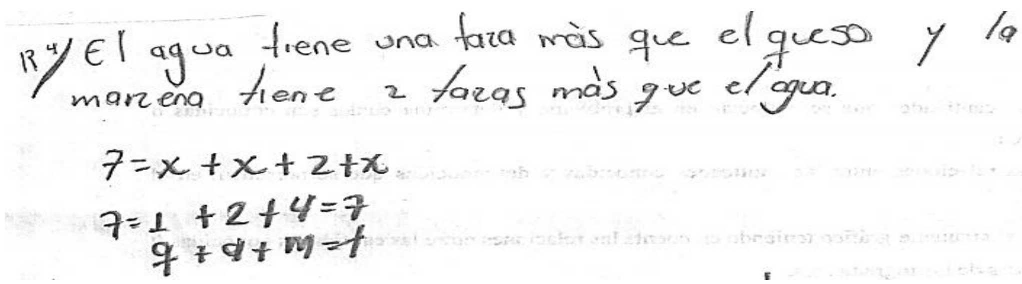


Figura 49. *S2, Pb1, P4, E7*

Sólo el 5% restante, desarrolla una ecuación de manera correcta, es decir, logra ese vínculo tan necesario para el pensamiento algebraico de pasar lo enunciado en lenguaje natural a un lenguaje simbólico (ver figura 50), lo cual permite inferir que el proceso con la situación anterior, más específicamente por medio de las tablas y gráficas han permitido que el estudiante E15 de ese salto tan importante de las cantidades a las relaciones.

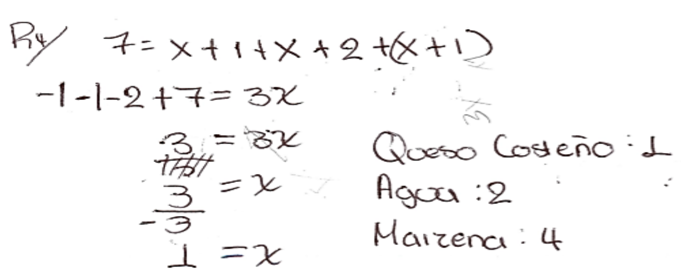


Figura 50. *S2, Pb1, P4, E15*

Ahora bien, el 25% restante de los estudiantes responden de manera incorrecta la pregunta, de estos, E1 indica que la cantidad de agua es $x + 1$lo cual es verdadero, la cantidad de queso costeño lo expresa como $x + 2$lo cual es incorrecto al igual que la expresión que realiza de la maizena $x + x + 2$. Además, no opera dichas relaciones para dar respuesta a la pregunta, lo cual parece indicar que no comprende la pregunta en su totalidad.

En cuanto a E2 y E6, establecen que la cantidad de queso costeño es igual a 7 tazas, la cantidad de agua es igual a 14 tazas y la cantidad de maizena es igual a 28 tazas, de lo cual se puede inferir que relacionan el total de la masa de buñuelos con la cantidad de queso costeño, y a partir de esa cantidad (7 tazas), establecen la cantidad de agua de maizena, entendiendo quizás de forma aditiva que a siete se le debe sumar la misma cantidad, $(7 + 7\ )$para obtener como resultado 14, que es la cantidad de agua y a ese resultado sumarle su igual, $(14 + 14)$ para obtener 28 como la cantidad de maizena, o tal vez sin tener en cuenta ninguna de las relaciones enunciadas en el problema duplicó y triplicó la cantidad inicial (7 tazas) para dar solución al problema.

Por añadidura, E10 responde la pregunta indicando que se necesitan 3 tazas más para preparar las 7 tazas de masa de buñuelos, lo cual parece indicar que interpreta las relaciones "*una taza más",* "*dos tazas más"* como cantidades numéricas, para las cuales realiza una operación aditiva e interpreta de manera errada que es la solución al problema. Por último, E19 indica por medio de tanteo, teniendo como referente solo la cantidad total y no las relaciones entre cantidades, que la cantidad de queso costeño es igual a 3 tazas, la cantidad de agua es igual a 2 tazas y la cantidad de maizena es igual a 2 tazas.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 5 (S2, Pb1, P5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 46 *Tipificación S2, Pb1, P5*

	Pregunta 5: Si Anderson necesita preparar 14 tazas de masa de buñuelos, ¿cuánta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena necesita?		
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que la cantidad de queso costeño es igual a 2 tazas, la cantidad de agua es igual a 4 tazas y la cantidad de maizena es igual a 8 tazas, más no realizan procedimiento. (E8.E11)	2	10%
2	Estudiantes que afirman que la cantidad de queso costeño es igual a 2, la cantidad de agua es igual a 4 y la cantidad de maizena es igual a 8, desconociendo la unidad de medida (tazas) y no realizan procedimiento. (E3,E4,E9,E12,E13,E14,E16,E17,E18,E20)	10	50%
3	Estudiantes que realizan procedimientos incorrectos para responder la pregunta. (E1, E15)	2	10%
4	Estudiantes que establecen valores para cada ingrediente sin tener en cuenta las relaciones que se enuncian en el problema. (E2,E5,E6,E7,E10,E19)	6	30%

De la tabla 46, se infiere que el 60% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, de estos, solo el 10% tiene en cuenta al momento de dar la respuesta la unidad de medida en tazas enunciado en el problema, pero no establecen ningún procedimiento que sustente los resultados, lo cual parece indicar que por medio del método de tanteo y las relaciones establecidas en el problema llegaron a la solución, al igual que el 50% restante que además de no identificar la unidad de medida tampoco establecen procedimientos. Sólo E9, E17 y E18 en su respuesta indican la operación $2+4+8=14$, y escriben en la parte superior de los números la inicial del ingrediente, es decir, queso costeño (q), agua (a) y maizena (m), lo cual permite evidenciar su comprensión del problema con respecto al total (14 tazas) y la cantidad de cada ingrediente que lo conforman.

Ahora bien, un 10% de los estudiantes realizan procedimientos incorrectos para responder la pregunta, E1 intenta establecer por medio de un lenguaje simbólico las relaciones entre las cantidades de cada ingrediente, para lo cual indica que la cantidad de agua es igual a $x2$, la cantidad de queso costeño es igual a $x+x+2$y la cantidad de maizena es igual a $x+x+2$, además no realiza un procedimiento con dichas relaciones que conduzcan a cantidades numéricas específicas, mientras que E15 a pesar de que en la pregunta anterior logra responder de manera correcta desarrollando una ecuación, esta vez falla debido a que solo cambia el total de tazas (7 por 14), pero al otro lado de la ecuación (relaciones entre cantidades) deja todo igual que en la pregunta anterior (ver figura 51), dejando a un lado esa relación existente $(x2)$con las relaciones enunciadas en el problema.

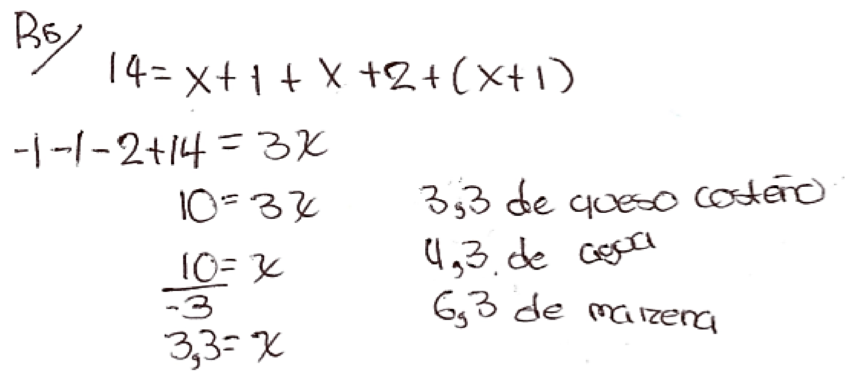


Figura 51. *S2, Pb1, P5, E15*

Respecto al 30% restante de los estudiantes, establecen valores para cada ingrediente sin tener en cuenta las relaciones que se enuncian en el problema. Los estudiantes E2 y E6 indican que la cantidad de queso costeño es igual a 14, la cantidad de agua es igual a 28 y la cantidad de maizena es igual a 56, de lo cual se puede inferir que asumen la cantidad de queso costeño igual a la cantidad de masa de buñuelos (14 tazas), la cantidad de agua cuya relación es $+1$,la interpretan como $14 + 14$= 28 y la cantidad de maizena la interpretan como $28 + 28 = 56$, o simplemente multiplican la primera cantidad (14) por 2 para obtener la segunda y ese resultado nuevamente lo multiplican por dos para obtener la tercera.

En cuanto a E5, E7 y E19, solo tienen en cuenta el total para establecer las cantidades de cada ingrediente, E7 por ejemplo intenta hacer una ecuación en un primer momento (ver figura 52) estableciendo relaciones incorrectas pero no la desarrolla, finalmente establecen valores para cada ingrediente teniendo en cuenta solo el total (14 tazas) de manera que sea equivalente con la suma de los tres ingredientes, además se puede apreciar que tiene una percepción errada de la incógnita o variable al indicar dos cantidades diferentes para una misma letra.

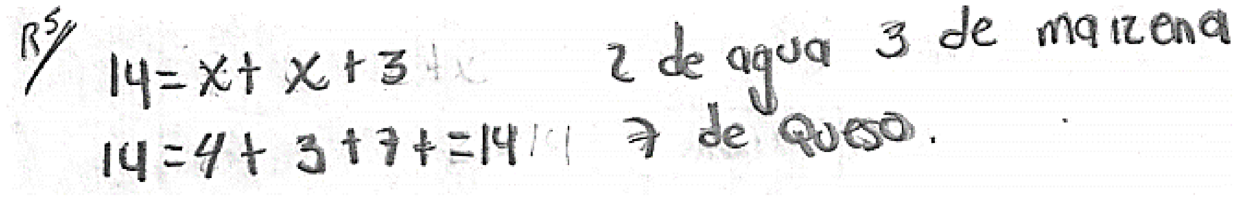


Figura 52. *S2, Pb1, P5, E7*

Situación 2: Problema 1, Pregunta 6 (S2, Pb1, P6)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 47 *Tipificación S2, Pb1, P6*

Pregunta 6: Si Marcos tiene 3 tazas de queso costeño para preparar una cierta cantidad de masa de buñuelos, ¿qué cantidad de agua y de maizena necesita? ¿cuántas tazas de masa de buñuelos se obtienen?

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que se necesitan 4 tazas de agua y 6 tazas de maizena para preparar 13 tazas de masa de buñuelos, pero no realizan procedimiento. (E3,E4,E5,E7,E8,E9,E11,E12,E13,E14,E16,E17,E18)	13	65%
2	Estudiantes que indican cantidades para cada ingrediente y la cantidad de masa de buñuelos sin tener en cuenta una relación de equivalencia entre el total con las partes que lo conforman.(E2,E6,E15,E19)	4	20%
3	Estudiantes que no responden en su totalidad la preguntan, además responden de manera incorrecta. (E10,E20)	2	10%
4	Estudiantes que no responden la pregunta. (E1)	1	5%

Con base a los resultados expuestos en la tabla 47 se infiere que el 65% de los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta indicando que, para tres tazas de queso costeño, se necesitan 4 tazas de agua y 6 tazas de maizena para preparar un total de 13 tazas de masa de buñuelos. Cabe resaltar que de estos estudiantes E7, E8, E9, E14, E17 y E18 siguen desconociendo la unidad de medida al responder a la pregunta solamente con resultados números, sin indicar la correspondencia que tiene con la cantidad de tazas, además no realizan procedimiento.

