

ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE LA I E
SIMÓN BOLÍVAR AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES
CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

MILTON CESAR CAICEDO
EVERARDO VELOZA SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ZARZAL

2012

ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE LA I E
SIMÓN BOLÍVAR AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES
CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

MILTON CESAR CAICEDO

Código: 0762113

EVERARDO VELOZA SÁNCHEZ

Código: 0762122

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Director de Trabajo de Grado:
JORGE ENRIQUE GALEANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ZARZAL, JUNIO DE 2012

DEDICATORIA

A Dios por ayudarme y no dejarme desfallecer en este largo camino que he recorrido para poder hacer mi sueño realidad y que gracias a él lo he podido hacer realidad. A mis padres Everardo Veloza y Blanca Nubia Sánchez y a mi hermano Oscar, por apoyarme incondicionalmente y brindarme todo su amor y comprensión que no me dejo desfallecer en el cumplimiento de mi sueño que hoy por fin se ha hecho realidad, ya puedo decir que soy un Licenciado en Matemáticas.

Everardo Veloza Sánchez.

Primero que todo a mi madre Martha Cecilia Romero por estar ahí apoyándome y ayudándome a seguir adelante, a mi padre José Milton Caicedo Viveros, que también con sus consejos y entusiasmo me ayudo en este recorrido que ya está culminando. A mi tío Alejandro Romero quien fue uno de los impulsores para que yo me convirtiera en un gran profesional, a mis profesores, compañeros, amigos y demás familiares por brindarme su amistad, sabiduría, apoyo y sus conocimientos, a todos ellos agradezco por ese grano de arena que aportaron para mi formación como profesional y como persona. Los quiero de gratis ☺ equajeiii.

Milton Cesar Caicedo Romero

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestra fe y agradecimientos a Dios por darnos la vida, por la posibilidad de culminar nuestros estudios universitarios y por la fortaleza que nos dio cada día para lograr nuestras metas. También agradecemos a nuestros padres por su apoyo incondicional en la realización de nuestro sueño de ser docentes que hoy por fin vamos a hacer realidad. Al profesor Jorge Enrique Galeano, director de nuestro trabajo de grado por toda su colaboración, orientación y paciencia en el desarrollo de este trabajo.

Agradecemos a los evaluadores María Cristina Velasco y Octavio Augusto Pabón por sus observaciones y recomendaciones para mejorar nuestro trabajo.

A la Institución Educativa Simón Bolívar por facilitarnos sus instalaciones y a los estudiantes que participaron en la realización de las actividades propuestas, puesto que con sus aportes escritos y verbales permitieron realizar los análisis necesarios que nos ayudaron a alcanzar los objetivos propuestos.

En general agradecemos a la Universidad del Valle y a todos los profesores que nos acompañaron en nuestra formación brindándonos todo su apoyo y conocimientos.

Contenido

| | |
|---|--------------------------------------|
| Resumen | ix |
| Introducción | ¡Error! Marcador no definido. |
| CAPÍTULO I..... | 3 |
| 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN..... | 3 |
| 1.1 Planteamiento del problema | 3 |
| 1.2 Objetivos..... | 11 |
| 1.2.1 Objetivo General | 11 |
| 1.2.2 Objetivos específicos | 11 |
| 1.3 Justificación | 11 |
| CAPÍTULO II..... | 14 |
| 2. . MARCO TEÓRICO..... | 14 |
| 2.1 Las representaciones semióticas..... | 14 |
| 2.2 Registros de representación movilizados en matemáticas | 16 |
| 2.3 Transformaciones cognitivas utilizadas en matemáticas | 19 |
| 2.3.1 Tratamiento..... | 19 |
| 2.3.2 Conversión..... | 20 |
| 2.4 Visualización matemática..... | 21 |
| 2.5 Conversión <i>entre registros semióticos</i> | 22 |
| 2.6 Las tres maneras de ver un gráfico cartesiano | 28 |
| 2.7 Variables simbólicas significativas de las expresiones algebraicas y variables visuales pertinentes en los gráficos..... | 30 |
| 2.8 Aspectos formales sobre el concepto ecuación lineal..... | 34 |
| 2.8.1 Sistema de coordenadas cartesianas..... | 35 |
| 2.8.2 Graficas de ecuaciones lineales en dos variables..... | 36 |
| CAPÍTULO 3..... | 38 |
| 3. ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA. . | 38 |
| 3.2 Diseño metodológico | 39 |

| | | |
|--------------------------------|--|----|
| 3.2.1 | Instrumentos de investigación | 39 |
| 3.2.2 | Fase de planificación y organización..... | 40 |
| 3.2.3 | Fase de concepción e implementación | 40 |
| 3.2.4 | Fase de organización y análisis | 41 |
| 3.2.5 | Fase de indagación y conclusión | 41 |
| 3.3 | Cuestionario 1 | 42 |
| 3.3.1 | Descripción del cuestionario 1 | 43 |
| 3.3.2 | Análisis del cuestionario 1 | 48 |
| 3.3.3 | Descripción del tipo de método utilizado para analizar el cuestionario 1 | 49 |
| 3.3.4 | Análisis de los resultados del cuestionario 1 | 50 |
| 3.4 | Cuestionario 2..... | 59 |
| 3.4.1 | Descripción del cuestionario 2 | 60 |
| 3.4.2 | Justificación del cuestionario 2..... | 68 |
| 3.4.3 | Análisis cuestionario 2..... | 69 |
| 3.4.4 | Contenido matemático movilizado en el cuestionario 2..... | 71 |
| 3.4.5 | Registros que intervienen en el cuestionario 2..... | 72 |
| CAPÍTULO 4 | | 74 |
| 4. CONCLUSIONES GENERALES..... | | 74 |
| BIBLIOGRAFIA..... | | 77 |
| Anexos..... | | 78 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1. Diversas representaciones de una ecuación lineal. | 15 |
| Tabla 2 los tres factores de congruencia y no congruencia en la conversión de una representación. | 27 |
| Tabla 3 tres maneras de ver los gráficos cartesianos. (Duval, 2004, pag. 47) | 29 |
| Tabla 4. Variables visuales a discriminar en la interpretación de una representación gráfica. (Duval, 1988, p.128) | 31 |
| Tabla 5. Unidades simbólicas correspondientes a cada uno de los valores tomados por las variables visuales de las representaciones gráficas cartesianas. (Duval, 1988, p.129) | 32 |
| Tabla 6. Valores del signo y del carácter del número en la pendiente de acuerdo al sentido de la inclinación y al ángulo de la misma. (Duval, 1988. p.130) | 33 |
| Tabla 7. Elementos de una ecuación lineal. | 35 |
| Tabla 8. Tipos de respuesta a la pregunta 1 del cuestionario..... | 50 |
| Tabla 9. Tipos de respuestas a la pregunta 2 del cuestionario. | 51 |
| Tabla 10. Tipos de respuesta a la pregunta 3 del cuestionario..... | 52 |
| Tabla 11. Tipos de respuestas a la pregunta 4 del cuestionario. | 53 |
| Tabla 12. Tipos de respuestas a la pregunta 5 del cuestionario. | 54 |
| Tabla 13. Tipos de respuesta a la pregunta 6 del cuestionario..... | 55 |
| Tabla 14. Tipos de respuesta a la pregunta 7 del cuestionario..... | 56 |
| Tabla 15. Tipos de respuestas a la pregunta 8 del cuestionario. | 57 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1. Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas..... | 18 |
| Figura 2. Un ítem de reconocimiento cualitativo para la conversión entre la representación gráfica y la notación algebraica..... | 23 |
| Figura 3. Red de discriminación cognitiva requerida para una conversión entre gráfica y ecuaciones..... | 25 |

LISTA DE ILUSTRACIONES

| | |
|--|----|
| Ilustración 1. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1..... | 51 |
| Ilustración 2. Respuesta de un estudiante a la pregunta 2..... | 52 |
| Ilustración 3. Respuesta de un estudiante a la pregunta 3..... | 53 |
| Ilustración 4. Respuesta de un estudiante a la pregunta 4..... | 54 |
| Ilustración 5. Respuesta de un estudiante a la pregunta 5..... | 55 |
| Ilustración 6. Respuesta de un estudiante a la pregunta 6..... | 56 |
| Ilustración 7. Respuesta de un estudiante a la pregunta 7..... | 57 |
| Ilustración 8. Respuesta de un estudiante a la pregunta 8..... | 58 |

Resumen

Frecuentemente se enfatiza que una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos registros de representación. Sin embargo, la conversión de una representación en una representación en otro registro no es un asunto fácil para los estudiantes. Por ejemplo, en la conversión de la ecuación al registro gráfico, no parece surgir ninguna dificultad para ellos, pero todo cambia cuando se les pide que realicen la conversión inversa. En este sentido, el objetivo de nuestro trabajo de indagación es identificar algunos errores y obstáculos que presentan los estudiantes al realizar la conversión de la representación algebraica y gráfica de una ecuación lineal, en este caso la conversión de la representación gráfica a la escritura algebraica de una ecuación lineal.

Para hacer posible esto se planteo un marco teórico que recoge la teoría de Duval sobre las representaciones semióticas y la conversión entre estas. Teoría que nos sirvió como referente para el análisis del cuestionario propuesto a los estudiantes, y así realizar las indagaciones correspondientes sobre la producción de los estudiantes enfatizando en sus concepciones y dificultades presentadas en la realización del cuestionario.

PALABRAS CLAVES: registro semiótico, ecuación lineal, conversión unidades significantes, variables visuales, variables categoriales y lectura e interpretación de gráficas.

Introducción

El presente trabajo de indagación tiene como objetivo principal identificar algunos de los errores y obstáculos que presentan los estudiantes de noveno grado de la I.E Simón Bolívar al realizar la conversión de la representación gráfica a la escritura algebraica de una ecuación lineal.

El concepto de ecuación lineal relaciona una gran variedad de representaciones (como son la representación gráfica, la expresión algebraica, la tabular, las figuras, la lengua natural), éstas son muy mencionadas tanto en los materiales de apoyo para el profesor y en los textos utilizados por el estudiante al abordar el tema. La comprensión de este concepto involucra la articulación coherente de estos registros de representación que juegan un papel primordial en la resolución de un problema, como lo menciona Duval (1988) sobre registros de representación semiótica, ***la conversión o transformación de una representación en otra perteneciente a otro registro, juega un papel fundamental en la actividad matemática.***

Ahora bien, este trabajo se sustenta en observaciones e investigaciones que se han realizado en torno a las ecuaciones lineales y que sirven de base para la realización de los análisis del cuestionario propuesto a los estudiantes, análisis el cual es el pilar fundamental, para lograr los objetivos de este trabajo.

Los objetos matemáticos son accesibles solamente a través de sus diferentes representaciones. Por tal motivo, la construcción conceptual de un objeto matemático requiere de la articulación de las representaciones. Ello implica realizar procesos de conversión y tratamiento de las diferentes representaciones del objeto en cuestión. Desde este punto de vista, el trabajo de Duval (1993, 1999) y su definición de registro de representaciones nos proporcionan el marco teórico adecuado para el análisis y conclusiones de las producciones de los estudiantes.

Este trabajo de indagación está estructurado en cuatro capítulos organizados como se sigue:

Capítulo 1: en este se realiza un planteamiento general de la investigación en donde se enuncia el problema que se pretende abordar, el objetivo general y los objetivos específicos y por último la justificación.

Capítulo 2: en este capítulo se expone el marco teórico desde el cual se desarrolla el trabajo, aquí se reseñan algunas investigaciones realizadas en torno a las dificultades para articular los registros de representación como elementos teóricos que son la base del soporte de este trabajo.

Capítulo 3: en este apartado se alude a los aspectos metodológicos y se presenta una descripción de las dos situaciones propuestas a los estudiantes, las cuales están adaptadas al grado noveno. La primera denominada cuestionario 1 sirvió para precisar la conceptualización y manejo del concepto de ecuación lineal en los estudiantes, esta contiene ocho preguntas. El segundo cuestionario denominado 2 el cual fue planteado pero no aplicado. Está conformado por cuatro preguntas las cuales estuvieron destinadas a mejorar los procedimientos mostrados por los estudiantes en el primer cuestionario y estuvieron dirigidas a que los estudiantes establecieran la conversión entre los registros gráfico y algebraico de una ecuación lineal. Por último se realiza un análisis de los resultados obtenidos el cual da cuenta del procedimiento realizado por los estudiantes en el primer cuestionario y lo que se espera para la segundo.

Capítulo 4: en este último capítulo a partir de los resultados obtenidos en el análisis de los cuestionarios 1 y 2 y lo planteado en el marco de referencia conceptual y objetivos, se presentan las conclusiones de este trabajo y las reflexiones finales.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos generales del trabajo de grado. Primero se plantea el problema central que se pretende estudiar, el cual se propone identificar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes de la I.E. Simón Bolívar al poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica cartesiana y las unidades significativas de la escritura algebraica de una ecuación lineal. Segundo se establecen los objetivos generales y específicos que delimitan qué es lo que se quiere mostrar con la investigación y tercero la justificación, la cual muestra la importancia que podría tener este trabajo para el aprendizaje de las ecuaciones lineales. Allí se enfatiza en la problemática que existe cuando se le pide a un estudiante que asigne una ecuación para un gráfico cartesiano.

1.1 Planteamiento del problema

Uno de los mayores hallazgos intelectuales del hombre y del cual se han generado un sin número de creaciones que nos permiten tener las comodidades con las que contamos hoy en día son las matemáticas; ciencia que, desde principios de su desarrollo, ha generado gran intriga a los grandes pensadores debido a la elegancia y complejidad de sus temas. Esta es una de las ciencias más importantes en el desarrollo humano ya que se encuentra presente de manera significativa en el quehacer de cada individuo, a veces de una forma implícita y otras de forma explícita. Es decir las matemáticas son utilizadas en las diferentes interacciones que tienen los individuos con su entorno, ya sea en una institución educativa o en cualquier otro lugar donde se requiera de los conocimientos matemáticos para resolver problemas que subyacen a la actividad humana realizada por cada individuo.

Las matemáticas a lo largo de la historia ha tenido varias transformaciones, sin embargo una de las más avanzadas y organizadas de la antigüedad fueron desarrolladas en el tercer milenio A.C. en Babilonia y Egipto, las cuales estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos. Puesto que se han encontrado gran cantidad de tablillas en las que se resuelven ecuaciones de primer y segundo grado, con una y varias incógnitas, por medio de la aplicación sistemática de un arte combinatorio. Ciertamente es, que los babilonios tenían un espíritu algebraico muy desarrollado, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables y hasta el uso de la ley exponencial. A diferencia de sus pueblos vecinos: egipcios, griegos, etc., los babilonios algebrizaron incluso la geometría y la astronomía. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado e incluso reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluidos, a las de segundo grado (Taton, 1988).

Las matemáticas fueron de gran importancia en el desarrollo de las civilizaciones antiguas, en especial la aritmética, las medidas y los cálculos geométricos. Es hasta el siglo XV cuando Descartes hace una gran contribución a las matemáticas. Al “Discurso del método” le añadió un anexo titulado “Geometría” en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al “sistema de coordenadas cartesianas” creadas por Descartes, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores. Este sistema permite asignarle a cada punto del plano una pareja de números reales que lo identifica inequívocamente. Así, cualquier objeto geométrico puede ser identificado con un conjunto de parejas de números reales, lo cual permite, entre otras cosas, estudiar la geometría a través del álgebra (De la Torre, 2006).

Ahora bien, el plano cartesiano es fundamental en la enseñanza de representaciones gráficas en matemáticas, ya sea cuando se quiere representar una expresión algebraica en un registro figural o cuando se quiere inferir la ecuación de una representación cartesiana dada, para esto debemos tener presente que debe existir una articulación entre los dos registros empleados, el gráfico y el cartesiano, puesto que:

No puede haber utilización correcta de las representaciones gráficas cartesianas sin discriminación explícita de las variables visuales pertinentes y sin una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades significativas de la escritura algebraica. (Duval, 1988, p. 131)

Es por esta razón que los estudiantes no deben quedarse solo con el tratamiento de *la vía del punteo*¹ en las representaciones gráficas, ya que esta solo permite que se entienda el concepto en un solo sentido, es decir, solo el estudiante tendrá la habilidad de representar gráficamente si tiene de antemano la ecuación, otra forma que evade la discriminación de las variables visuales es *una vía de extensión del trazo efectuado*², en la cual el estudiante solo podrá realizar actividades de interpolación y extrapolación, las cuales se apoyan en sobre lo que se ha llamado aspectos productores y aspectos redactores de las representaciones graficas, lo ideal es que puedan llegar a establecer una *interpretación global*³ que le permitirá al estudiante aprender el concepto en los dos sentidos, es decir, que este puede pasar de la ecuación a la gráfica y de la representación cartesiana a la ecuación. Ahora, la vía del punteo es preferida necesariamente cuando se trata de trazar la gráfica correspondiente a una ecuación de primer grado, o de leer las coordenadas de un punto interesante en la gráfica, pero cuando se trata de partir de la representación gráfica para encontrar la ecuación correspondiente, o para utilizar el concepto de pendiente o el de dirección, es la vía de interpretación global que se vuelve necesaria utilizar (Duval, ibíd.).

Ahora bien, uno de los problemas específicos del aprendizaje es hacer pasar a los estudiantes de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa. Solo con este tipo de aprehensión es que puede haber coordinación con el registro de la escritura algebraica de relación y que los gráficos cartesianos pueden funcionar en conjunto para tener una mejor

¹ Es un tratamiento que se enfatiza en la asociación de un punto y un plano de referencia, para trazar una gráfica.

² Es un tratamiento puramente mental: no da lugar a trazos complementarios y explicativos como un cambio local de la graduación de los ejes para agrandar una parte del trazo.

³ Es un tratamiento que permite observar lo que es pertinente en la grafica, además delas variables visuales.

visualización (Duval, 2004). La vía de interpretación global generalmente se tiene a menos en la enseñanza, porque proviene de un análisis semiótico de los registros visual y algebraico (Duval, 1988, p.127.), con ello se comprende que la mayoría de los estudiantes no lleguen a una interpretación correcta de las representaciones gráficas en la educación secundaria, generando un fracaso en el aprendizaje de las ecuaciones y su representación gráfica.

Sin embargo, esto sucede porque no se le da mucha importancia al reconocimiento de las variables visuales y las unidades significativas de la escritura algebraica con las cuales el estudiante pueda obtener una mejor comprensión de las variaciones que ocurren en los dos sistemas de representación, es por ello que se quiere que la enseñanza de las ecuaciones lineales y sus representaciones sean trabajadas a partir de una teoría como la planteada por Duval (1988) para mejorar la aprehensión y la comunicación de estos objetos matemáticos por parte de los estudiantes. Es importante recordar que para que exista una coordinación entre los registros utilizados en el aprendizaje de las matemáticas, en este caso los registros gráficos y algebraicos, los valores visuales han de ponerse en correspondencia no con valores numéricos de la ecuación, sino con valores categoriales de la escritura simbólica de una ecuación (Duval, 1999.p,76). Es a este nivel de correspondencia entre los valores visuales pertinentes del gráfico y los valores categoriales de la ecuación, que puede efectuarse la coordinación de registros y no al nivel de un trabajo sobre los valores numéricos y su correspondencia con los puntos del gráfico.

