UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN LINEAL EN GRADO NOVENO

HÉCTOR FABIO LÓPEZ GARCÍA

CÓD: 0762173

JESICA ALEXANDRA MESSA GONZÁLEZ

CÓD: 0762109

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ZARZAL VALLE

2013

UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN LINEAL EN GRADO NOVENO

HÉCTOR FABIO LÓPEZ GARCÍA

CÓD: 0762173

JESICA ALEXANDRA MESSA GONZÁLEZ

CÓD: 0762109

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ASESOR

JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ZARZAL VALLE

2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

Jurado

____

Ligia Amparo Torres Rengifo

Jurado

____

Alexander Parra

Santiago de Cali, febrero de 2013

AGRADECIMIENTOS

Los autores deseamos expresar nuestros más sinceros agradecimientos a las siguientes personas e instituciones:

- Dios por darnos la oportunidad de culminar nuestros estudios universitarios y por la fortaleza de cada día para lograr nuestras metas.
- Nuestros padres y familiares por su apoyo incondicional, motivación y amor en cada momento para conseguir nuestro triunfo.
- Nuestro director Jorge Enrique Galeano Cano, por su ayuda desinteresada.
- Los evaluadores Ligia Amparo Torres y Alexander Parra por sus observaciones y recomendaciones para mejorar nuestro trabajo.
- Estudiantes, docentes y directivos de la Institución Educativa “Manuel Dolores Mondragón” por facilitar la realización de este trabajo y por la participación activa en el mismo.

En general, agradecemos a todas aquellas personas que de alguna manera hicieron posible la culminación de este trabajo de grado.

Los Autores.

CONTENIDO

TABLAS

ILUSTRACIONES

RESUMEN

Este trabajo de grado está encaminado al estudio de la noción de ecuación lineal para enriquecer su aprendizaje, a través de una situación problema en un contexto económico, donde se evidencia el significado de las letras como variables, así como las relaciones de covariación entre ellas. Con lo anterior se pretende promover la formación del pensamiento matemático en los estudiantes de grado noveno de la Básica Secundaria, razón por la cual es importante retomar investigaciones como la de Kieran (1988; 1992; 2006) que presenta la manera de introducir el álgebra en la escuela a través de situaciones diseñadas desde un enfoque previo a la conceptualización formal de definiciones algebraicas o la de Brousseau (1986) y Socas (1997) que permiten identificar algunas tendencias y dificultades generadas en el proceso de aprendizaje de la noción de ecuación lineal, estos referentes teóricos y prácticos aportan a un campo problemático de la educación matemática en la escuela y se muestran en la aplicación de una situación problema relacionada con las ecuaciones lineales, pues es en ésta que es posible identificar algunas dificultades que tienen los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Manuel Dolores Mondragón del Municipio de Bolívar, dicha situación está conforma por tres actividades que indagan contenidos como: resolver ecuaciones y resolver problemas, es decir, problemas que se solucionan con ecuaciones lineales y que relaciona magnitudes; número y un contexto social.

PALABRAS CLAVES: Ecuación lineal, situación problema, proceso de aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

El álgebra como parte integrante de las matemáticas está presente en la Educación Secundaría como área de conocimiento, en ella los procesos de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos en aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas determinan el significado que los estudiantes atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y procesos, así como la construcción de estos significados, entre otros aspectos formativos y de investigación, es por tal motivo que en este trabajo de grado se conoce a profundidad cómo influye la situación problema en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal.

Cabe señalar que, algunos investigadores como Kieran (1988; 1992; 2006) y Filloy & Rojano (1989), entre otros se han interesado en estudiar las dificultades que presentan los estudiantes en su iniciación al álgebra escolar, debido a que el paso de la aritmética al álgebra, según Butto & Rojano (2004) se ha enfocado en la manipulación de diferentes expresiones algebraicas, donde intervienen letras, operaciones, relaciones y sus respectivos significados que causa dificultad a los estudiantes en su construcción y comprensión.

De acuerdo a lo anterior, las investigaciones de Butto & Rojano (2004) evidencian que en algunas instituciones educativas el aprendizaje del álgebra es tradicional, es decir, está basado en la exposición de reglas y procedimientos operacionales (rigor sintáctico) que hacen referencia a la letra como un objeto estático y descontextualizado, en donde el estudiante simplemente se limita a la manipulación de reglas algorítmicas ajenas a un trabajo algebraico significativo.

Por lo anterior, el aprendizaje del álgebra ha sido tema de discusión por diferentes autores que identifican en el uso de las letras y los significados de éstas una de las principales causas de dificultad en la comprensión, construcción y uso que se tiene de las expresiones algebraicas con sus operaciones y relaciones. Así pues, este trabajo se organiza y presenta en cuatro capítulos de la siguiente manera:

Capítulo 1: en este se realiza un planteamiento general de la investigación en donde se enuncia el problema que se pretende abordar, la justificación, el objetivo general, los objetivos específicos y el contexto en el que se realiza la situación problema.

Capítulo 2: en este capítulo se expone el marco teórico desde el cual se desarrolla el trabajo, lo cual aportará al diseño de la situación problema.

Capítulo 3: en este se alude a los aspectos metodológicos y se presenta una adaptación de la situación problema Nº 2 realizada por Benalcázar Cortés (2012) en el trabajo de grado titulado *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: Dificultades y tratamiento*. Es importante aclarar que la situación problema presentada por Benalcázar Cortés (2012) sobre la noción de ecuación lineal fue adaptada al grado noveno, y se desarrolla en el aula de clases. La situación problema está conformada por tres actividades, también se presenta el análisis de cada actividad y por último se realiza un análisis de los resultados obtenidos, el cual da cuenta de los procedimientos realizados por los estudiantes en cada actividad.

Capítulo 4: en este último capítulo a partir de los resultados obtenidos, los análisis, lo planteado en el marco teórico y los objetivos, se presentan las conclusiones de este trabajo.

Y por último se presentan las referencias bibliográficas que sustentan los referentes del trabajo.

CAPÍTULO I

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta una visión general del trabajo *"Una aproximación al aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno".* Para esto es importante decir que el objetivo principal del mismo es explicar desde una perspectiva didáctica el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno a partir de una situación problema, pues ésta genera una articulación entre los procesos y los contextos propios de la actividad matemática, lo cual constituye como una estrategia que permite la conceptualización por parte del estudiante.

Para lo cual se empieza con las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra y de las ecuaciones lineales en la actividad matemática, realizadas por Kieran (1988; 1992; 2006), Filloy & Rojano (1985; 1989; 2008), Gallardo & Rojano (1997), Filloy (1998), Londoño Orrego, Muñoz Mesa, Jaramillo López, & Villa Ochoa (2011) de las cuales se tomó de manera específica la investigación de Kieran (1988; 1992; 2006) que presenta las características de los razonamientos empleados en el aula de clases, y en cada uno de éstos algunas dificultades presentadas por los estudiantes en sus desempeños; por tal motivo es importante enfatizar en la situación problema. Este capítulo continúa con las razones por las cuales este trabajo es importante en el ámbito de la Educación Matemática y los objetivos trazados para éste. Para finalizar el marco contextual, dado que éste permite ubicar el problema en un contexto específico de trabajo.

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

Numerosas investigaciones emprendidas por Kieran (1988; 1992; 2006), Filloy & Rojano (1985; 1989; 2008), Gallardo & Rojano (1997), Filloy

(1998), Londoño Orrego, Muñoz Mesa, Jaramillo López, & Villa Ochoa (2011) sobre los procesos cognitivos en el aprendizaje del álgebra, más exactamente en el ámbito de las ecuaciones lineales, dan cuenta de las dificultades y tratamientos escolares en el aprendizaje de las ecuaciones. A continuación se presentan apartes de la investigación de Kieran (1988; 1992; 2006) que ejemplifica lo antes mencionado:

Existen diferentes enfoques empleados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones y afianzados por la enseñanza: métodos intuitivos, estrategias de ensayo y error y métodos formales. Los primeros, incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de conteo o cubrir o llenar lo que falta, en el caso de expresiones con espacios en lugar de la incógnita, que son propuestos a los estudiantes. Al respecto se señala que el uso de estas técnicas intuitivas no puede generalizarse a ecuaciones, por ejemplo con números negativos, lo que obstaculiza el avance al uso de métodos formales de solución de ecuaciones.

Ejemplo de este método, son preguntas como: *¿Cuál es el número que al multiplicarlo por dos y sumarle uno da como resultado siete?* Habitualmente se generan representaciones para la "incógnita" en una casilla que debe ser llenada, como se muestra a continuación en la ilustración 1.

$$2 \times \square + 1 = 7$$

Ilustración 1. Representación del método intuitivo

El segundo, es decir, las técnicas de ensayo y error requieren de mucho tiempo y se apoyan fuertemente en la memoria, al menos que se usen procesos sistemáticos para acotar rangos de posibilidades de respuesta a la solución de las ecuaciones, lo que se reporta en estos trabajos es la evidencia que los estudiantes que usan estos métodos como primera aproximación a la solución de ecuaciones poseen una noción más desarrollada de equilibrio y equivalencia entre las componentes de la ecuación.

Un ejemplo claro de este enfoque es el hecho de tener una ecuación como $3x + 3 = 18$, donde se procede a hallar el valor de la "incógnita" dándole valores numéricos hasta que se cumpla la igualdad así:

Si $x = 1$, la ecuación será:

$$3 * 1 + 3 ¿=? 18$$

$$6 \neq 18$$

Como este valor no cumple la igualdad, se incrementa el valor de x.

Si $x = 4$, la ecuación será:

$$3 * 4 + 3 ¿=? 18$$

$$15 \neq 18$$

Este valor tampoco cumple la igualdad, se debe seguir cambiando el valor de x hasta obtener aquel valor numérico que permita cumplir con la igualdad.

Y por último se tienen los métodos formales, cuyo uso como transposición de términos, presenta algunas dificultades al no haber una apropiación de las propiedades matemáticas de la igualdad que subyacen en esa "transposición", así como la relación de equivalencia entre los miembros de la ecuación, parece pues que esta transposición de la que se habla es una forma mecánica de manipulación de los términos de las ecuaciones. Por lo que estos reportes enfatizan en la necesidad de ir de métodos intuitivos a los formales haciendo énfasis en las propiedades matemáticas de la adicción, de la multiplicación y de la igualdad a la hora de operar para solucionar ecuaciones.

Un ejemplo de este enfoque sería:

$$3x + 5 = 17$$

$$3x = 17 - 5$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Ahora bien, los enfoques, las técnicas y los métodos para resolver ecuaciones lineales, se han centrado en el estudio de la ecuación lineal a partir de los aspectos procedimentales o algorítmicos, puesto que con ellos se vislumbra el horizonte de posibles respuestas y por ende de las dificultades que éstas pueden entrañar, lo cual permite que dichas dificultades sean objeto de análisis al momento de evidenciar el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo es importante porque brinda elementos teóricos y resultados desde la implementación y análisis de una situación problema en el aula de clases, a través de la variación permitiendo con ello llegar a la construcción de la noción de ecuación lineal, dado que se busca que los estudiantes accedan a una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, en donde además de hacer énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos, se otorgue prioridad a los procesos de pensamiento que son propios de la actividad matemática de tal modo que sean aplicables y útiles para aprender, dar sentido al mundo que les rodea, representarlo y explicarlo.

Finalmente, atendiendo a la importancia de la situación problema en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal y siendo la adaptación y aplicación de una el propósito principal de este trabajo, cabe preguntarse:

¿Cuáles dificultades se pueden observar en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal, mediante la implementación de una situación problema en grado noveno?

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El álgebra es una rama de las matemáticas, que adquiere importancia en el currículo escolar, dado que permite incentivar en los estudiantes el razonamiento, siendo ello un importante logro para la consolidación del pensamiento matemático. Esta preocupación por el aprendizaje del álgebra, específicamente en lo relacionado con la noción de ecuación lineal ha favorecido notablemente la publicación de diversas investigaciones que apuntan a que en el aula de clases se produzca un acercamiento con significado y sentido para el estudiante, alejándose así del enfoque tradicional[1], dado que éstas tienen en cuenta procesos de razonamiento propios del álgebra, así como la variedad de problemas surgidos en su enseñanza.

Debido a lo anterior, varios autores como Múnera Córdoba (2009) se han interesado por reflexionar acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar. Él destaca en sus aportes la situación problema como una estrategia para la conceptualización matemática, pues ella ayuda a que el estudiante desarrolle procesos de razonamiento matemático, niveles de estructuración simbólica, y conceptualización, que van a ser importantes para que el aprendizaje producido sea significativo y con sentido.

De acuerdo a lo anterior el trabajar con una situación problema dinamiza la actividad matemática, dado que esto contribuye a generar un ambiente de participación en el que los estudiantes interactúan entre ellos mismos y con el profesor, de esta manera se incentivan procesos en la actividad matemática que faciliten la construcción del conocimiento que se quiere lograr.

[1] Se entiende por enfoque tradicional a la manipulación mecánica de símbolos algebraicos, donde los estudiantes solo aprenden a operar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones sin que estas tengan significación para ellos o las vinculen a problemas de contexto real.

Además la situación problema favorece la generalización, puesto que un objetivo primordial de la actividad matemática del estudiante es que pueda alcanzar esquemas generales de pensamiento, en donde al enfrentarse a una situación reconozca un caso particular de una clase general de problemas, o en sentido inverso, que los casos particulares puedan ser vistos a partir de clases generales de problemas, con esto se apunta a la identificación de invariantes, pues para que el estudiante acceda a la formulación general de un determinado conocimiento es importante que identifique lo particular de cada situación, así como lo que es común a ésta, de allí que lo que no cambia en la situación (lo invariante) sea lo que caracterice el conocimiento deseado.

La idea de generalización o la idea de variación ha sido importante, dada su estrecha relación con algunas nociones matemáticas, como la noción de ecuación lineal porque involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones.

Con el propósito de aproximar la idea de variación a un tipo de pensamiento, Vasco (1999) presenta un artículo en el que, describe el pensamiento variacional, sugiere algunos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de éste con la modelación. En tal sentido este investigador señala que: <<*El tipo de pensamiento que vamos a cultivar más en el Siglo XXI es el llamado “pensamiento variacional”*>> (pág. 58)

Este planteamiento de Vasco es ampliado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en el documento de los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (1998) donde se establece que las situaciones problemas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas. En cuanto al significado y sentido del estudio de la variación puede establecerse a partir del diseño y ejecución de situaciones problemas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y acción de la vida práctica, de manera que el estudiante pueda buscar, definir interpretaciones, proponer modelos, formular y dar solución a problemas a través de diferentes estrategias y razonamientos en un contexto definido y con los Estándares Básicos de Competencias en los que se presenta el pensamiento variacional (MEN, 2006); como aquel que permite la conceptualización de variable, dado que en la educación básica secundaria éste se constituye en un potenciador del pensamiento matemático escolar.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

- Aportar a la reflexión sobre el aprendizaje de la noción de ecuación lineal a partir de la implementación de una situación problema en grado noveno encaminada a explicar desde una perspectiva didáctica las dificultades que se generan en ella.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las dificultades en el aprendizaje de la noción ecuación lineal en grado noveno en la Institución Educativa Manuel Dolores Mondragón a través de una situación problema.
- Explorar los conocimientos que tienen los estudiantes con respecto a la noción de ecuación lineal desde una perspectiva didáctica.
- Analizar la construcción, comprensión y solución de la noción de ecuación lineal a partir de una situación problema.

1.4. MARCO CONTEXTUAL

El sitio donde se aplicó la situación problema es la Institución Educativa “Manuel Dolores Mondragón” ubicada en la cabecera municipal de Bolívar, Valle del Cauca, el grado elegido para dicha aplicación es noveno 9-2 el cual cuenta con 25 estudiantes en edades entre los 14 y 16 años, con una intensidad horaria de 5 horas académicas semanales de trabajo para matemáticas, que permite el desarrollo del álgebra en 4 horas a la semana y 1 hora para geometría. Las actividades de la situación problema en promedio se desarrollan en 45 minutos cada una.

El énfasis de la institución es Contabilidad, y cuenta con una sola jornada diurna, en la actualidad se encuentran matriculados 95 estudiantes pertenecientes al grado noveno; de ellos se puede decir que no existen estudiantes con algún tipo de discapacidad moderada, pues la institución no esta facultada para atender este tipo de población.

El modelo pedagógico define el currículo como *"el proyecto que determina los objetivos de la educación escolar, es decir, los aspectos del desarrollo y de la incorporación a la cultura que la Institución trata de promover, y que propone un plan de acción adecuado para la consecución de esos objetivos."* ([I.E.M.D.M], 2005, pág. 38) Para el cumplimiento de esto los 4 docentes que conforman el área de matemáticas y que poseen formación de pregrado en educación, crearon un plan de estudios donde se encuentran estructuradas las competencias y temáticas del currículo desde el grado preescolar hasta el grado undécimo basadas en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Curriculares del área de matemáticas; el plan de estudio contempla que éstas

Están constituidas por unos conocimientos que sirven al hombre para interpretar aspectos de la realidad y resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana, es por eso que las matemáticas han contribuido al desarrollo tecnológico y científico de nuestra especie ([I.E.M.D.M], 2005, pág. 94)

La estructura del plan de estudios del área de matemáticas atiende al desarrollo de tres grandes competencias: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático y comunicación matemática e igualmente contempla cinco ejes articuladores a saber:

- Los números como se organizan y pensamiento numérico.
- Lo espacial y la geometría y el pensamiento geométrico.
- Las medidas y el pensamiento con las medidas.
- La organización y clasificación de datos, pensamiento estadístico.
- Las variaciones de números y figuras y el pensamiento con variaciones y el álgebra.

La Institución Educativa Manuel Dolores Mondragón en su PEI propone un aprendizaje de las matemáticas desde el desarrollo de los distintos pensamientos y las habilidades que éstos permiten lograr.

Por tanto este trabajo permite el reconocimiento de la situación problema como una mirada distinta en torno a la forma en la que se aprende la noción de ecuación lineal en las aulas de clases, puesto que en primer lugar ésta es creada a partir del conocimiento adquirido por el estudiante, en segundo lugar porque incorpora aspectos significativos para él, relacionados principalmente con su contexto, y en tercer lugar porque también se tiene en cuenta las dificultades presentadas en el proceso de aprendizaje escolar, por lo anterior se logra conformar un aprendizaje significativo de nociones matemáticas, pues como lo plantea Rivero Mendoza (2000, pág. 1):

> *El estudio de las ecuaciones de primer grado en la escuela elemental se basa en el aprendizaje mecánico de reglas para manejar los símbolos, carentes de significado y sin referentes concretas. La falta de modelos que aporten significado a los símbolos algebraicos, es uno de los impedimentos más serios que obstaculiza el proceso de aprendizaje en la resolución de ecuaciones.*

Así pues, la simple mecanización de ejercicios a partir de la explicación de uno en particular por el docente no permite que el estudiante comprenda los conceptos que subyacen en esa solución y por ende pierde todo significado para él, contrario a esto la situación problema proporciona la construcción de un determinado conocimiento lo cual permite el desarrollo del pensamiento matemático.

Finalmente, es importante mencionar que en el desarrollo de este trabajo se propone estudiar dificultades relativas al aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno, para lograrlo se incorpora un análisis fundamentado desde la teoría de errores, dificultades y obstáculos (Brousseau, 1986); para tomar de ésta elementos conceptuales, que permitan diseñar y aplicar la situación problema, para con ello contribuir en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno, por ello identificar las dificultades es una tarea importante en el proceso educativo, ya que éstas son una preocupación constante en todo proceso de aprendizaje puesto que aparecen sistemáticamente y, por tal motivo, dicho proceso debe incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación mediante actividades que permitan que los estudiantes mejoren en su desempeño, más allá de la simple crítica sobre sus producciones, no obstante lo que más preocupa es la persistencia y masividad de algunos de ellos, pues es bien conocido que estas dificultades influyen en el aprendizaje matemático, en particular en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal, siendo imprescindible reconocerlas y concientizarse de que deben ser superadas para lograr el aprendizaje deseado.

CAPITULO II

2. UNA MIRADA TEÓRICA A UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN LINEAL EN GRADO NOVENO

En este capítulo se presentan los referentes teóricos del trabajo *"Una aproximación al aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno",* para con ello comprender la incorporación de la resolución de problemas en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno. Dichos referentes aluden a la teoría de errores obstáculos y dificultades, a la clasificación de éstas últimas según Socas y por supuesto a la resolución de problemas y la definición de situación problema.

Para empezar, la resolución de problemas es una forma de pensar en la que una comunidad de aprendizaje busca diversas maneras de resolver la situación y reconoce la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. (Santos Trigo, 2008, pág. 4) Por ende, la resolución de problemas es el eje central de la actividad matemática, al movilizar el pensamiento matemático como lo plantean los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), dado que a ésta se le considera el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

Por otro lado, existe una clasificación de los obstáculos propuesta por Brousseau (1986), la cual han sido objeto de estudio y análisis por parte de investigadores como Rico (1998) y Socas (1997). Esto es relevante para entender desde la perspectiva didáctica lo que acontece al nivel del aprendizaje de los estudiantes, particularmente en cuanto a la noción de ecuación lineal.

Pero esto no se queda sólo en los obstáculos, igualmente existe una clasificación planteada por Socas (1997) que describe las dificultades que pueden manifestarse en la situación problema; entendidas en este trabajo como aquellas generadas en el proceso de aprendizaje, puesto que son éstas las que conducen a un "mal aprendizaje" de los estudiantes. Por tanto la dificultad se constituye en un importante indicador del aprendizaje actual de los estudiantes, pues a pesar de que ésta constituye equívocos en sus respuestas, éstos representan algún conocimiento de la situación propuesta, a pesar de no ser el más efectivo. Sin embargo el proceso de aprendizaje no debe limitarse a ello, más bien debe llevar a que el estudiante logre un aprendizaje significativo, el cual le serviría para dar solución a la situación problema relacionada con la noción de ecuación lineal.

2.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El desarrollo del aprendizaje de los estudiantes sobre la noción de ecuación lineal y de variación tiene una gran importancia en el currículo de matemáticas. Por ello el desarrollo del pensamiento variacional representa un aspecto crucial en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Generalmente, se reconoce que las experiencias de aprendizaje de los estudiantes se enriquecen cuando trabajan con problemas o tareas planteadas en contextos próximos a ellos y donde tengan la oportunidad de utilizar recursos que les permitan aplicar ideas fundamentales de las matemáticas en los procesos de resolución. Así, la resolución de problemas que involucre distintos contextos es fundamental para lograr una sólida formación matemática.

