UNA APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD EN EL CONTEXTO DEL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

RICHARD ANDRÉS BONILLA

MARÍA ALEJANDRA PERDOMO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS (3469)

ZARZAL

2014

UNA APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD EN EL CONTEXTO DEL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

RICHARD ANDRÉS BONILLA (200762154)

MARÍA ALEJANDRA PERDOMO (200762141)

Documento presentado como requisito para optar al título de Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director

OCTAVIO AUGUSTO PABÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS (3469)

ZARZAL

2014

ACTA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	**UNA APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN EL CONTEXTO DEL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS**
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [x]
Director:	Octavio Augusto Pabón
1er Evaluador:	Jorge E. Galeano Cano
2do Evaluador:	
Fecha y Hora	Año: 2014 Mes: Marzo Día: 14 Hora: 6:00 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Richard Andrés Bonilla	0762154	3469
María Alejandra Perdomo	0762141	3469

EVALUACIÓN

Aprobado	x	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo [ ] 1er Evaluador [ ] 2do Evaluador [ ]

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año: Mes: Día: Hora:

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

[firma]	[firma]	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente a Dios.

A nuestras familias y amigos por la paciencia que tuvieron durante todo nuestro proceso de formación.

A nuestros profesores, en especial al profesor Octavio Augusto Pabón y Jorge Enrique Galeano por toda la compañía y ayuda brindada en este camino que es tan importante para nuestras vidas, educación que no se encuentra en los libros sino de la que se adquiere por la experiencia.

CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

Este trabajo asume que la formación de pensamiento matemático en los estudiantes del país es una tarea fundamental de la educación matemática, la cual tiene diversos frentes y características. Es por eso que este trabajo se centra en el desarrollo del pensamiento variacional, en particular en el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción, que a su vez permiten acercarse a la comprensión de la proporcionalidad. Dicho trabajo se propone en el marco de una propuesta como es la del Laboratorio de Matemáticas del área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, toda vez que en este espacio concluyen de manera significativa algunas de las preocupaciones que se dieron origen a este trabajo: una mirada reflexiva sobre el papel de la experiencia y la experimentación en el aprendizaje de las matemáticas, una propuesta amplia para el entorno escolar que supere las restricciones del espacio de clase y, la inclusión de las reflexiones actuales de la investigación en didáctica de las matemáticas. Todo esto se concretó en la propuesta de una serie de fichas de trabajo que propenden por el desarrollo de aprendizajes significativos relacionados con la razón y la proporción en el contexto del trabajo con el laboratorio de matemáticas.

Palabras Claves: Laboratorio De Matemáticas, Razón y Proporción, Fichas de trabajo, Proporcionalidad, Razonamiento proporcional, Variación, Recurso pedagógico.

INTRODUCCION

Este trabajo se propone la formulación de una serie de actividades que apunten al desarrollo del razonamiento proporcional, en particular se hace una propuesta para el trabajo con los conceptos de razón y proporción, ya que se consideran fundamentales tanto para el desarrollo del pensamiento matemático en general como en la construcción de dicho razonamiento proporcional.

Se cuenta con la oportunidad de aprovechar la experiencia y los recursos con los que dispone el Laboratorio de Matemáticas del área de Educación Matemática de la Universidad del Valle para la concepción y construcción de esta propuesta; en particular, se aprovechan las concepciones que sobre el papel de la experiencia y la experimentación se han desarrollado en el contexto del trabajo con el laboratorio de matemáticas, también se aprovechan los elementos metodológicos se han desarrollado para la propuesta del Laboratorio de Matemáticas, como las fichas de trabajo y la idea de secciones y mesas de trabajo, son un soporte central para el trabajo.

El trabajo se presenta en tres momentos, organizados en forma de capítulos. En el primer capítulo se hace un desarrollo de la problemática que se propuso abordar en este trabajo, el trabajo con la razón y la proporción, como un asunto central en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, las dificultades que han acompañado su proceso de aprendizaje y las opciones que tradicionalmente se desarrollan en la escuela. Después de esta identificación, es posible proponerse unos objetivos que apunten a la construcción de una propuesta de trabajo de la razón y la proporción en el contexto del trabajo del Laboratorio de Matemáticas, gracias a que en dicho contexto se encuentran los posibles elementos que harán de esta una experiencia significativa.

En el segundo capítulo se propone sustentar la propuesta que se está presentando. Para ello se delimitan básicamente dos perspectivas: presentar el Laboratorio de Matemáticas y sus características, y hacer una exposición de elementos matemáticos y didácticos que permitan acercarse a la comprensión del pensamiento proporcional, en particular los conceptos de razón y proporción, y las características de estos en las matemáticas escolares.

En el tercer capítulo, se recogen diversas experiencias de trabajo y se reorganizan bajo el formato de fichas de trabajo del Laboratorio de Matemáticas. Estas fichas se diseñan bajo la metodología propuesta por el laboratorio, se han construido a partir de actividades que son comunes a todos los estudiantes como el juego de canicas o el juegos de bolos, emplean contextos cercanos como jugar con arena o realizar un corral para encerrar animales. Se organizan siguiendo posturas didácticas en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, como el hecho de que la construcción de las relaciones proporcionales se inicia con relaciones entre cantidades que se establecen con conteos sencillos, pasando por relaciones más complejas que desde lo numérico permiten ir avanzando en la comprensión de los aspectos centrales de la proporcionalidad.

Finalmente se entregan algunas conclusiones del trabajo, que tienen que ver fundamentalmente con las implicaciones posibles de este trabajo en el contexto del laboratorio de matemáticas y la necesidad y posibilidades de incluir este trabajo en el contexto escolar.

CAPÍTULO I

Este capítulo se presenta la problemática a tratar como objeto de investigación, junto con algunas particularidades que la sustentan, es decir concepciones y contextos que definen el espacio y movilidad del presente trabajo de grado. La proporcionalidad es el objeto matemático en cuestión y el estudio de cómo diversas herramientas de trabajo permiten una mayor aproximación a su aprendizaje. Se propone entonces un trabajo que permita construir y desarrollar una alternativa para el desarrollo del pensamiento variacional, en particular el trabajo con la razón y la proporción.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza de la proporcionalidad, inscrita en el contexto del razonamiento proporcional, comienza en el sistema educativo desde la primaria[1] y sirve como base para la comprensión de nuevos conceptos y conocimientos matemáticos que se desarrollan en la escuela.

El razonamiento proporcional está relacionado con la resolución de problemas cuya estructura matemática corresponde a la estructura de proporcionalidad. En su resolución el estudiante transita desde la comprensión cualitativa del enunciado a lo cuantitativo, establece relaciones multiplicativas entre espacios de medida con los operadores funcionales y/o escalares y da sentido a la solución.

---

[1] Según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) la iniciación que se hace de la enseñanza de la proporcionalidad en la primaria está bajo las siguientes competencias para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

Primero a tercero:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

Cuarto a quinto:

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

Este razonamiento involucra el sentido de covariación[2], y se relaciona con el pensamiento variacional, que es concebido como aquel "*que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad*" (Vasco, 2002, p.6.)

Tal variación se relaciona con otros conceptos matemáticos que fundamentan y generan actitudes en el estudiante que lo llevan a observar, registrar y utilizar el lenguaje matemático en otros campos tales como las funciones y modelos de estas, las magnitudes, el álgebra y el significado de la variable, entre otros.

El razonamiento proporcional es parte inherente de la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, ligado a situaciones de aprendizaje que implican procesos de elaboración de conjeturas, de explicaciones, argumentaciones entre otros procesos comunicativos[3]. Igualmente envuelve relaciones matemáticas de naturaleza multiplicativa, conceptos tales como razón, proporción, constante de proporcionalidad, etc.

Höffer (1988) señala que la adquisición de las destrezas del razonamiento proporcional ha sido insatisfactoria en la población en general, lo que se evidencia en que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento, en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante,

> … typical instructional unit or chapter on ratio and proportion shows students different ways to write ratios and then introduces a proportion as two equivalent ratios. Next, students usually encounter the cross-multiplication algorithm as a technique for solving a proportion. Does this customary development of ratio and proportion promote a deep understanding of these ideas?
>
> (Höffer, 1988, p. 23)

Esta situación es similar a la que se presenta en nuestros contextos, la experiencia y las prácticas como maestros señalan elementos similares, de ahí que es importante preguntarse

---

[2] Implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s).

[3] Ya que el proceso matemático que se desarrolla en la proporcionalidad está inmerso en otros procesos y conceptos matemáticos como la razón, la proporción, el porcentaje, la probabilidad y representaciones gráficas, surge la necesidad de un trabajo desde distintos contextos que permitan al estudiante una aproximación del aprendizaje de la proporcionalidad.

sobre qué puede realizarse para lograr una comprensión adecuada del objeto matemático en cuestión, o una investigación que permita identificar una aproximación al aprendizaje que tenga en cuenta estas dificultades.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), mencionan que "*el acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas, y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo*" (1998, p. 41), pues estas situaciones conllevan al estudiante al poder relacionarse con las matemáticas de una forma más cercana y vivencial, de tal manera:

> … superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.
>
> (MEN, 2006. p.72.)

En consideración de que estas situaciones de aprendizaje significativo hacen uso de materiales manipulativos, representativos y tecnológicos, y propician además distintas capacidades de exploración comunicación, entre otras, en el estudiante, resulta ventajoso hacer uso de distintos escenarios de exploración que se vuelven herramientas de aprendizaje para un determinado objeto matemático. O dicho de otra forma, una estrategia pedagógica como lo ofrece el espacio del laboratorio de la Universidad del Valle, y así tener como fin una aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad, pues las actividades matemáticas que se proponen en este permiten asumir una actitud de investigación, tienen un carácter experimental, recreativo y lúdico y se desarrollan con el apoyo de materiales manipulativos, cuestionarios y situaciones problemas asociados, posibilitando entonces la creación de ambientes para "hacer matemáticas".[4]

Por ello, y siendo de gran ventaja el uso de materiales manipulativos en el Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle, es pertinente la creación de un material de trabajo en este espacio pedagógico que conlleve a la aproximación del aprendizaje de la

[4] El laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, contiene una metodología de trabajo, que tiene como producto final la realización de una ficha de trabajo, incorporada por distintos elementos y organización de contenidos, que posteriormente será explicada en otro capítulo.

proporcionalidad y junto con esto formularse la siguiente pregunta de investigación problema:

¿Cuáles son las características del diseño de fichas de trabajo, que permitan una aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad, bajo el escenario del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

- Caracterizar el diseño de fichas de trabajo, que permitan una aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad, bajo el escenario del laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar elementos fundamentales a integrar la elaboración de fichas de trabajo que contengan situaciones de aprendizaje significativo, bajo el escenario del Laboratorio de Matemáticas.
- Caracterizar el diseño de situaciones que permitan la aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad, dentro del marco del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle.
- Atender dificultades que desde una perspectiva didáctica se han señalado para el aprendizaje de la proporcionalidad.
- Promover el trabajo con el Laboratorio de Matemáticas como un recurso potente para el desarrollo de pensamiento matemático.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Más allá de los salones de clase, el razonamiento proporcional es evidente en otras áreas como las ciencias naturales, la música y la geografía, así como en las actividades de la vida diaria. Las personas usan el razonamiento proporcional para calcular los mejores precios de una compra, los intereses y los descuentos, al trabajar con dibujos y mapas, al realizar conversiones de pesos y medidas, al preparar recetas y ajustar la cantidad de ciertos ingredientes o para crear diversas soluciones o mezclas con diversas concentraciones. La habilidad para pensar y razonar proporcionalmente es un factor esencial en el desarrollo de las habilidades de los individuos para entender y aplicar las matemáticas.

Muchas tareas matemáticas y actividades requieren razonamiento proporcional. Dibujar el plano de una casa, una ruta de la escuela a la casa o un plano del patio de la escuela; al compartir cuatro pizzas entre tres amigos o dos barras de chocolate entre tres personas; al determinar que producto comprar cuando un 1kg cuesta $3.500 y 1.5 kg –de otra marca o clase – cuesta $4200, todas estas requieren del razonamiento proporcional.

El desarrollo del razonamiento proporcional es un proceso gradual, reforzado al trabajar con incrementos graduales en la solución de situaciones cada vez más sofisticadas de pensamiento multiplicativo y en la formación de habilidades para comparar dos cantidades en términos multiplicativos más que en términos aditivos.

El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importantes del pensamiento adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción.

El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan más lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado.

El razonamiento proporcional como parte del campo multiplicativo ha sido identificado como un concepto clave que subyace a un amplio rango de tópicos estudiados en la escuela. La tarea de los profesores e acompañar a los estudiantes en la construcción y consolidación de habilidades de razonamiento. Esta no es una tarea fácil, como lo señala constantemente la investigación en este tema, al señalar las dificultades de los estudiantes en temas relacionados con el razonamiento proporcional.

La tarea del profesor, y de la escuela colombiana en general, se desarrolla de la mano de los planteamientos que en relación con la organización curricular hace el MEN (Ministerio de educación nacional), lo cual exige un acercamiento crítico y reflexivo –por parte de los profesores- a lo que el ministerio ha propuesto.

En consideración con las distintas etapas y reestructuraciones que han existido en el proceso educativo de las matemáticas, en Colombia, luego de que en 1994 se expidiera la Ley General de la Educación, con lo cual ya no es el Ministerio de Educación Nacional[5] el responsable de la determinación de los currículos escolares colombianos, en 1998 se publican los Lineamientos Curriculares de matemáticas, en los que el propósito de las matemáticas escolares ya no se enfocaría en sistemas matemáticos y simbólicos, sino en distintos tipos de pensamiento matemático[6], acompañados de procesos matemáticos[7], lo cual hace que el pensamiento matemático sea más poderoso y se realice bajo sus distintas formas.

Ahora bien, dentro de estos tipos de pensamiento matemático, es de interés el pensamiento variacional, al interior del cual se ubica el pensamiento proporcional, en el que según Vasco

[5] Tal que las instituciones educativas tenían ya la libertad de formular su propio proyecto educativo institucional, y de reformar currículos y planes de estudio.
[6] Numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Siendo este último de gran importancia para el presente trabajo.
[7] Formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

(2002) plantea que la concepción de este no se reduce o no debe entenderse como la definición de una función o las variaciones matemáticas que ellas puedan reflejar o no de la realidad, sino más bien, como un pensamiento dinámico y mental que intente producir sistemas de covariación bajo procesos de la realidad, además

> El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar "modelos mentales".
>
> (Vasco, 2002, p. 6)

Así, el propósito del pensamiento variacional es "*la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo.*" (Vasco, 2002, p. 6), y además de ello requiere del pensamiento métrico y del numérico, en el caso en que las mediciones superen el nivel ordinal y del pensamiento espacial cuando las variables son espaciales.

Por otro lado, autores como Cantoral y Reséndiz (2003), conciben el estudio de este pensamiento bajo el análisis de fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos, a través del medio social que les da cabida, particularmente hacia el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales, en los que las personas comparten y asignan sentidos por medio de estructuras variacionales. Es aquí donde el medio social juega un papel importante sobre aquellas predicciones e interpretaciones sobre los fenómenos de cambio observados.