Cabe señalar que una representación es una construcción que realiza un sujeto, la cual se refiere a objetos con los cuales ellos entran en interacción. La representación construida pretende reunir las características y atributos de los objetos representados, en este sentido la representación es utilizada para reemplazar los objetos matemáticos que no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente, con esta representación se busca interactuar con los objetos y efectuar operaciones con ellos.

Por tal motivo las representaciones se consideran parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas, sin embargo una representación no puede ser comprendida independientemente del sistema semiótico que ha permitido producirla, es este el que le da sentido y le proporciona su significado en oposición con los demás signos.

Hablar de registro de representación semiótica y no solamente de representación semiótica va en el sentido que se consideren prioritariamente las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica. Y no en el sentido que se consideren las representaciones semióticas en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado un mensaje o cómo puede comprender un destinatario una representación semiótica (Duval, 2004, p.28)

Por lo anterior, se deduce que la actividad intelectual del ser humano consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, en sentido de que puedan ser creadas otras representaciones del objeto matemático en cuestión. Sin embargo, en la enseñanza los docentes privilegian siempre los registros monofuncionales porque son más potentes en el sentido que estos permiten desarrollar algoritmos, es decir,

... una secuencia de reglas operatorias o de procedimiento; por ejemplo, los algoritmos de las operaciones aritméticas con la escritura decimal, los algoritmos con escritura fraccionaria, aquellos para la resolución de una ecuación (primer o segundo grado) o de un sistema de ecuaciones, los del cálculo de derivadas... Estos son tratamientos tipo algorítmico que tienen aplicación en problemas no-matemáticos (físicos, económicos, arquitectónicos, de gestión...) y que los profesores de matemáticas tienden a privilegiar con mucha frecuencia (Duval, 2004, p.35).

En este trabajo se utilizaron dos tipos de registros: el algebraico y el gráfico cartesiano, el algebraico es un registro monofuncional – discursivo, el cual hace uso de las expresiones algebraicas para representar los objetos y el gráfico cartesiano que es un registro monofuncional – no discursivo, el cual hace uso de las representaciones cartesianas para representar los objetos matemáticos.

El estudio de las ecuaciones y sus representaciones gráficas ha acarreado el interés de muchas personas a partir de los errores y obstáculos que se han encontrado en su enseñanza y en la adquisición de los objetos matemáticos por parte del estudiante, entre estos y en particular para nuestro interés, el profesor Raymond Duval quien ha desarrollado varios documentos donde expone su idea de cómo es la articulación de estos tipos de registros, con el fin de mostrar cómo el estudiante, a partir de una articulación entre estos registros de representación, tendrá una mayor comprensión de estos y de los conocimientos implícitos que estos demarcan.

Ahora bien, el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la duda o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación.

En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico desarrollada por Bachelard (pág. 15-16):

"... se conoce afrontando un conocimiento anterior, destruyendo los conocimientos mal adquiridos o superando aquello que en el espíritu mismo obstaculiza la espiritualización. Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación".

Según Brousseau (1986), la noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. Ciertos conocimientos del alumno están ligados a otros conocimientos anteriores que a menudo son provisorios, imprecisos y poco correctos.

Estos obstáculos, según Brousseau, pueden ser el resultado de diferentes causas y por ello se les diferencia según su origen de la siguiente forma:

- Obstáculos ontogénéticos: son aquellos que provienen de las limitaciones del sujeto en un momento dado del desarrollo.
- Obstáculos didácticos: son aquellos que parecen depender de las decisiones del docente o del sistema educativo.

- Obstáculos epistemológicos: están ligados al conocimiento mismo. Se pueden encontrar en la evolución histórica de los conceptos matemáticos.

Tanto Bachelard como Brosseau caracterizan un obstáculo como: “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas”.

De lo anterior podemos precisar que:

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.

Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.

Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.

Durante los últimos años se han mostrado opiniones que manifiestan la importancia que tienen las representaciones gráficas y en especial su papel en la vida diaria, como formas de comunicación científica y como herramientas para el trabajo didáctico; de hecho, las representaciones gráficas cartesianas son usadas frecuentemente en diversos medios de comunicación para ilustrar temas como el cambio en la oferta y la demanda de diferentes productos a través del tiempo o para modelar situaciones como la presentación de un hecho geográfico, entre otros. Así mismo, en el campo de las ciencias, los gráficos cartesianos son utilizados para la difusión de los resultados de las investigaciones científicas tanto en las revistas especializadas como en los libros de texto. Por otra parte, podemos decir que en el contexto educacional:

Hay una gran cantidad de ocasiones en la cual es necesaria la habilidad para manejar información a partir de gráficas y esta habilidad es particularmente importante en la enseñanza aprendizaje de las ciencias, donde las gráficas son utilizadas frecuentemente con usos comunicativos. (García, 2005, p.12)

Ahora bien, la falta de modelos que aporten sentido a los símbolos algebraicos es uno de los impedimentos más serios que obstaculiza el aprendizaje de la resolución de ecuaciones (Rivero, (s.f.), p.1). Otro de ellos y el más importante, está determinado por la forma en que es comunicado dicho conocimiento y la manera como el maestro logra que los estudiantes identifiquen un mismo objeto matemático en registros de representación diferentes.

Por lo anterior, es relevante tener en cuenta la articulación de los diversos registros de representación con los que el docente está presentando el conocimiento matemático; en efecto, no tener en cuenta estas reglas provoca que los estudiantes no alcancen una mayor aprehensión de las ecuaciones y sus representaciones.

Es por lo anterior y teniendo en cuenta la teoría planteada por el doctor Raymond Duval acerca de la enseñanza de las ecuaciones, donde pone en evidencia los valores susceptibles de variación en el aprendizaje de las ecuaciones para pasar de su representación gráfica a la ecuación representada, que nos proponemos el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes de la I.E. Simón Bolívar al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica cartesiana y las unidades significativas de la escritura algebraica de una ecuación lineal?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

- Analizar las condiciones del aprendizaje de las ecuaciones lineales, haciendo énfasis en los procesos y métodos que presentan los estudiantes en la conversión de registros semióticos.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar el tipo de procedimiento utilizado por los estudiantes de la I.E Simón Bolívar al trabajar situaciones asociadas al concepto de ecuación lineal.
- Establecer el nivel de reconocimiento que tienen los estudiantes de la I.E Simón Bolívar de las variables visuales pertinentes en una gráfica cartesiana y las unidades significativas de la escritura algebraica en una ecuación lineal.
- Identificar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en la conversión de registros algebraicos y gráficos de ecuaciones lineales.

1.3 Justificación

La ley 115 de 1994, reconoce a las matemáticas como un área esencial en la educación básica y media, la cual como área básica tiene como objetivo el desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico de los educandos, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana; atendiendo a esto, son creados los lineamientos curriculares en el año de 1998, que van actuar como una serie de guías que le ayudan al docente a enfatizar cuáles son los conocimientos y procedimientos básicos que deben alcanzar los estudiantes en su etapa escolar. En estos se le da importancia al desarrollo de situaciones didácticas que estén relacionadas con el

entorno de los niños, con las cuales se busca una mayor interpretación de las representaciones de ecuaciones lineales por parte de los estudiantes, logrando así que ellos modelen estas situaciones a través de gráficos, ecuaciones, funciones, etc. Lo cual podría hacerlo más competente en cuanto a su forma de razonar e interpretar situaciones de la vida real donde se requiera el uso de gráficas y operaciones numéricas para llegar a su resolución.

Sin embargo, la adquisición de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes requiere el uso de representaciones semióticas las cuales hacen los objetos matemáticos más explícitos y a los cuales se les puede efectuar tratamientos y conversiones. Como lo plantea (Duval, 2008), los objetos matemáticos no son accesibles por fuera de las representaciones semióticas. De donde el recurso en paralelo a diferentes tipos de representaciones se usa para intentar volver más accesibles los objetos que no son accesibles por fuera de los sistemas de representación.

Ahora bien, con los anteriores criterios relacionados con las representaciones semióticas y su importancia en la enseñanza de las matemáticas, se decidió centrar este trabajo en el análisis de las dificultades que subyacen en la enseñanza de las ecuaciones lineales y su representación gráfica, en este caso se hizo énfasis en los cambios de registro algebraico y gráfico, los cuales como se expuso anteriormente son de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas.

En estudios realizados por investigadores como Duval (1999), se ha evidenciado una serie de incomprensiones y una mala interpretación de situaciones, relacionadas con dos tipos de registro el gráfico y algebraico, se ha notado que el estudiante no logra reconocer las unidades significantes de un registro, lo cual genera un bloqueo en el razonamiento del niño, y por ende la conversión de las representaciones de un sistema a otro ocasiona notables problemas en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. En la enseñanza de las ecuaciones lineales y su representación, el paso de la ecuación a la representación gráfica no genera grandes dificultades para el estudiante, pero al

pedirle al estudiante que realice el paso inverso es donde empiezan las dificultades de lectura e interpretación de la gráfica cartesiana, al no establecer una correspondencia entre variables visuales y variables simbólicas, relativas a los registros de representación gráfica y algebraica es imposible que el estudiante pueda obtener las ecuaciones a partir de la gráfica, debido a que no esta interpretando de forma correcta las variables que tiene implícita la representación grafica de una ecuación.

Por las razones anteriormente expuestas, este trabajo privilegia el enfoque semiótico, con el cual se busca aportar elementos importantes desde lo cognitivo que ayuden a la conceptualización y manejo del concepto de ecuación lineal, enfatizando en presentar algunas indagaciones, sobre las dificultades que presentan los estudiantes en la conversión de los registros gráfico y algebraico, para hacer posible esto, se hará una implementación de un cuestionario en el aula de clases, el cual tiene como objetivo identificar algunos de los errores y dificultades que presentan los estudiantes al realizar la conversión de la representación algebraica y gráfica de una ecuación lineal, en este caso la conversión de la representación gráfica a la escritura algebraica de una ecuación lineal.

2. . MARCO TEÓRICO

Este capítulo presenta la teoría de R. Duval sobre los registros de representación semiótica, como el punto de partida para este trabajo desde una perspectiva cognitiva, donde se estudiará a fondo las representaciones semióticas en un marco de referencia que pretende identificar la definición del concepto de representación y los tipos de representaciones que existen en matemáticas, así como los procesos cognitivos en los cuales está involucrada la construcción de las representaciones. Por ultimo se definirá el concepto de ecuación lineal resaltando sus elementos y las formas de representar este concepto.

2.1 Las representaciones semióticas

Toda actividad matemática implica el uso de representaciones semióticas, debido a que los objetos estudiados no son accesibles perceptiblemente o instrumentalmente, como en otros dominios del conocimiento científico; las representaciones semióticas no se utilizan para evocar objetos o para comunicar simplemente, sino para modelar objetos del mundo abstracto y poder efectuar transformaciones y operaciones con esos objetos de conocimiento, es decir, razonamientos, cálculos, etc. "... el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas, sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótico a otro registro" (Duval, 2008, pág.64), ya que esto permite tener una representación de un objeto matemático en dos registros diferentes pero que en últimas están representando la misma situación.

Ahora bien, la importancia en la variedad de los registros de representación radica en que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación y esto solo puede llegar a ser posible si se tiene un acercamiento al objeto matemático en estudio desde diferentes contenidos del mismo presentados en cada representación, ya que cada una de dichas

representaciones deja ver características y propiedades particulares del objeto representado, las cuales dependen de la forma de representación. De esta manera, los objetos matemáticos como los números, las ecuaciones, las rectas, etc., no serán confundidos con sus representaciones, es decir, las escrituras algebraicas o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras, etc.(Duval, 2008, pág. 64). La Tabla 1 muestra algunas representaciones, en diversos registros, de una ecuación lineal particular, para cada una de ellas se señalan ciertos aspectos que caracterizan dicha representación:

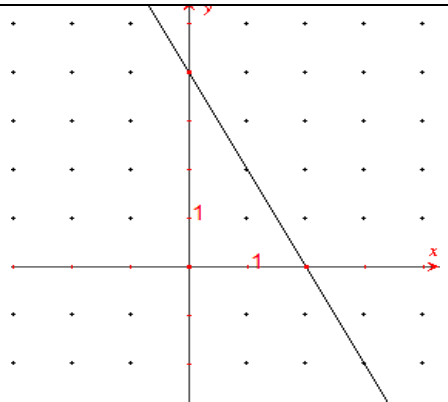
| Representación | Registro | Descripción | | | | | | | | | | | | |
|--|-------------------------|---|----|---|----|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------------------|--|
| $y = -2x + 4$ | Simbólico | Presentación prototípica de una ecuación lineal, en la que el punto de corte y la pendiente quedan claramente identificados por los parámetros. | | | | | | | | | | | | |
| $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ | Simbólico | Puede considerarse un tratamiento de la anterior, en la que los parámetros ahora presentan los puntos de corte con los ejes. | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>-2</td><td>8</td></tr><tr><td>-1</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr></table> | x | y | -2 | 8 | -1 | 6 | 0 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | Tabular (representación auxiliar) | Selección de algunos de los valores posibles de la abscisa asociados a sus respectivos valores en las ordenadas. Al observar dichos valores se puede ver el comportamiento decreciente, o los puntos de corte. |
| x | y | | | | | | | | | | | | | |
| -2 | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 6 | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
|  | Gráfico (cartesiano) | Gráfico en coordenadas cartesianas, centrado en el origen, a escala 1:1; deja ver claramente el comportamiento decreciente de los valores de las ordenadas así como los puntos de corte con los ejes. Se pueden leer, además, los valores de las coordenadas de algunos de los puntos –los que tienen coordenadas asociadas a números enteros-. | | | | | | | | | | | | |
| “Conjunto de puntos del plano cuya ordenada es igual a cuatro menos dos veces la abscisa” | Lengua natural | Posible descripción (de las tantas posibles) de la primera ecuación. | | | | | | | | | | | | |

Tabla 1. Diversas representaciones de una ecuación lineal.

Se ve claramente en la Tabla 1 que el objeto matemático representado no es “capturado” en su totalidad por ninguna de las representaciones presentadas, es solo la coordinación de todas ellas la que permite acercarse a una comprensión precisa de aquello que estamos llamando una ecuación lineal. Porque con la presentación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Ahora, la comprensión integral de un concepto implica una coordinación entre los registros, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. Coordinación que se pone de manifiesto por el uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva lo que da como resultado la articulación entre los diferentes registros de representación semiótica. Como lo plantea Duval, (2004), no es suficiente con mostrar el objeto en diferentes representaciones, es necesario enseñar cómo se hace el paso de una a otra y cómo se coordinan entre sí.

2.2 Registros de representación movilizados en matemáticas

Ahora bien, en matemáticas se movilizan cuatro diferentes tipos de representación, los cuales se clasifican de acuerdo con su tipo de aprehensión, en discursivos o no discursivos y según su campo de acción, en monofuncionales o plurifuncionales (figura 1).

Los **registros discursivos**: son los que utilizan una lengua, de ellos solo se puede tener una *aprehensión secuencial*, y admiten la formulación de proposiciones, las cuales pueden ser calificadas como verdaderas o falsas. A esta clase pertenecen el lenguaje natural, el registro de escritura algebraica, los registros de escritura simbólica utilizados en lógica, entre otros.

Los **registros no discursivos**: de ellos solo se puede tener una *aprehensión sinóptica*, y muestran formas o configuraciones de formas así como organizaciones. A esta clase de registros pertenecen las figuras geométricas planas o en perspectiva (es decir, configuraciones de formas en 0, 1, 2 o 3

dimensiones como puntos, líneas, curvas cerradas, entre otras), gráficos cartesianos de funciones, relaciones, el cambio de sistemas de coordenadas, etc.

Los registros plurifuncionales: *son utilizados en todos los dominios de la vida cultural y social. Estos registros no son algoritmizables*, y su empleo dentro de las matemáticas es completamente diferente al uso que los estudiantes están habituados. Este es el caso del empleo de figuras geométricas para modelizar, o el lenguaje natural para dar explicaciones, definiciones, descripciones, argumentar a partir de observaciones, entre otros.

Los registros monofuncionales: son registros de *carácter técnico o especializado*, las reglas que determinan el empleo de los signos y los símbolos, se hace exclusivamente en función de su forma. Esto es lo que, por lo demás, los hace más potentes y más seguros que los que son efectuados en un registro plurifuncionales. *Sus tratamientos son principalmente algoritmizables*. A este tipo de registros pertenecen los grafos cartesianos, los sistemas de escritura numérica, el lenguaje simbólico utilizado en lógica, etc.

| | REPRESENTACIÓN DISCURSIVA | REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA |
|---|---|---|
| REGISTROS PLURIFUNCIONALES: los tratamientos no son algoritmizables | Lengua natural <i>asociaciones verbales (conceptuales)</i> <i>descripción, definición, explicación</i> <i>razonamiento :</i> — <i>argumentación a partir de observaciones, de creencias..</i> — <i>deducción válida a partir de definición o de teoremas</i> | Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 0, 1, 2, 3 D) <i>aprehensión operatoria y no solamente perceptiva</i> <i>construcción con instrumentos,</i> <i>modelización de estructuras físicas</i> <i>(ej: cristales, moléculas...)</i> |
| REGISTROS MONOFUNCIONALES: los tratamientos son principalmente algoritmos | Sistemas de escritura: - numéricas (binaria, decimal, fraccionaria...) - algebraicas - simbólicas (lenguas formales) <i>Calculo literal, algebraico, formal...</i> | Grafos cartesianos (vvisualización de variaciones) <i>cambio de sistema de coordenadas,</i> <i>interpolación, extrapolación</i> |

Figura 1. Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas. Se indica en *itálicas* el o los tratamientos característicos del tipo de registro

Desde la perspectiva de este trabajo es importante definir qué tipo de registro es el gráfico cartesiano y el de escritura algebraica.

Los sistemas de escritura algebraica son registros monofuncionales discursivos, debido a que son propios de las matemáticas, las transformaciones posibles en el interior del registro son algoritmizables porque están determinadas por las propiedades de los objetos matemáticos, en los que los tratamientos por ejemplo, tienen que ver con los procesos algebraicos como el producto o la simplificación de una expresión algebraica y con ellos podemos expresar nuestras ideas a una comunidad matemática

Los gráficos cartesianos son registros monofuncionales no-discursivos, esta clase de registros muestran de manera simultánea todas las propiedades de los objetos matemáticos, lo cual exige del sujeto una discriminación de las variables visuales de la gráfica que aportan información relevante sobre las

propiedades del objeto que le permitan transformar la representación gráfica en otra equivalente, es decir una que conserve la referencia al mismo objeto, en donde los cambios en escala o unidades en el sistema de coordenadas, la interpolación y extrapolación corresponden a sus tratamientos.

