CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA ASOCIADA A JUEGOS EQUITATIVOS

JOSÉ MIGUEL LEÓN BANGUERO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, Diciembre de 2017

CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA ASOCIADA A JUEGOS DE EQUITATIVOS

JOSÉ MIGUEL LEÓN BANGUERO

CODIGO: 201325480

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

DIRECTOR:

Mg. DIEGO DÍAZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, Diciembre de 2017

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico ______________________

Fecha

Día	Mes	Año
20	02	2018

Código del programa: ____________ Resolución del programa: ________

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza Matemática asociada a juegos equitativos.

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director

Diego Díaz Enriquez.

Nombre del Primer Evaluador

Julio Cesar Mendez.

Nombre del Segundo Evaluador

Gabriel Conde

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Jose Miguel León	1325480	3469	jose.leon@correounivalle.edu.co	3128383833.

Evaluación

Aprobado ☐ Meritorio ☒ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ______________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente),se da un plazo máximo de ______________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones ☐	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Anexo No. 4

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Titulo de la obra: Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a juegos equitativos

Autores:

Nombre: José miguel León Firma: José miguel León
C.C. 1144024116

Nombre: Firma: ____________
C.C.

Nombre: Firma: ____________
C.C.

Fecha: ____________

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por brindarme día a día los conocimientos, fortalezas y disciplina para terminar este ciclo tan maravilloso.

A mi madre, padre, hermano y demás familia, por la paciencia y el apoyo incondicional que me han brindado y que sin ello no hubiera podido llegar hasta donde estoy.

A Alejandra, por haberme enseñado a ver la vida de una forma diferente, por su compañía y motivación constante en mi crecimiento personal y profesional.

A mi director Diego, que a pesar de sus múltiples ocupaciones, me ofreció sus valiosos conocimientos y experiencias que guiaron a la culminación de este trabajo de grado.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN **1**
INTRODUCCIÓN **1**
CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO **6**
1.1 PROBLEMÁTICA.. 6
1.2 OBJETIVOS 11
1.2.1 Objetivo General 11
1.2.2 Objetivos Específicos.. 11
1.3 METODOLOGÍA 12
1.4 JUSTIFICACIÓN 14
1.5 MARCO CONTEXTUAL 19
1.6 ANTECEDENTES 19
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA **26**
2.1 MARCO DE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO 26
2.1.1 Surgimiento de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos 26
2.1.2 Evolución de la Esperanza Matemática 29
2.1.3 Esperanza Matemática como valor del juego... 32
2.2 MARCO CURRICULAR 34
2.2.1 Perspectiva Nacional.. 35
2.2.2 Perspectiva Internacional 37
2.3 MARCO DIDÁCTICO.. 40
2.3.1 Reseña Histórica del CDC... 40
2.3.2 Significado y Características del CDC 44
2.3.3 Conocimiento Didáctico del Contenido Específico 46
CAPÍTULO III: HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESPERANZA MATEMÁTICA.. **53**
3.1 PREHISTORIA DE LA PROBABILIDAD 54
3.2 SURGIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y ESPERANZA MATEMÁTICA 57
3.3 INSTITUCIONALIZACIÓN DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA..................... 66
3.4 CONCLUSIONES 74

CAPÍTULO IV: LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA EN RELACIÓN CON EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS NACIONAL E INTERNACIONAL **77**
4.1 PERSPECTIVA NACIONAL 78
4.2 PERSPECTIVA INTERNACIONAL 87
4.2.1 Currículo Español 88
4.2.2 Currículo y Proyectos Estadounidenses. 96
4.3 CONCLUSIONES 104
CAPÍTULO V: PERSPECTIVA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA **107**
5.1 DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN: 108
5.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS 128
5.3 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO ESPECÍFICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA 146
5.3.1 Conocimiento del Contenido de la Disciplina por Enseñar 150
5.3.2 Conocimiento de la Didáctica Específica 151
5.3.3 Conocimiento del Estudiante 153
5.4 CONCLUSIONES 156
RECOMENDACIONES PARA UNA POSTERIOR INVESTIGACIÓN Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO **158**
PROYECCIONES DE TRABAJO DE GRADO **160**
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **161**

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 65

Ilustración 2 65

Ilustración 3 86

Ilustración 4. 110

Ilustración 5 118

Ilustración 6 129

Ilustración 7 130

Ilustración 8 130

Ilustración 9 131

Ilustración 10 131

Ilustración 11 132

Ilustración 12 133

Ilustración 13 134

Ilustración 14 134

Ilustración 15 135

Ilustración 16 137

Ilustración 17 138

Ilustración 18 138

Ilustración 19 139

Ilustración 20 139

Ilustración 21 140

Ilustración 22 140

Ilustración 23 141

Ilustración 24 147

Ilustración 25 152

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Organización de contenidos de estadística en la renovación curricular de 1990. .. 79

Tabla 2: Estándares curriculares que guardan relación con la Esperanza Matemática 84

Tabla 3: Cursos de matemáticas ofertados en la ESO y Bachillerato. 89

Tabla 4: Elementos curriculares de 1° y 2° de la ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática 91

Tabla 5: Elementos curriculares de 1° y 2° de ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática 93

Tabla 6: Elementos curriculares de 1° y 2° de la ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática 95

Tabla 7: Estándares y Evidencias del NCTM de 6° a 8° que guardan relación con la Esperanza Matemática 98

Tabla 8: Estándares y Evidencias del NCTM de 9° a 12° que guardan relación con la Esperanza Matemática 99

Tabla 9: Probabilidades de estacionar para la situación. 111

Tabla 10: Tipología de conceptos estocásticos involucrados en el instrumento de investigación. 127

Tabla 11: Promedio de puntuación para estudiantes analizados. 141

RESUMEN

Este trabajo de grado pretende presentar una caracterización de elementos para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a juegos equitativos, realizada a estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle. Esta caracterización se hace con base a la delimitación de elementos históricos, curriculares y didácticos, los cuales permiten vislumbrar la enseñanza de la Esperanza Matemática (EM) desde múltiples perspectivas interrelacionadas. Inicialmente esta caracterización comienza haciendo un recorrido histórico-epistemológico que data el surgimiento, establecimiento y consolidación de la EM en los siglos XVII, XVIII y XIX. Luego, se realiza un rastreo de los elementos curriculares relacionados con la EM en el currículo colombiano y se propone una comparación con currículos y proyectos internacionales (NCTM, ESO, Project GAISE). Con base a lo anterior y tomando en consideración el marco teórico de referencia propuesto por Shulman et al (1986), se diseña y aplica un cuestionario a estudiantes de maestría, esto con el fin de reconocer algunos de los errores, sesgos y dificultades en torno a la enseñanza de la EM, y brinda también herramientas para delimitar elementos el Conocimiento Didáctico del Contenido Específico para la EM.

Palabras Clave: Esperanza Matemática, Probabilidad, Juegos de azar, Enseñanza.

INTRODUCCIÓN

Históricamente los juegos de azar han sido y son una de las principales formas de recreación que posee el ser humano, motivado por el riesgo y la incertidumbre, el sujeto guarda gran expectativa en los juegos de azar para que su apuesta salga favorecida y ganar grandes sumas de dinero.

La revisión de los antecedentes ha permitido inferir que el ser humano desde su niñez posee ideas intuitivas sobre probabilidad y juegos de azar, dada su vasta experiencia en fenómenos aleatorios que están a su alrededor; esto ha posibilitado afirmar a investigadores que incluso sin una formación en contenidos en estadística y probabilidad un apostador puede establecer de manera intuitiva si un juego de azar es justo o no (Batanero, Ortiz y Serrano; 2007). Sin embargo, se reconoce que estudiantes presentan sesgos, errores y dificultades en torno a fenómenos aleatorios, debido a que algunos de sus razonamientos están basados en principios y creencias triviales que no tienen una base teórica en la estadística y probabilidad.

Al escudriñar en investigaciones acerca de la introducción de contenidos en estadística y probabilidad, se ha encontrado que los profesores y estudiantes de licenciatura poseen dificultades en la adquisición del conocimiento base para la enseñanza de contenidos en estadística y probabilidad, así como problemas en el reconocimiento de estructuras y estrategias metodológicas para la transformación de dichos contenidos (Bolívar, 2005; Guerrero, 2015).

De esta manera, se puede entrever que en diversas investigaciones que el aprendizaje de estadística y probabilidad es un elemento fundamental durante la formación del ciudadano promedio, debido que la inclusión de éste tipo de contenidos[1] contribuye notablemente a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Sin embargo, a partir de la indagación de los antecedentes anteriormente mencionados, se ha encontrado que la formación de los profesores en la construcción y significación de contenidos en estadística y probabilidad posee deficiencias y limitantes para la atención de las necesidades del estudiantado en los niveles básico, medio y superior.

En virtud de las diversas dificultades y la problemática expuesta en torno a la enseñanza de la Esperanza Matemática, en este trabajo de grado se presenta una propuesta para caracterizar alguno de los elementos más importantes para potenciar su enseñanza significativa. De esta manera la pregunta de investigación que guía este trabajo de grado es: *¿Qué elementos históricos, curriculares y didácticos pueden ser caracterizados en el abordaje de la esperanza matemática a través de los juegos de azar?*

Con respecto a los marcos teóricos y de referencia para este trabajo de grado, se tiene que: el marco de referencia histórico y epistemológico propuesto por Díaz (2013), permite identificar y caracterizar los elementos que guardan relación con el surgimiento, establecimiento e institucionalización la esperanza matemática asociada a los juegos de azar; mientras que el marco curricular propuesto por Guerrero (2015) permite analizar y comparar los currículos internacionales con respecto al currículo nacional; por último el marco teórico propuesto por Shulman et al (1986) permite diseñar y analizar un instrumento de investigación, el cual se aplicó a 7 estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle, a partir de los resultados se describen las categorías de conocimientos necesarias

1 Es importante resaltar, que la instrucción de contenidos en estadística y probabilidad no garantiza el desarrollo de un pensamiento aleatorio o una alfabetización estadística.

para determinar el Conocimiento Didáctico del Contenido específico para la enseñanza de la esperanza matemática.

En el tercer capítulo se describen los elementos históricos y epistemológicos relacionados con la esperanza matemática, para lo cual haciendo un extenso recorrido por su inicio, consolidación y aplicaciones posteriores en los siglos XVI, XVII y XVII. En este orden de ideas, se comienza con la delimitación de la prehistoria dela probabilidad; luego se describe el surgimiento de la probabilidad y esperanza matemática; seguidamente se resume el establecimiento e institucionalización de la esperanza matemática; y se culmina el capítulo presentando las conclusiones encontradas luego dicha indagación histórico-epistemológica.

En el cuarto capítulo se describen los elementos curriculares nacionales e internacionales que guardan relación con la enseñanza de la esperanza matemática y juegos equitativos. En este orden de ideas, primeramente, se presenta al lector un extenso rastreo curricular sobre aquellos elementos del currículo nacional, tomando en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional propuestos en el 1998, 2003 y 2013 respectivamente. En contraste a lo anterior, se presenta un rastreo de los elementos que guardan relación con la esperanza matemática en dos currículos internacionales (ESO y NCTM) y un proyecto internacional (GAISE). Se culmina el capítulo presentando las conclusiones encontradas luego del rastreo y comparación de la perspectiva nacional e internacional.

En el quinto capítulo se describen aquellos elementos didácticos que guardan relación con la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos de azar. Inicialmente, se presenta el diseño y análisis a priori del instrumento de investigación titulado “Evaluación de conocimientos sobre esperanza matemática y juegos equitativos", el cual va dirigido a estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle. Posteriormente, se presentan, a modo de síntesis, los resultados obtenidos luego de la aplicación de la prueba, en dichos resultados se explicitan los criterios de calificación de cada pregunta, así como las respuestas correctas, parcialmente-correctas e incorrectas más frecuentes de los estudiantes. Luego, se presenta el análisis de los resultados, el cual busca delimitar todos aquellos elementos didácticos que se pueden extraer a partir de la recolección de los resultados del instrumento, entre estos elementos se encuentra delimitar algunos errores, dificultades y sesgos asociados con la enseñanza y el aprendizaje de la Esperanza Matemática. Seguidamente se presentan la descripción de las categorías de conocimiento necesarias para determinar el Conocimiento Didáctico del Contenido en relación con la enseñanza de la esperanza matemática, así como la delimitación y caracterización de cada uno de los elementos que componen las categorías de conocimiento. Por último, se presentan las conclusiones encontradas luego de analizar el instrumento de investigación y describir las categorías del CDC para la enseñanza de la esperanza matemática.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO

En este apartado se explicitan los elementos más importantes que permiten plantear el problema y desenlace de esta investigación. Inicialmente se presenta la problemática de la investigación. Seguidamente los objetivos generales y específicos los cuales apunta este proyecto. Posteriormente se presenta la justificación de la investigación y por último los antecedentes de investigaciones alrededor de la problemática anteriormente presentada.

1.1 PROBLEMÁTICA

Históricamente los juegos de azar han sido y son una de las principales formas de recreación que posee el ser humano, motivado por el riesgo y la incertidumbre, el sujeto guarda gran expectativa en los juegos de azar para que su apuesta salga favorecida y ganar grandes sumas de dinero. En el territorio colombiano, la cultura de los juegos de azar, tales como el Baloto y la Lotería, ha estado desde hace mucho tiempo arraigada en los ciudadanos, hasta tal punto que se han popularizado creencias triviales sobre la favorabilidad del azar y se han establecido relaciones con factores divinos y espirituales, los cuales, en su juicio, permiten considerar que la apuesta que se realiza es prácticamente segura.

Según el estudio para la caracterización del jugador colombiano realizado por Coljuegos en el año 2015, el cual pretendía identificar preferencias, percepciones de favorabilidad y frecuencia con que apuestan los jugadores,; estos estudios han identificado que en Colombia el 25%2 de la población mayor de 18 años en promedio apuesta 7,9 veces por mes en juegos de azar y rifas, debido a que en su mayoría consideran que las posibilidades de que su apuesta

2 Tamaño de la muestra 2.651, estimaciones realizadas con un intervalo de confianza del 95% y un error muestral del 0.98%

salga favorable son altas con respecto a los "jugosos" premios que ofertan. Estas conclusiones y resultados de este estudio permiten entrever a los investigadores que la tasa de apostadores y el volumen de apuestas en Colombia han crecido exponencialmente, hecho que llama la atención especialmente a la comunidad educativa, dado que consideran el fenómeno de los juegos de azar en un problema social; por esta razón, cobra especial importancia todas aquellas reflexiones educativas generadas alrededor de este tipo de juegos.

Según Investigaciones como Batanero, Ortiz y Serrano (2007); Vidakovic et al (1998); Guea, Batanero, Benavides (2016) y Cañizales et al. (1999); El ser humano desde su niñez posee ideas intuitivas sobre probabilidad y juegos de azar, dada su experiencia en fenómenos aleatorios que están a su alrededor; esto ha posibilitado afirmar a los investigadores que incluso sin una formación en contenidos en estadística y probabilidad un apostador puede establecer de manera intuitiva si un juego de azar es justo o no. Sin embargo, se reconoce la existencia de sesgos probabilísticos entorno a fenómenos aleatorios, debido a que algunos de sus razonamientos están basados en principios y creencias triviales que no tienen una base teórica en la estadística y probabilidad.

En Investigaciones realizadas por Batanero (1994, 2000, 2002a); Batanero, Arteaga, Ortega (2014); Alsina (2016) y Díaz (2007); se ha identificado que la falta de desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes genera sesgos, dificultades y errores en torno a los fenómenos aleatorios; por ello han propuesto que una de las maneras adecuadas para abordar estas dificultades es a través de la alfabetización estadística, la cual tiene como objetivo fundamental la educación es la introducción de conceptos estadística y probabilidad en el currículo de matemáticas a nivel mundial.

Al escudriñar en investigaciones acerca de la introducción de contenidos en estadística y probabilidad (véase en: Azcarate & Cardeñoso (2011); Batanero (2000, 2002a); Pinto (2010); Serrano (1996)) se ha encontrado que los profesores y estudiantes de licenciatura poseen dificultades en la adquisición del conocimiento base para la enseñanza de contenidos en estadística y probabilidad, así como problemas en el reconocimiento de estructuras y estrategias metodológicas para la transformación de dichos contenidos; lo cual ha propiciado la aparición de sesgos, dificultades y errores en el aprendizaje por parte de los estudiantes y profesores (Bolívar, 2005; Guerrero, 2015).