En relación con lo anterior, el uso de procesos de resolución de problemas y la puesta en marcha de una forma de trabajo en el aula que combine la movilidad colectiva con la individual, son aspectos claves de las orientaciones que actualmente se promueven en la actividad matemática, en donde se encuentra inmersa la situación problema, la cual debe ser comprendida y entendida por los estudiantes, de lo anterior surge la importancia que se le ha otorgado al enfoque de resolución de problemas en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y diversos autores como Puig, Cerdán o Santos Trigo (2008), toda vez que ésta conlleva a que el estudiante desarrolle procesos reflexivos, investigativos y heurísticos, indispensables para el pensamiento matemático.

2.1.1. La resolución de problemas según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

La resolución de problemas es considerada como un elemento importante que ha impulsado el desarrollo de las matemáticas y el estudio del conocimiento matemático. Por ello se afirma que “la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas” (MEN, 1998, pág. 74), y como tal, debe ser el objetivo principal en el aprendizaje de las matemáticas y parte integral de la actividad matemática.

Pero esto no significa que se constituya en un aparte del currículo, al contrario, la resolución de problemas debe permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos, ya que a medida que los estudiantes resuelven problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, desarrollan una mente investigativa y asidua, aumentan su capacidad de comunicarse matemáticamente y de utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

La resolución de problemas en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se suscita porque en la década de los años 80 el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (1991) hizo algunas recomendaciones sobre la enseñanza de la matemática, las que tuvieron gran repercusión en todo el mundo. La primera de esas recomendaciones decía: "El Consejo Nacional de Profesores de Matemática recomienda que la Resolución de Problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de matemática en las escuelas". Y a partir de la publicación de esas recomendaciones, hasta hoy, viene dándose una importancia muy grande a este tema en todos los niveles de la enseñanza.

Ya que al resolver problemas se aprende a matematizar, lo que es uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Con ello aumentan su confianza, tornándose más perseverantes y creativos y mejorando su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas. Por todo esto, la *resolución de problemas* tiene como finalidad facilitar el desarrollo de las capacidades básicas, de los conceptos fundamentales y de las relaciones que pueda haber entre ellos. Es decir, algunas de las finalidades de la resolución de problemas serían:

- Hacer que el estudiante piense productivamente.
- Desarrollar su razonamiento.
- Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.
- Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.
- Hacer que las sesiones de aprendizaje de matemática sean más interesantes y desafiantes.
- Equiparlo con estrategias para resolver problemas.
- Darle una buena base matemática.

Estas finalidades contribuyen a fomentar ambientes pedagógicos cualitativamente diferentes. Con ellas los alumnos hacen conjeturas, investigan y exploran ideas, prueban estrategias, discutiendo y cuestionando su propio razonamiento y el de los demás, en grupos pequeños y en ocasiones con todo el salón.

Uno de los grandes intereses de la resolución de problemas está en la motivación provocada por el propio problema y, consecuentemente, en la curiosidad que desencadena su resolución.

Ésta práctica está conectada a varios factores como son la experiencia previa, los conocimientos disponibles, el desarrollo de la intuición; además del esfuerzo necesario para su resolución, lo que puede condicionar o estimular la voluntad de resolver nuevos problemas. El reconocimiento dado a este tema ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, distinguiendo diversas fases en el proceso de resolución, entre las cuales se pueden citar las de Polya (1980) y Alan Schoenfeld (1985), los cuales han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponiendo en el desarrollo de las matemáticas algunas propuestas para su enseñanza, entre las cuales Polya dice que:

> *Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados.* (1980, pág. 1)

Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- La comprensión del problema
- La concepción de un plan
- La ejecución del plan
- La visión retrospectiva

Para cada fase él sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para avanzar en la resolución del problema; para utilizar el razonamiento heurístico, el cual se considera como las estrategias para avanzar en problemas desconocidos y no usuales, como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás.

Aunque los matemáticos reconocen en los trabajos de Polya actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, también plantean que las estrategias de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el estudiante. Alan Schoenfeld (1985) reconoce el potencial de las estrategias discutidas por Polya (1980), el trabajo de Schoenfeld juega un papel importante en la implementación de las actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas y se fundamenta en las siguientes ideas:

- En el salón de clase hay que propiciar a los estudiantes condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. Schoenfeld mencionó que los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clase que represente un microcosmo de la cultura matemática, esto es, clases en donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejadas en la práctica cotidiana.
- Para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas y, consecuentemente, para proponer actividades que puedan ayudarlos, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar que en el proceso de resolver problemas influyen los siguientes factores:

  - **El dominio del conocimiento**, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

- **Estrategias cognoscitivas** que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el dificultad, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.
- **Estrategias meta cognitivas** se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, evaluar y decidir.
- **El sistema de creencias** se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras.

La resolución de problemas permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático. Algunas de éstas son:

- Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.
- Provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; es decir, los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la

formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); la argumentación (explicar el porqué, estructurar argumentos para sustentar generalización, someter a prueba, explorar nuevos caminos).

- Investigar la comprensión de conceptos y de procesos matemáticos a través de: reconocimiento de ejemplos y contraejemplos; uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representación; identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos, verificación de resultados de un proceso, justificación de pasos de un proceso, reconocimiento de procesos correctos e incorrectos, generación de nuevos procesos, etcétera.
- Investigar estrategias diversas, explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas matemáticas. Para lograr éstas metas los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas.

Por último, cabe decir que los trabajos enmarcados en el enfoque de resolución de problemas, se centran en dos perspectivas principales.

La primera se refiere a la trascendencia que ha sido dada a la resolución de problemas como objetivo general, no sólo de la matemática, sino como logro fundamental de la educación básica y media, de allí que cada vez más se hable del tema, y se publiquen artículos relacionados con ello. Es decir, se plantea la Resolución de Problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, se utiliza y aplica en cualquier campo de la vida, busca entonces obtener puntos comunes en cualquier tipo de problemas, características generales, estrategias de resolución, independientemente del problema.

Y la segunda alude a la de resolución de problemas como aquella interacción con situación problema dirigida a fines pedagógicos, es decir, como una estrategia didáctica encaminada al aprendizaje en la que hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. Es precisamente esta perspectiva la que será tenida en cuenta en este trabajo.

2.1.2. Otra forma de entender la resolución de problemas

La resolución de problemas es un dominio de estudio que ha influido notablemente en las investigaciones en Educación Matemática, en las propuestas del currículo de matemáticas y las prácticas de instrucción. Cabe resaltar que a más de tres décadas de presencia intensa de la resolución de problemas en las investigaciones y reformas curriculares resulta paradójico que su definición e identidad sigan siendo un tema de discusión en la Educación Matemática.

Autores como Lesh & Zawojewski (2007, pág. 782) definen la resolución de problemas como:

> *…el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas.*

Un aspecto importante en esta caracterización es el desarrollo de las ideas matemáticas como un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de aprendizaje.

Lo realmente importante es que el estudiante desarrolla recursos, estrategias, y herramientas que le permiten enfrentarse a las dificultades que inicialmente pueden surgir y fortalecer su forma de pensar en pos de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.

La resolución de problemas, es pues, una estrategia donde una comunidad de aprendizaje busca diversas maneras de resolver la situación y reconoce la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos (Santos Trigo, 2008). Es decir, no es solamente dar una respuesta sino que la resolución de problemas implica identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema, además contempla actividades que permitan extender el problema inicial y formular conjeturas y otros problemas.

Esta discusión ha enriquecido la investigación multidisciplinaria, donde existen tres enfoques importantes en la investigación de los procesos de resolución de problemas (Santos Trigo & Sanchéz Sanchéz, 1996):

- Investigación de la naturaleza de los problemas matemáticos a resolver.
- Caracterización de los estudiantes que resuelven problemas.
- Caracterización de los ambientes de aprendizaje que permiten que los estudiantes solucionen problemas de manera exitosa.

Para este autor, a su vez existen cuatro variables importantes identificadas en el proceso de resolución de problemas son:

- La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos, el "saber qué hacer".
- El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos, el "¿cómo hacerlo?"
- El papel del monitoreo o autoevaluación del procedimiento utilizado al resolver un problema. ¿Es correcto lo que hice?, ¿Existe otra vía?
- La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema.

Para llevar a cabo este análisis es necesario recurrir a diversos métodos de recolección de información. Algunos de ellos tienen como metas identificar patrones, categorías o dimensiones de las estrategias de solución utilizadas por expertos con experiencia en la resolución de problemas. Según lo anterior la resolución de problemas es una actividad compleja que pone en juego un amplio conjunto de habilidades y que incluye elementos de creación debido a que la persona se enfrenta a situaciones que permiten una reflexión.

Así pues, el proceso de resolución de un problema se inicia necesariamente con una adecuada comprensión de la situación problema, por ello es preciso que el estudiante tenga muy claro de qué se está hablando, qué es lo que se quiere conocer, cuáles son los datos que se conocen, dado que en la mayor parte de los casos, los problemas se plantean en forma escrita.

Luego de comprender el contenido del problema, comienza la búsqueda de una estrategia para su resolución. Aquí se trata de ver la relación que existe entre la información que se desea obtener y los datos o información de que se dispone y determinar cuál o cuáles de estos datos podrían ser útiles para llegar a la solución con ayuda de alguna herramienta matemática.

Es importante destacar que la determinación de la estrategia de solución constituye la etapa más compleja dentro del proceso de resolución de un problema ya que exige tener claridad respecto del contenido del problema, identificar la información conocida relevante y eventualmente la información que podría ser necesaria pero que no se tiene a mano, manejar el significado de los conocimientos matemáticos disponibles, establecer relaciones entre lo que se desea saber y lo que ya se conoce o se puede averiguar, y seleccionar las herramientas matemáticas más apropiadas.

Corresponde ahora interpretar dichos resultados a la luz del contexto del problema, es decir, a la luz de la situación problema que pertenece al mundo real, y al mismo tiempo evaluar su consistencia.

Teniendo en cuenta esto, la resolución de problemas requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un auto monitoreo efectivo, y una disposición productiva a plantear y resolver problemas.

Es decir, la resolución de problemas conlleva al desarrollo o construcción de un pensamiento donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan pensar consistentemente con el quehacer de la disciplina.

Así la resolución de problemas es de dominio inquisitivo, ya que los estudiantes constantemente formulan preguntas, identifican conjeturas o relaciones, buscan distintas formas de sustentarla, y comunican resultados. Además la resolución de problemas implica el desarrollo de una disposición a cuestionar, explorar preguntas y desarrollar una comprensión matemática dentro de una comunidad que valore y aprecie el trabajo individual y de colaboración, y la necesidad de constantemente reflexionar sobre el mismo proceso de construcción del conocimiento.

En este sentido, la resolución de problemas permite interactuar y pensar entorno a las situaciones que demandan el empleo de recursos y estrategias matemáticas. Las actividades que se utilizan en la resolución de problemas deben permitir identificar, analizar, reflexionar sobre sus experiencias y formas de realizar investigación en las matemáticas.

2.2. SITUACIÓN PROBLEMA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En la educación han surgido modelos pedagógicos que han sido los referentes en cuanto a la producción de aprendizaje a los estudiantes, uno de ellos es el tradicional; el cual se centra en un aprendizaje de carácter acumulativo, sucesivo y continuo logrando con ello una instrucción basada en la repetición, memorización y mecanización de procesos y algoritmos, en donde si bien se adquieren destrezas de tipo operativas, dirigidas a obtener respuestas, se deja a un lado la comprensión que ello debería implicar, por consiguiente no se logra que el estudiante le dé sentido a lo que está realizando, por tal motivo no se garantiza un aprendizaje efectivo.

Dada la fuerte influencia en el aprendizaje de la matemática de este tipo de modelo, en los últimos veinte años se ha construido una fuerte crítica que ha permitido desarrollar propuestas alternativas donde el centro no sea un aprendizaje acumulativo si no un aprendizaje que tenga sentido y significación. Una de estas propuestas es basar la interacción de conocimientos entre un docente y el estudiante en una situación problema pues como lo plantea Múnera Córdoba (2003, pág. 184) *“Desde esta perspectiva se logra potenciar el trabajo autónomo del alumno, y por ende, desarrollar procesos de aprendizaje más significativos.”*

La adquisición de un aprendizaje significativo por medio de la situación problema, la ha convertido en una alternativa que dinamiza el aprendizaje de las matemáticas, pues, ella permite la presentación de las distintas nociones matemáticas interrelacionadas lo cual muestra una matemática organizada.

Otra de las características de la situación problema es que vincula la actividad desde dos perspectivas complementarias: la primera alude a que en la actividad el estudiante, aunque esté compartiendo sus concepciones conceptuales con los demás compañeros, le permite generar un proceso de interiorización de modo que reproduzca en él una red dinámica de conceptos. Y la segunda se refiere a ver la actividad como *"las maneras de hacer colectivas"*, es decir, concebir la actividad, en términos de Luis Moreno (2002), como una actividad distribuida (Múnera Córdoba J. J., 2009, pág. 2). Por ello se puede interpretar una situación problema como:

> *Un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación y la heteroevaluación.* (Múnera Córdoba & Obando Zapata, 2003, pág. 185)

Lo anterior implica que una situación problema incluya los siguientes elementos: la selección de un motivo o problema inicial, la organización básica de los contenidos temáticos, la estructuración de niveles de conceptualización, la selección de preguntas y actividades fundamentales y la evaluación de los procesos de aprendizaje.

Así que una situación problema, debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender; debe también representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible y debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.

2.2.1. La selección de un motivo o problema inicial

El motivo es la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura, o el suceso, que puede ser aprovechado para generar una situación problema en el aula de clase. Su elección es muy importante, pues determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación por parte de los estudiantes, y por ende, el que la situación pueda constituirse en un verdadero problema. (Múnera Córdoba & Obando Zapata, 2003, pág. 192)

Es decir, una situación problema genera un contexto propio basado en el conocimiento de los estudiantes a quienes se dirige, lo que implica una elaboración didáctica por parte del docente, pues a pesar de que está basada en el conocimiento del estudiante debe generar dificultades para ellos con el fin de propiciar el aprendizaje de un nuevo saber. La siguiente situación es un claro ejemplo de lo que es un motivo:

En el supermercado "Merca éxito" se vende el refresco Hitt de diferentes cantidades de contenido. Tal como se muestra en la Tabla 1.

	Hitt por tarro en mililitros	*Precio por tarro($)*
1	*225*	*1.000*
2	*450*	*2.000*
3	*900*	*4.000*

Tabla 1.El precio del jugo según su capacidad

En el caso anterior, el motivo (la venta de los jugos Hitt) es un contexto significativo para la situación porque la hace comprensible a los estudiantes y, por tanto, les permite desplegar la actividad matemática.

2.2.2. La organización básica de los contenidos temáticos

Los temas son importantes para fortalecer una situación problema, pues es esto precisamente una de las características mas importantes de ella, sin embargo no es la situación completamente porque a ella la caracterizan otros aspectos además de este. El tema entonces servirá para darle una organización, para consultar la matemática, y escoger los temas propuestos por el currículo escolar que serán incluidos en la situación; es decir, *"Se trata de establecer niveles de conceptualización y simbolización que permitan a los estudiantes un acercamiento progresivo a las diferentes relaciones matemáticas"* (Múnera Córdoba J. J., 2009, pág. 5). Por ejemplo en la actividad propuesta para este trabajo el tema principal es *la noción de ecuación lineal*.

2.2.3. La estructuración de niveles de conceptualización

En una situación no es sólo importante el conocimiento que se pretende dar a conocer, también influye aquel que el estudiante tiene antes de enfrentarse a dicha situación, por ello es importante brindarle una organización, pues como lo plantea (Mesa Betancur, 1994, pág. 8):

> *Se trata de diseñar redes conceptuales entre las concepciones que el motivo genera en los estudiantes y los conceptos formales de la matemática. Redes que se caracterizan por aceptar aproximaciones empíricas, tanteos, búsqueda de algoritmos, verificaciones, confrontaciones e intuición de conjeturas.*

Lo anterior, para decir que no se trata únicamente de tener en cuenta la jerarquía de los procesos matemáticos, pues también se debe considerar los temas y estados de conocimiento que tengan los estudiantes para con ello movilizar un conocimiento estructurado, y que desde luego tenga sentido, ya que también se deben considerar los temas; la red conceptual que se establece es la siguiente:

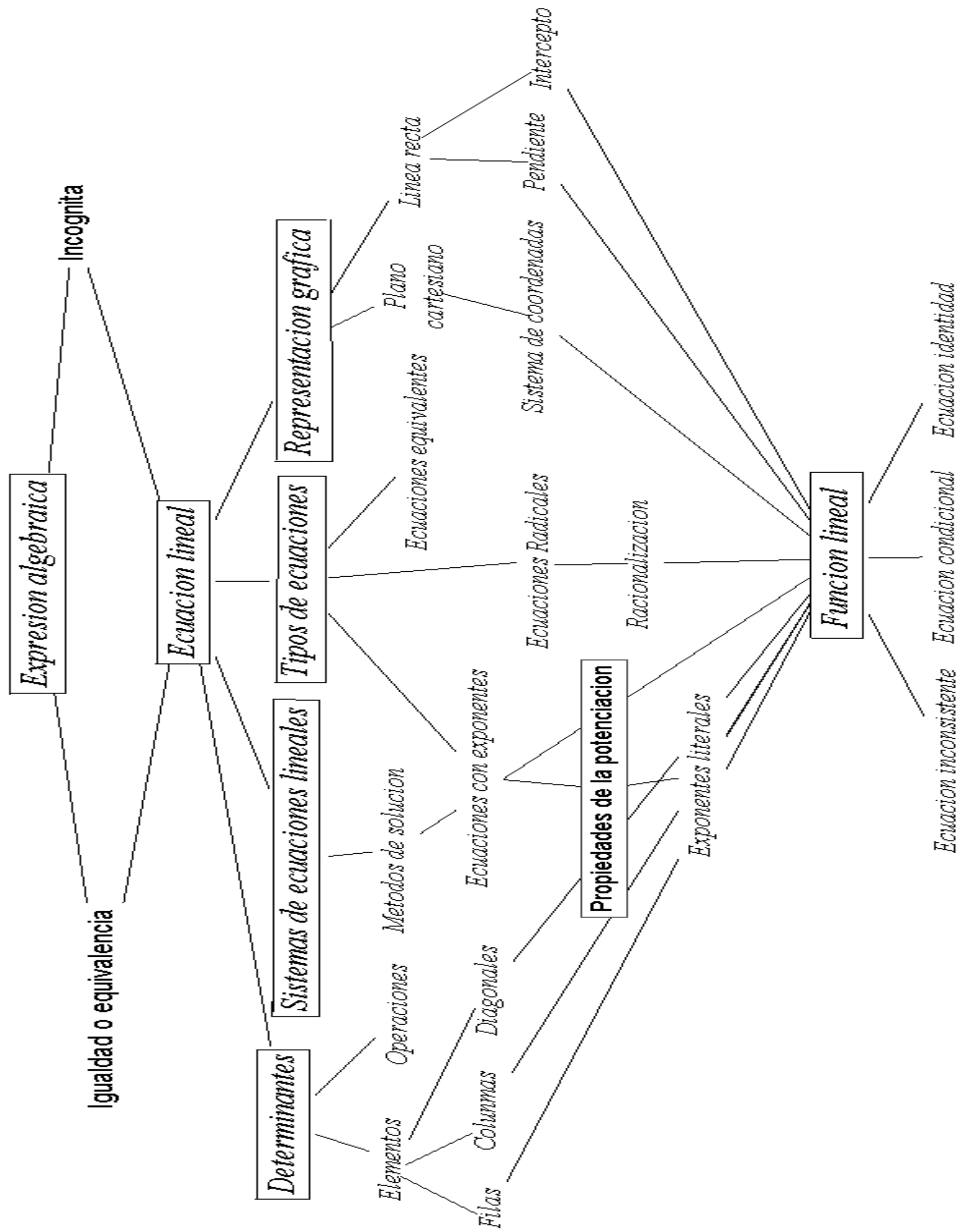


Ilustración 2. Red conceptual de la noción de ecuación lineal

Las distintas maneras en que puede ser abordado el concepto de ecuación lineal en el aula se puede lograr desde el estudio de las concepciones de la ilustración 2 y es importante tener en cuenta que los componentes de ella juegan un papel significativo en el desarrollo de la noción de ecuación lineal; por tal razón a continuación se presentan algunas apreciaciones sobre la incidencia de éstos.

Se debe tener una noción anterior a la que se va a aprender, en este caso la **expresión algebraica,** es esa noción, ya que es el resultado de aplicar un número finito de veces una o más de las cuatro operaciones fundamentales: adición, multiplicación, sustracción o división (excepto la división entre cero), a una colección de constantes y variables. Donde las constantes son símbolos que sólo pueden tomar un valor numérico, mientras que las *variables* son símbolos que pueden tomar más de un valor de un conjunto dado de valores permitidos.

Además, se sabe que una ecuación es un enunciado que afirma que dos expresiones algebraicas son iguales, por tal motivo se hace necesario considerar la noción de igualdad y la definición de incógnita, dado que el significado de la letra en una expresión algebraica cambia cuando se iguala con otra, la letra deja ser una variable para transformarse en una incógnita.

La **igualdad** es pues, una relación binaria de expresiones que inicialmente carecen de valor y es a través de esta relación que se debe verificar las propiedades fundamentales que tienen los números reales en operaciones y que solo se prueba al establecer que ambos términos son iguales. Por su parte de la definición de **incógnita** en álgebra es que son letras, que casi siempre corresponden a variables como (x, y, z), cuyo valor hay que encontrar y que por lo general es un valor numérico.

Lo anterior lleva a hablar de la noción central de este trabajo, es decir, la **ecuación lineal,** que es una ecuación la cual tiene una incógnita para el cual hay que encontrar un valor, en ella las expresiones que aparecen en ambos lados de la ecuación reciben el nombre de lados o miembros. La ecuación lineal permite evidenciar otros conceptos y nociones como lo son las determinantes, los sistemas de ecuaciones lineales, los tipos de ecuaciones y la representación gráfica.

Relacionando a lo anterior, al concepto de **función lineal** esta es una función en el cual la variable toma muchos valores, pero que llega a consolidarse como ecuación lineal cuando la variable dentro de su conjunto como dominio llega a tomar un único y valido valor, luego por esta razón se estaría ablando de incógnita.

Teniendo en cuenta esta red conceptual se pueden identificar todos los conceptos y nociones que permite movilizar la noción de ecuación lineal.