Sin embargo algunas veces la escuela reduce la enseñanza de la proporcionalidad a lo numérico, pese a que cobra especial sentido sobre conceptos u objetos matemáticos relacionados con la variación, singularmente en modelos matemáticos de tipo de variación aditiva y multiplicativa, y mediciones de cambio relativo; pues sus contextos "integran estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo." (MEN, 1998, p.74).

Dentro de la proporcionalidad son presentados los conceptos de razón y proporción, en los que la razón se muestra como la medida o cociente entre dos magnitudes, y la proporción como una igualdad entre razones. Según Freudenthal (1983)

> … la naturaleza misma de dichos conceptos genera tal carácter elusivo; él sostiene, por ejemplo, que hacer un tratamiento de la razón en términos de un cociente, un número o una medida (lo que se logra al identificar la razón "tres es a cuatro" con el fraccionario "tres cuartos") desvirtúa y desconoce la naturaleza misma del concepto.
>
> (Como se cita en Perry, Guacaneme, Andrade & Fernández, 2003)

A lo que Guacaneme (2001) refiere que dado esto, la razón debe ser expresada como una relación, más no como el resultado de una operación, y la proporción como una relación entre relaciones, más no como la igualdad entre resultados de operaciones.

Esto abre la reflexión acerca de la naturaleza de estos dos objetos matemáticos, y con ello la creación de diseños curriculares que propicien el aprendizaje de estos y a su vez el desarrollo de habilidades y competencias para la resolución de problemas en distintas situaciones.

Los libros *V y VI de Elementos, de Euclides*, son una guía de la construcción del conocimiento matemático en cuestión. En el libro V se presenta una teoría general sobre las razones y las proporciones, junto con un discurso para las magnitudes geométricas euclidianas sin la incorporación de números que representen la medida de las cantidades de tales magnitudes.

En el libro VI se expone una teoría para figuras y sus cantidades de magnitudes geométricas, se hace énfasis a la semejanza entre figuras rectilíneas en el que aparecen proposiciones que establecen proporciones entre razones de cantidades de magnitud geométrica específica y proposiciones concernientes a la semejanza, las cuales se conciben hoy como criterios de semejanza entre triángulos, como también la exposición de cinco definiciones, 33 proposiciones y dos porismas.

Quintero, Molavoque y Guacaneme (2012), han realizado un análisis de la teoría contenida en estos libros con el objetivo de demostrar que la proporcionalidad geométrica no se reduce a la expresión de definiciones y proposiciones de la semejanza geométrica, sobre lo que afirman lo siguiente:

> En este contexto teórico, la semejanza es una relación entre figuras rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica alude a relaciones, de segundo orden, entre relaciones de magnitudes geométricas homogéneas. No obstante esta caracterización que les diferencia, existe una interesante relación entre estas.
>
> Quintero et al. (2012).

Por lo tanto, en esta diferenciación, es posible identificar discursos que permitan inferir cuándo se trata de proporcionalidad geométrica o cuándo de semejanza, además de que las construcciones geométricas de ambos objetos son diferentes, es decir, existen procesos para realizar figuras semejantes, y otros para construir objetos geométricos proporcionales.

De acuerdo con ello, este trabajo busca fortalecer esta diferenciación, y de igual manera optimizar el aprendizaje de estos bajo el escenario ya mencionado del laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, por medio de sus fichas de trabajo.

Como dispositivo de trabajo por medio de lo cual se pretende realizar esta diferenciación y así una aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad geométrica, se encuentran la realización de fichas de trabajo, que dentro de marco del laboratorio de la Universidad del Valle, permiten atender y evaluar la actividad propuesta fijada como objetivo general de este trabajo.

El laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, es una estrategia pedagógica, que permite una aproximación al aprendizaje del objeto matemático, valiéndose de la experiencia junto con la manipulación de materiales concretos o bajo la retroalimentación de técnicas de resolución de problemas. Es decir, que no es un medio directo de enseñanza hacia una población específica, sino más bien, un espacio al que puede acceder cualquier persona ya con una previa especificación y así fortalecer sus conocimientos.

Finalmente, la integración de este escenario a este trabajo, como estrategia didáctica para lograr una aproximación al aprendizaje de la proporcionalidad geométrica, no solo debe reducirse a la lectura de las fichas de trabajo elaboradas, pues es importante recalcar lo ventajoso que podría ser la utilización de éstas en un escenario educativo para su análisis de puesta en escena por los estudiantes.

CAPÍTULO 2

Este capítulo presenta los elementos fundamentales que caracterizan el trabajo con la propuesta del laboratorio de matemáticas, como un parte central en el desarrollo de la propuesta de este trabajo; se presentan también los conceptos fundamentales de la teoría de la proporcionalidad desde el punto de vista de las matemáticas con algunos matices que se presentan para el caso de las matemáticas escolares; se señalan algunos elementos claves para el desarrollo de una propuesta de trabajo en este sentido, la cual contempla tanto los aspectos a tener en cuenta así como las dificultades que este estudio plantea.

2.1 LABORATORIO DE MATEMÁTICAS: ESTRUCTURA Y CARACTERÍSTICAS

El Laboratorio de Matemáticas se propone como una herramienta que permite una aproximación al conocimiento matemático, en cuanto a que da lugar a la exploración del concepto matemático a partir de situaciones que contextualizan las matemáticas, posibilitando las diferentes interpretaciones y métodos de solución que cada persona puede plantear, al tener en cuenta los conocimientos y niveles de razonamiento disponibles al intentar dar repuestas a las actividades, la manipulación de materiales concretos o, en algunos casos, el encuentro con actividades matemáticas que conducen a la utilización de diferentes técnicas de resolución de problemas. Más exactamente, se concibe la propuesta del laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle como "*una estrategia didáctica de acompañamiento al diseño y uso de materiales, medios y recursos pedagógicos en el estudio de la actividad matemática desarrollada autónomamente por cada participante*" (Arce, J. Pabón, O, 2012).

2.1.1 Características

El laboratorio de matemáticas toma fuerza al reconocer la importancia de acercar y dotar de sentido, mediante un contexto, a aquellas actividades matemáticas que suelen ser ajenas a los participantes en su día a día; por lo que es vital lograr identificar aspectos teóricos que resaltan la importancia de los trabajos propuestos en el laboratorio, como:

- ✓ Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos.
- ✓ El uso de modelos (materiales, esquemas, diagramas y símbolos) como herramientas para simbolizar y organizar estos contextos y situaciones.
- ✓ La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza /aprendizaje.
- ✓ El papel clave del docente como guía.
- ✓ La importancia de la interacción, tanto grupal como de toda la clase.
- ✓ La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática. Bressan, A. Gallego, M. (2011)

Estos aspectos, que corresponden a los fundamentos de las Matemáticas Realistas de Freudethal, permiten reconocer en el modelo del laboratorio de matemáticas características de lo que se espera sea el trabajo en éste; uno de los elementos centrales que orientan el trabajo en el laboratorio son las fichas de trabajo, en ellas se encuentra el centro de la propuesta de cada una de las mesas, a través de las actividades que en ellas se consignan.

Con las fichas se busca darle una significación a las matemáticas mismas, mediante el uso de los distintos materiales que posibiliten el acercamiento a las matemáticas y generen en los participantes un interés por la resolución de las actividades, y a su vez, desarrollen habilidades de razonamiento matemático partiendo de una postura en la que son ellos los que proponen soluciones y el maestro[8] es un guía que encamina las situaciones a partir de preguntas o intervenciones que enriquezcan las propuestas del estudiante.

La propuesta del Laboratorio de Matemáticas parte de una estructura llamada ***MESA***, en la que se proponen actividades que tienen como objeto de estudio distintas ramas de las matemáticas:

- Aritmética

[8] Es claro, que las actividades que se proponen en el laboratorio de matemáticas no siempre son guíadas por el maestro, sin embargo se hace mención al maestro para describir el papel de quien guía la actividad.

- Álgebra
- Estadística y Probabilidades
- Juegos Matemáticos
- Prensa y Matemáticas
- Matemáticas del Consumidor
- Geometría
- Matemáticas y Nuevas Tecnologías
- Investigación. (Arce, 2003)

Cada una de estas mesas se ocupa de unas situaciones matemáticas en contextos específicos, es decir la *mesa de aritmética* se ocupa de situaciones numéricas, la *mesa de álgebra* potencializa las situaciones de generalización y modelación tanto numérica como abstracta, la *mesa de estadística y probabilidad* se relaciona con las actividades de inferencia y toma de decisiones a partir del cálculo de probabilidades y la interpretación de la información, la *mesa de juegos matemáticos* vincula distintas actividades tipo juego que relacionan las matemáticas, particularmente aquellos juegos que tiene que ver con la geometría de los primeros años de escolaridad, la *mesa* de *prensa y matemáticas* busca generar situaciones que conduzcan a la interpretación de la información que aparece en distintos medios de comunicación[9], la *mesa de las matemáticas del consumidor* se fundamenta en actividades que ponen en juego las matemáticas financieras y artesanas, como también el análisis de las situaciones relacionadas con el consumo, la *mesa de geometría* propone situaciones que recoge las distintas geometrías y la relación con el espacio y sus propiedades, la *mesa de matemáticas y nuevas tecnologías* en las que se propone el análisis de diversas situaciones haciendo uso de ambientes de geometría dinámica y sistemas computacionales algebraicos, finalmente, la *mesa de investigación* se ocupa de recoger la información recolectada en las otras mesas para hacer un estudio de las fichas del laboratorio y con ello obtener elementos para replantearlas.

[9] Particularmente esta mesa busca situaciones que se relacionen con algunos tópicos en el TIMSS

Estas mesas de trabajo pueden ser consideradas como un espacio fijo o móvil, en el que se proponen y desarrollan las actividades que corresponden únicamente a una de estas ramas, en ellas se disponen de diferentes recursos pedagógicos (Fichas de trabajo, materiales manipulativos, documentos, software, equipos, elementos para estructurar una secuencia de clase, prototipos, etc.) para que sus usuarios enfrenten los retos y problemas.

Aquellas actividades en las que es necesario vincular dos o más mesas conforman lo que se denomina una ***SECCIÓN*** del Laboratorio de Matemáticas, la cual permite dar solución a una de las actividades planteadas.

En la siguiente figura, se puede observar un ejemplo de la estructura de lo que es el funcionamiento y la forma del Laboratorio de Matemáticas, en este la M8 representa la mesa de investigación y la relación con cada una de las mesas. Asimismo se muestra cómo se establecen relaciones entre las distintas mesas para formar secciones en las que pueden intervenir dos o más mesas.

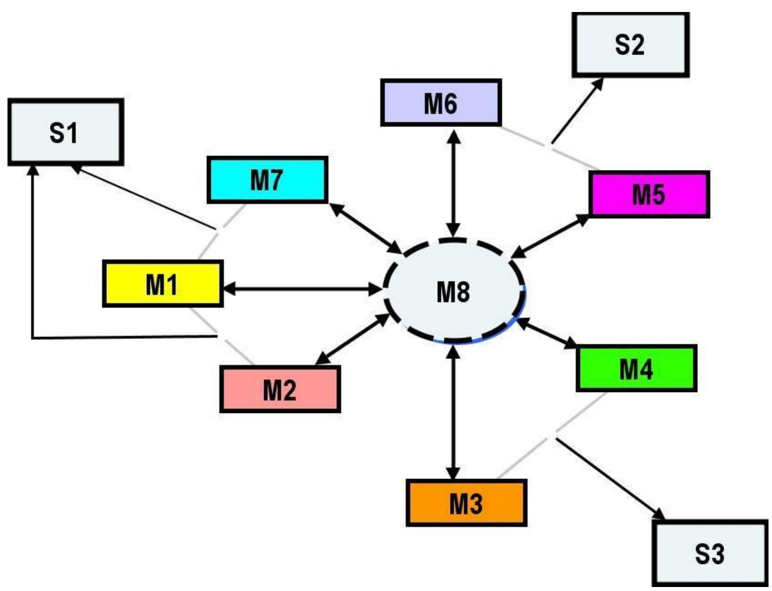

Ilustración 1. Estructura de Laboratorio

Como se mencionó anteriormente las mesas del Laboratorio se ocupan de ciertas áreas de las matemáticas e intentan acercar las matemáticas al quehacer de los participantes, mediante la creación de ciertas condiciones que propicien este acercamiento; por lo que se hace fundamental la creación de alguna herramienta que facilite esta labor, por lo que surgen las fichas del laboratorio de matemáticas que tienen unas características puntuales que además de permitir atender y evaluar la actividad propuesta y posibilitar la organización de las mismas.

Asimismo, es necesario señalar que el Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle no sólo tiene relación con la propuesta de las Matemáticas Realistas sino que hay vínculos con otras posturas teóricas que hacen un reconocimiento de la experimentación y el aprendizaje significativo como parte del proceso de aprendizaje, y específicamente del aprendizaje de las matemáticas. Esto en relación a contextos significativos que promuevan el desarrollo de habilidades y el descubrimiento en el participante, por lo que la propuesta del laboratorio de matemáticas ha tomado fuerza como una forma de aproximación a las actividades matemáticas escolares.

2.1.2 Papel de la experimentación en el laboratorio

Experimento es una palabra que no es usual asociar con las Matemáticas, más comúnmente se suele hablar de los experimentos refiriéndose a las Ciencias Experimentales o al conocimiento del medio en la etapa de Educación Primaria. Estas consideraciones hacen que el carácter revelador o transformador que tienen los experimentos no se aborde en el aprendizaje de las Matemáticas.

El experimento es un factor pedagógico en el aprendizaje, al tener gran fuerza en la primera toma de contacto del niño con algunas ideas matemáticas que están estrechamente ligadas a fenómenos físicos de la vida cotidiana. Por ejemplo, horizontal, vertical, ángulo, minuto, rapidez y mínima distancia serán conceptos cuando hayan sido dotados de sentido y no a través de un aprendizaje meramente verbal.

Un minuto ha de ser experimentado como "la duración de un ángulo ha de ser experimentado como una disposición de dos palillos o varillas; la horizontal no como una línea, sino como un estado físico. Una caminata de ocho kilómetros tiene probablemente en esa etapa de construcción de las ideas elementales, menos sentido que una caminata de dos horas "*Experimentar con las Matemáticas representa, entre otras cosas, inventar, crear a partir de los propios medios para hallar caminos de* *solución a problemas que se han planteado, generado la opción de realizar descubrimientos"* (Hernán y Carrillo, 1991, p.8). En el nivel de inicio de la construcción del pensamiento matemático, esta toma de contacto no tiene que ver mucho con definiciones o reconocimientos de conceptos, sino más bien con la formación incipiente de ideas en las que, tal vez más que nunca, lo esencial es el significado.

Es en el desarrollo del experimento cuando se ponen de manifiesto las propiedades que serán las notas del concepto; de ahí que convenga variar el contexto y los materiales utilizados para favorecer una abstracción más completa y más estable (Hernán, F. y Carrillo, E. (1991). Las Matemáticas tienen mucho de común con las Ciencias Experimentales. La producción en Matemáticas se hace en procesos en los que conjeturas, rectificaciones, ensayos, revisiones, demostraciones y errores se entremezclan de manera escasamente lineal. Intuiciones, analogías, imágenes, preguntas son tan importantes durante la producción matemática como lo son la deducción y el rigor lógico. Es sólo al final cuando ha de exponerse el resultado en formas de supuestos iniciales, definiciones y teoremas, cuando la lógica de la deducción debe limpiar de errores y cuando las otras formas de razonamiento deben ceder la prioridad a la deducción.