2.3 Transformaciones cognitivas utilizadas en matemáticas

Según Duval (1999) formar una representación semiótica es seleccionar un conjunto de caracteres o de signos dentro de un sistema semiótico, de acuerdo con las posibilidades de representación propias de este registro, para que representen las características principales de un objeto; de esta manera la representación construida reemplaza la imagen percibida del objeto al hacerla presente cada vez que se necesite. Se forma una representación semiótica cuando se le asignan nombres a los objetos, se generan imágenes esquemáticas sobre ellos o se codifican relaciones o propiedades pertinentes a una transformación en los mismos.

Se ha mostrado que en la actividad matemática se movilizan cognitivamente dos tipos de transformaciones de representación semiótica. Existen las efectuadas en el interior de un mismo registro y otras transformaciones que consisten en cambiar de registro de representación. Para designar estos dos tipos de transformaciones se ha empleado los términos **tratamiento** y **conversión** (Duval, 2004, p.28).

2.3.1 Tratamiento

Un tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. El tratamiento es, pues una transformación estrictamente interna a un registro. La transformación de una representación en otra representación del mismo registro (un tratamiento), se hace según las reglas que corresponden a las posibilidades de funcionamiento del sistema y a las propiedades matemáticas representadas.

Ahora bien, cuando se efectúa la operación de tratamiento sobre una representación, esta se transforma en otra representación, que está construida utilizando el mismo sistema semiótico. Es decir, no se cambia el sistema de signos en el cual está expresada la representación inicial. Este tipo de transformación también es reconocida como una transformación interna a un registro semiótico. Esta operación de tratamiento por lo general se realiza cuando se debe responder a una pregunta, solucionar un problema o satisfacer una necesidad. Por ejemplo, al realizar un cálculo tratamos de manera interna representaciones semióticas formadas en el registro de la escritura algebraica o numérica. Otro caso de tratamiento es la paráfrasis a través de la cual se transforma una expresión lingüística en otra.

Al realizar un tratamiento sobre una representación semiótica se aplican sobre ella determinadas reglas de expansión. La aplicación de dichas reglas hace que la nueva representación sea una representación expandida informacionalmente. Es decir, la nueva representación aunque construida en el mismo registro que la representación de partida, provee nuevas posibilidades creativas. Por ejemplo en el español (un idioma) hay reglas de coherencia temática y asociativas de contigüidad y similitud (Saussure, 1973). En este último caso, cuando se construyen metáforas, paráfrasis y analogías a partir de un enunciado, aumenta la potencia creativa de la lengua natural.

2.3.2 Conversión

Una conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro A en otra representación del mismo objeto en un registro B. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación...), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. La conversión no posee reglas para pasar de un sistema a otro. Suponerlo haría negar la heterogeneidad de los sistemas de representación y postular la existencia de un hipersistema, único y homogéneo, de

representación en el cual la variedad de registros de representación realmente movilizados podría ser reducida fácilmente (Duval, 2008, p.79).

Duval (1999, p.46) afirma que la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los estudiantes. Entre los aspectos que dificultan esta transformación menciona la comprensión de un contenido limitado algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros, o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas, pero desde un punto de vista cognitivo, las cosas son de otra manera. La conversión y el tratamiento son fuentes totalmente independientes de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, y parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento (Duval, 1999, p.48).

Es importante reconocer que la conversión entre registros semióticos, presenta más dificultades para los estudiantes porque la conversión requiere el uso de una nueva representación diferente a la inicial, un ejemplo es el paso de la gráfica cartesiana a la expresión algebraica que la representa, en este sentido la dificultad radica en que el paso de registro no se hace de forma espontánea, como si lo son las operaciones de formación y de tratamiento de las representaciones.

Otro aspecto a tener en cuenta es que la dificultad para la conversión que presentan los estudiantes, radica en la necesidad de discriminar las unidades significantes pertenecientes a cada uno de los sistemas semióticos en los cuales se expresan las representaciones, para proceder después a articularlas después. Estas unidades pueden ser de carácter discreto, como en el caso del lenguaje formal, o presentarse de forma integrada como en los gráficos cartesianos. La dificultad también es generada porque estas unidades no siempre presentan la misma función. Por ello los estudiantes antes de proceder a convertir una representación deben aprender a discriminar de manera específica cada una de

las unidades que conforman el registro semiótico en el cual se expresan las representaciones que quieren convertir.

2.4 Visualización matemática

Una manera de medir la capacidad del alumno para realizar la conversión, particularmente del registro gráfico al algebraico, es su habilidad para desarrollar la visualización.

Por principio la idea de visualización suele confundirse con la visión, Duval (1999, pag.12) expone que “la visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir ni mental ni física”

“... la visualización esta basada en la producción de una representación semiótica.”.

La visualización y el uso de las diferentes representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación de conceptos. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático y considerar lo visual como un preludio hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiantes formar varios modelos de una situación de aprendizaje. (Hitt, 1998).

El concepto de visualización es ampliamente utilizado en todos los temas relacionados con la matemática, siendo importante desarrollar en el estudiante la visualización matemática lo cual le ayudara a visualizar los diferentes registros de representación semiótica en la construcción de conceptos matemáticos, como lo señala Hitt, la visualización matemática requiere dela habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro.

2.5 Conversión entre registros semióticos

Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e

imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representaciones. La conversión no se reduce pues a una codificación. Veamos un contraejemplo planteado por el Duval: la regla cartesiana de codificación para trazar cualquier representación gráfica cartesiana a partir de una ecuación o inecuación. Esta regla asocia puntos y pares de números, lo que permite solo una percepción numérica selectiva, y no permite leer una representación gráfica. Sin embargo usar esta regla para trazar cualquier representación gráfica no puede llevar a notar las características visuales que corresponden a las características de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales. Para poner en evidencia esta laguna cognitiva basta con proponer una tarea de elección en la cual la habitual dirección de conversión, que se enfoca sobre los aspectos numéricos mediante el trazo y la lectura, se invierte Figura 2 (Tomado de Duval, 1996).

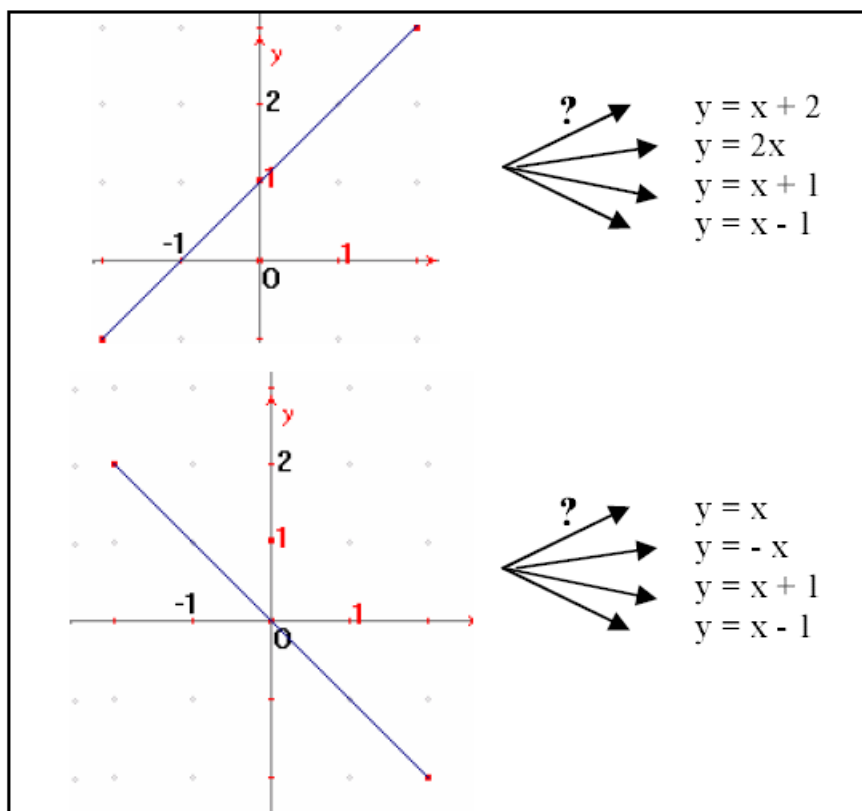


Figura 2. Un ítem de reconocimiento cualitativo para la conversión entre la representación gráfica y la notación algebraica

En el figura anterior podemos observar que una tarea de inferir la ecuación de la grafica correspondiente es compleja para los estudiantes ya que para realizar la conversión de la gráfica cartesiana a la escritura algebraica no solo se requiere una vía del punteo la cual es utilizada frecuentemente por ellos en la construcción de una gráfica a partir de una ecuación, esta vía del punteo⁴ solo permite la construcción de una gráfica a partir de una representación algebraica pero no permite interpretar la gráfica, para ello se necesita una interpretación global la cual permite identificar todas la modificaciones pertinentes posibles de la gráfica y de la forma de la escritura algebraica de la ecuación representada.

Ahora, cuando los estudiantes se enfrentan con este tipo de tarea de reconocimiento cualitativo, para la mayoría resulta obvio que no pueden responder a la discriminación que se les pide mediante la práctica habitual del trazado y lectura de los valores numéricos de las gráficas, por eso la pregunta básica para cualquier estudiante es: ¿Cómo discriminar las características visuales de la gráfica que son matemáticamente importantes para la conversión? En otras palabras, ¿Cómo ver las características propias de la escritura de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa?

Para afrontar este problema debemos tener en cuenta la forma que el sistema semiótico de representación cartesiano puede representar objetos matemáticos (las relaciones y no solo las funciones). La ley básica de funcionamiento semiótico es la siguiente: **nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico en el cual su significado toma valor en oposición a otra representación dentro del sistema**. Aplicando esto obtenemos esta red para las características visuales que son matemáticamente relevantes dentro de este tipo de representación (Figura 3)⁵.

⁴ es el caso en que se asocia un par ordenado con un punto en el plano, y por tanto, se da la indicación de un valor en un momento dado.

⁵ En la figura 3 la notación utilizada para simbolizar la ecuación lineal es $y = ax + b$

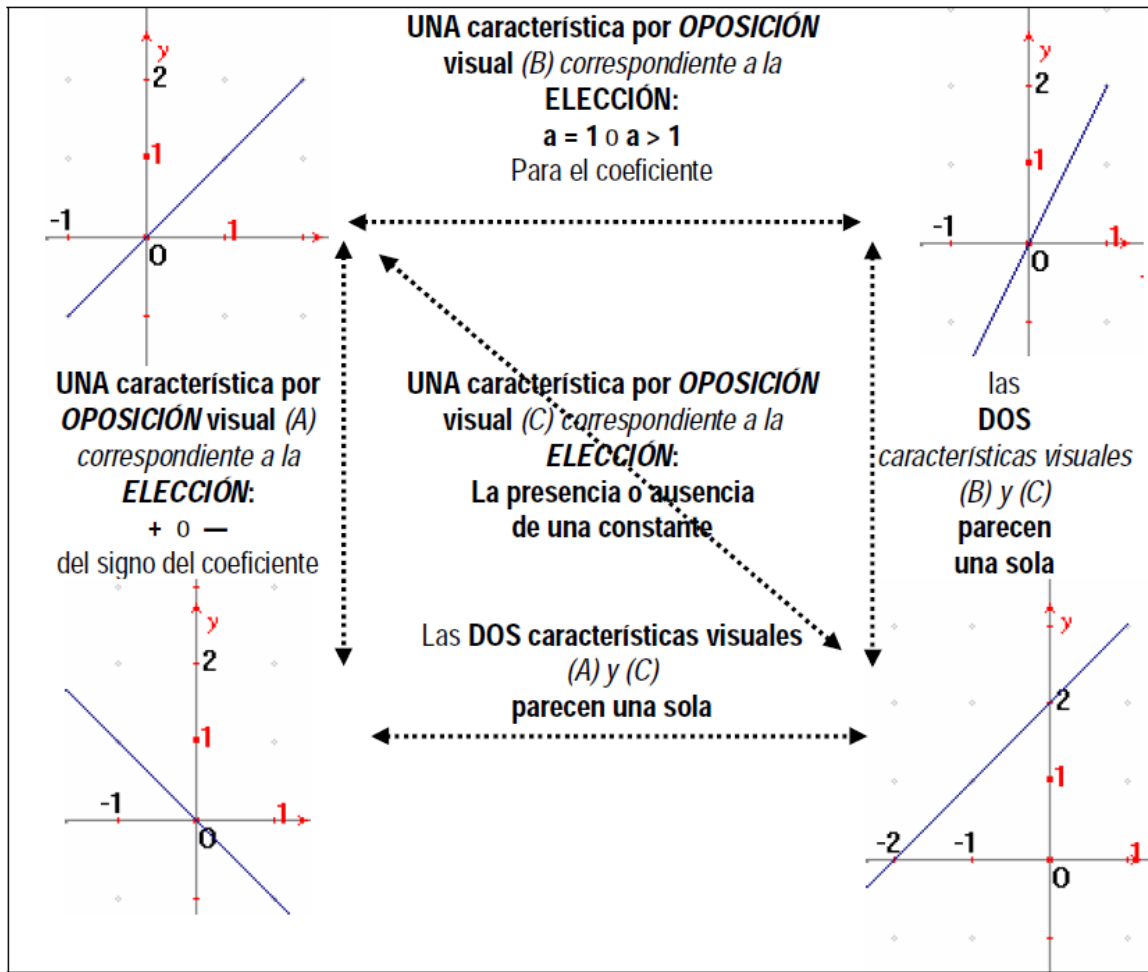


Figura 3. Red de discriminaciones cognitivas requeridas para una conversión entre gráficas y ecuaciones.

Como se puede ver en la Figura 3 solo a través de la oposición entre dos gráficas, se pueden observar las características visuales de la gráfica que son relevantes para la conversión, las flechas que aparecen indican la oposición entre dos gráficas y las letras (A), (B) y (C) indican las características visuales que se deben tener en cuenta dependiendo el tipo de grafica que se quiere convertir.

De la anterior figura podemos hacer cuatro comentarios cuyas consecuencias son importantes para el aprendizaje de las matemáticas:

- Cada característica visual particular puede ser distinguida **solamente a través de la oposición de dos gráficas**.
- Cada característica visual particular se **combina con una característica semántica de la ecuación y no con la función representada**.

- Es a través de esta red de características visuales distintivas mediante la cual los estudiantes logran convertir fácil y significativamente gráficas y ecuaciones.
- Tal red puede ser extendida a todos los tipos de representaciones de funciones y también a las representaciones de relaciones y a las curvas que no son funciones (Duval, 1999 p. 46). Eso quiere decir que **tal red no depende de algún contenido o “concepto” matemático específico.**

Siguiendo con el análisis tenemos que la conversión tiene dos características propias, la primera se refiere a que es **orientada**, es decir, se conoce el registro de partida así como el de llegada, y la segunda expresa que la conversión **puede ser o no congruente**. La conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus **unidades significantes**⁶ para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios:

- **Correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro:** Este criterio hace referencia a que a cada unidad significativa del registro de salida se le puede asociar una unidad significativa elemental en el registro de llegada
- **univocidad semántica terminal:** Este criterio establece que cada unidad significativa elemental de la representación de partida se relaciona con una única unidad significativa elemental en el registro de llegada. En otras palabras, existe una relación uno a uno entre los elementos que componen la representación inicial y aquellos que componen la representación final.
- **conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones:** Este criterio se refiere a que las unidades significantes correspondientes a cada una de las dos representaciones comparadas están organizadas de tal manera que las unidades en correspondencia semántica (con el mismo

⁶Se entienden por unidades significantes los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro.

significado) son aprendidas según el mismo orden en las dos representaciones. Es decir, este criterio exige correspondencia en el orden de arreglo de las unidades que componen cada una de las representaciones.

Se tomó como ejemplo para ilustrar estos tres criterios, el presentado por Duval (2004, p.79). Este es un ejemplo de gráfica en el plano cartesiano, no de una línea recta.

| | Correspondencia semántica de las unidades significantes | Univocidad semántica terminal | Conservación del orden |
|---|---|-------------------------------|---|
| El conjunto de los puntos cuya ordenada es <u>superior</u> a la abscisa... ↓ $y > x$ | sí | Sí | sí |
| El conjunto de los puntos que tienen una abscisa <u>positiva</u> ... ↓ $x > 0$ | no >0 es una perífrasis (un único significado para varias palabras) | Sí | sí |
| El conjunto de los puntos cuya Abscisa y ordenada tienen el <u>mismo signo</u> ↓ $x (\neq) y > 0$ El producto de la abscisa y la ordenada es mayor que 0 | no | No | no globalización descriptiva (2 caso) |

Tabla 2 los tres factores de congruencia y no congruencia en la conversión de una representación.

En el primer caso existe correspondencia semántica puesto que a las tres unidades “puntos cuya ordenada”, “es superior” y “abscisa” del registro verbal les corresponde respectivamente en el registro algebraico. " $y, > y x$ " En cuanto al criterio de univocidad semántica la representación en el registro algebraico es única y por último la transferencia del registro verbal al algebraico se hace de manera transparente siguiendo el orden de la descripción verbal.

En el segundo caso a la unidad “positiva” no se le puede hacer corresponder un símbolo en el registro algebraico sino que es necesario utilizar la expresión " > 0 " para indicarla.

Para el último ejemplo, a la unidad “mismo signo” no le corresponde una unidad significativa elemental en el registro algebraico, sin embargo, esta unidad podría corresponderse con “el producto de la abscisa y la ordenada es mayor que cero”, es decir, $x \cdot y > 0$, nótese que esta unidad no guarda el mismo orden de los términos de la frase inicial; adicionalmente cabría la posibilidad de utilizar la representación $(x > 0 \text{ y } y > 0)$ ó $(x < 0 \text{ y } y < 0)$ con lo que no se cumple la univocidad semántica. Cuando alguno de estos criterios falla se dice que no hay correspondencia entre las representaciones o no son congruentes. (Duval, 2004, p.74).

2.6 Las tres maneras de ver un gráfico cartesiano

Duval expone tres formas de ver una representación gráfica. La primera es la vía del punteo, esta solo permite relacionar un punto con una pareja de números y viceversa. La segunda es la vía de extensión del trazo efectuado, esta corresponde a las tareas de interpolación y extrapolación del trazo, esta vía permanece puramente mental y no permite al igual que la primera apreciar las variables visuales pertinentes para poder leer una gráfica e inferir información importante. La tercera de ellas es la vía de interpretación global de las propiedades de la figura, esta aborda de manera más puntual la correspondencia semiótica entre los registros de representación utilizados, toma en consideración las variaciones que ocurren en un gráfico cartesiano y en paralelo en la escritura algebraica (Duval, 1988, p.127).