De esta manera, se puede entrever que en diversas investigaciones que el aprendizaje de estadística y probabilidad es un elemento fundamental durante la formación del ciudadano promedio, debido que la inclusión de éste tipo de contenidos[3] contribuye notablemente a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Sin embargo, a partir de la indagación de los antecedentes anteriormente mencionados, se ha encontrado que la formación de los profesores en la construcción y significación de contenidos en estadística y probabilidad posee deficiencias y limitantes para atender a las necesidades del estudiantado en los niveles básico, medio y superior. Por esta razón se propone en ese trabajo de grado, caracterizar algunos de los elementos históricos, curriculares y didácticos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada al contexto de los juegos de azar y su favorabilidad.

Con referente a los juegos de azar y la esperanza matemática, el panorama investigativo no es del todo alentador, debido que son pocas las investigaciones que contribuyen específicamente a este tópico en cuestión. Hasta el momento solo se han identificado dos

3 Es importante resaltar, que la instrucción de contenidos en estadística y probabilidad no garantiza el desarrollo de un pensamiento aleatorio o una alfabetización estadística.

tesis de maestría, que a criterio propio, contribuyen notablemente a la delimitación y abordaje del problema de trabajo de grado que se tratará en el presente trabajo de grado. A continuación un breve resumen en ambas investigaciones y sus potencialidades.

En primer lugar, se presenta el trabajo de grado de maestría realizada por Díaz (2013) titulada: *Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática*, en este trabajo se encuentra un análisis detallado del surgimiento, evolución y establecimiento de la Esperanza Matemática en el siglo XVII, XVIII y XIX, buscando principalmente localizar los aspectos externalistas que posibilitaron su aparición a lo largo de la historia. En esta investigación se puede resaltar la importancia de la caracterización de los elementos históricos para la enseñanza de la Esperanza Matemática, debido a que éstos juegan un papel fundamental en la significación de este concepto para los estudiantes.

En segundo lugar, se presenta el trabajo de grado de maestría realizada por Guerrero (2015) titulada: E*valuación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y Juegos equitativos en alumnos de bachillerato.* Esta investigación pretende verificar si establecer un juego equitativo proporciona a estudiantes de secundaria un contexto educativo eficaz para el aprendizaje de la probabilidad, Esperanza Matemática y variables aleatorias; para verificar esta hipótesis se requirió la aplicación y un análisis de un cuestionario sobre variable aleatoria y esperanza matemática, esto con el fin de identificar las intuiciones y competencias desarrolladas durante su etapa escolar. En esta investigación principalmente se puede resaltar una exhaustiva caracterización de los elementos curriculares necesarios para la enseñanza de la esperanza matemática, esto lo hace analizando el currículo de matemáticas de la ESO[4] y atendiendo a las recomendaciones realizadas por el NCTM[5] y proyecto GAISE[6].

En general, dichas investigaciones (Díaz, 2013; Guerrero, 2015) han contribuido notablemente a la distinción de la relación entre la esperanza matemática y los juegos equitativos, evidenciando que a través de problemas propuestos sobre juegos de equitativos se puede abordar el concepto de esperanza matemática; de igual manera, se puede reconocer en las conclusiones de ambos trabajos que la manera más adecuada para abordar la enseñanza de la esperanza matemática es a través de la caracterización de los elementos históricos y curriculares. Sin embargo, se reconoce la existencia de algunas limitaciones en estos trabajos, y que Díaz (2013) y Guerrero (2015) los exponen en sus conclusiones, y es la perspectiva didáctica sobre la enseñanza de la esperanza matemática, dado que hasta el momento poco se ha trabajado sobre la caracterización de los elementos didácticos que requiere el profesor para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a los juegos equitativos en el aula de clases.

Es pertinente entonces, definir la problemática central de este trabajo de grado, el cual se cuestiona si caracterizar los elementos históricos, curriculares y didácticos para la enseñanza de la esperanza matemática proporciona herramientas enriquecedoras para su instrucción. La cual se ve expresada en la siguiente pregunta problema:

4 Escuela Secundaria Obligatoria

5 National Council Teachers of Mathematics

6 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education

¿Qué elementos históricos, curriculares y didácticos pueden ser caracterizados en el abordaje de la esperanza matemática a través de los juegos de azar?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Determinar los elementos históricos, curriculares y didácticos que aportan para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos en estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Reconocer elementos históricos y epistemológicos que evidencian el surgimiento, evolución y establecimiento de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos en los siglos XVII, XVIII y XIX.
- Describir los elementos que posibilitan la aparición de la esperanza matemática en el currículo nacional y compararlo con currículos y proyectos internacionales (Proyecto GAISE, NCTM y ESO)
- Identificar las características del Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos

1.3 METODOLOGÍA

En este apartado se hace alusión a la parte metodológica de la investigación, explicitando principalmente cada fase en la cual se busca caracterizar los elementos históricos, curriculares y didácticos para la enseñanza de la esperanza matemática.

Fase 1: Diseño y estructuración del proyecto de Trabajo de Grado

En esta fase, como su nombre lo indica, se diseña y estructura el proyecto de trabajo de grado, buscando definir principalmente: problema de investigación; pregunta problema; objetivo general y objetivos específicos por cumplir; planteamiento de la justificación; y delimitación y selección de investigaciones previas, y marco contextual. De igual manera, en esta fase se esclarece y se fundamenta teóricamente las variables cualitativas de la investigación (variable histórica, variable curricular y variable didáctica), a partir de los antecedentes de investigaciones anteriormente presentados. Por consiguiente, en esta fase se plantea los marcos referenciales sobre los cuales se enmarca la investigación: Marco Histórico-Epistemológico, Marco Curricular; Marco Didáctico.

Fase 2: Caracterización de los Elementos Histórico-Epistemológicos de la Esperanza Matemática: En esta fase, se cumple el primer objetivo específico. Se comienza por dar un rastreo histórico sobre los primeros utensilios, cuestiones y escritos que dieron pie a la concepción y reconocimiento de la aleatoriedad. Luego, se realiza un recorrido histórico entorno al surgimiento de la teoría de la probabilidad y esperanza matemática, evidenciando el papel fundamental de la filosofía, la jurisprudencia y, los juegos de azar en el establecimiento de la probabilidad como disciplina de estudio. Seguidamente, se realiza un rastreo documental en torno al surgimiento e institucionalización de la esperanza matemática como método predilecto de resolución de problemas, este rastreo se efectúa a partir de los trabajos de Huygens (1657) y Bernoulli (1713).

Fase 3: Caracterización de los Elementos Curriculares para la enseñanza de la Esperanza Matemática: En esta fase se busca cumplir el segundo objetivo específico planteado. Se comienza por rastrear en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje los todos los procesos, estándares y actividades relacionadas con la Esperanza Matemática y los juegos de azar. Luego, se identifican los contenidos, estándares, metodologías de evaluación y recomendaciones propuestas por el ESO, NCTM y proyecto GAISE, en relación con la Esperanza Matemática y los juegos de equitativos. Por último, para concluir se realiza una comparación entre ambos rastreos, con el fin de determinar la situación actual en que se encuentra el currículo de matemáticas en Colombia y delimitar los elementos curriculares más necesarios para la comprensión y significación en el aula de clases de la esperanza matemática asociada a los juegos equitativos. Cabe destacar que en esta fase del proyecto se espera hacer especial hincapié en las metodologías, contenidos y criterios de evaluación propuestos en cada uno de estos currículos, dado que son insumo primordial para caracterizar los elementos curriculares para la enseñanza de la esperanza matemática.

Fase 4: Caracterización de los Elementos Didácticos para la enseñanza de la Esperanza Matemática: En esta fase se espera cumplir el tercer objetivo específico. Inicialmente se diseña y aplica un instrumento de evaluación dirigido a estudiantes de Maestría en Educación con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, que permita reconocer los elementos del Conocimiento Didáctico del Contenido Específico (CDCE) para la enseñanza de la esperanza matemática, el cual es insumo primordial para caracterizar los elementos más importantes para la enseñanza de este concepto en el aula de clase. Posterior a eso se recogen los resultados y se analizan, desde la perspectiva del Conocimiento Didáctico del Contenido. Por último, se describen las categorías del CDCE en relación con los elementos para la enseñanza de la esperanza matemática.

1.4 JUSTIFICACIÓN

En Colombia, la cultura de los juegos de azar, tales como el Baloto y la Lotería, han estado desde hace décadas arraigada en los ciudadanos, hasta tal punto que apostar por este tipo de juegos se ha convertido más que en una diversión, en un hábito que día a día ha dejado millones de regalías para las casas de apuestas. Este problema social como se ha distinguido anteriormente, se puede justificar desde una perspectiva social y una perspectiva educativa, las cuales dieron pie a la realización de esta investigación.

Según Coljuegos (2015), se estima que en Colombia hay 7 millones de habitantes apuestan frecuentemente en los juegos de azar, y de los cuales el 76% pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3; así mismo en los rangos de ingresos mensuales el 66% de los jugadores ganan hasta $1’320.000. La interpretación de la información anterior ha posibilitado establecer hipotéticamente que el perfil del jugador colombiano promedio pertenece a un nivel socioeconómico entre bajo-bajo y medio-bajo según el DANE (s.f).

Esto ha dado pie a suponer que uno de los factores que propician las apuestas de jugadores de niveles socioeconómicos más bajos es la falta de desconocimiento sobre probabilidad, juegos equitativos y esperanza matemática (Guerrero, 2015). De igual forma, según la Estimación del Mercado a partir de la declaración de compra de los Juegos de Azar y

Apuestas realizada también por Coljuegos (2015), se puede afirmar hipotéticamente[7] que en promedio un jugador apuesta 7,9 veces cada mes, es decir, cercanamente a 2 veces por semana; también se estima que el volumen de apuestas que se obtuvieron por juegos de azar y apuestas legales registrados por Coljuegos en el año 2015 asciende a un total de 7.1 billones de pesos en 2015. En cierto modo, los datos anteriormente presentados son de suma preocupación para la sociedad académica y en general, dado que permiten vislumbrar abiertamente la incidencia de los juegos de azar en la economía.

Por otro lado, una de las razones que impulsa la realización de esta trabajo de grado, a manera de ejemplo, fue el gran evento piramidal que sucedió en el año 2008, de la mano de David Murcia Guzmán y su empresa DMG Grupo Holding S.A. Guzmán, quien prometía a sus clientes grandes dividendos por inversiones a muy corto plazo, y que tiempo después resultó ser una de las mayores estafas en la historia reciente del país. El mundo de las inversiones puede ser considerado como un juego de azar, en donde el sujeto realiza una apuesta con la expectativa de obtener cierta cantidad de dinero, teniendo en cuenta el riesgo de perder. Entonces, sería difícil suponer que si todas las personas que resultaron defraudadas por la empresa DMG, hubiesen comprendido con anterioridad a su inversión, la utilidad de la esperanza matemática de Huygens en el cálculo de la favorabilidad de los juegos de azar, sería poco probable que hubiesen resultado estafadas. (Arbeláez y Díaz, 2010)

En retrospectiva, los datos presentados anteriormente han sido producto de investigaciones y encuestas realizadas por reconocidas firmas a nivel nacional, lo cual lleva a reconocer, en cierta medida, el impacto de los juegos de azar en la sociedad y el problema social el cual ha

7 Con un intervalo de confianza del 95% y un error muestral del 0.98%

generado, por ello resulta pertinente y enriquecedor efectuar una investigación educativa tomar en consideración la caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada los juegos equitativos.

Si bien, este problema se pretende solucionar a través de la caracterización de elementos históricos, curriculares y didácticos, es necesario evidenciar, en términos educativos, los alcances del abordaje del problema en la comunidad educativa, para ello es se amplían cuatro perspectivas educativas que argumentan el porqué de esta investigación:

<u>Formación de profesores:</u> Algunas investigaciones han reconocido que futuros profesores de la educación básica y media presentan sesgos probabilísticos, errores y dificultades alrededor de contenidos en estadística y probabilidad, más específicamente alrededor de los juegos de azar (Mohamed, Ortiz, Serrano, 2013). Fruto de esta problemática, en los últimos años se han elaborado un gran número de investigaciones que abordan la enseñanza y el aprendizaje de conceptos estocásticos. Sin embargo, hasta el momento, son limitadas las investigaciones que se han desarrollado alrededor de los juegos equitativos desde una perspectiva educativa (Guerrero, 2015). Por ello, resulta enriquecedor para la comunidad educativa, generar reflexiones sobre la enseñanza y desarrollo de la idea intuitiva de juegos equitativos de profesores en ejercicio, tomando como elemento teórico de referencia la Esperanza Matemática. Se espera con este trabajo de grado contribuir hacia la planificación, enseñanza y organización de las clases de estadística y probabilidad, caracterizando elementos históricos, curriculares y didácticos para la enseñanza de este concepto.

<u>Didáctica en Estadística:</u> La estadística ha tomado un papel importante en el desarrollo de la sociedad moderna, dado que permite sintetizar grandes cantidades de información en tablas

y gráficas, y además identificar relaciones entre las variables de un fenómeno aleatorio (Batanero, 2002b). En los últimos 20 años, de la mano de grupos de investigación en matemáticas y educación matemática, como por ejemplo el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se ha contribuido a la conformación del campo de la Didáctica en Estadística, la cual está dirigida a investigar la manera en que se enseñan y aprenden los contenidos de estadística y probabilidad en el aula de clases. Históricamente se ha encontrado que los juegos de azar han propiciado el desarrollo y evolución de la teoría de la probabilidad (Díaz, 2013), pero desafortunadamente son pocas las investigaciones que toman en consideración los juegos de azar dentro del campo de la didáctica en estadística (Guerrero, 2015). Por ello desarrollar una investigación que tome en consideración el contexto de los juegos de azar, proporciona herramientas didácticas y metodológicas para la introducción de conceptos estocásticos en el aula de clases; además el establecimiento de sesgos probabilísticos para el cálculo de juegos equitativos permite reconocer, en cierta medida, las dificultades y errores que están contenidas en las intuiciones de los estudiantes y profesores.

<u>Currículo en Matemáticas:</u> El Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas propuestos en el año 1998, afirma que el conocimiento matemático de los estudiantes debe ser globalizante, de tal manera que propicie la interpretación de situaciones no deterministas para toma de decisiones y posteriores predicciones. Del mismo modo el MEN, lo amplía en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos en el año 2003, distinguiendo el conjunto de competencias básicas en estadística y probabilidad que deben desarrollar los estudiantes a lo largo de la educación básica y media, y lo define como Pensamiento Aleatorio y Sistemas de

Datos, este tipo de pensamiento tiene como foco central el desarrollo de habilidades estocásticas para tomar decisiones razonables ante un suceso permeado por el azar. Si bien, ambos documentos proporcionan herramientas para la organización de contenidos para los profesores en Colombia, se considera que el MEN no ha dejado explícito elementos fundamentales para la enseñanza de los contenidos en estadística y probabilidad (Gómez, 2016), tales como significados de la probabilidad, ideas intuitivas de probabilidad, juegos de azar y juegos equitativos, criterios de evaluación, entre otros. Por ello resulta interesante indagar a profesores en ejercicio, sobre la manera en cómo entienden, organizan y aplican los contenidos de probabilidad propuestos por el MEN en los Estándares Básicos de Competencias. De igual manera resulta fructífero para el trabajo de grado y para futuras investigaciones alrededor del campo de la estocástica y educación realizar un contraste con currículos internacionales como ESO, NCTM, y Proyecto GAISE e identificar las ventajas, falencias y dificultades que tiene el currículo nacional con respecto a la enseñanza de la esperanza matemática y juegos equitativos.