Ahora bien, un 30% de los estudiantes responden incorrectamente la pregunta, de estos solo E15 establece un procedimiento que sustenta sus resultados, lo cual es de gran importancia, aunque no haya contestado de manera correcta porque permite identificar de forma más clara el tipo de comprensión que tuvo. E15 realiza una ecuación en la cual sigue conservando la parte de las relaciones entre cantidades (lado derecho) de la misma manera como se enuncia en el problema y solo cambia el total por la cantidad que se da en la pregunta (ver figura 53), lo cual parece indicar que no relaciona aún la dependencia que produce el cambio de la cantidad de tazas de la masa de buñuelos, o el cambio de la cantidad en tazas de uno de los tres ingredientes, como es el caso de esta pregunta, por tal motivo termina obteniendo resultados incorrectos.

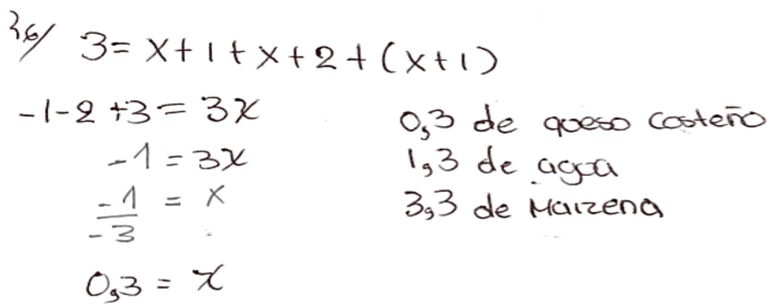


Figura 53. *S2, Pb1, P6, E15*

En cuanto a los estudiantes E2 y E6 establecen que la cantidad de agua es igual a 6 tazas y la cantidad de maizena es igual a 12 tazas, además indican que se obtiene un total de 3 tazas de masa de buñuelos, de lo cual se puede inferir que siguen teniendo el mismo razonamiento de las dos últimas preguntas, ya que toman la cantidad que se da en la pregunta (3 tazas de queso costeño) y la toman como base, de tal forma que duplican dicha cantidad para obtener la cantidad de agua (6 tazas) y luego a ese resultado aplicarle la misma operación (X2) para obtener la cantidad de maizena (12 tazas) o también pudieron multiplicar por 3 la cantidad inicial para obtener dicho ingrediente, lo cual parece indicar que no se están guiando con el enunciado del problema, no lo entienden o lo interpretan de otra forma. Cabe resaltar, que no están teniendo en cuenta la relación implícita del total en relación con las partes que lo componen, pues de un lado de la igualdad colocan la cantidad de los ingredientes e indican que es igual a 3, lo cual no presenta una relación de equivalencia.

Esto último ocurre con E19 que indica que la cantidad de agua es igual a 2 tazas, la cantidad de maizena es igual a 2 tazas y la cantidad de masa de buñuelos es igual a 3 tazas, para lo cual tampoco hay una relación de equivalencia entre cantidades.

Por último, E10 y E20 dan respuestas difíciles de interpretar, ya que, por un lado E10 indica que la cantidad es igual a 7, por otro lado E20 indica que la cantidad de queso costeño es igual a $\frac{1}{2}$ cuando en la pregunta se indica que es igual a 3.

Problema 2: Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

Daniela en compañía de su madre desean preparar una receta de arequipe, ayúdales a encontrar las cantidades exactas de cada uno de los ingredientes de acuerdo a la información que se presenta a continuación:

Para preparar 4 tazas de arequipe se necesita una cierta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche. Si se sabe que la cantidad de tazas de azúcar es 3 veces la cantidad de tazas de bicarbonato y la cantidad de tazas de leche es 4 veces la cantidad de azúcar, ¿qué cantidad de tazas se necesita de cada ingrediente para que Daniela y su madre puedan preparar la receta?

Situación 2: Problema 2, Pregunta 1 (S2, Pb2, P1)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 48 *Tipificación S2, Pb2, P1*

Pregunta 1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina si son conocidas o desconocidas.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que las cantidades conocidas son las 4 tazas de arequipe y las cantidades desconocidas son la cantidad de azúcar, bicarbonato y leche (E12, E15)	2	10%
2	Estudiantes que afirman que las cantidades desconocidas son las tazas de leche, bicarbonato y azúcar (E3,E10)	2	10%
3	Estudiantes que afirman que las cantidades desconocidas son las tazas de leche y el bicarbonato (E1, E4, E13, E16)	4	20%
4	Estudiantes que afirman que las relaciones entre las cantidades son conocidas (E6, E8)	2	10%
5	Estudiantes que escriben las relaciones de las cantidades en lenguaje algebraico (E20)	1	5%

6	Estudiantes que afirman que las cantidades conocidas son las 4 tazas de arequipe, 3 de azúcar y 4 de leche, además la cantidad desconocida son las tazas de bicarbonato. (E7,E11)	2	10%
7	Estudiantes que afirman que las cantidades conocidas son el bicarbonato, el azúcar y la leche (E9,E17,E18)	3	15%
8	Estudiantes que afirman que las cantidades conocidas son la cantidad de azúcar, leche y la cantidad de tazas de los ingredientes (E14)	1	5%
9	Estudiantes que responden a la pregunta teniendo en cuenta el contexto de la preparación de platos navideños (E19)	1	5%
10	Estudiantes que no responden la pregunta (E2,E5)	2	10%

Conforme a la tabla 48, se puede afirmar que solo el 10% de los estudiantes respondió en su totalidad a la pregunta, es decir, que identificaron las cantidades conocidas y desconocidas del problema diciendo que las cantidades conocidas son las 4 tazas de arequipe y las cantidades desconocidas son la cantidad de azúcar, bicarbonato y leche. Lo anterior, permite evidenciar que los estudiantes comprendieron el enunciado de la pregunta y además identificaron los datos conocidos y desconocidos del problema.

Sin embargo, el 90 % restante no respondieron a la pregunta completamente o afirman que ciertas cantidades son conocidas o desconocidas pero no son las correctas. De lo anterior, el 10% de los estudiantes afirma que los datos conocidos son las tazas de leche, bicarbonato y azúcar, reconociendo el *"3 veces y 4 veces"* como relaciones entre cantidades, a pesar de que la afirmación es acertada no identifican cuáles son las cantidades conocidas presentadas en el problema. Además, el 20% de los estudiantes afirma que las cantidades desconocidas son las tazas de leche y el bicarbonato, pero no reconocen la cantidad de azúcar como desconocida lo que parece indicar que le asociaron el valor de *"3"* o no la reconocieron como una cantidad. En oposición, el 15% de los estudiantes afirmó que las cantidades conocidas son el bicarbonato, el azúcar y la leche, al parecer el pensamiento de estos estudiantes es aritmético ya que asocian las relaciones entre las cantidades como cantidades, por esto es que para ellos es conocida.

Además, el 10 % de los estudiantes afirman que las relaciones entre las cantidades son conocidas, a pesar de no responder a la pregunta, los estudiantes lograron identificar las relaciones entre las cantidades, siendo este un gran paso para desarrollar el pensamiento algebraico debido a la diferencia que se presenta entre cantidades y relaciones entre cantidades.

Por otra parte, el 5% de los estudiantes escriben las relaciones de las cantidades en lenguaje algebraico, es decir, que el estudiante E20 afirma que la cantidad de bicarbonato es igual a *"x"*, la cantidad de azúcar es igual a *"x.3"* y la cantidad de leche es igual a "*x.3.4"* (ver figura 54). Lo anterior, permite inferir que el estudiante logró expresar las relaciones entre las cantidades presentadas en el problema en lenguaje algebraico identificando como la incógnita la cantidad de tazas del bicarbonato con la expresión *"x",* además, tiene en cuenta la relación entre el bicarbonato y el azúcar, estableciendo que esta depende del bicarbonato utilizando la expresión *"x.3",* por último, establece las relaciones entre la leche y el azúcar escribiendo la expresión *"x.x.4"*

Figura 54 *S2, Pb2, P1, E20*

Asimismo, el 10% de los Estudiantes afirman que las cantidades conocidas son las 4 tazas de arequipe, 3 de azúcar y 4 de leche, además la cantidad desconocida son las tazas de bicarbonato (ver figura 55). En este caso, se puede observar que los estudiantes reconocen la incógnita del problema al identificarla como una cantidad desconocida en relación con las cantidades conocidas, siendo de gran importancia para resolver el problema planteado.

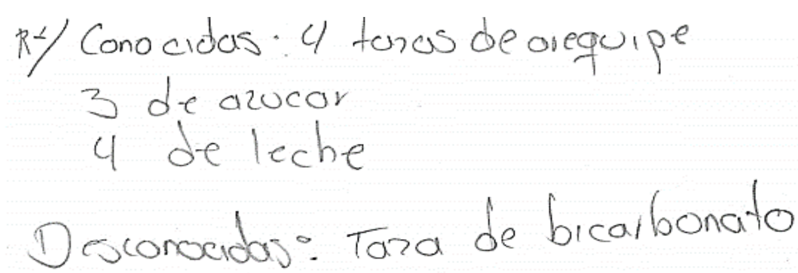


Figura 55 *S2, Pb2, P1, E7*

No obstante, el 5% de los estudiantes afirman que las cantidades conocidas son la cantidad de azúcar, leche y la cantidad de tazas de los ingredientes. Al parecer los estudiantes asociaron las relaciones entre cantidades como cantidades en si, por esta razón se considera que no han comprendido lo enunciado en el problema. Además, el 15% de los estudiantes respondieron teniendo en cuenta el contexto de la navidad o no respondieron a la pregunta, particularmente E19 respondió que los buñuelos, el arroz con leche y el arequipe son conocidos (ver figura 56). lo anterior parece indicar que el estudiante se dejó influenciar por la información presentada en la situación dos, es decir, el de la navidad.

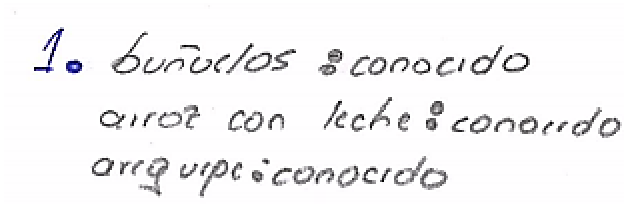


Figura 56. *S2, Pb2, P1, E19*

Situación 2: Problema 2, Pregunta 2 (S2, Pb2, P2)

Población: 20 estudiantes.