En cada una de estas tres maneras de ver las representaciones graficas (tabla 3) podemos distinguir lo que se observa en el gráfico cartesiano y lo que los aspectos observados permiten identificar. Uno de los problemas específicos del aprendizaje es hacer pasar a los estudiantes de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa. Solo con este tipo de aprehensión es que puede haber coordinación con el registro de la escritura algebraica de relación y que los gráficos cartesianos pueden funcionar como una guía para una mejor interpretación de los mismos.

Duval 2004 define las tres maneras de ver un grafico cartesiano de la siguiente forma:

Puntual o local, se asocia un par ordenado con un punto en el plano, y por tanto, se da la indicación de un valor en un momento dado.

Icónica, evoca lo alto y lo bajo, las subidas suaves o abruptas a partir del nivel de base, los crecimientos o decrecimiento. Es una forma de ver los gráficos cartesianos que se enfoca en los cambios de posición, en las tendencias de las relaciones.

Global cualitativa, es la manera útil de ver desde un punto de vista matemático, es decir, que permite visualizar una relación entre dos variables (la variable independiente y la variable dependiente), las cuales pertenecen a dos conjuntos numéricos.

| Tres maneras de VER | Lo que es OBSERVADO | Lo que es IDENTIFICADO |
|--|--|---|
| I. aprehensión LOCAL POR PUNTEO (solo se retienen puntos considerados aisladamente) | asociaciones {puntos, parejas de números} | una asociación entre dos valores numéricos La regla de construcción que es una regla de codificación: un punto de intersección sobre un plano cuadrículado según dos ejes graduados (<i>la figura fondo</i>) que corresponden a una pareja de números. |
| II. aprehensión ICÓNICA (la imagen de una "tendencia") | desplazamientos de subida o de bajada en relación con un nivel horizontal | una analogía Con cambios de posición en el espacio físico real (estar más alto, más bajo), relieve... |
| III. aprehensión GLOBAL CUALITATIVA (se trata de poder discriminar las características de dos grafos de la misma forma o no) | formas D1 (rectas, curvas) o D2 (zonas) que tienen características figúrales intrínsecas y características extrínsecas : <i>orientación en relación con los dos ejes, y posición</i> (intersección) en relación a los ejes. Un grafo es la figura que se destaca de la figura-fondo de los ejes. | una relación entre dos variables definidas sobre dos conjuntos de valores |

Tabla 3 tres maneras de ver los gráficos cartesianos. (Duval, 2004, pag. 47)

De lo anterior planteado podemos decir que para la conversión entre el registro gráfico al algebraico, es importante tener una aprensión global cualitativa de la representación gráfica, porque ella permite de un lado, dotar de significado las expresiones y/o relaciones algebraicas, y de otro, reconocer lo que varía y cómo varía.

2.7 Variables simbólicas significativas de las expresiones algebraicas y variables visuales pertinentes en los gráficos.

Las variables visuales y las unidades simbólicas significativas para la comprensión de las representaciones gráficas son de gran importancia ya que a través de ellas se puede realizar un análisis de la gráfica y de la ecuación, es decir, son el reconocimiento de estas las que ayudan a establecer ciertos soportes intuitivos dentro de la ecuación y la gráfica que permiten realizar la conversión de estos dos tipos de registros, tanto los símbolos de la ecuación (signos +, -, <, >, variables, constantes, etc.) como la orientación de la recta de una gráfica o su inclinación, se convierten en unidades y variables significantes importantes y decisivas para realizar una conversión de entre los registros antes mencionados.

De manera general la ecuación lineal tiene la estructura $y = mx + b$, en la cual se presentan las siguientes unidades significativas (Duval, 1988, p.127):

- Los signos relacionales (<, >, =, ...).
- Los símbolos de operación o de signo (+, -).
- Los símbolos de variable.
- Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.

En una ecuación, cada símbolo generalmente se corresponde con una unidad significativa. Aunque existen unidades significativas en las cuales se omiten los símbolos. Así se omite el coeficiente 1 y el carácter positivo de los coeficientes mayores de cero.

Ahora bien, para realizar la interpretación de los gráficos cartesianos se requiere la discriminación de un grupo de valores que provienen de 5 variables visuales pertinentes, dos generales y tres particulares (Duval, 1988, p.127).

Las dos variables generales son:

- La implantación de la tarea, es decir lo que se desprende como figura sobre fondo: un trazo, una zona.

- La forma de la tarea: esta variable se refiere al tipo de trazo realizado, que delimite o no una zona, es recto o curvo. Si es curvo, abierto o cerrado.

Las tres variables particulares se plantean en la siguiente tabla:

| VARIABLES VISUALES | VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES |
|--|---|
| El sentido de la inclinación de la recta. | <ul style="list-style-type: none"> • El trazo sube de izquierda a derecha. • El trazo desciende de izquierda a derecha. |
| Los ángulos del trazo con los ejes. | <ul style="list-style-type: none"> • Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado. • El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical. • El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical. |
| La posición del trazo con respecto al origen del eje vertical. | <ul style="list-style-type: none"> • El trazo corta al eje y arriba del origen. • El trazo corta al eje y abajo del origen. • El trazo corta al eje y en el origen. |

Tabla 4. Variables visuales a discriminar en la interpretación de una representación gráfica. (Duval, 1988, p.128)

Sin embargo, a cada uno de los valores de las variables visuales, le corresponde una unidad significativa en la ecuación. Para el caso de la ecuación $y = mx + b$ lo que importa es el valor del coeficiente m y la constante b . Siguiendo con Duval (1988), al realizar un análisis de las variables visuales y sus valores se pueden observar los siguientes aspectos:

- Los valores del ángulo de la recta en relación con el eje x y los valores del punto de corte entre la recta y el eje y , se basan para cada punto de la recta en un único valor visual, constituido por la altura que presenta la recta con respecto al eje de las abscisas.
- El concepto de pendiente traducido algebraicamente, cubre dos unidades significativas diferentes, una definida respecto al signo y la otra respecto al entero 1. Y estas dos unidades significativas corresponden a dos variables diferentes, respectivamente el sentido de la inclinación y el ángulo.
- No hay congruencia entre la dirección del trazo en el plano y el coeficiente que indica esta dirección en la ecuación. Esto sucede porque independiente del valor del coeficiente, este presenta dos propiedades distintas, una con respecto al valor de 0 y otra con respecto al valor 1.

Igualmente estas dos unidades significativas corresponden a dos variables visuales diferentes: el sentido de la inclinación y el ángulo (Cuadro 1).

| VARIABLES VISUALES | VALORES | UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDIENTES |
|----------------------------|----------------------|--|
| Sentido de la inclinación. | Trazo ascendente. | Coeficiente >0 ausencia del símbolo +. |
| | Trazo descendente. | Coeficiente <0 presencia del símbolo -. |
| Ángulos con los ejes. | Partición simétrica. | Coeficiente $=1$ paso del coeficiente escrito. |
| | Ángulo menor. | Coeficiente <1 |
| | Ángulo mayor. | Coeficiente >1 |
| Posición sobre el eje y. | Corta arriba. | Se añade una constante signo +. |
| | Corta abajo. | Se sustrae una constante signo -. |
| | Corta en el origen. | Pasa de corrección aditiva. |

Tabla 5. Unidades simbólicas correspondientes a cada uno de los valores tomados por las variables visuales de las representaciones gráficas cartesianas. (Duval, 1988, p.129)

Después de haber explicado las tres variables visuales de las gráficas cartesianas, con sus respectivos valores y unidades simbólicas correspondientes, a continuación se muestran los posibles valores que puede tomar la representación gráfica de acuerdo a los valores del signo y del carácter del número de la pendiente, de acuerdo al sentido de la inclinación y el ángulo de la misma, y sus respectivos ejemplos de cada posible representación algebraica del gráfico cartesiano planteado.

| SENTIDO DE LA INCLINACIÓN | ÁNGULO | POSICIÓN CON RESPECTO AL ORIGEN | EJEMPLOS |
|---------------------------|--------|---------------------------------|------------------------|
| > 0 | = 1 | Nada | $y = x$ |
| | | + | $y = x + 1$ |
| | | - | $y = x - 1$ |
| | > 1 | Nada | $y = 2x$ |
| | | + | $y = 2x + 1$ |
| | | - | $y = 2x - 1$ |
| | < 1 | Nada | $y = \frac{1}{2}x$ |
| | | + | $y = \frac{1}{2}x + y$ |
| | | - | $y = \frac{1}{2}x - 1$ |

Tabla 6. Valores del signo y del carácter del número en la pendiente de acuerdo al sentido de la inclinación y al ángulo de la misma. (Duval, 1988. p.130)

Según la Tabla 6, para las rectas no paralelas a los ejes hay 18 representaciones gráficas que son distintas visualmente de manera significativa. A cada una de estas representaciones corresponde una ecuación particular, en el caso del paralelismo a uno de los ejes, se desaparecen las variables que se refieren a este eje.

Como se ha mencionado anteriormente para ir de la escritura simbólica a la gráfica resulta relativamente fácil con la utilización de la sola vía del punteo, en este caso es darle solo valores a x y construir la tabla de valores y realizar la gráfica; pero para ir de la gráfica a la ecuación este paso no es posible, en este caso se hace necesario identificar cada uno de los valores de las variables visuales e integrarlas todas; es decir, se centra la atención en las propiedades de la recta y su sentido y no en los valores particulares uno a uno que se necesitan en una vía del punteo.

Ahora, para discriminar las unidades significantes que componen una representación se puede utilizar el siguiente método, planteado inicialmente por Piaget: “hacer variar un solo factor a la vez, mientras que los demás permanecen sin cambio” (Duval, 1999, p.77). Duval señala además que la discriminación de las

unidades significantes de una representación y la aprehensión de lo que ella representa, depende de la organización de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia de un registro, es decir, es necesario explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, cada uno de los registros deben ser el objeto de un trabajo de exploración de las variaciones sistemáticas y de un trabajo de observación de las variaciones concomitantes. Según lo anterior, las situaciones de aprendizaje centradas en la coordinación de los registros, en nuestro caso el registro gráfico y el algebraico, requieren que se identifiquen todas las variaciones cognitivamente pertinentes en un registro, de manera que se pueda utilizar el método de las variaciones que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio, para así llegar a la aprehensión de la significancia de estas variaciones en el otro registro, en otras palabras, para cada variación en el registro gráfico de una ecuación, obtenemos una variación concomitante de forma en el registro de la escritura algebraica

2.8 Aspectos formales sobre el concepto de ecuación lineal

El estudio de los objetos matemáticos en el aula de clases, están mediados por la conceptualización y formalización de los mismos, apoyados en la teoría matemática construida a través del tiempo. A continuación se realiza una exposición de la forma como se da inicio al estudio del concepto ecuación lineal.

El concepto de ecuación lineal ha sufrido muchas transformaciones, actualmente Una ecuación lineal significa que es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia.

En el sistema cartesiano representan rectas. Una forma común de las ecuaciones lineales de dos variables es: $y = mx + b$

Donde m representa la pendiente y el valor de b determina el punto donde la recta corta al eje y (la *ordenada al origen*). La siguiente tabla muestra algunos de los elementos o conceptos que hacen parte del concepto de ecuación lineal.

| Terminología | Significado | Ejemplos |
|--------------|--|--|
| Constante | Una letra o símbolo que representa un elemento <i>específico</i> de un conjunto. | $5, -\sqrt{2}, \pi$. |
| Variable | Una letra o símbolo que representa <i>cualquier</i> elemento de un conjunto. | Generalmente x denota la variable independiente e y la variable dependiente. |

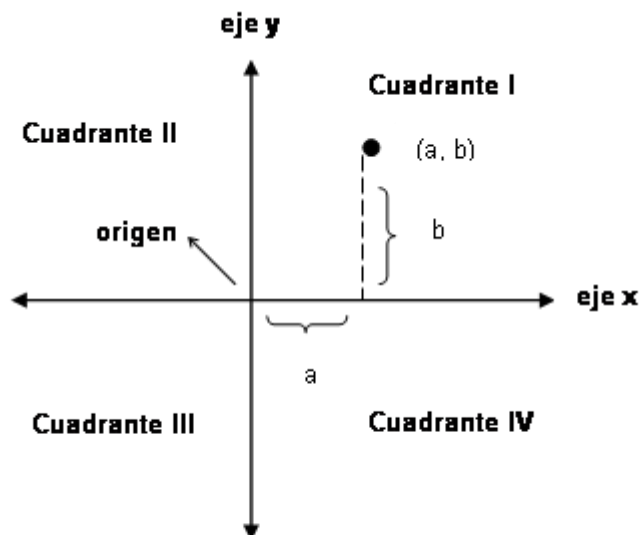
Tabla 7. Elementos de una ecuación lineal.

Las ecuaciones lineales se caracterizan por las líneas rectas que forman su gráfica (representación en el plano cartesiano), la inclinación de dicha recta está determinada por la pendiente m y la ordenada en el origen es b .

2.8.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Para dibujar la gráfica de una ecuación lineal en dos variables usamos el sistema de coordenadas cartesianas. El sistema de coordenadas cartesianas consiste de dos rectas numéricas: una recta horizontal, llamada el eje de x y una recta vertical, llamada el eje y . Ambas rectas se intersecan en el origen. La intersección del eje x y el eje y dividen el plano cartesiano en cuatro cuadrantes: Cuadrante I, Cuadrante II, Cuadrante III y Cuadrante IV, enumerados en contra de las manecillas del reloj.

Un par ordenado de números reales denotado de la forma (a, b) representa un punto en el sistema de coordenadas cartesianas. El primer número del par ordenado a se llama la coordenada x o la abscisa. El segundo número del par ordenado b se llama coordenada y o la ordenada. En el par ordenado (a, b) el orden es significativo, esto es, si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. El origen del sistema de coordenadas cartesianas se expresa de la forma $(0, 0)$.



2.8.2 Gráfica de las ecuaciones lineales en dos variables

Las Gráficas se utilizan para mostrar relación entre los datos. Estas tienen su uso en las matemáticas, ciencias y comercio. En matemáticas podemos usar gráficas para mostrar relaciones entre las variables de una ecuación. Las gráficas de las ecuaciones lineales son líneas rectas. Una forma de construir gráfica de líneas recta es a través de interceptos.

La coordenada x del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje de x se llama intercepto en x . Para hallarlo se le asigna a y el valor de cero. El intercepto en x se expresa de la forma $(x, 0)$.

La coordenada y del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje de y se llama intercepto en y . Para hallarlo se le asigna a x el valor de cero. El intercepto en y se expresa de la forma $(0, y)$.

Finalmente este marco teórico nos muestra la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza de las matemáticas, cuya finalidad es hacer los objetos matemáticos accesibles para los estudiantes mediante el uso de registros semióticos, ya sea que se realicen en ellos actividades que solo requieran de un tratamiento o de una conversión. Nuestro objetivo mediante este contexto es

promover en los estudiantes de grado noveno de la I.E Simón Bolívar el aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos variables y la conversión entre los registros gráfico cartesiano y algebraico, a partir de la teoría de registros de representación semióticos presentada por Duval.

3. ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Inicialmente se presenta una descripción del marco contextual y los elementos teóricos que se tuvieron en cuenta para la creación y aplicación de las situaciones. Después se presenta la parte de la planificación, organización, implementación y concepciones que se llevaron a cabo para la planificación de las situaciones.

Posteriormente se muestra la fase de organización y análisis en la cual se identifican los resultados obtenidos, las diferentes habilidades o falencias que tienen los estudiantes desde el punto de vista teórico en el cual está basado el trabajo, es decir, se tendrá en cuenta la profundización en el análisis cuantitativo, apoyado en algunas estadísticas básicas de los cuestionarios, también se involucran aspectos cualitativos, como la discriminación de los requerimientos cognitivos (tratamientos/conversiones) que demandan la solución de las preguntas. Para ello, se considerará los elementos teóricos mencionados en el trabajo

3.1 Marco contextual

En la elaboración de este trabajo, los cuestionarios fueron implementados en el año escolar 2012 con estudiantes de grado 9° de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Simón Bolívar, la cual es una entidad pública mixta (mujeres y hombres), que se encuentra localizada en el Municipio de Zarzal (Valle del Cauca).

La institución cuenta con una sola jornada – la cual inicia a las 6:45 a.m. y finaliza a la 1:30 p.m. – para los grados de sexto a undécimo.

Las edades de los estudiantes matriculados en grado noveno oscilan entre los 14 y 16 años, su nivel socio-económico puede clasificarse como medio bajo.

Los cuestionarios fueron aplicados a un solo salón de 60 estudiantes de grado noveno.

3.2 Diseño metodológico

En el diseño metodológico se presentara los principales aspectos que se tuvieron en cuenta para la construcción y posterior aplicación de las pruebas utilizadas en este trabajo, también se expone las diferentes fases en que fue dividido este trabajo, especificando qué actividades o procedimientos se llevaron a cabo en cada una de estas fases, las cuales buscan hacer cumplir los objetivos planteados.

3.2.1 Instrumentos de investigación

Frecuentemente en el estudio de la semiótica se enfatiza que una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos registros de representación. Sin embargo, la conversión entre dos registros no es un asunto fácil para los estudiantes en el aula de clases, por ejemplo, en la conversión de la ecuación al gráfico cartesiano, no parece surgir ninguna dificultad para los estudiantes mediante el trazo y la ubicación de una pareja de puntos en el plano, pero todo cambia cuando se hace la conversión inversa. En este sentido, el objetivo de nuestra investigación es identificar mediante el uso de los cuestionarios propuestos por (Duval, 1988) y (Peralta, 2002) algunas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica de una ecuación lineal, en los estudiantes de grado noveno de la I.E. Simón Bolívar de Zarzal.

Con el uso de estos cuestionarios se indagó sobre cuáles son los procedimientos utilizados por los estudiantes en la conversión de los registros semióticos utilizados en la resolución de cada uno de los ítems del cuestionario, también se buscaba identificar cuáles son las dificultades presentadas por los

estudiantes, cuando al trabajar con representaciones gráficas o algebraicas de una ecuación lineal, intentan convertir una representación en otra.

Encontramos importante caracterizar las conversiones que hacen los estudiantes en torno a la ecuación lineal, pues esto podría contribuir al desarrollo de propuestas curriculares y didácticas encaminadas a mejorar el pensamiento variacional así como la comprensión de los conceptos matemáticos; es por eso que este trabajo se presentó como una estrategia con la cual pretende averiguar cuáles son los procedimientos asociados al uso de representaciones semióticas y su conversión en el aprendizaje del concepto de ecuación lineal.

Para realizar este trabajo de indagación tuvo en cuenta las siguientes fases:

3.2.2 Fase de planificación y organización

En esta fase primero se investigó textos y recursos que nos ayudaron al diseño y al análisis de las situaciones que fueron dirigidas a los estudiantes, luego se plantearon dos cuestionarios, un cuestionario 1 donde el énfasis radicó en el reconocimiento de determinadas características o destrezas por parte del estudiante que son importantes en la resolución de los ejercicios con representaciones gráficas. El cuestionario 2 consistió en preguntas relacionadas con las ecuaciones, su resolución, representación gráfica y la conversión entre los dos tipos de representación, además del reconocimiento de los elementos que las componen (m , que significa pendiente y b , que significa corte con el eje y) y para qué las utilizan, en donde se esperaba que el estudiante solucionara una ecuación y realizara su representación gráfica (orden usual de la conversión en el aula de clases), la actividad se hizo en un ambiente académico de noveno grado en la I.E Simón Bolívar ubicada en el municipio de Zarzal, se esperaba que estos ítems del cuestionario fueran solucionados de forma precisa y coherente por los estudiantes.