2.2.4. La selección de preguntas y actividades fundamentales

Las preguntas en la situación problema deben movilizar el pensamiento matemático a tal punto que se genere un aprendizaje significativo en la actividad de los estudiantes. Los interrogantes no pueden ser demasiados abiertos, aunque deben permitir generar conjeturas, reflexiones, creatividad y búsqueda de soluciones por medio de estrategias en torno a ellas, además de permitir procesos de búsqueda de otros conocimientos e interés por aprenderlos.

En las preguntas se cristalizan los análisis realizados por el maestro sobre la red conceptual, los medios y los mediadores, y se plasman en un diseño que, al ser vivido por el estudiante, le permite la construcción del conocimiento. Un ejemplo de esto son preguntas como:

1. De qué depende el precio del jugo Hitt? Explica tu respuesta.[2]
2. Si un jugo Hitt tiene $675\ ml$.¿Cuál es el precio?

[2] Estas preguntas están basadas en el contexto planteado en la selección del motivo inicial numeral 2.2.1. de esta sección.

3. ¿Cuál es la diferencia en ml? y ¿Cuál es la diferencia en precio?

Ya que a través de estos interrogantes o preguntas existe una *devolución de la situación,* es decir, que el estudiante haga suyo el o los problemas que se le presenta, generando una responsabilidad que ya no es del docente sino de él para dar respuesta a la situación. Esto es lo que garantiza el aprendizaje significativo.

2.2.5. La evaluación de los procesos de aprendizaje

La evaluación es importante y fundamental en el proceso de aprendizaje pues, es con ella que el estudiante va a hacer explícito el aprendizaje. Esta evaluación debe ser continua y debe estar a lo largo de todo el aprendizaje. La evaluación por tanto, está inmersa en la misma situación problema en la medida en que las producciones de los estudiantes dan cuenta del proceso de aprendizaje. Con el propósito de ejemplificar lo anteriormente expuesto, se presenta la siguiente problemática:

- Complete la Tabla 2 de acuerdo a los datos anteriores.

	1	2	3	4	5	6	7
Jugo en (ml)	225	450	675	900		3.600	3.825
Precio ($)	1.000	2.000		4.000	8.000		

Tabla 2.Encontrando cantidades por el uso de la proporcionalidad.

1. Teniendo en cuenta los valores de la tabla 2 realice el cociente entre el precio y la cantidad de mililitros. ¿Qué observas? ¿Qué conclusión puedes sacar?
2. Suponiendo que haya un jugo que vale $\$16.000$ ¿Cómo encuentras la respuesta? ¿Cuántos mililitros tiene?
3. Escriba una expresión (ecuación) que permita calcular la cantidad de mililitros según el precio.

Desde esta perspectiva de la situación problema, se pone de manifiesto que el profesor debe prestar atención a las concepciones de los alumnos, no sólo antes de que comience el proceso de aprendizaje, sino también a las que se van generando durante el mismo. Lo cual se evidencia en el transcurso de la solución de dicha situación.

La situación problema debe permitir al estudiante, entonces, extender su actividad matemática a través del desarrollo explicito de una relación entre la exploración y la sistematización del saber. Lo anterior implica que la situación problema debe tener, aparte de los elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los estudiantes desarrollar de manera autónoma procesos de exploración como la formulación de hipótesis, su validación, y si es el caso su reformulación. Esto permite la elaboración conceptual de los objetos matemáticos esto es, un camino que recrea la actividad científica del matemático, en el ejercicio de su autonomía intelectual.

Finalmente, una situación problema debe vincular de manera activa al estudiante en la elaboración teórica, haga del arte de conocer un proceso no acabado, permita utilizar aspectos contextuales como herramientas dinamizadoras de aprendizaje y relacione las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

2.3. OBSTÁCULOS Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La perspectiva didáctica es una valiosa herramienta con la que cuentan los investigadores para dar cuenta de procesos, fenómenos y hechos relacionados con una problemática en particular; ahora bien, en el presente trabajo de grado, se recurrirá a ella para tomar elementos teóricos que permitan explicar las diversas dificultades que se manifiestan cuando los estudiantes se encuentran en el proceso de aprendizaje, particularmente de la noción de ecuación lineal, para lograrlo se presentarán las clasificaciones propuestas por Brousseau (1972) y Socas (1997), relacionadas con los tipos de obstáculos y dificultades, respectivamente.

2.3.1. Obstáculos

En el ámbito académico la resolución de problemas es un medio para abordar las dificultades que se generan en el aprendizaje de las matemáticas, más exactamente en la noción de ecuación lineal mediante situación problema ya que dichas dificultades limitan la aparición y el funcionamiento de nociones. Esto quiere decir que no permiten una claridad total en el pensamiento.

Así, mediante la implementación de la situación problema en el proceso de aprendizaje se reducen significativamente estos obstáculos, a su vez, estos obstáculos pueden ser empleados como un conocimiento que más adelante permitirán generar aprendizaje significativo. Por tal motivo es importante mencionar la noción de Obstáculo propuesta por Brousseau (1972, pág. 429) la cual es:

> *Una idea que, al momento de la formación de un concepto, ha sido eficaz para afrontar problemas precedentes, pero que se revela ineficaz, cuando se intenta aplicar a un problema nuevo, ya que a partir de esta idea es posible explorar la naturaleza de los obstáculos que se generan en el aprendizaje de dicha noción.*

Esta concepción sobre el obstáculo dada por Brousseau permite pensar en la estrecha relación con la resolución de problemas, dado que son el resultado de la acción propia del estudiante frente a una situación problema, por esta razón se presentan tan resistentes al cambio.

Por tanto los obstáculos, pueden ser el resultado de diferentes causas y por eso se los diferencia según el desarrollo del sujeto y la incursión en modelos culturales específicos:

- Obstáculos epistemológicos: están ligados al conocimiento mismo. Se pueden encontrar en la evolución histórica de los conceptos matemáticos.
- Obstáculos didácticos: son aquellos que parecen depender de las decisiones del docente o del sistema educativo.

2.3.1.1. Obstáculo epistemológico

La noción de obstáculo epistemológico, retomada por Brousseau en 1976, plantea que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación problema es capaz de generar conocimiento en forma de estrategia para solucionarla. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. Es decir, está intrínsecamente relacionado con el propio concepto. Se le puede encontrar en la historia del mismo concepto. Es bien conocido el ejemplo de Efraím Fischbein (1985):

P1. Una botella de naranjada, que contiene 0.75l, cuesta 2 dólares. ¿Cuál es el precio de 1l?

P2. Una botella de naranjada, que contiene 2 l, cuesta 6 dólares. ¿Cuál es el precio de 1l?

En varias ocasiones los docentes y los alumnos siguieron procesos para resolver P1. Algunos han confesado haber considerado 0.75 como ¾ y de haber procedido en el campo de las fracciones (proceso no siempre realizado con el resultado esperado). Otros admiten haber resuelto P1 con la proporción $\frac{0.75}{2} = \frac{1}{x}$ y, después, haber aplicado las propiedades conocidas en este campo para resolverlo (con éxito). Se ve atentamente este proceso;

en el curso de la solución de la ecuación lineal con incógnita x, se llega, en un determinado momento, a realizar $2 \div 0.75$; esta es, aparentemente, la misma operación que, realizada directamente con los datos del problema, hubiera resuelto P1 de manera rápida. Pero no es el mismo asunto. Si es verdad, como indiscutiblemente lo es, que existe una fuerte resistencia en muchos de nosotros a realizar $2 \div 0.75$ (a causa del choque entre significado formal y significado intuitivo de la división), no se presenta ninguna incomodidad cuando, llegando al momento final, después de la aplicación de reglas de las proporciones y en la realización de los pasos de un algoritmo, se le pide resolver aparentemente la misma operación. Aquí, como ya sabemos, se pone en acción una cláusula del contrato didáctico, aquella de la delegación formal: en un cierto sentido, no nos esforzamos directamente en el pasaje, deja de ser una cuestión de elección, de decisiones personales; se deja al algoritmo, al cálculo, todo crédito de la resolución del problema, una especia de no responsabilidad de quien está resolviendo.

2.3.1.2. Obstáculo didáctico

Es el resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.

Por ejemplo, la presentación actual de la noción de ecuación lineal en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el marco de una selección didáctica hecha por los enciclopedistas y luego por convención teniendo en cuenta su utilidad, esta noción iba a ser enseñada a todo mundo lo antes posible, asociada a las expresiones algebraicas, y refiriéndose a las técnicas de operación en ellas. Así, hoy, la noción de ecuación lineal es, para los alumnos "expresiones algebraicas con una operatividad". Y esta concepción, apoyada por una mecanización del alumno, va a hacer obstáculo hasta la universidad.

Es característico que el principal factor de discriminación de los alumnos en un cuestionario sea el cálculo haciendo intervenir, a la vez, expresiones algebraicas y ecuaciones lineales. Así, es la "comprensión" misma de la definición de la noción de ecuación lineal lo que explica los comportamientos de los estudiantes. Pero actualmente, un obstáculo tal se ha convertido, a la vez didáctico y sociocultural.

2.3.2. Dificultades

El aprendizaje de la matemática genera muchas dificultades a los estudiantes y estas son de naturalezas distintas, esto se debe en parte al macro sistema educativo, pero generalmente proviene del microsistema educativo, es decir en donde interactúan: docente, saber, estudiante e institución educativa. Dichas dificultades se manifiestan, conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica de los estudiantes en forma de obstáculos.

En el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, las dificultades que evidencian los estudiantes influyen en diferentes actividades, por ello Socas (1997) afirma que: *"Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con la matemática. En general algunos estudiantes, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas."*

Es decir, las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden derivarse de varios factores, por ello es importante para el presente trabajo presentar a continuación la clasificación de dificultades, hecha por Socas (1997):

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
- Dificultades asociadas a los procesos cognitivos de los estudiantes.
- Y dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

2.3.2.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación.

Sin embargo, el lenguaje de la Matemática es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.

2.3.2.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de la Matemática y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático. Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de la Matemática, el aspecto deductivo formal.

El abandono de las demostraciones formales en algunos programas de Matemática del Nivel Medio se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico; es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo esta incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia. El abandonar ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico, por ser éste una destreza de alto nivel que resulta necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

El fomentar esta capacidad para seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, que también permiten obtener resultados y métodos correctos, sino que, más bien, esta capacidad se desarrolla con la práctica de estos métodos informales. Sin embargo, sí se estaría en contra de la intención ingenua de los métodos rutinarios, de las conjeturas aleatorias, etc.

2.3.2.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de Matemática y con los métodos de enseñanza.

La institución escolar debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de la Matemática dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Esta organización afecta tanto a los elementos espacio-temporales como a los agrupamientos en clases homogéneas o heterogéneas, de acuerdo con sus habilidades en Matemática.

La organización curricular en Matemática puede originar diferentes dificultades en el aprendizaje de la misma. Cuatro serían los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de Matemática: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un estudiante en esta ciencia, la necesidad de temas anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de la Matemática escolar.

Por último, los métodos de enseñanza deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar, como a la organización curricular. Varios son los aspectos a considerar, por ejemplo, el lenguaje, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los estudiantes; la secuenciación de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptada a la lógica interna de la Matemática; el respeto a las individualidades que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase; los recursos y la representación adecuada.

2.3.2.4. Dificultades asociadas a los procesos cognitivos de los estudiantes

La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los estudiantes. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemática que los estudiantes son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza.

Nos encontramos, sin embargo, con diferentes teorías generales sobre el desarrollo cognitivo que por distintas razones no han tenido un efecto claro y directo en las aulas de Matemática; también es verdad que muy pocas de estas teorías se han ocupado de manera específica de la Matemática.

Diferentes son los enfoques que podemos considerar: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre muchos otros.

2.3.2.5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas

Sabemos que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gusta la Matemática. Muchos estudiantes tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ella. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores, estilos de enseñanza, y las actitudes y creencias hacia la Matemática que les son transmitidas.

La dificultad es una constante en todo proceso de aprendizaje, pues se considera que el equivocarse es una oportunidad para el aprendizaje. Con la dificultad, se dice, el estudiante se da cuenta que ante el aprendizaje no puede ni debe adquirir actitudes superficiales, y por lo tanto, ofrece una coyuntura para la autocrítica y para inferir la necesidad de aprender de las dificultades y fracasos: cuando un estudiante se equivoca, se le hace ver su dificultad y se le invita a corregirlo. Es innegable que con ello aumenta su capacidad de curiosidad e iniciativa para observar, indagar y rectificar.

En esta interacción dialéctica, la noción de obstáculo es fundamental debido a que éstos surgen en el proceso de aprendizaje por la confrontación que de conocimientos efectúa el estudiante, así, habrá de enfrentarlos y superarlos para lograr un conocimiento matemático. Al respecto, puede decirse que esta noción es considerada en los campos de la didáctica, psicología, y otras disciplinas.

En esta interacción dialéctica, la noción de obstáculo es fundamental debido a que éste surge en el proceso de aprendizaje por la confrontación de conocimientos efectuada por el estudiante, así, habrá de enfrentarlos y superarlos para lograr un conocimiento matemático. Al respecto, puede decirse que esta noción es considerada en los campos de la didáctica, psicología, y otras disciplinas.

2.4. LA NOCIÓN DE ECUACIÓN LINEAL EN LOS LINEAMIENTOS Y LOS ESTÁNDARES

En este trabajo es necesario hablar de lo que acontece en la realidad educativa Colombiana, desde el punto de vista curricular, para ello se deben considerar los Lineamientos Curriculares, pues en estos se encuentran plasmadas investigaciones teóricas que se encaminan a contribuir al cambio en el sistema educativo actual, en estos se ha puesto de manifiesto el pensamiento variacional como parte del desarrollo del pensamiento matemático.

Por ende, el estudio de la noción de ecuación lineal, requiere del desarrollo de conceptos que contribuyen a la construcción de la noción de linealidad en relación con estructuras asociadas a lo gráfico y a lo algebraico, además de su relación con las diferentes situaciones conocidas por el estudiante y que evidencia la aplicación de ambas estructuras en un contexto determinado. Por lo tanto la aplicación de tales estructuras, están asociadas a las diversas representaciones y contextos fuera y dentro de la matemática, aspectos que desde el MEN en los Lineamientos y Estándares Curriculares (1998; 2006) son promulgados.

Teniendo como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, entonces, se identificó que mediante las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se contribuye al desarrollo de las siguientes competencias: formular, plantear, transformar y resolver problemas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer, cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

2.4.1. La ecuación lineal según los Lineamientos Curriculares

La formulación de los Lineamientos Curriculares (1999) es el resultado de un proceso de discusión y consenso nacional de grupos de estudio e investigación en educación matemática coordinado por el Ministerio de Educación Nacional. El documento Lineamientos Curriculares presenta una propuesta para reflexionar sobre: la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas y didácticas; una nueva visión del conocimiento matemático escolar y sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y la evaluación. De acuerdo con esta visión global e integral del quehacer matemático, los Lineamientos Curriculares proponen considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

En el presente trabajo, se acude a este documento para retomar los denominados conocimientos básicos, pues estos son lo que tienen relación con los procesos específicos que desarrolla el pensamiento matemático y los sistemas propios de las matemáticas; en este sentido los procesos específicos hacen referencia a los cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el aleatorio, el métrico y el variacional; en este último es donde los Lineamientos hacen referencia al aprendizaje de la noción de ecuación lineal. De allí que para este pensamiento, los Lineamientos Curriculares (1999, pág. 72) dicen:

> *Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica,*

presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificarla por medio de las cantidades y las magnitudes.

El pensamiento variacional ha contribuido al desarrollo de las diferentes áreas de desempeño de los ciudadanos, puesto que en la actualidad nadie pone en duda la aplicabilidad de la matemática y en especifico los sistemas algebraicos para resolver situaciones que se le presentan al individuo en el proceso de aprendizaje, las expresiones algebraicas se aplican por ejemplo para resolver situación problema en las se plantea la proporción entre ella afluencia de turismo a una determinada región y la capacidad hotelera instalada, por ejemplo, y que al ser planteada de manera matemática han permitido desarrollar la industria turística y hotelera en diferentes zonas del país.

Un estudio debe contener análisis cuantitativo y cualitativo, en el se utilizan ecuaciones matemáticas que aportan soluciones de situación problema. Los sistemas lineales de ecuaciones aportan resultados que son indicadores para mejorar la oferta de un determinado producto ofrecido en el mercado.

Lo anterior no es algo nuevo pues, la evolución histórica del estudio de la variación y la noción ecuación permite afirmar que la variación se inicia con las tablas babilónicas, las gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y las fórmulas algebraicas de origen renacentista, por su parte la ecuación se caracterizó por la invención gradual de símbolos, la resolución de ecuaciones y los aportes de los árabes e italianos durante la edad media y el renacimiento. Particularmente, el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la Edad Media (MEN, 1999, pág. 72; SAEM Thales, 2012).

Esta breve e incompleta presentación histórica de la variación y la noción de ecuación, hace necesario profundizar en los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto los requerimientos entre ellos. Un primer acercamiento en la búsqueda de tales interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- La función como dependencia y modelos de función;
- Las magnitudes;
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situación problema exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las ecuaciones, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional, la mecánica, las fórmulas y las expresiones analíticas.

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de la situación problema cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable, de las fórmulas y de las ecuaciones. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación.

Así mismo, la situación problema debe seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas. Tal como lo señala Demana (citada en MEN, 1999) la exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra. La tabla también se constituye en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. Además, el uso de variables en la tabla también ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio.

Las tablas son una representación que se puede usar para llevar a los estudiantes a generar una gráfica de la situación problema, aunque ésta quede restringida al primer cuadrante, además permite la identificación de las variables independiente y dependiente, lo cual es más significativo cuando se inicia desde la representación de una situación problema.

Al mismo tiempo es necesario para iniciar el estudio de la variación el estudio de los patrones, ya que éstos incluyen escenarios como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas, e inclusive los escenarios geométricos o numéricos, utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Cabe señalar que éstos escenarios permiten, hacer una descripción verbal de la relación existente entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación. Por ello los contextos de variación deben incluir patrones aditivos y multiplicativos.

Con lo anterior se pretende que el estudiante realice una gráfica cartesiana haciendo posible el estudio dinámico de la variación y la relación explícita entre las variables que determinan en la situación de variación aspectos como la dependencia entre variables y la identificación de nombres para los ejes coordenados.

Pensar pues, en los procesos algebraicos desde el pensamiento variacional hace referencia a la forma de ver las expresiones algebraicas (por ejemplo la ecuación lineal) desde las diversas situaciones problema que pueden ser expresadas de manera general, para ello se hacen necesarias las interrelaciones entre los lenguajes verbal, icónico, gráfico y simbólico. Como lo plantea el MEN:

> *…Desde un punto de vista tal, el álgebra deja de ser una fiel traducción de las reglas de la aritmética a través de letras, mejor aún, deja de ser una forma abstracta de representar la aritmética, para convertirse en una nueva forma de pensar la matemática: la expresión de la generalidad, de la generalización.* (1998, pág. 73)

En este sentido, el pensamiento algebraico, cobra valor en los distintos grados del ciclo escolar. Por ejemplo, frente a una situación relacionada con la búsqueda de un patrón, para la educación básica primaria, lo importante no es que los estudiantes tengan que hacer sacrificios extremos para obtener una regla a través de símbolos para el elemento n-ésimo. Lo fundamental es permitir al grupo de estudiantes la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero fundamentalmente, permitirles que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan.

Con seguridad que en un proceso como el anterior, los estudiantes en sus formas de expresar lo que comprenden pueden recurrir a formas verbales (lenguaje natural), gráficas, numéricas y algebraicas.

Cualquiera que sea el nivel, lleva implícito la observación, sistematización, y lo más importante, el reflejo de un trabajo, resultado de la exploración de significados. De esta manera ellos entran en un proceso de analizar, explorar, sistematizar, expresar lo que ven y, ésta es de por si, una práctica que tiene que ver con la generalidad.

2.4.2. La ecuación lineal según los Estándares Básicos de Competencia

El Ministerio de Educación Nacional en la política de aumentar la cobertura y los esfuerzos para el mejoramiento de la calidad de la educación define los Estándares Básicos de Competencias (2006) los cuales son propuestos en conjunto con la comunidad de educadores matemáticos. Los estándares profundizan aspectos de cada uno de los pensamientos propuestos en los Lineamientos Curriculares (1998). Especial atención merece la noción de competencia matemática en tanto que, como lo señala el documento, los Lineamientos Curriculares presentan intuitivamente la noción de competencia puesto que colocan el énfasis en una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático. La competencia es establecida en la relación entre dos facetas del conocimiento matemático: práctico y formal y el conocimiento conceptual y procedimental.

La complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con la coherencia tanto vertical como horizontal. La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Los Lineamientos se constituyen en un compendio teórico, en el que se encuentran las pautas generales que guían la enseñanza del país, pero no dan un referente de lo que se debe enseñar, es decir, las nociones matemáticas acordes al grado educativo en el que se encuentre el estudiante, especialmente en el grado noveno con la noción de ecuación lineal, la cual se relaciona con el pensamiento variacional. Así pues, se requería una intervención directa en cuanto a las nociones que deberían ser aprendidas en cada grado, lo que generó la necesidad de crear los Estándares Básicos de Competencias como una solución a dicha situación.

Existe una clara relación entre los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares y de los que se habla en los Estándares Básicos de Competencias, es precisamente por esto que se debe tener en cuenta lo que plantean los Estándares al respecto pues se describen uno por uno estos cinco tipos de pensamiento, mencionando simultáneamente los sistemas conceptuales y simbólicos con cuyo dominio se ejercita y refina el tipo de pensamiento respectivo, a la vez que ellos se desarrollan y perfeccionan con los avances en dichos tipos de pensamiento.

Por lo anterior es importante tener en cuenta lo que plantean los Estándares respecto al pensamiento que le compete a este trabajo: el pensamiento variacional (2006, págs. 66-70):

> *Como su nombre lo indica, el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en*

distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

El pensamiento variacional se puede movilizar desde con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico), los cuales permiten variadas relaciones entre las distintas formas de promover procesos de variación y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

El estudio del cambio también se puede iniciar a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a la institución durante una mañana) representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones. Por el análisis cuidadoso de esas representaciones se puede identificar la variación que ocurre y, en algunos casos, llegar a precisar la magnitud de los cambios y aun la tasa de cambio en relación con el tiempo.

El desarrollo del pensamiento variacional, dadas estas características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables.