<u>Educación Estadística Crítica:</u> En una sociedad en donde la tecnología y la masificación información son elementos que están constantemente en el diario vivir, es necesario e indispensable para un ciudadano promedio desarrollar competencias críticas que permitan tomar decisiones e inferir conclusiones a partir de la información estadística presentada (Batanero, 2000). Con base en este principio, surge desde hace 10 años la corriente de investigación denominada Educación Estadística Crítica, de la mano de autores como Campos, Wodewotski, Jabobini, Freire, Giroux, entre otros., quienes proponen una educación que agregue una competencia crítica al aprendizaje y la enseñanza de la estadística y probabilidad. Desde esta corriente, son bastantes los proyectos que se han generado para

trabajar con estudiantes de distintos niveles educativos, tales como: Calentamiento Global, Índice de Desarrollo Humano, Pruebas Médicas, entre otros (Campos, 2016)., en el caso de esta investigación, se propuso reflexiones teóricas críticas sobre la enseñanza de la esperanza matemática asociada a los juegos equitativos, lo cual puede consolidarse más adelante con un proyecto de estadística crítica alrededor de juegos de azar.

1.5 MARCO CONTEXTUAL

La institución en la cual se va a llevar a cabo la aplicación del instrumento de investigación es la Universidad del Valle sede Meléndez, la cual se encuentra ubicada en la ciudad de Santiago de Cali del departamento del Valle del Cauca, en el barrio Meléndez en la Calle 13 # 100-00. La población de estudiantes de Maestría en Educación Analizados se compone de 7, los cuales actualmente ejercen en la Educación Básica y Media. La población de docente actualmente, en promedio, posee una experiencia profesional de 6 años. Ninguno los estudiantes evaluados pertenece a programas o becas del MEN.

1.6 ANTECEDENTES

En los antecedentes se hace énfasis en tres aspectos principales: los referentes a los estudios históricos sobre la esperanza matemática o juegos equitativos; las investigaciones curriculares en torno a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos estocásticos; y las investigaciones didácticas en torno a la enseñanza de la esperanza matemática y juegos equitativos.

En la actualidad, las investigaciones históricas en torno a la Esperanza Matemática y juegos han sido relativamente pocas, debido a que las implicaciones que surgen al introducirse a terrenos inhóspitos y poco convencionales encaminan a reflexionar sobre el surgimiento, evolución e implicaciones que tuvo la Esperanza Matemática hasta su consolidación en los siglos XVI, XVII y XVII (Díaz, 2013).

El primer antecedente Histórico encontrado, es elaborado por la historiadora norteamericana Lorraine Daston, quien muestra un amplio espectro sobre los aspectos históricos asociados a la esperanza (*expectatio*) en términos de utilidad, perdida e implicaciones. Daston en su artículo *Probabilistic expectation and rationality in clasical probability theory* publicado en 1980, expone una recopilación sobre las concepciones y significados de matemáticos de la Esperanza Matemática, en un esfuerzo deliberado por capturar algunos de los aspectos más sobresalientes en la toma de decisiones de manera racional.

El segundo referente Histórico es la investigación de la Universidad del Valle que se titula *Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática*, por Díaz (2013), dentro de este trabajo se encuentra un análisis histórico y epistemológico alrededor de la Esperanza Matemática. Este trabajo busca localizar algunos aspectos externalistas que posibilitaron su aparición a lo largo de la historia, a partir de las reflexiones de filósofos, historiadores y matemáticos como Daston (1980), Hacking (1995), Rescher (1997), Huygens (1657), entre otros. El problema que se propone a abordar en esta investigación es la constitución de la Esperanza Matemática como método de justificación en la solución de problemas de azar a mediados del siglo XVII; para ello Díaz (2013) propone un análisis del texto *Libellus de ratiociniis in ludo aleae* de Huygens (1657), la dualidad de probabilidad de

Hacking, y las contradicciones sobre el campo de la matemática del azar. En las conclusiones de esta investigación encuentran algunos hallazgos como:

- El análisis de los referentes históricos ha permitido identificar que el estudio de los juegos de azar y su justicia ha posibilitado el surgimiento de la teoría de probabilidad.

- Se resalta la importancia del carácter dual de la probabilidad, dado que el estudio de fenómenos aleatorios desde una perspectiva frecuencial permite a los estudiantes comprender de manera significativa el concepto de probabilidad. Sin embargo, en ocasiones resulta complejo reproducir algunos eventos aleatorios, por ello también es interesante tomar en consideración la definición epistemológica o bayesiana de probabilidad.

- El análisis del libro *Libellus de Ratiocinnis in ludo aleae* de Huygens permitió identificar los principales impactos de su obra en la actualidad, los cuales contribuyeron hacia la elaboración de modelos estocásticos que utilizan la Esperanza Matemática, tales como: Compañías de seguros y duración de parejas.

La pertinencia que tiene la estadística y la probabilidad en el currículo educativo es importante, debido a que contribuye al desarrollo integral de ciudadanos. El aprendizaje de la estocástica promueve el razonamiento crítico de fenómenos aleatorios y permite tomar decisiones y juicios a través de datos cuantitativos y conceptos estadísticos elementales (Batanero, 2000). Por esta razón, se toma en consideración los antecedentes curriculares para la realización de esta investigación.

En Batanero et al (2014) se sustenta la necesidad de un cambio curricular en España, que apunte hacia la alfabetización y formación de ciudadanos competentes en estadística y probabilidad, dadas las demandas actuales de lectura e interpretación de gráficos estadísticos en la formación de ciudadanos. Para ello, analizan los contenidos estadísticos que se concretan en los Decretos de Enseñanza Mínimas propuestas por la ESO tomando como referencia currículos y proyectos internacionales como el NCTM (2000) y proyecto GAISE de Franklin y Cols (2007). Concluyen a partir de los resultados que: El currículo en matemáticas no establece la distinción entre los términos azar e incertidumbre; el currículo poco se incentiva el desarrollo de una cultura aleatoria que proponga reflexionar ante los fenómenos aleatorios de la vida diaria; y por último resalta la importancia de trabajar en la formación del profesorado para la enseñanza de la estadística y probabilidad, tal como lo expone el ICMI8 e IASE9.

En las últimos décadas, los currículos en matemáticas de la educación básica, media y superior han incorporado de forma generalizada los contenidos en estadística y probabilidad (Batanero, 1994). Fruto de esta incorporación, han surgido numerosas investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos estocásticos, pero desafortunadamente son pocos los antecedentes que se han enfocado en estudiar los juegos de azar en un contexto educativo (Guerrero, 2015). A continuación, se presenta algunos de los antecedentes didácticos que se toman como referencia:

8 International Mathematical Union

9 International Association for Statistical Education

El primer antecedente didáctico es Serrano, Cañizares, Batanero y Ortiz (2001), en este artículo se parte de la hipótesis de que la edad es un factor que influye en el rendimiento matemático para la solución de problemas de juegos equitativos; para corroborar lo anterior, se propone la aplicación de un instrumento a 467 niños. Este estudio mostró que los estudiantes poseen una correcta concepción de la idea de juegos equitativos, dado que muestran capacidades para determinar si un evento aleatorio es equiprobable y establecen adecuadamente los premios que corresponden de manera justa; finalmente para verificar la hipótesis planteada fue necesario aplicar entrevistas a los niños, con el fin de analizar los argumentos que proporcionaban para cada una de las respuestas del cuestionario según sus edades.

En Guea et al (2016) se diseña y aplica una secuencia didáctica a alumnos de tercer ciclo de la Educación Primaria en España, que buscaba enfrentar a los alumnos a una experiencia aleatoria sencilla, y los conduzca a utilizar sus razonamientos e intuiciones sobre la probabilidad y el azar. En los resultados de la aplicación se identificó que los alumnos presentan dificultades en el desempeño de ideas e intuiciones sobre el azar, encontrando que sus razonamientos están basados en principios y creencias triviales que no tienen relación con la probabilidad

De igual manera, En Ortiz, Batanero y Contreras (2012) se realizó una evaluación de conocimientos a 167 futuros profesores de educación primaria con respecto a los juegos equitativos; el objetivo de esta prueba fue valorar los tres aspectos propuestos por Shulman (1986a): *el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, y el conocimiento especializado del contenido y los estudiantes*. Para la elaboración del cuestionario estuvieron referenciadas las investigaciones de Ball, Livienski y Mewborn

(2001); y Hill, Ball y Schilling (2008), las cuales aportaron metodologías y preguntas para el instrumento. Los resultados de esta prueba arrojaron que:

- Los profesores en formación muestran un conocimiento común del contenido acorde al desarrollo de la idea de juegos equitativos y la enseñanza de la Esperanza Matemática.
- Para el conocimiento especializado del contenido, se identifica que los profesores poseen falencias al momento de reconocer los objetos necesarios para trabajar en una actividad de juegos aleatorios.
- Aunque los profesores en formación son capaces de discriminar las preguntas erróneas de los estudiantes, es claro que el conocimiento del contenido y los estudiantes propuesto por Shulman (1986a) no ha sido desarrollado de manera efectiva en esta población, dado que la falta de formación en Didáctica de la Estocástica para la identificación de dificultades, errores y falencias ha provocado un mal análisis de las respuestas de los estudiantes por parte de los profesores.

Estos resultados le han permitido concluir a los investigadores que es necesario fortalecer la formación de profesores en el proceso de enseñanza de contenidos estocásticos en todos sus niveles.

Por último, y para cerrar los antecedentes didácticos, se reconoce la investigación realizada por Guerrero (2015) titulada: *Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y Juegos equitativos en alumnos de bachillerato.* En esta investigación se pretende verificar si establecer si un juego es o no equitativo proporciona a los estudiantes de secundaria un contexto educativo eficaz para el aprendizaje de la probabilidad, Esperanza Matemática y variables aleatorias. Para esta verificación, Guerrero propone un estudio exploratorio utilizando un cuestionario de investigación que permita evaluar los conocimientos de los alumnos sobre la variable aleatoria discreta y la Esperanza Matemática; esto con el fin de identificar las intuiciones de los estudiantes alrededor de los juegos de azar y las competencias desarrolladas durante su etapa escolar. Para la realización y análisis del cuestionario se toma en consideración las preguntas y análisis a priori realizadas por Gómez (2014) y Mohamed (2012); así como el marco de referencia curricular propuesta por ESO (2013), La ley Orgánica para la mejora de la educación en matemática propuesta por LOMCE, (Jefatura de estado, 2013). En los resultados de esta investigación se identificó que: Primero, los estudiantes poseen una idea intuitiva de juegos equitativos y Esperanza Matemática. Segundo, se identifica que los estudiantes poseen limitaciones a la hora de volver un juego desfavorable en uno favorable, dado que no aplican razonamientos probabilísticos y la Esperanza Matemática. Tercero, en este estudio se seleccionaron los errores más comunes en el aprendizaje de la Esperanza Matemática y juegos equitativos.

Estas son entonces, algunas de las investigaciones que se tomarán en consideración para el desarrollo del presente proyecto de grado, las cuales, más que mostrar diferencias metodológicas, teóricas y conceptuales, permiten ver que el abordaje de la Esperanza Matemática desde una perspectiva educativa podría resultar productiva si se caracterizan los elementos históricos, curriculares y didácticos necesarios para su enseñanza en el aula de clases.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

2.1 MARCO DE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

En este apartado se delimitan aspectos teóricos centrales que se guían el rastreo e indagación de los elementos históricos y epistemológicos de la Esperanza Matemática y el concepto de probabilidad. En particular, se realiza la distinción de tres momentos centrales, los cuales distinguen el seguimiento, establecimiento y consolidación del concepto de Esperanza Matemática a lo largo de la historia. Es importante aclarar que la delimitación del marco teórico se explicitara puntualmente en el Capítulo III del presente trabajo de grado.

2.1.1 Surgimiento de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos

Prehistoria de la Probabilidad

Históricamente se ha relacionado los inicios de la Esperanza Matemática con la teoría de probabilidad, esto se debe a que particularmente ambas, desde sus inicios, convergieron sus avances hacia la modelización y estimación de los juegos de azar (Daston, 1980) (Díaz, 2013). Por un lado, la probabilidad se ha centrado en estimar la ocurrencia un evento aleatorio; y por el otro, la Esperanza Matemática se ha centrado en calcular utilidad y pérdida promedio al jugar en repetidas ocasiones.

Si bien, el problema de los puntos o problema del reparto fue encontrado en un manuscrito italiano aproximadamente en el año 1380, fue abordado por distintos filósofos y matemáticos como Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano, entre otros, con soluciones controversiales y poco satisfactorias. Es hasta 1654, en las soluciones realizadas por Pascal y Fermat que provocaron un impacto tan profundo en la comunidad matemática de la época, que se considera que fue el surgimiento de la teoría de la probabilidad, pese a la hostilidad de muchos matemáticos que rechazaban la inexactitud de esta teoría (Vega, 2002).

De igual manera, se destaca que la teoría de la probabilidad inició de la mano de Pascal y Fermat; la historia ha mostrado que la probabilidad ha estado presente en diferentes momentos, como lo son: la escritura de la Biblia Judeo-Cristiana y la elaboración de instrumentos para echar suertes como lo son el Astrágalo o Talus (Díaz, 2013)

Naturaleza de la Esperanza Matemática

La estrecha relación entre la probabilidad y *expectatio* catapultó la aceptación de la probabilidad como disciplina de estudio en la antigüedad; lo cual queda sustentado en el análisis de la correspondencia entre Pascal y Fermat, dado que sus cálculos y la respuestas que propusieron alrededor del problema del reparto estuvieron dirigidos más hacia las expectativas del jugador que en probabilidades en sí (Díaz, 2013).

A raíz de lo anterior, C. Huygens quien conoce algunos de los resultados establecidos por Pascal y Fermat, pero desconoce sus métodos, elabora su obra *Libellus Ratiociniis in ludo Aleae* en 1657, con la premisa de que por medio de la teoría de las esperanzas se puede establecer *apuestas razonables* para los jugadores. A lo largo del desenlace de la obra de Huygens, define la palabra *expectatio* en términos de intercambios justos de dinero, en donde la parte que debe de llevarse cada uno de los jugadores está dado por el producto entre el premio y su probabilidad de acierto.

A partir de los avances de Huygens, el *expectatio* empezó a trabajarse por distintos matemáticos a través de la historia; en este sentido Daston (1980) reconoce dos formas de emplear el *expectatio* a partir de sus múltiples conexiones con contextos matemáticos y no matemáticos. Por un lado, se puede denotar el expectatio como un conjunto de premisas para determinar la justicia de la jurisprudencia o de los acuerdos legales que se establecen. Por otro lado, se utiliza para estimar la viabilidad de participar en un evento, es decir, establecer un valor que permita decidir al apostador si el fenómeno aleatorio iba a significar una ganancia o una pérdida, un claro ejemplo de ello son los seguros de vida (Díaz, 2013).

Tomando en consideración el contexto de la jurisprudencia, el *expectatio* comienza a jugar un papel relevante en la toma de decisiones de los gobiernos o legisladores en acto. En el momento que se intenta establecer la justicia de un evento determinado, lógicamente, cada una de las partes expone sus razones para resultar favorecido, pero en muchos casos, la justicia tiende a ser ambigua, en el sentido de que las decisiones no poseen una certeza absoluta, sino a lo sumo probablemente. Por esta razón, el expectatio toma un papel relevante en la toma de decisiones y arreglo de las partes para efectuar el mejor trato, procurando satisfacer la obligación moral que tiene la justicia ante la sociedad.

> "Nuestras acciones como seres racionales, las que se determinan en el día a día, no deben ser guiadas en el camino de la certeza sino por la transitoriedad de lo posible" (Tomado de Díaz, 2013, pág. 40)

De igual manera, la idea de lo *posible* empezó a tomar importancia en el pensamiento humano de la antigüedad, dado que las recurrentes críticas de los aspectos racionales de filosóficos y religiosos, y al no encontrar manera de justificar distintas acepciones como la existencia de un Dios, la ley de la gravedad, entre otros. De esta manera Daston (1980) identifica dos tipos de *expectatio*: el primero está asociado hacia los aspectos puros de la equitatividad de los juegos de azar y el segundo está asociado a la prudencia que establece las distintas posibilidades de beneficios o pérdidas en una transacción comercial.