3.2.3 Fase de concepción e implementación

Esta fase se orientó al diseño y aplicación de un cuestionario 2 el cual tuvo un diseño basado en las situaciones presentadas en los documentos “Gráficas y ecuaciones la articulación de dos registros” (Duval, 1988) y “Dificultades para

articular los registros gráficos, algebraico y tabular: el caso de la función lineal” (Peralta, 2002), de las cuales se hicieron ajustes referentes al contenido y al grado en que se iba a aplicar, sin descuidar lo que verdaderamente se pretendía encontrar con el uso de estos cuestionarios. Este cuestionario fue presentado para identificar la pertinencia de los tratamientos utilizados por los estudiantes de noveno grado de la I.E Simón Bolívar de Zarzal. El cuestionario tenía como finalidad poner en relieve las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentarse a la articulación del registro gráfico y algebraico, para contestar estas preguntas el estudiante tuvo que poner en juego la conversión entre las representación gráfica y algebraica.

3.2.4 Fase de organización y análisis

Esta fase consistió en la recolección de los datos obtenidos en los cuestionarios, para ello se elaboraron tablas de datos y gráficos estadísticos(ver p. 45 en adelante) que permitieron organizar los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de los cuestionarios, para así realizar un análisis detallado de los resultados obtenidos en los cuestionarios propuestos a los estudiantes de noveno grado, este análisis se hizo desde una perspectiva semiótica sobre los registros y su articulación, resaltando cuáles fueron las dificultades que tuvieron los estudiantes para solucionar las ecuaciones, enfatizando en la conversión entre los registros utilizados en el cuestionario propuesto.

3.2.5 Fase de indagación y conclusión

A partir de los resultados encontrados en los cuestionarios 1 y 2 se procedió a la elaboración de un documento que explicara cuáles fueron los errores y dificultades que presentaron los estudiantes al solucionar los cuestionarios propuestos. Para así poder evidenciar los procedimientos utilizados y dificultades presentadas por los estudiantes. Que permitan aportar a la creación de situaciones que ayuden al estudiante a superar los obstáculos que les genera el

cambio de registro de representación en los estudiantes del grado noveno de la Educación Básica.

3.3 Cuestionario 1

Para la realización de este cuestionario se buscó en diferentes fuentes algunos ítems que sirvieran, desde la perspectiva del trabajo, para tener en cuenta en el cuestionario 1, esos ítems provienen de algunos talleres presentados en los libros de texto de matemáticas para grado noveno y octavo: (Fonseca, L & otros. (2001). *Matemáticas 9*. Bogotá, editorial Horizontes.) (Rodríguez, B & otros. (1996). *Matemáticas 8*. Bogotá, editorial Prentice Hall), donde aparecen los conceptos de ecuación lineal y su representación gráfica. También se tuvieron en cuenta los reglamentos educativos locales, tales como los Lineamientos Curriculares del MEN, los cuales especifican sobre los diferentes tipos de pensamiento matemático que deben desarrollar los estudiantes en su vida escolar y los estándares curriculares del MEN, los cuales muestran en qué grado se deben aplicar determinados contenidos matemáticos, para nuestro interés las ecuaciones lineales.

En los estándares curriculares encontramos que en los grados de octavo a noveno se presentan las ecuaciones lineales, en estos se tiene como primer objetivo que “el estudiante identifique relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas” objetivo que es importante en relación a este proyecto de grado. Desde el punto de vista matemático, didáctico y curricular estas preguntas son elaboradas con el fin de responder a una serie de interrogantes que son de gran importancia para este análisis, uno de ellos es establecer cuál es la familiaridad que tienen los estudiantes con el tema, es decir identificar qué tanto saben del tema y con qué lo relacionan, para establecer este punto se hará un cuestionario 1 que pretende dar algunas ideas de cuáles son las destrezas y habilidades que tienen los estudiantes, pero también cuáles son sus dificultades en el trabajo con las ecuaciones y la representación gráfica de estas. Este cuestionario 1 busca establecer los siguientes criterios en los estudiantes:

- concepto de ecuación de primer grado o lineal.

- ¿qué tipo de tratamiento utilizan los estudiantes en las construcción de representaciones gráficas?, es decir si utilizan en su desarrollo tablas de tabulación, que es la forma más utilizada o si por el contrario solo basta con ver la expresión algebraica para trazar la gráfica.

Para nuestro trabajo el criterio a resaltar más importante y el que esperamos en el desarrollo de este cuestionario es:

- El reconocimiento de cuáles son los factores que hacen que cambien conjuntamente la ecuación y la gráfica. Es en este punto donde se considera que reside el éxito de una buena enseñanza de las ecuaciones y sus representaciones.
- El reconocimiento de los diferentes tipos de representación que puede tener una ecuación de primer grado (expresión algebraica, tablas, representaciones gráficas)

Este cuestionario está compuesto por preguntas abiertas a cualquier concepción que tengan los estudiantes sobre el tema de ecuaciones lineales, con las cuales se intentara copilar la información suficiente para desarrollar el cuestionario 1 para posteriormente realizar los diferentes tipos de análisis semióticos propuestos para nuestro trabajo de grado (visualización de las unidades significantes de la expresión algebraica, cambios en el registro gráfico, uso de tablas, etc.)

3.3.1 Descripción del cuestionario 1

Primera pregunta: se intenta reconocer si los estudiantes conocen o pueden expresar una definición de ecuación de primer grado, proponiéndole expresar lo que conozca sobre ellas o cualquier expresión que les sea similar. Esta pregunta es importante para nuestro análisis ya que nos permite ver cuáles son las expresiones planteadas por los estudiantes cuando hablamos de ecuación lineal. En esta pregunta esperamos que los estudiantes planteen cualquier transformación lineal que permita ver que entienden por ecuación lineal, es decir, si tiene claro el concepto o no.

Segunda pregunta: se indaga sobre cuáles son los registros de representación conocidos por los estudiantes para representar ecuaciones de primer grado. En ella intentamos conocer cuál es la familiaridad que tienen los estudiantes con los diferentes tipos de representación de una ecuación lineal. En esta pregunta esperamos que los estudiantes dibujen gráficas que han visto en su formación o ya sea de las que conocen por experiencia propia, como lo son las que han visto en revistas o periódicos.

Tercera pregunta: en esta el grado de dificultad es mayor, ya que los estudiantes tendrán que realizar un cambio de registro (conversión) para establecer cuál es la expresión algebraica a la cual hace referencia las tablas de datos. Se espera que los estudiantes empleen ya sea directamente la tabla de datos para hallar la ecuación o la utilice para graficar, con esta pregunta, dependiendo de las respuestas de los estudiantes, podemos realizar un análisis sobre: tratamiento, conversión y representación. Desde el punto de vista semiótico este modo de pregunta implica que el estudiante utilice la vía del punteo criticada por Duval, pero que de forma alguna va mostrando algunas pautas de procedimientos al estudiante.

Cuarta pregunta: consiste en que el estudiante pueda establecer cuál es la representación algebraica que representa esa tabla de datos, para ello cuenta con cuatro tipos de expresiones algebraicas ya planteadas, de las cuales debe elegir la que representa la tabla, una estrategia que podría utilizar el estudiante y que se espera que la utilice es emplear los procedimientos utilizados en la pregunta tres para encontrar la representación algebraica correspondiente a la tabla de datos.

Quinta pregunta: es de tipo conceptual, lo que se busca es saber cuál es la concepción que tienen los estudiantes acerca del concepto de pendiente. Se hace esta pregunta porque es interesante saber cuáles son los conceptos que ha construido el estudiante en su proceso educativo y desde qué punto podemos nosotros definir los parámetros para el cuestionario dos con respecto a estos conceptos. En esta pregunta se espera que los estudiantes den una respuesta intuitiva acerca de unos de los conceptos importantes que involucra las

ecuaciones lineales, ello para hacernos una idea de cómo han comprendido los estudiantes este concepto según lo que han visto en su escolaridad.

Sexta pregunta: nos muestra cuál es la concepción que tienen los estudiantes acerca de la expresión formal de la ecuación lineal $y = mx + b$, Se espera que los estudiantes establezca que m es la pendiente de la recta que indica el grado de inclinación de esta con respecto al semieje de los x positivos y que b es una constante en la ecuación que indica el intercepto con el eje y . Además que reconocieran que m indica la pendiente de la recta y que b es el punto de corte de esta recta con el eje y .

Séptima pregunta: es de carácter complejo en el sentido que deben de involucrar la articulación de dos registros de representación y hallar los elementos del conjunto de llegada a partir de una representación gráfica, es decir, que para su solución el estudiante debe realizar una conversión del registro gráfico al registro algebraico. Con esta pregunta se busca contemplar cuáles son los procedimientos y estrategias que utilizan los estudiantes para realizar la conversión entre registros gráficos y algebraicos.

Octava pregunta: presenta una tabla de datos incompleta, la cual los estudiantes deberán llenar con soluciones para una expresión algebraica dada, para esto los estudiantes deberán despejar la variable, para poder asignarle valores y posteriormente completar la Tabla 3.

Una vez resuelto este cuestionario por parte de los estudiantes, tendremos una idea de cómo están los conocimientos que tienen los estudiantes sobre:

- las ecuaciones
- los conocimientos sobre las diferentes formas de representación de las ecuaciones
- los diferentes procedimientos que exigen cambiar de un registro a otro.

Hecho esto, se hará un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes, estableciendo sus errores y dificultades para así establecer el cuestionario 2 que en definitiva nos mostrara estos niveles en más profundidad.

A continuación se presenta el cuestionario 1 aplicado a los estudiantes:

Cuestionario 1

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y = 2x + 6$?
 - a) con letras y números c) En la recta numérica
 - b) gráfica y tabular d) Todas las anteriores
3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente Tabla 1 de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

Tabla 1

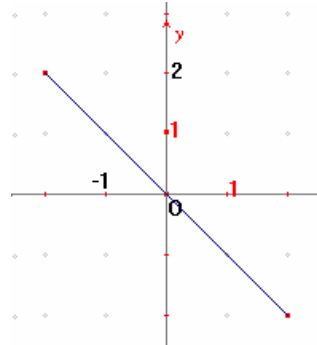
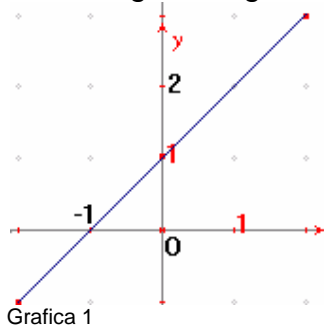
4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente Tabla 2 de datos

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

Tabla 2

- a) $y = x + 5$
- b) $y = 2x - 1$
- c) $y = x - 1$
- d) $y = 2x + 1$

5. ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?
6. En la expresión $y = mx + b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?
7. Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



8. Completa la siguiente Tabla 3 con soluciones de la ecuación $x - 2y = 4$

| | | | | | |
|---|---|---|----|---|----|
| X | | 0 | | 2 | -2 |
| Y | 0 | | -1 | | |

Tabla 3

3.3.2 Análisis del cuestionario 1

Como se describió en el comienzo de nuestro trabajo, las teorías semióticas son el eje fundamental para comprender una poco sobre el problema en el diseño y en la forma como el estudiante comprende la simbología y las representaciones en matemáticas, para nuestro interés en las ecuaciones lineales. En este apartado, se presentan los resultados del análisis posterior a la aplicación del cuestionario 1, que se pusieron en juego durante la experimentación. Las lecturas abordadas nos brindan los elementos necesarios para la construcción de las variables didácticas y la determinación de las unidades significantes de cada uno de los registros de representación semióticos que permiten el proceso de conversión, los cuales han sido tomados en cuenta en la propuesta.

Se describe la experiencia realizada durante 90 minutos consecutivos con un total de 60 estudiantes de noveno de la institución educativa Simón Bolívar. Para presentar los datos que permiten evaluar los efectos del cuestionario presentado se ha procedido teniendo en cuenta los siguientes dos niveles de análisis.

Presentación de procedimientos. Análisis de los procedimientos que llevaron a responder las preguntas. Este nivel de análisis corresponde a los procedimientos expresados por los estudiantes con respecto a lo propuesto por el cuestionario y lo exigido por el en los enunciados y gráficos propuestos en cada una de las preguntas de este. Involucra el análisis de los procedimientos generados por el registro figural involucrado en la pregunta 8. En este nivel de análisis se enfatiza en el análisis del componente semiótico, teniendo en consideración el efecto de los tipos de preguntas a las cuales fueron enfrentados los estudiantes y de las relaciones entre registros, en el desarrollo del cuestionario.

Análisis de la construcción de las relaciones gráfica – ecuación. En este nivel se presentan los resultados que surgieron en el nivel de las relaciones gráfica - ecuación, que corresponden a los componentes

matemático y semiótico. El análisis del componente matemático se estructura con base en los resultados de las diferentes preguntas, las cuales, a su vez, permiten identificar la trama de las relaciones existentes entre el gráfico y la ecuación construidas específicamente en la articulación de la escritura algebraica y el registro cartesiano.

3.3.3 Descripción del tipo de método utilizado para analizar el cuestionario 1

Los resultados de la experimentación del cuestionario se han organizado de acuerdo con cada pregunta. Se presentan los resultados correspondientes al análisis de las producciones de los 60 estudiantes de los grados 9° de I.E Simón Bolívar donde se aplicó el cuestionario 1 realizando una presentación de los procedimientos encontrados. El análisis se centra en los elementos que son heurísticamente pertinentes para la formulación de las relaciones entre el registro algebraico y el registro figural, tomando como base las lecturas de R. Duval y las intervenciones realizadas por los estudiantes en el momento de la aplicación del cuestionario.

Este análisis se logra mediante la articulación de tres elementos: por un lado, el análisis matemático, que busca identificar las relaciones entre los gráficos y ecuaciones generadas en las situaciones dada la necesidad de plantear una relación matemática a partir del registro figural o desde los tratamientos efectuados en el registro numérico. El segundo elemento es la construcción de expansiones discursivas matemáticas pertinentes las cuales generan los planteamientos asociados al diseño de la tarea y, por último, el elemento semiótico que busca identificar los tratamientos pertinentes en la búsqueda de las relaciones gráfico – ecuación.

En primer lugar, se exponen los procedimientos que consolidan el comportamiento de los estudiantes en el desarrollo de los cuestionarios que se propuso. Estos resultados se presentan en una tabla; en ésta se registran los procedimientos utilizados por los estudiantes discriminando aspectos con relación a la identificación y tratamiento de unidades figúrales consideradas relevantes para el buen desarrollo del cuestionario, y el porcentaje respectivo a la cantidad de

estudiantes que presentaron estos procedimientos. El orden para la presentación de los resultados va tal cual como fue presentado a los estudiantes.

3.3.4 Análisis de los resultados del cuestionario 1

A partir de los resultados presentados por los estudiantes y del proceso de acompañamiento en la aplicación del cuestionario, del trabajo de observación y del análisis de las producciones de los estudiantes, se destacan los aspectos que se describen a continuación. Cabe aclarar que las respuestas expuestas a continuación fueron tomadas de algunos estudiantes y a estas se le fueron sumando aquellas respuestas de otros estudiantes que tenían de alguna manera similitud con el concepto de su par.

Pregunta 1: ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?

| <i>Respuestas de los estudiantes</i> | <i>Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas</i> | <i>Porcentajes de respuesta</i> |
|--|---|---------------------------------|
| Es una ecuación con una o más incógnitas a la primera potencia | 39 | 63,93% |
| Tiene menor nivel de complejidad | 3 | 4,91% |
| Una igualdad de dos o más números | 8 | 13,11% |
| Es aquella que se despeja por x | 2 | 3,27% |
| Son ecuaciones de todas la gráficas | 8 | 13,11% |
| No responde | 1 | 1% |

Tabla 8. Tipos de respuesta a la pregunta 1 del cuestionario.

Según estos resultados el 69,93% de los estudiantes de I.E Simón Bolívar conocen que es una ecuación de lineal, al dar como respuesta que es una ecuación con una o más incógnitas a la primera potencia, lo cual deja ver que estos estudiantes tienen una noción acertada de lo que se les está preguntando. Encontramos también que algunos estudiantes asocian el grado de la ecuación con la dificultad implícita que conlleva esta, es decir, no tienen claro que es en sí

lo que identifica una ecuación lineal.

INSTITUCION EDUCATIVA SIMON BOLIVAR

Taller

Nombre: Jhon William C.A. Fecha: 29 de marzo.

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
Es una igualdad con dos o mas incógnitas - cuando se despeja una variable

2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?

a. Con letras y números c. En la recta numérica
b. Grafica y tabular d. Todas las anteriores

Ilustración 1. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1 del cuestionario

En esta pregunta esperábamos que los estudiantes por lo menos supieran expresar que era una ecuación lineal (ilustración 1) y alguna de sus propiedades, en cuanto a lo semiótico esperábamos que el estudiante intentara dar algunas respuestas utilizando simbología formal de la matemática.

Pregunta 2: ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y = 2x + 6$?

- a. Con letras y números c. en la recta numérica
b. Grafica y tabular d. todas las anteriores

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|-------------------------------|--|--------------------------|
| A | 10 | 16,39% |
| B | 11 | 18,02% |
| C | 3 | 4,91% |
| D | 35 | 57,37% |
| No responde | 2 | 3,27% |

Tabla 9. Tipos de respuestas a la pregunta 2 del cuestionario.

Solo el 18% de los estudiantes saben que a partir de las gráficas y las tablas de datos son las formas correctas para representar ecuaciones lineales.

Pero se encuentra que más de la mitad de los estudiantes creen que con todas las opciones presentadas se puede llegar a una representación gráfica de una ecuación (ilustración 2), lo cual deja ver que estos no tienen clara la diferencia entre lo que son los diferentes registros de representación en matemáticas y sus usos en particular.

2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?

a. Con letras y números

b. Grafica y tabular

c. En la recta numérica

☒ d. Todas las anteriores

Ilustración 2. Respuesta de un estudiante ala pregunta 2

En esta pregunta esperábamos que los estudiantes diferenciaron cuales eran los diferentes tipos de formas de representar una ecuación lineal, ello con el fin de medir cuanto estaban familiarizados con las formas de representación de ecuaciones de primer grado.

Pregunta 3: Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|-------------------------------|--|--------------------------|
| $y = 3 + 2$ | 1 | 1% |
| $y = 3x + 2$ | 30 | 49,18% |
| $y = 3x - 2$ | 1 | 1% |
| No responde | 29 | 47,54% |

Tabla 10. Tipos de respuesta a la pregunta 3 del cuestionario.