Tabla 49 *Tipificación S2, Pb2, P2*

Pregunta 2. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de tazas de bicarbonato	x
Cantidad de tazas de azúcar	
Cantidad de tazas de leche	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4	

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *“3x”,* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *“4.3x”,* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *“x16” o “x+x.3+4(x.3) y* la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *“x+3x+4(3x)=4”*(E4, E6,E8,E14,E17,E18)	6	30%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *“3x”,* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *“4.3x”,* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *“x+3x+4.3x” y* cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *“x+3x+=4.3x”*(E1, E3, E10,E16)	4	20%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *“3x”,* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *“4(3x)”,* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico	1	5%

	con *"x+3x+4(3x)"* y la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+4(3x)=16"* (E13).		
4	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"16" y la* cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x.4"*(E2,E20)	2	10%
5	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"16" y* la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x=4"*(E5, E11,E12)	3	15%
6	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"16" y* cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4x"*(E7)	1	5%
7	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4x3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+4x+3x"* y la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4x"* (E9)	1	5%
8	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4+x+3+x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3+x+4+(x+1)"* y la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4=x+3+x+4+(x+1)"* (E15)	1	5%
9	Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"8"* y la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"No es=8"* (E19)	1	5%

Según lo presentado en la tabla 48., se puede observar que el 55% de los estudiantes completan la tabla afirmando que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"x16" o "x+x.3+4(x.3),* de los cuales se puede afirmar que hasta este punto para completar la tabla lo han realizado teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades.

De lo anterior solo el 30% de los estudiantes afirma que la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+4(3x) =4",* es decir, que los estudiantes tuvieron en cuenta la relación entre el total y la cantidad de sus partes. Además, el 20% de los estudiantes afirma que la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"x+3x+=4.3x",* de lo cual se puede afirmar que presentaron confusión al representarlo ya que esta expresión no representa lo expresado en lenguaje natural. Por último, el 5% de los estudiantes expresan que la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 es *"x+3x+4(3x) =16",* lo que parece indicar que el estudiante realizó la suma de las *"x"* teniendo como resultado 16, sin embargo, no es la expresión que representa lo escrito en lenguaje natural y omite en el resultado la *"x".*

Por otra parte, el 30% de los Estudiantes que indican que la cantidad de tazas de azúcar se expresa en lenguaje simbólico con *"3x",* la cantidad de tazas de leche se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x",* la cantidad de tazas de los tres ingredientes se expresa en lenguaje simbólico con *"16",* de los cuales las dos primeras expresiones coinciden con las cantidades de los ingredientes, sin embargo en la tercera, en la cual se pide expresar en lenguaje natural la cantidad de tazas de los tres ingredientes los estudiantes afirman que 16 representa el total, lo que parece indicar que los estudiantes realizaron la suma de los ingredientes pero olvidaron la x.

Por consiguiente, el 10% de los estudiantes afirma que la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x.4",* el 15% afirma que la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con *"4.3x=4", por último, el 5% afirma que* la cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4 se expresa en lenguaje simbólico con "4x". De lo anterior, se puede evidenciar la complejidad de los estudiantes al expresar la suma de las cantidades de cada ingrediente en relación con el total de arequipe que se prepara.

No obstante, el 15% de los estudiantes presentaron dificultades en el momento de pasar al lenguaje natural al lenguaje algebraico, por ejemplo, E19 completo el gráfico con cantidades numéricas entre las cuales en la penúltima y última expresión se evidencian una contradicción ya que en la penúltima expresión el estudiante escribe 8 y en la última el escribe que “no es=8”

Situación 2: Problema 2, Pregunta 3 (S2, Pb2, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 50 *Tipificación S2, Pb2, P3*

Pregunta 3. Escribe la cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche que se necesitan para preparar 4 tazas de arequipe.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que la cantidad que se necesita de bicarbonato es 0.25, la cantidad de azúcar es de 0.75 y la cantidad de leche es 3 (E6,E14)	2	10%
2	Estudiantes que responden que se necesitan 1 de bicarbonato, 3 de azúcar y 12 de leche (E2,E4,E8,E11,E12,E20)	6	30%
3	Estudiantes que responden que se necesitan 1 de bicarbonato, 1 de azúcar y 2 de leche (E13, E19)	2	10%
4	Estudiantes que afirman que la cantidad de bicarbonato es “x”, la cantidad de azúcar es 3 tazas y la cantidad de arequipe es 4 (E7)	1	5%
5	Estudiantes que responden que se necesitan 2 de leche, 1 de azúcar y 7 de bicarbonato (E1, E3,E10,E16)	4	20%
6	Estudiantes que responden que se necesitan 1,3 de bicarbonato, 3 de azúcar y 7 de leche (E15)	1	5%
7	Estudiantes que responden que se necesitan 1 o 4 de bicarbonato, 3 o 12 de azúcar y 4 o 16 de leche (E5)	1	5%
8	Estudiantes que no responden acorde a la pregunta (E9,E17,E18)	3	15%

La tabla 49 presenta la categorización de los resultados a la pregunta 3 de la situación 2 en la cual se evidencia que solo el 10% de los estudiantes logró hallar las cantidades de los ingredientes, afirmando que la cantidad que se necesita de bicarbonato es de ¼ o 0.25, la cantidad de azúcar es igual a ¾ o 0.75 y la cantidad de leche es igual a 3 (ver figura 57). De lo anterior, se puede resaltar que los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades del problema y el total, además lograron hallar las cantidades a pesar de no ser cantidades enteras. Sin embargo, los estudiantes no se percataron de la unidad de medida en tazas.

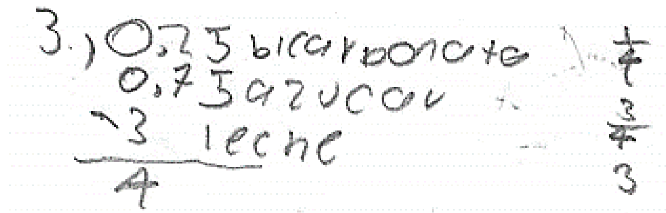


Figura 57 *S2, Pb2, P3, E14*

Por otra parte, el 30% de los estudiantes afirma que se necesitan 1 de bicarbonato, 3 de azúcar y 12 de leche, lo que parece indicar que los estudiantes tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades, pero no tienen en cuenta la relación entre el total y sus partes, en este caso el total es 16 el cual contradice el enunciado del problema donde se establece que en total son 4 tazas de arequipe (ver figura 58).

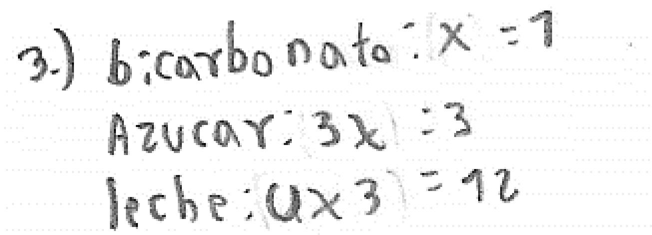


Figura 58. *S2, Pb2, P3, E4*

Particularmente, el E12 realiza una comparación en la cual asume que sumar el bicarbonato y el azúcar obtiene como resultado 4 entonces se puede evidenciar que a pesar de no interpretar de forma adecuada el problema el estudiante está prensando algebraicamente al establecer las relaciones (ver figura 59).

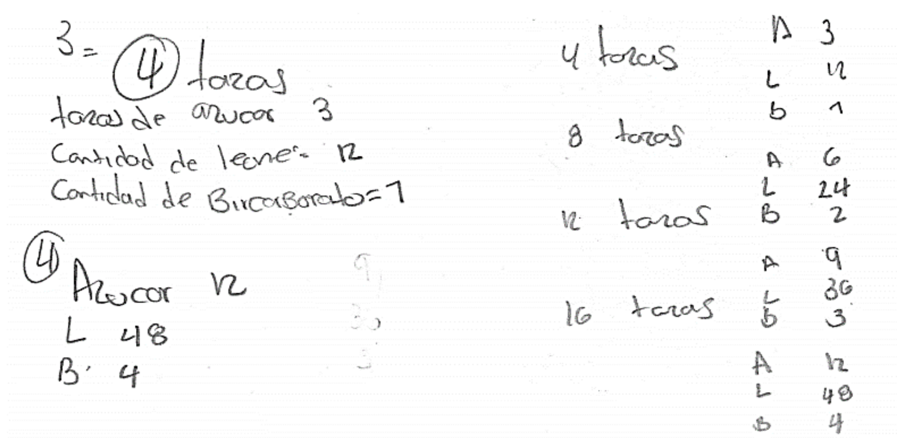


Figura 59. *S2, Pb2, P3, E12*

Además, el 10% de los estudiantes afirma que se necesitan 1 de bicarbonato, 1 de azúcar y 2 de leche, de lo anterior se infiere que los estudiantes tienen en cuenta la relación entre las partes y el todo, pero no tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades (ver figura 60).

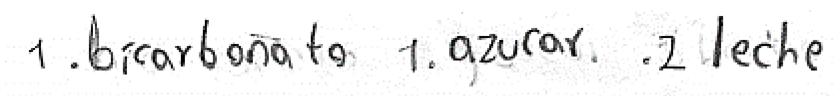


Figura 60. *S2, Pb2, P3, E13*

No obstante, el 50% de los estudiantes proporcionan valores a las cantidades, las cuales no permiten percibir que tipo de razonamiento se utilizó para llegar a estas cantidades que representan las tazas de bicarbonato, de azúcar y de leche.

Situación 2: Problema 2, Pregunta 4 (S2, Pb2, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 51. *Tipificación S2, Pb2, P4*

Pregunta 4. Si Marcela quiere preparar 16 tazas de arequipe, ¿Cuánta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche necesita?			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que se necesitan 1 de bicarbonato, 3 de azúcar y 12 de leche (E6,E14)	2	10%
2	Estudiantes que responden que se necesitan 4 de bicarbonato, 12 de azúcar y 48 de leche (E2, E4, E8, E11, E12,E20)	6	30%
3	Estudiantes que responden teniendo en cuenta las relaciones entre las partes y el todo pero no tienen presente las relaciones entre las cantidades, por ejemplo, dicen que se necesitan 3 de bicarbonato, 3 de azúcar y 10 de leche o que se necesitan 4 de bicarbonato, 4 de azúcar y 8 de leche (E1, E3, E7, E10,E13, E16)	6	30%
4	Estudiante que afirma que se necesitan 2,6 de bicarbonato, 5,6 de azúcar y 9,6 de leche (E15)	1	5%
5	Estudiante que responde que se necesita 4,5 de azúcar, 4,5 de bicarbonato y 6 de leche (E19)	1	5%
6	Estudiante que responden 4. (E9,E17,E18)	3	15%
7	Estudiante que responde que se necesitan 1 de bicarbonato, 3 de azúcar y 4 de leche (E5)	1	5%

Según la tabla 50, solo el 10% de los estudiantes logró hallar las cantidades de los ingredientes necesarios para preparar 16 tazas de arequipe, afirmando que la cantidad que se necesita de bicarbonato es de 1, la cantidad de azúcar es igual 3 y la cantidad de leche es igual a 12 (ver figura 61). De lo anterior, se puede resaltar que los estudiantes tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades del problema y el total, además lograron hallar las cantidades a pesar de no ser cantidades enteras. Sin embargo, los estudiantes no se percataron de la unidad de medida en tazas.