Tiempo después, el papel de Jacques Bernoulli en la consolidación de la Esperanza Matemática fue sumamente importante, él a través de su libro *Ars Conjectandi* publicado en 1713, siendo este uno de los primeros libros de la época en tratar temas como la probabilidad y la esperanza. Daston (1980), identifica que el tratado de Bernoulli fija sus bases matemáticas en la equidad de los fenómenos aleatorios y a partir de esto propone tres maneras para desarrollar su teoría: la primera es un análisis matemático detallado de los juegos de azar; el segundo es abordar problemas de la ciencia actuarial y física envueltos en situaciones de incertidumbre; la tercera son los estudios sobre la sociedad civil. Este libro significó en gran medida el establecimiento e identificación de la esperanza matemática en la antigüedad, dado que permitió a las personas de la época un fácil acceso a un modo de pensar racional ante los fenómenos aleatorios.

2.1.2 Evolución de la Esperanza Matemática

En este apartado, más que exponer sobre el origen o surgimiento de la probabilidad como se ha explicitado en apartados anteriores, se trata de responder cuestiones sobre la radicación de la Esperanza Matemática y la probabilidad en la sociedad, y su evolución a través de la historia de la mano de filósofos como Leibniz, Laplace, Von Mises, entre otros.

Inicialmente, el abordaje de cuestiones sobre el azar y la probabilidad implica considerar dos grandes miradas, de un lado un significado de la probabilidad alusiva a los datos que se disponen, es decir, a un carácter frecuentista en donde se establece una estabilidad o equilibrio del resultado de un evento; por otro, el significado de probabilidad bayesiana o epistemológica, aborda -en términos generales- una medida de certeza o veracidad de una proposición a través de suposiciones. En este sentido, tal como lo afirma Hacking (1995), ambas miradas componen explícitamente el carácter dual de la probabilidad, entendida esta como aquel significado que se le atribuye a la probabilidad con respecto al contexto en que está inmersa.

Con respecto a lo anterior, en la tesis doctoral de Carranza (2009), se establece dos diferencias puntuales entre el significado frecuencial y epistemológico de la probabilidad; por un lado se distingue que el criterio de evaluación entre ambas probabilidades disiden entre sí, dado que la probabilidad epistemológica comprende el valor de la probabilidad como una medida personal, en cambio la probabilidad frecuentista es, en cierto modo, objetiva dado que toma en consideración el papel de varios observadores y se compara la frecuencia de aparición. De igual manera, ambos significados se diferencian en los contextos en que se evalúan, la probabilidad frecuentista sugiere un contexto específico para la modelación de fenómenos aleatorios, que tomen en consideración el axioma de la convergencia y el axioma de aleatoriedad; en cambio en la probabilidad epistemológica basta con reconocer su veracidad e imposibilidad de estimar puntualmente.

A lo largo de la historia, ambos significados tuvieron sus defensores y sus detractores. Con respecto a la probabilidad frecuentista, se destaca los diferentes aportes de Pierre Simón Laplace y Richard Von Mises. Con respecto a la probabilidad epistemológica o Bayesiana, se resaltan los aportes de diferentes de Gorrfried Leibniz, Pierre Nicole y Antonie Armauld.

Es importante resaltar, que durante el devenir histórico del surgimiento de la probabilidad hubo problemas y hechos históricos que propiciaron su reconocimiento y establecimiento. Puntualmente, es el caso del problema del reparto, propuesto inicialmente por Pacioli en 1494, y que tiempo después su solución iba a ser de gran valor significativo este campo de estudio. A continuación se presenta dicho problema, describiendo y anali los diversos métodos de solución propuestos por matemáticos célebres

El problema del reparto

Se estima que el problema del reparto fue planteado por primera vez aproximadamente a finales del siglo XIV, algunos autores como Vega (2000) afirman que fue encontrado en un manuscrito anónimo en Italia. Formalmente el primero que enunció públicamente el problema del reparto fue el matemático Luca Pacioli en 1494 en su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* como una forma de aplicar el álgebra a los problemas de decisión de los juegos: *Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego y cada anotación vale 10 puntos. Las apuestas son de 10 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 20. Se quiere saber qué parte del dinero del premio le corresponde a cada bando.* (Tomado de Díaz, 2013)

A lo largo de la historia, diversos autores como Pacioli, Tartaglia, G.F Peverone, G. Cardano; intentaron solucionar este problema, algunos utilizando razonamientos proporcionales que tomaban en consideración distintas variables del problema y otros empleando el álgebra y aritmética. Sin embargo, la primera solución aceptada al fue realizada por Pascal y Fermat en una correspondencia epistolar que data en agosto de 1654.

Dados los fines de esta trabajo de grado, se hace necesario explicitar más adelante las diversas soluciones que surgieron para el problema del reparto, haciendo un especial detenimiento en la solución propuesta por Pascal y Fermat en su correspondencia, así como la solución planteada por Huygens en la proposición 4 de su tratado *Libellus Ratiociniis in ludo Aleae.*

2.1.3 Esperanza Matemática como valor del juego

En este apartado se explicitan dos momentos de la historia luego del establecimiento e institucionalización de la Esperanza Matemática y la teoría de la probabilidad: el primero, es el impacto y solución de la paradoja de San Petersburgo en la comunidad matemática del siglo XVIII; el segundo, son los impactos y aplicación de la Esperanza Matemática en la estimación de la esperanza de vida y el cálculo de la vida media.

Paradoja de San Petersburgo

Luego del primer tratado impreso de probabilidad propuesto por Huygens en 1657, comienzan las primeras críticas de la veracidad y objetividad hacia su obra; aquellas fundamentadas en un problema propuesto por Pierre Monmort a Nicolás Bernoulli en el año 1713 y que ponían entre dicho las bases matemáticas de su obra.

En palabras de Daniel Bernoulli, primo de Nicolás Bernoulli, expone el problema de la siguiente manera: *Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si en la segunda 2; en la tercera 4 y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras ¿cuál es el precio justo que Pablo debería pagar por este juego?"* (Tomado de Ruiz, 1999). El problema radica, en que al intentar encontrar el valor de la apuesta justa utilizando la Esperanza Matemática da como resultado infinito, por esta razón era imposible encontrar el precio justo para pagar por dicho juego.

A partir de este resultado, los cimientos de la Probabilidad fueron criticados por su poca fiabilidad y consistencia; por esta razón diversos matemáticos y probabilistas como Cramer, Nicolás Bernoulli, James Bernoulli, Daniel Bernoulli, Georges Louis Leclerc, Simón Poisson, Condorcet, entre otros., se vieron obligados a revisar cada uno de sus teoremas y demostraciones, y también intentando solucionar dicha paradoja.

Impactos y aplicación de la Esperanza Matemática

El legado que dejó Huygens en su tratado *Libellus Ratiociniis in ludo Aleae* fue una notable contribución para abordar problemas y cuestiones sociales como lo es la esperanza de vida y la vida media, lo cual permitía ampliar el espectro de la aplicabilidad de la probabilidad. En este sentido, se destacan dos trabajos principales, los cuales se consideran de gran importancia en la creación de modelos estocásticos para compañías de seguros.

Todo comienza en agosto de 1669, cuando Lodewijk Bernoulli empezó una detallada correspondencia con su hermano Christian Bernoulli, debido a que Lodewijk había encontrado una tabla de Gaunt que poseía información precisa sobre la historia de vida de una cohorte de cien recién nacidos en Holanda. A partir de esto, Lodewijk comienza su investigación buscando la manera de encontrar la vida media para los habitantes de Holanda, tomando en consideración inicialmente el número de años que acumuló cada persona en general, dividido el número de personas; esto permite estimar, que según Lodewijk Bernoulli los años que podrían vivir un recién nacido, el cual calcula que es 18,22 años.

Por otro lado, Daniel Bernoulli, en ese entonces un afamado, decide comenzar a estudiar la esperanza de vida de un ciudadano al llegar una determinada edad. Para ello, toma en consideración la relación entre muertes y sobrevivientes en una edad determinada y con ello elabora un gráfico en función de supervivencia para calcular el tiempo que les queda por vivir a cada una de las edades. En las últimas cartas, los hermanos Bernoulli deciden abordar por medio de la probabilidad la esperanza de vida de un matrimonio a partir de las edades de los cónyuges, utilizando *esperanzas condicionadas.*

2.2 MARCO CURRICULAR

Este marco curricular reconoce los elementos curriculares que permean el modelo de enseñanza de estadística y probabilidad en Colombia, España y Estados Unidos., y que influyen, de cierta manera, en cómo se instruyen los contenidos en matemáticas, por ello identificar este tipo de elementos es fundamental para el desarrollo de este trabajo de grado, debido a que contribuye al cumplimiento del segundo objetivo específico propuesto. Es importante aclarar que la delimitación del marco teórico se explicitara puntualmente en el Capítulo IV del presente trabajo de grado.

Para el reconocimiento de los elementos curriculares en estadística y probabilidad, se toma en consideración dos perspectivas:

Primero, una perspectiva nacional, la cual está compuesta por el currículo en matemáticas propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, y que lo componen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Derechos Básicos de Aprendizaje; para los cuales se busca explicitar el papel de la probabilidad y el pensamiento aleatorio y sistemas de datos en la educación colombiana.

Segundo, desde una perspectiva internacional, atendiendo a recomendaciones hechas por currículos y proyectos internacionales como NCTM y ESO; En éstos se reconoce el papel de la probabilidad, los contenidos y las competencias propuestas a trabajar a lo largo del currículo de matemáticas equivalentes de grado 6° a 11°. Esto servirá de insumo principal para reconocer la manera en que el MEN entiende, organiza y aplica los contenidos en estadística y probabilidad.

2.2.1 Perspectiva Nacional

El marco legal que rige actualmente el Servicio Público de la Educación en Colombia es la Ley General de Educación: Ley 115 de 1995, en la cual se proponen documentos para la orientación y formulación de currículos en instituciones públicas y privadas de Colombia, abogando principalmente en la mejora de la calidad y la cobertura educativa.

En primera instancia se tienen en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el MEN en el año 1998, los cuales brindan directrices para la planeación y estructuración del currículo de matemáticas de las instituciones educativas en todo el país. Específicamente, en este documento se fundamenta teórica y epistemológicamente los elementos cognitivos, didácticos y matemáticos a tomar en consideración en los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Puntualmente, los lineamientos curriculares asumen las matemáticas como una disciplina para la formación integral de los estudiantes, dado que permite la reflexión, exploración, explicación y predicción de fenómenos de la vida, así como el abordaje de retos sociales, culturales y políticos del siglo XXI (Grueso & Gonzales, 2016). Para cumplir lo anterior, el MEN (1998) presenta tres ejes para el desarrollo la actividad matemática en la escuela: Eje de procesos generales de aprendizaje; eje de los siete tipos pensamiento en matemáticas; y eje contextual sobre los cuales se genera el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

En cuanto a los lineamientos curriculares, los procesos generales que se relacionan con la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos son: la modelación y fenómenos de la realidad; la comunicación; y el razonamiento.

- En lo que a la comunicación consta, la enunciación de conjeturas e hipótesis que de los estudiantes alrededor de los juegos de azar requieren de un especial manejo de los diferentes sistemas de representación semiótico para darle un sentido a las predicciones de un fenómeno aleatorio en particular.
- En lo que la modelación y fenómenos de la realidad consta, se relaciona este proceso general con las propiedades de predicción y tratamiento de los juegos de azar de la Esperanza Matemática.
- En lo que concierne al proceso de razonamiento, reconocemos su estrecha relación con el aprendizaje de la estocástica, debido a que se procura que los estudiantes durante el ciclo educativo desarrollen un razonamiento probabilístico orientado hacia la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre (Serrano et al, 1998).

De igual manera, en relación con los tipos de pensamiento propuestos en el MEN (1998), este trabajo se inscribe o enfatiza en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, el donde el MEN (2006) lo define como:

> "El pensamiento aleatorio, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y

> procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (p. 64)

2.2.2 Perspectiva Internacional

Currículo Educativo Español

En un mundo actual en constante transformación, es necesario e indispensable que el estudiante comprenda el carácter instrumental de las matemáticas, las cuales permiten interpretar fenómenos de la realidad. En el sistema educativo español, es fundamental que el estudiante sea partícipe de su aprendizaje, por ello las matemáticas se conciben como instrumentos necesarios para la representación y modelación de los fenómenos reales, y no como un objeto alejado de la aplicación. Desde esta perspectiva, se concibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los ciclos de formación español regulada por la Ley Orgánica 8/2013 para la Mejora de la Calidad Educativa, en el caso de esta investigación, tomaremos en cuenta solamente la Escuela Secundaria Obligatoria en sus niveles 1°,2°,3° y 4°., y el Bachillerato Obligatorio en sus niveles 1° y 2°.

Para la estructuración de la materia de matemáticas la ESO y el Bachillerato la LOMCE toma en cuenta tres criterios para la organización de la enseñanza en matemáticas: Conocimientos, Criterios de Evaluación de Contenidos y Estándares de Aprendizaje Evaluables.

Así mismo, la ESO y Bachillerato propone la estructuración de cuatro bloques de contenidos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los cuales son: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números y Álgebra, Análisis, y Estadística y Probabilidad. Sin embargo de acuerdo a los fines de esta investigación solo analizaremos el bloque de Estadística y Probabilidad

Del mismo modo que la LOMCE selecciona los criterios de enseñanza y lo bloques de contenidos, proporciona cuatro materias de matemáticas las cuales serán instruidas en los niveles 1°,2°,3° y 4° de la ESO y 1°, 2° de Bachillerato; organizándose de la siguiente manera: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II se ofertarán para los niveles 1° y 2° de Bachillerato; Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas I y II se ofertarán para los niveles 3° y 4° de la ESO; Matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas se ofertarán para los niveles 3° y 4° de la ESO; Matemáticas I y II se ofertarán para los cursos 1° y 2° de ESO, y para los cursos 1° y 2° de Bachillerato.

Posteriormente se destacarán los criterios para la organización de la enseñanza de las matemáticas en el bloque de Estadística y Probabilidad, dando privilegio a aquellos que están en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos.

Principios y Estándares para la Educación Matemática

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (en inglés NCTM) en el año 1995 da inicio al proyecto “Standards 2000” en donde se espera establecer los Principios y Estándares para la enseñanzas de las matemáticas en el aula de clases, teniendo como objetivo principal solucionar los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemática a lo largo del país.

En el año 2000, luego de profundas discusiones y revisiones entre profesores de matemáticas, formadores de profesores de matemáticas, representantes de las administraciones educativas, investigadores y matemáticos, el NCTM proponen los *Principles and Standards for School Mathematics,* los cuales cumplen la función de describir los componentes esenciales de un programa de matemáticas de "alta calidad".

Las características y organización de los NCTM (2000) son:

- Están propuestos para todos los grados académicos escolares, es decir, desde el número Pre-K (Pre-Kindergarten) hasta G-12 (Grade 12)
- Proponen cinco normas de procesos sobre los cuales son el camino para adquirir y aplicar el conocimiento del contenido: resolución de problemas, razonamiento y demostración, conexiones, comunicación y representaciones.
- Proponen cinco estándares de contenidos que los estudiantes deberían aprender a lo largo de su etapa escolar, estos son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medidas, Análisis de Datos y Probabilidad.

Debido a los objetivos de este trabajo de grado, se hace especial detenimiento en los Principios y Estándares que propone el NCTM (2000) para el estándar de contenido de Análisis de Datos y Probabilidad.

Primeramente, el NCTM (2000) define el Análisis de Datos y Probabilidad como el razonamiento estadístico esencial para ser un ciudadano y consumidor, debido a que permite recolectar, organizar y visualizar la información para responder situaciones relativas al azar;

adicionalmente, el énfasis en el aprendizaje de métodos probabilísticos permite elaborar inferencias y predicciones en eventos aleatorios. Específicamente en el estándar de contenido de Análisis de datos y Probabilidad, los estudiantes en cada uno los niveles escolares deberían de realizar cada una de las siguientes competencias: Formular cuestiones que pueden ser tratadas por medio de la recopilación organización y visualización de la información; Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar la información; Desarrollar y evaluar las inferencias y predicciones basadas en la información; y Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

A posterior se destacarán los estándares de Análisis de Datos y Probabilidad para los grados de 6 a 12, dando privilegio a aquellos que están relacionados con la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos.