En esta pregunta se observa que casi la mitad de los estudiantes son capaces de cambiar de registro para inferir la ecuación correspondiente a la tabla, es decir que hacen la conversión correcta de un registro tabular al registro algebraico (ilustración 3). Pero también vemos que es muy similar la cantidad de estudiantes que no respondieron con los que si respondieron, esto se debe a que estos estudiantes no discriminan las operaciones matemáticas pertinentes de la ecuación las cuales nos llevan a discernir las respuestas que se encontraban en la tabla propuesta.

3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

$$Y = 3X + 2$$

Ilustración 3. Respuesta de un estudiante a la pregunta 3.

En esta pregunta esperábamos que los estudiantes interpretaran la tabla de datos para a partir de ella poderla conectar con su homóloga en la escritura algebraica.

Pregunta 4: Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos:

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

- a) $y = x + 5$
- b) $y = 2x - 1$
- c) $y = x - 1$
- d) $y = 2x + 1$

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|-------------------------------|--|--------------------------|
| A | 11 | 18,02% |
| B | 43 | 70,49% |
| C | 4 | 6,55% |
| D | 3 | 4,91% |
| No responde | | 0% |

Tabla 11. Tipos de respuestas a la pregunta 4 del cuestionario.

En esta pregunta más de la mitad de los estudiantes fueron capaces de realizar las conversiones pertinentes con el fin de encontrar la ecuación correspondiente a la tabla de valores dada, es decir fueron capaces de relacionar la tabla con la ecuación que representa (ilustración 4). Los procedimientos que utilizaron los estudiantes fueron precisamente la utilización de los datos descritos en el recuadro de la x , es decir, que estos iban evaluando cada uno de estos datos y si coincidía con el resultado del recuadro de y daban por buena la

ecuación sobre la que evaluaron los datos. Aproximadamente el 30% de los estudiantes en este tipo de preguntas no son capaces de realizar la lectura de la tabla para predecir cuál es la ecuación que representa, este problema se debe a que los estudiantes muchas veces no son capaces de realizar las operaciones básicas con las ecuaciones para discernir cuál es el punto correspondiente a un valor dado.

4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| x | y |
|----|----|
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

a) $y = x+5$
 b) $y = 2x-1$
 c) $y = x-1$
 d) $y = 2x+1$

Ilustración 4. Respuesta de un estudiante a la pregunta 4.

Lo que esperábamos de los estudiantes en esta pregunta era que realizaran una lectura de la tabla de datos y a partir de esta lectura que la pudieran relacionar con la escritura algebraica correspondiente.

Pregunta 5: ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|--|--|--------------------------|
| La inclinación que tiene la recta | 28 | 45,90% |
| Una expresión de ecuación que utiliza letras | 9 | 14,75% |
| Coeficiente de una incógnita | 8 | 13,11% |
| Grafica lineal que presenta la función | 3 | 4,91% |
| Es la línea que se traza en el plano | 4 | 6,55% |
| No responde | 9 | 14,75% |

Tabla 12. Tipos de respuestas a la pregunta 5 del cuestionario.

Un 45% de los estudiantes saben que la inclinación de una recta con respecto al eje x es la pendiente de una ecuación lineal graficada (ilustración 5). Mientras que casi el 50% de los estudiantes no relacionan el grado de inclinación de la recta con el eje x como la pendiente del trazo efectuado, incluso algunos asociaron esta con el coeficiente de x , pero no tienen claro la concepción original de lo que significa la pendiente y su símbolo que la identifica en cualquier ecuación expresada.

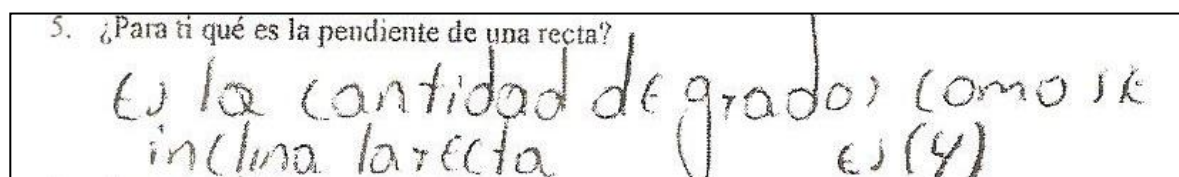


Ilustración 5. Respuesta de un estudiante a la pregunta 5.

Pregunta 6: En la expresión $y = mx + b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|--|--|--------------------------|
| Un valor determinado según la ecuación | 2 | 3,27% |
| m pendiente de la recta, b punto de corte con el eje y | 8 | 13,11% |
| La pendiente | 7 | 11,47% |
| Una gráfica o una ecuación de expresión | 1 | 1% |
| m coeficiente de x , b coeficiente | 7 | 11,47% |
| b punto en el eje y , m distancia, periodo | 4 | 6,55% |
| Una ecuación con números y letras | 10 | 16,39% |
| Inecuación | 6 | 9,83% |
| No responde | 16 | 26,22% |

Tabla 13. Tipos de respuesta a la pregunta 6 del cuestionario.

Solo 8 estudiantes, el 19,11%, saben que representan las letras m y b en una ecuación de primer grado (ilustración 6). Por otro lado, el 80% de los estudiantes no identifican plenamente el significado de estas letras en una

ecuación de primer grado ya que con se muestra en la tabla, los estudiantes asocian las letras a y b con la distancia o recorrido, hasta decir que estas representan una inecuación por estar ahí.

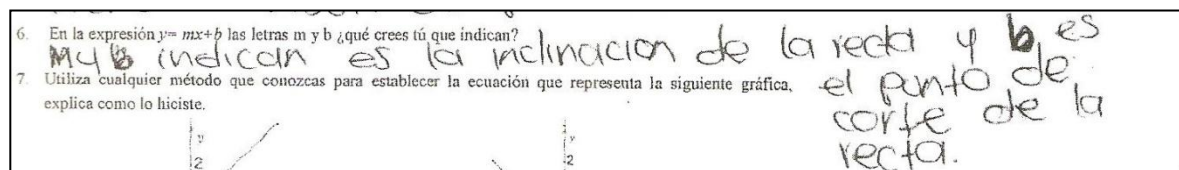
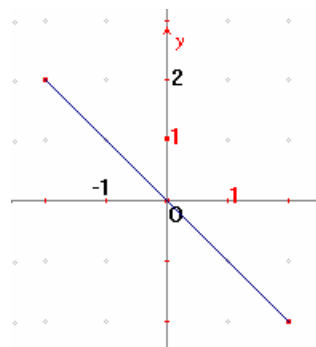
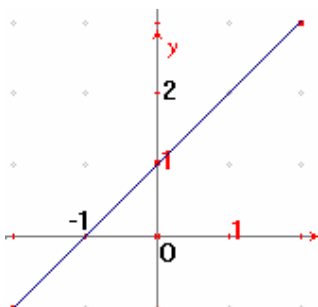


Ilustración 6. Tipo de respuesta a la pregunta 6

Pregunta 7: Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|-------------------------------------|--|--------------------------|
| $y = x + 1$ | 3 | 4,91% |
| $f(x) = 1x + 1$, $(x) = 8x$ | 1 | 1% |
| $y = x + 1$, $y = -3x + 3 = 12$ | 6 | 9,83% |
| No responde | 51 | 83,60% |

Tabla 14. Tipos de respuesta a la pregunta 7 del cuestionario.

El 83,60% de los estudiantes encuestados no son capaces de discernir la ecuación de una gráfica ya dada, debido a que no tienen en cuenta las unidades significantes de la escritura algebraica y las variables visuales de la gráfica. Esta fue una de las preguntas más difíciles para los estudiantes ya que ninguno de ellos fue capaz de realizar una expresión algebraica correcta que correspondiera con la gráfica presentada (ilustración 7).

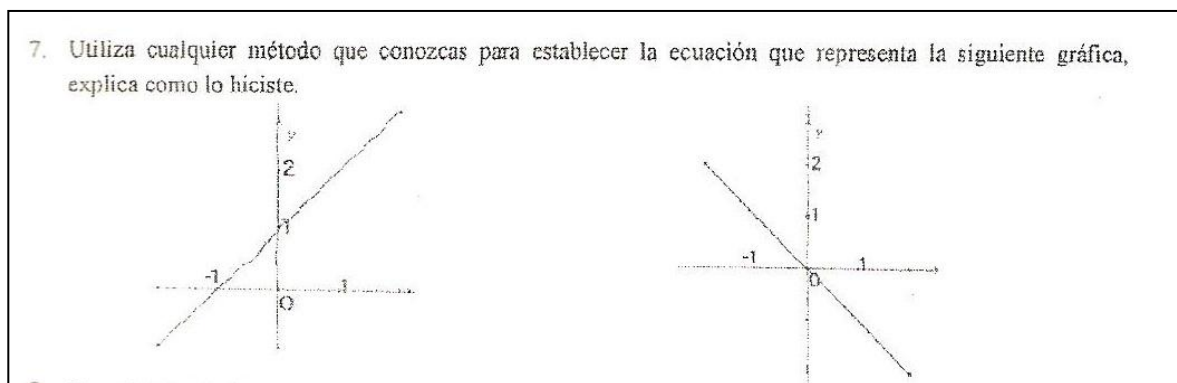


Ilustración 7. Respuesta de un estudiante a la pregunta 7.

Pregunta 8: Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación

$$x - 2x = 4$$

| | | | | | |
|---|---|---|----|---|-----|
| x | | 0 | | 2 | - 2 |
| y | 0 | | -1 | | |

| Respuestas de los estudiantes | Número de estudiantes que respondieron de alguna de estas formas | Porcentajes de respuesta |
|-------------------------------|--|--------------------------|
| Bueno | 0 | 0% |
| Malo | 41 | 67,21% |
| No responde | 20 | 32,78% |

Tabla 15. Tipos de respuestas a la pregunta 8 del cuestionario.

Ninguno de los estudiantes encuestados fueron capaces de completar la tabla de una forma correcta debido a que no eran capaces de despejar y , y después darle valores a x para encontrar los valores que satisfacían esa tabla, como se dijo anteriormente los estudiantes tienen dificultades con el manejo operatorio correspondiente a una ecuación de primer grado, ya que se les hace difícil despejar y dar valores a la variable correcta para responder a la tabla correspondiente (ilustración 8).

8. Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|
| x | 4 | 0 | 2 | 2 | -2 |
| y | 0 | -2 | -1 | -1 | -3 |

Ilustración 8. Respuesta de un estudiante a la pregunta 8.

3.3.5 Elementos encontrados en la aplicación del cuestionario 1

Una vez aplicado el cuestionario 1 y realizado el respectivo análisis a las respuestas de los estudiantes, se pudo establecer unos criterios importantes que se deben tener en cuenta para la construcción del cuestionario dos la cual ayudara a lograr los objetivos planteados y además de ello responder a la pregunta de investigación que se formuló con anterioridad.

Los criterios que se aprendieron fueron los siguientes:

- Se aprendió a tener en cuenta el tipo de preguntas que debemos implementar para obtener un mejor análisis de las mismas, además de la forma en que se les pregunta a los estudiantes es decir, como deben de ir estructuradas las preguntas para de algún modo catapultar al estudiante a un mejor desempeño con lo que se le propone.
- La pertinencia de la utilización o no de gráficos en la prueba final.
- Que es necesario tener en cuenta otros aportes teóricos para la realización del cuestionario dos.
- Intentar motivar a los estudiantes por medio de actividades que lo impulsen a aprender.
- Las preguntas deben ser presentadas en forma que primero se presenten las preguntas elementales y luego se presenten las preguntas más complejas.

3.4 Cuestionario 2

Para la realización del cuestionario 2 nos hemos basado en los resultados obtenidos en la situación uno aplicada a los estudiantes de la I.E Simón Bolívar en la cual encontramos una serie de procedimientos o pautas que utilizan los estudiantes para enfrentarse a tipos de problemas sobre ecuaciones lineales y representaciones gráficas. Según los resultados que se presentaron en el cuestionario uno aplicado, los estudiantes presentan dificultades al tratar de pasar de un registro de representación a otro, este problema lo pudimos evidenciar cuando indagábamos sobre cómo podíamos relacionar la tabla cartesiana a partir de la ecuación dada y también de cómo podríamos encontrar la ecuación de una representación cartesiana ya dada. Es en estos puntos donde hallamos que los estudiantes presentan grandes dificultades en la interpretación de las preguntas, por ello el cuestionario dos fue diseñado con el fin mostrarles desde otra perspectiva a los estudiantes cuáles son los posibles cambios que se pueden presentar en la conversión de diferentes registros de representación en este caso el algebraico, el gráfico y el tabular.

Las preguntas que planteamos para este cuestionario son de tipo análisis y utilización de procedimientos matemáticos, en las cuales el estudiante tendrá la oportunidad de contextualizar un poco este conocimiento y aplicarlo a situaciones que son más familiares para él. Para esta prueba optamos también por suprimir aquellas preguntas en las cuales se preguntaban por los elementos teóricos del tema en cuestión, debido a que estos no aportan las condiciones necesarias de aprendizaje que estamos buscando. Este cuestionario busca establecer los siguientes criterios en los estudiantes:

- concepto de ecuación de primer grado o lineal.
- Los tipos de variaciones que pueden presentar la ecuación en conjunto con su representación gráfica.
- Los tratamientos oportunos que se deben realizar para hallar la ecuación de una representación cartesiana ya dada.

A través del empleo de este cuestionario se espera dar solución a procedimientos que realizaron los estudiantes. Por lo cual en este cuestionario se quieren resaltar los siguientes criterios:

- El reconocimiento de cuáles son los factores que hacen que cambien conjuntamente la ecuación y la gráfica. Es en este punto donde se considera que reside el éxito de una buena enseñanza de las ecuaciones y sus representaciones.
- Reconocimiento de los diferentes tipos de representación que puede tener una ecuación de primer grado (expresión algebraica, tablas, representaciones gráficas)

Este cuestionario consta de once preguntas en la cuales presentamos de una manera organizada cada una de las variables que entran en juego la conceptualización y manejo de las ecuaciones lineales y sus representaciones gráficas, algebraica y tabular teniendo como referente las pautas propuestas por Duval.

3.4.1 Descripción del cuestionario 2

El diseño de este cuestionario dos está basado en los talleres presentados en los documentos “Gráficas y ecuaciones la articulación de dos registros” (Duval, 1988) y “Dificultades para articular los registros gráficos, algebraico y tabular: el caso de la función lineal” (Peralta, 2003)⁷, de los cuales se partieron para realizar el cuestionario dos hicieron ajustes referentes al contenido y al grado en que se iba a aplicar, sin descuidar lo que verdaderamente pretendíamos encontrar con el uso de este cuestionario.

En este sentido, el cuestionario estaba compuesto por las siguientes preguntas:

La primera pregunta: en esta pregunta se le plantea al estudiante una ecuación con el fin de que ellos realicen el gráfico cartesiano de la forma en cómo

⁷ Ver anexos donde se muestran estos talleres propuestos por estos autores.

es presentado en las instituciones educativas. Lo que se espera con esta pregunta es que los estudiantes utilicen los métodos conocidos para graficar la ecuación dada, es decir que articulen los tipos de registros necesarios para responder a la tarea planteada.

La segunda pregunta: en esta pregunta lo que se quiere es que el estudiante mediante un proceso de visualización, pueda asociar las variables visuales de la gráfica cartesiana con las unidades significantes de la escritura algebraica para poder inferir y pueda realizar un bosquejo de lo que sería la ecuación de la gráfica que se le está presentando para luego elegir la ecuación correcta para cada una de las graficas propuestas. Se espera que aquí el estudiante exponga o muestre algunas de las pautas para elegir la ecuación que está representando cada gráfica.

La tercera pregunta: en esta pregunta se propone una tabla la cual el estudiante deberá llenarla, en ella aparecen cuatro columnas denominadas: gráfica, ecuación, pendiente, corte con el eje y , sentido de la inclinación y ángulo con los ejes, primero se presenta un ejemplo de cómo llenarla y a partir de este el estudiante deberá basarse para completar las siguientes casillas, este tipo de pregunta requiere para su solución que el estudiante reconozca una representación tanto en el registro algebraico como gráfico y su conversión requerida, además que identifique en la representación algebraica los valores de la pendiente y el corte con el eje y . en esta pregunta entran en juego dos variables, una es el signo de la constante y la segunda es el signo de variable y el coeficiente del mismo. Lo que se espera es que el estudiante identifique por medio de esta tabla el papel que juegan los signos en la modificación de la escritura algebraica y la representación cartesiana. Luego se propone dos puntos a y b en los cuales se le preguntan a los estudiantes que cuales son justificaciones de los cambios que están ocurriendo con la escritura algebraica y la representación gráfica Por ultimo visualizar en la gráfica el sentido de la inclinación de la recta y el ángulo con los ejes. Después de completar la tabla se plantean 3

preguntas dirigidas a que el estudiante observe y deduzca las variaciones entre las representaciones graficas y algebraicas cuando se cambia algún signo en la representación algebraica.

La cuarta pregunta: en esta pregunta se propuso una tabla en la cual se presentan tres tipos de representación para las ecuaciones lineales, tenemos la representación algebraica, tabular y gráfica., en esta pregunta los estudiantes deben realizar las representaciones gráficas que hacen falta, es decir en cada cuadro solo aparece una representación ya sea algebraica, tabular o gráfica y a partir de ella el estudiante deberá realizar las representaciones faltantes, en este sentido este tipo de pregunta privilegia la conversión entre los diferentes registros de representación de una ecuación lineal. Por ultimo los estudiantes deben contestar una pregunta donde se les pide que justifiquen porque varían cada una de las representaciones gráficas.