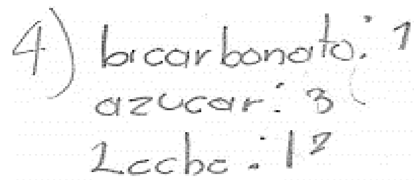


Figura 61. *S2, Pb2, P4, E6*

Por otra parte, el 30% de los estudiantes afirma que se necesitan 4 de bicarbonato, 12 de azúcar y 48 de leche, lo que parece indicar que los estudiantes tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades, pero no tienen en cuenta la relación entre el total y sus partes, en este caso el total es 64, el cual contradice el total presentado en la pregunta donde se afirma que marcela quiere preparar 16 tazas de arequipe (ver figura 62).

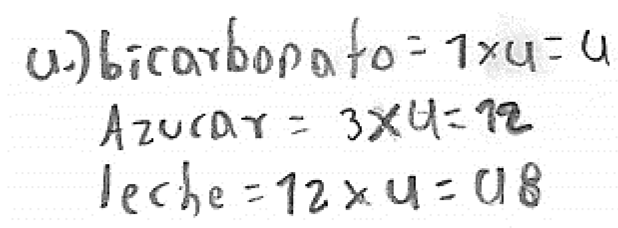


Figura 62. *S2, Pb2, P4, E4*

Además, el 30% de los estudiantes afirma que se necesitan 3 de bicarbonato, 3 de azúcar y 10 de leche, de lo anterior se infiere que los estudiantes tienen en cuenta la relación entre las partes y el todo, pero no tienen en cuenta las relaciones entre las cantidades y proporcionan valores a cada ingrediente por medio del tanteo, en las cuales es interesante que la cantidad de leche siempre es mayor que la cantidad bicarbonato y azúcar, lo que permite evidenciar que los estudiantes perciben las relaciones en cuanto a cuál ingrediente tiene mayor cantidad de tazas (ver figura 63).

Figura 63. *S2, Pb2, P4, E1*

Sin embargo, el 30% de los estudiantes proporcionan cantidades a cada uno de los ingredientes, pero no se logra inferir cual es el tipo de razonamiento que el estudiante presentó para llegar a esas cantidades. de los estudiantes

Cabe resaltar que el dominio numérico de este problema son los racionales positivos, por tal razón el estudiante puede presentar dificultades al operar y comprender que no necesariamente se necesitan tazas completas de cada uno de los ingredientes.

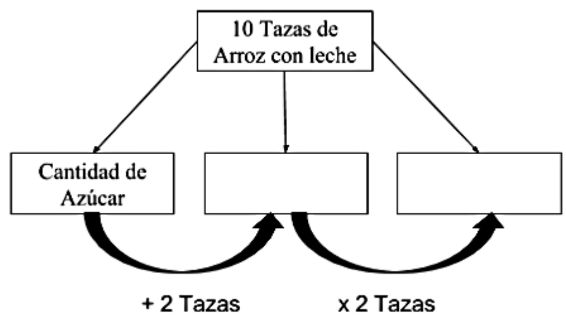
Problema 3: Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

Una familia desea preparar 10 tazas de arroz con leche, para lo cual se necesita una cierta cantidad de arroz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz. ¿Qué cantidad de arroz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

Situación 2: Problema 3, Pregunta 1 (S2, Pb3, P1)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 52. *Tipificación S2, Pb3, P1*

Pregunta 1: Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha con la palabra arroz y la palabra leche respectivamente. (E2,E3,E4,E5.E6,E7,E8,E9,E10,E11,E12,E14,E15,E16,E17,E18,E20)	17	85%
2	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha escribiendo las palabras cantidad de arroz y cantidad de leche respectivamente. (E13,E19)	2	10%
	Estudiantes que completan el gráfico de izquierda a derecha escribiendo la palabra leche y la palabra arroz respectivamente. (E1)	1	5%

De la tabla 51 se infiere que el 95% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, lo cual permite inferir que logran interpretar las relaciones establecidas entre los ingredientes del problema De estos, el 85% completan el gráfico de izquierda a derecha con la palabra arroz y la palabra leche, mientras que el 10% restante completan el gráfico de izquierda a derecha indicando cantidad de arroz y cantidad de leche. Cabe resaltar que, aunque ambas respuestas son correctas, es de gran importancia que los estudiantes hablen de cantidades, del tipo de medida que se está utilizando en la situación en contexto, ya que lo que se pregunta va directamente relacionado con las cantidades *"¿qué cantidad de arroz…"* por ello, el motivo de separar una respuesta con la palabra "arroz" a otra con "*cantidad de arroz*".

Ahora bien, sólo el 5% de los estudiantes completan de manera incorrecta la tabla al escribir de izquierda a derecha las palabras leche y arroz respectivamente, lo cual parece indicar que no tuvieron en cuenta, o no se percataron de analizar toda la gráfica, como por ejemplo los recuadros con "+ 2 tazas" y "*x* 2 tazas", que eran parte fundamental para comprenderlo.

En general los estudiantes reconocen que la cantidad de arroz y la cantidad de leche están relacionadas con la cantidad de azúcar, es decir, reconocen la direccionalidad de las flechas y las relaciones que están descritas abajo (+2 tazas, *x*2 tazas) del gráfico. A pesar de que el 85% de los estudiantes solo escriben el nombre del ingrediente mientras un 10% escriben la cantidad del ingrediente, se reconoce que esa cantidad es la que va allí, aunque no esté propiamente la palabra, y que el hecho de que interpreten correctamente las relaciones entre las cantidades del problema conlleva a una comprensión significativa y avance sustancial en la introducción al pensamiento algebraico de los estudiantes.

Situación 2: Problema 3, Pregunta 2 (S2, Pb3, P2)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 53. *Tipificación S2, Pb3, P2*

Pregunta 2. Gustavo afirma que la preparación de 10 tazas de arroz con leche requiere más cantidad de tazas de azúcar que de leche.
a. Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
b. Justifica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr	JUSTIFICACIÓN	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Gustavo es falsa.	17	85%	Estudiantes que escriben las relaciones enunciadas en el problema para explicar la falsedad de la afirmación de Gustavo. Ej. La cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es dos veces la cantidad de arroz. La cantidad de azúcar es la incógnita del problema. (E5,E8,E12,E14,E17)	5	25%
				Estudiantes que afirman que solo hay una taza de azúcar. (E9,E13,E18,E19)	4	20%
				Estudiantes que justifican con base en sus experiencias cotidianas. Ej. Quedaría muy dulce el arroz con leche. (E2,E3,E4,E10,E16).	5	25%
				Estudiantes que no justifican la respuesta (E7,E11,E15)	3	15%
2	Estudiantes que indican	3	15%	Estudiantes que no justifican la respuesta.	3	15%

que la afirmación de Gustavo es verdadera.	(E1,E6,E20)

De acuerdo con los resultados presentados en la tabla 53, el 85% de los estudiantes responden de manera acertada a la pregunta, indicando que la afirmación de Gustavo es falsa. De estos, el 25% justifica su respuesta escribiendo las relaciones que se enuncian en el problema, más específicamente E8, E14 y E17 escriben que "*la cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz",* mientras E5 justifica que la cantidad de azúcar es la variable, lo que parece indicar que reconoce la relación de dependencia entre los tres ingredientes, es decir esas relaciones aditivas y multiplicativas a partir de la cantidad de azúcar que indican mayor cantidad de tazas de arroz y de leche aunque no se conozcan exactamente. Cabe resaltar que el estudiante E12 antes de dar respuesta a la pregunta separa aunque en este problema no se solicita, tanto las cantidades conocidas como las desconocidas de forma correcta, además indica las relaciones que se establecen de cada ingrediente (ver figura 64) y luego justifica su respuesta indicando que la cantidad de leche es el doble de la cantidad de azúcar, lo cual parece indicar una distracción al momento de responder, ya que establece antes de forma correcta cada una de las relaciones entre cantidades.

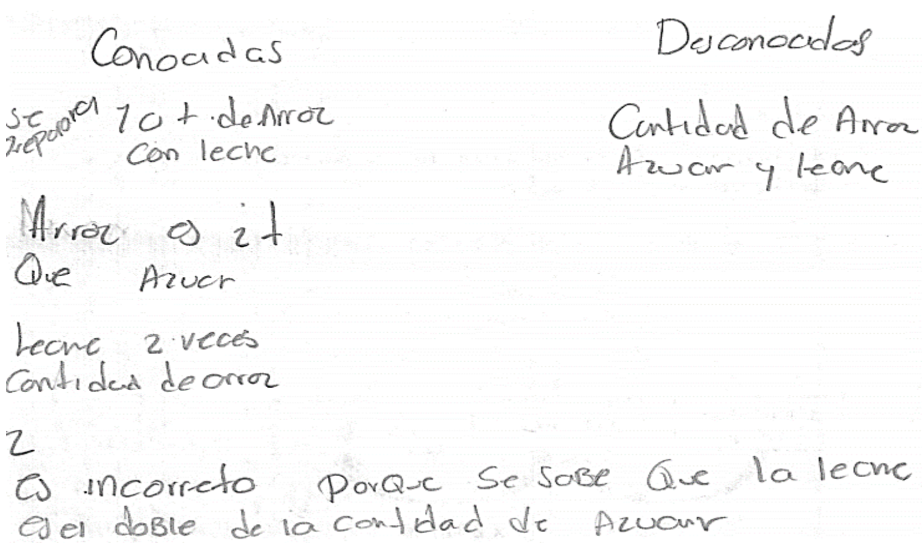


Figura 64. *S2, Pb3, P2, E12*

Ahora bien, el 20% de los estudiantes justifican su respuesta diciendo que solo hay una taza de azúcar, lo cual parece indicar que interpretan de forma correcta las relaciones entre cantidades para indicar la mínima cantidad de tazas para el azúcar. De estos, E13 trata de identificar además las posibles cantidades para los otros dos ingredientes (ver figura 65), acertando en la cantidad de arroz, pero fallando en la cantidad de leche, ya que expresa la relación "*la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz"* en forma aditiva y no multiplicativa.

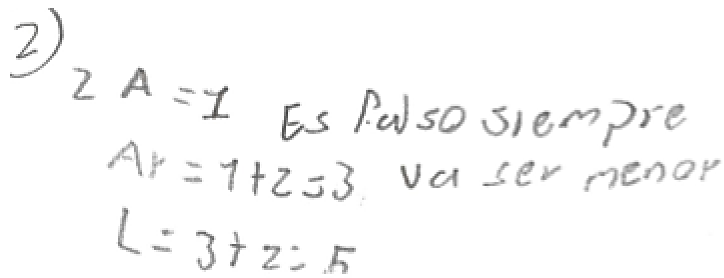


Figura 65. *S2, Pb3, P2, E13*

Por añadidura, el 25% de los estudiantes justifican sus respuestas con relación a sus experiencias cotidianas, más específicamente E2, E3 y E16 indican que el arroz con leche quedaría muy dulce, mientras E4 y E10 justifican que además de dulce quedaría muy seco el arroz con leche, lo cual es válido, ya que precisamente al ser un problema en contexto o problema de la vida diaria, debe permitir a los estudiantes poder relacionarlo con sus experiencias y así poder darle un sentido lógico al problema que están tratando de resolver.