Además, en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, también se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. Esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas – gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades, etc. – que permiten tratar con situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas. Los objetos algebraicos, como por ejemplo los términos algebraicos, se reconstruyen como representaciones de funciones y las ecuaciones e inecuaciones se reinterpretan como igualdades o desigualdades entre funciones. De aquí que las múltiples relaciones entre la producción de patrones de variación y el proceso de modelación –y particularmente el estudio de las nociones de variable y de función– sean las perspectivas más adecuadas para relacionar el pensamiento variacional con el cálculo algebraico en la Educación Básica Secundaria y con la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral en la Educación Media.

Pensar en los procesos algebraicos desde los contextos de variación y cambio hace referencia a la forma de ver las expresiones algebraicas desde las diversas situaciones que posibilitan expresar la generalización. Esto se puede lograr a través de las interrelaciones entre los lenguajes verbal, icónico, gráfico y simbólico; Por lo tanto, el punto de partida no es la sintaxis propia de las reglas del álgebra, sino que por el contrario ella es el punto de llegada. Desde un punto de vista tal, el álgebra deja de ser una fiel traducción de las reglas de la aritmética a través de letras, mejor aun, deja de ser una forma abstracta de representar la aritmética, para convertirse en una nueva forma de pensar la matemática: la expresión de la generalidad, de la generalización.

En este sentido, el pensamiento algebraico, cobra valor en los distintos grados del ciclo escolar. Por ejemplo, frente a una situación relacionada con la búsqueda de un patrón, para la educación básica primaria, lo importante no es que los estudiantes tengan que hacer sacrificios extremos para obtener una regla a través de símbolos para el elemento n-ésimo. Lo fundamental es permitir al grupo de estudiantes la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero fundamentalmente, permitirles que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan.

Con seguridad que en un proceso como el anterior, los estudiantes en sus formas de expresar lo que comprenden pueden recurrir a formas verbales (lenguaje natural), gráficas, numéricas y algebraicas. Cualquiera que sea el nivel, lleva implícito la observación, sistematización, y lo más importante, el reflejo de un trabajo, resultado de la exploración de significados. De esta manera ellos entran en un proceso de analizar, explorar, sistematizar, expresar lo que ven y, ésta es de por si, una práctica que tiene que ver con la generalidad.

Las palabras de John Mason (1992) y otros permiten ampliar la interpretación de los procesos algebraicos como el resultado de formas particulares de comunicar la generalidad desde un contexto dinámico:

> La expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque ésta les da significado a los símbolos que después *hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo. Prestar atención a las generalizaciones de otras personas es con frecuencia mucho menos interesante. Hacer nuestra propia álgebra es motivante*

porque es nuestra propia producción [….]. Hacer el álgebra de otros, es generalmente, aburrido. (1999, pág. 106)

Lo que Mason (1999) expresa hace referencia al importante papel que juega la participación de los estudiantes en los procesos de matematización que posibilitan expresar la generalidad, en la medida que pueden atribuir diferentes significados y pensar los procesos algebraicos desde los contextos de variación.

Entonces los procesos algebraicos en la escuela son un espacio rico en la actividad matemática que convoca a la búsqueda de significados y relaciones, a la reflexión, a la comunicación de las observaciones y a la organización de los aprendizajes; sólo así se estará incorporando formas de generalizar, desde el aporte de la vivencia personal.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, entonces, seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Por ello aparecen en cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él. Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, ojalá, ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados. La noción de ecuación lineal se encuentra ubicada en los Estándares en el conjunto de grados octavo-noveno en el pensamiento variacional, como se muestra a continuación:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de ecuaciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Con lo anterior los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias presentan la visión de cómo utilizar los conocimientos matemáticos. Comprender el conjunto de aprendizajes que se espera de los estudiantes en los periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática es el fin último de estos documentos.

Por último, en el transcurso de este capítulo se presentaron todos aquellos elementos de corte teórico, que contribuyen significativamente a los propósitos de este trabajo, pues permite comprender las concepciones circundantes en el campo de la educación matemática, referente a la noción de ecuación lineal, y lo que ello involucra: situación problema, enfoque de resolución de problemas , así como dificultades y obstáculos en el aprendizaje de dicha noción, para con todo ello entender la incorporación de las situación problema en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno.

CAPÍTULO III

3. LA SITUACIÓN PROBLEMA COMO ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN LINEAL

En este capítulo se adopta un método de análisis cualitativo de corte descriptivo-interpretativo de los desempeños de los estudiantes de grado noveno, lo que permite que en este trabajo se pueda describir cómo influye una situación problema al plantearse como una estrategia de aprendizaje. Para lograrlo se efectúa un análisis pregunta por pregunta de la situación problema, permitiendo con ello ofrecer descripciones interesantes sobre las realizaciones observables de los estudiantes, en un momento determinado de la aplicación de la situación problema, o en diferentes niveles de desarrollo de la misma, al resolver los ítems que se encuentran relacionados con la noción de ecuación lineal.

La descripción de las realizaciones de los estudiantes se articula mediante la identificación y categorización de clases de comportamientos y competencias en los que se presta especial atención a los procedimientos empleados, estrategias de solución, y dificultades que se desprenden de sus respuestas. En una fase posterior, esta descripción servirá para establecer niveles de dificultad asociados a las actividades que se deben realizar en la situación problema; para señalar tendencias cognitivas en la evolución de los comportamientos observados; para poner de manifiesto las limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático. Cabe decir que para lograr el objetivo de este trabajo, se requiere de la elaboración, aplicación de una situación problema y un análisis de ésta.

La situación problema es tomada del trabajo de grado realizado por Banalcázar Cortés (2012), titulado *Las ecuaciones de primer grado en la* *escuela: Dificultades y tratamiento*. Es importante aclarar que las situaciones presentadas por Banalcázar Cortés (2012) fueron adaptadas al nivel escolar en el cual se desarrolla esta propuesta, puesto que originalmente fueron diseñadas para grado octavo de la Educación Básica Secundaria y nuestro trabajo está enmarcado en grado noveno.

El análisis permitirá identificar las características comunes y patrones de comportamiento en el desempeño de los estudiantes. Además de agrupar las respuestas y facilitar una clasificación de la información en categorías descriptivas del comportamiento. Además este análisis se hace sometiendo la situación problema a los estudiantes de un grado noveno, en su ambiente natural. A continuación se realiza el análisis de las respuestas obtenidas en las hojas de trabajo del cuestionario de modo independiente. Una vez terminada la revisión se hace una puesta en común, en una sesión conjunta. Llegados a este punto, se empieza a analizar los resultados obtenidos y en tablas que permitan hacer inferencias y obtener conclusiones de la investigación.

3.1. SITUACIÓN PROBLEMA

3.1.1. Generalidades

La situación problema que se presenta en este capítulo retoma otra realizada por Benalcázar Cortés (2012, pág. 92), en ella se tienen en cuenta los Lineamientos y Estándares del MEN relacionados con el pensamiento variacional, en los aspectos de conocimientos básicos y procesos de pensamiento.

El contexto involucrado es el de las ventas, en este caso de los jugos Hitt, ya que los estudiantes lo asumen en su diario vivir como familiar,, lo cual facilita el abordaje de ciertas actividades y preguntas de la situación problema, dado que acude a conceptos propios del contexto como lo son: ganancia, pago, costos, ingresos y demás.

En consecuencia, los conocimientos y saberes que se movilizan aluden a variaciones lineales, ecuación lineal y sus representaciones las cuales son objeto de estudio por medio de las actividades, donde estas representaciones son de tipo tabular, numérico, lenguaje natural y lenguaje simbólico.

Durante cada actividad se generan una serie de interrogantes que están orientados a abordar algunos conceptos matemáticos que fundamentan la noción de ecuación lineal, por ejemplo: proporcionalidad directa, variable, equivalencia, incógnita, invariancia, expresiones algebraicas y sus respectivos cálculos, entre otros, de tal modo que conozcan la noción de ecuación lineal, a partir de las nociones previamente aprendidas.

La situación se plantea a partir de la venta de jugos Hitt en el supermercado "Merca Éxito", para el desarrollo de cada una de las actividades que ésta contiene, los estudiantes proponen procesos que permiten describir términos algebraicos, resolución de problemas y uso de conceptos y procedimientos relacionados con la noción de ecuación lineal.

Cada actividad la desarrollaremos en tres momentos.

En un primer momento el estudiante desarrolla de forma individual cada actividad, dándose la posibilidad de confrontar sus saberes, su competencia interpretativa y el nivel en que se encuentra su autonomía.

En un segundo momento el estudiante toma decisiones sobre las estrategias, argumentos y procedimientos más efectivos que empleo.

En un tercer momento el docente realiza una puesta en común donde se construye colectivamente los saberes involucrados en la situación problema, en este momento se moviliza el pensamiento variacional a través de los continuos cuestionamientos del docente.

Con lo anterior se habrá cumplido el propósito inicial, dado que el estudiante de grado noveno al realizar las actividades propuestas en la situación problema y al resolver cada uno de los interrogantes de dichas actividades, siendo éstos para él un desafío, logre de manera efectiva apropiarse de la noción de ecuación lineal a nivel tanto conceptual como procedimental.

3.1.2. Propósito General

- Caracterizar la apropiación y puesta en práctica del conocimiento matemático en los diferentes procesos de resolución de un problema que utilizan los estudiantes de grado noveno.

3.1.3. Propósitos Específicos

- Reconocer las variables que intervienen en una ecuación lineal.
- Significar y comprender, por parte de los estudiantes la noción de ecuación lineal a través de una situación problema relacionada con su contexto.
- Identificar los diferentes procesos utilizados por estudiantes de grado noveno durante la realización de una situación problema.

A continuación se presenta la situación problema que se reformuló para estudiantes de noveno.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MANUEL DOLORES MONDRAGÓN.

MATEMÁTICAS.

SITUACIÓN.

Nombre: ________________________________ Fecha: _____________

ACTIVIDAD 1.

En el supermercado “Merca éxito” se vende el jugo Hitt de diferentes cantidades de contenido. Tal como se muestra en la Tabla 3.

	Hitt por tarro en mililitros(ml)	Precio por tarro($)
1	225	1.000
2	450	2.000
3	900	4.000

Tabla 3.

1. ¿De qué depende el precio del jugo Hitt? Explica tu respuesta.
2. Si un jugo Hitt tiene $675\ ml$.¿Cuál es el precio?
3. ¿Cuál es la diferencia en ml? y ¿Cuál es la diferencia en precio?
4. Completa la Tabla 4 de acuerdo a los datos anteriores.

	1	2	3	4	5	6	7
Jugo en (ml)	225	450	675	900		3.600	3.825
Precio ($)	1.000	2.000		4.000	8.000		

Tabla 4.

   a. ¿Cómo varía la cantidad de mililitros entre 2 y el 6?
   b. ¿Cómo varía el precio entre el 4 y el 6?

5. Teniendo en cuenta los valores de la tabla 2 realice el cociente entre el precio y la cantidad de mililitros. ¿Qué observas? ¿Qué conclusión puedes sacar?

6. Suponiendo que haya un jugo que vale $\$16.000$ ¿Cuántos mililitros tiene? ¿Cómo encuentras la respuesta?
7. Escriba una expresión (ecuación) que permita calcular la cantidad de mililitros según el precio.
8. Si el jugo cuesta $\$5.000$ ¿Cuántos ml tiene?
9. ¿Cuál es el precio de $1\ ml$?
10. ¿Qué cantidad se debe considerar para que el precio sea $\$1$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MANUEL DOLORES MONDRAGÓN.

MATEMÁTICAS.

SITUACIÓN.

Nombre: ______________________________ Fecha: ______________

ACTIVIDAD 2.

A un vendedor de refrescos Hitt se le ha establecido que por el solo hecho de venderlos diariamente tendrá un estímulo $\$2.000$ y que por cada refresco que venda ganará $\$100$

1. ¿Cuánto ganará si vende 15 refrescos?
2. Si no vende jugos ¿Qué sueldo obtendrá?
3. Si al final del día al vendedor le dieron $\$2.000$¿Cuántos refrescos vendió?
4. Si al final del día el vendedor obtuvo $\$5.000$ ¿Cuántos refrescos vendió?
5. Plantea una expresión que permita calcular el ingreso del vendedor.
6. Si la ecuación $3.000 + 100x = 25.000$ permite calcular el número de jugos Hitt vendidos cuándo el vendedor recibe $\$25.000$ de ingreso.
    a) ¿Cuál es el valor del estímulo?
    b) ¿Cuál es el valor que gana por cada Hitt vendido?
    c) ¿Cómo anula el estímulo? (3.000) en la expresión.
    d) ¿Cómo deja el coeficiente de x en 1?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MANUEL DOLORES MONDRAGÓN.

MATEMÁTICAS.

SITUACIÓN.

Nombre: ________________________________ Fecha: ___________

ACTIVIDAD 3.

La siguiente tabla muestra la relación entre el número de jugos Hitt vendidos y el ingreso que tiene un vendedor cuando le dan un salario básico (fijo) de $\$2.500$ diarios y $\$200$ por cada jugo que venda.

Día	Venta por día	Salario básico (Estimulo)	Valor por cada jugo vendido	Valor por cada jugos vendidos	Ingreso diario
1	5	2.500	200	5 x 200	3.500
2	7	2.500	200	7 x 200	3.900
3	10	2.500			4.500
4		2.500	200		6.300
5	8			8 x 200	
6	12			12 x 200	4.900
7		2.500	200	15 x 200	

Tabla 5.

1. Complete la Tabla 5.
2. Indica cuáles son cantidades constantes (no varían) y cuáles las que varían (variables) ¿Por qué?
3. Escriba una expresión que permita calcular el salario del vendedor para cualquier cantidad de jugos Hitt vendidos (x)

4. ¿Qué valores puede tomar x en la expresión?
5. Escriba una situación que pueda describir la siguiente expresión (escribe un enunciado para cada caso).
   a. $Ingreso = 2.000x$
   b. $2.000x = 10.000$
   c. $3x + 200$
   d. $3x + 200 = 920$
   e. $\left(\frac{1}{2}\right)(x) = 32$
6. Identifique las cantidades constantes de las expresiones b, c y e.
7. Indique las cantidades variables de las expresiones a y c.

> En una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$ las cantidades a, b, c son constantes y la x es una incógnita.

8. De acuerdo a lo anterior indique los valores de a, b y c de las siguientes ecuaciones lineales.
   a. $3x + 2 = \frac{11}{3}$ $a =,\quad b = ,\quad c =$
   b. $9 = x + 5$ $a =,\quad b = ,\quad c =$
   c. $x + \frac{1}{2} = 10$ $a =,\quad b = ,\quad c =$
   d. $\frac{7}{3} = 2 + x$ $a =,\quad b = ,\quad c =$

3.1.4. Análisis a priori de la situación problema

El análisis de cada una de las actividades presentadas en la situación problema propuesta, inicia con una descripción general de cada actividad, en esta se explica el contexto en que se enmarca la situación, el propósito principal de la actividad, aspectos generales sobre esta y se especifica la cantidad de preguntas que hacen parte de la actividad.

Además se cualifican los aspectos que tienen que ver con el desempeño esperado, que todo joven debe saber hacer con lo aprendido en la situación problema.

Finalmente, se realiza un análisis de cada una de las preguntas planteadas en las actividades. Con el fin de predecir la solución que podrían plantear los estudiantes a cada actividad.

A continuación se presentan cada una de las actividades que hacen parte de la situación problema:

3.1.4.1. Actividad 1

Descripción general

La estructura de cada pregunta de esta actividad, está enfocada a reconocer la relación que se establece entre dos cantidades que varían y su dependencia a través de la comprensión de los factores que condicionan el proceso de variabilidad en los problemas propuestos, enmarcados en un contexto de venta; donde el propósito principal es identificar los diferentes procesos utilizados por estudiantes de grado noveno durante la realización de esta actividad, de manera que la atención se centró en la relación existente entre el precio de los jugos Hitt y la cantidad en mililitros de cada uno de éstos.

La actividad 1 consta de 10 preguntas cuyo enunciado hacen referencia a la venta jugos Hitt en el supermercado “Merca éxito”

Análisis de las preguntas planteadas en la actividad

En la actividad 1 el enunciado fija una serie de valores que corresponde al valor de cada jugo Hitt dependiendo de su capacidad en mililitros.

Estos valores no son arbitrarios, pues están ubicados de forma que sean congruentes a la realidad y que permitan familiarizar a los estudiantes que se enfrentan a esta actividad con una cotidianidad próxima a ellos, pues la resolución de problemas se inicia precisamente apropiándose y comprendiendo la situación problema que se presenta.

Preguntas 1, 2 y 3

La pregunta 1 se enuncia en lenguaje natural y busca que los estudiantes realicen conjeturas sobre lo que causa la dependencia del precio de cada jugo Hitt. Se espera que los estudiantes den un argumento contundente a partir de los datos contenidos en la tabla que se presenta en el enunciado de la actividad.

En las preguntas 2 y 3 se busca que los estudiantes establezcan la relación de dependencia entre el precio de cada jugo Hitt y su capacidad en mililitros. Se espera que los estudiantes respondan la pregunta 3 antes que la 2 puesto que en la pregunta 2 la información dada no hace parte de la tabla que se presenta en el enunciado de la actividad.

Además, en estas tres preguntas se tiene la intención de propiciar en los estudiantes la exploración de diferentes hipótesis, que conlleven a establecer la relación de dependencia entre el precio de cada jugo Hitt y su capacidad en mililitros.

Pregunta 4

El diseño de esta pregunta busca que el estudiante comprenda la variación que hay en cada un de los valores involucrados (cantidad de jugo y precio), de manera que permita hallar el factor de regularidad.

Preguntas 5, 6 y 7

En las preguntas 5, 6 y 7 se busca que los estudiantes lleguen a expresar la variación entre el precio del jugo y su cantidad en mililitros en una ecuación, por ello cada una de estas preguntas genera las condiciones para realizar una generalización algebraica del contexto en el cual esta inmersa esta actividad.

Preguntas 8, 9 y 10

En las preguntas 8, 9 y 10 se pretende que los estudiantes acudan a la expresión hallada en la pregunta 7 para constatar que dicha expresión planteada de manera general realmente es aplicable a cualquier precio del jugo para hallar su cantidad en mililitros o viceversa.

3.1.4.2. Actividad 2

Descripción general

La estructura de cada pregunta de esta actividad, está enfocada a reconocer que en una expresión algébrica hay términos que se mantiene fijos mientras que otros cambian; donde el propósito principal es reconocer las variables que intervienen en una ecuación lineal.

La actividad 2 consta de 6 preguntas cuyo enunciado hace referencia al ingreso de un vendedor de jugos Hitt.

Análisis de las preguntas planteadas en la actividad

En la actividad 2 el enunciado fija el estimulo que se le da al vendedor de jugos solo por venderlos y la ganancia que se adquiere por la venta de cada jugo Hitt.

Estos valores no son arbitrarios, pues están ubicados de forma que sean congruentes a la realidad y que permitan familiarizar a los estudiantes que se enfrentan a esta actividad con una cotidianidad próxima a ellos.

Además en esta actividad la ecuación lineal planteada es de la forma $ax + b = c$, mientras que en la primera actividad se planteaba una ecuación distinta.

Preguntas 1, 2, 3 y 4

Las preguntas 1 y 2 hacen que el estudiante realice hipótesis sobre lo que ocurre si se venden o no jugos Hitt ya que el enunciado plantea un estimulo y una ganancia por venderlos. Se espera entonces, que los estudiantes exploren diferentes hipótesis, que conlleven a establecer lo que ocurre con el ingreso del vendedor.

Pregunta 5

El diseño de esta pregunta busca que los estudiantes lleguen a expresar el ingreso del vendedor de acuerdo a la venta de jugos Hitt en una ecuación.

Pregunta 6

En la pregunta 6 se pretende que los estudiantes a partir de una ecuación lineal dada reconozcan los datos que no se modifican y que de manera intuitiva lleguen a plantear un método de solución para dicha ecuación.

3.1.4.3. Actividad 3

Descripción general

La estructura de cada pregunta de esta actividad, está enfocada a formalizar la noción de ecuación lineal; donde el propósito principal es significar y comprender, por parte de los estudiantes la noción de ecuación lineal a través de una situación problema relacionada con su contexto.

La actividad 3 consta de 8 preguntas cuyo enunciado hace referencia al ingreso de un vendedor de jugos Hitt.

Análisis de las preguntas planteadas en la actividad

En la actividad 3 el enunciado fija el salario básico del día que se le da al vendedor y la ganancia que se adquiere por la venta de cada jugo Hitt.

Preguntas 1, 2, 3 y 4

En las preguntas 1 y 2 se pretende que los estudiantes a partir de una tabla dada reconozcan los datos que no sufren cambio y cuales si lo hacen.

Las preguntas 3 y 4 buscan que el estudiante plantee una ecuación lineal con la información completa de la tabla.

Preguntas 5, 6 y 7

En el diseño de estas preguntas se pretende que los estudiantes a partir de cinco ecuaciones lineales dadas, puedan proponer un contexto para cada una de ellas, con lo anterior los estudiantes podrán comprender y significar la noción de ecuación lineal.

Pregunta 8

Con esta pregunta se busca que los estudiantes identifiquen las constantes de una ecuación lineal, las cuales son datos que proveen de un contexto y sentido a la ecuación lineal.

3.1.5. Dificultades esperadas basadas en la clasificación de Socas

Es importante incluir en este análisis *a priori* la clasificación de las dificultades que hace parte del marco teórico ya que ésta permitirá comprender las actitudes y aptitudes de los estudiantes frente a la situación problema.

Dicha clasificación esta compuesta por cinco categorías, dos asociadas a la disciplina Matemática, es decir, a la complejidad de los objetos y procesos de pensamiento inherentes a ésta, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados en el aprendizaje matemático, la cuarta está asociada al desempeño cognitivo de los estudiantes y la quinta está asociada a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas por parte de los estudiantes; de las anteriores en este primer análisis se tendrán en cuenta las dos que aluden a conceptos matemáticos; puesto que en las actividades de la situación problema hay preguntas que podrían evidenciar estas dificultades.