El hecho de que los objetos que las Matemáticas consideran no sean objetos físicos materiales tampoco es exclusivo de las Matemáticas. Todas las Ciencias tratan conceptos, esto es, objetos mentales, sean estos gravitación, plusvalía, fotosíntesis, oxidación, recursividad, etc.

El elemento esencial donde las Matemáticas se alejan de lo experimental reside en que las experiencias no intervienen en la validación de los resultados matemáticos. La experimentación jamás dilucidará la verdad del axioma de las paralelas, la existencia de los números negativos o del valor de la afirmación de que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano; simplemente porque en el mundo físico no hay paralelas ni hay números.

Es en eso que las Matemáticas son autónomas, en que la validez de sus resultados depende en última instancia, de su estructuración interna, de la que la no-contradicción es el requisito *sine qua non*. En este sentido, la experimentación matemática es sobre todo experimentación mental; si para investigar o exponer un teorema acerca del triángulo o acerca de las funciones continuas se utiliza la imagen gráfica de un triángulo o el ejemplo de una determinada función, ese uso es siempre marginal, un apoyo sensitivo, un material para hacer más sencilla la comunicación. Un espejo nunca dirá lo que es una simetría, ni una plomada dirá lo que es una vertical; hay simetrías que no son especulares y verticales es un término relativo.

Ante estas posiciones, es necesario establecer diferencias entre el construir Matemáticas en el ámbito de la investigación y el hacer Matemáticas en los procesos de aprendizaje en los niveles escolares; porque los conceptos no se adquieren en un instante, se forman en procesos en los que el conflicto cognitivo y las experiencias (tanto convergentes como contrapuestas) son agentes mentales imprescindibles. Y ocurre con frecuencia que la evidencia sensible es antagónica con las construcciones matemáticas.

Estas posibilidades implican aceptar, como constante didáctica, el error experimental, la intuición equivocada, la conjetura insuficientemente fundada. Convirtiéndose en momentos didácticos de importancia para generar proceso de aprendizaje.

Las actividades matemáticas que se presentan en el Laboratorio tienen alguna intención y van directamente encaminadas a potenciar los procesos de experimentación e indagación matemática, reuniendo características como:

- Ofrecer un atractivo a los participantes del Laboratorio, para que puedan integrarlas fácilmente en su mundo y buscarles solución o explicación.
- Generar la posibilidad de provocar el desarrollo de razonamientos propios y creativos.
- Tener un carácter marcadamente abierto para poder acoger distintos caminos de solución, que puedan plantear los distintos participantes.
- Propiciar la oportunidad de expresar de distintas formas las vías de solución y de explicación, utilizando quizás distintos lenguajes.
- Dar la posibilidad de trabajar con distintos tipos de materiales, no únicamente con papel y lápiz.

Por todo ello, el contexto experimental es imprescindible en el aprendizaje de los conceptos y en el establecimiento de conexiones entre ellos. Es así como la actitud experimental, por ejemplo, al aceptar el error y la imprecisión, sin la intención de instalarse definitivamente en ellos, considera didácticamente valioso que quien aprende construya algunos materiales, porque los problemas que se le presentan durante la construcción servirán para dar significado a los conceptos que intervienen en la representación que existe en el material.

La actitud experimental, permite que para un pensamiento eficaz lo importante no es estar siempre en lo cierto (si es que tal *cosa* pudiera darse), sino estar en lo cierto al final (Hernán y Carrillo, 1991).

2.1.3 Postura filosófica que sustenta la propuesta del laboratorio.

El Laboratorio de Matemáticas, en el ámbito escolar, no ha sido considerado como posibilidad significativa de construcción del pensamiento matemático; más aún, desde la concepción de las Matemáticas que habitualmente se maneja, una opción como ésta para una disciplina considerada tan abstracta y exacta, no tiene posibilidad ontológica.

El Laboratorio de Matemáticas se distancia de posiciones que asumen a las Matemáticas como entidades reales y que existen independientes del sujeto. Posiciones que consideran a las actividades matemáticas que se realizan en el mundo de la experiencia, contraproducentes en el proceso de aprehensión de los conceptos matemáticos.

Al concebir los objetos matemáticos, como objetos que gozan de una realidad en un mundo ideal, independiente del hombre y que existen desde siempre de manera inmutable y perfecta, se cierran las posibilidades de validar pedagógicamente cualquier tipo de actividad práctica que involucre interacción con la realidad material, con la realidad permisiblemente sensible.

Desde el punto de vista formal, se muestran las Matemáticas completamente independientes del hombre y ajenas a los procesos socioculturales que definitivamente la marcan y determinan. Esta manera de entender las Matemáticas marca una ruptura entre lo científico y lo humanístico, lo cual resulta pedagógicamente contraproducente cuando se muestran las Ciencias Naturales y las Matemáticas de un lado y las Ciencias Sociales de otro, ya que esta forma fragmentada de acercarse al conocimiento no da cuenta, de manera íntegra y completa, de los procesos de construcción que llevaron a dicho conocimiento. Además de vincular problemas de estatuto y de poder, en donde lo humanístico se pone bajo lo científico.

El Laboratorio de Matemáticas hace un distanciamiento a la anterior concepción de las Matemáticas, al abordar las Matemáticas como el resultado de una construcción social, concepción de las Matemáticas que la plantea como una disciplina que se construye a través de complejos procesos sociales donde el hombre y las condiciones culturales del momento juegan un papel fundamental. Esta mirada conlleva a plantear a las Matemáticas como una disciplina flexible, cambiante y producto humano (Romber, 1992). Concepción que tiene consecuencias importantes en su aprendizaje, al aceptar que quien aprende, puede crear o desarrollar sus propios conocimientos, en este caso los conocimientos matemáticos.

A través de esa posición filosófica de las Matemáticas se reconoce el rol vital que la experiencia ha jugado como elemento movilizador de las teorías Matemáticas y se destaca la labor del hombre con sus dudas e imperfecciones en el proceso de elaboración teórica. Desde aquí, las Matemáticas aparecen ligadas a problemas del mundo real y a otras disciplinas que la nutren, la obstaculizan o la viabilizan. Se puede mencionar algunas en particular, las cuales a lo largo de la Historia de las Matemáticas aparecen vinculadas a los procesos de génesis, evolución y recepción de los conceptos matemáticos: la Filosofía, la Física, la Astronomía y la Religión.

Las repercusiones de esta forma de concebir las Matemáticas en el campo de la Educación son radicalmente diferentes a las posibles incidencias desde la visión platónica. Un profesor que considere las Matemáticas como un producto acabado y exacto, transmitirá esta concepción a sus estudiantes a través de un discurso frío y técnicamente elaborado, en el cual el educando siente que no puede intervenir creativamente, ni transformar, sólo puede descubrir. Pero si el profesor se enfrenta al saber matemático como producto de un proceso de negociación de significados, de transformación en los conceptos, de acercamiento a las funciones de las Matemáticas en contextos particulares, a reconocer la transposición del conocimiento de un lugar científico a un lugar escolar, muestra que esta disciplina es dinámica y atractiva para ser construida por quien aborda los procesos de aprendizaje.

Otra de las implicaciones pedagógicas desde la concepción social constructivista de las Matemáticas se puede observar en la forma de evaluar los procesos de aprendizaje. De una evaluación donde se califica el resultado (mirada platónica) se pasa a un análisis valorativo del proceso que lleva a dicho resultado; y donde el error no se castiga sino que se constituye en un elemento clave del cual se aprende.

De otro lado, se establecen relaciones muy interesantes entre el saber, el profesor y el alumno donde ninguno se impone arbitrariamente sobre el otro. El profesor y el libro por ejemplo, dejan de ser las autoridades académicas para el estudiante y se convierten en orientadores que motivan y dan viabilidad a la construcción de conocimientos matemáticos. El saber matemático se constituye así, dentro del Laboratorio, como una construcción humana posible de realizar por quien aprende, donde se incorporan elementos didácticos que permiten a los participantes del Laboratorio hacer Matemáticas.

Bajo estas consideraciones, los estudiantes participan activamente en el desarrollo de las ideas Matemáticas, discuten y plantean problemas, proponen ejemplos y contraejemplos, elaboran juicios de valor, argumentan desde su propia posición, fabrican estrategias de resolución de problemas, analizan y resuelven; en general, construyen conocimientos matemáticos. De la misma manera como los matemáticos elaboran teorías matemáticas con base en motivaciones y problemas que se presentan en una realidad particular, realidad no sólo referida al mundo sensible sino también a una materialidad intrínseca a la teoría. Es así, como resulta de vital importancia pedagógica crear un espacio de aprendizaje que simule este tipo de realidad condicionada a los intereses y cotidianidades de los participantes, de tal manera que a su nivel puedan construir Matemáticas.

El Laboratorio de Matemáticas crea espacios que les ofrecen a los participantes - niños, jóvenes y adultos- un ambiente de aprendizaje en el cual se desarrollan como sujetos autónomos, que usan sus propias capacidades y posibilidades para producir pensamiento y utilizarlo en su vida. Dándose los procesos de aprendizaje en un contexto en el que se construye un saber matemático a partir de un hacer. En este ambiente se considera el aprendizaje como parte de una experiencia lúdica que le permite al participante transformar sus sistemas de referencia frente al saber matemático.

Los procesos de pensamiento matemático que se generan en el ambiente de Laboratorio están íntimamente ligados a los procesos de explicación, sin duda la forma como se presentan, se significan y se piensan dichos pensamientos por parte de los actores de una situación dada (en especial situaciones donde se desarrolla conocimiento) determinan las dinámicas que se generan frente a los niveles de explicación.

En ese sentido Maturana y Varela (1990) plantean que la explicación de conceptos se basa en proposiciones que permiten la re-formulación y la recreación de un fenómeno o sistema de conocimientos aceptables por una comunidad a través de los grupos de validación. Frente a este hecho y tomando en consideración los planteamientos de estos autores, es importante señalar que el Laboratorio, como espacio pensado desde la transversalidad del currículo, permite la explicación de conceptos si se mira desde la perspectiva de la re-formulación de las acciones a través de los materiales, además de los procesos de pensamiento que se generan con las actividades. De esta manera, es posible pensar en las transformaciones que pueden sufrir los sistemas de representación de los participantes del Laboratorio de Matemáticas.

El espacio del Laboratorio de Matemáticas considera el papel que los procesos de comunicación tienen en la construcción del pensamiento matemático. En tanto, que la comunicación entre pares permite que se puedan transformar los saberes que los participantes tengan sobre un concepto determinado y pueda ponerlo en relación con los procesos de argumentación de otros.

Tal como lo muestra Voigt, J. (1996), los procesos de negociación de significados se convierten en uno de los objetos de mayor interés en el Laboratorio de Matemáticas, porque posibilitan vincular procesos comunicativos y argumentativos con los procesos de cognición de saberes matemáticos.

El Laboratorio al propiciar la experimentación con diferentes materiales permite la organización de un ambiente de aprendizaje mucho más flexible y, en cierta forma, imprevisible. Al no estar fijado de antemano, las situaciones que se produzcan tienen carácter único: lo que ocurra en una sesión de Laboratorio con un material concreto puede que no ocurra en otras. El tipo de problemas que se generen a partir de él puede ser diferente de unos grupos a otros y, posiblemente, distintos de los que ya se tienen previstos.

2.1.4 ¿Qué son las Matemáticas en el Laboratorio?

El Laboratorio de Matemáticas, desde la perspectiva de estrategia pedagógica, contribuye a abandonar la "creencia" de que las Matemáticas son una disciplina acabada, fría y austera que le da poco espacio a la creatividad; que se le asocia con la certeza, se le identifica como campo donde se pueden obtener respuestas correctas rápidamente y, se relaciona su estudio, con un conjunto fijo de conocimientos pulidos y finalizados.

Estas ideas poseen una influencia cultural y frecuentemente se reflejan en la enseñanza de las Matemáticas, razones que hacen que la disposición del ambiente del aprendizaje de las Matemáticas sea la de un espacio que solo necesite del papel y el lápiz, lo que conduce a establecer la relación con el recordar y aplicar reglas correctas a las preguntas de los profesores y a la veracidad de las respuestas.

Contraria a la concepción anterior, el Laboratorio de Matemáticas asume las Matemáticas como una construcción social, es decir, que se pueden abordar como una forma de pensamiento abierto y con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y el ritmo de cada persona.

De otra parte, se considera que las Matemáticas se desarrollan en diversos ámbitos, según los participantes y espacios en el que se realice la construcción de esta disciplina; al respecto Vasco, C. (1994) desde una posición teórica y analítica hace referencia a que existen al menos tres ramales de una trenza diacrónica de las Matemáticas, estas son: Matemáticas Cotidianas, Matemáticas Escolares y Matemáticas de Investigación.

El interés del Laboratorio es trabajar en los dos primeros ramales, en cuanto es un espacio qué si bien no tiene las disposiciones escolares, aborda los contenidos matemáticos que se tienen en consideración para la Educación Básica. A su vez, permite aportar a la relación entre el conocimiento cotidiano y el escolar.

Ahora bien, el tomar distancia de unas Matemáticas en las que sus objetos se encuentran en un mundo ideal ya predeterminados y considerar la existencia de por lo menos de tres ámbitos del quehacer matemático, que tienen acercamientos diferentes, relaciona al Laboratorio de Matemáticas con la afirmación De Guzmán (1989) sobre la concepción de las Matemáticas y su quehacer ordinario:

> La Matemática, en su quehacer ordinario, se asemeja mucho de lo que en el pasado se pensó a las otras Ciencias Empíricas. También ella procede por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma madura, aunque siempre perfectible.
>
> (De Guzmán, p.20).

La consideración de que las Matemáticas participan del carácter de Ciencia Empírica, sobre todo en su invención, también lo plantea G. Polya (1967) e I. Lakatos (1976)[10], planteamiento que da elementos para que la Educación Matemática refleje este carácter profundamente humano de las Matemáticas, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atracción. De esta manera, se hace más énfasis en el desarrollo de procesos de pensamiento matemático en el aprendizaje de las Matemáticas, que en la mera transferencia de contenidos.

El asumir el carácter humano de las Matemáticas, implica que los procesos de enseñanza, aprendizaje y comunicación se desarrollan desde la consideración de que la Educación Matemática se concibe como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por osmosis, en la forma peculiar de ver las cosas característica de la escuela en la que se entronca (De Guzmán, 1991)

[10] Lakatos dirige su atención al carácter cuasiempírico de la actividad matemática en su tesis doctoral, titulada “Pruebas y Refutaciones”.