2.3 MARCO DIDÁCTICO

En este apartado, se delimitan aspectos teóricos centrales que se guían el diseño del instrumento, análisis de los resultados y delimitación de los elementos que componen el Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la Esperanza Matemática. Es importante aclarar que la delimitación del marco didáctico se explicitará puntualmente en el Capítulo V del presente trabajo de grado.

2.3.1 Reseña Histórica del CDC

Dada la crisis de la teoría positivista a finales del siglo XX, agudizadas por la modernidad y demás problemas que surgieron torno a la formación de profesores (Bolívar y Mata, 2004), se ha dado pie a la creación de distintas metodologías didácticas y pedagógicas que buscan solucionar dificultades en torno a la enseñanza de contenidos en matemáticas. Una de ellas fue la teoría de enseñanza propuesta por Shulman (1986, 1987) quien interesado por abordar cuestiones relacionadas sobre la adquisición del conocimiento base por parte de los profesores y la manera en cómo lo utiliza para transformar los contenidos en la enseñanza escribe dos artículos esenciales para el surgimiento de la teoría del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), el primero es, *Those who understand: knowledge growth in teaching* (1986b) y el segundo, *Knowledge and teaching foundations of new reform* (1987) (Pinto, 2010). Para Shulman (1986, 1987) el surgimiento del CDC es debido a algunas razones como:

- El foco unilateral con que se ha sobrellevado las investigaciones en este campo, es decir, la manera en que las reflexiones se han encaminado a estudiar la manera en que se imparten contenidos al estudiante, sin tomar consideración en los componentes básicos que debería de poseer el profesor para que la enseñanza sea efectiva y significativa en los estudiantes.

- La gran necesidad de profesionalizar la enseñanza en ese entonces (alrededor de 1980), para Shulman (1986) era indignante que profesores sin formación pedagógica o didáctica, enseñaran los contenidos sin tener idea alguna de lo que implicaba enseñar o ser profesor. (Pinto, 2010)

- La escasez de investigaciones sobre el proceso de transformación de la materia específica por parte del profesor dentro del campo de la enseñanza escolar, a lo cual Shulman se refirió como *"el paradigma olvidado"*.

- El poco valor atribuido al conocimiento del contenido, debido a que se poco se intentaba relacionar el conocimiento pedagógico con el conocimiento del contenido, restándole importancia a la comprensión de los contenidos con respecto a las habilidades docentes.

Es así como se comienza a reconocer un marco teórico enmarcado en el campo de la didáctica, en donde Shulman (1986) pretende explicitar y describir los componentes de un "conocimiento base" de la enseñanza. (Bolívar, 2005). Este marco tiene como objetivo central el análisis del conocimiento profesional del profesor, pretendiendo resaltar elementos básicos que debe de poseer el profesor para la transformación de los contenidos para la enseñanza, y distinguir su papel en la comprensión de contenidos curriculares por parte del profesor y los alumnos (Pinto y González, 2008).

Shulman (1986) reconoce la división entre dos ramas de su estudio del conocimiento base de la enseñanza:

- La primera es el *Conocimiento Común del Contenid*o, la cual aborda todos los elementos teóricos referentes a la materia que está impartiendo.

- El segundo es el *Conocimiento Didáctico del Contenido*, el cual le permite al profesor transformar el conocimiento de la materia, proporcionando representaciones flexibles y dinámicas óptimas para su aprendizaje.

- El tercero es el *Conocimiento Curricular del Contenido*, el cual reconoce todos los elementos curriculares del contenido previsto a enseñar, los contenidos previos y previstos a aprender, de acuerdo con el marco legal.

De igual manera, un año después Shulman (1987) reconoce nuevas categorías de conocimiento, y con ello establece una base de conocimientos para la enseñanza; clasificando los saberes o conocimientos que como mínimo debe de saber todo profesor (Pinto, 2010), los cuales son (Shulman, 1987 pág., 11):

- *Conocimiento del contenido*;
- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento didáctico del contenido*: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos y de sus características*;
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos*, y de sus fundamentos filosóficos e históricos

En esta organización de contenidos, Shulman (1987) hace especial hincapié en el *Conocimiento Didáctico del Contenido*, dado que permite identificar los elementos que caracterizan la enseñanza de los contenidos; y además, representa una combinación entre el contenido y la didáctica, permitiendo comprender la manera en los problemas y los temas se adaptan a los intereses y capacidades de los estudiantes. Lo cual queda explícito en la siguiente cita:

> "El conocimiento didáctico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (Pág. 11)

2.3.2 Significado y Características del CDC

Shulman (1987) en su teoría manifiesta un interés particular por el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), con respecto a los diferentes conocimientos reconocidos anteriormente; de esta manera define el CDC como*:*

> *"La capacidad de un profesor para transformar su conocimiento del contenido en formas que sean didácticamente poderosas y aun así adaptadas a la variedad que presentan sus alumnos en cuanto a habilidades y bagajes"*. (p.15)

En particular, el CDC repercute directamente en la organización del currículo del profesor, en el sentido de que para transformar el contenido de la materia es necesario tomar en consideración elementos relevantes para la enseñanza como: Históricos, matemáticos y didácticos, y así lograr que la enseñanza sea accesible y significativa para los estudiantes. Cabe aclarar que el objetivo de una investigación del CDC en el aula a corto y mediano plazo no es introducir más contenido al currículo educativo, en cambio es propiciar una constante reflexión sobre la manera en que los contenidos están siendo impartidos en el aula de clase y los elementos didácticos que utiliza el docente para su enseñanza.

De esta manera, Pinto (2010) distingue y agrupa características particulares del CDC, permitiendo así la ampliación de la comprensión del significado de este mismo. A continuación las características generales:

- El CDC se caracteriza por una naturaleza contextualizada con los contenidos y con los procesos de instrucción.
- Se distingue al CDC como un marco que permite la transformación, transferencia o transformación didáctica de los contenidos para la enseñanza en el aula de clases.
- Es diferente al conocimiento de la materia y no es una simple conjunción o mezcla de pedagogía y contenido ni tampoco un modelo único de desarrollo, por lo cual requiere de características especiales para su formación y estudio con los profesores;
- Para formación de los profesores, se requiere la reflexión y aplicación sobre la acción, la integración de psicología y contenido, la investigación en didáctica de la disciplina y el estudio de los diferentes modos de representar el contenido a enseñar.

Así mismo, Shulman (1993) desarrolla en su documento "*Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject specific conceptions of teaching*" importantes consideraciones y concepciones sobre la implementación del CDC en las aulas de clases y currículos educativos, de esta manera desarrolla tres particularidades y concepciones a considerar (p. 56 cita de en Pinto, 2010, p. 13):

“**1.** El CDC es una forma de comprender o conocer lo que los profesores poseen (o deberían poseer) que distingue su pensamiento y razonamiento de las meras características de un experto en la materia en cuestión, siendo éste un ejemplo de “sabiduría de los practicantes”, con lo cual diferencia al matemático y al educador, del profesor de matemáticas,

2. El CDC es una parte del conocimiento base para la enseñanza, un cuerpo de conocimientos, habilidades y - para algunos- una disposición, que distingue a la enseñanza como una profesión y que incluye aspectos como técnicas racionales y capacidades de juicio, improvisación e intuición; lo que Schön (1983) denominó como “reflexión-en-la-acción” y “reflexión-sobre-la-acción”, con lo cual justifica su naturaleza, su interrelación con otros dominios de conocimiento y su metodología para la formación, y

3. El CDC es un proceso de razonamiento pedagógico y acción a través del cual los profesores crean sus conocimientos cuando se enfrentan a problemas de enseñanza en contextos particulares, expresando sus planes y corrigiendo espontáneamente incluso improvisando ante los inevitables momentos impredecibles que surgen de la enseñanza, con lo cual estos profesores desarrollan nuevos conocimientos, intuiciones y disposiciones (Shulman, 1987).”

2.3.3 Conocimiento Didáctico del Contenido Específico

Fruto del surgimiento del CDC, en los últimos años se han aumentado las investigaciones en torno a la formación inicial y continúa del profesorado, buscando primeramente mejorar la calidad de los docentes en instituciones y universidades. Uno de los primeros países en tomar en consideración el CDC para su currículo fue Estados Unidos, quienes a través de organizaciones y proyectos de desarrollo de formación, implementaron el CDC en universidades como: Universidad de California, Universidad de Stanford, Universidad de Nueva York, etc.

Inicialmente el Conocimiento Didáctico del Contenido ha sido concebido como un marco para mejorar los procesos de instrucción en la educación general (sin especificar disciplina o ciencia), debido a que algunos de los elementos más fundamentales se reconocen de manera general (Shulman, 1986); sin embargo, la implementación del CDC luego de 30 años trae consigo diversas modificaciones estructurales, es decir, elementos por mejorar en el diseño y puesta en acto de este marco en los currículos. En este trabajo, se toma en consideración las posturas de Leinhart (2001) y Bolívar (2005), quienes han propuesto algunas consideraciones para mejorar en este marco tales como:

- El CDC no logra generalizar en su teoría la manera en cómo se transforman los contenidos de cada disciplina.

- Discrepancias en la organización y evaluación de los proceso de instrucción; por ejemplo, disciplinas como Inglés y Matemáticas no pueden concebirse desde un punto de vista didáctico como semejantes, debido a que los objetos de cada una poseen diferente naturaleza y red semántica.

Es por ello que resulta importante desarrollar un Conocimiento Didáctico del Contenido Específico para cada disciplina, en donde se reconozcan las particularidades de cada una. En este caso, para el desarrollo de esta investigación, y atendiendo a las recomendaciones por el International Association for Statistical Education (IASE) en conjunción con el International Statistical Institute (ISI), es necesario y fundamental para la enseñanza y alfabetización estadística, reconocer un Conocimiento Didáctico del Contenido Específico para la enseñanza de la estadística y probabilidad que particularmente aborde la Esperanza Matemática.

De esta manera, y de acuerdo a los fines de este trabajo, se tomará como punto de partida las categorías originales de conocimiento propuestas por Shulman (1986) las cuales son: *Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, Conocimiento de la didáctica específica y Conocimiento del estudiante*. A continuación una explicitación de cada uno, lo cual permitirá vislumbrar la manera en cómo se va a caracterizar el CDC específico para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos Equitativos.

Conocimiento del Contenido de la Disciplina por Enseñar

Es necesario, mas no suficiente que todo profesor de matemáticas o de cualquier disciplina comprenda de manera general los contenidos que está previsto a enseñar en el aula de clases (Shulman, 1986); por esta razón se concibe el Conocimiento del Contenido de la Disciplina por Enseñar (CCDE) o Conocimiento del Contenido Base, como aquel que organiza los conocimientos del profesor previamente a su labor de enseñar, permitiendo identificar estrategias, posturas, características esenciales y elementos sintácticos de la disciplina. Lo anterior se ve evidenciado en la siguiente cita:

> "Conocer bien el contenido de una lección incrementa la capacidad del profesor en implementar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas con el contenido y profundizar en el por qué y el para qué de la asignatura" (Pinto, 2010, p.19)

Para enseñar hay que tener solido el conocimiento de la materia (Shulman, 1986), debido a que si no se comprende bien el conocimiento base puede ser limitativo para el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de sus capacidades y habilidades (Pinto, 2010); por esta razón, se concibe el CCDE como un componente fundamental para la preparación de un profesor.

Específicamente, en la didáctica de la estadística y probabilidad, el estudio de su contenido es una disciplina que obliga a analizar organización la naturaleza, evolución, componentes y propiedades necesarias para la instrucción. Por ejemplo, un CCDE específico para la enseñanza de la probabilidad debe de contener al menos: comprensión de la naturaleza y epistemología de la probabilidad, manejo de los significados de probabilidad, características y propiedades de los eventos aleatorios, etc.

De esta manera, tomando en consideración investigaciones como Shulman (1986), Pinto (2010), reconoce los elementos básicos para la identificación y reconocimiento de los elementos para el CCDE:

- Reconocimiento de las distintas posturas y escuelas filosóficas, de igual manera el papel de la historia en la epistemología y surgimiento de los contenidos.
- Rol e importancia del campo de la estadística y probabilidad en el currículo de matemáticas, tomando en consideración estructuras conceptuales y enfoques.
- Comprensión y conocimiento de los conceptos estocásticos en general y en particular. (Ej. teoremas, axiomas, principios, postulados, etc.)

Conocimiento de Didáctica Específica

Si bien, es necesario comprender los contenidos de la materia específica a enseñar, también lo es saber cómo enseñar el contenido de manera correcta, es decir, estructurar los contenidos y temáticas de manera didáctica, con el fin de presentar el contenido de manera fácil y efectiva para el estudiante. Para lograr esto, es importante tomar en consideración elementos didácticos al proceso de instrucción, debido a que promueve la comprensión significativa de los contenidos por parte de los estudiantes. Este conocimiento de las estrategias y representaciones Instruccionales lo define Shulman (1986) como:

> "las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas – en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros." (Shulman, 1986, p.9)

De esta manera, las representaciones Instruccionales son elementos esenciales que utiliza el profesor para la construcción de las didácticas específicas de cada contenido. Pinto & Gonzales (2008) afirman que las representaciones juegan un papel protagónico en la adquisición de conocimientos de los estudiantes, debido a que convergen con el conocimiento del contenido de los estudiantes y el currículo educativo.

Para indagar las formas, representaciones o estrategias instruccionales que deberían de poseer un profesor, es necesario tomar en consideración algunos elementos del Conocimiento del Currículo [10] (Shulman, 1986), debido a que referirse representaciones instruccionales conlleva obligatoriamente a indagar no sólo los métodos de instrucción didáctica, sino

10 Si bien, Shulman (1987) no brinda una definición exacta de Conocimiento Curricular, resalta la importancia del currículo de la siguiente manera: "El currículo es representado por un rango amplio de programas diseñados para la enseñanza de una materia particular y los tópicos a un nivel dado, la variedad de materiales instruccionales disponibles en relación a estos programas y el conjunto de características que atiende, así como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del currículo particular o materiales de programas en circunstancias particulares" (p.10).

también los procesos de fundamentación, planificación, implementación y evaluación curricular que utilizan los profesores en el aula de clases.

Conocimiento del Estudiante

Si bien es fundamental comprender los conocimientos base y las estrategias y representaciones instruccionales para enseñar contenidos de manera efectiva, lo es también reconocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes previo a la enseñanza. Este tipo de conocimiento se concibe en una categoría inherente a las prácticas de instrucción docente en una disciplina específica, dado que permite incorporar al conocimiento del profesor las condiciones instruccionales (errores, creencias y concepciones) de los estudiantes requeridas para transformar los contenidos de manera efectiva. Pinto (2010) define este conocimiento como:

> "la habilidad de hacer "penetrable" el contenido a los estudiantes. Consiste en que el profesor conozca los errores típicos del estudiante y la trayectoria del estudiante a lo largo de su progreso." (p. 31)

En este sentido, es fundamental que el profesor además de conocer los conceptos teóricos a instruir, comprenda realmente la manera en que sus alumnos están aprendiendo los contenidos, por ello surge el interrogante ¿Cómo identificar las formas de aprendizaje de los estudiantes?, para ello Shulman (1986) propone que es indispensable reconocer elementos como: la epistemología de los procesos cognitivos de los estudiantes; las expectativas, intereses y motivaciones de los estudiantes; y las formas de aprender matemáticas y sus dificultades.

Sim embargo, la delimitación de los elementos que propone Shulman (1986) para este conocimiento quedan cortos con respecto a las expectativas de análisis, por ello Marks (1990) propone una ampliación de este marco teórico, estableciendo tres componentes fundamentales para la identificación de los procesos de aprendizaje en el contenido matemático: Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en matemáticas; Conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante; y Conocimiento de las estrategias instruccionales.

CAPÍTULO III: HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESPERANZA MATEMÁTICA

En este capítulo se hace alusión a la parte histórica y epistemológica de la esperanza matemática, haciendo un extenso recorrido por su inicio, consolidación y aplicaciones posteriores en el campo de la estadística y probabilidad. En este orden de ideas, se comienza con la delimitación de las primeras cuestiones, utensilios, escritos, etc., que dieron pie a la concepción y reconocimiento de factores aleatorios, apartado al cual se le cataloga como Prehistoria de la Probabilidad.