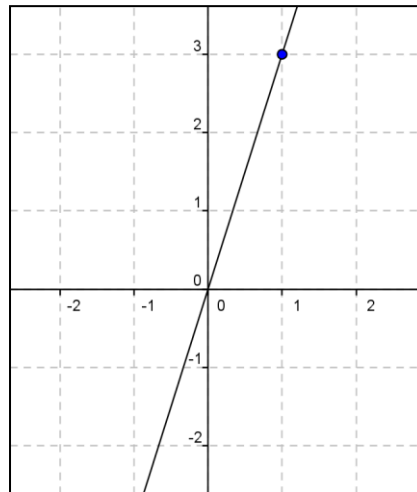
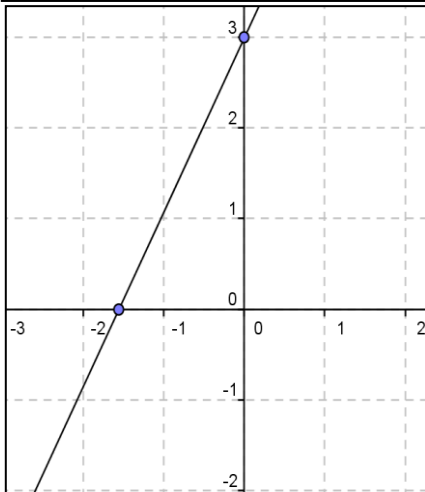
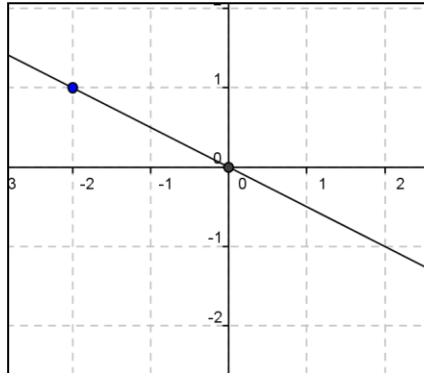
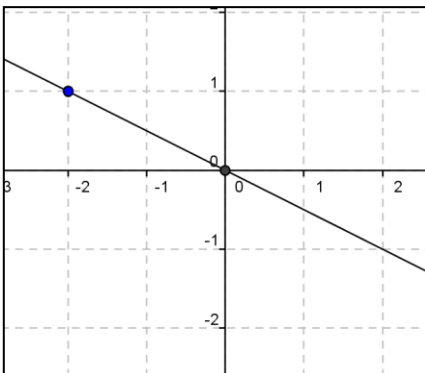
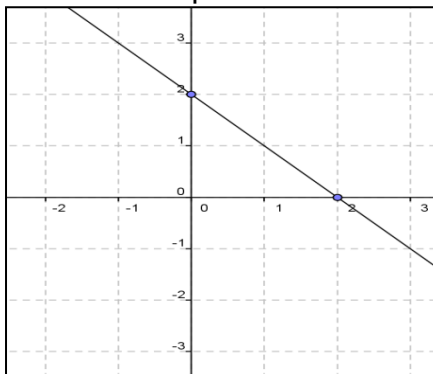
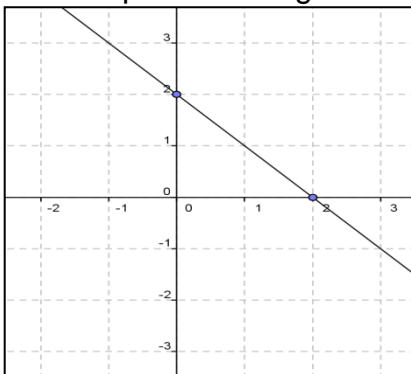
A continuación se presenta el diseño del cuestionario 2:

Institución Educativa Simón Bolívar

Cuestionario 2

1. Traza la gráfica de la siguiente expresión algebraica. $y = 4x + 2$

2. Relaciona las siguientes gráficas cartesianas con sus respectivas expresiones algebraicas. Justifica tu respuesta.



A. $y = 3x$

B. $y = 2x + 3$

C. $y = 2x + 2$

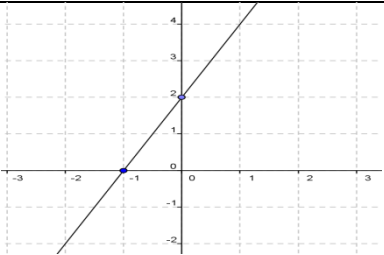
D. $y = -x$

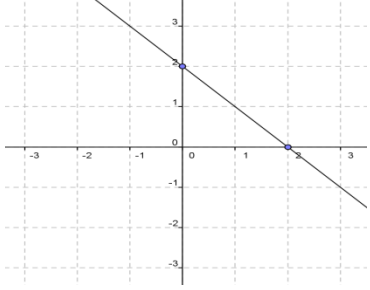
E. $y = -x + 2$

F. $y = -\frac{1}{2}x$

(Escribe tus respuestas en esta hoja o usa la parte de atrás o una nueva hoja)

3. completa la siguiente tabla.

| Gráfica | Ecuación | Pendiente | Corte con el eje Y. | Sentido de inclinación de la recta y ángulos con los ejes. |
|---|------------------------|-----------|---------------------|--|
|  | $y = 2x + 2$ | 2 | 2 | <p>La inclinación de la recta es > 0.</p> <p>Ángulos con los ejes > 1.</p> |
| | $y = \frac{1}{2}x - 4$ | | | |

| | | | | |
|---|-------------|----|---|--|
|  | | | | |
| | $y = x + 4$ | | | |
| | | -3 | 1 | |

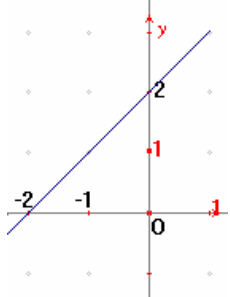
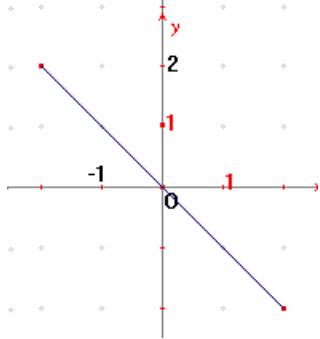
a) ¿Qué puedes decir de la columna **corte con el eje y**? ¿Crees que hay alguna relación de esta con la variable independiente de la escritura algebraica? Justifica tu respuesta.

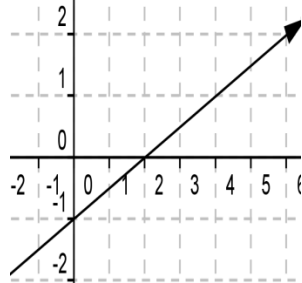
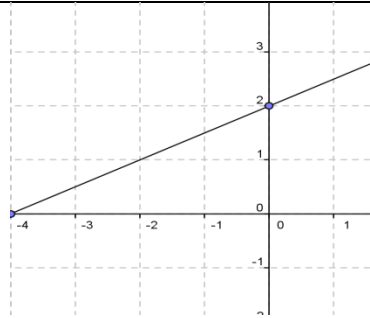
b) ¿Qué puedes decir de la columna **sentido de inclinación de la recta**? ¿Con que término de la expresión algebraica podemos relacionar esta columna? ¿Tiene algo que ver en el sentido de la inclinación la presencia de la signo + o – en el coeficiente de la x ? Justifica tu respuesta.

c) ¿Qué pasa cuando se modifica el signo de la constante?

(Escribe tus respuestas en esta hoja o usa la parte de atrás o una nueva hoja)

4. Completa la tabla y responde a los siguientes interrogantes.

| Ecuación | tabla | Gráfica |
|------------------------|-------|--|
| | |  |
| | |  |
| $y = \frac{1}{8}x + 2$ | | |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|----|---|---|---|---|---|----|----|---|---|---|--|
| | |  | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1" data-bbox="354 697 956 854"><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Y</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table> | X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | Y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | |
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | | |
| Y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | |
| | |  | | | | | | | | | | | | |
| $y = -x - 4$ | | | | | | | | | | | | | | |

a) ¿Por qué varían las representaciones graficas de cada una de las ecuaciones lineales? Justifica tu respuesta.

3.4.2 Justificación del cuestionario 2

La realización de este cuestionario tuvo en cuenta tres criterios importantes para la construcción o la aprehensión de los criterios de interpretación global de las representaciones gráficas de las ecuaciones lineales, estos son el semiótico, el metodológico y lo que arrojó la prueba diagnóstica. Este cuestionario fue realizado teniendo en cuenta el cuestionario 1 aplicado el cual desde un punto de vista semiótico y metodológico no dejaba ver cuáles eran los puntos específicos a los cuales se quería que el estudiante llegara.

El cuestionario dos consta de cuatro preguntas en las cuales se ha tenido en cuenta la información que arrojó el cuestionario uno, cada una de las preguntas fue elaborada con propósitos particulares en donde el estudiante tendrá la oportunidad de visualizar los tipos de cambios que pueden ocurrir al trabajar con ecuaciones lineales y sus representaciones cartesianas.

De manera general con la primera pregunta del cuestionario se pretende lograr que los estudiantes tracen la gráfica correspondiente a una ecuación ya dada, es decir, que en este punto los estudiantes trabajaran de la forma en cómo usualmente se trabajan las ecuaciones en el colegio.

Para la segunda pregunta se propuso una serie de gráficos y ecuaciones en las cuales los estudiantes deberán ligar al gráfico correspondiente, esto en procura de que los estudiantes puedan relacionar una ecuación a una gráfica y viceversa, a partir de los atributos de la gráfica cartesiana o de la ecuación lineal correspondiente, además de que el estudiante tendrá la oportunidad de ir observando a través del ejercicio que si la escritura algebraica sufre cambios en cualquiera de sus partes, la gráfica correspondiente también sufrirá cambios.

La tarea que se propone en la tercera pregunta es la de llenar una tabla en la cual el estudiante por sus propios medios deberá discernir cuáles son los factores que hacen la gráfica cambie, es decir, cual es la ecuación que representa

la gráfica ya dada, cual es la inclinación de la recta, cual es el corte con el eje y , su pendiente. Seguida de tres sub-preguntas las cuales pretenden llevar al alumno a reflexionar sobre los cambios y procesos que se elaboraron en la tabla. Y en la cuarta pregunta se propone de nuevo una tabla, la cual tiene como propósito que los estudiantes trabajen con gráficas, ecuaciones y tablas tabuladoras, es decir, que el estudiante en esta actividad tendrá la oportunidad de trabajar con un nuevo registro de representación(tabular) para las ecuaciones lineales.

Cada pregunta de la situación se describe posteriormente con más detalle y su análisis se realiza teniendo en cuenta el aspecto matemático de cada pregunta y los registros de representación semiótica que intervienen en la actividad, igualmente se plantea cómo las actividades de la situación dos responden a las dificultades encontradas con la situación uno, sino también a las dificultades planteadas en el marco teórico.

3.4.3 Análisis del cuestionario dos

Este cuestionario consta de cuatro preguntas a saber.

Primera pregunta: trazo usual de la gráfica de una ecuación lineal

En este primer punto se propuso una ecuación lineal con la cual los estudiantes deberán realizar el trazo de la gráfica correspondiente utilizando el método usual. En este punto el estudiante tendrá la oportunidad de trabajar lo que ha aprendido en su vida escolar, es decir, que movilizara de nuevo el procedimiento enseñado por sus maestros para trazar la gráfica de una ecuación lineal.

Segunda pregunta: relación gráfica – ecuación

En este segundo punto se propuso una serie de representaciones cartesianas en las cuales el estudiante deberá relacionarlas con una de las ecuaciones lineales presentadas al frente. En este punto el estudiante tendrá la oportunidad utilizar el método que desee es decir, que podrá tabular cada una de la ecuaciones o utilizar la información que dan las gráficas para así dar con las respuestas correctas, con este ejercicio el estudiante ya podrá ir evidenciando que la gráfica de una

ecuación viene influenciada dependiendo los factores y valores numéricos que esta comprenda.

Tercera pregunta: Completar la tabla

En este tercer punto se propuso una tabla donde el estudiante deberá llenarla con la información que valla obteniendo de la misma tabla, es decir, que el estudiante en este punto tendrá la oportunidad ver de forma más detallada cuales son los factores que hacen que cambien conjuntamente la ecuación y su representación gráfica, a demás de que este también podrá relacionar cada uno de los componentes de la ecuación con lo que pasa en la gráfica cartesiana. Posteriormente se presentan tres interrogantes que tienen como objetivo hacer reflexionar más a fondo al estudiantado sobre los factores que hacen que cambie conjuntamente la ecuación con la gráfica cartesiana.

Cuarta pregunta: completar tabla

En este cuarto punto se propuso una tabla donde el estudiante deberá llenarla dependiendo con la información que esta misma le valla brindando, a diferencia de la tabla anterior esta utiliza tablas tabulares que también permiten representar información de ecuaciones lineales, el estudiante en este punto tendrá la oportunidad de trabajar con otro sistema de representación, además de que podrán ejercitar lo visto en los puntos anteriores. Posteriormente se presenta un interrogante que tiene como fin mostrar cual es la interpretación que el estudiante tiene sobre lo que se acabo de trabajar.

3.4.4 Contenido matemático movilizado en el cuestionario dos

Análisis matemático pregunta 1: esta pregunta desde el punto de vista matemático lo que muestra es una ecuación lineal, con la cual se pide que se realice su representación cartesiana, se trabaja en este punto de la manera usual, ya que se procede dándoles valores numéricos a la variable x y discerniendo cual es valor de y para determinado valor de x .

Análisis matemático pregunta 2: esta pregunta desde el punto de vista matemático deja ver uno de los tipos de representaciones que tienen las ecuaciones lineales, en este punto se quiere relacionar las gráficas presentadas y las ecuaciones lineales dadas, el estudiante deberá en este punto identificar cuáles son los factores que hacen que la gráfica corresponda a una determinada ecuación. Con este punto el estudiante podrá ir conociendo cuales son los factores de la escritura algebraica que rigen el comportamiento de la representación cartesiana.

Análisis matemático pregunta 3: la tercera pregunta desde el punto de vista matemático es muy enriquecedora ya que le permite al estudiante evidenciar cada uno de los factores que influyen en la realización de la gráfica cartesiana, es decir, le muestra al estudiante cual es el grado y ángulo de inclinación de la recta con respecto al eje x , cual es la pendiente, el corte con el eje y , además de la incidencia de cada uno de esos puntos con los cambios que sufre la representación gráfica. Después de llenar la tabla vienen tres interrogantes los cuales tiene como propósito afianzar en el estudiante los diferentes caracteres que están presentes en la escritura algebraica y que afectan de alguna manera la representación cartesiana.

Análisis matemático pregunta 4: el contenido matemático de la cuarta pregunta viene regido por la representación de las ecuaciones, es decir, al estudiante se le presentan las tres formas de representar una ecuación lineal los cuales son: los gráficos cartesianos, las tablas tabuladoras y las expresiones algebraicas, y a partir de la representación de cada uno de estas formas el estudiante tendrá la obligación de llenar cada uno de los recuadros de esta tabla con la forma de

representación que se pide para cada una de las expresiones dadas es decir, llevar una expresión algebraica a una expresión en forma tabular o en forma de gráfica y a si sucesivamente para las demás.

3.4.5 Registros de representación semiótica que intervienen en la situación dos

Como ya se ha mencionado en este cuestionario se trabaja en tres registros distintos: la lengua natural, el tabular y el gráfico, buscando en todos los casos una conversión al registro algebraico; también se proponen otras conversiones más comunes en el trabajo escolar tales como del registro tabular al gráfico y de la lengua natural al tabular.

Primera pregunta: en esta pregunta intervienen dos registros de representación que son el algebraico y el gráfico, en este punto el estudiante deberá realizar la conversión entre estos dos tipos de registro para poder responder a esta pregunta, el estudiante en este punto trabajara de la forma en cómo siempre se ha trabajado en el colegio, es decir, se utilizara la vía del punteo como la llama el profesor Duval, es decir que hará una relación punto – coordenadas cartesianas, lo cual no deja evidenciar los factores que se quiere que el estudiante se apropie de ellos.

Segunda pregunta: en esta pregunta intervienen tres registros de representación que son la lengua natural, las expresiones algebraicas y las representaciones gráficas cartesianas. En este punto lo fundamental es el proceso de conversión al que el estudiante está enfrentado, ya que este deberá comparar o buscar el método más económico y efectivo para el poder discernir cual es la expresión algebraica que representa cada una de las gráficas. Este punto tiene cierto grado de dificultad en cuanto a que el estudiante deberá relacionar las unidades significantes de la escritura algebraica con las variables visuales de la representación gráfica, pero de una manera no tan clara, porque ya están las ecuaciones y las gráficas y lo que debe realizar el estudiantes es encontrar esos factores que hacen que se identifique la escritura algebraica de una representación cartesiana.

Tercera pregunta: en esta tercera pregunta de nuevo intervienen tres registros de representación, pero esta tabla muestra de una manera más detallada cuales son los factores de correspondencia para que exista una conversión exitosa de los registros de representación utilizados. En el desarrollo de este punto el estudiante podrá evidenciar cada una de las variables visuales y las unidades significantes de la escritura algebraica y como estas dos en conjunto van siendo modificadas si se alguna de ellas sufre el más mínimo cambio, es decir, que la actividad de correspondencia semiótica para esta pregunta en este tema está bien fundamentada ya que le permite al estudiante experimentar nuevas formas de trabajar con las ecuaciones y sus representaciones.

Cuarta pregunta: en la cuarta pregunta intervienen tres registros de representación el algebraico, el gráfico y se introduce el tabular. Con ello lo que se pretende es que los estudiantes llenen la tabla teniendo en cuenta los procedimientos utilizados en los puntos anteriores, es decir, que el estudiante deberá de hacer uso de los tres registros de representación, con lo que se está garantizando que el estudiante está realizando una conversión de las tres formas de representar una ecuación lineal.

4. CONCLUSIONES GENERALES

Teniendo como referencia los objetivos propuestos al inicio de este trabajo, a continuación se plantean algunas conclusiones que tratan de mostrar lo encontrado en el análisis de los cuestionarios y que sirven para explicar en cierta forma lo que pretendía con cada objetivo específico.

Partiendo de las respuestas de cada uno de los cuestionarios propuesto a los estudiantes, las dificultades de interpretación, conversión y construcción del concepto de ecuación lineal son evidentes en los estudiantes.

El concepto de ecuación lineal en su representación en lenguaje natural no está presente en los estudiantes, esto queda evidenciado en diferentes partes del cuestionario que se les presentó, de manera más precisa al momento de pedirles que proporcionaran definiciones y ejemplos de ecuaciones lineales, los estudiantes conciben como única forma de definir una ecuación lineal la representación algebraica, y la forma tabular y forma gráfica, son para ellos solamente herramientas utilizadas. Las respuestas evidencian que para ellos todo es a partir de la expresión algebraica, no con otra representación del mismo objeto. Como lo mencionan los teóricos, los estudiantes no llegan a reconocer el mismo objeto matemático a través de sus diferentes representaciones semióticas posibles.

Nuestro estudio evidencia que los estudiantes muestran deficiencias conceptuales, de interpretación y falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y tabular, tienen diferentes dificultades al pasar de la expresión algebraica a la gráfica, por ejemplo, suponen que los valores de los parámetros m y b de las ecuaciones pueden ubicarse directamente en el

plano cartesiano, realizan una representación incorrecta de estos valores y muy pocos estudiantes justifican sus respuestas, lo que indica que han sido expuestos a practicas de enseñanza donde no tienen que comunicar sus resultados. Además, ningún tipo de representación es favorecida por ellos, ya sea porque no tienen una idea clara relacionada con el concepto de ecuación.

Las dificultades registradas no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de los agentes que intervienen en el proceso de enseñanza, sino además una tendencia excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

Para favorecer el aprendizaje de la ecuación lineal y el desarrollo del pensamiento conceptual, en el marco de lo semiótico podría ser central, promover tareas en que los alumnos puedan articular y realizar la conversión de las diferentes representaciones semióticas (por ejemplo: de una expresión algebraica pasar a la gráfica, de un enunciado en lenguaje natural a una expresión algebraica, o viceversa); por lo cual es necesario, enfrentarlos a suficientes problemas de articulación entre las distintas representaciones.