2.1.5 Las fichas de trabajo.

Todas las fichas del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle se componen de dos partes, que responden a dos necesidades específicas, por un lado, la organización, y por otro, a la evaluación:

- La primera que muestra los aspectos técnicos de la ficha, que permiten identificar elementos que caracterizan la ficha y que guían al participante en el reconocimiento de la temática tratada en la ficha, los elementos gráficos que ayudan a la solución de la ficha, entre otros :
    a. Título de la ficha
    b. Aspecto del contenido de la ficha[11]
    c. Descripción del problema
    d. Dibujos, gráficos, e información no escrita (complementaria a la descripción del problema)
    e. Observaciones, comentarios, autorías, fuentes bibliográficas, sugerencias.
    f. Código de barras o QR[12]
- La segunda parte, bitácora, muestra datos generales de la ficha, que aun cuando no se dan a conocer a los participantes, es valiosa para la implementación de la actividad debido que permite, después de ser estudiada, plantear nuevos recursos para la mesa, nuevas fichas o mejoras a las mismas. En la bitácora se plantean aspectos relacionados con:
    a. Usuarios que han intentado resolverla y su edad.
    b. Preguntas planteadas por el usuario.

[11] Se utilizan los códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS, que son asignados por otras instancias, razón por la que en las fichas que se proponen en este trabajo no hay códigos QR

[12] Indica la localización de la ficha en la base de datos física y/o digital. Suministra datos e información complementaria para su manejo.

c. Dificultades detectadas.

d. Problemas de redacción.

e. Posibles soluciones, entre otros.

En relación con el propósito de este trabajo, es fundamental relacionar la propuesta del laboratorio de matemáticas en un contexto específico, como lo es *la proporcionalidad*, el cual se sitúa en la mesa de Geometría que tiene como objetivo plantear "problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con las propiedades de diferentes espacios y diferentes objetos y sus relaciones en dichos espacios". (Arce, J. Pabón, O). 2012.

Si bien una ficha del Laboratorio de Matemáticas tiene los elementos antes descritos, las fichas que son presentadas en cada una de las actividades se construye con base en el siguiente formato:

Laboratorio de Matemáticas

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

(1) → Título Ficha	
(2) → Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS	
(3) → Descripción del problema	(4) → Dibujos, gráficos e información no escrita complementaria a la descripción del problema. (5) → Se recogen las observaciones, la fuente bibliográfica, el autor o autores, año de publicación y otros datos que se consideran importantes.

(6) → Un código de barras o código QR que indique la localización de la ficha en la base de datos física o digital y suministre datos e información complementaria para su manejo

Ilustración 2. Ficha de Laboratorio

La siguiente tabla es el reverso de una ficha de laboratorio sin diligenciar. Esta demarcada igualmente por cada uno de sus datos importantes y necesarios.

Reverso de la Ficha

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Ilustración 3. Reverso ficha de Laboratorio

2.2 LA PROPORCIONALIDAD.

Ahora, si bien es importante la caracterización antes descrita del laboratorio de matemáticas y las fichas de trabajo que componen cada mesa, como forma de comprender el trabajo que se puede realizar en matemáticas a partir de la puesta en práctica las fichas, es igual de importante volver sobre el concepto matemático, su desarrollo histórico y las dificultades que se han identificado en la escuela para poder finalmente presentar con una mayor claridad los aportes que se obtendrían desde la perspectiva del laboratorio para realizar una aproximación a la proporcionalidad en la escuela. Por tanto en los siguientes apartados se presentan algunos de los desarrollos teóricos básicos en la comprensión de la proporcionalidad.

En general, y según lo reportan diversas investigaciones (Guacaneme, 2002), los aspectos relativos a la teoría de la proporcionalidad se ubican en el contexto del trabajo en teoría de magnitudes. Lo cual hace necesario presentar elementos que desde dicho contexto permitan acercarse a la comprensión de las razones, proporciones y demás conceptos conexos.

2.2.1 La proporcionalidad como concepto matemático.

Se ha dividido la recapitulación de elementos matemáticos en dos partes; la primera hace referencia a las fracciones, razones y proporciones en el marco de la aritmética de los números reales, en tanto que la segunda se ocupa de la teoría de las magnitudes dentro de la cual se enmarca la teoría de la proporcionalidad.

Si bien son necesarias una serie de precisiones matemáticas antes de hablar de razones y proporciones (en particular sobre fracciones y series de fracciones, o magnitudes y cantidades, se invita al lector interesado en un revisión profunda a estudiar el texto de Guacaneme 2002, del cual se hace aquí una presentación somera).

La razón es una función de un par ordenado de números o de valores de una magnitud. Las operaciones aritméticas elementales también lo son, pero en ellas lo que importa es el valor que la función asigna a cada par y éste puede obtenerse por procedimientos algorítmicos.

La razón es el representante de la clase de equivalencia de las series de razones iguales; en este sentido, es preferible también asumir que el cociente exacto asociado a todas y cada una de las fracciones equivalentes es la constante de proporcionalidad. Adicionalmente, no creemos conveniente que el cociente exacto sea considerado como representante de la clase de equivalencia, dado que éste es un real y no una pareja de reales.

Ahora bien, si una razón se lee como el valor que se obtiene al efectuar la división correspondiente, la razón desaparece. El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de hablar de igualdad (o desigualdad) de razones, sin conocer el tamaño de la razón.

El significado de razón viene de poder decir con sentido “a es a b como c es a d”, sin anticipar que “a *es a* b” se puede reducir a un número que es el mismo al que se puede reducir “c es a d”. El estatuto lógico de la razón desde el punto de vista fenomenológico ha de describirse entonces en términos de la relación de equivalencia “tener la misma razón”.

Éste es de hecho también el que le dio Euclides, ya que en el libro V de los Elementos, definición 5, lo que realmente define no es “razón”, sino “tener la misma razón”. El estatuto lógico de la razón es pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos con los que los alumnos se han tropezado previamente en su escolaridad. El sentido en que calificamos el nivel demás elevado es el que le da el provenir de una relación de equivalencia: lo que organiza es una propiedad *intensiva* y no una propiedad *extensiva* de objetos o conjuntos de objetos.

La variedad de propiedades intensivas de objetos organizados por la razón es enorme. Aquí sólo se señala una gran división que es preciso tomar en cuenta en la enseñanza: la razón puede ser una relación *en* una magnitud o *entre* magnitudes. La situación se puede esquematizar así:

Hay dos espacios de medida —o magnitudes— y una aplicación lineal entre ellos. La razón *en* una de las magnitudes es interna; *entre* las dos magnitudes, externa. Una proporción conlleva una función lineal entre los espacios de medida. El que sea lineal significa que las razones internas son invariantes bajo la función y que las razones externas entre elementos que la función hace corresponder es constante. La linealidad viene dada respecto de las razones internas implícitamente —“en tiempos iguales se recorren espacios iguales”—, y respecto de las razones externas, explícitamente — $f(x)$=kx, para todo x.

Una fenomenología didáctica muestra, por otra parte, que en el camino hacia la constitución del objeto mental razón y proporción desempeñan un papel importante objetos mentales precursores del objeto mental de razón y proporción. Aquí sólo se señala que un buen número de ellos tienen carácter cualitativo y que involucran comparaciones de razones como el contexto en el que se le puede dar sentido a la igualdad de razones, es decir, a la proporción.

La proporcionalidad es un concepto matemático que se relaciona con distintas áreas del conocimiento y, de manera específica ha significado una forma de estudiar las matemáticas. Por ello autores como Guacaneme han identificado la proporcionalidad no como un concepto matemático sino como una teoría en la que se vinculan distintos conceptos matemáticos que han servido históricamente para explicar distintos fenómenos, por lo que a continuación se presenta de manera breve las distintas concepciones de la proporcionalidad.

Tiene sus primeras apariciones en el V libro de Euclides, que establece la proporcionalidad como una la relación entre dos magnitudes que no son iguales, resumiendo en las cinco primeras definiciones del libro las posibles relaciones entre las magnitudes:

Definición 1: *Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.*

Definición 2: *Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.*

Definición 3: *Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*

Definición 4: *Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.*

Definición 5: *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*

Euclides.org

En el siglo XX, la proporcionalidad fue definida por distintos autores como:

- ✓ Una aplicación f de E en F es una relación de proporcionalidad, si existe un número tal que la imagen mediante f de todo elemento del dominio E es igual a $k \cdot x$. *Luengo y el Grupo Beta (1990)*
- ✓ Dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades, f de M en N tal que:
  - i. si $a < b$ implica que $f(a) < f(b)$;
  - *ii.* $f(a + b) < f(a) + f(b)$;
  - *iii*. Si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$.

Definiciones que permiten destacar tres propiedades: la correspondencia biunívoca, la monotonía y la constante de proporcionalidad. *Fiol y Fortuny (1990)*

Es claro, que existe una diferencia entre las definiciones que presentó Euclides y aquellas que fueron presentadas en el siglo XX, esto dado que en este último se toma como punto de referencia las relaciones y funciones, es decir un aspecto algebraico mientras que Euclides se enfoca a las explicaciones y relaciones geométricas entre magnitudes.

En relación con las definiciones que se presentan en algunos textos escolares, la proporcionalidad es asumida en torno a otros conceptos matemáticos como:

- ✓ Razón: Se llama razón de dos números enteros, al cociente de la división del primero (dividendo) por el segundo (divisor).
- ✓ Proporciones: Se llama proporción a la expresión de igualdad de dos razones. La propiedad fundamental de las proporciones establece que el producto de los extremos debe ser igual al producto de los medios.

- ✓ Extremos y medios de una proporción: Dada la proporción, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ a,b,c,d son enteros, a y d se llaman extremos de la proporción b y c se llaman medios de la proporción.

Asimismo, Guacaneme (2001) indica que la proporcionalidad responde al "objeto de estudio de una teoría que da cuenta de aspectos matemáticos relacionados con una manera particular de variación en una función definida entre dos magnitudes o conjuntos numéricos", y que la prioridad que se da en los textos escolares para referir a la proporción y a la proporcionalidad está relacionada con la igualdad entre fracciones de números enteros donde hay un escalar de variación, ya sea de crecimiento o decrecimiento, que establece la dependencia entre las magnitudes.

Llamaremos **proporción** a la igualdad de dos razones y se escribe:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ o\ bien\ \alpha:\beta=\gamma:\delta$$

Donde los números $\alpha\ y\ \delta$ se llaman **extremos** y los números $\beta\ y\ \gamma$ **medios;** el número δ se denomina también **cuarta proporcional** de los otros tres.

Esta definición aporta nuevos argumentos para mantener la idea que una razón no es un número real, sino que es una pareja de números reales. De ser un número real, de un lado, una proporción sería la igualdad entre dos reales, y sólo se estaría dando un nuevo nombre a algo ya denominado; de otro lado, no tendría sentido referir nombres específicos para los cuatro elementos involucrados en la proporción.

Se presentan algunas propiedades de las proporciones.

- Multiplicando por $\beta.\delta$ los dos miembros de la proporción $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ resulta $\alpha.\delta=\beta.\gamma$, lo cual se puede enunciar de la siguiente manera: *en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*
- Si se dividen sucesivamente los dos miembros de $\alpha.\delta=\beta.\gamma$ por $\beta.\alpha$, $\gamma.\delta$, $\beta.\alpha$, $\gamma.\alpha$, resultan las siguientes proporciones:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}, \qquad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}, \qquad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$$

Y alterando el orden de las razones tenemos estas otras cuatro proporciones:

$$\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}, \qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$$

Lo anterior se puede resumir diciendo: si el producto (no nulo) de dos números es igual al producto de otros dos, con ellos pueden escribirse ocho proporciones; lo cual se apoya en las siguientes proposiciones: permutando entre si los medios o los extremos de una proporción resulta otra proporción, y, al invertir las razones de una proporción resulta otra proporción.

También se encuentra una definición nominal que asigna un nombre específico —razón o constante de proporcionalidad— al cociente exacto de las fracciones equivalentes. En ésta surge una dificultad o ambigüedad que vale la pena reseñar: el término "razón" ha sido utilizado para nombrar también a las fracciones o parejas de reales, sin embargo aquí pareciera que se utiliza como sinónimo de cociente exacto o valor de la fracción. Surge entonces nuevamente la necesidad de precisar la noción de razón, pues se está usando un mismo nombre para designar dos objetos diferentes, aunque relacionados.

> Dos magnitudes son proporcionales o directamente proporcionales, si sus cantidades se corresponden biunívocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.

El siguiente se conoce como el teorema fundamental de la proporcionalidad directa, en una de varias versiones:

> En dos magnitudes proporcionales la razón de dos cantidades de la primera magnitud es igual a la razón de las dos cantidades correspondientes de la otra. Así:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Para el caso de las proporciones directas, es posible siempre hacer una interpretación gráfica en el plano cartesiano, la representación clásica en línea recta que pasa por el origen, de esta es importante señalar el caso especial en que el punto P (del que se establece la proporcionalidad) estuviese ubicado en el cuadrante I o III, la proporcionalidad implicaría una función creciente, es decir una correspondencia caracterizada por la conservación del orden de manera estricta (i.e., si a<c<b<... entonces a’<c’<b’<...), que es la habitualmente presentada a través de la afirmación “si una cantidad aumenta, la otra aumenta proporcionalmente”.

Mientras que si el punto P se encuentra en el cuadrante II o IV, la función de proporcionalidad sería decreciente, e implicaría una correspondencia caracterizada por la conservación del orden de manera opuesta (i.e., si a<c<b<... entonces a’>c’>b’>...), regularmente no considerada ni presentada, la cual podría describirse a través de la afirmación “si una cantidad aumenta, la otra disminuye proporcionalmente”. Destacamos, que ambos casos describen una relación de proporcionalidad directa.

> Dos magnitudes son inversamente proporcionales si sus cantidades se corresponden biunívoca y ordenadamente, y además son tales que al producto de una cantidad de ellas por un número entero le corresponde el cociente de la cantidad homóloga a aquella por el mismo número.

2.2.2 La proporcionalidad en los textos escolares y el currículo.

La indagación realizada muestra un desarrollo de la teoría de la proporcionalidad a través de una estructura que en términos generales se presenta en tres partes, a saber: lo relativo a la proporcionalidad directa, a la proporcionalidad inversa y a la proporcionalidad compuesta; las dos primeras relativamente independientes entre sí y la última dependiendo de las anteriores. Cada una de estas se presenta a través de: un marco definicional —en el contexto de la teoría de conjuntos o en el del álgebra abstracta; consecuencias lógicas (*v.g.*, teoremas, corolarios, escolios) que determinan sus propiedades, todas ellas relativamente semejantes y en un orden similar y —excepto en la proporcionalidad compuesta— formas de representación geométrica. Adicionalmente, se incorporan, en la parte que versa acerca de la proporcionalidad directa, unas referencias particulares a los conceptos de razón y proporción en el contexto de las magnitudes; además, se incorpora un discurso en torno a la regla de tres (Guacaneme, 2002).