En cuanto al 15% restante de los estudiantes que responden correctamente la pregunta, no realizan una justificación de la misma.

Por otra parte, un 15% de los estudiantes responden de manera incorrecta a la pregunta al indicar que la afirmación de Gustavo es verdadera, además no justifican su respuesta, lo cual no permite prever el tipo de razonamiento que los llevó a dicha respuesta.

Situación 2: Problema 3, Pregunta 3 (S2, Pb3, P3)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 54 *Tipificación S2, Pb3, P3*

Pregunta 3. Gustavo además afirma que la expresión que le permite encontrar las cantidades en tazas de cada ingrediente es "$10 = x + (x + 2) + 2(x + 2)$" siendo x la cantidad de tazas de azúcar.
a. Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
b. Justifica tu respuesta.

	TIPOS DE RESPUESTA	Fa	Fr	JUSTIFICACIÓN	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Gustavo es verdadera.	12	60%	Estudiantes que resuelven la ecuación dada por Gustavo. (E8,E11,E14,E17)	4	20%
				Estudiantes que afirman que la cantidad de azúcar es x, lo cual permite identificar la veracidad de la ecuación. (E4,E6,E7,E10)	4	20%
				Estudiantes que comparan por medio del lenguaje natural la expresión de Gustavo. (E12)	1	5%
				Estudiantes que justifican con relación a sus experiencias cotidianas. (E5,E19).	2	10%
				Estudiantes que no justifican la respuesta (E13)	1	5%
2	Estudiantes que indican que la afirmación de Gustavo es falsa.	1	5%	Estudiantes que no justifican la respuesta. (E20)	1	5%
3	Estudiantes que no responden la pregunta	7	35%	Estudiantes que intentan resolver la expresión dada por Gustavo, pero no obtienen resultados correctos. (E1,E16)	2	10%
				Estudiantes que no justifican. (E2,E3,E9,E15,E18)	5	25%

Respecto a los datos presentados en la tabla #, se observa que el 60% de los estudiantes responden de forma correcta la pregunta indicando que la expresión dada por Gustavo es verdadera. De estos, el 20% justifica resolviendo la expresión dada por Gustavo, específicamente E8,E14 y E17 obtienen como resultado $x = 1$lo cual es correcto para la cantidad de azúcar (ver figura 66) y es de gran importancia para iniciar un pensamiento algebraico, ya que el hecho de operar con cantidades desconocidas, agruparlas y llegar a conocer la incógnita no es tarea fácil.

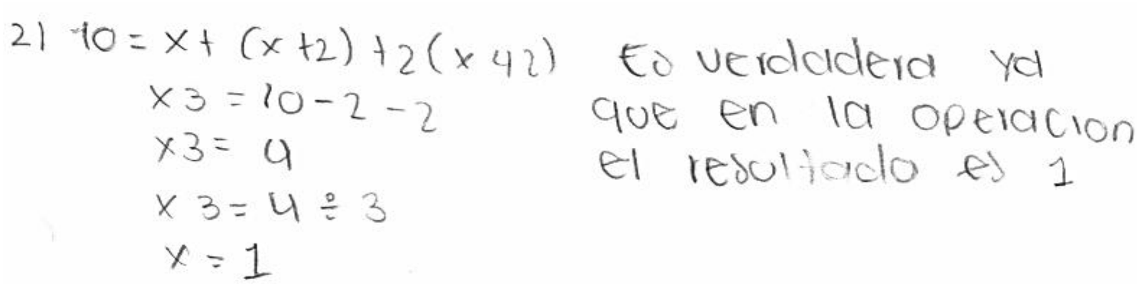


Figura 66. *S2, Pb3, P3, E8*

Por otro lado, E11 trata de resolver la ecuación, pero falla un el procedimiento al no tener en cuenta la jerarquía de las operaciones (ver figura 67) y termina obteniendo para el valor de *x* la cantidad numérica 1.5, igualmente se le abona el hecho de intentar resolver el problema pasando del plano de las cantidades al de las relaciones.

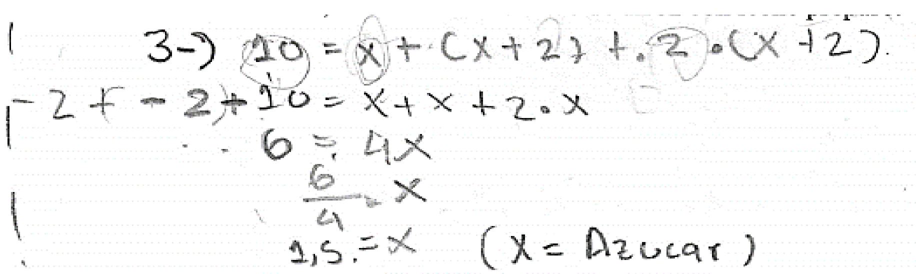


Figura 67. *S2, Pb3, P3, E11*

Ahora bién, un 20% de los estudiantes identifican que la incógnita del problema es la cantidad de azúcar y como Gustavo además de la expresión $10 = x + (x+2) + 2(x+2)$ indica que x es la cantidad de tazas de azúcar, eso les basta para establecer que Gustavo da una expresión acertada que permite resolver el problema.

En cuanto al estudiante E12 justifica su respuesta separando cada término de la ecuación dada por Gustavo y lo compara con lo enunciado en el problema (lenguaje natural) para asegurar que la ecuación corresponde con el problema planteado (ver figura 68). lo cual es de gran importancia al momento de iniciarse en el pensamiento algebraico, por la complejidad que resulta en los estudiantes pasar de un lenguaje a otro.

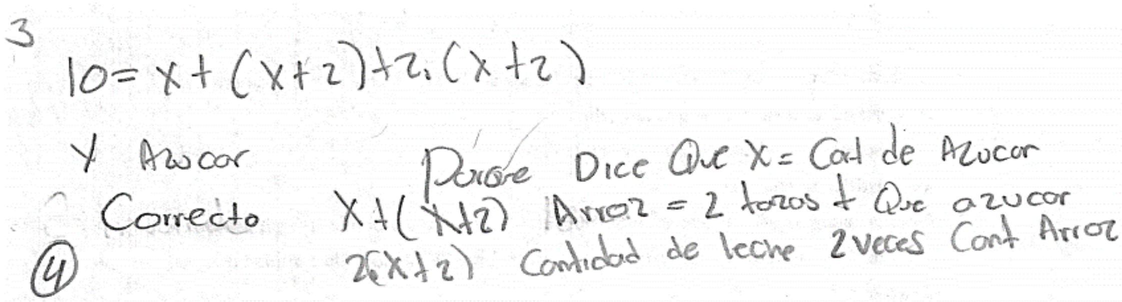


Figura 68. *S2, Pb3, P3, E12*

Además, un 10 % de los estudiantes responden de acuerdo a sus experiencias cotidianas, E5 indica que es verdadera la expresión de Gustavo porque el arroz con leche debe tener más leche que azúcar, es decir, logra interpretar de manera acertada la forma en que Gustavo establece por medio de un lenguaje formal lo enunciado en el problema, (interpreta las expresiones para la cantidad de azúcar y leche), mientras que E19 justifica que la cantidad de azúcar es igual a 1 porque el arroz con leche no necesita tanta azúcar porque da diabetes, lo cual es acertado, pero al no dejar constancia de algún procedimiento que lo llevara a esa cantidad de azúcar resulta difícil interpretar el tipo de comprensión que tiene.

Por otra parte, el 5% de los estudiantes no justifica su respuesta, otro 5% indica que la afirmación de Gustavo es falsa pero no justifica dicha afirmación. Por último, el 35% restante de los estudiantes no responden la pregunta, sin embargo, un 10% intenta resolver la expresión de Gustavo, pero no obtienen la cantidad correcta para el azúcar.

Situación 2: Problema 3, Pregunta 4 (S2, Pb3, P4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 55 *Tipificación S2, Pb3, P4.*

Pregunta 4: Escribe la cantidad de tazas de arroz, de azúcar y de leche que se requiere para preparar 10 tazas de arroz con leche.

	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que la cantidad de azúcar es igual a 1 taza, la cantidad de arroz es igual a 3 tazas y la cantidad de leche es igual 6 tazas, pero no realizan procedimiento(E4,E6,E8,E9,E10,E11,E12,E14,E15,E17,E18,E20)	12	60%
2	Estudiantes que indican las cantidades de los ingredientes en función de la incógnita. Ej: La cantidad de azúcar es igual a 2x, la cantidad de leche es igual a 2x +x y la cantidad arroz es	2	10%

	igual a 2x+x+x. (E1,E13)		
3	Estudiantes que afirman que la cantidad de azúcar es igual a 1 taza, la cantidad de arroz es igual a 4 tazas y la cantidad de leche es igual 5 tazas. (E2,E3,E16)	3	15%
4	Estudiantes que resuelven la expresión dada en la pregunta anterior de manera incorrecta, lo cual los lleva a valores erróneos de cada ingrediente. Ej: Racionales positivos. (E5, E7, E19).	3	15%

De los datos presentados en la Tabla 54, se infiere que el 60% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, pero no realizan ningún procedimiento que evidencien dichos resultados, por lo cual se cree que pudieron haber usado el método de tanteo, de tal manera que se diera cumplimiento a las relaciones enunciadas en el problema.

Por otro lado, el 40% restante de los estudiantes responden de forma incorrecta a la pregunta, de estos, el 10% indica términos para cada ingrediente en función de la incógnita, E1 señala que la cantidades de azúcar, de arroz y de leche son equivalentes a $2x, 2x + x$ y $2x + x + x$ respectivamente, mientras E13 formula que las cantidades de azúcar, de arroz y de leche son equivalentes a $x + x2 + x2$.Con relación al 15% establecen cantidades para cada ingrediente haciendo uso del método de tanteo, teniendo en cuenta sólo las relaciones entre los tres ingredientes con la cantidad total, pero no las relaciones de dependencia entre cada ingrediente, lo que los lleva a decir que las cantidades de azúcar, de arroz y de leche son iguales a 1, 4 y 5 respectivamente. Respecto al 15% restante, parten de la expresión dada en la pregunta anterior "$10 = x + (x + 2) + 2(x + 2)$"pero no logran obtener un valor correcto para la incógnita (cantidad de azúcar), E5 y E7 por ejemplo, despejando la ecuación llegan a que $x = 1.5$, mientras E19 indica que la cantidad de azúcar es igual a 2.5, a pesar de que en la respuesta anterior había escrito que era igual a 1.