El hecho de que los estudiantes no presentaron una estrategia que les diera claridad y seguridad para realizar la conversión del registro gráfico al algebraico se debe a la falta de coordinación que los estudiantes tienen sobre los mismos, y el desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica que le permitan una interpretación global de la representación que se le plantea.

Lo anterior condujo a los estudiante a cometer errores tales como el desconocimiento de un par ordenado, no solo que variables lo forman sino como ubicarlo en el sistema de ejes coordenados, el sentido de inclinación de la recta , el intercepto al origen, los ángulos con los ejes, por la falta de

visualización, de interpretación de las unidades significantes de manera global, que le permitiera desarrollar tanto la habilidad matemática como cognoscitiva, la no coordinación entre la relación de un registro algebraico, gráfico y viceversa les permiten estos errores en la distinción de los valores visuales de la forma y la orientación de la gráfica, valores oposicionales y no puntos numéricos y relacionarlos con la escritura algebraica, desde el punto de vista de Duval la aprehensión global le da a la representación gráfica su orden intuitivo o heurístico.

La complejidad de la tarea de conversión del registro gráfico al algebraico es evidente, y así fue manifestada por los estudiantes en la situación planteada ya que requiere de una mayor actividad cognoscitiva.

Para favorecer el aprendizaje del concepto ecuación lineal y el desarrollo del pensamiento conceptual, es fundamental que los alumnos puedan articular y realizar la conversión de las diferentes representaciones semióticas (por ejemplo: de una expresión algebraica pasar a la gráfica, de un enunciado en lenguaje natural a una expresión algebraica, o viceversa); para lo cual es necesario, enfrentarlos a suficientes problemas de articulación entre las distintas representaciones.

BIBLIOGRAFIA

- Bachelard, G.** (1972). *La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo.* (Siglo XXI: Buenos Aires).
- Brousseau, G.** (1986). *Theorisation des Phenomenes d'Enseignement des Mathematiques.* These d'Etat.(Bordeaux).
- De la torre, A.** (2006). *El método cartesiano y la geometría analítica.* Universidad del Valle, Cali. Colombia.
- Duval, R.** (1988). Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* .
- Duval, R.** (1993). *Registres de représentation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee.* *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 37–65.
- Duval, R.** (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del valle. (Obra original publicada en francés: *semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern: Peter Lang/ Éditions Scientifiques Européennes, 1995).
- Duval, R.** (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R.** (2008). *La conversión de las representaciones: uno de los procesos fundamentales del pensamiento.* Traducción por: Pamela Londoño Bonilla, de la licenciatura en lenguas extranjeras de la Universidad del Valle. Cali, Colombia 2008.
- Duval, R.** (1996). *Les repr´esentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage.* Actes de la 46`eme Rencontre Internationale de la CIEAEM, tomo 1, 3–15. Toulouse, Universit´e Paul Sabatier, 1996.

El plano cartesiano, (s.f.).consultado el 15 de marzo de 2011,disponible en internet:<http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA22/PlanoCartesiano.html>.

Fonseca. L. (2001). Matemáticas con énfasis en competencias. Editorial: horizontes, Bogotá.

Garcia, G. (2005). *La comprensión de R.G.C. presentados en los T.E.* tesis doctoral. Disponible en internet: <http://hera.ugr.es/tesisugr/15518620.pdf> consultado en Marzo del 2011.

Hitt,F.(1998). *Dificultades en la articulación de diferentes representaciones relativas al concepto de función.* Journal of mathematical Behavior, 17 (1). Pág. 123-134. Primera traducción realizada (Alquicira, M, Perez, C), CINVESTAV. México.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá. Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.*

Peralta, J. (2002) *Dificultades Para Articular Los Registros Gráfico, Algebraico Y Tabular: El Caso De La Función Lineal.* Instituto Tecnológico de Sonora. Disponible en internet: <http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Peralta%20Garcia.pdf> consultado en Mayo de 2011.

Rivero M, F. (s.f.) *Resolviendo Las Ecuaciones Lineales Con El Uso De Modelos.* Merida: Universidad de Los Andes, Departamento de Matemáticas. Disponible en internet:<http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagogico/Resolviendo%20las%20ecuaciones.pdf> consultado el 16 de marzo del 2011.

Rodríguez, B. y otros. (1996). Matemáticas con tecnología aplicada. Editorial: prentice Hall de Colombia, Bogotá.

Saussure. (1973). *Curso de lingüística general.* Edición 62. Editorial usada. Barcelona.

Taton, R. (1988). *Historia General de las ciencias.* Editorial: orbis, Barcelona.

ANEXOS

INSTITUCION EDUCATIVA SIMON BOLIVAR

Nombre: Jhon William C.A. Taller: 29 de marzo

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
Es una igualdad donde o mas incógnitas - cuando se despeja una variable
2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?
a. Con letras y números c. En la recta numérica
b. Grafica y tabular d. Todas las anteriores

3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

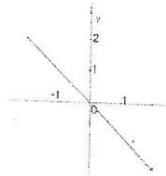
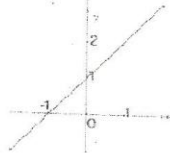
- a) $y = x+5$
- b) $y = 2x-1$
- c) $y = x-1$
- d) $y = 2x+1$

5. ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?

Es la cantidad de grados como se inclina la recta es (4)

6. En la expresión $y=mx+b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?
(m) número

7. Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



8. Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| | | | | | |
|---|---|---|----|---|----|
| x | 1 | 0 | 3 | 2 | -2 |
| y | 0 | 3 | -1 | 1 | -4 |

INSTITUCION EDUCATIVA SIMON BOLIVAR

Taller

Nombre: Michael Gonzalez Arce Fecha: Marzo-29-2012

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?
 a. Con letras y números
 b. Grafica y tabular
 c. En la recta numérica
 d. Todas las anteriores
3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|----|---|---|---|----|
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| x | y |
|----|----|
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

5. ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?

Es el coeficiente de la incógnita.

6. En la expresión $y=mx+b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?
 m = pendiente de x
 b = punto de corte de la recta con el eje y
7. Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



8. Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| x | 0 | | 2 | -2 |
|---|---|----|---|----|
| y | 0 | -1 | | |

Taller

Nombre: MARLA URREA Fecha: 29 MARZO

- ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
es una ecuación lineal
- ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?
a. Con letras y números c. En la recta numérica
* Grafica y tabular d. Todas las anteriores
- Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

- Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

- $y = x+5$
- $y = 2x-1$
- $y = x-1$
- $y = 2x+1$

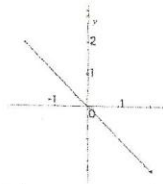
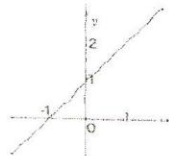
- ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?

Para mí es los resultados de igualdad que tiene un resultado para ubicar en la recta.

- En la expresión $y=mx+b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?

M y b indican es la inclinación de la recta y b es

- Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



- Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| x | -1 | 0 | -1 | 2 | -2 |
| y | 0 | -1 | -1 | -2 | -3 |

Nombre: Luisa Aguirre Fecha: 29-03-2012

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado?
R/ Es aquella que solo tiene una incógnita.
2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?
 - a. Con letras y números
 - b. Gráfica y tabular
 - c. En la recta numérica
 - d. ☒ Todas las anteriores
3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

$y=3x+2$

4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

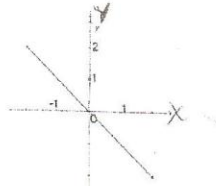
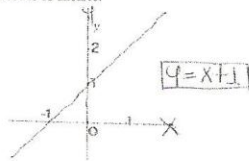
- a) $y = x+5$
- b) $y = 2x-1$
- c) $y = x-1$
- d) $y = 2x+1$

5. ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?
R/ La inclinación que tiene la recta

6. En la expresión $y=mx+b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?

R/ La pendiente.

7. Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



8. Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|
| x | 4 | 0 | 2 | 2 | -2 |
| y | 0 | -2 | -1 | -1 | -3 |

INSTITUCION EDUCATIVA SIMON BOLIVAR

Taller

Nombre: Leonora Dora Julián A. Fecha: March 29 2012

1. ¿Para ti qué es una ecuación de primer grado? *Es un planteamiento de igualdad involucrando una o más variables a la primera potencia*

2. ¿Qué formas existen para representar la ecuación $y=2x+6$?
- a. Con letras y números
 - b. Grafica y tabular
 - c. En la recta numérica
 - d. Todas las anteriores

3. Establece cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |

con incógnitas de las funciones
 $f(x) = 2x + 11$
 $f(0) = 11$

4. Identifica cuál es la ecuación que representa la siguiente tabla de datos

| | |
|----|----|
| x | y |
| 1 | 1 |
| -1 | -3 |
| 3 | 5 |
| -2 | -5 |
| 4 | 7 |

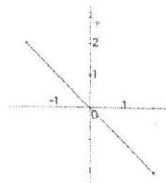
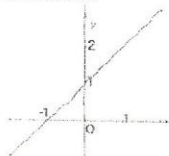
- a) $y = x+5$
- b) $y = 2x-1$
- c) $y = x-1$
- d) $y = 2x+1$

5. ¿Para ti qué es la pendiente de una recta?

Es el grado (medida) de inclinación de una recta en razón de un cambio

6. En la expresión $y = mx + b$ las letras m y b ¿qué crees tú que indican?

7. Utiliza cualquier método que conozcas para establecer la ecuación que representa la siguiente gráfica, explica como lo hiciste.



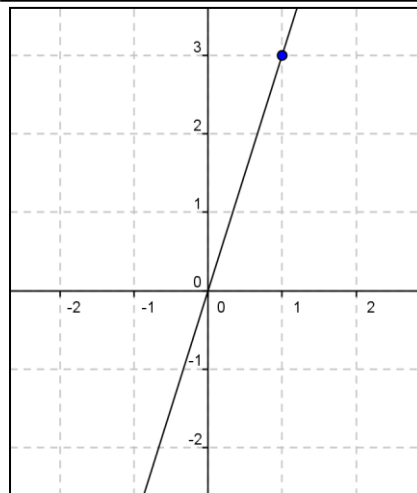
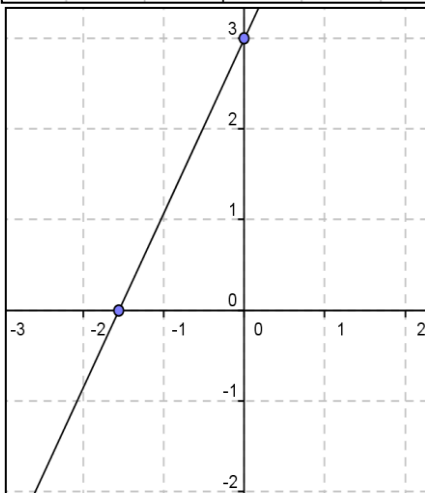
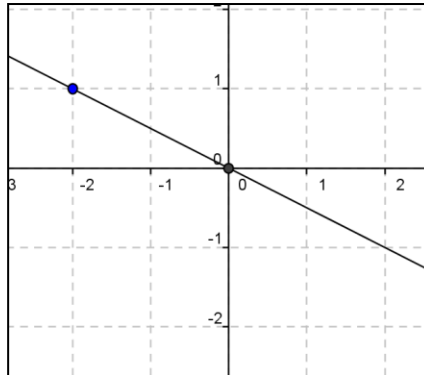
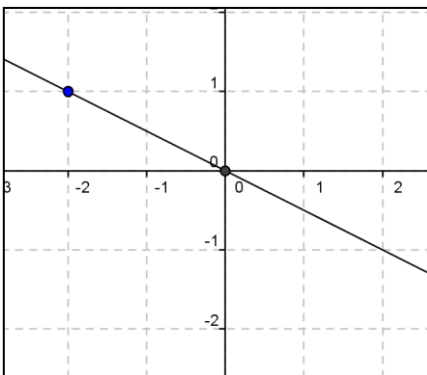
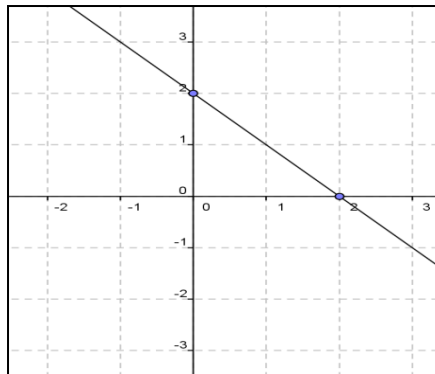
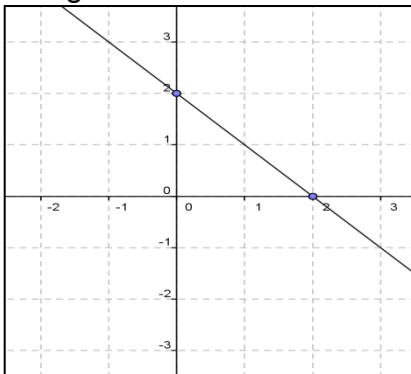
8. Completa la siguiente tabla con soluciones de la ecuación $x-2y=4$

| | | | | | |
|---|---|---|----|---|----|
| x | | 0 | | 2 | -2 |
| y | 0 | | -1 | | |

Cuestionario 2

1. Traza la gráfica de la siguiente expresión algebraica. $y = 4x + 2$

2. Relaciona las siguientes gráficas cartesianas con sus respectivas expresiones algebraicas. Justifica tu respuesta.



G. $y = 3x$

H. $y = 2x + 3$

I. $y = 2x + 2$

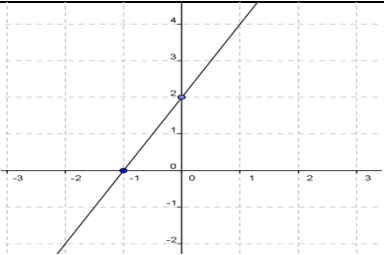
J. $y = -x$

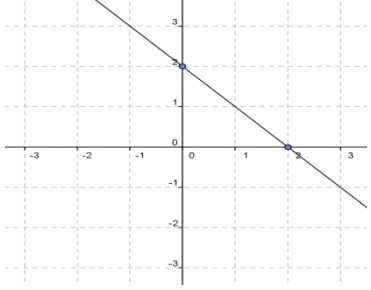
K. $y = -x + 2$

L. $y = -\frac{1}{2}x$

(Escribe tus respuestas en esta hoja o usa la parte de atrás o una nueva hoja)

3. completa la siguiente tabla.

| Gráfica | Ecuación | Pendiente | Corte con el eje Y. | Sentido de inclinación de la recta y ángulos con los ejes. |
|---|------------------------|-----------|---------------------|--|
|  | $y = 2x + 2$ | 2 | 2 | <p>La inclinación de la recta es > 0.</p> <p>Ángulos con los ejes > 1.</p> |
| | $y = \frac{1}{2}x - 4$ | | | |

| | | | | |
|---|-------------|----|---|--|
|  | | | | |
| | $y = x + 4$ | | | |
| | | -3 | 1 | |

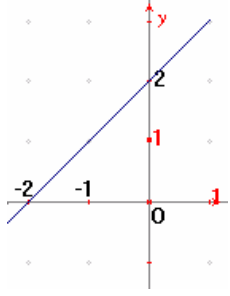
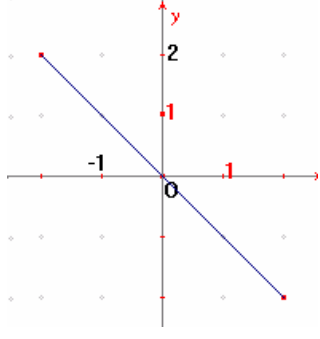
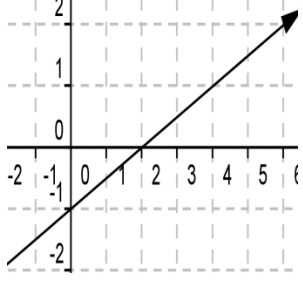
a) ¿Qué puedes decir de la columna **corte con el eje y** ? ¿Crees que hay alguna relación de esta con la variable independiente de la escritura algebraica? Justifica tu respuesta.

b) ¿Qué puedes decir de la columna **sentido de inclinación de la recta**? ¿Con que término de la expresión algebraica podemos relacionar esta columna? ¿Tiene algo que ver en el sentido de la inclinación la presencia de la signo $+$ o $-$ en el coeficiente de la x ? Justifica tu respuesta.

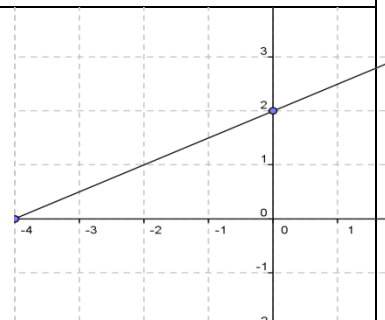
c) ¿Qué pasa cuando se modifica el signo de la constante?

(Escribe tus respuestas en esta hoja o usa la parte de atrás o una nueva hoja)

3. Completa la tabla y responde a los siguientes interrogantes.

| Ecuación | tabla | Gráfica |
|------------------------|-------|---|
| | |  |
| | |  |
| $y = \frac{1}{8}x + 2$ | | |
| | |  |

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |



$$y = -x - 4$$

a) ¿Por qué varían las representaciones graficas de cada una de las ecuaciones lineales? Justifica tu respuesta.

Cuestionario propuesto por Peralta, 2003

Cuestionario

I.

- a. Dibuja la recta que pasa por los puntos (2,3) y (4,5).
- b. ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta? _____
- c. ¿Por qué? _____
- d. ¿Qué entiendes por pendiente de una recta? _____

II. Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables x y y .

| x | y |
|-----|-----|
| 0 | 9 |
| 2 | 8 |
| 4 | 7 |
| 6 | 6 |
| 8 | 5 |
| 10 | 4 |

Tabla 1

| x | y |
|-----|-----|
| -4 | 16 |
| -2 | 4 |
| 0 | 0 |
| 4 | 16 |
| 7 | 49 |
| 13 | 169 |

Tabla 2

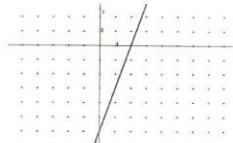
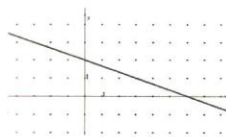
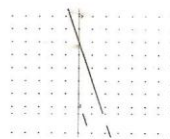
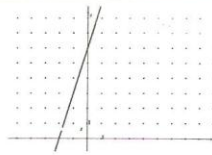
| x | y |
|-----|-----|
| -2 | 2 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |

Tabla 3

- Tabla 1. ¿Representa una función lineal? _____
 ¿Por qué? _____
 Tabla 2. ¿Representa una función lineal? _____
 ¿Por qué? _____
 Tabla 3. ¿Representa una función lineal? _____
 ¿Por qué? _____

III. Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:

IV. Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = -3x + 6$



Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a $y = -3x + 6$, trace la gráfica correcta.