El mismo autor en el artículo *una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas,* realiza un análisis a algunos textos escolares de grado séptimo en los que considera la estructura del texto, la conformación de las unidades temáticas en cada uno de los textos y el tratamiento que se da a algunos conceptos involucrados en el estudio de la proporcionalidad; con base en estos aspectos presenta unas conclusiones generales en relación a los textos escolares analizados pero que podrían aplicar a otros textos escolares, dentro de sus conclusiones se destacan:

- ✓ El lugar confuso que tiene la proporcionalidad dentro de los textos escolares, puesto que no es posible identificar a qué campo matemático corresponde su estudio, aunque si existe una tendencia hacia el campo aritmético, sin embargo el estudio aritmético que se hace de la proporcionalidad deja de lado una explicación de por qué no se hace uso de valores enteros y racionales negativos.
- ✓ Hace falta un trabajo con la *razón* fuera del contexto numérico, pues se hace un trabajo de la razón como un cociente que elimina la naturaleza de ésta como una relación.
- ✓ Hay una tendencia por dejar nociones sin definir, que son utilizadas en el desarrollo de la proporcionalidad y que son asumidas como verdaderas que no requieren explicación o análisis pues solo son utilizadas para la definición de los tipos de proporcionalidad.
- ✓ La relación que existe entre proporción y proporcionalidad no es muy explícita, pues en los libros de texto se hace una presentación de la proporción en relación al contexto aritmético y de la proporcionalidad en relación a las magnitudes,

Sin dejar explícito que la razón puede permitir cerrar la brecha que hay entre la proporción y la proporcionalidad dado que está inmersa en ambos contextos; igualmente, ver en las series de razones una oportunidad para introducir definiciones de la proporcionalidad directa y en algunos casos de la proporcionalidad inversa.

- ✓ La idea de que la proporcionalidad directa siempre crece y que la proporcionalidad inversa decrece, es válida únicamente en las situaciones en que las magnitudes son absolutas, pues es posible establecer relaciones entre magnitudes relativas que correspondan a la proporcionalidad directa.

Estos elementos permiten hacerse una idea de aquello que tienen, y lo que no, algunos de los libros de texto con los que cuentan los maestros, esto permite entender en cierta medida las acciones que se encuentran en los salones de clase, y de la misma manera configurar la propuesta que se espera produzca este trabajo.

En cuanto a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) la proporcionalidad aparece como parte de los conceptos matemáticos que permiten el desarrollo del pensamiento variacional, dentro de los distintos “modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo” (MEN, 1998).

Es entonces el pensamiento variacional el que permite que a través del tiempo se desarrollen las estructuras conceptuales que hacen del aprendizaje un proceso que modifica lo aprendido y dan lugar a la aproximación de los conceptos matemáticos. Por lo tanto el pensamiento variacional no solo está sujeto a la enseñanza en la básica secundaria sino que se debe desarrollar desde los inicios de la escuela en los que se incluya el estudio de patrones, el cambio en las tablas, las fórmulas, entre otras situaciones aditivas y multiplicativas que pueden ser propuestas.

Otros aspectos importantes de la variación tienen que ver con los distintos sistemas de representación que se utilizan como forma de conocer la proporcionalidad como lo son: las gráficas, los enunciados verbales, las tablas y otros elementos que permiten establecer relaciones de dependencia, hasta llegar al estudio de las funciones donde se encapsula la proporcionalidad; y finalmente, son los distintos contextos de la variación proporcional los que posibilitan “el estudio y la comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo” (MEN, 1998).

Particularmente, el desarrollo del razonamiento se debe construir desde los primeros grados de escolaridad, de manera tal que propicie en el estudiante la capacidad de establecer "regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones".(MEN, 2006); esto a partir de actividades que propicien el razonamiento en cada uno de los pensamientos, y de manera específica situaciones que den lugar al razonamiento proporcional desde el uso de gráficas. El razonamiento proporcional, según Guacaneme (2001) se debe promover el desarrollo del pensamiento matemático necesario para entender conceptos matemáticos esenciales en la proporcionalidad (*v.g.*, razón, proporción, orden, suma) sin recurrir a su expresión numérica[13]

Estos elementos, junto con la primera parte de este apartado, permiten configurar una idea general de la propuesta que tiene la escuela para el estudio de la proporcionalidad, es el momento entonces de proponer un acercamiento particular a estos aspectos que sirva de marco para el trabajo en este proyecto.

2.2.3 Propuesta para el trabajo con la proporcionalidad.

Si bien es importante el desarrollo del pensamiento proporcional, a través de los distintos contextos en que es posible la variación, es claro que requiere un estudio amplio – que no es propósito de este trabajo – por lo que situaremos la proporcionalidad dentro del contexto geométrico; lo cual implica la necesidad de volver sobre los libros V y VI de *Elementos* de Euclides, en cuanto a que en el libro V, se hace una presentación de la razón y las proporciones de forma exclusiva para las magnitudes euclidianas (longitud, superficie,

[13] A este tipo de pensamiento algunos psicólogos lo denominan "razonamiento proporcional cualitativo". Desde la perspectiva ofrecida por el estudio de las presentaciones formales matemáticas consideramos que el adjetivo cualitativo estaría mal utilizado y proponemos entonces renombrar este pensamiento como "razonamiento proporcional cuantitativo no numérico". (Guacaneme, 2001)

volumen y amplitud angular) sin la utilización de valores numéricos para referirse a estas magnitudes y en el libro VI se describen una amplia teoría para las figuras y sus cantidades de magnitudes geométricas.

Ahora, si bien en el libro de *Elementos* de Euclides, se conocen unas características específicas para la proporcionalidad geométrica, Guacaneme (2012) advierte sobre la posibilidad de confundirse entre la proporcionalidad geométrica y la semejanza, y a su vez, brinda elementos que permiten establecer diferencias y relaciones.

- Una de las diferencias principales, radica en que la semejanza indica relaciones entre figuras rectilíneas y la proporcionalidad geométrica vincula las posibles proporciones entre las cantidades de la magnitud del objeto geométrico.
- Los procedimientos y el discurso que se utiliza, dentro del texto *Elementos*, permiten diferenciar en cuáles momentos se refiere a la proporcionalidad geométrica y en cuáles a la semejanza.
- Una relación entre ellas es la necesidad de aludir a las representaciones de los objetos geométricos y a las deducciones para su manipulación y trabajo.
- Finalmente, Guacaneme plantea una reflexión en la que hace notar la importancia que tendría el trabajo de la proporcionalidad desde un contexto cuantitativo no numérico que permita la separación entre los aspectos aritméticos y los aspectos geométricos de la proporcionalidad y con ello el desarrollo del pensamiento matemático desde lo cuantitativo no numérico.

En conclusión, las dificultades de la proporcionalidad se pueden fundamentar en cómo se presenta o la concepción que se toma de la proporcionalidad, pues entender la proporcionalidad como una comparación entre magnitudes permite un trabajo limitado a la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, dejando de la lado el trabajo que se puede hacer desde la variación y las posibles redes que se pueden trabajar desde el aula con el propósito de vincular distintos conceptos matemáticos.

> … no mostrar de manera explícita la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad; presentar la proporcionalidad al margen del estudio de las magnitudes; estudiar multiplicación y proporcionalidad al margen del análisis de los

> procesos de covariación entre magnitudes; y finalmente, se deslinda una separación entre la proporcionalidad y las funciones.
>
> Seduca, 2006, p.78.

Sin embargo, es necesario reconocer otros tipos de dificultades, errores y obstáculos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, que tienen relación con otros aspectos diferentes a la concepción con que se aborda un objeto matemático en particular, a saber:

- Las dificultades con que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se relacionan con la naturaleza de los objetos matemáticos, con los procesos del pensamiento matemático, los procesos de enseñanza, los desarrollos cognitivos y las actitudes afectivas y emocionales[14]
- Los obstáculos en el aprendizaje mismo de las matemáticas, se fundamentan en "aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta" con nuevos problemas" (Palomino, 2010).
- Los errores surgen en muchos casos de los obstáculos con que se enfrenta un estudiante, pues en distintas situaciones de la vida escolar el estudiante es enfrentado a contextos en los que los procedimientos matemáticos están fuera del sentido común o el sentido desarrollado por los estudiantes a partir de las actividades matemáticas realizadas en pro del desarrollo del pensamiento matemático.

En consecuencia, y retomando la necesidad de estudiar la proporcionalidad desde el contexto de la variación, donde se replantee la enseñanza de la proporcionalidad desde el contexto aritmético para introducir un trabajo ligado a la proporcionalidad geométrica en unas condiciones específicas, en el siguiente capítulo se pretende construir una actividad que contenga distintas fichas de laboratorio, en las que se considere la proporcionalidad desde un contexto geométrico que permita hacer una aproximación a este concepto,

---

[14] Una ampliación acerca de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas nos remite a la compilación que hacen Palomino, Velasco y Torres.

permitiendo retomar algunas de las dificultades mencionadas y posibilitar un cierre en la brecha existente entre aquello que significa la proporcionalidad y aquello que se enseña en la escuela y, en últimas, lo que realmente aprenden los estudiantes. Igualmente, se espera que la construcción de las fichas de lugar a reconocer en la proporcionalidad un campo matemático que vincula distintos conceptos matemáticos que pueden ser estudiados en conjunto con esta y permitir el desarrollo del pensamiento matemático.

CAPITULO 3

Los capítulos anteriores se han planteado con el propósito de presentar de manera general la teoría de la proporcionalidad en relación con otros campos de las matemáticas, específicamente con la geometría, las dificultades y la importancia que ha tenido su desarrollo en la educación, igualmente se presentó la teoría en la que fundamenta este trabajo de grado, el laboratorio de matemáticas de la universidad del Valle.

A partir de estos elementos se espera en este capítulo plantear unas fichas del laboratorio de matemáticas que posibiliten una aproximación a las nociones que se relacionan con la proporcionalidad. Se exponen elementos teóricos que fundamental el trabajo, una propuesta para modificar y resignificar las fichas, y finalmente las fichas de trabaja, su sustento y condiciones de construcción e implementación.

3.1 ELEMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN UNA VISIÓN PARA LAS FICHAS

En la definición de estas estrategias de trabajo para el laboratorio de matemáticas se debe reconocer una nueva visión del aprendizaje de las matemáticas que entra en clara consonancia con algunos de los presupuestos del Laboratorio de Matemáticas.

El aprendizaje de las Matemáticas como un proceso constructivo.

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, parten de la idea que el aprendizaje de las matemáticas es básicamente un proceso constructivo. No obstante, esta idea es contraria a la visión más o menos implícita con la que aún se enseña las matemáticas en la gran mayoría de instituciones educativas; en éstas aún domina la creencia de que el aprendizaje consiste en la absorción pasiva del conocimiento adquirido e institucionalizado por las generaciones pasadas.

Considerar el aprendizaje de las matemáticas como un fenómeno de carácter constructivo significa que los alumnos tienen, descubren y crean habilidades y conocimientos matemáticos, y que por lo regular lo hacen en el marco de las actividades sociales que se proponen tal aprendizaje. Por consiguiente, la enseñanza de las matemáticas en el aula se alejaría del modelo de la transmisión de la información donde el profesor es el proveedor y los alumnos son los receptores pasivos del conocimiento y habilidades matemáticas.

En vez de ser la principal, si no la única fuente de información, el profesor se convierte en un miembro 'privilegiado' de una comunidad que construye conocimiento en el salón de clase el cual crea un clima intelectualmente estimulante, modela el aprendizaje y las actividades de solución de problemas, elabora preguntas cautivadoras, suministra apoyo a los estudiantes a través de la guía y el entrenamiento y fomenta la responsabilidad de los estudiantes por su propio aprendizaje.

La formación de pensamiento matemático y los contextos significativos y auténticos.

Como lo plantean muchos investigadores, los *contextos significativos y auténticos* juegan un papel crucial en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas elementales. Los nuevos conceptos y habilidades serán encontrados primero en los retos que plantean las situaciones problema derivadas de experiencias de la vida cotidiana o de explorar fascinantes mundos imaginarios. Estas situaciones pueden presentarse en forma de historia, dibujo, obra (dramática), etc. Tales contextos deben seleccionarse y prepararse cuidadosamente para aumentar la probabilidad de que las invenciones y construcciones de los alumnos relacionadas con las habilidades y los conceptos matemáticos que se espera se aprendan, sean en verdad pasos útiles y apropiados para el aprendizaje.

Sin embargo, los contextos significativos y auténticos juegan un papel importante no solo en la fase inicial de la formación de pensamiento matemático. Como estrategia que puede garantizar que no se llegue a la disociación matemáticas- realidad, tales contextos han de permear todo el devenir del proceso de formación de pensamiento matemático, incluso en la más avanzada vida adulta. Por lo tanto, es esencial que los contextos de los problemas representen la diversidad, la complejidad y la ambigüedad de las situaciones problemas que los alumnos pueden encontrar fuera de la clase de matemáticas.

La formación de pensamiento matemático tiende hacia niveles superiores de abstracción y formalización.

En las primeras etapas del aprendizaje de las matemáticas, en particular, de la numeración o de los conceptos y habilidades aritméticas, los alumnos emplean sus habilidades informales y su conocimiento intuitivo para darle sentido y resolver los contextos de problemas que están enfrentando. Pero estas nociones intuitivas y enfoques informales tienen, por supuesto, sus restricciones, como su falta de precisión, de eficiencia y de generalidad. Por lo tanto, deben ser transformados en conceptos y habilidades matemáticas más eficientes, más formales y más abstractas.

En este proceso de transformación que involucra actividades de esquematización progresiva, abreviación, interiorización y generalización de las matemáticas informales ligadas al contexto, juega un papel crucial la selección cuidadosa de los modelos y herramientas matemáticas. La manipulación, los modelos visuales, los esquemas y los diagramas pueden ser empleados como andamios para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los niños y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales, del otro. Los alumnos mismos deben, tanto como sea posible, jugar un papel en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas.

La formación de pensamiento matemático se hace a través de la interacción social y la cooperación.

Como ya se ha planteado, aprender y hacer matemáticas puede concebirse y practicarse no como una actividad puramente individual sino colectiva. La enseñanza grupal y el trabajo individual deben combinarse con el aprendizaje cooperativo en grupos pequeños y con discusiones en el salón. La interacción social es considerada esencial debido a la importancia que tiene para el aprendizaje y el hacer matemático el intercambio de ideas, el comparar estrategias de solución y la discusión de razonamientos. De especial significado a este respecto es que la interacción y la colaboración movilizan la reflexión, lo cual es considerado como el mecanismo básico para alcanzar niveles mayores de abstracción e interiorización.

El aprendizaje de las matemáticas se logra interconectando componentes y habilidades del conocimiento.

Antes que almacenar en nuestra mente una colección fragmentada de elementos de conocimiento y habilidades, el aprendizaje de las matemáticas involucra la construcción de un conocimiento de base coherente y bien organizada. Por lo tanto, no es deseable la fragmentación de las matemáticas en hebras completamente separadas, sino que se espera que las diferentes partes del currículo estén entretejidas unas con otras así como también conectadas a la realidad tanto como sea posible. Esta interconexión no solo se limita al nivel local (por ejemplo, ver la relación entre las diferentes operaciones dentro de la aritmética), sino también a un nivel más global (por ejemplo, ver la manera como la aritmética está implicada en el álgebra, la geometría, el manejo de datos, etc.). La principal ventaja de esta interconexión es que intensifica la accesibilidad así como la aplicabilidad de las habilidades y del conocimiento.
En el centro de esta nueva visión del aprendizaje de las matemáticas, se encuentra el estudio de las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas.