Por ejemplo en la actividad 1 la siguiente pregunta alude a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos:

7. *Escriba una expresión (ecuación) que permita calcular la cantidad de mililitros según el precio.*

En la actividad 2 la siguiente pregunta alude a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos:

5. *Plantea una expresión que permita calcular el ingreso del vendedor.*

En la actividad 3 las siguientes preguntas aluden a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:

3. *Escriba una expresión que permita calcular el salario del vendedor para cualquier cantidad de jugos Hitt vendidos* (x)

5. Escriba una situación que pueda describir la siguiente expresión (escribe un enunciado para cada caso).

a) $Ingreso = 2.000x$

b) $2.000x = 10.000$

c) $3x + 200$

d) $3x + 200 = 920$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)(x) = 32$

6. Identifique las cantidades constantes de las expresiones b, c y e.

7. Indique las cantidades variables de las expresiones a y c.

8. De acuerdo a lo anterior indique los valores de a, b y c de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $3x + 2 = \frac{11}{3}$ $a =,$ $b = ,$ $c =$

b) $9 = x + 5$ $a =,$ $b = ,$ $c =$

c) $x + \frac{1}{2} = 10$ $a =,$ $b = ,$ $c =$

d) $\frac{7}{3} = 2 + x$ $a =,$ $b = ,$ $c =$

Las otras tres categorías dan cuenta de los procesos de aprendizaje, coginicion y afectividad de los estudiantes que solo es posible considerar en el momento exacto en el que se desarrolla la situación problema, por tanto es ilogico tener expectativas respecto a la descripción de éstas categorias.

3.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SITUACIÓN PROBLEMA.

Situación: La ecuación lineal y los fenómenos de variación

Aplicada: A los estudiantes de grado 9-2

Número de estudiantes: 25

A continuación, se presenta el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes de grado noveno.

Adicionalmente, se relacionó la información proporcionada con la teoría de dificultades de Socas (1997) y la caracterización de los métodos de solución de ecuaciones lineales planteados por Kieran (1992); con ello se hace un análisis cuyo detalle contempla la descripción de las posibles dificultades que los estudiantes cometieron al resolver las actividades que se les fueron propuestas.

Este análisis presenta los resultados de las preguntas planteadas en cada actividad a partir de tablas que las tipifican con su respectiva frecuencia absoluta y relativa. Además se realiza una descripción de los resultados expuestos en éstas tablas y algunas ilustraciones en gráficos de las respuestas de los estudiantes.

3.2.1. Actividad 1

3.2.1.1. Descripción General de la aplicación de la actividad

Se dio inicio a la actividad 1 luego de repartir a cada estudiante un paquete de copias donde se encontraban las tres actividades y hacer lectura del contenido. La profesora hizo una introducción del enunciado inicial de la actividad, exponiendo la situación de la venta de jugos Hitt en un supermercado.

De forma individual cada estudiante comenzó a desarrollar la actividad y a realizar preguntas sobre contenido y procesos. La mayor parte de las preguntas estaban dirigidas a establecer la dependencia de dos variables: los mililitros y el precio.

Luego de que todos los estudiantes realizaran la actividad se realizó una puesta en común de éstas respuestas, durante la cual los estudiantes deliberaron con el docente cada una de sus respuestas.

Desde esta puesta en común se observa que a los estudiantes les causo muchas dudas la pregunta 3, ya que ésta menciona las cantidades más no el objeto al que pertenecen éstas cantidades, además se evidencia que hubieron tres vías para dar respuesta a aquellas preguntas cuya solución era hallada por medio de la operatividad numérica de los datos; dichas vías fueron: la regla de tres simple, las operaciones básicas y luego de hallar la expresión general la utilizaron también para dar solución.

Las preguntas en las que se debía dar una argumentación en esta actividad, los estudiantes no fueron tan expresivos en la parte escrita; pero a la hora de defender ese argumento frente a sus compañeros, muchos de ellos dieron un argumento más fuerte.

En el supermercado "Merca éxito" se vende el jugo Hitt de diferentes cantidades de contenido. Tal como se muestra en la Tabla 6.

	Hitt por tarro en mililitros	Precio por tarro($)
1	225	1.000
2	450	2.000
3	900	4.000

Tabla 6.

3.2.1.2. Pregunta 1

De qué depende el precio del jugo Hitt? Explica tu respuesta.

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que responden de manera corta y sin un argumento valido	4	16%
Tipo 2: Estudiantes que argumentan de manera valida y contundente.	21	84%

Tabla 7.Tipificación de la pregunta 1.Actividad 1

En la tabla 7 se observa que la mayoría de los estudiantes respondieron de manera acertada en la pregunta 1, pues el 84% de los estudiantes respondieron de manera correcta y argumentaron sus respuestas; aunque dicha argumentación no fue tan contundente como se esperaba ya que basaron dicha explicación en la tabla 1 de la actividad. Un ejemplo de ello es:

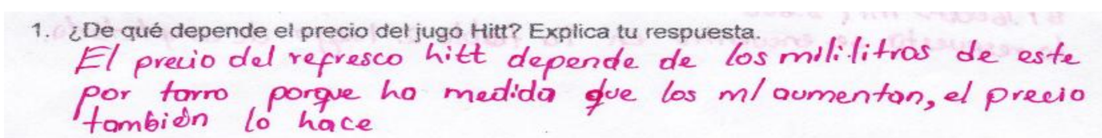

1. ¿De qué depende el precio del jugo Hitt? Explica tu respuesta.
El precio del refresco hitt depende de los mililitros de este por tarro porque ha medida que los ml aumentan, el precio tambien lo hace

Ilustración 3, Respuesta de la pregunta 1, actividad 1, tipo 1

El 16% restante respondieron de manera incorrecta ya que no tomaron en consideración el enunciado inicial del cual dependía la pregunta, pese a lo anterior, esta pregunta les permitió expresar sus ideas mediante la formulación de enunciados argumentativos.

Lo anterior indica que los estudiantes en esta primera pregunta tienen una idea de que existe una dependencia entre las cantidades planteadas, es decir, los mililitros y el precio, lo cual significa que ésta pregunta no tiene dificultad alguna para ser respondida. Además ésta permite que los estudiantes razonen a partir de la situación que se plantea al inicio, argumentando a partir de los recursos con los que éste cuenta, es decir, el dominio de conocimiento que éste posee en pos del concepto que emerge en esta pregunta que es el de dependencia.

3.2.1.3. Pregunta 2

Si un jugo Hitt tiene $675\ ml$.¿Cuál es el precio?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que realizaron operaciones básicas. $675 - 450 = 225$ $2000 + 1000 = 3000$ $2000 \div 450 = 4{,}4$ $4{,}4 * 675 = 2970 \cong 3000$	4	16%
Tipo 2: Estudiantes que aplicaron regla de tres simple para dar su respuesta $450ml \rightarrow \$2.000$ $675ml \rightarrow x$ $x = \frac{\$2000 * 675ml}{450ml} = \$3.000$	9	36%
Tipo 3: Estudiantes que respondieron de manera correcta sin efectuar operaciones	9	36%
Tipo 4: Estudiantes que no respondieron de manera correcta y no efectuaron operaciones	3	12%

Tabla 8.Tipificación de la pregunta 2.Actividad 1

En los resultados registrados en la tabla 8, se observa que el 88% de los estudiantes respondieron correctamente, este porcentaje se dividió en tres tipos de respuesta en las cuales predominó el empleo de la regla de tres, pues es el tema que están viendo en este momento, igualmente el hecho de responder efectuando las operaciones básicas sin escribirlas como parte de la respuesta, es decir, los estudiantes respondieron con tres estrategias cognoscitivas distintas, como lo muestra la ilustración 4:

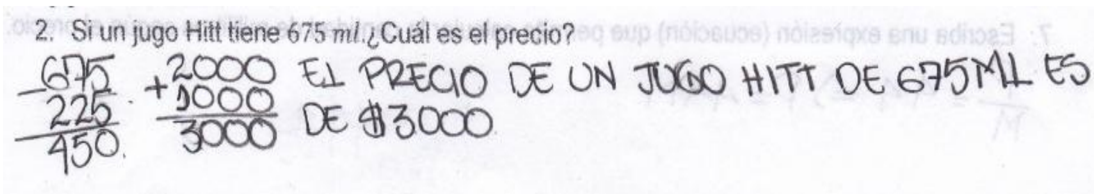


Ilustración 4. Respuesta de la pregunta 2, actividad 1, tipo 1

El 12% restante de los estudiantes, muestran alguna aproximación sobre cómo obtener el valor del jugo Hitt de 675 ml, sin embargo, desde la perspectiva didáctica tienen dificultades en identificar en forma precisa el patrón o valor constante que al adicionarse al siguiente hace que el precio del jugo cambie, a continuación se presentan los tres casos en que se tiene esta dificultad:

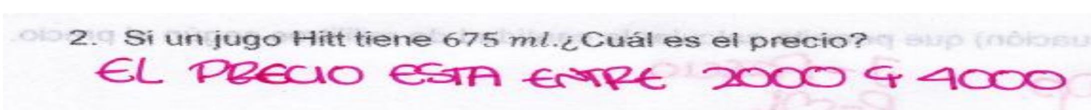


Ilustración 5. Respuesta pregunta 2, actividad 1, tipo 4

Esta respuesta no es clara ya que no expresa de manera específica el valor de un jugo Hitt de 675 ml, se muestra un aproximado o un estimativo.

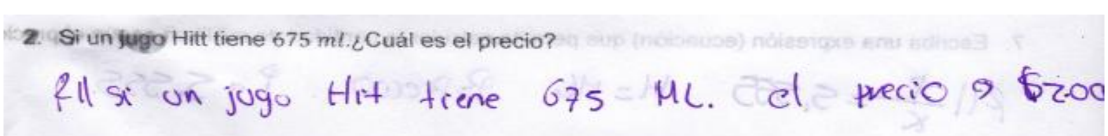


Ilustración 6. Respuesta pregunta 2, actividad 1, tipo 4

Esta respuesta por su parte, da un precio específico pero éste precio es poco probable ya que el valor del jugo Hitt de menor cantidad de mililitros (225) es 1.000, por tanto $200 no el valor correcto del jugo Hitt de 675 ml.

Ilustración 7. Respuesta de la pregunta 2, actividad 1, tipo 4

En esta respuesta, como se observa el valor dado al jugo Hitt es de $2.500, pero en la tabla 6 se aprecia que la diferencia entre dos cantidades de mililitros de jugo Hitt en precio es de $1.000 y no de $500.

3.2.1.4. Pregunta 3

¿Cuál es la diferencia en ml? y ¿Cuál es la diferencia en precio?

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que realizaron operaciones básicas. $450 - 225 = 225$ $2000 - 1000 = 1000$	17	68%
Tipo 2: Estudiantes que respondieron de manera correcta sin efectuar operaciones	4	16%
Tipo 3: Estudiantes que no respondieron de manera correcta y no efectuaron operaciones	3	12%
Tipo 4: Estudiantes que no respondieron de manera correcta e hicieron operaciones	1	4%

Tabla 9.Tipificación de la pregunta 3.Actividad 1

En la pregunta 3 los estudiantes encontraron mayor dificultad, pues a pesar de que el 84% de los estudiantes respondieron correctamente, la pregunta fue confusa para ellos; ya que en ésta no se especificaban los valores correspondientes a los mililitros y al precio, lo cual los llevo a ser inquisitivos frente al docente.

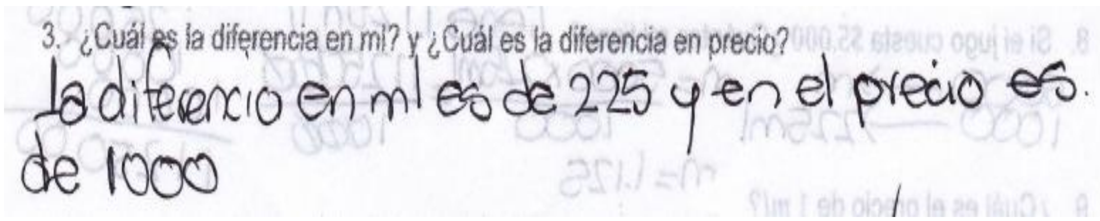


Ilustración 8. Respuesta de la pregunta 3, actividad 1, tipo 2

Un 26% de los estudiantes respondieron incorrecta; lo anterior se debió a una lectura inadecuada de la tabla ya que por medio de ésta los estudiantes debían establecer el patrón que permite la variación tanto de la cantidad de mililitros como el precio del jugo Hitt. Con lo anterior se puede decir que algunos de los estudiantes carecen de una buena interpretación de tablas y que tampoco son capaces de discriminar la información necesaria de la tabla para dar solución al interrogante propuesto.

En conclusión, los estudiantes entendieron lo que se proponía realizar en cada una de estas primeras preguntas, además por los resultados se puede decir que acuden a los conocimientos que les han enseñado en años anteriores o incluso a los que se le están enseñando en al momento de la aplicación de esta situación y que pese a estar en grado noveno sus argumentos aún no son sólidos. Estas tres preguntas iniciales de la actividad 1 permiten iniciar el proceso de construcción de la noción de ecuación lineal a partir de un contexto próximo a los estudiantes como lo es la venta de refrescos Hitt; además ponen de manifiesto el dominio del conocimiento con los que cuenta el estudiante para dar solución a las preguntas que preceden.

3.2.1.5. Pregunta 4

Complete la Tabla 10 de acuerdo a los datos anteriores.

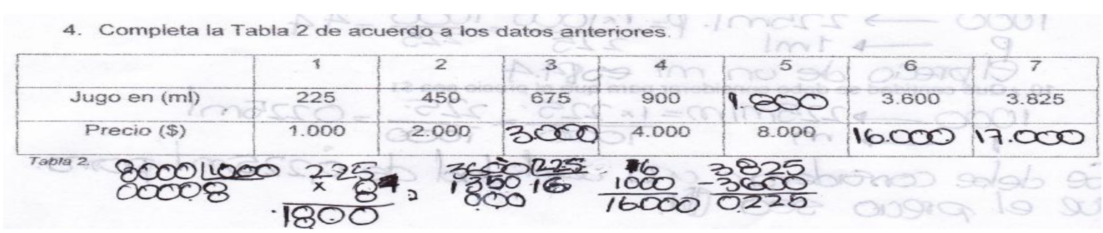
	1	2	3	4	5	6	7
Jugo en (ml)	225	450	675	900		3.600	3.825
Precio ($)	1.000	2.000		4.000	8.000		

Tabla 10.Encontrando cantidades por el uso de la proporcionalidad.

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que completaron la tabla realizando operaciones básicas	4	16%
Tipo 2: Estudiantes que completaron la tabla sin efectuar operaciones	18	72%
Tipo 3: Estudiantes que completaron la tabla con datos incorrectos sin efectuar operaciones	3	12%

Tabla 11.Tipificación de la pregunta 4. Actividad 1

En los resultados registrados en la tabla 11 se observa que el 88% de los estudiantes completaron acertadamente la tabla; de dicho porcentaje es importante destacar que el 72% de los estudiantes realizaron un cálculo mental, es decir, no vieron la necesidad de hacer operaciones para completarla.



4. Completa la Tabla 2 de acuerdo a los datos anteriores.

	1	2	3	4	5	6	7
Jugo en (ml)	225	450	675	900	1.800	3.600	3.825
Precio ($)	1.000	2.000	3000	4.000	8.000	16.000	17.000

Tabla 2.

Ilustración 9. Respuesta de la pregunta 4, actividad 1, tipo 1

a. ¿Cómo varía la cantidad de mililitros entre 2 y el 6?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que los mililitros varían de manera desigual y expresan numéricamente la variación	13	52%
Tipo2: Estudiantes que responden que los mililitros varían de manera desigual	1	4%
Tipo 3: Estudiantes que responden que la variación se expresa en el doble de mililitros $450\ es\ el\ doble\ de\ 225$ $900\ es\ el\ doble\ de\ 450$ $1800\ es\ el\ doble\ de\ 900$ $3600\ es\ el\ doble\ de\ 1800$	4	16%
Tipo 4: Estudiantes que responden incorrectamente	7	28%
Tipo 5: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 12.Tipificación de la pregunta 4 literal a. Actividad 1

Se observa en la tabla 12 que en el literal "a" el 72% de los estudiantes respondieron correctamente; la mayoría de éste, es decir el 52%, optaron por expresar la variación en los números 225 y 450, diciendo además que ésta era desigual. El 20% restante expresó la variación como una multiplicación de la cantidad de mililitros por 2 o simplemente dijo que variaba de forma desigual. Por ejemplo:

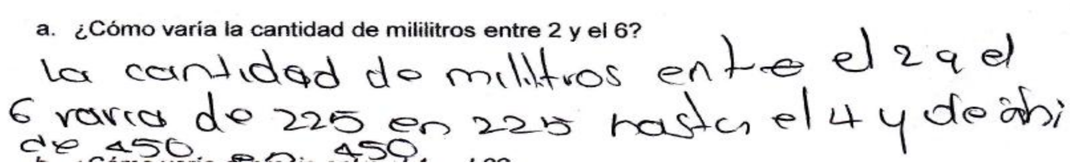


Ilustración 10. Respuesta de la pregunta 4, literal a, actividad 1, tipo 1

Con respecto al 32% adicional, los estudiantes plantearon una respuesta que pareciera correcta, el error radicó en que se equivocaban en el valor que permitía que la cantidad de mililitros variara, un ejemplo de ello es:

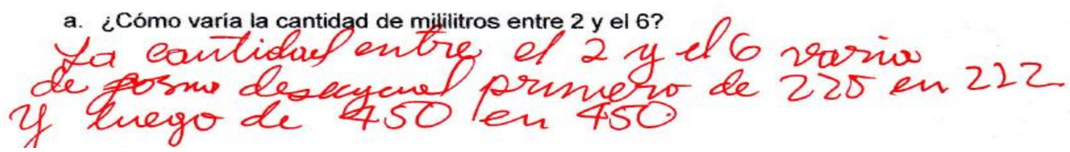


Ilustración 11. Respuesta pregunta 4, literal a, actividad 1, tipo 3

b. ¿Cómo varía el precio entre el 4 y el 6?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que el precio varía de $4.000 en $4.000	13	52%
Tipo2: Estudiantes que responden que el precio varia en $4.000	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que responden que la variación es el doble	5	20%
Tipo 4: Estudiantes que responden que el precio varía en un valor distinto a $4.000	3	12%
Tipo 5: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 13.Tipificación de la pregunta 4 literal b. Actividad 1

En el literal "b" el 84% de los estudiantes dieron una respuesta acertada predominando el argumento de que la variación es de $4.000 en $4.000, pues este tiene un 52%. El otro 32% respondieron simplemente que variaba en $4.000 o en el doble, lo cual es válido y cierto.

Ilustración 12. Respuesta de la pregunta 4, literal b, actividad 1, tipo 1

Por otro lado el 16% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta al plantear otros valores distintos de 4.000 en su respuesta; este porcentaje aunque pequeño es importante porque hace ver que se dificulta para algunos estudiantes crear conjeturas o hipótesis a partir de los datos de una tabla.

En conclusión, los estudiantes entendieron lo que se proponía realizar en esta pregunta, además por los resultados se puede decir que comprenden el significado de la variación como el cambio que hay en una cantidad de un valor al otro.

3.2.1.6. Pregunta 5

Teniendo en cuenta los valores de la tabla 10 realice el cociente entre el precio y la cantidad de mililitros. ¿Qué observas? ¿Qué conclusión puedes sacar?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que realizan el cociente correctamente y argumentan de manera valida y contundente. $1000 \div 225 = 4.4$	18	72%

$2000 \div 450 = 4.4$		
Tipo 2: Estudiantes que realizan el cociente correctamente y no argumentan. $1000 \div 225 = 4.4$ $2000 \div 450 = 4.4$	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que realizan el cociente pero de forma incorrecta y argumentan	2	8%
Tipo 4: Estudiantes que realizan el cociente pero de forma incorrecta y no argumentan	2	8%

Tabla 14.Tipificación de las preguntas 5. Actividad 1

En la tabla 14 se observa que la mayoría de los estudiantes respondieron de manera acertada, puesto que en la pregunta 5 el 84% de los estudiantes respondieron de manera correcta y argumentaron sus respuestas; aunque dicha argumentación no fue tan contundente como se esperaba ya que basaron dicha explicación en la realización de solo dos cocientes faltándoles 5 cocientes más para realizar una generalización.

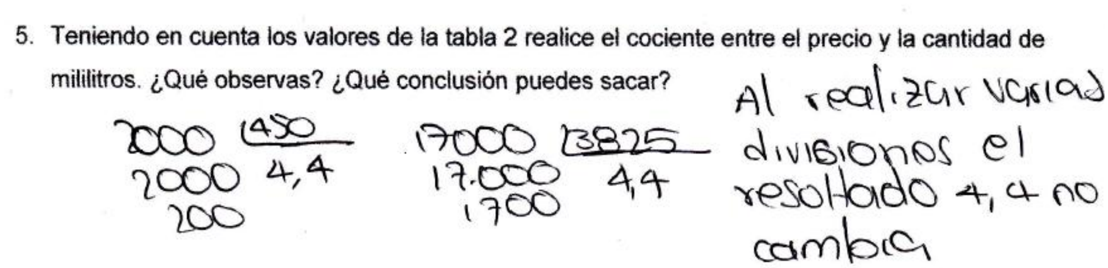


Ilustración 13. Respuesta de la pregunta 5, actividad 1, tipo 1

El 16% restante respondieron de manera incorrecta ya que hicieron el cociente pero de forma imprecisa. Como se puede observar en la ilustración 13:

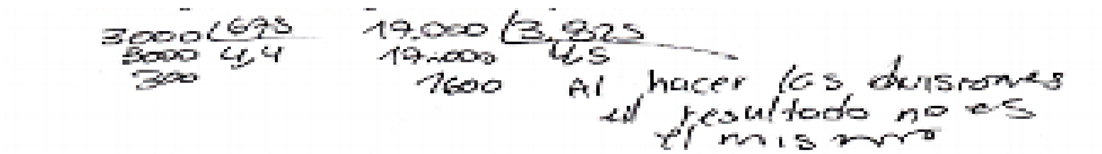


Ilustración 14. Respuesta de la pregunta 5, actividad 1, tipo 3

3.2.1.7. Pregunta 6

Suponiendo que haya un jugo que vale $\$16.000$ ¿Cómo encuentras la respuesta? ¿Cuántos mililitros tiene?