De igual manera, se realiza un recorrido histórico sobre el surgimiento de la probabilidad y esperanza matemática, reconociendo el papel fundamental que tuvo la filosofía y la jurisprudencia en el desarrollo del concepto de probabilidad en el siglo XVI y XVII; de igual manera se realiza una síntesis sobre el papel de los juegos de azar en el establecimiento de la probabilidad como disciplina de estudio, dado que las diversas soluciones documentadas alrededor de problemas clásicos en estadística y probabilidad como el "problema del reparto", proporcionaron los cimientos necesarios a lo que se conoce hoy en día como teoría de la probabilidad y esperanza matemática.

Seguidamente, se presenta un apartado el cual pretende resumir el surgimiento e institucionalización de la esperanza matemática como método alternativo para la resolución de problemas que involucren variables aleatorias , dado que sus propiedades y características de centralización permite "domesticar" fenómenos aleatorios posibilitando efectuar proyecciones para un número indeterminado de ensayos, este tipo de razonamientos surgen de la mano de Christian Huygens y Daniel Bernoulli durante los siglos XVII y XVIII.

Finalmente, se presentan las conclusiones encontradas luego del rastreo histórico y epistemológico de la historia de la esperanza matemática y la teoría de la probabilidad. Cabe destacar que las conclusiones encontradas se reconocen de acuerdo al primer objetivo específico planteado en el Capítulo 1 (Ver apartado 1.2) y también al marco histórico-epistemológico presentado en el Capítulo 2 (Ver apartado 2.1).

3.1 PREHISTORIA DE LA PROBABILIDAD

A lo largo de la historia diversos filósofos como Hacking (1995), Sheynin (2009), Daston (1988), entre otros., han atribuido a los juegos de azar el surgimiento del concepto de probabilidad y esperanza matemática, debido a que inicialmente este tipo de juegos permitió que filósofos y matemáticos como Aristóteles, Fermat, Pascal, Cardano, entre otros., se interesaran en analizar, por medio de distintas perspectivas, los juegos de azar y sus singularidades. Dejando de lado un poco las razones que posibilitaron el surgimiento del concepto de probabilidad y la esperanza matemática, es interesante comenzar este apartado histórico abordando los primeros métodos aleatorios que se utilizaron para decidir en situaciones de incertidumbre, así como las primeras nociones de probabilidad primitivas encontradas; sin embargo, para lograr lo anterior es necesario que la investigación entre en terrenos poco explorados en la historia de la estadística y probabilidad. Específicamente para este apartado se toman como referencia algunos momentos importantes en la historia como lo son: los instrumentos aleatorios inventados por las civilizaciones de la antigüedad, los filósofos pioneros en estudiar la aleatoriedad, el papel de los juegos y la suerte considerados en los escritos sagrados, y por último los enigmas y problemas iniciales que más adelante posibilitaron la construcción de los cimientos de la teoría de la probabilidad.

El origen de los juegos de azar no se puede relacionar directamente con una civilización o una época específica, sin embargo son muchos los instrumentos para "echar suertes" encontrados a lo largo del desarrollo de la humanidad, desde la edad de piedra hasta hoy día. Uno de los instrumentos más remotos que se han encontrado hasta el momento es el *Astrágalo,* un hueso del talón de animal silvestre que al lanzarlo puede caer de cuatro maneras diferentes, según Hacking (1995) se asocia la invención de este instrumento a la civilización Sumeria y Asiria en la época Paleolítica. Al igual que las anteriores, la civilización China fue una de las que más se registró progresos en torno a los juegos de azar, se estima que desde el año 3000 a.c los chinos ya apostaban dinero por diversión en situaciones donde el azar predominaba. Según Van Jaag (2015) en su libro *Manual para el jugador profesional* la mayoría de historiadores le atribuyen a esta civilización la invención de las cartas de póker y tarot que se utilizan actualmente.

A principios del siglo XV, los juegos de azar eran considerados un sinónimo de riqueza y poder, por ende sólo las clases más privilegiadas tenían acceso a ellos. Sin embargo, la invención de la imprenta por parte del alemán Jogannes Gutenberg en el año 1440 posibilitó la distribución de los juegos de azar por toda Europa y parte de Asia, permitiendo que juegos de azar lleguen a todas las clases económicas, mejorando así las condiciones de vida muchas personas marginadas por los sistemas feudales y económicos de la época.

Retomando un poco la prehistoria de la probabilidad, es importante destacar el papel que ha tenido la noción de probabilidad en diversos libros sagrados que han marcado la humanidad pos siglos, es el caso de La Biblia y El Talmud. Hacking (2005) y Sheynin (2009) afirman que en La Biblia judeocristiana se hace mención en numerosas ocasiones a palabras y expresiones como: echar suertes, certeza, chance, posibilidad, entre otras., un ejemplo claro de ello es el pasaje de Números (33:54) en el cual Dios le permite al pueblo israelita “echar suertes” como medio para conocer su voluntad en situaciones de indecisión, cabe aclarar que en los escritos no se hace referencia explícita al instrumento con el cual echaban suertes a lo largo de La Biblia (Díaz, 2013). En definitiva, la mención o referencia de la probabilidad y el azar en libros antiguos permite entrever que así no exista una definición formal de eventos aleatorios o espacios muéstrales, las civilizaciones de la época los catalogan como sucesos diferentes a los habituales, debido a que los regían leyes que para algunos eran divinas y que para otros era una simple casualidad.

Luego de grandes avances por parte filósofos griegos en disciplinas como las matemáticas, geometría, física, entre otras; algunos de ellos deciden centrar su atención en palabras cada vez más usuales como lo son el azar, la incertidumbre, justicia y expectativa. Según Sheynin (2009) uno de los filósofos pionero en el estudio y desarrollo de la noción de probabilidad es Aristóteles, quien en su libro *Metafísica* (s.f) proporciona ideas iniciales en el estudio de la aleatoriedad y los juegos de azar, él creía ciegamente que el azar era responsable de que sucedieran cosas impensables, las cuales rompían las leyes de la lógica. Afirmaba también que si el ser humano que fuese capaz de encontrar la manera de descifrar el azar por medio de las matemáticas encontraría la verdad absoluta, por ello se hacía tan necesario comenzar a estudiar la fenomenología del azar. A partir de estas afirmaciones, Ciceron (discípulo de Aristóteles), propuso un método rudimentario que consistía en encontrar la escala subjetiva de ocurrencia de eventos aleatorios, la cual hasta el momento no hay prueba, pero se hace alusión en la obra *Ars Rethorica* escrita por Aristóteles en 1515.

Posteriormente, a principios del siglo XVII el estudio del azar comenzó a tomar protagonismo en algunos matemáticos y astrónomos de la época, uno de ellos es el árabe Al-

Biruni quien a través del empleo de datos estadísticos y nociones primitivas de probabilidad contribuyó notablemente al campo de la navegación y la astronomía, estimando rudimentariamente la ubicación geoespacial de los barcos y medir distancias marítimas por medio de los ángulos de elevación del sol.

Para concluir este apartado, es importante recalcar que desde la era medieval hasta su nacimiento, la estadística y la probabilidad no eran consideradas como una disciplina de estudio formal, debido a que las explicaciones a fenómenos relativos al azar eran dirigidas -en su mayoría- a cuestiones divinas y religiosas, creencia que aún persiste para algunos en tiempos actuales. Sin embargo, es importante destacar que pese que algunos rechazaban ideas emergentes en torno a la probabilidad debido a su carácter indeterminista, algunos filósofos del renacimiento como Aristóteles, Platón, Nicómaco, Al-Biruni, proporcionaron algunas ideas primitivas esenciales para el surgimiento de la probabilidad.

3.2 SURGIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y ESPERANZA MATEMÁTICA

Hasta el siglo XVI, el proceso de domesticación del azar por parte de filósofos y matemáticos era caracterizado por un conjunto limitado de afirmaciones que visualizaban los fenómenos aleatorios desde un punto de vista determinista, y del que no se obtuvieron resultados significativos. En cambio, el siglo XVII se considera como una etapa clave para el estudio del azar y la aleatoriedad, inicialmente se comenzó con la significación de referencias cada vez más usuales como son: aleatoriedad, probabilidad y esperanza; por partes de filósofos y matemáticos de la época, entre ellos se destaca a Cardano, Pascal, Fermat y Huygens. Luego de esto, comienza el proceso de develar el papel de la probabilidad como campo del saber, el cual da su primer paso esclareciendo en términos formales la naturaleza de las variables aleatorias, proceso que ya había sido comenzado por Aristóteles en la *Ética de Nicómaco* al establecer dos preceptos fundamentales en el estudio de la aleatoriedad y que iban a resultar de suma importancia en el surgimiento de la *probabilidad* y *esperanza matemática* (Díaz, 2013).

Desde sus inicios, la filosofía ha estado intrínsecamente relacionada con las conductas racionales y lógicas, las cuales han quedado evidenciadas en los razonamientos dialécticos fundados en el principio de la mayéutica. Especialmente para Aristóteles, los aspectos relacionados con la jurisprudencia, la economía y el derecho no eran inherentes a la aleatoriedad y el cambio, por ello manifiesta en algunas de sus obras (Ars Rethorica, Metafísica.) la necesidad de adaptar a éstos contextos metodologías poco convencionales, basadas en referencias aleatorias, que contribuyan a la toma de decisiones justas y confiables ante un suceso no determinado y sin perjudicar a cada una de las partes. Sin embargo, el entendimiento humano -en aquella época- no poseía los medios para establecer la certeza absoluta de las decisiones en eventos aleatorios. Debido a esta necesidad emerge la noción de *expectatio* (Esperanza Matemática) de la mano de C. Huygens en su obra *Ratiociniis in ludo Aleae*, la cual se abordará más adelante de manera detallada. Este devenir histórico permite entrever que inicialmente en el estudio de la aleatoriedad y el cambio, los cálculos estaban orientados a encontrar un *expectatio* del azar y no específicamente la frecuencia con que ocurría un suceso, además pone en manifiesto la relación inherente entre la noción de esperanza y probabilidad, debido a su naturaleza aleatoria y características para calcular aspectos centrales en eventos indeterminados; un claro ejemplo de ello es la frecuencia de aparición y ganancias estimadas de un juego de azar.

Según Díaz (2013), el papel de los juegos de azar fueron fundamentales en el surgimiento de la probabilidad, debido a que los hechos, conjeturas y paradojas alrededor de este tipo de juegos desafiaron por varios siglos la razón de los pensadores de la antigüedad. Específicamente Hacking (1995) le atribuye el surgimiento de la probabilidad a la solución del *problema del reparto* o *juego interrumpido* propuesto a finales del siglo XV por Luca Pacioli, este problema generó un gran impacto en la certeza de los filósofos, debido a que tuvo que pasar más de dos siglos para poder dividir de manera justa un evento aleatorio antes de que finalice, contribuyendo fundamentalmente al establecimiento de la teoría de la probabilidad como medio de solución a problemas relativos al azar. A continuación se describe el proceso histórico del problema del reparto desde sus inicios hasta su solución, haciendo especial detenimiento en los métodos de solución y sus especificidades con respecto a la probabilidad.

Problema del reparto

El problema del reparto surge inicialmente de la mano del célebre matemático italiano Luca Pacioli (1455-1514) en su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* publicado en Venecia en el año 1494, en el cual se expone el problema de la siguiente manera:

> *"Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada uno"* (Tomado de García, 2000, p.8).

Pacioli en su solución establece inicialmente que los 22 ducados deben ser repartidos de acuerdo a la cantidad de puntos anotados por cada uno de los participantes, para este caso particular el jugador A anotó 50 puntos y el jugador B anotó 30 puntos, involucrando así los siguientes cálculos $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$, se realiza la equivalencia de $\frac{8}{11}=22$ ducados, por tanto a cada bando se le debe dar la proporción correspondiente, en el caso del jugador A le corresponden $\frac{5}{11}$ de 22 ducados y al Jugador B le corresponde $\frac{3}{11}$ de 22 ducados. En el análisis de la solución propuesta, Santos (2000) identifica claramente que Pacioli intentaba solucionar el problema del reparto como un problema del tipo aritmético, debido a que únicamente tuvo en consideración lo ocurrido antes de que se detenga el juego y no con lo que podría pasar posteriormente. Es importante resaltar, que pese a que Pacioli argumentaba que su solución era la correcta, para algunos matemáticos como Tartaglia esta solución no cumplía con las expectativas, debido a que el bando que va perdiendo puede argumentar que la apuesta debería repartirse equitativamente tal como se pactó inicialmente (García, 2000).

A partir de la solución propuesta por Pacioli, se inventa un nuevo método que pretende solucionar el problema del reparto desde la teoría de la proporcionalidad, este es el caso del matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557) o más conocido como Tartaglia, quien retoma el problema expuesto por Pacioli en su obra *Trattato generale di numeri et misure,* en el cual pone consideración teoremas geométricos para desarrollar un método de solución. El método consiste en dar al jugador que va ganando una ganancia proporcional con respecto a los puntos de ventaja que lleva un jugador sobre el otro, quedando repartido de la siguiente manera En un juego a 60 puntos, si el jugador A ha completado 50 puntos y el jugador B 30 puntos, entonces se calcula la diferencia entre las puntuaciones del mayor al menor y se divide sobre el número total de puntos necesarios para ganar 50-30=20; $\frac{20}{60}$ es entonces la proporción de dinero que debe de recibir el jugador A luego de interrumpir el juego, en este caso el jugador A recibirá 22 + $\frac{22}{3}$ ducados, y el jugador B recibirá 22 - $\frac{22}{3}$ ducados (García, 2000). El argumento proporcionado por Tartaglia está basado en los puntos de ventaja que tiene un jugador con respecto al otro, al momento de interrumpir el juego. Sin embargo, este argumento no es todo efectivo, debido a que, al igual de Pacioli éste método se basaba en la información recolectada antes de que se interrumpiera el juego y omitiendo lo que podría pasar si continuara (Díaz, 2011). En este caso se podría argumentar que, dado el caso, si el jugador B diera por terminada anulada la ventaja que tenía el jugador A e incluso podría ganar; por esta razón Tartaglia no queda conforme con su solución y concluye de lo siguiente:

> *"La resolución de tal pregunta debe ser más judicial que matemática, de modo que, cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar."* (García, 2000, p. 3)

Tiempo después, otro matemático célebre en abordar el problema del reparto fue el italiano Girolamo Cardano (1501-1576) en su obra *Práctica arithmeticae generalis* (1539). En esta obra se evidencia una nueva perspectiva para abordar el problema del reparto propuesto por Pacioli. Cardano comienza su argumentación criticando fuertemente las soluciones expuestas por Pacioli y Tartaglia, afirmando que es fundamental tener en cuenta lo juegos que le faltan a cada jugador para ganar y no los puntos obtenidos hasta el momento, para ello propone una su solución basándose en una expresión algebraica que brinde la proporción correcta, en algunos casos, del dinero que se debería repartir justamente.

$$\frac{Parte\ de\ A}{Parte\ de\ B} = \frac{1+2+3+\cdots+(n-q)}{1+2+3+\cdots+(n-p)}$$

En donde **n** es el número total de puntos a jugar y **p, q** son los puntos ganados por los jugadores A y B

Tiempo después, Cardano continuó interesado en la teoría de juegos, hasta tal punto que decidió elaborar un tratado sobre juegos titulado *Liber de ludo aleae,* el cual no se sabe a ciencia cierta su fecha de culminación dado que Cardano decidió no publicarla. Es hasta 1663, 87 años después de su muerte que se encontró este tratado y se publicó, siendo esta la primera gran obra cuya temática son los juegos de azar. Entre otros aspectos, esta obra aborda la manera detallada cómo se deben efectuar las apuestas en los juegos de dados, haciendo uso de la probabilidad y la esperanza matemática, sin ser definidos explícitamente (García, 2000). Esta obra constituye gran avance en el pensamiento matemático de la época y permite abrir camino a nuevos objetos y campos de conocimientos orientados al estudio de la aleatoriedad y el azar (Díaz, 2011). Cabe aclarar que en el análisis del libro de texto *Liber de ludo aleae* Cardano establece claramente lo que significa un juego justo. Sin embargo, Cardano confunde los conceptos de *probabilidad* y *esperanza matemática,* debido a que en sus apuntes afirma que la ocurrencia esperada de una cara al tirar un dado tres veces debe de ser igual a la probabilidad de que salga una de tres caras seleccionadas al lanzar una vez un dado.