Situación 2: Problema 3, Pregunta 5 (S2, Pb3, P5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 56. *Tipificación S2, Pb3, P5*

Pregunta 5: Si Luisa utiliza 1 taza de azúcar, escribe cuántas tazas de arroz con leche preparó.			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que afirman que Luisa preparó 10 tazas de arroz con leche. (E1,E2,E3,E4,E10,E12,E13,E15,E16,E20)	10	50%
2	Estudiantes que indican que da lo mismo que en la respuesta anterior, es decir, las cantidades de azúcar, de arroz y de leche son iguales a 1, 3 y 6 respectivamente. (E6,E8,E11,E14,E17)	5	25%
3	Estudiantes que responden de forma incorrecta. (E9,E18,E19).	3	15%
4	Estudiantes que no responden de acuerdo a la pregunta. (E5,E7).	2	10%

En cuanto a los resultados presentados en la Tabla 55, se observa que el 75% de los estudiantes responden de manera correcta la pregunta, de estos, el 50% indican que Luisa preparó 10 tazas de de arroz con leche, mientras que el 25% restante logra identificar la relación de igualdad con la pregunta anterior, al indicarse la misma cantidad de azúcar para ambos casos, lo cual conlleva a tener igual cantidad de ingredientes que en la pregunta anterior, por lo que vuelven a escribir la cantidad de cada ingrediente.

Ahora bien, un 15% de los estudiantes responden de forma incorrecta la pregunta, E9 y E18 indicando que se prepararon 9 tazas de arroz con leche, mientras E19 decide darle el mismo valor numérico a cada ingrediente, para tener un total de 3 tazas de arroz con leche. El 10% restante de los estudiantes no responden en relación con la misma. Ejemplo de este último caso son E5 y E7 que deciden resolver una operación partiendo de la pregunta anterior, en la cual resuelve una ecuación y halla como valor de *x=1,5.* Ahora bien, escribe la misma ecuación pero en los lugares donde se encontraba la *x* lo reemplaza por 1,5 obteniendo como resultado $10 = 3.1$sin percatarse que la relación de equivalencia entre un dato y el otro no coincide, además no argumenta nada al respecto.

Problema 4: Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas.

Doña Marlene quiere preparar 11 tazas de dulce de leche cortada, para lo cual se necesita una cierta cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche. Si se sabe que la cantidad de azúcar es 5 veces la cantidad de zumo de limón y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de azúcar.

Situación 2: Problema 4 (S2, Pb4)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 57 *Tipificación S2, Pb4.*

Pregunta: ¿Qué cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche se necesita para preparar la receta?			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad de azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” donde la cantidad de limón es 11/16, la cantidad de azúcar es 55/16 y la cantidad de leche es 110/16. (E9,E11,E18)	3	15%
2	Estudiantes que responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad de azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” en la cual se supone que es la cantidad de limón. (E1,E4,E19)	3	15%
3	Estudiantes que responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad de azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” en la cual se supone que es la cantidad de limón, además “x” tiene el valor de 55/16. (E2,E3,E6,E10,E13,E16,E17)	7	35%
4	Estudiantes que interpretan el problema por medio de la ecuación *“x+5x+2(5x)”,* sin embargo, presentan dificultades para encontrar las cantidades de cada ingrediente. (E8,E14,E15,E20)	4	20%
5	Estudiante que responden que se necesitan 5 azúcar. 1 zumo de limón y 10 leche, además escribe. (E12)	1	5%
6	Estudiantes que responden que se necesitan 5 de azúcar, 4 de zumo de limón y 6 de leche (E5,E7)	2	10%

Conforme a la tabla 56, se puede observar que el 10% de los Estudiantes responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad de azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” donde la cantidad de limón es 11/16, la cantidad de azúcar es 55/16 y la cantidad de leche es 110/16 (ver figura 69). Por consiguiente, se puede afirmar que los estudiantes identificaron el valor del zumo de limón al despejar x de la ecuación “*x+5x+2(5x)”* obteniendo como resultado 11/16 y a partir de este se infiere que los estudiantes reemplazaron este valor para hallar la cantidad de los ingredientes faltantes teniendo en cuenta las relaciones presentes entre las cantidades.

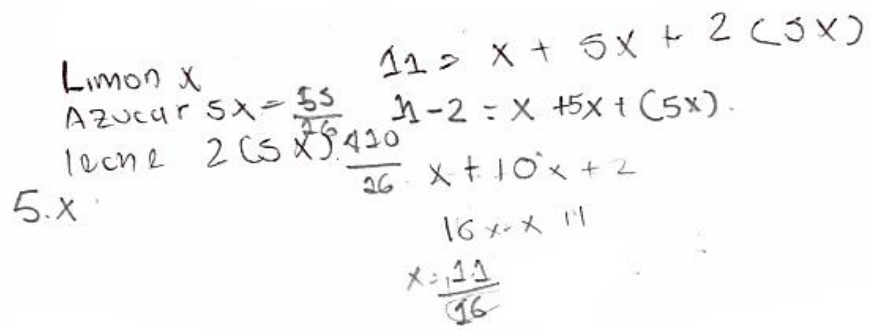


Figura 69. *S2, Pb4, E11*

Además, el 15% de los estudiantes que responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad de azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” en la cual se supone que es la cantidad de limón (ver figura 70). De lo anterior, se puede observar que los estudiantes comprenden la estructura del problema y encuentran la cantidad que les permite hallar la cantidad de cada ingrediente, sin embargo, ellos no relacionan los procedimientos que se realizaron para hallar el valor 11/16 en el contexto del problema. Por esto, se puede inferir que los estudiantes realizan un procedimiento independiente del contexto del problema o simplemente asumen que ese valor es obvio y por tanto corresponde a una cantidad solicitada en el problema.

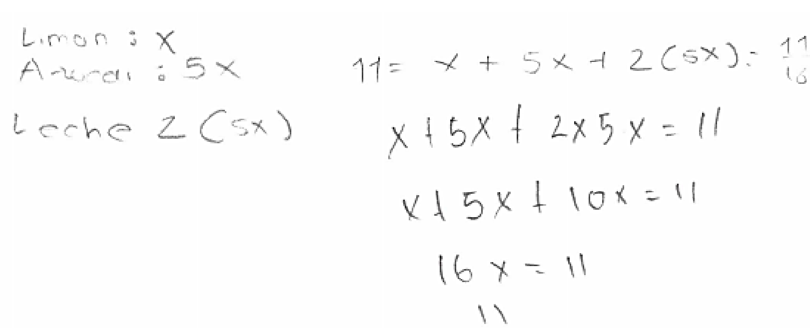


Figura 70. *S2, Pb4, E1*

Por otra parte, el 35% de los estudiantes responden que la cantidad de limón se representa por “x” la cantidad del azúcar la representa con “5x” y la cantidad de leche se representa con 2(5x), además tienen en cuenta la relación de equivalencia entre el todo igual a sus partes, finalmente resuelven la ecuación en la cual se despeja el valor de “x=11/16” en la cual se supone que es la cantidad de limón, además “x” tiene el valor de 55/16 (ver figura 71). De lo anterior, se puede inferir que los estudiantes no lograron identificar cuál era el valor de x con el fin de hallar la cantidad de zumo de limón, al parecer se produjo una confusión al establecer que x tenía ambos valores.

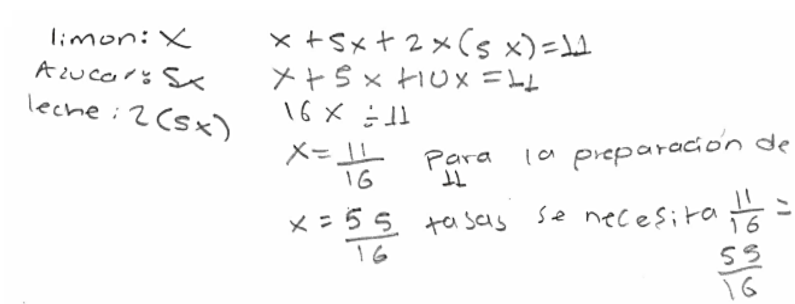


Figura 71. *S2, Pb4, E1*

Ahora bien, el 25% de los estudiantes interpretan el problema por medio de la ecuación *“x+5x+2(5x)”*; sin embargo, presentan dificultades para encontrar las cantidades de cada ingrediente. Estas dificultades son de tipo procedimental, como lo son el despeje de una ecuación, la división y multiplicación de un determinado número (ver figura 72). Particularmente, E14 realiza el procedimiento para hallar el valor de “*x”,* es decir, la cantidad de zumo de limón, pero no tiene en cuenta las relaciones entre las cantidades o realizo mal alguna operación para hallar las cantidades de agua y de leche.

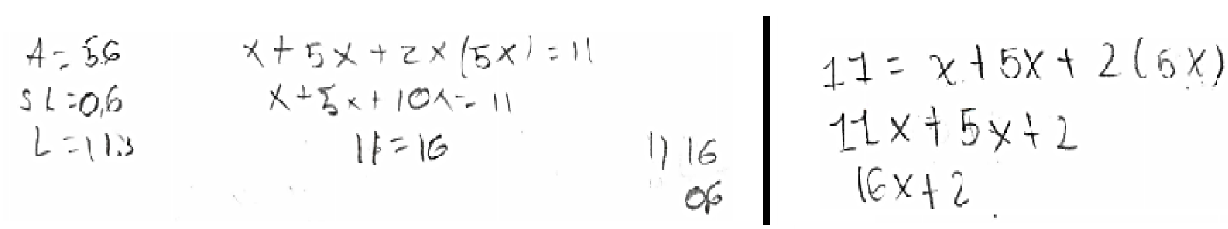


Figura 72. *S2, Pb4, E14 y E8*

En adición el 15% de los estudiantes realizaron un tanteo y darle un valor a las cantidades de cada ingrediente, lo que parece indicar que los estudiantes identificaron las relaciones del problema como cantidades conocidas y a partir de estas dieron valores a las cantidades. Lo anterior pudo presentarse debido a la complejidad del dominio numérico y a la categoría del problema pues se presentan dos relaciones homogéneas multiplicativas.

Problema 5: Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea de dos relaciones.

Mariana desea preparar 5 tazas de natilla, para lo cual se necesita una cierta cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de fécula de maíz es 2 veces la cantidad de azúcar y la cantidad de leche tiene $\frac{5}{2}$de taza más que la cantidad de fécula de maíz. ¿Qué cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

Situación 2: Problema 5 (S2, Pb5)
Población: 20 estudiantes.

Tabla 58 *Tipificación S2, Pb5.*

Pregunta: ¿Qué cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?			
	TIPOS DE RESPUESTA	**Fa**	**Fr**
1	Estudiantes que responden de forma correcta, resolviendo una ecuación de manera acertada e indicando que se necesita $\frac{1}{2}$de taza de azúcar, 1 taza de fécula de maíz y $\frac{7}{2}$de taza de leche. (E4,E10,E12,E20)	4	20%
2	Estudiantes que responden de forma correcta indicando que se necesita $\frac{1}{2}$de taza de azúcar, 1 taza de fécula de maíz y $\frac{7}{2}$de taza de leche pero no realizan ninguna operación que lo sustente. (E2,E3,E9,E16,E18,E19)	6	30%
3	Estudiantes que formulan una ecuación y la resuelven correctamente al encontrar el valor de $x = \frac{1}{2}$, pero establecen cantidades incorrectas para algunos ingredientes. (E1,E5,E6,E7,E8,E15,E17)	7	35%
4	Estudiantes que responden de forma incorrecta la pregunta. (E11,E13,E14,)	3	15%

Con respecto al problema 5, se observa que el 85% de los estudiantes responden de manera acertada a la pregunta, de estos el 20% formula, resuelve y reemplaza los valores de la incógnita de manera acertada para encontrar la cantidad en tazas de cada ingrediente, mientras que un 30% solo deja indicado la cantidad de tazas de cada ingrediente, más no realizan operaciones que permitan evidenciar el tipo de comprensión que los llevó a dichos resultados, se cree que pudieron dar respuesta haciendo uso del método de tanteo, teniendo en cuenta las relaciones entre cantidades enunciadas en el problema y la relación implícita del total en relación con sus partes, pero solo es un supuesto.