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que realizaron operaciones básicas. $16.000 \div 1.000 = 16$ $16 * 225 = 3600$	9	36%
Tipo 2: Estudiantes que aplicaron regla de tres simple para dar su respuesta $225ml \to \$1.000$ $x \to \$16.000$ $x = \frac{\$16.00 * 225ml}{\$1.000} = 3600$	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que respondieron basados en tabla de la pregunta 4	10	40%
Tipo 4: Estudiantes que respondieron de manera incorrecta	3	12%

Tabla 15. Tipificación de la pregunta 6. Actividad 1

En la pregunta 6 el 88% de los estudiantes respondieron correctamente, este porcentaje se dividió en tres tipos de respuesta en las cuales predominó el hecho de devolverse a la tabla anterior ya que en ésta estaba la respuesta, los otros fueron el uso de regla de tres y de las operaciones básicas como estrategia para hallar la solución. La mayoría de los estudiantes acuden a procesos propios de la matemática para calcular la cantidad mililitros según precio para lograron aplicaron el algoritmo de la división y obtuvieron como resultado 4.4

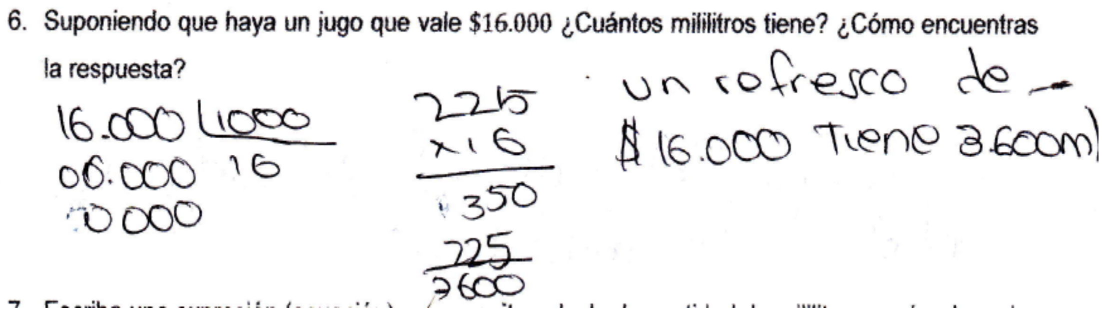


Ilustración 15. Respuesta de la pregunta 6, actividad 1, tipo 1

El 12% restante respondió de manera incorrecta ya que realizaron las operaciones que no eran las mas apropiadas para dar respuesta y ello resulto en un respuesta equivoca por parte de los estudiantes.

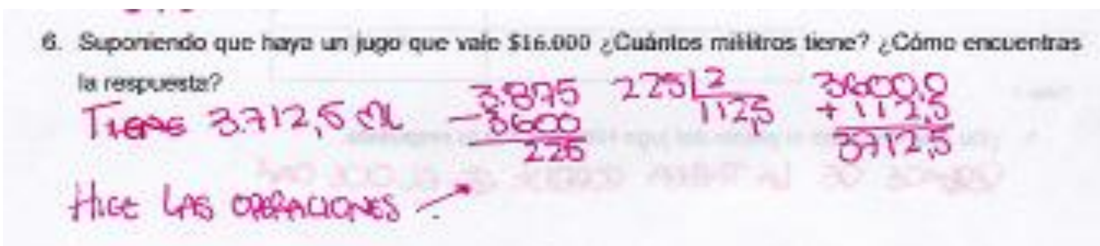


Ilustración 16. Respuesta de la pregunta 6, actividad 1, tipo 4

3.2.1.8. Pregunta 7

Escriba una expresión (ecuación) que permita calcular la cantidad de mililitros según el precio.

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que realizaron la	20	80%

expresión como resultado del cociente. $1.000 \div 225 = 4.4$ $p \div ml = 4.4$ $\frac{p}{m} = 4.4$ $p = 4.4m$		
Tipo 2: Estudiantes que realizaron la expresión como resultado de un mal cociente.	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que realizan la expresión pero con la operación suma	1	4%
Tipo 4: Estudiantes que realizan la expresión de manera incompleta	1	4%

Tabla 16.Tipificación de la pregunta 7. Actividad 1

En la pregunta 7 el 80% de los estudiantes respondieron correctamente al plantear una ecuación de la forma $y = mx$, en su mayoría estos estudiantes se guiaron por el método formal, es decir, hicieron una transposición de términos.

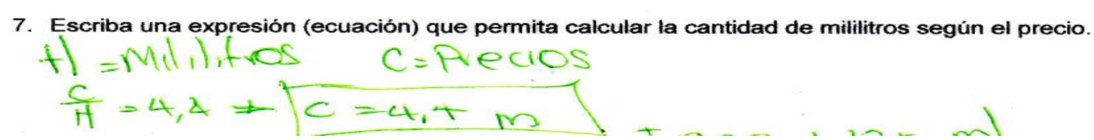


Ilustración 17. Respuesta de la pregunta 7, actividad 1, tipo 1

El 20% restante pese a que obtuvieron una respuesta basada en el método formal, ésta debía basarse en la respuesta obtenida en la quinta pregunta ya que es a partir de ese cociente y de la generalización o conclusión en palabras que se obtiene la base para llegar a la expresión pedida en esta pregunta, un ejemplo claro esta en la ilustración 17:

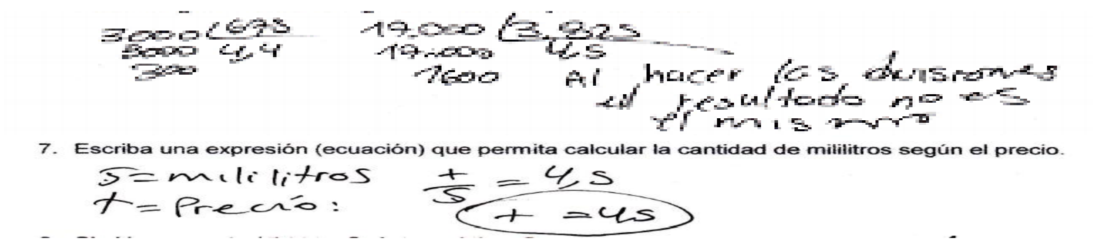


Ilustración 18. Respuesta de la pregunta 7, actividad 1, tipo 2

En conclusión, los estudiantes entendieron lo que se proponía realizar en cada una de estas preguntas, además por los resultados se puede decir que acuden a los conocimientos que les han enseñado en años anteriores y que pese a estar en grado noveno sus argumentos aún no son sólidos.

3.2.1.9. Pregunta 8

Si el jugo cuesta $5.000 ¿Cuántos ml tiene?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden correctamente con la expresión. $p = 4.4m$ $5000 = 4.4m$ $\frac{5000}{4.4} = m$ $1.125 = m$	10	40%
Tipo 2: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas $5000 \div 1.000 = 5$ $225 * 5 = 1.125$	8	32%

Tipo 3: Estudiantes que aplicaron regla de tres simple para dar su respuesta $225ml \rightarrow \$1.000$ $x \rightarrow \$5.000$ $x = \frac{\$5.000 * 225ml}{\$1.000} = 1.125$	3	12%
Tipo 4: Estudiantes que responden incorrectamente con la expresión. $p = 4.4m$	2	8%
Tipo 5: Estudiantes que responden mal pero efectúan las operaciones básicas	2	8%

Tabla 17.Tipificación de la pregunta 8. Actividad 1

En la tabla 17 se observa que el 84% de los estudiantes respondieron de manera acertada la pregunta 8, de ese 84%, el 40% de los estudiantes utilizaron la expresión que resultó en la pregunta 7; mientras que el 44% restante optó por realizar operaciones básicas o regla de tres.

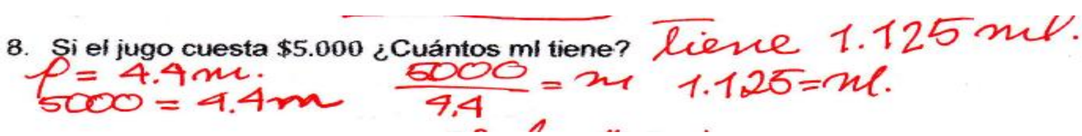


Ilustración 19. Respuesta de la pregunta 8, actividad 1, tipo 1

El 16% restante respondieron incorrectamente debido a que su operatividad es incorrecta, es decir, no efectúan bien las operaciones básicas.

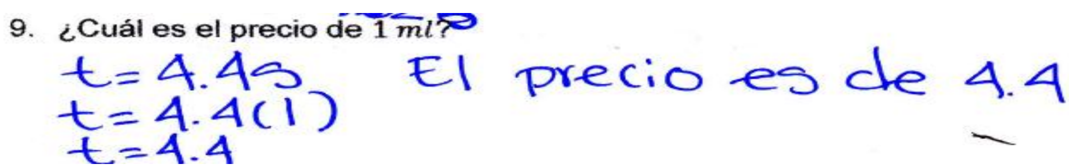
3.2.1.10. Pregunta 9

¿Cuál es el precio de $1\ ml$?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden correctamente con la expresión. $p = 4.4m$ $p = 4.4(1)$ $p = 4.4$	17	68%
Tipo 2: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas $1.000 \div 4.4 = 225$	1	4%
Tipo 3: Estudiantes que aplicaron regla de tres simple para dar su respuesta $225ml \rightarrow \$1.000$ $1ml \rightarrow x$ $x = \frac{\$1.000 * 1ml}{225ml} = \$4.4$	1	4%
Tipo 4: Estudiantes que responden sin efectuar operaciones.	2	8%
Tipo 5: Estudiantes que no responden	1	4%
Tipo 6: Estudiantes que responden incorrectamente con la expresión. $p = 4.4m$	3	12%

Tabla 18. Tipificación de la pregunta 9. Actividad 1

En la pregunta 9 el 84% de los estudiantes respondieron correctamente, este porcentaje se dividió en cuatro tipos de respuesta en tres de los cuales se llegó a la respuesta por medio de la expresión o utilizando operaciones básicas o regla de tres y en el otro tipo no se hicieron operaciones sólo se encontraba la respuesta, pero no la forma cómo se llego a ésta. Al preguntarles a éstos últimos como habían obtenido la respuesta expresaron que habían realizado mentalmente el cambio de la incógnita por el valor (1) y que les había dado esa respuesta.


9. ¿Cuál es el precio de 1 ml?

$t = 4.4s$ El precio es de 4.4

$t = 4.4(1)$

$t = 4.4$

Ilustración 20. Respuesta de la pregunta 9, actividad 1, tipo 1

El 16% de los estudiantes respondieron incorrectamente o no respondieron, lo cual evidencia que los estudiantes que no aciertan son muy pocos.

3.2.1.11. Pregunta 10

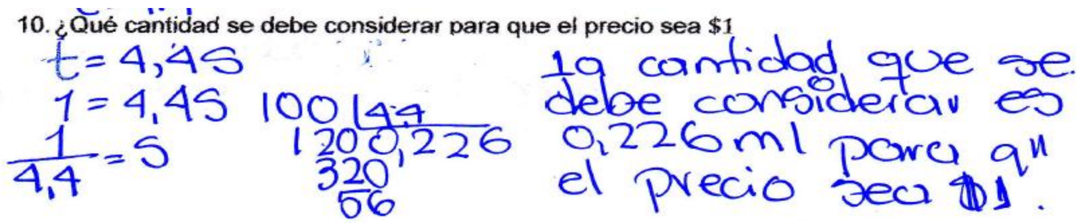
¿Qué cantidad se debe considerar para que el precio sea $1

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden correctamente con la expresión. $p = 4.4m$ $1 = 4.4m$ $\frac{1}{4.4} = m$ $0.226 = m$	12	48%

Tipo 2: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas $225 \div 1000 = 0.225$	1	4%
Tipo 3: Estudiantes que aplicaron regla de tres simple para dar su respuesta $225ml \rightarrow \$1.000$ $x \rightarrow \$1$ $x = \frac{\$1 * 225ml}{\$1.000} = 0.226$	4	16%
Tipo 4: Estudiantes que responden correctamente con la expresión y efectúan operaciones. $p = 4.4m$ $1 = 4.4m$ $\frac{1}{4.4} = m$ $0.226 = m$ $225 \div 1000 = 0.225$	4	16%
Tipo 5: Estudiantes que no responden correctamente	2	8%
Tipo 6: Estudiantes que responden incorrectamente con la expresión. $p = 4.4m$	2	8%

Tabla 19.Tipificación de la pregunta 10. Actividad 1

En la pregunta 10 el 84% de los estudiantes respondieron correctamente, este porcentaje se dividió en cinco tipos de respuesta en cuatro de los cuales se llegó a la respuesta por medio de la expresión o utilizando operaciones básicas o regla de tres o la combinación de las anteriores.


10. ¿Qué cantidad se debe considerar para que el precio sea $1

t = 4,45
1 = 4,45
$\frac{1}{4,4} = 5$
100 | 4,4
120 0,226
320
56

la cantidad que se debe considerar es 0,226 ml para q" el precio sea $1.

Ilustración 21. Respuesta de la pregunta 10,actividad 1, tipo 4

En conclusión, los estudiantes entendieron lo que se proponía realizar en cada una de estas preguntas, además por los resultados se puede decir que acuden a los conocimientos que les han enseñado en años anteriores y a los que en el momento de la aplicación están comprendiendo.

Finalmente con esta actividad los estudiantes no presentaron mayor dificultad para darle respuesta; el contexto en cual se encontraba ésta les fue familiar inclusive los estudiantes hablaban respecto a ello y contaban anécdotas o asemejaban a la tienda del colegio la cantidad; por ejemplo muchos dijeron que la primer cantidad de la tabla era como “un vaso de gaseosa que compraban en la tienda por $500”. Además esta actividad permitía comprender la noción de ecuación lineal de la forma $y = mx$

3.2.2. Actividad 2

3.2.2.1. Descripción General de la aplicación de la actividad

La actividad 2 se inició luego de repartir a cada estudiante un paquete de copias donde se encontraban las tres actividades y hacer lectura del contenido. La profesora hizo una introducción del enunciado inicial de la actividad, exponiendo la situación de la venta de jugos Hitt en un supermercado.

De forma individual cada estudiante comenzó a desarrollar la actividad y a realizar preguntas sobre contenido y procesos. La mayor parte de las preguntas estaban dirigidas a establecer los términos que componen una ecuación lineal.

Luego de realizar la actividad se hizo una puesta en común de las respuestas de los estudiantes, durante la cual ellos deliberaron con el docente cada una de sus respuestas.

Desde esta puesta en común los estudiantes plantean que las preguntas son de fácil entendimiento, razón por la cual no se acercaron al docente para despejar sus dudas, se evidenció que los estudiantes ya tienen una noción con respecto a resolver una ecuación y es la de transponer los términos o como dicen ellos: “se pasan las términos al otro lado con lo contrario”

A un vendedor de refrescos Hitt se le ha establecido que por el solo hecho de venderlos diariamente tendrá un estímulo $\$2.000$ *y que por cada refresco que venda ganará* $\$100$.

3.2.2.2. Pregunta 1

¿Cuánto ganará si vende 15 refrescos?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas $100 * 15 = 1.500$ $1.500 + 2.000 = 3.500$	18	72%
Tipo 2: Estudiantes que responden lo mismo que en otra pregunta	1	4%

Tipo 3: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas pero de forma incorrecta.	6	24%

Tabla 20. Tipificación de la pregunta 1. Actividad 2

Con la tabla 20 se puede decir que el 72% de los estudiantes respondieron de manera acertada la pregunta 1, realizando una multiplicación y una suma; en esta pregunta también se observa que el 24% de los estudiantes realizaron operaciones básica pero de forma errónea, es decir, en vez de multiplicar cien con quince los sumaron y la respuesta la multiplicaron con dos mil. Esto ocurre por una malinterpretación del enunciado inicial donde se plantea que el incentivo o estímulo es de $2.000 y que por cada refresco vendido se obtiene $100.

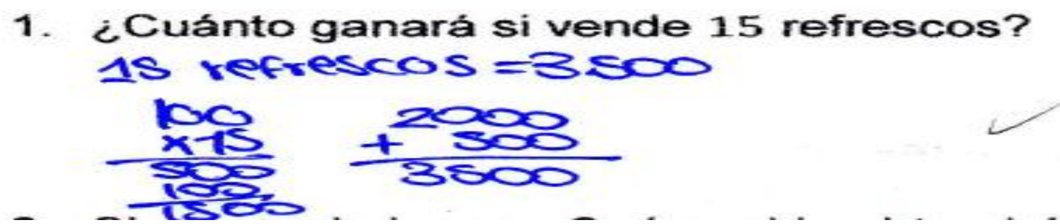


Ilustración 22. Respuesta de la pregunta 1, actividad 2, tipo 1

3.2.2.3. Pregunta 2

Si no vende jugos ¿Qué sueldo obtendrá?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que no se obtiene sueldo	21	84%
Tipo 2: Estudiantes que responden que obtiene un sueldo de $100	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que responden	1	4%

que obtiene un sueldo de $2.000		

Tabla 21. Tipificación de la pregunta 2. Actividad 2

En la pregunta 2 el 84% de los estudiantes respondieron que no se obtiene sueldo, lo anterior corresponde a la interpretación que los estudiantes le dieron a la frase “no vende jugos” ya que para ellos si no se vende en vez de ganar pierde; además en la actividad anterior se planteo que el vendedor recibe dinero si vende al menos un refresco y a pesar que este, no se condicionó igual esta condición influyó en las respuestas.

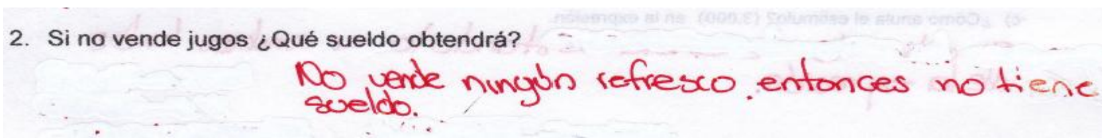

2. Si no vende jugos ¿Qué sueldo obtendrá?
No vende ningún refresco entonces no tiene sueldo.

Ilustración 23. Respuesta de la pregunta 2, actividad2, tipo 1

El 12% de los estudiantes respondieron que si obtenía un salario pero su respuesta tampoco fue la esperada ya que ese salario al que hicieron referencia fue al valor por vender un refresco Hitt ($100); tan sólo el 4% de los estudiantes respondió que el vendedor obtendría $2.000 así no vendiera jugos ya que este incentivo es un valor constante y por lo tanto es lo que recibe el vendedor pese a no vender jugos.

3.2.2.4. Pregunta 3

Si al final del día al vendedor le dieron $\$2.000$¿Cuántos refrescos vendió?

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que responden que no es posible que se vendan refrescos	21	84%
Tipo 2: Estudiantes que responden	4	16%

que vende algún refresco		

Tabla 22. Tipificación de la pregunta 3. Actividad 2

En la pregunta 3 el 84% de los estudiantes respondieron que no vende ningún jugo porque vender uno representa un valor de $2.100 y la pregunta se refiere a un valor de $2.000, lo cual es totalmente cierto, esta pregunta es otra forma de hacer la pregunta anterior.

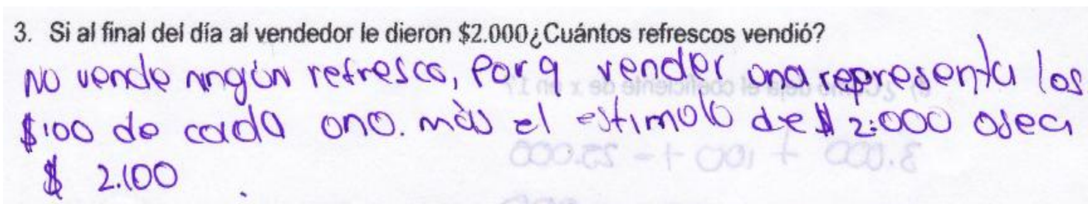


Ilustración 24. Respuesta de la pregunta 3, actividad 2, tipo 1

Sin embargo el 16% que dice que vende algún refresco tiene en cuenta el hecho de que así venda o no refrescos el vendedor obtendrá $2.000 de ganancia.

Ilustración 25. Respuesta de la pregunta 3, actividad 2, tipo 2

3.2.2.5. Pregunta 4

Si al final del día el vendedor obtuvo $\$5.000$ ¿Cuántos refrescos vendió?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas $5.000 - 2.000 = 3.000$	22	88%

$3.000 \div 100 = 30$		
Tipo 2: Estudiantes que responden efectuando las operaciones básicas con datos incorrectos	2	8%
Tipo 3: Estudiantes que responden incorrectamente y no efectúan operaciones	1	4%

Tabla 23. Tipificación de la pregunta 4. Actividad 2

En la pregunta 4 el 88% de los estudiantes respondieron realizando operaciones básicas para hallar el número de refrescos y lo hicieron de manera acertada.

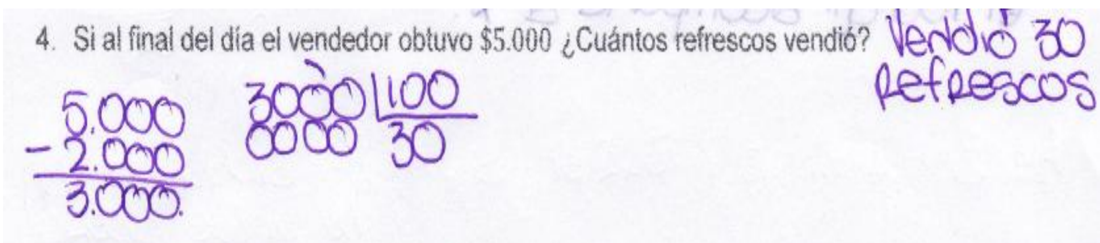


Ilustración 26. Respuesta de la pregunta 4, actividad 2, tipo 1

El porcentaje restante respondieron de manera incorrecta ya que sus respuestas fueron:

- Vendió 2 refrescos y medio, lo cual no representa los $5.000
- Vendió 50 refrescos, lo cual no representa los $5.000, aunque en este caso se hicieron operaciones de suma y división
- Vendió 40 refrescos, lo cual no es representa los $5.000, aunque en este caso se hicieron operaciones de suma y división

En conclusión, los estudiantes tuvieron dificultad con lo que se proponía en las preguntas 2 y 3 lo cual se asocia a la complejidad de los objetos matemáticos ya que la ayuda que la lengua común le presta a la interpretación de los valores dados en cada pregunta.

3.2.2.6. Pregunta 5

Plantea una expresión que permita calcular el ingreso del vendedor.

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que plantearon la expresión correctamente. $ingreso = 2.000 + 100x$	22	88%
Tipo 2: Estudiantes que plantearon la expresión mal. $2.000 = ingreso + 100x$	2	8%
Tipo 3: Estudiantes que al plantear la expresión ubicaron mal la incógnita. $ingreso = 2.000x + 100$	1	4%

Tabla 24.Tipificación de la pregunta 5. Actividad 2

En la tabla 24, se observa que el 100% de los estudiantes respondieron correctamente al plantear una ecuación de la forma $y = mx + b$.