En el año 1654 Blaise Pascal (1623-1654) y Pierre de Fermat (1608-1665) dan inicio a una correspondencia epistolar que pretendía dar solución a problemas planteados por un personaje que misterioso que respondía pseudónimo del Caballero de Meré. Entre estos problemas se encontraba el problema del reparto, el cual fue objeto de discusión entre Pascal y Fermat en numerosas cartas. Cabe resaltar que en la documentación de la correspondencia hacen falta cartas claves, tales como: la primera carta de la correspondencia y la respuesta

Fermat a Pascal sobre su método de solución. Sin embargo, afortunadamente el resto de la correspondencia permite suponer el contenido de las cartas extraviadas.

En cuanto a la solución del problema del reparto Pascal afirma en la correspondencia que:

> "Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas y pone cada uno 32 monedas en la apuesta: supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1 punto. Si, ahora, vuelven a lanzar el dado las posibilidades son tales que si el primero gana, ganará el total de las monedas en la apuesta es decir 64. Si el otro es el que gana, estarán 2 a 2 y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, sigue que cada uno tomará su apuesta es decir 32 monedas.
>
> Por lo tanto señor, se ha de considerar que, si el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan jugar este punto, y decidieran separarse, el primero podría argumentar que "tengo seguras 32 monedas, pues incluso pierda las recibiré. Las 32 restantes quizás las gane quizás no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras". En definitiva el primero tendrá 48 monedas y el segundo tendrá 16. En conclusión el reparto se hará en la proporción 3:1" (Tomado de García, 2000, p. 5)

La solución que propone Pascal supone un giro fundamental al método de resolver este tipo de problemas aleatorios, dado que inicialmente elabora un método recursivo que contrapone las soluciones propuestas por Pacioli, Tartaglia y Cardano. Inicialmente Pascal elabora una simbología acorde a las necesidades de la situación definiendo e(a, b) como la proporción de la apuesta que debe de recibir el jugador 1 si hacen falta "a" puntos para ganar y el jugador 2 si le hacen falta “b” puntos (Díaz, 2013). Quedando expresado de la siguiente manera:

$$E(0,n) = 1\ ;\ E(n,n) = \frac{1}{2};$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, i\ ; E(a,b) = \frac{1}{2}[\mathrm{e(a-1,b) + e(a,b-1), (a,b) = 1{,}2{,}.}}$$

Si bien, la respuesta de Fermat a Pascal no se encuentra, las cartas posteriores permiten inferir que Fermat le respondió a Pascal con otro método de solución, el cual puede rescatar en la correspondencia del 24 de agosto de 1654 que le envía Pascal a Fermat con la crítica a su método. A continuación el método de Fermat:

Supongamos que hay dos jugadores. Al jugador 1, le faltan “a” lances para ganar y al jugador 2, le faltan “b” lances. Nótese el cambio con respecto al de Pascal: independientemente del número de lances necesarios y el tanteo particular, lo que importa para repartir la apuesta es el número de lances que le falta a cada jugador para ganar el juego (García, 2000). Fermat supone que el juego acabará en $a + b - 1$ lanzamientos, por ende calcula el número total de combinaciones que se obtiene de 2^{a+b-1} y se divide la apuesta en proporción a los posibles casos (Díaz, 2013).

Por ejemplo tomando en cuenta la situación de Pascal, al juego le faltan cuatro lances, luego habrá que ver cómo se distribuyen los cuatro lances entre los dos jugadores, cuántas combinaciones harán ganar al jugador 1, cuantas al jugador 2, y así sucesivamente para dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción; la siguiente tabla muestra el número total de combinaciones para la situación, así como los casos en donde gana cada jugador la partida [...] por tanto, la apuesta debe de dividirse como 11 es a 5 (García, 2000, p. 7).

a	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**
a	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**	**a**	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**
a	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**

Ilustración 1

Como consecuencia del método de Fermat, Pascal expone en la misma carta las dificultades que conlleva comprender el razonamiento que involucra las combinaciones posibles en un juego; de igual manera realiza dos objeciones puntuales a su método: primero, afirma que es un error repartir la apuesta tomando en cuenta el número máximo de lances, debido a que el jugador después de haber ganado no está obligado a seguir jugando. Segundo, afirma que utilizar el método de las combinaciones para repartir la apuesta entre tres jugadores, donde al jugador 1 le falte un lance y a los restantes dos lances, resulta imposible de jugar, ya que según Fermat es sobre los lances máximos sobre los que se debe de repartir la apuesta pero resulta imposible efectuar 3 lances sin antes necesariamente llegar a una decisión; a continuación la tabla que presenta Pascal con las posibles combinaciones y ganadores luego de tres lances.

a a a	**a a b**	**a a c**	**a b a**	**a b b**	**a b c**	**a c a**	**a c b**	**a c c**	**b a a**	**b a b**	**b a c**	**b b a**	**b b b**	**b b c**	**b c a**	**b c b**	**b c c**	**c a a**	**c a b**	**c a c**	**c b a**	**c b b**	**c b c**	**c c a**	**c c b**	**c c c**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**			**1**			**1**	**1**	**1**	**1**			**1**		
				2						**2**		**2**	**2**	**2**		**2**						**2**				
								3									**3**			**3**			**3**	**3**	**3**	**3**

Ilustración 2

Es importante aclarar, que el error que ha encontrado Pascal al método de Fermat puede tomarse como un argumento válido. Sin embargo, el análisis de los posibles casos en donde más de un jugador sale favorable es posible solucionarse si se asigna la combinación solamente al primer jugador que gana el juego y no el lance parcial, es decir, el caso "abb" el jugador 1 y el jugador 2 salen favorecidos, pero es correcto afirmar que tal combinación le favorece solamente al jugador 1, diferente sería la combinación "bba" en donde el jugador 2 es quien gana la partida.

Si bien, en la solución del problema del reparto por parte Pascal y Fermat no se hace mención explícita a la noción de probabilidad ni esperanza matemática, su solución delimitó principios y métodos efectivos para *domesticar lo que no se podía controlar.* De igual manera, ésta solución para algunos marcó el inicio a Teoría de la Probabilidad, dado que se convirtió en un referente y trazó rutas a curiosos del azar para afrontar próximos desafíos, especialmente La Paradoja de San Petersburgo.

En conclusión, el devenir histórico de la solución del problema del reparto aporta reflexiones importantes para comprender el proceso evolutivo de la probabilidad en la edad media. En este orden de ideas, el estudio las primeras nociones intuitivas, métodos y simbologías utilizadas permiten comprender desde una perspectiva más amplia los distintos enfoques metodológicos sobre los cuales se puede abordar un problema relacionado con juegos de azar.

3.3 INSTITUCIONALIZACIÓN DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA

A partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat, diversos matemáticos se ven interesados en abordar el novedoso método del cálculo de probabilidades; uno de los tantos interesados es el joven holandés Christiaan Huygens (1629-1695), quien en el año 1655, en su estancia en París lee la correspondencia entre éstos matemáticos célebres y despierta un profundo interés en cuestiones relativas al azar, tanto así que le surge la necesidad de conversar con Pascal acerca del problema del reparto. Es importante aclarar, que a manos de Huygens solo llegó la respuesta inicial de Pascal a Fermat al problema del reparto, sin el método de solución.

Tiempo después, al retornar a Holanda, Huygens decide investigar por cuenta propia algunos problemas relacionados con el azar, propuestos por matemáticos franceses célebres. Luego de examinar y profundizar exhaustivamente en cada uno de éstos, desde lo más básico hasta lo más avanzado cada uno de éstos, el 27 de abril de 1657 le envía a su tutor Frank Van Schooten (1615-1660) un manuscrito titulado: *Van Rekinigh in Spelen van Geluck,* el cual es revisado y traducido al latín por su tutor con el título: *De ratiociniis in ludo aleae* (Cálculo de los juegos de azar), y decide publicarlo como un apéndice del quinto de su obra titulada *Excercitatiovn Mathematicorum.*

La obra de Christiaan Huygens se desarrolla a lo largo de 14 páginas, las cuales constan de catorce proposiciones y cinco problemas al lector. A lo largo del manuscrito se puede identificar que las proposiciones I-III hacen alusión al sentido de la generalidad en probabilidad, en virtud de que ellas permiten solucionar gran cantidad de proposiciones, la proposición IV se materializa en la solución al problema del reparto, las proposiciones de la V - IX hacen alusión a variaciones del problema del reparto, las proposiciones X y XI corresponden a problemas de dados propuestos inicialmente por el Caballero de Meré a Pascal en 1654, las proposiciones XII y XIII establecen tres casos nuevos bajo la situación de los dados, y por último la proposición XIV en la cual se condensa el método analítico (método algebraico). Es importante resaltar, que el método analítico de Huygens consiste en "asignar" un número (expectatio) concreto de aparición a un suceso aleatorio sin necesidad de hacer el empleo de series infinitas, por lo contrario utiliza el álgebra elemental cartesiana.

Retomando lo dicho en el apartado anterior, la noción de *expectatio* o esperanza matemática ya había sido adelantada -con algunas inconsistencias- por Cardano en la solución del problema del reparto en el año 1539. Por esta razón, Huygens se ve en la plena necesidad de introducir -correctamente- la noción de Esperanza Matemática como:

> *"tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia"* (García, 2000, p. 9)

Para Huygens, la elaboración el *Ratiociniis* tenía como objetivo principal abrir los ojos del hombre ante los juegos de azar y su justicia. Por esta razón, fue necesario elaborar un manual al jugador con un sentido moderno que permitiera, a través de la teoría, argumentar acertadamente sobre el valor del juego y sobre el valor de la apuesta (Díaz, 2013). En definitiva, la obra del *Ratiociniis* se constituye como el primer libro impreso de probabilidad, el cual marca un punto de partida en el desarrollo y la evolución del cálculo de probabilidades. Así mismo, el legado que dejó Huygens con su obra fue a gran escala, a tal punto que se referencia en los 50 años posteriores a su publicación como la mejor sistematización de lo que se conoce como Esperanza Matemática y Probabilidades de ganar en los juegos de azar. A continuación una cita de Díaz (2013), en donde describe a de manera contundente la importancia de ésta magnífica y elegante obra:

> *"Christian Huygens no solo realizó un libro para los juegos de azar, ante todo su Ratiociniis es un modo de pensar, un modo de actuar y un modo de resolver"* (p. 123)

Son incontables los impactos que generó *Ratiociniis* en el desarrollo de la estadística y la probabilidad como método para abordar situaciones de incertidumbre. En definitiva, la teoría de probabilidad y la esperanza matemática comenzaban a tomar protagonismo en la comunidad matemática y científica, debido a que permitía establecer un modo de pensar racional ante fenómenos aleatorios. A partir de la publicación de ésta importante obra, son muchos los matemáticos que se ven interesados en abordar cuestiones relacionadas a la probabilidad y el azar, entre ellos se resaltan a Gottfried Leibniz (1646-1716) con sus obras *Ars Combinatoria* (1666) y *De aestimation* (1668), y James Bernoulli (1654-1715) con su obra póstuma *Ars Conjectandi* publicada en 1713 por su sobrino Nicolás Bernoulli (Díaz, 2013).

Específicamente, la magnífica obra de James Bernoulli se caracteriza como el complemento del *Ratiociniis in ludo aleae* de Huygens, debido a que proporciona una amplia perspectiva sobre la aplicabilidad de la *Probabilidad* en distintos campos de estudio. El proceso de elaboración de ésta obra fue de aproximadamente 20 años, y aunque demostró el teorema de la ley de los grande números, Bernoulli no estaba del todo satisfecho con su trabajo, por ello decide posponer su publicación indefinidamente. El *Ars Conjectandi* está organizado en cuatro partes: La primera es una lectura comentada del tratado *De Ratiociniis in ludo aleae* de Huygens, la segunda es un ensayo sobre las combinaciones y permutaciones, la tercera expone el uso de las combinaciones a varios problemas relativos a los juegos de azar, y por último, la cuarta parte establece el uso y aplicación de la probabilidad y esperanza matemática en contextos económicos, políticos y morales (Díaz, 2013).

Es importante aclarar, que el estudio a detalle de la obra de Bernoulli va más allá de los límites de este trabajo de grado, sin embargo, exponer -superficialmente- su importancia y algunos de sus los aportes en el acercamiento entre la probabilidad aleatoria y la probabilidad epistémica, resultan de sumo interés para abordar cuestiones relacionadas con la didáctica en estadística y probabilidad en el capítulo cinco.

El *Ars Conjectandi* tuvo gran acogida en la comunidad matemática, principalmente porque brinda una nueva manera de pensar ante fenómenos aleatorios de toda índole, y no solo a juegos de azar como lo propuso C. Huygens. De igual manera, esta obra sistematiza todos los trabajos sobre probabilidad y esperanza matemática hechos por Pascal, Fermat y Huygens, permitiendo entonces relacionar aspectos de la ciencia con el azar y abordar problemas de mayor dificultad.

Pese a los adelantos de Bernoulli, Huygens, Fermat y Pascal en el surgimiento y establecimiento de la probabilidad y esperanza matemática, hubo numerosos obstáculos y críticas en la antigüedad que llegaron a poner en tela de juicio los fundamentos y bases de esta naciente teoría, puntualmente es el caso de la Paradoja de San Petersburgo inicialmente propuesta por Nicolás Bernoulli a Pierre Montmort en el año 1713 (Díaz, 2013).

La paradoja de San Petersburgo

A partir de la publicación del *Ratiociniis* y el *Ars Conjectandi,* el método para estimar -por excelencia- la cantidad justa que pagar por un juego de azar es calculando la Esperanza Matemática. Sin embargo, paradójicamente existe un juego el cual se presenta una variable con esperanza infinita, es decir, la cantidad justa por pagar para jugar éste juego de azar es infinito.

Como la historia lo indica, en un famoso casino de San Petersburgo, muchos jugadores -no muy racionales- resultan arruinados por un extraño juego que consistía en:

Lanzar al aire continuamente una moneda hasta que salga cara por primera vez. Si esto no ocurre hasta que salga el vigésimo lanzamiento (o después), usted gana mil millones de pesetas. Si la primera sale cara sale antes, para 100 pesetas. (Ruiz, 1999, p. 6)

El juego llega a manos de Nicolás Bernoulli, quien inmediatamente se da cuenta que a diferencia de otros juegos, en éste se debería de pagar un precio infinito por participar en él, algo que sin duda se pone a temblar los cimientos de la teoría de la probabilidad, al haber una excepción a la regla general que proponía C. Huygens en su *Ratiociniis*. Por esta razón, N. Bernoulli decide entablar una correspondencia con Pierre de Montmort el 9 de septiembre de 1713, En la cual describe en su primera carta el enunciado de la paradoja de San Petersburgo. A continuación, en palabras de Nicolás Bernoulli, la paradoja:

Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a pablo un ducado; si en la segunda, 2; si en la tercera, 4; si en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿Cuál es el precio justo que pablo debe pagar por este juego? (Ruiz, 1999, p.7)

En pocas palabras, desde la Esperanza de Huygens, Pedro le pagaría a Pablo 2^{n-1} ducados si la moneda cae en el n-ésimo lanzamiento, con probabilidad de ocurrencia de $(\frac{1}{2})^n$, por ende el valor correcto que debe de pagar Pablo para jugar es:

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}(\frac{1}{2})^n$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Desde el punto de vista del jugador, seguramente nadie en los zapatos de Pablo apostaría una cantidad de dinero considerable esperando obtener una millonaria ganancia, debido a que la probabilidad de resultar afortunado en premios cuantiosos es muy pequeña. Por lo contrario, se esperaría que un jugador promedio pusiera en juego su dinero a premios relativamente menores, en vista de que es más probable que suceda. Retomando al resultado de los cálculos de Nicolás, se puede entrever que el resultado parece estar en contra al sentido común del jugador, por ello se cataloga a este problema como una paradoja (Ruiz, 1999).