Por ejemplo, E2 indica de forma correcta el valor de cada ingrediente, pero antes deja indicada una ecuación que no está correctamente formulada cuando expresa la cantidad de leche, ya que en vez de sumar $\frac{5}{2}$con la cantidad de fécula de maíz que es lo que indica la relación, lo que hace es indicar una operación multiplicativa, lo cual lo llevaría a resultados erróneos, por ende se cree que solo la dejó expresada y prefirió guiarse por el método de tanteo (ver figura 73).

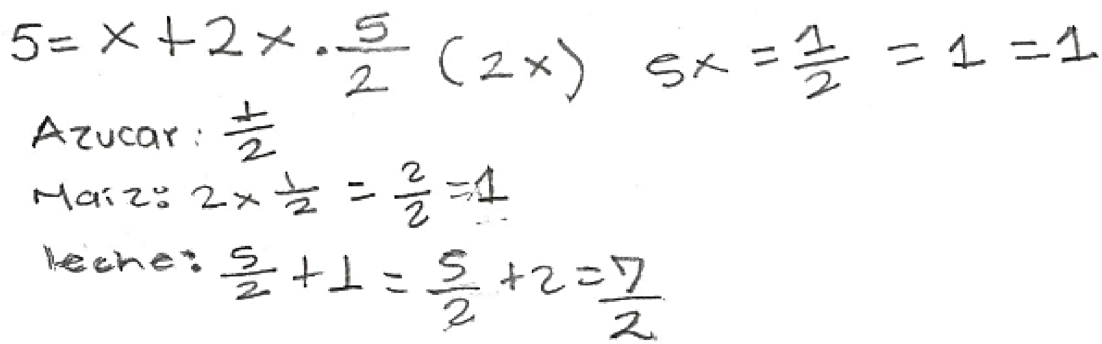


Figura 73. *S2, Pb5, E2*

En cuanto al 35% restante de los estudiantes, se puede decir que también responden correctamente la pregunta, debido a que formulan y resuelven correctamente una ecuación, hallando para el valor de $x = \frac{1}{2}$, el error lo cometen al dar esa cantidad hallada a un ingrediente diferente del azúcar, lo cual los lleva a tener valores erróneos para cada ingrediente, ejemplo de ello es E5 que después de resolver la ecuación, indica que el valor hallado es la cantidad de fécula de maíz, y a partir de eso encuentra que el azúcar es igual a 2 tazas y la cantidad de leche es igual a $\frac{2}{5}$de taza, lo cual no es correcto (ver figura 74).

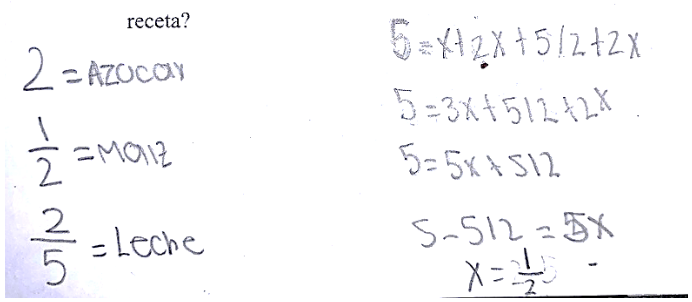


Figura 74*. S2, Pb5, E5.*

Ahora bien, sólo un 15% de los estudiantes responden de manera incorrecta a la pregunta, de estos E11 parte haciendo un diagrama correcto de las relaciones enunciadas en el problema, y formula una ecuación correcta, pero falla al momento de resolverla, más específicamente al momento de operar con números fraccionarios, lo cual lo lleva a tener $x = 3$de lo cual relaciona correctamente que se refiere a la cantidad de azúcar, aunque la cantidad esté incorrecta, a partir de ese dato establece que la cantidad de fécula de maíz es igual a 6 y la cantidad de leche es igual a 8.5. (ver figura 75).

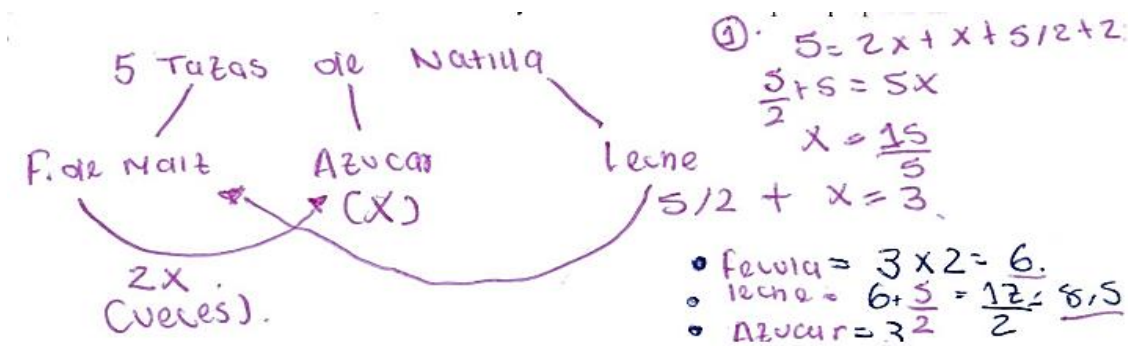


Figura 75*. S2, Pb5, E11.*

En conclusión, se puede decir que la implementación de la propuesta de aula en los estudiantes fue pertinente para su formación y grado de escolaridad, ya que, si bien no tenían ningún acercamiento al álgebra, el trabajo les permitió afianzar en cierta medida este campo de las matemáticas y aprender a solucionar problemas específicos, que siempre presentan tantas dificultades en los estudiantes. La mayoría de los estudiantes al final de la situación 2 lograron dar solución a los problemas haciendo uso de la ecuación de acuerdo a la relación implícita parte-todo expuesta en cada uno de los problemas. Cabe anotar además que el uso de las gráficas y las tablas permitió que los estudiantes se apropiaran más del uso de las letras, lo cual evidencia como dice Bednarz y Janvier (1996) que a pesar de que la adquisición del pensamiento algebraico involucra la extensión del pensamiento aritmético, a veces es necesario romper con ciertas cosas, y el hecho de que los estudiantes dejaran de ver las relaciones entre cantidades presentadas en los problemas como datos conocidos (lo cual se evidenció en gran parte de los primeros problemas de la situación 1), permite evidenciar que los estudiantes lograron pasar del plano de las cantidades al plano de las relaciones, ya que aprendieron a trabajar y a interpretar la información adecuadamente a partir de lo desconocido para llegar a lo conocido y posteriormente dar solución al problema.

Es de gran importancia señalar que, mientras en la situación 1 prevaleció en los estudiantes los tipos de razonamientos como "*tomar el dato conocido en el problema como el punto de inicio*", "*crear un dato inicial al crear un número ficticio*", "*método de ensayo y error*", "*repartir y entonces generar*", es en la situación 2, evidente el avance que han tenido los estudiantes al demostrar un nivel superior del dominio de las relaciones involucradas y una representación más global de la estructura del problema haciendo uso de gráficas que unen para representar cada una de las relaciones involucradas en cada problema.

Lo anterior, va en vía a lo que plantean los Lineamientos curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) cuando expresan que el álgebra debe concebirse como una herramienta que potencie la resolución de problemas, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, que son propios del pensamiento variacional.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXONES DIDÁCTICAS

Capítulo 4. Conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas

4.1 Conclusiones generales.

Las conclusiones presentadas a continuación están relacionadas con la documentación desde tres referentes: el curricular, el matemático y el didáctico; el diseño de la propuesta de aula y la implementación y análisis de los resultados. Lo anterior, se evidencia a través del alcance de los objetivos del trabajo.

En relación con el primer objetivo específico, se puede concluir que se logró documentar la problemática por medio de los siguientes elementos conceptuales, desde tres perspectivas: curricular, matemática y didáctica, que permitieron el diseño de la propuesta de aula:

- Se puede concluir que, se logró documentar la problemática desde la perspectiva didáctica en tanto se identificaron las dificultades que se presentan en los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra, las cuales se categorizaron en tres tipos (Castro, 1994). Por otra parte, se describe la necesidad de una ruptura entre el pensamiento aritmético y algebraico, para lo cual se considera pertinente disminuir esta ruptura, es decir, que sea más suave entre los dos tipos de pensamiento. Adicional a eso, se establecen las diferentes alternativas propuestas por Bednarz, Kieran y Lee (1996), de las cuales se escogió la resolución de problemas como una alternativa significativa, que puede acortar la brecha presente entre los dos tipos de pensamiento. Lo anterior, es un aspecto que se logra a partir de la propuesta de aula. Particularmente, se consideran las investigaciones de Bednarz y Janvier (1996), para categorizar los tipos de razonamiento que presentan los estudiantes al resolver problemas que se pueden resolver tanto aritmética como algebraicamente.

- Desde la perspectiva curricular del Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006), se logró identificar características del pensamiento numérico y del pensamiento algebraico, que promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones algebraicas, haciendo énfasis en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Se incluye el trabajo a través de la resolución de problemas procedentes de la vida diaria que fomentan el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamientos y para aportar significativamente al sentido y al uso de las matemáticas. Finalmente, los elementos que fueron de gran importancia para documentar y articular la propuesta de aula son los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos, centrando la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

- El estudio matemático permitió establecer las características fundamentales de lo que son las expresiones algebraicas con el fin de articular la propuesta de aula a las representaciones simbólicas algebraicas presentadas en esta, asimismo las representaciones que pueden plantear los estudiantes para representar y resolver un problema. Además, se define el concepto de ecuación, el cual es de gran importancia al representar las equivalencias entre las cantidades. Lo anterior, con el objetivo de que los estudiantes resuelvan problemas utilizando las representaciones en lenguaje algebraico y comprender su significado en el contexto del problema.

Asimismo, en relación con el segundo objetivo específico, el cual hace referencia al diseño de la propuesta de aula, se concluye que se pudo articular algunos elementos de los referentes conceptuales identificados, de los cuales se infiere lo siguiente:

- Los referentes conceptuales fueron importantes a la hora del diseño puesto que se logra articular lo planteado en los referentes curriculares, más específicamente el contexto, ya que la perspectiva curricular dice que toda la actividad matemática debe ser desarrollada en contexto. Por lo anterior, se reconocen los contextos de Halloween y de la Navidad, significativos para los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio, debido a las proximidades de las fechas y por las actividades que se realizan en la institución.