3.2 AMPLIANDO LA NATURALEZA DE LAS FICHAS.

En lo que concierne a la necesidad de determinar elementos teóricos y metodológicos para formular, en desarrollos futuros, una propuesta alternativa de Laboratorio de Matemáticas, se propone adoptar el enfoque teórico y metodológico formulado por Guin y Trouché (2003) en relación con los recursos. Algunos elementos de esta propuesta incluyen los siguientes:

- **La ficha de identificación.** Permite la indización y la búsqueda del recurso por los usuarios potenciales. Esta ficha suministra informaciones sobre el contenido del recurso, el ambiente tecnológico necesario, el nivel, de enseñanza, los objetivos pedagógicos y las palabras claves; da acceso también a las animaciones que permiten tener una idea de la puesta en acto informatizada del recurso, aunque no se disponga del software que permita una puesta en acto del recurso en clase.

Da las características principales de la actividad para permitir al usuario saber si dispone de los medios materiales para explotarla, (rúbricas, dispositivo técnico y modalidad), Puede por eso probarla rápidamente, (rúbrica, lista y descripción de las fichas)

Tipo:	"indicar el tipo de actividad pedagógica de la clase en juego"
Nivel	"indicar aquí el nivel escolar donde el recurso puede ser explotado"
Palabras claves	"indicar aquí las palabras claves significativas que se refieren al dominio de conocimientos"
Objetivos pedagógicos generales	"indicar aquí los objetivos generales en materia de saber y/o saber –hacer, puestos en acción por la actividad en referencia en los programas oficiales"
Modalidad	"indicar aquí las modalidades generales de la puesta en acto de la actividad en clase, por ejemplo, la retroproyección"
Dispositivo técnico.	"indicar aquí los medios materiales y el software necesario para la actividad de la clase"
Lista y descripción de las fichas.	"indicar todas las fichas dadas, precisar su tipo y una descripción del contenido de las fichas"
Descripción de la actividad.	"indicar aquí una descripción sucinta del desarrollo de la actividad"

- **La ficha del estudiante.** Ofrece el documento que debe ser puesto a disposición de los estudiantes (el enunciado del problema), para presentar el desarrollo y contenido de la actividad
- **La ficha del profesor.** Da al docente informaciones sobre los antecedentes de matemáticos del problema y sobre las dificultades didácticas posibles. Permite al usuario apropiarse de las motivaciones pedagógicas de la actividad. Permite señalar y

precisar los objetivos pedagógicos (rúbricas programa oficial, objetivos pedagógicos, interés,) y los prerequisitos. Precisa la contribución de las TIC a la realización de los objetivos pedagógicos, (rúbricas, interés y descripción de la actividad instrumentada).

Programa oficial	Competencias exigibles: “indicar aquí las competencias exigibles en referencia explícita a la rúbrica del programa de clase” Comentarios: “indicar aquí comentarios en relación con el programa de clase”
Objetivos pedagógicos	“presentar aquí los objetivos generales presentados en la ficha de identificación del recurso”
Pre requisitos	“indicar aquí los pre requisitos(saberes y saber-hacer)
Interés:	“indicar aquí cómo contribuye a los objetivos pedagógicos la actividad propuesta” “indicar eventualmente vínculos con los extractos de informes de experimentaciones que atestiguan el interés”
Descripción de la actividad instrumentada:	“precisar aquí la actividad descrita en la ficha de identificación poniendo en evidencia el papel de los instrumentos. Insertar en la descripción un vínculo con la ficha del alumno y eventualmente con la ficha técnica.”

- **El *escenario* de uso.** Da los elementos sobre el escenario de explotación didáctica y sobre el proceso de instrumentalización, directamente explotables por el profesor; propone una organización de los tiempos y de los espacios del estudio y diferentes modalidades de integración de las herramientas disponibles.

  Describen etapa por etapa el desarrollo de la actividad en clase, indicando para cada una de estas etapas, la situación, la tarea a realizar, su duración, el actor quien la realiza y las herramientas y soportes necesarios.

Escenario : <<indicar aquí las diferentes fases del desarrollo del escenario>					
Fase	Actor	Descripción de la tarea	Situación	Herramientas y soportes	Duración
1	<<indicar al actor de la tarea: alumno o docente>>		<<indicar si la actividad es individual o colectiva>>	<<indicar los documentos y dispositivos insertando las vinculos útiles>>	<<duración en minutos>>

- **El informe de experimentación.** Permite al profesor criticar el recurso y de hacer las proposiciones de evolución; estas críticas son tomadas en cuenta por los diseñadores y permiten realizar una nueva versión del recurso después de un número significativo de experimentaciones, y después de una discusión al interior de la comunidad de práctica.
- **La ficha técnica.** Da las informaciones sobre los diferentes recursos, permitiendo poner en acto al recurso. También da informaciones relativas a su modo de empleo. Separa claramente los diferentes aspectos de la puesta en acto. Facilita al usuario la apropiación técnica del recurso. En su descripción, los autores utilizan las funcionalidades generales de los recursos más bien que las funcionalidades específicas.

Nombre de la ficha	“indicar aquí el nombre de las fichas necesarias”
Software utilizado	“indicar aquí el software y la configuración necesaria”
Descripción:	“indicar una descripción general de la interacción del usuario”
Modo de empleo	“indicar el manual de la utilización técnica del recurso”
Documentación	“indicar aquí las conexiones de los manuales del usuario, los software explotados, las descripciones generales de los dispositivos técnicos”

Como se ve, esta es una propuesta que permite incluir la propuesta del laboratorio en un escenario más amplio como el escolar.

3.3 PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN DE LA PROPUESTA.

Se presenta una serie de fichas que parten del reconocimiento del papel del razonamiento proporcional en la formación de pensamiento matemático, se hace una descripción de cada una de ellas y del papel que sus contenidos juegan en la construcción de los conceptos fundamentales para los estudiantes.

Con respecto a las matemáticas, al estar en la base de los procesos y procedimientos propios de las estructuras multiplicativas, se ha llegado a plantear que dicho razonamiento es la piedra angular de las matemáticas superiores, y la cúspide del desarrollo de las matemáticas elementales (Lesh y otros, 1988). En este sentido, la proporcionalidad se asume como un concepto altamente estructurante que, a partir del estudio de los procesos de variación y cambio, permiten conceptualizar aspectos relativos a lo numérico y lo variacional: dado que a través del estudio de situaciones que impliquen la proporcionalidad se ponen en correlación dos o más variables, entonces se conceptualiza la proporcionalidad tanto en relación con la aritmética, como en relación con el concepto de función.

Con respecto a otras ciencias, como por ejemplo en la física o en la química, los conceptos y procedimientos propios de la proporcionalidad se ponen en la base de la comprensión de la mayoría de los conceptos de dichas ciencias. En particular, la proporcionalidad directa es la base para la comprensión de conceptos básicos en física como velocidad y aceleración, o en la química, de conceptos relativos a las concentraciones o al balanceo de ecuaciones. En general, los conceptos de éste tipo de ciencias, en tanto que se basan en la correlación entre dos o más magnitudes, están en estrecha relación, no solo con la proporcionalidad directa, sino en general, con otros tipos de variaciones, e incluso aquellas que no son lineales.

En la vida diaria, son muy comunes las situaciones cuya matematización se hace a través del concepto proporcionalidad, fundamentalmente la directa: la lectura e interpretación de mapas y maquetas a escala, los cálculos al comprar para determinar el producto más económico, el comportamiento de las cuentas de cobro de los servicios públicos, etc.

Aunque se reconoce que los procesos ligados a la proporcionalidad directa son comunes en la vida diaria, también se debe resaltar que los fenómenos y situaciones que implican variaciones no lineales son de alta frecuencia: el comportamiento de los intereses en un préstamo bancario o una cuenta de ahorros que se liquida diariamente, el crecimiento de plantas y personas, la expansión del sonido en el aire, etc. Así pues, no solo la proporcionalidad directa es importante, y por ende de las variaciones lineales positivas, sino que, en general, una comprensión del sentido y significado de otras formas de variación, son fundamentales para una relación más armónica con los demás y con el medio que nos rodea.

Así pues, en este capítulo se mostrará como el concepto de proporcionalidad no solo tiene en la multiplicación su punto de inicio, sino que el estudio de las funciones puede ser una base fundamental para el tratamiento de diferentes tipos de proporcionalidades, ya que en la medida que el tratamiento de la proporcionalidad se haga desde la base de la matematización de diferentes fenómenos, entonces ésta y las funciones se consolidan como partes de un mismo proceso. En general es buscará:

- Proponer algunas reflexiones en torno a procesos que permitan potenciar la transformación cualitativa de los razonamientos aditivos a los razonamientos multiplicativos, como base para la construcción del razonamiento proporcional.
- Comprender como se establecen las relaciones de continuidad entre los conceptos propios de la proporcionalidad y las relaciones lineales y no lineales, como base para el estudio de diferentes tipos de funciones, y por supuesto, de proporcionalidades.

Este tipo de análisis lleva a proponer que el razonamiento proporcional está en estrecha relación con relaciones multiplicativas antes que con relaciones aditivas. De esta manera, el razonamiento proporcional implica una estrecha relación con la comprensión de conceptos fundamentales de las matemáticas en relación con lo que Vergnaud (1983, 1988, 1991, 1993a y 1993b) ha llamado el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Esto es, el razonamiento proporcional tiene sus bases en conceptos tales como: multiplicación, división, razón, proporción, proporcionalidad, función lineal, función n-lineal, etc.

3.3.1 Juego de bolos

El conjunto de actividades presentes en esta situación pretende que a partir de realizar conteos simples y conteos múltiples se puedan establecer las correlaciones entre los dos espacios de medida, y por esta vía, correlacionar los cambios al interior de cada uno de ellos.

Para lograr lo anterior, la situación propone actividades que hacen cambiar el tamaño de los números: menores que 5 y mayores que 5, al tiempo que hace cambiar el número de incógnitas presentes en la situación: Problemas con una sola incógnita, con dos incógnitas y con más incógnitas.

La variación del tamaño de los números busca que los estudiantes pasen de estrategias centradas en el cálculo, a estrategias centradas en el conteo. Es decir, para los estudiantes se hace más sencillo el conteo repetido de cantidades "pequeñas", o sea menores que cinco, pues pueden contarlas y operar mentalmente con ellas. Por el contrario, con cantidades mayores que cinco, se ven obligados a acudir a otras estrategias que pondrán en evidencia sus capacidades de cálculo para adicionar una cantidad a la anterior y obtener el valor siguiente.

El cambio del número de variables implica la necesidad de tener en cuenta de forma simultánea dos variables o más y reconocer las relaciones existentes entre ellas. Por esta vía se obliga al reconocimiento de las variables, y cuantificar los patrones de variación.

La tabla grupal, al igual que las actividades de reflexión, tienen un papel muy importante en el desarrollo de la situación. La tabla permite tener un registro escrito del trabajo realizado en el juego, y es la base para una reflexión posterior sobre la actividad en la que se puedan analizar las diferentes series con las que debieron trabajar, y sobre todo, en la que se analicen los diferentes procedimientos utilizados para hacer las cuentas que exige registrar los puntajes en la tabla. Con la ayuda de la tabla se puede ver como se correlacionan la cantidad de bolos de cada color, y el puntaje total que se obtiene. De esta forma se centra el análisis tanto en la cantidad que se repite (el valor del bolo) como las veces que dicha cantidad se repite (cantidad de bolos derribados), y de estas dos con el puntaje total.

Jugando Bolos I

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo que competirá con los demás equipos del salón.
Organicen los bolos de la siguiente manera:

Cada jugador lanza la pelota, registra en su cuaderno el número de bolos de cada color que tumbó y levanta los bolos caídos.
Cuando todos los jugadores hayan lanzado deben completar la tabla grupal para el primer turno y luego realizar el segundo, registrar en la tabla, y así sucesivamente.

Ganará el equipo que más puntaje obtenga al final de los tres turnos.
Bolos azules dan 2 puntos cada uno.
Bolos verdes dan 3 puntos cada uno.
Bolos amarillos dan 4 puntos cada uno.
Bolos rojos dan 5 puntos cada uno.

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno					
2° turno					
3° turno					
				Total	

Actividades para reflexionar

1. En el equipo de Manuel obtuvieron 12 puntos. Si se sabe que solamente tumbaron bolos azules. ¿Cuántos bolos azules tumbaron? ___________________

2. Si Manuela quiere obtener 18 puntos derribando solamente bolos azules. ¿Cuántos debe tumbar? __________________

3. ¿Cuál fue el puntaje de Catalina si tumbó 5 bolos verdes únicamente? ___________

4. ¿Cuál fue el puntaje de Claudia si tumbó 4 bolos azules, 3 bolos rojos y 2 bolos verdes? _____________

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

Jugando Bolos II

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

En el equipo de Julián, Andrea y Rubén llenaron la siguiente tabla de registro grupal, pero por descuido faltaron algunos datos.

Ayúdales a completarla.

Recuerda:

Bolos azules dan 2 puntos cada uno.
Bolos verdes dan 3 puntos cada uno.
Bolos amarillos dan 4 puntos cada uno.
Bolos rojos dan 5 puntos cada uno.

Equipo de Julián

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno		2		0	6
2° turno		5			19
3° turno					16
				Total	

Equipo de Andrea

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno	4	4	0	4	
2° turno	3	5	2	0	
3° turno	0	3	4	2	
				Total	

Equipo de Rubén

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno					12
2° turno					15
3° turno					11
				Total	38

¿Qué puedes decir de los equipos de Julián, Andrea y Rubén?

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Jugando Bolos III

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo que competirá con los demás equipos del salón.
Organicen los bolos de la siguiente manera:

Cada jugador lanza la pelota, registra en su cuaderno el número de bolos de cada color que tumbó y levanta los bolos caídos.
Cuando todos los jugadores hayan lanzado deben completar la tabla grupal para el primer turno y luego realizar el segundo, registrar en la tabla, y así sucesivamente.

Ganará el equipo que más puntaje obtenga al final de los tres turnos.

Observa los puntajes que ahora se obtienen con cada color.
Bolos azules dan 7 puntos cada uno.
Bolos verdes dan 8 puntos cada uno.
Bolos amarillos dan 9 puntos cada uno.
Bolos rojos dan 10 puntos cada uno.

Tabla de registro grupal.

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno					
2° turno					
3° turno					
				Total	

¿El equipo ganador fue?

Actividades para reflexionar

1. En el equipo de Tatiana obtuvieron 72 puntos. Si se sabe que sólo tumbaron bolos verdes. ¿Cuántos bolos tumbaron?________
2. Rodrigo quiere obtener 90 puntos pero derribando solamente bolos rojos. ¿Cuántos debe tumbar?
____
3. ¿Cuál fue el puntaje de Adriana si derribó 6 bolos azules? ________

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

Jugando Bolos IV

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Se tiene la misma situación de la ficha anterior.

Recuerda:

Observa los puntajes que ahora se obtienen con cada color.
Bolos azules dan 7 puntos cada uno.
Bolos verdes dan 8 puntos cada uno.
Bolos amarillos dan 9 puntos cada uno.
Bolos rojos dan 10 puntos cada uno.

Ayuda al equipo de Isabel a llenar la tabla de registro grupal.

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno	0	2	5	0	
2° turno	9	0	0		74
3° turno	1		0	0	41
				Total	

Si el equipo de Andrea hubiera jugado con los puntos que ahora da cada bolo. ¿Cuál hubiera sido el puntaje total? Completa la tabla.