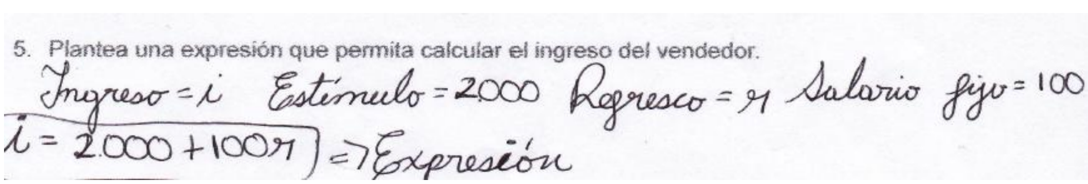


Ilustración 27.Respuesta de la pregunta 5, actividad 2, tipo 1

Sólo que de ese 100%, el 12% ubicaron de manera errónea la variable o plantearon la expresión con un valor que no se encontraba inicialmente en el enunciado. Lo cual evidencia una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos ya que la ayuda que la lengua común le presta a la interpretación de los valores dados en cada pregunta.

3.2.2.7. *Pregunta 6*

Si la ecuación $3.000 + 100x = 25.000$ permite calcular el número de Hitt vendidos cuándo el vendedor recibe $\$25.000$ de ingreso.

a) ¿Cuál es el valor del incentivo?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que copian la expresión y luego responden que el incentivo es $3.000	20	80%
Tipo 2: Estudiantes que responden que el incentivo es distinto a $3.000	4	16%
Tipo 3: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 25. Tipificación de la pregunta 6, literal a. Actividad 2

Con la tabla 25 se puede decir que el 80% de los estudiantes respondieron de manera acertada el literal a de esta pregunta al expresar que $3.000 es el incentivo, esto se debe a que en la pregunta anterior se planteó una expresión donde el estímulo se presenta como aquel valor que no esta acompañado de la variable y está ubicado después del igual.

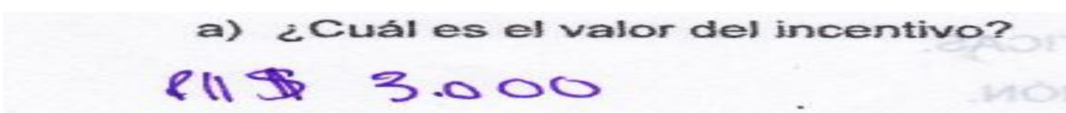


Ilustración 28.Respuesta de la pregunta 6, literal a, actividad 2, tipo 1

b) ¿Cuál es el valor que gana por cada Hitt vendido?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que el valor que se gana por cada refresco es $ 100	21	84%

Tipo 2: Estudiantes que responden que el valor que se gana por cada refresco es distinto de $ 100	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 26. Tipificación de la pregunta 6, literal b. Actividad 2

En el literal b el 84% de los estudiantes respondieron que el valor que gana el vendedor por cada jugo Hitt es de $100, además en la actividad 1 se planteó que el vendedor recibe dinero por cada jugo que vende y a pesar que este no se condiciono igual esta condición influyo en las respuestas.

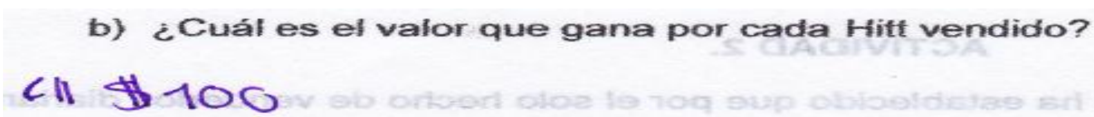


Ilustración 29.Respuesta de la pregunta 6, literal b actividad 2, tipo 1

El 12% de los estudiantes respondieron que si obtenía un valor distinto de $100, respuesta que no era posible porque la expresión plantea que 100 es el valor por cada jugo; y el 4% no respondió.

c) ¿Cómo anula el estimulo? (3.000) en la expresión.

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que el incentivo se anula haciendo una transposición de términos	11	44%
Tipo 2: Estudiantes que responden que el incentivo se anula restándolo por si mismo	11	44%
Tipo 3: Estudiantes que responden que el incentivo se anula restándolo con un valor distinto a 3.000	2	8%

Tipo 4: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 27. Tipificación de la pregunta 6, literal c. Actividad 2

En el literal c el 88% de los estudiantes respondieron que para anular el estímulo es necesario utilizar el método formal de transposición de términos o la propiedad del opuesto aditivo, lo cual permite decir que los estudiantes han aprendido de forma mecánica este método.

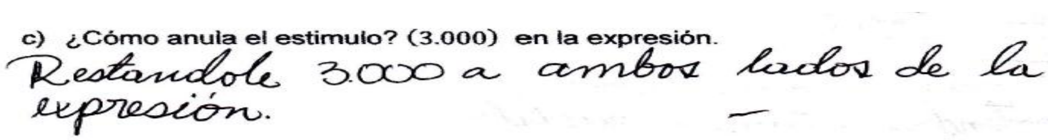


Ilustración 30. Respuesta de la pregunta 6, literal c, actividad 2, tipo 1

d) ¿Cómo deja el coeficiente de x en 1?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden al resolver expresión $3.000 + 100x = 25.00$ $100x = 25.000 - 3.000$ $100x = 22.000$ $x = \frac{22.000}{100}$ $x = 220$	16	64%
Tipo 2: Estudiantes que responden correctamente sin resolver expresión	7	28%
Tipo 3: Estudiantes que responden de forma incorrecta	1	4%
Tipo 4: Estudiantes que no responden	1	4%

Tabla 28. Tipificación de la pregunta 6, literal d. Actividad 2

En el literal d el 64% de los estudiantes respondieron que el coeficiente de la variable x se deja en 1 al efectuar una división y la resolvieron con el método formal de transposición de términos, el 28% respondieron que el coeficiente de la variable x se deja en 1 al efectuar una división.

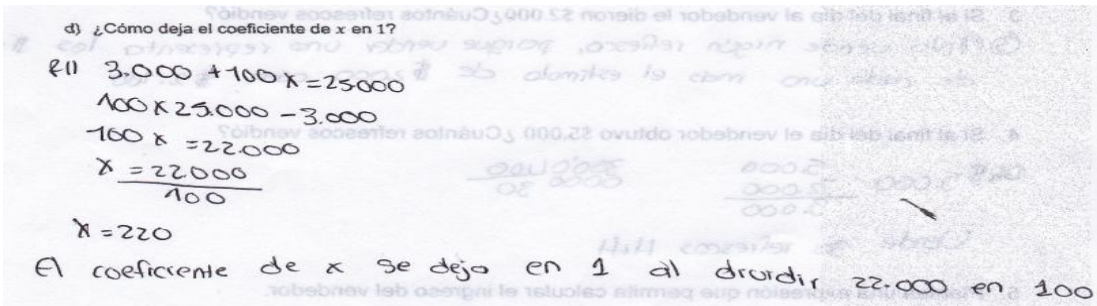


Ilustración 31. Respuesta de la pregunta 6, literal d, tipo 1

Finalmente en la actividad 2, los estudiantes presentaron mayor dificultad para darle respuesta a pesar de que consideraron que las preguntas no eran para "pensar" en realidad sí se debían leer una y otra vez para comprender qué se preguntaba sobre todo en las preguntas. Además esta actividad permitía comprender la noción de ecuación lineal de la forma $y = mx + b$ y que existen en esta noción términos que son variables y otros que son constantes, también que cada uno de estos términos representan una cantidad o un objeto según el contexto en el que es planteada la ecuación lineal.

3.2.3. Actividad 3

3.2.3.1. Descripción General de la aplicación de la actividad

La actividad 3 fue aplicada luego de repartir a cada estudiante un paquete de copias donde se encontraban las tres actividades y hacer lectura del contenido. La profesora hizo una introducción del enunciado inicial de la actividad, exponiendo la situación de la venta de jugos Hitt en un supermercado.

De forma individual cada estudiante comenzó a desarrollar la actividad y a realizar preguntas sobre contenido y procesos. La mayor parte de las preguntas estaban dirigidas a establecer la diferencia entre las cantidades constantes y las cantidades variables.

Luego de que todos los estudiantes terminaran la actividad se realizó una puesta en común de éstas respuestas, durante la cual los estudiantes deliberaron con el docente cada una de sus respuestas.

Desde esta puesta en común se observa que a los estudiantes no recurrieron a otro contexto distinto al de la situación planteada en la pregunta 5 pese a que allí se planteaba que era cualquier enunciado la mayoría opto por el contexto de la actividad, además se evidencia que el hecho de que cada ítem fuese distinto no afecto en nada la respuesta de los estudiantes ya que ellos dijeron: “es lo mismo, sólo que cada uno hay que interpretarlo diferente, cambiar un poco el enunciado, pero en general la estructura es la misma”

Las demás preguntas los estudiantes plantearon que era una repetición de las otras actividades y que parecía como la evaluación de las anteriores, lo cual no es del todo cierto porque con la tercera actividad se pretendia dar cierre a la situación como tal y por ello se recurre a las otras actividades para que con esto los estudiantes den cuenta de lo que comprendieron en las actividades pasadas.

La siguiente tabla muestra la relación entre el número de jugos Hitt vendidos y el ingreso que tiene un vendedor cuando le dan un salario básico (fijo) de $\$2.500$ *diarios y* $\$200$ *por cada jugo que venda.*

Día	Venta por día	Salario básico (Estimulo)	Valor por cada jugo vendido	Valor por cada jugos vendidos	Ingreso diario
1	5	2.500	200	5 x 200	3.500
2	7	2.500	200	7 x 200	3.900
3	10	2.500			4.500
4		2.500	200		6.300
5	8			8 x 200	
6	12			12 x 200	2.900
7		2.500	200	15 x 200	

Tabla 29.Comprendiendo la venta de jugo.

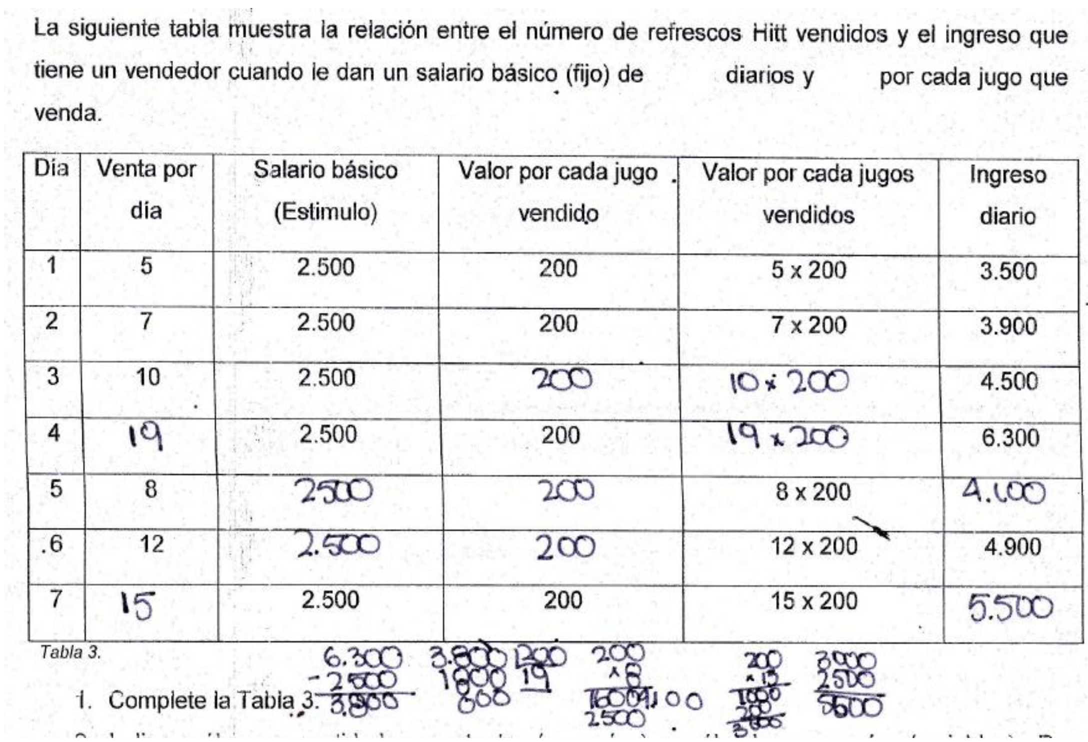
3.2.3.2. Pregunta 1

Complete la Tabla 29.

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que completan la tabla correctamente y efectúan operaciones	3	12%
Tipo 2: Estudiantes que completan la tabla correctamente sin efectuar operaciones	18	72%
Tipo 3: Estudiantes que completan la tabla incorrectamente sin efectuar operaciones	4	16%

Tabla 30.Tipificación de la pregunta 1. Actividad 3

En la tabla 30 se observa que el 82% de los estudiantes completaron acertadamente la tabla propuesta, por tal motivo se hace evidente que los estudiantes emplearon conocimientos básicos y estrategias para lograr el propósito de esta primera pregunta, de dicho porcentaje tan sólo el 12% de los estudiantes efectuaron operaciones, los demás utilizaron el cálculo mental e inclusive la calculadora para completarla.


La siguiente tabla muestra la relación entre el número de refrescos Hitt vendidos y el ingreso que tiene un vendedor cuando le dan un salario básico (fijo) de diarios y por cada jugo que venda.

Día	Venta por día	Salario básico (Estimulo)	Valor por cada jugo vendido	Valor por cada jugos vendidos	Ingreso diario
1	5	2.500	200	5 x 200	3.500
2	7	2.500	200	7 x 200	3.900
3	10	2.500	200	10 x 200	4.500
4	19	2.500	200	19 x 200	6.300
5	8	2500	200	8 x 200	4.100
6	12	2.500	200	12 x 200	4.900
7	15	2.500	200	15 x 200	5.500

Tabla 3.

1. Complete la Tabla 3.

Ilustración 32. Respuesta de la pregunta 1, actividad 3, tipo 1

3.2.3.3. Pregunta 2

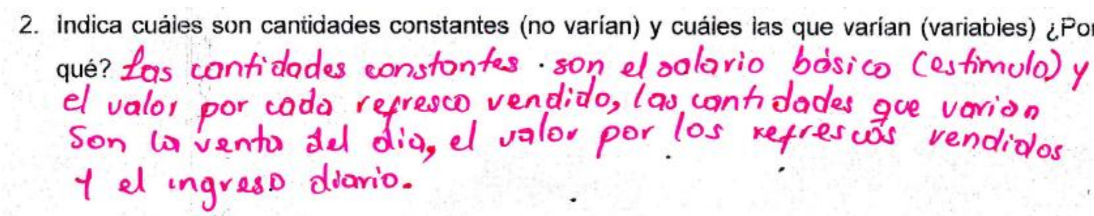
Indica cuáles son cantidades constantes (no varían) y cuáles las que varían (variables) ¿Por qué?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que indican cuales cantidades son constantes y cuales varían, no justifican	22	88%
Tipo 2: Estudiantes que indican cuales cantidades son constantes y cuales varían, además justifican	2	8%

Tipo 3: Estudiantes que no identifican las cantidades que varían de las que son constantes.	1	4%

Tabla 31.Tipificación de la pregunta 2. Actividad 3

En la pregunta 2 el 96% de los estudiantes identificaron de forma cuáles son las cantidades que varían y cuales son las cantidades constantes, de este porcentaje el 8% argumenta su respuestas, el porcentaje restante de estudiantes expresaron que no era necesario decir por qué varían o son constantes las cantidades pues en la tabla se presenta “obviamente” el por qué.



2. Indica cuáles son cantidades constantes (no varían) y cuáles las que varían (variables) ¿Por qué? Las cantidades constantes · son el salario básico (estimulo) y el valor por cada refresco vendido, las cantidades que varian son la venta del dia, el valor por los refrescos vendidos y el ingreso diario.

Ilustración 33. Respuesta de la pregunta 2, actividad 3, tipo 1

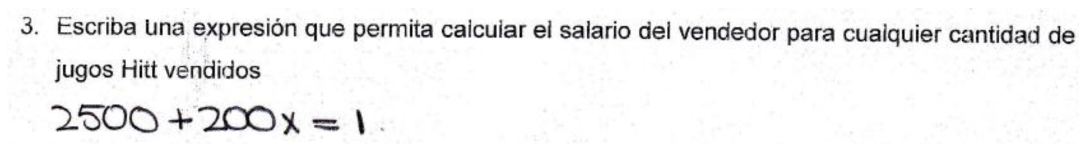
3.2.3.4. Pregunta 3

Escriba una expresión que permita calcular el salario del vendedor para cualquier cantidad de jugos Hitt vendidos (x)

Tipo de respuesta	**Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)**	**Frecuencia relativa**
Tipo 1: Estudiantes que plantearon la expresión correctamente. $ingreso = 2.500 + 200x$	24	96%
Tipo 2: Estudiantes que plantearon la expresión mal.	1	4%

Tabla 32. Tipificación de la pregunta 3. Actividad 3

En la pregunta 3 se observa que el 100% de los estudiantes respondieron correctamente al plantear una ecuación de la forma $y = mx + b$, sólo que de ese 100%, el 4% ubicaron de manera errónea la variable o plantearon la expresión con un valor que no se encontraba inicialmente en el enunciado.


3. Escriba una expresión que permita calcular el salario del vendedor para cualquier cantidad de jugos Hitt vendidos

$2500 + 200x = 1$.

Ilustración 34. Respuesta de la pregunta 3, actividad 3, tipo 1

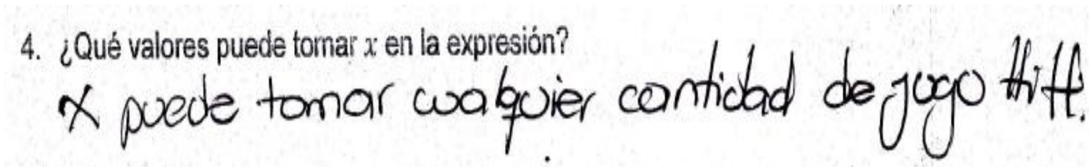
3.2.3.5. Pregunta 4

¿Qué valores puede tomar x en la expresión?

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que responden que x es cualquier cantidad de refrescos Hitt	17	68%
Tipo 2: Estudiantes que responden que x es cualquier cantidad	4	16%
Tipo 3: Estudiantes que responden que x es cualquier número natural	1	4%
Tipo 4: Estudiantes que responden que x no tiene un valor en la expresión	3	12%

Tabla 33. Tipificación de la pregunta 4. Actividad 3

En la pregunta 4 el 72% de los estudiantes respondieron que la variable x podía tomar como valor numérico cualquier cantidad de mililitros de jugo Hitt o un valor numérico perteneciente al conjunto de los números naturales.



4. ¿Qué valores puede tomar x en la expresión?

x puede tomar cualquier cantidad de jugo hitt.

Ilustración 35. Respuesta de la pregunta 4, actividad 3, tipo 1

Mientras que un 16% de los estudiantes plantea que puede tomar cualquier valor numérico lo cual hace que esta respuesta sea incompleta pues se refiere al conjunto de los números reales y las cantidades de mililitros expresadas no contemplan dicho conjunto.

3.2.3.6. Pregunta 5

Escriba una situación que pueda describir la siguiente expresión (escribe un enunciado para cada caso).

a) $Ingreso = 2.000x$

b) $2.000x = 10.000$

c) $3x + 200$

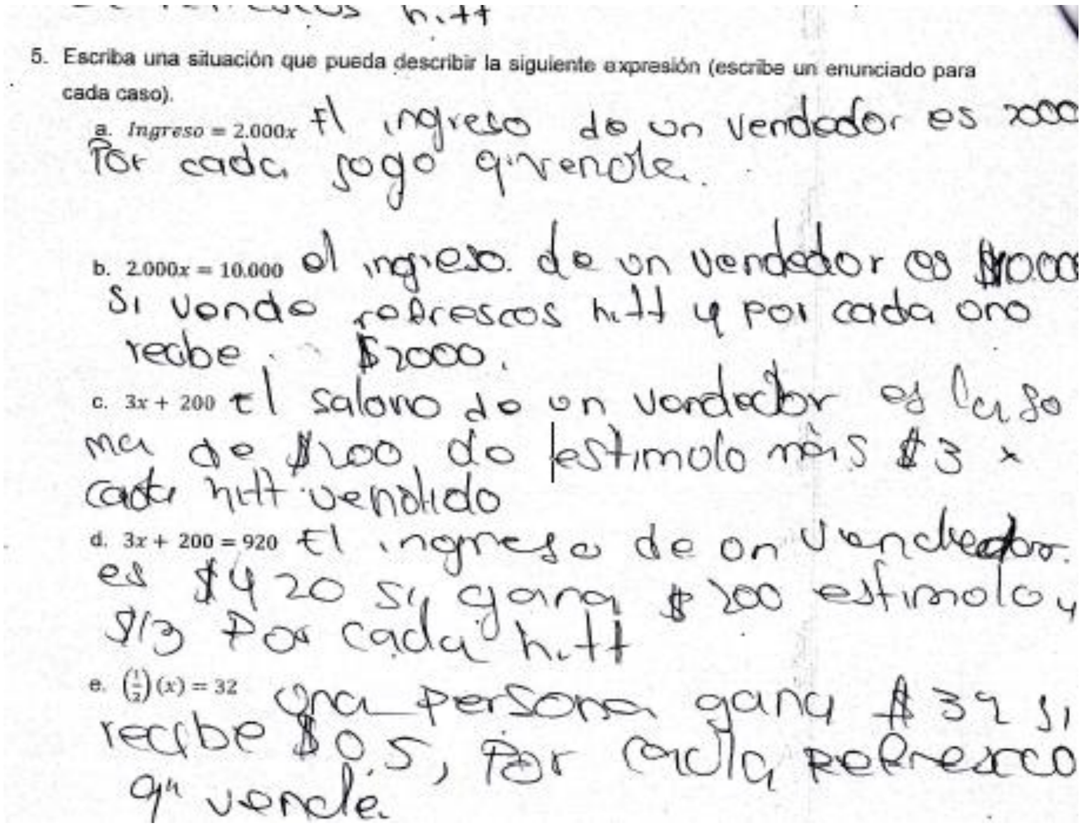
d) $3x + 200 = 920$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)(x) = 32$

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que plantean el enunciado con base a la venta de jugos Hitt	18	72%
Tipo 2: Estudiantes que plantean el enunciado sin tener en cuenta un contexto	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que plantearon enunciados ilógicos	4	16%

Tabla 34. .Tipificación de la pregunta 5. Actividad 3

En la tabla 15 se observa que el 72% de los estudiantes en la pregunta 5 plantearon enunciados teniendo en cuenta el contexto de toda la situación que es el de la venta de jugos Hitt, condicionándose así a la actividad cuando en esta pregunta se proponía que los enunciados fueran situaciones distintas a la de la actividad.