- Por otra parte, para la construcción y diseño de la propuesta de aula se tuvo en cuenta la investigación realizada por Bednarz y Janvier (1996), en la cual se tuvo en cuenta las categorizaciones de los problemas según el tipo de relación, es decir, relaciones de composición homogénea con dos relaciones aditivas, relaciones de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas y relaciones de composición no homogénea de dos relaciones, cabe resaltar que el orden en el que se presentan las relaciones van de menor a mayor complejidad. Por lo anterior, la propuesta de aula se estructuró de la siguiente manera: La situación 1, consta de 4 problemas, los dos primeros presentan una relación de composición homogénea de dos relaciones aditivas, el tercer problema presenta una relación de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y el cuarto problema presenta una relación de composición no homogénea de dos relaciones. La situación 2, consta de 5 problemas, el primer problema presenta una relación de composición homogénea con dos relaciones aditivas, el segundo y el cuarto problema presentan una relación de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas, mientras que el tercero y quinto problema presentan una relación de composición no homogénea entre dos relaciones.

- Asimismo, la complejidad de los problemas está determinado por el dominio numérico, ya que es más complejo realizar la resolución de un problema donde las cantidades desconocidas están determinadas por números racionales positivos, y el estudiante verá la necesidad de utilizar las expresiones algebraicas y ecuaciones para determinar dichas cantidades, dado que por ensayo y error no se puede hacer uso del tanteo de una forma directa como en el dominio de los números enteros positivos.

Por otra parte, y en términos del tercer objetivo específico, se puede concluir de los resultados de la implementación de la propuesta, los siguientes aspectos relacionados con los desarrollos conceptuales y procedimentales de los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Veinte de Julio:

- En primer lugar, se puede concluir que la situación 1 permitió un acercamiento al álgebra, debido a que los estudiantes lograron comprender el problema y la gran mayoría logró resolverlo utilizando diferentes métodos, como lo son encontrar un número ficticio y a partir de él generar las otras cantidades. Además, los estudiantes tuvieron presente las relaciones entre las partes (estudiantes de cada grado) y el todo (total de estudiantes). Por otro lado, es de gran importancia que la mayoría de los estudiantes identificaran las relaciones entre las cantidades, y que no le dieran el valor de cantidad, lo cual parece indicar que se está presentando una ruptura entre el pensamiento aritmético para introducirse en un pensamiento algebraico. Además, los estudiantes encontraron la representación simbólica algebraica del problema y utilizaron esta representación algebraica para probar por ensayo y error los números que cumplen con las relaciones; sin embargo, los estudiantes no operaron la ecuación que permite resolver el problema.

- Por otra parte, en la situación 2, los estudiantes en su gran mayoría utilizaron representaciones algebraicas que les permitieron resolver los problemas, lo anterior debido a la necesidad de utilizar este sistema de representación ya que el método de ensayo y error o encontrar un numero ficticio que genere las otras cantidades es más complejo de hallar debido a que se presentan cantidades racionales. Además, cabe resaltar que a pesar de no resolver de forma correcta la ecuación, los estudiantes están pensando algebraicamente, ya que en primer lugar comprenden las relaciones entre las cantidades y la relación de equivalencia presentado por el signo igual, asimismo, logran generar una ecuación que modela el problema presentado.

- A lo largo del trabajo se presentaron avances significativos en los estudiantes y que en una primera instancia ninguno resolvió el problema haciendo uso de una ecuación, es decir, que en un principio se observó que el pensamiento de los estudiantes estaba orientado hacia los valores numéricos a pesar de tener en cuenta las operaciones. Al final se evidencia que la gran mayoría utiliza ecuaciones para resolver el problema, es decir, que están pensando analíticamente en cómo solucionar el problema.

- Por otra parte, se observó que las gráficas y tablas presentadas ayudaron a la comprensión del problema, y de cómo pasar de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico algebraico, ya que en primera instancia se identificaba la cantidad desconocida de la cual dependían las demás cantidades, para este caso se denoto x como la incógnita del problema, la cual fue identificada por los estudiantes y a partir de esta realizaron la construcción de la ecuación que modelaba el problema. Además, las gráficas de las relaciones permitieron comprender a los estudiantes las relaciones presentes en el problema y lograr una comprensión del mismo.

- Además, las ecuaciones presentadas en la propuesta de aula en primer lugar ayudaron a comparar expresiones previas o a reemplazar valores que les permitieron a los estudiantes identificar las cantidades desconocidas. Del cual, se puede inferir que los estudiantes comprendieron la estructura de la ecuación en relación al problema y también al identificarla como una herramienta que permite estructurar y solucionar un problema.

Por lo tanto, el objetivo general se logra porque la propuesta de aula a través del contexto empleado en cada situación (Fiesta de los niños y problemas aritméticos **y** Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos) permite a los estudiantes tener un primer acercamiento a conceptos y proceso relacionados con el álgebra, como las relaciones entre las cantidades, las relaciones de dependencia, y las relaciones de equivalencia; por lo tanto, se logra favorecer un acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos.

4.2 Algunas reflexiones didácticas

- El lenguaje utilizado en el diseño de los problemas en cada situación debe ser claro para el estudiante y debe ser acorde al grado de escolaridad, por tal motivo es recomendable que en el diseño de la propuesta se cuente con la colaboración de por lo menos dos estudiantes que tengan las características de la población a la que va dirigida la propuesta para desarrollar cada situación.

- Se considera de gran importancia que el docente tenga en cuenta la estructura de los problemas aritméticos que se van a presentar en el aula, puesto que permiten un acercamiento suave entre el pensamiento aritmético y el algebraico, asimismo, el docente tenga la capacidad de resignificar los conocimientos previos del estudiante, ya que el estudiante ha pasado la mayor parte del tiempo desarrollando el pensamiento numérico.

- Por otra parte, se considera de gran importancia que los docentes en ejercicio tengan en cuenta la resolución de problemas como un proceso que permite desarrollar en el estudiante de forma significativa pensamiento matemático en el estudiante, en particular desarrollar pensamiento algebraico a partir de la resignificación de conceptos desde el pensamiento aritmético.

- Además, los contextos presentados en este trabajo fueron significativos para los estudiantes de la Institución Educativa Veinte de Julio, por esto para trabajar desde la resolución de problemas es necesario abordarla desde un contexto significativo para los estudiantes, en este caso se presentaron dos situaciones, la primera situación con el Halloween y la segunda situación basada en la Navidad. Las anteriores pueden motivar al estudiante para resolver los problemas y las dota de un significado para el estudiante.

- De igual forma, Es conveniente que el dominio numérico sean los números enteros, ya que los estudiantes presentaron dificultades al realizar operaciones entre números racionales, lo que puede causar dificultades en la representación simbólica algébrica, ya que lo estudiantes tienen arraigado el conjunto de los números enteros. Por lo anterior, es pertinente que de ser abordado este dominio se realice un acompañamiento sobre cómo se interpretan y operan los números racionales.

- Por último, es conveniente que no se realicen muchas preguntas por problema, debido a que los estudiantes cuando ven lo extenso de la actividad se condicionan y no se interesan por hacerla pues piensan que no la van a terminar. Además, puede causar confusiones al momento de cómo comprender el problema.

Anexos

Anexo 1. Proyecciones del trabajo de grado

En el desarrollo de este trabajo surgieron interrogantes que estaban por fuera del alcance del objetivo planteado. Por lo tanto, se presentan a continuación y se sugieren para trabajos posteriores:

- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del pensamiento algebraico si se diseña una propuesta de aula que integre material digital como por ejemplo Excel y Geogebra?

- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del pensamiento algebraico si se hacen estudios similares en diferentes niveles de escolaridad?

- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del pensamiento algebraico si se realizan estudios similares haciendo uso de material concreto?

- ¿Cómo se podría diseñar una propuesta de aula que permita al estudiante la resolución y comprensión de una ecuación que representa la estructura de un problema?

Además, el trabajo de grado fue presentado en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), en una comunicación breve.

XV CIAEM

Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019

Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CERTIFIES THAT:

SEBASTIÁN CASTAÑEDA MARTÍNEZ

co-authored a Communication, Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación, that was presented at the

XV Inter-American Conference on Mathematics Education
(XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)

held in Medellín, Antioquia, Colombia, from May 5 to 10, 2019 (46 hours).

Medellín, Colombia, May 10, 2019

José Alberto Rúa Vásquez

Ángel Ruiz President
IACME-CIAEM

José Alberto Rúa Vásquez
Decano Facultad Ciencias Básicas

Referencias

Andrews, P. y Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. Journal of Mathematical Behavior, (31), 476-488.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N y Janvier, B. (1996). *Surgimiento y desarrollo del álgebra como una herramienta en la solución de problemas. Continuidad y discontinuidad con aritmética.* En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 115-136)

Benalcázar, L. (2012). *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: Dificultades y tratamiento.* Universidad del Valle, Buenaventura, Colombia.

Brousseau, G. (1989), '*Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des math´ematiques'*. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathematics 1970- 1990. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Calderón, N y Dávalos, P. (2011). *Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Manuscrito no publicado.

Cartagena, L, y Sossa, G. (2016). *Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico.* Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Castro, E. (1994). "*Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria* (12-14 años)" Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á.Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. L'Educazione Matematica, 3, 278-306.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transitions from arithmetic to algebra. For the learning of mathematics, 9 (2), 19 – 25.

Franco, J. (2018). "*Un acercamiento a la variación directamente proporcional a través de patrones numéricos*". Universidad del Valle, Cali, Colombia

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 188.

Galeano, O, y Váquiro, L. (2015). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. Educación y Educadores, 19(3), 315-338. DOI: 10.5294/edu.2016.19.3.1

Hernández, K, y Tapiero, K. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos–icónicos en estudiantes de educación básica.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). Publicación de resultados Saber 3o, 5o, y 9o. Recuperado de http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

Kieran, C y. Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias, 7(3), 229-240.

Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En Grows, D.A. (Ed.), Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje. Macmillan Publishing Company. Newyork, pp. 390-419

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). Algebra in the early grades. Londres, Reino Unido: Routlege.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2015a). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá, Colombia.

Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* Newyork: Wiley.

Puig, L. (1998). Cómo poner un problema en ecuaciones. Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2),37-62.

Rojano T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1)

Rojano, T. (1996). *Aspectos algebraicos de la resolución de problemas desarrollados dentro de un ambiente de hojas de cálculo*. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 137-145). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. (Academic press: Orlando, FL.)

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XI (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.

Swaford, J., y Langrall, C. (2000). Uso preinstruccional de ecuaciones para describir y representar situaciones problemas en un grupo de sexto grado. EMA, 5(3), 203-235

Vasco, C. E. (2002). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. Bogotá-Colombia.

Vergel R., y Rojas P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Fransisco José de Caldas.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York, NY, US: Macmillan Library Reference Usa; London, England: Prentice Hall International.

Wheeler, D. (1996). *¿Brusca o suave? La transición de la aritmética al álgebra.* En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 147-149)

Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (3ra. edición.). México: McGraw Hill.