	Bolos Azules	Bolos verdes	Bolos amarillos	Bolos rojos	total
1° turno	4	4	0	4	
2° turno	3	5	2	0	
3° turno	0	3	4	2	
				Total	

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

3.3.2 Juegos con dados

Esta situación tiene como principal objetivo realizar conteos múltiples (inicialmente de dos en dos, pero posteriormente de cantidades mayores), pero ahora se tiene un elemento adicional: los conteos se orientan más a los aspectos relativos de la división, es decir, las reparticiones, que a la multiplicación en si misma (las repeticiones aditivas).

En líneas generales, los análisis presentados para el caso de la situación anterior siguen siendo válidos. Esto es, el tamaño de los números: conteos de dos en dos, o con otros valores, se espera que produzca cambios en las estrategias de trabajo de los alumnos, al igual que la cantidad de incógnitas en la solución.

Adicionalmente, dado que las actividades exigen repartir la cantidad total marcada en los dados (inicialmente en grupos de dos) para determinar la cantidad de casillas que se deben recorrer, entonces si la cantidad marcada por los dados es par o impar (para el caso de que cada casilla tiene el valor de dos puntos), o en general, divisible o no por el valor de cada casilla, se generan cambios en las estrategias de los estudiantes, y sobre todo, se exige la conceptualización de las reparticiones exactas e inexactas. De esta forma se favorece el análisis de conceptos como múltiplos y divisores de las cantidades dadas.

En la actividad 1 se espera que los estudiantes realicen conteos verbales de 2 en 2 y que logre descomponer los puntajes obtenidos en los dados en grupos de a 2, teniendo presente que debe tomar una decisión con la unidad sobrante cuando el número es impar: guardarla para el próximo turno, perderla (es decir restar una unidad al número impar, para obtener uno que sea par), o agregarle una unidad a la cantidad obtenida para completar una casilla adicional33 (esto es, agregar una unidad a un número impar para obtener el número par). Estas decisiones permiten reflexionar sobre una propiedad básica que relaciona números pares e impares: todo número impar se puede transformar en un número par agregando o restando una unidad.

El asignarle a cada casilla un valor de 1 y recorrer tantas casillas como indican los dados, daría cuenta de un pensamiento puramente aditivo en el que no es posible aún operar con grupos de unidades.

Jugar al parqués I

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Tablero de parqués común, 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores, dados, tabla de registro individual, guía de trabajo individual.

Cómo jugar

• Reúnete con 3 compañeros o compañeras más para formar un equipo para jugar parqués.

• Cada uno elige el color de sus fichas. Y se determina quién inicia el juego lanzando un dado.

• Cada jugador debe lanzar los dados y avanzar las casillas indicadas, pero se debe tener en cuenta que cada casilla vale 2 puntos.

Por ejemplo: si un jugador saca  deberá avanzar 3 casillas porque 7 = 2 + 2 + 2 y el equipo deberá acordar qué se hará con el punto sobrante.

Cada vez que un jugador realice un lanzamiento deberá llenar la siguiente tabla de registro personal. Agrega nuevas columnas a la tabla, o dibuja tantas tablas como sea necesario.

Nombre:

	Saqué	Casillas recorridas	Puntos sobrantes
Turno 1			
Turno 2			
Turno 3			
Turno 4			
Turno 5			
Turno 6			
Turno 7			

Actividades para reflexionar
Matías estuvo jugando parqués con sus compañeros y elaboró la siguiente tabla para conocer las casillas que avanzaría según indicaran los dados en cada lanzamiento. Ayúdalo a completar la información que le hace falta.

Nombre: Matías Rodríguez

	Saqué	Casillas recorridas	Puntos sobrantes
Turno 1	2	1	0
Turno 2	3		
Turno 3	4		
Turno 4		2	1
Turno 5	6		
Turno 6		3	1
Turno 7	8		
	9	4	
		5	0

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Jugar al parqués II

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Tablero de parqués común, 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores, dados, tabla de registro individual, guía de trabajo individual.

Cómo jugar

• Reúnete con 3 compañeros o compañeras más para formar un equipo para jugar parqués.

• Cada uno elige el color de sus fichas. Y se determina quién inicia el juego lanzando un dado.

• Cada jugador debe lanzar los dados y avanzar las casillas indicadas, pero se debe tener en cuenta que cada casilla vale 2 puntos.

Por ejemplo: si un jugador saca  deberá avanzar 3 casillas porque 7 = 2 + 2 + 2 y el equipo deberá acordar qué se hará con el punto sobrante.

Cada vez que un jugador realice un lanzamiento deberá llenar la siguiente tabla de registro personal. Agrega nuevas columnas a la tabla, o dibuja tantas tablas como sea necesario.

En el grupo de Catalina y Julián estuvieron jugando al parqués y ellos decidieron que cada casilla tiene un valor de **3 puntos**.

Ayúdale a Julián a completar la tabla de registro individual.

Nombre: Julián Pérez

	Saqué	Casillas recorridas	Puntos sobrantes
Turno 1	2	0	2
Turno 2	3	1	0
Turno 3	4		
Turno 4	5		
Turno 5	6		
Turno 6		2	
Turno 7			2

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Jugar al parqués III

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Tablero de parqués común, 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores, dados, tabla de registro individual, guía de trabajo individual.

Cómo jugar
• Reúnete con 3 compañeros o compañeras más para formar un equipo para jugar parqués.
• Cada uno elige el color de sus fichas. Y se determina quién inicia el juego lanzando un dado.
• Cada jugador debe lanzar los dados y avanzar las casillas indicadas, pero se debe tener en cuenta que cada casilla vale 2 puntos.

Cada vez que un jugador realice un lanzamiento deberá llenar la siguiente tabla de registro personal.

Félix elaboró la siguiente tabla de registro individual. Descubre qué valor le dieron a cada casilla en ese grupo y completa los espacios que faltan.

Nombre: Félix Bustamante

	Saqué	Casillas recorridas	Puntos sobrantes
Turno 1	2	0	2
Turno 2	3	0	3
Turno 3	4	0	4
Turno 4	5	1	0
Turno 5	6	1	1
Turno 6	7	1	2
Turno 7	8		
Turno 8	9		
Turno 9	10		

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Jugar al parqués IV

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Tablero de parqués común, 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores, dados, tabla de registro individual, guía de trabajo individual.

Cómo jugar
• Reúnete con 3 compañeros o compañeras más para formar un equipo para jugar parqués.
• Cada uno elige el color de sus fichas. Y se determina quién inicia el juego lanzando un dado.

Cada vez que un jugador realice un lanzamiento deberá llenar la siguiente tabla de registro personal.

Reúnete nuevamente con 3 compañeros o compañeras para jugar parqués, pero ahora la condición es que cada casilla tiene un valor de 5 puntos.

Observa el ejemplo de los primeros lanzamientos de Roberto Jiménez

	Saqué	Casillas recorridas	Puntos sobrantes
Turno 1	2	0	2
Turno 2	8	1	2
Turno 3	12	2	2
Turno 4	5	1	0
Turno 5	3	0	3
Turno 6			
Turno 7			
Turno 8			

Explica con tus palabras la forma de completar la tabla cuando cada casilla vale 5 puntos.

____
____
____
____

Completa tu propia tabla de registro personal mientras juegas con tus compañeros/as.
Utiliza las que sean necesarias.

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

3.3.3 Juego de canicas

Esta situación recoge todas las discusiones presentadas en las situaciones precedentes, pero en este caso, se da un paso más en el proceso: se proponen correspondencias de varios a varios, pues como se puede ver en la primera actividad, la relación de base es: por cada dos canicas fuera del círculo, se obtienen 5 puntos. De esta forma los conteos múltiples se ponen en relación más fuerte con la proporcionalidad directa.

Al igual que con las situaciones anteriores, el tamaño de los números, la cantidad de incógnitas de los diferentes problemas, y los análisis escalares o funcionales son la base para el desarrollo de diferentes estrategias de trabajo, y por ende, de diferentes formas de conceptualización de la multiplicación en relación con la proporcionalidad.

En la actividad 1 se espera que los estudiantes hallen el cuarto término de una proporción, teniendo en cuenta la relación 2 es a 5 (esto es, por cada 2 canicas, se obtienen 5 puntos). Esto puede hacerlo mediante la sucesiva separación de grupos de 2 canicas cada uno, para luego asignarle el valor de 5 a cada grupo, y por lo tanto, al determinar cuántos grupos de 5 unidades se conformaron, contar el 5 tantas veces como grupos se tenga (análisis escalar) o hacer la multiplicación del 5 por la cantidad de grupos (análisis funcional).

En la Actividad 2 se plantea nuevamente el juego de las canicas, pero con una relación de proporcionalidad diferente a la anterior: 3 es a 2. Se espera que al dar cuenta del proceso empleado por ellos para hallar los puntajes cada vez que se desplazan canicas fuera del círculo, se muestre evidencia de avances en los procesos de representación, y su relación con la comprensión de las estructuras de los problemas verbales.

En la Actividad para reflexionar el estudiante deberá descubrir la relación de proporcionalidad que se tuvo en cuenta para llenar una tabla determinada de registro. Esto implica una mayor profundidad en los análisis propuestos con respecto a las relaciones escalares y los funcionales, y por ende, de la comprensión de la multiplicación como una relación de proporcionalidad directa.

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Jugando canicas I

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
21 canicas, un círculo dibujado en el suelo, un dado, hoja de registro y lápiz.

Qué hacer
• Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo.
• Cada equipo dispone de 20 canicas que debe poner sobre una hoja tamaño carta.
• Cada jugador debe lanzar una canica hacia las que se encuentran al interior del círculo dibujado en el suelo, buscando hacer que la mayor cantidad de canicas se desplacen fuera de él.
• Cada vez que desplace 2 canicas fuera de la hoja el jugador obtiene 5 puntos.
• Debe anotarse cada jugada en la hoja de registro, incluyendo si queda alguna canica sobrante, para ser tenida en cuenta al final de los 5 turnos.

Nombre:

	Desplacé	Puntaje	Sobraron
Turno 1			
Turno 2			
Turno 3			
Turno 4			
Turno 5			
Puntaje total			

La siguiente es la tabla de registro de Lucas. Él realizó los cálculos en el primer lanzamiento, pero luego sólo escribió el número de canicas desplazadas. Averigua el puntaje que obtuvo en cada lanzamiento y en total.

Nombre: Lucas

	Desplacé	Puntaje	Sobraron
Turno 1	5	10	1
Turno 2	6		0
Turno 3	3		1
Turno 4	10		1
Turno 5	5	10	1
Puntaje total			

Describe el procedimiento empleado para conocer el puntaje cada vez que se desplazan las canicas.

____
____
____

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Jugando canicas II

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
21 canicas, un círculo dibujado en el suelo, un dado, hoja de registro y lápiz.

Qué hacer
- Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo.
- Cada equipo dispone de 20 canicas que debe poner sobre una hoja tamaño carta.
- Cada jugador debe lanzar una canica hacia las que se encuentran al interior del círculo dibujado en el suelo, buscando hacer que la mayor cantidad de canicas se desplacen fuera de él.

Reúnete nuevamente con tus compañeros para jugar canicas.
- Cada vez que desplace 3 canicas fuera del círculo, se obtienen 2 puntos.
- Debe anotarse cada jugada en la hoja de registro, incluyendo si queda alguna canica sobrante, para ser tenida en cuenta al final de los 5 turnos.

Nombre:

	Desplacé	Puntaje	Sobraron
Turno 1			
Turno 2			
Turno 3			
Turno 4			
Turno 5			
Puntaje total			

Describe el procedimiento empleado para conocer el puntaje cada vez que se desplazan las canicas.
____
____
____

Actividades para reflexionar
1. Una persona que tuvo en un lanzamiento un puntaje de 10, ¿cuántas canicas desplazó? ____________

2. Si quiero obtener un puntaje de 20, ¿cuántas canicas debo desplazar? _______________

3. Si se desplazan 16 canicas, ¿qué puntaje se obtiene? __________

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Jugando canicas III

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Un grupo diferente de niños también jugó a las canicas pero con una condición diferente.
Observa la siguiente tabla y averigua la condición para obtener los puntajes.

Canicas	6	2	0
Puntaje	12	4	0
Sobran	24	8	0

Condición:
____
____
____

Completa las siguientes tablas teniendo en cuenta la condición que acabas de encontrar.

Canicas	6	7	8	9	10	11	12	13
Puntaje	2	2	2	3				
Sobran	0	1	2	0				

Inventa una nueva condición para jugar canicas:
____
____
____

Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta la condición que inventaste.

Canicas	6	7	8	9	10	11	12	13
Puntaje								
Sobran								

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

3.3.4 Juego con arena

Continuando con lo propuesto en las situaciones anteriores, esta situación cuatro busca profundizar en el tema de los conteos, pero ahora introduciendo relaciones no enteras (números racionales) a partir de equivalencias entre diferentes unidades de medida.

De esta forma, dependiendo que la relación funcional o la escalar o ambas, sean expresadas por medio de números racionales se busca hacer cambiar las estrategias de solución de los estudiantes.

La actividad exige establecer relaciones de equivalencia entre n conjunto de unidades de medida, los cuales conforman un sistema no convencional para medir volúmenes. Las relaciones son tales que: el vaso A cabe 2 veces en el vaso B y el vaso B cabe 3 veces en el vaso C, por lo tanto el vaso A cabe 6 veces en el vaso C. Igualmente cuando la unidad de medida es el vaso mayor, entonces la relaciones serán fraccionarias.

Se espera que los estudiantes realicen la manipulación de los vasos y la arena para establecer las equivalencias entre las respectivas capacidades de cada uno de ellos. Esta actividad de alguna forma permite una introducción a los números racionales, pues dado que no siempre la relación entre las medidas es entera, entonces se tendrá que recurrir a las fracciones de unidad para expresarlas.

Se espera que los estudiantes estén en capacidad de emplear las equivalencias descubiertas en la actividad 1, para establecer nuevas equivalencias que implican mayor complejidad. Esto daría cuenta del establecimiento de relaciones multiplicativas, y de mayor control para el uso de las relaciones escalares o funcionales según la situación propuesta.