5. Escriba una situación que pueda describir la siguiente expresión (escribe un enunciado para cada caso).

a. $Ingreso = 2.000x$ El ingreso de un vendedor es 2000 Por cada jugo que vende.

b. $2.000x = 10.000$ el ingreso de un vendedor es $10.000 si vende refrescos h.tt y por cada uno recibe $2000.

c. $3x + 200$ el salario de un vendedor es la suma de $200 de estimulo más $3 x cada h.tt vendido

d. $3x + 200 = 920$ El ingreso de un vendedor es $420 si gana $200 estimolo y $3 Por cada h.tt

e. $\left(\frac{1}{2}\right)(x) = 32$ una persona gana $32 si recibe $0.5, Por cada refresco que vende.

Ilustración 36. Respuesta de la pregunta 5, actividad 3, tipo 1

Un 12% de los estudiantes optaron por hacer una traducción a un enunciado de la expresión que se presentaba allí y el porcentaje restante escribieron enunciados sin sentido lógico.

3.2.3.7. Pregunta 6

Identifique las cantidades constantes de las expresiones b, c y e.

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que identifican correctamente las cantidades constantes	16	64%

Tipo 2: Estudiantes que no identifican correctamente las cantidades constantes	3	12%
Tipo 3: Estudiantes que identificaron dos de las tres expresiones las cantidades constantes	6	24%

Tabla 35. Tipificación de la pregunta 6. Actividad 3

La pregunta 6, dependía de cómo fue la respuesta dada en la pregunta 2 de esta actividad ya que es en la pregunta 2 en donde el estudiante identifica que implica que una cantidad sea o no variable, teniendo en cuenta lo anterior el 64% de los estudiantes identificaron de forma cuáles son las cantidades constantes.

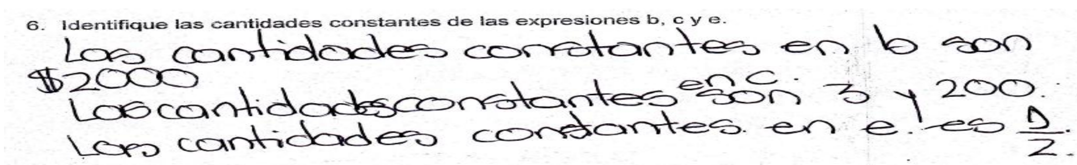

6. Identifique las cantidades constantes de las expresiones b, c y e.
Los cantidades constantes en b son $2000
Loscantidadesconstantes en c son 3 y 200.
Los cantidades constantes en e. es $\frac{1}{2}$.

Ilustración 37. Respuesta de la pregunta 6, actividad 3, tipo 1

Mientras que el 12% de los estudiantes no las identificaron y el 24% restante respondió de forma incompleta.

3.2.3.8. Pregunta 7

Indique las cantidades variables de las expresiones a y c.

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que identifican correctamente las cantidades variables	21	84%
Tipo 2: Estudiantes que no identifican correctamente las cantidades variables	4	16%

Tabla 36. Tipificación de la pregunta 7. Actividad 3

La pregunta 7, dependía de cómo fue la respuesta dada en la pregunta 2 de esta actividad ya que es en la pregunta 2 en donde el estudiante identifica que implica que una cantidad sea o no variable, teniendo en cuenta lo anterior el 84% de los estudiantes identificaron de forma cuáles son las cantidades que varían.

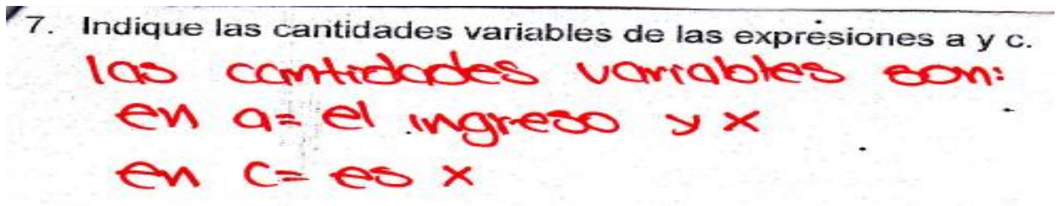

7. Indique las cantidades variables de las expresiones a y c.
las cantidades variables son:
en a= el ingreso y x
en c= es x

Ilustración 38. Respuesta de la pregunta 7, actividad 3, tipo 1

Mientras que el 16% de los estudiantes no las identificaron.

3.2.3.9. Pregunta 8

De acuerdo a lo anterior indique los valores de a, b y c de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $3x + 2 = \frac{11}{3}$ $\quad a =, b = , c =$

b) $9 = x + 5$ $\quad a =, b = , c =$

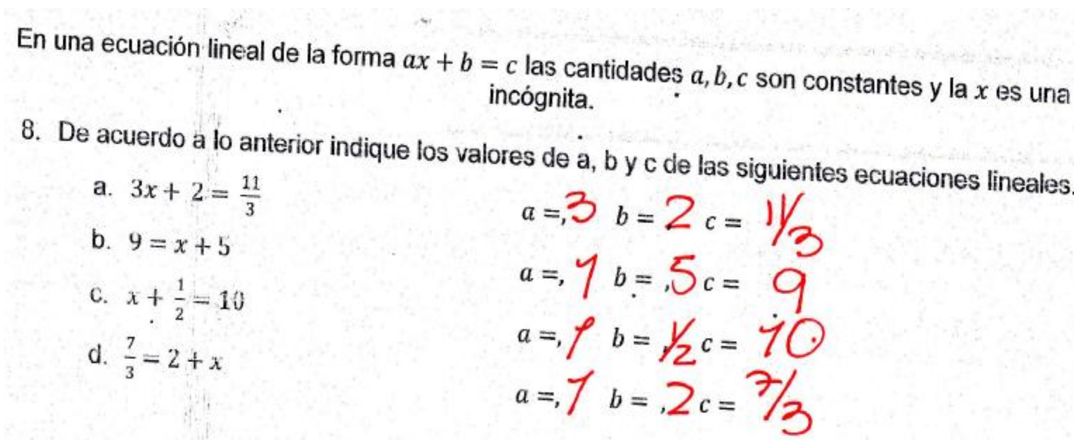
c) $x + \frac{1}{2} = 10$ $\quad a =, b = , c =$

d) $\frac{7}{3} = 2 + x$ $\quad a =, b = , c =$

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta (Número de estudiantes)	Frecuencia relativa
Tipo 1: Estudiantes que indicaron correctamente los valores de a, b y c en las cuatro ecuaciones lineales	21	84%
Tipo 2: Estudiantes que no indicaron correctamente los valores de a, b y c en las cuatro ecuaciones lineales	4	16%

Tabla 37.Tipificación de la pregunta 8. Actividad 3

En la tabla 16 se observa que el 84% de los estudiantes en la pregunta 8 identificaron de manera correcta cada uno de los coeficientes de la fórmula planteada en la información dada ($ax + b = c$) sin importar la transformación que ésta sufra y un 16% de los estudiantes no identificaron de manera correcta cada uno de los coeficientes de la fórmula planteada en la información dada ($ax + b = c$) ya que no se percataron que en cada literal la fórmula cambiaba el lugar en el que se encontraban a, b y c.



En una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$ las cantidades a, b, c son constantes y la x es una incógnita.

8. De acuerdo a lo anterior indique los valores de a, b y c de las siguientes ecuaciones lineales.

a. $3x + 2 = \frac{11}{3}$ $a =$ 3 $b =$ 2 $c =$ 11/3

b. $9 = x + 5$ $a =$ 1 $b =$ 5 $c =$ 9

c. $x + \frac{1}{2} = 10$ $a =$ 1 $b =$ 1/2 $c =$ 10

d. $\frac{7}{3} = 2 + x$ $a =$ 1 $b =$ 2 $c =$ 7/3

Ilustración 39. Respuesta de la pregunta 8, actividad 3, tipo 1

Finalmente con esta actividad se evidenció que los estudiantes en su mayoría comprendieron el concepto de cantidad constante y cantidad variable y cómo se representa este concepto en una ecuación. Además esta actividad era el cierre de la situación y por tanto al fina de ella los estudiantes debían dar cuenta de la noción de ecuación lineal como una relación de igualdad.

3.3. ALGUNAS REFLEXIONES RESPECTO A LA SITUACIÓN PROBLEMA.

3.3.1. Caracterización de dificultades

Teniendo en cuenta el análisis de los resultados de la situación problema podemos identificar y caracterizar las siguientes dificultades en la conceptualización y solución de ecuaciones de primer grado.

Así pues, los estudiantes evaluados aluden al tratamiento de las ecuaciones lineales aplicando el llamado método formal o de transposición de términos para resolverla. Lo anterior expresa la manera mecánica como se aplica un procedimiento, lo cual es una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos; pues pese a que es este el método más efectivo al momento de resolver una ecuación lineal se descontextualiza totalmente de la situación problema a la cual esta anclada y el estudiante no contextualiza nuevamente esa respuesta, generando con ello una ruptura en el proceso de comprensión de la noción de ecuación lineal.

Otra dificultad tiene relación con los procesos de pensamiento matemático, en este caso se habla de la argumentación como una de las principales características, lo cual se evidenció en la aplicación de la situación y sus 3 actividades que son pocos los estudiantes que justifican sus respuesta y quienes lo hacen son cortos en su explicación y por tanto no son contundentes en sus respuestas. De aquí que esta dificultad sea una consecuencia inmediata de los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática pues es precisamente el método del docente para enseñar la noción de ecuación lineal lo que influye notablemente en el aprendizaje de los estudiantes, es importante aclarar que el currículo en esta institución está planteado desde la perspectiva de los Lineamientos y Estándares propuestos por el MEN para el desarrollo del pensamiento, la contradicción subyace entre lo que se plantea y lo que el docente presenta en el aula de clases.

3.3.2. Conocimientos de los estudiantes con respecto a la noción de ecuación lineal antes y después de aplicar la situación problema.

Antes de aplicar la situación y durante la aplicación de ésta los estudiantes manifestaron que las ecuaciones eran un tema que se había visto desde grado séptimo y que se les habían planteado como parte del conjunto de los números enteros, así que optaron por responder en varias de las preguntas de las actividades con ese conocimiento, además se evidenció que recurren a la rama de la aritmética en muchas ocasiones para no hacer uso de las expresiones generales del álgebra.

Luego de aplicar cada actividad se realizó el cierre de ellas respondiendo entre todos los estudiantes y el docente cada actividad, con este proceso los estudiantes argumentaron sus repuestas oralmente y ello dio cuenta de que en varias oportunidades se les facilitaba más una argumentación oral que escrita.

En la actividad 1 con el cierre los estudiantes manifestaron que hacia falta un enunciado luego de la situación que expresará de manera explicita la conexión entre las preguntas y la situación, pues ellos las respondieron sin tomar en consideración la situación y guiados sólo por la tabla que se presentaba.

En la actividad 2 con el cierre los estudiantes preguntaron el por qué de esa actividad, ya que se les facilitó el dar respuesta a ella, además se evidenció que a los estudiantes se les pregunta de una sola forma y que las preguntas 2 y 3 de esta actividad se respondieron de manera separada siendo la misma pregunta pero formulada desde dos perspectivas distintas.

Finalmente en la actividad 3 que fue la actividad que permitió explorar los conocimientos obtenidos por los estudiantes luego de las actividades 1 y 2 y que ésta era un cierre de la situación misma en la que se retoman aspectos importantes de las otras actividades y que se concluye con el aprendizaje de la noción de ecuación lineal, logró su propósito ya que los estudiantes plasmaron en un concepto lo que significa la noción de ecuación lineal y fue la actividad en la que menos tiempo se requirió de los 45 minutos para responderla.

CAPÍTULO IV

4. CONCLUSIONES

En este capítulo se plantean las conclusiones generales de este trabajo respecto al aprendizaje de la noción de ecuación lineal al implementar una situación problema en grado noveno. Para ello se retoman el marco teórico, los objetivos y la situación problema implementada.

La situación problema permite una reorganización del currículo de matemáticas en tanto que esta es el punto de partida para desencadenar los procesos de aprendizaje en los estudiantes. Esta vía de trabajo favorece una visión del conocimiento matemático como proceso, que admite pluralidad de procedimientos, que se transforma, que se adapta a las situaciones y a los contextos, al alcance de todos, en contraposición con aquella visión escolar en la que las matemáticas son percibidas como una disciplina rígida, con formas únicas de ser pensadas y, por supuesto, a la que sólo pueden acceder unos pocos.

Así pues, a partir de la aplicación de una situación problema a estudiantes de grado noveno se logró trabajar desde los conceptos elementales aritméticos a nociones algebraicas como la ecuación lineal y su solución, los cuales permiten gracias a un proceso sistemático y contextualizado que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo de dicha noción. Esta situación, que emergió en un contexto conocido para los estudiantes, les permitió poner en juego sus propias conceptualizaciones y confrontarlas con las de sus compañeros, creando debates y espacio a través de los cuales se propuso argumentar de manera clara y con absoluta certeza que la respuesta que cada estudiante daba era la indicada; en este mismo espacio los estudiantes reconocieron las dificultades que la situación problema les produjo, siendo esto un elemento importante para cuestionar y reformular las ideas en pos de lo que ellos comprendían de la noción de ecuación lineal.

El objetivo general de este trabajo fue cumplido a cabalidad ya que se identificaron claramente las dificultades que presentaron los estudiantes al enfrentarse a la situación problema y ésta situación desencadenó el aprendizaje y la comprensión de la noción de ecuación lineal, tal como se evidencia en el análisis de los resultados de la aplicación de la situación problema.

Para los objetivos específicos se puede evidenciar lo anterior, ya que los estudiantes se apropiaron de diferentes significados de la ecuación lineal, poniendo en evidencia conocimientos que previamente habían adquirido durante su proceso de aprendizaje. De lo anterior se agrega que el análisis de la aplicación de la situación problema se caracterizaron las dificultades que presentan los estudiantes frente al aprendizaje desde este enfoque.

Bajo este análisis realizado, que corresponde a la caracterización de las dificultades basándose en la clasificación de Socas (1997) surgió el inconveniente en el uso del lenguaje natural, dentro del contexto matemático, ya que generó un conflicto de precisión.

Otra dificultad detectada tenía relación con la producción de enunciados equivalentes a expresiones algebraicas, en este caso, los estudiantes no asimilaron el hecho de que una expresión algebraica puede ser la representación de cualquier situación contextual; ya que ésta es una generalización y lo que hace el contexto es particularizarla de manera específica.

Con lo anterior se buscaba que los estudiantes mejoraran en la competencia propositiva. En consecuencia, no cabe duda que hubo deficiencias para realizar buena coordinación entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

En los procesos argumentativos se observó que los estudiantes en su mayoría durante el desarrollo de la situación daban respuestas sin presentar argumentos que sustentaran lo realizado, además, en muchas ocasiones los argumentos presentados para justificar las respuesta eran las operaciones aritméticas que hacían.

Los problemas se centraron en la transposición de términos puesto que los estudiantes asumen este método como el único posible para dar solución a una ecuación cualquiera, lo que repercutirá en un obstáculo cuando se llegue a nociones de otra complejidad, además este proceso alfanumérico es totalmente descontextualizado y en repetidas oportunidades el recontextualizar el valor numérico que este proceso aportaba no se realizaba.

Para el trabajo los aportes del marco teórico permitió organizar tres aspectos relacionados con el aprendizaje de la noción de Ecuación Lineal desde la resolución de problemas, la situación problema como tal y las dificultades que se evidencian antes, durante y después de la aplicación de la situación problema para dar cuenta sobre la forma como se estaría orientando esta noción a nivel escolar en concordancia con lo que planteado por el MEN en los Lineamientos curriculares de Matemáticas (1999) y los estándares básicos (2006); y algunas investigaciones como las de Kieran (1988; 1992; 2006), Santos Trigo (1996; 2008) y Socas (1997).

El desarrollo teórico de la situación problema que fue abordada en este trabajo, se realizó fundamentado en los documentos, ideas y planes educativos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, tales como: Estándares Básicos de Competencias (2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998); donde se evidencia el nivel de competencia y desarrollo que deben alcanzar los estudiantes en un determinado grado y la forma como se deben desarrollar los planes educativos.

En este sentido, se pudo apreciar que en la institución educativa de Bolívar se diseñen los planes de estudio o propuestas curriculares (ver el marco contextual) con el propósito de potenciar el desarrollo del pensamiento matemático; para ello es necesario fortalecer las bases teóricas que se tienen en cuenta para direccionar la educación. Esto se debe hacer a partir de los planes y proyectos propuestos por el currículo obedeciendo a las necesidades sociales, culturales y disciplinares de la institución.

A partir de este marco se pensó en la aplicación de una Situación Problema como una herramienta que posibilitó organizar y estructurar el conocimiento para ser vinculado a fenómenos y problemas relacionados con el aprendizaje de la noción de ecuación lineal en un contexto particular o específico; buscando mejorar la comprensión por parte de los estudiantes de dicha noción.

De esta forma, la noción de ecuación lineal, surge como una construcción de los estudiantes a partir de una situación cuya intensión es que ésta represente de manera explícita o implícita un fenómeno, organizar fenómenos, situaciones paramétricas, y dependencia entre otros.

La situación problema articula las interacciones entre estudiantes y contextos en el tratamiento de las situaciones matemáticas, por tal motivo desde los aportes de este trabajo, se propone el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar sus afirmaciones con argumentos claros mediados por las nociones o conceptualizaciones, que han logrado definir con un objeto particular de estudio, como lo es el caso de la resolución de las ecuaciones lineales y su relación de equivalencia.

El contexto de las ventas, posibilita conocer sobre el tema que se está trabajando, proponiendo así, situaciones nuevas de aprendizaje, diferentes a la que se están abordando en el aula de clases, y así se logra componer y descomponer la situación abordada en sus particularidades y generalidades. En este sentido, la Situación Problema permite que las ecuaciones para su estudio sea argumentada, sea justificada y sea contextualizadas a través de una serie de situaciones, actividades que modeladas matemáticamente, describen el comportamiento significativo de un tema particular que se desea abordar.

Por tanto, el trabajo en el aula de clases a través de la Situación Problema, implica, por supuesto, una labor delicada de planeación por parte del maestro y un proceso de seguimiento muy detallado del trabajo de los estudiantes, con el fin de lograr un mejor apoyo al trabajo realizado por éstos. En este sentido, el papel del docente se ve redimensionado, pasando de la persona que enseña, a aquella que propicia y conduce situaciones de aprendizaje en los estudiantes.

5. BIBLIOGRAFÍA

[I.E.M.D.M], I. E. (2005). *Proyecto Educativo Institucional: Componente Pedagógico.* Bolívar, Valle del Cauca.

Benalcázar Cortés, L. O. (2012). Situación 2: La ecuación lineal y los fenómenos de la variación. *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: Dificultades y tratamiento*, 92-95. Buenaventura: Intituto de Educacón y Pedagogía.Trabajo de grado.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire. *APMEP*, 428-442.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la diditique des Mathématiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Butto, C., & Rojano, T. (abril de 2004). introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación matemática, 16*(001), 113-148.

Filloy, E. (1998). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Mexico: Iberoamérica.

Filloy, E., & Rojano, T. (1985). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic . En L. Streefland, *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 154-158). Utrecht.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., & Rojano, T. (2008). El estudio teorico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias, 3*(26), 327-342.

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici. En L. Artusi Chini, *Numeri e operazioni nella scuola di base* (págs. 122-132). Bolgna: Zanichelli.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1997). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico. *Recheches en Didactique des Mathematiques, 9*(3), 155-188.

Kieran, C. (1988). The early learning of Algebra: a structural pesrpective. *National Council of Teachers of Mathematics, 4*, 33-55.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2006). Learning and teaching algebra at the middle school through college leveles. Building meaning for symbolos and theri manipulation. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 707-762). information age publishing.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 763-804). charlotte: Information Age Publishing.

Londoño Orrego, S. M., Muñoz Mesa, L. M., Jaramillo López, C. M., & Villa Ochoa, J. A. (2011). Una aproximación a la noción de ecuación lineal. *CIAEM.* Medellín: Recife.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Editorial Labor,.

Mason, J., Graham, A., & Gowar, D. P. (1999). Rutas hacia el algebra y Raíces del álgebra. (C. Agudelo Valderrama, Trad.) Tunja: Sección de Publicaciones,.

MEN, M. d. (1999). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Santafe de Bogota: MEN.

MEN, M. d. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Santafé de Bogotá: MEN.

Mesa Betancur, O. (1994). *Criterios y Estrategias para la Enseñanza de las Matemáticas.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Moreno, L., & Guillermina, W. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. *Seminario Nacional de Formación de docentes:Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas.*, 40-66.

Múnera Córdoba, J. J. (2009). Diseño de situaciones problema dinamizadoras del pensamiento matemático escolar. *Encuentro Colombiano de matemática Educativa* (págs. 1-11). Bogotá: Asocolme.

Múnera Córdoba, J. J., & Obando Zapata, G. (Enero de 2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización. *Educación y pedagogía., XV*(35), 185-199.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, N. (1991). *Professional Standards for teaching Mathematics,.* Reston: NCTM.

Polya, G. (1980). *Mathematical Dicovery.* New York: John Wiley Sons Inc.

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de la matematicas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico., *Educación matemática* (págs. 69-108). México D.F: Grupo editorial Iberoamaericana.

Rivero Mendoza, F. (2000). *Resolviendo las Ecuaciones Lineales con el uso de Modelos.* Mérida, Venezuela: Universidad de Los Andes.

SAEM Thales. (2012). *Historia*. Recuperado el Junio de 2012, de Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

Santos Trigo, L. M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y practica.* México: Cinvestav.

Santos Trigo, L. M., & Sanchéz Sanchéz, E. (1996). *Didáctica. Lecturas.Perspectivas en educación matemática.* Mexico: Iberoamericana.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Socas, M. (1997). Dificultades, errores y obstáculos. En L. Rico Romero, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Vasco, C. E. (01 de Noviembre de 1999). Las matemáticas escolares en el año 2001. *Síntesis*, págs. 47-61.