Jugando con arena I

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Cuatro clases diferentes de vasos desechables para cada pareja de estudiantes, uno de media onza, uno de onza, uno de 3 onzas y uno de 7 onzas, marcados con las letras A, B, C y D, respectivamente. Arena y tabla de registro

Qué hacer
• Dibujar en el cuaderno los vasos que se les entregan.
• Deberán llenar con arena los diferentes vasos y tratar de descubrir cuántos de cada uno se necesitan para llenar los demás.
¿Cuál es el vaso más grande? __________
¿Cuál es el vaso más pequeño? _________
¿Cuántas veces se debe llenar el vaso A para completar el vaso B?___________

COMPLETA:

Vaso A cabe ______ veces en el vaso A
Vaso A cabe ______ veces en el vaso B
Vaso A cabe ______ veces en el vaso C
Vaso A cabe ______ veces en el vaso D

Vaso B cabe ______ veces en el vaso A
Vaso B cabe ______ veces en el vaso B
Vaso B cabe ______ veces en el vaso C
Vaso B cabe ______ veces en el vaso D

Vaso C cabe ______ veces en el vaso A
Vaso C cabe ______ veces en el vaso B
Vaso C cabe ______ veces en el vaso C
Vaso C cabe ______ veces en el vaso D

Vaso D cabe ______ veces en el vaso A
Vaso D cabe ______ veces en el vaso B
Vaso D cabe ______ veces en el vaso C
Vaso D cabe ______ veces en el vaso D

Después de realizar varios ensayos completar la siguiente tabla de registro:

	Vaso A	Vaso B	Vaso C	Vaso D
Vaso A				
Vaso B				
Vaso C				
Vaso D				

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Jugando con arena II

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
Cuatro clases diferentes de vasos desechables para cada pareja de estudiantes, uno de media onza, uno de onza, uno de 3 onzas y uno de 7 onzas, marcados con las letras A, B, C y D, respectivamente. Arena y tabla de registro

Para reflexionar
1. Para hacer una gelatina se emplean 2 vasos D. Si se quiere dar la receta de la gelatina pero diciendo la medida en vasos C. ¿Cuántos vasos C se necesitan?

2. En un juego de muñecas Catalina se gastó 12 vasos B para servir el jugo.
¿Cuántos vasos D utilizó?
¿Cuántos vasos A son?

COMPLETA:

3. La receta de un postre dice lo siguiente:
2 vasos D de harina
2 vasos C de azúcar
8 vasos B de jugo de limón
10 vasos A de agua.

Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso B.

Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso D.

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

3.3.5 Áreas

Se pretende que por medio del análisis de la variación del área de un triángulo isósceles con respecto a su altura, el alumno pueda acercarse a la noción de variable como un elemento de un campo de variación.

Los marcos que se involucran en la tarea permiten que el estudiante logre conjugar y afirmar nociones de geometría y aritmética, de tal forma que pueda acceder a un campo algebraico de una manera más natural y lógica. Así no tendrá, en principio, que enfrentarse al hecho de manipular fórmulas y estructuras poco familiares. Además, el moverse en diferentes marcos le permite involucrar en la solución de la situación, elementos que de una u otra forma tienen relación, aunque no directa, con la propuesta dada. También, permite comprender la variable en una dimensión diferente a la de incógnita, en la dimensión de ser elemento de un campo numérico de variación.

La actividad contiene tres partes. En la primera se realizan construcciones con papel y lápiz, la segunda involucra el manejo del computador con el programa de geogebra y la tercera se refiere a una plenaria donde se discuten los resultados obtenidos en cada grupo.

Respecto a la primera se tiene que, de acuerdo con las observaciones de clase, los alumnos tienden a manejar solo números enteros en sus mediciones, lo cual restringe el objetivo de acercarse a la noción de continuo. Por tal motivo se propone la segunda parte de la actividad, la cual permite que el estudiante realice cálculos de mayor exactitud con números racionales. Esto favorece la creación de la noción de continuo y la noción de variable como elemento de un campo numérico de variación. Además, soluciona en parte, el obstáculo que se presenta en la medición directa de las longitudes de los segmentos que se manipulan en la tarea. La tercera parte es de vital importancia ya que se establecen resultados comunes para iniciar un acercamiento a la noción de variable. Todo lo anterior permite reflexionar sobre la relación de proporcionalidad directa que se tiene entre el área de un triángulo y su altura, cuando la base permanece con un valor constante.

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

Proporcionalidad directa I

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Materiales
• Hojas de papel (preferiblemente milimetrado, o en su defecto, hojas de cuaderno cuadriculadas).
• Lápices.
• Reglas y escuadras.
• Calculadora científica.
• Computador.
• Programa Geogebra.

Metodología
La actividad se va a desarrollar en grupos de tres personas. Estas deben elaborar un informe escrito donde se recojan los resultados y conclusiones a los cuales ha llegado el grupo, para luego ser compartidos con el resto de los compañeros. Se va a utilizar un computador por grupo.

Actividad
1. Dibujar un triángulo isósceles cuya base mida 5cm y una altura de 4cm.
2. Dibujar como mínimo otros cinco triángulos isósceles cuyas bases midan 5cm y sus alturas varíen en un rango de 0 a 10cm.
3. Calcular el área de cada uno de los triángulos que se dibujaron en los puntos anteriores (1 y 2). Puedes calcular dicha área con apoyo de la cuadrícula de la hoja de papel.
4. Elabora una tabla donde aparezcan los valores del área con respecto a los valores de la altura. Puedes tomar como guía la siguiente tabla:

Altura (cm)	4					
Área (cm^2)	10					

5. De acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla:
a) Observa los resultados que se obtuvieron de área y altura y escribe cómo se relaciona el cambio de los valores de las alturas con respecto a los valores del área.
b) Con la relación que se obtuvo en el punto anterior, puedes escribir cual sería el área de un triángulo cuya base mide 5cm y su altura mide 20 cm.
c) ¿Qué sucede con el área del triángulo, si el valor de la altura del punto anterior se duplica, es decir mide 40 cm?
d) ¿Qué sucede con el área del triángulo, si el valor de la altura mide 1cm?
e) ¿Qué sucede con el área

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes

- Fechas de uso

- Coordinador de mesa

- Soluciones dadas

- Preguntas de los usuarios

- Fallas de diversos orden presentadas

- Bibliografía asociada

- Documentos asociados

- Posibles mejoras

- Nivel de dificultad

<table>
<tr><td colspan="2">Proporcionalidad directa I</td></tr>
<tr><td colspan="2">Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS</td></tr>
<tr><td>Situación
Un granjero dispone de 96 m de malla metálica. Con ella quiere limitar un gallinero de forma rectangular. El granjero necesita saber que dimensiones debe tener el gallinero para encerrar la mayor cantidad de gallinas.

Recomendaciones:
Registren por escrito todas sus observaciones y conclusiones.
Conserven todos los datos producidos (no borren ni tachen nada). Si se equivocan, simplemente escriban corrección, y a continuación anote la nueva información.</td><td>Parte 1

¿De cuántas maneras diferentes se puede construir dicho corral? Dibuja, con tus compañeros, los posibles corrales.</td></tr>
<tr><td></td><td>Pendiente</td></tr>
</table>

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Proporcionalidad directa III

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Situación
Un granjero dispone de 96 m de malla metálica. Con ella quiere limitar un gallinero de forma rectangular. El granjero necesita saber que dimensiones debe tener el gallinero para encerrar la mayor cantidad de gallinas.

Recomendaciones:
Registren por escrito todas sus observaciones y conclusiones.
Conserven todos los datos producidos (no borren ni tachen nada). Si se equivocan, simplemente escriban corrección, y a continuación anote la nueva información.

Parte 2
Encuentren el área y el perímetro de los corrales dibujados y organice las soluciones obtenidas en una tabla como la siguiente:

	Medida ancho	Medida largo	Perímetro gallinero	Área del gallinero
Gallinero 1				
Gallinero 2				
Gallinero 3				
Gallinero 4				
Gallinero 5				
Gallinero 6				
Gallinero 7				

• ¿Cree usted que tienen las dimensiones de todos los posibles corrales que se pueden hacer? Justifique su respuesta.

• ¿Cuál cree usted que sea la mayor longitud que puede alcanzar el ancho del gallinero?

• Si el granjero conoce la longitud de un lado del corral, ¿Cómo puede obtener el otro lado y su área?

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Proporcionalidad directa IV

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Situación

Un granjero quiere delimitar con malla un gallinero de forma rectangular. El granjero necesita saber que dimensiones debe tener el gallinero para encerrar la mayor cantidad de gallinas.

Si el granjero ha calculado que cada gallina requiere 1 ½ metros cuadrados para vivir cómodamente y necesita encerrar 500,

Actividad 1

¿Cuáles son las posibles medidas del largo y el ancho para encerrarlas?

¿Cuántos metros de malla tiene que comprar?

Si el granjero conoce la longitud de un lado del corral, ¿Cómo puede obtener la longitud del otro lado y la longitud del perímetro?

¿En cuál, de todos los posibles corrales, se pueden encerrar las 500 gallinas viviendo cómodamente, pero gastando la menor cantidad de malla?

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

Proporcionalidad directa V

Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS

Situación

Un granjero quiere delimitar con malla un gallinero de forma rectangular. El granjero necesita saber que dimensiones debe tener el gallinero para encerrar la mayor cantidad de gallinas.

Si el granjero ha calculado que cada gallina requiere 1 ½ metros cuadrados para vivir cómodamente y necesita encerrar 500,

Actividad 2

El granjero hizo un contrato con la empresa de Huevos, con la que se comprometió a entregar 4500 huevos diarios.

Él sabe que cada gallina pone dos huevos por día, siempre y cuando viva cómodamente, pero si se le reduce el espacio a 1 metro cuadrado sólo pone 1 huevo.

¿Cuál de las dos opciones debe escoger el granjero para cumplir con lo pactado? Justifica tu respuesta.

Pendiente

BITÁCORA

- Número de estudiantes
- Fechas de uso
- Coordinador de mesa
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diversos orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Documentos asociados
- Posibles mejoras
- Nivel de dificultad

CONCLUSIONES

El trabajo realizado permitió avanzar en la comprensión de diversos aspectos de la formación de pensamiento matemático en nuestros estudiantes, en particular la naturaleza del estudio del pensamiento proporcional, sus complejidades y necesidades para ser desarrollado de manera satisfactoria en las clases de matemáticas, y el papel que este tiene en el trabajo con los conceptos de razón y proporción. Todo esto bajo el contexto del Laboratorio de Matemáticas, sus desarrollos actuales en lo teórico y en lo metodológico, y en sus posibilidades de desarrollo futuro. en particular se puede señalar que el trabajo permitió caracterizar el trabajo con las fichas del Laboratorio de Matemáticas, de tal manera que estas incluyeran aspectos directamente relacionados con el aprendizaje de la proporcionalidad, como un concepto clave en el desarrollo del pensamiento proporcional, que además tiene estrecha relación con los de razón y proporción. Finalmente, hacer una propuesta de mesa, que incluye un conjunto de 18 fichas de trabajo que se han distribuido según la actividad que les da origen y las exigencias y aportes que cada una de ellas hace para el trabajo con los conceptos de proporción y razón.

Se llegó a la comprensión de que el estudio de la proporcionalidad directa e inversa tiene su fundamento en un tipo de particular de correlación: aquella en la que el modelo funcional relaciona las variables linealmente. De las correlaciones lineales, aquella en la que la correlación es positiva y perfecta (es decir, una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas, y que por tanto tiene por ecuación una expresión de la forma $Y=m\bullet X$ con m un real positivo) es la que determina la proporcionalidad simple directa. Además, que la correlación sea positiva se expresa en términos de que variaciones en una de las variables, genera variaciones en el mismo sentido en la otra variable. Pero este único criterio no es suficiente para caracterizar cuando una situación es de proporcionalidad directa sino que para caracterizar una proporcionalidad directa se debe tener otro criterio adicional, el cual en última instancia, es el más importante: se trata del criterio de la linealidad.

El diseño de las fichas propició la construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad y al estar centradas en la cualificación de estrategias propias de los estudiantes para resolver situaciones de proporcionalidad aportándoles fortalezas y oportunidades de mejoramiento. Dichas fichas se constituyeron y sustentaron teniendo en cuenta básicamente tres aspectos: mirada epistemológica del concepto de proporcionalidad, estudios sobre las estrategias de los estudiantes para resolver situaciones de proporcionalidad y la resolución de problemas. Se espera que la implementación de estas permita el logro de los objetivos de una enseñanza adecuada de la proporcionalidad.

El estudio de la proporcionalidad y los conceptos asociados permitió comprender que el razonamiento proporcional es uno de los componentes importante del pensamiento formal que ha de ser adquirido por nuestros estudiantes. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. Este trabajo por lo tanto apoya su desarrollo significativo, ya que se reconoce que el desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Quedan una serie de reflexiones pendientes que sobre las mismas fichas de trabajo o sobre las nociones asociadas a la proporcionalidad se han dejado expresadas a lo largo de este texto o pueden ser extraídas después del estudio de éste, se espera que los profesores y los lectores en general de este trabajo, encuentren la motivación y los espacios para hacer dichas reflexiones, y que este documento sea un apoyo en este sentido.

BIBLIOGRAFIA

Batlle, A Y Otras. (1996). *Experimentos en clase de matemáticas de primaria. En: UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Laboratorio de Matemáticas*. N° 7. Graó. Barcelona. p.8

Cantoral U., R. (año). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica.*

Chaves, A. Jorge. Pabón, R. Octavio. (2012). *Laboratorio de Matemáticas como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas.* Universidad del Valle.

Chevallard, Y. (2003*) Didáctica de las Matemáticas*. Manual de Educación. Enciclopedia Océano.

De Guzmán, M. (1989). *Tendencias Actuales de la Enseñanza de la Matemática. En: Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación*. N°21. Universidad de Salamanca. Salamanca. p.20

De Guzmán, M. (1991) *Tendencias innovadoras de la educación matemática*. Taller Subregional. Ibercima. Bogotá. p.12

Guacaneme, E. (2001). *"Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Trabajo de maestría. Universidad del Valle.

Guacaneme, E. (2002). *Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas.* Revista EMA. VOL. 7, Nº 1, 3-42. Universidad de los Andes.

Hernán, F. y Carrillo, E. (1991). *Recursos en el aula de matemáticas*. Editorial Síntesis. Madrid. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. N° 34. p.9

Hoffer, A. R. (1988). *Ratios and proportional thiking*. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Maturana, H. Y Varela, F. (1990). *El árbol del conocimiento*. Debate. S.A. Madrid.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares*. *Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Documento N. 3. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Perry, P. Guacaneme, E. Andrade, L & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer.* Recuperado el 2 de noviembre de 2013, de http://funes.uniandes.edu.co/671/1/Perry2003Transformar.pdf

Polya, G. (1967). ¿*Cómo Plantear y Resolver Problemas*? Editorial Trillas.

Quintero, A. L. Molavoque, M. J. Guacaneme. E. A. *Diferencia entre semejanza y proporcionalidad desde una perspectiva histórica.* Recuperado el 2 de noviembre de 2013, de http://dintev.univalle.edu.co/revistasunivalle/index.php/rciencias/article/view/2039

ROMBER, T. A. (1992). *Perspective on Scholarship and Research Methods. In D. Grows (Ed), Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*. The National Council of Teachers of Mathematics. New York. Macmillan. pp. 49-64.

Trouche, L. Guin, D. (2006). *Conception continuée, conception distribuée, complexité et nécessité*. Journée TICE – INRP : TIC et apprentissages, faciliter et intégrer les usages, Lyon.

Trouche, L. Guin, D. (2006). *Distance Training, a key mode to support teachers in the integration of ICT?* Towards collaborative conception of living pedagogical resources. LIRMM et LIRDEF, Université Montpellier 2, France.

Vasco, C. (1994). *La Educación Matemática una Disciplina en Formación*. En: Revista Lecturas Universitarias. p.87

Vasco, C. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.* Recuperado el 2 de noviembre de 2013, de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

VOIGT, J. (1994). *Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics*. En; Educational Studies In Mathematics. Vol. 26. p.275