Históricamente hubo incontables matemáticos que intentaron solucionar la Paradoja de San Petersburgo, sin embargo son pocos los que se le puede atribuir una solución "coherente" de acuerdo a sus requerimientos. Entre los personajes más destacados se encuentran: Daniel Bernoulli (Primo de Nicolás Bernoulli); Gabriel Cramer; Leonard Euler; Simón Denis Poisson; George Louis Leclerc; entre otros. A continuación se expone la solución propuesta por Daniel Bernoulli, en la cual aborda el problema tratando de identificar nuevas cantidades que reflejan el valor del premio en un sorteo; aquello que más adelante se iba a denominar como "utilidad".

Inicialmente, Bernoulli propone que es necesario centrar la mirada en el aumento de la utilidad cuando el capital x aumenta de manera muy pequeña Δx, quedando entonces de la forma $\frac{\Delta x}{x}$. Luego, para expresar el aumento de la utilidad a medida de que la fortuna cambia de "b" pesos a "a" pesos Bernoulli se recurre a la definición de integral, quedando de la siguiente manera:

$$\int_a^b \frac{\Delta x}{x} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad ; b \neq 0$$

A partir de esta expresión, es posible calcular la utilidad media (promedio) en la participación del juego de San Petersburgo. Luego, Bernoulli supone que la cuota de entrada del juego es de "c" pesos y "b" el capital inicial que se tiene. De igual manera, se sabe -desde un inicio- que en el primer lanzamiento se espera ganar 2 pesos con probabilidades de $\frac{1}{2}$, en este caso, si se decide continuar jugando, se obtendría momentáneamente $b - c + 2$ como capital. Si en el siguiente lanzamiento se resulta favorecido, se obtendría 4 pesos, con una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{4}$, obteniendo entonces como capital $b - c + 4$, y así sucesivamente con cada lanzamiento que se efectúe. En definitiva, se obtiene que el incremento de la utilidad que se puede esperar, en promedio es:

$$\Delta U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^{n} \ln\left(\frac{b - c + 2^n}{b}\right)$$

Cabe aclarar, que la cuota máxima que se espera pagar para entrar al juego es la que hace en definitiva que el incremento de la utilidad sea nulo, por lo cual más adelante se iguala a cero la expresión. Continuando con la solución, Bernoulli se vio en la necesidad de calcular el valor del juego estableciendo el caso particular donde b=c, es decir, el caso donde se invierte todo el capital al juego de azar. Éste caso simplifica notablemente la expresión, quedando de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(2)}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(c)}{2^n} = 2\ln(2) - \ln(c)$$

$$2\ln(2) - \ln(c) = 0 \qquad C = 4$$

Luego de la simplificación de la expresión, se obtiene entonces que se espera pagar 4 euros por entrar al juego, siendo ésta la cuota justa tanto para el apostador como para la casa de apuestas. Es importante resaltar que la solución propuesta por Daniel Bernoulli no es la única, existen diversas soluciones las cuales toman en consideración diferentes funciones matemáticas que permiten "estimar" el valor del juego. Sin embargo, de acuerdo a los fines de este trabajo, resulta dispendioso exponer cada una de estas soluciones, por ello sólo se expone -brevemente- la solución propuesta por Daniel Bernoulli.

3.4 CONCLUSIONES

En conclusión, con respecto a este capítulo, se ha intentado mostrar la evolución, surgimiento y establecimiento de la Esperanza Matemática, haciendo un breve recorrido desde sus etapas iniciales con Cardano, Pascal y Fermat XVI, pasando por su establecimiento en términos formales de la mano de Huygens en el siglo XVII, hasta su consolidación en siglo XVII a partir de las aplicaciones propuestas por Bernoulli. Convirtiéndose entonces la Esperanza en una herramienta -predilecta- para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Luego de este recorrido histórico, es importante detenerse a resaltar algunos resultados a manera de conclusiones que posibiliten la discusión alrededor de las potencialidades que trae, para la enseñanza de la Esperanza Matemática, adentrarse en su historia y epistemología. Específicamente, para éste tercer capítulo se tenía como objetivo específico:

- *Reconocer elementos históricos y epistemológicos que evidencian el surgimiento, evolución y establecimiento de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos en los siglos XVII, XVIII y XIX.*

Para lo cual, se puede afirmar lo siguiente:

- El papel de los juegos de azar en el establecimiento de la probabilidad y esperanza matemática ha sido fundamental, debido a que el abordaje de cuestiones y enigmas alrededor de los juegos de azar permitió categorizar la estadística y probabilidad como una disciplina de estudio, la cual era importante para comprender el porqué de diversos fenómenos aleatorios. Por esta razón, se concluye que es importante abordar este tipo de cuestiones en el aula de clases, puesto que contribuyen notablemente a la delimitación de elementos para la introducción de la estadística y probabilidad por parte de los estudiantes, particularmente los juegos de azar permiten desarrollar nociones como: naturaleza de variables aleatorias, equidad o inequidad de juegos de azar, espacios muestrales, entre otros.
- Otra conclusión que se rescata de la elaboración de este capítulo, es la importancia de la delimitación de los distintos métodos para la solución de problemas en estadística y probabilidad. Puntualmente se expuso algunos de los métodos de solución (correctos e incorrectos) para el problema del reparto de la apuesta y la Paradoja de San Petersburgo. A partir de la indagación de estos métodos, se concluye que contribuyen -notablemente- a la delimitación de posibles errores, dificultades y sesgos en los estudiantes al momento de abordar fenómenos aleatorios en el salón de clases.
- La consideración de los aportes realizados por Christiaan Huygens con su obra *De ratiociniis in ludo aleae* y Daniel Bernoulli con su obra *Ars Conjectandi* en el surgimiento y establecimiento de la Esperanza Matemática como método para abordar fenómenos aleatorios, han sido parte fundamental para la delimitación de

elementos históricos para su enseñanza. Primero que todo, el magistral trabajo de Huygens más que mostrar las proposiciones y métodos, permite comprender de manera explícita la importancia y la necesidad de encontrar el valor justo (medida de centralización) a fenómenos permeados por la aleatoriedad, permitiendo así romper fuertemente una visión determinista, la cual el ser humano ha sido acostumbrado desde su niñez. Segundo, la importante obra de Bernoulli contribuye notablemente a la aplicación de la Esperanza Matemática en diferentes contextos (no solo los juegos de azar), permitiendo relacionarla con otras ciencias y disciplinas de estudio.

- Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la estadística y probabilidad es desarrollar un razonamiento probabilístico en los estudiantes que permita enfrentarse a situaciones de la vida permeadas por el azar. Sin embargo, en algunas ocasiones, la intuición y las creencias subjetivas de los eventos aleatorios han jugado en contra de la razón (lógica) del ser humano, a tal punto que lo ha llevado a comprender -erradamente- un fenómeno aleatorio, un ejemplo de ello son las paradojas y problemas clásicos de la probabilidad (Problema de Monty Hall, Paradoja de San Petersburgo, entre otros.). Por esta razón, a partir del rastreo de elementos históricos de la probabilidad y la esperanza matemática, se propone como un elemento importante en la educación en estadística y probabilidad, la inclusión de las paradojas en la escuela, esto con el fin de crear situaciones de aprendizaje que impulsen a los estudiantes a la reflexión sobre sus propias conjeturas, y así tomar mejores decisiones en ambientes de incertidumbre y efectuar inferencias o predicciones de eventos aleatorios basados en modelos estadísticos y probabilísticos (Batanero, Contreras y Cañadas, 2012).

CAPÍTULO IV: LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA EN RELACIÓN CON EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS NACIONAL E INTERNACIONAL

En este capítulo se hace alusión a los elementos curriculares nacionales e internacionales que guardan relación con la enseñanza de la esperanza matemática y juegos equitativos. En este orden de ideas, primeramente, se presenta al lector un extenso rastreo curricular sobre aquellos elementos que guardan relación con la esperanza matemática del currículo nacional, tomando en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional propuestos en el 1998, 2003 y 2013 respectivamente. En contraste a lo anterior, se presenta un rastreo de los elementos que guardan relación con la enseñanza y el aprendizaje de la esperanza matemática en dos currículos internacionales (ESO y NCTM) y un proyecto internacional (GAISE); cabe aclarar que dichos currículos y proyectos son considerados por expertos como Batanero y Díaz (2011), Guerrero (2015), Cañizales y Ortiz (2012) como los más completos en lo referente a los contenidos, metodologías y estándares en estadística y probabilidad.

Finalmente, se presentan las conclusiones encontradas luego del rastreo y comparación curricular efectuada al currículo Nacional e internacional. Cabe aclarar que las conclusiones encontradas se establecen a partir del segundo objetivo específico planteado en el Capítulo 1 (Ver apartado 1.2) y también del marco curricular presentado en el Capítulo 2 (Ver apartado 2.2)

4.1 PERSPECTIVA NACIONAL

El currículo de educación en Colombia, en particular el currículo de matemáticas, en las últimas décadas ha sufrido numerosos cambios y transformaciones. Esto se debe principalmente a que han surgido exigencias y recomendaciones de organismos internacionales como ICMI, CIAEM, NCTM, entre otros., que permean la educación matemática en Colombia. Uno de los cambios que más generó impactos en la educación matemática en el siglo XX fue el movimiento denominado "Matemáticas Modernas", el cual se llevó a cabo entre los años 1960 y 1970, con la finalidad de profundizar en el aula las diversas estructuras de las matemáticas (topología, lógica, teoría de conjuntos, entre otras). Sin embargo, años más tarde este movimiento fracasó, debido a que las "nuevas" exigencias curriculares estaban evocadas hacia el papel de las matemáticas como método para resolver problemas rutinarios y no desde una perspectiva abstracta.

A raíz de este movimiento, en Colombia en el año 1990 se da inicio una renovación curricular, la cual tenía como objetivo principal la construcción de un marco legal para el currículo de Matemáticas en la educación básica y media. De esta manera, el ministerio de Educación Nacional propuso articular e interrelacionar los distintos contenidos del currículo de matemáticas en 5 núcleos temáticos (geométricos, métricos, numéricos, datos, lógicos y conjuntos). Cabe resaltar, que en esta renovación curricular es donde por primera vez se aparecen -de manera explícita- contenidos relacionados con estadística, esto se debe a necesidad emergente de formar a los estudiantes con conocimientos estadísticos para la investigación en diversas áreas (Castellanos, 2001). A continuación, en La Tabla 1 se presenta la organización de los contenidos de estadística, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en la renovación curricular del año 1990.

Tabla 1: Organización de contenidos de estadística en la renovación curricular de 1990.

<table>
<tr><th colspan="5">Nivel Básica Ciclo Primaria</th></tr>
<tr><td>Grado 1°</td><td>Grado 2°</td><td>Grado 3°</td><td>Grado 4°</td><td>Grado 5°</td></tr>
<tr><td>Iniciación a gráficas de barras</td><td>Gráficas de barras</td><td>Recolección de datos Tabulación y representación de datos.</td><td>Recolección de datos. Tabulación y representación de datos. Iniciación al análisis de datos. Frecuencias, moda.</td><td>Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.</td></tr>
<tr><th colspan="5">Nivel Básica Ciclo Secundaria</th></tr>
<tr><td colspan="2">Grado 6°</td><td>Grado 7°</td><td>Grado 8°</td><td>Grado 9°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Frecuencias absolutas. Frecuencias relativas (Porcentuales, fraccionarias). Diagramas de barra y circular. Frecuencias ordinarias o puntuales. Frecuencias acumuladas</td><td>Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.</td><td>Medición. Muestreo Disposición y representación de datos. Escala</td><td>Medidas de dispersión.</td></tr>
</table>

Es importante añadir, que la introducción de estos contenidos por parte del MEN posibilita -en cierta medida- la fundamentación teórica del por qué es importante introducir contenidos de estadística y probabilidad en la escuela. De igual manera, según Castellanos (2001) este tipo de estándares permiten establecer que existen tres pilares fundamentales que más tarde constituirán la enseñanza en estadística y probabilidad, estos pilares son:

- Interpretar fenómenos de la vida real, desde un punto de vista estadístico.
- Desarrollar habilidades para la recolección, organización y análisis de los datos, lo cual permitirá -más adelante- realizar deducciones y comparaciones sobre fenómenos aleatorios de la realidad.
- Comprender, aplicar e interpretar las medidas de tendencia central y medidas de dispersión, esto con el fin de establecer puntos de referencia para el análisis de situaciones de variación con muestras grandes.

Actualmente el currículo de educación en Colombia está regido por La Ley General de Educación propuesta en el año 1995, y sobre la cual se establece un criterio claro de flexibilidad y autonomía a las instituciones educativas en Colombia para diseñar y organizar el currículo en sus tres niveles: educación básica primaria, educación básica secundaria y educación media. Así mismo, esta ley proporciona a las instituciones nuevas perspectivas sobre la manera en que se podrían organizar los contenidos en el currículo en matemáticas, explicitando una nueva estructura tridimensional, la cual está compuesta por procesos generales, conocimientos básicos y contexto que permea el aprendizaje.

A partir del establecimiento esta ley, el MEN comienza la ardua labor de diseñar y establecer un marco legal de enseñanza en matemáticas para Colombia. Fruto de estos esfuerzos, en el año 1998 se publican los *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas*, los cuales están enfocados en fundamentar teórica y epistemológicamente aquellos elementos cognitivos, didácticos y matemáticos que se deben de tomar en consideración para la conformación y consolidación del currículo en matemáticas para las instituciones educativas. Es importante resaltar, que este documento plantea la necesidad de asumir las matemáticas como una disciplina formal e integradora, la cual busca contribuir –notablemente- al desarrollo integral de los estudiantes a lo largo de su formación en el aula, dando sentido al mundo que los rodea desde una perspectiva matemática. Para llevar a cabo lo anterior, el MEN (1998) propone en tres ejes conceptuales fundamentales:

- El primer eje corresponde a los cinco procesos matemáticos generales que se efectúan en la actividad matemática de los estudiantes y que se espera sean desarrollados en el aula de clases. Entre los cuales se encuentran: razonamiento; resolución y planteamiento de problemas; comunicación; modelación; por último, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- El segundo eje contempla los conocimientos matemáticos básicos, entre los cuales se delimitan los cinco tipos de pensamientos: pensamiento numérico y sistemas

numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

- El tercer y último eje, hace referencia a los ambientes de interacción que rodea el aprendizaje de los estudiantes, el cual debe de estar intrínsecamente ligado al sentido de las situaciones problemáticas que se plantean en el aula de clases.

En relación con los fines de este trabajo, es en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas donde se identifica, por primera vez, conceptos y objetos relacionados con la teoría de la probabilidad. Además, el MEN propone que la enseñanza de este tipo de contenidos debe propiciarse a partir de contextos significativos para los estudiantes, permitiéndole interpretar y analizar fenómenos aleatorios que están a su alrededor. De igual manera, hace una asociación fundamental entre los contenidos en probabilidad y estadística, denominando lo que se conoce actualmente como “pensamiento aleatorio y sistemas de datos”

Según el MEN (1998), se define el pensamiento aleatorio y sistemas de datos como aquel que contribuye a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, riesgo o ambigüedad. Este tipo de pensamiento se apoya en las bases de la estadística y la teoría de la probabilidad, permitiendo modelar, en términos estocásticos, problemas y situaciones que están permeadas por el azar y la aleatoriedad. Cabe destacar que el pensamiento aleatorio y sistemas de datos difieren con los otros tipos de pensamiento propuestos en el MEN (1998), debido a que opera con variables de naturaleza aleatoria y no determinista. Esta afirmación lleva a suponer que existe una diferencia sustancial en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los contenidos de estadística y probabilidad con respecto a otros tipos de pensamientos, lo cual ha sido constatado en Guerrero (2015), Batanero (2000) y Gómez (2016), entre otros. A continuación, una cita que permite comprender la manera en que el MEN propone la enseñanza de la estadística y probabilidad:

> "El carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde las presencias de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permitan exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones". (MEN, 1998, p.47-48)

En el año 2003, MEN propone los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), los cuales buscan aterrizar lo dicho en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Este documento contribuye específicamente en el planteamiento de metas específicas para cada grupo de grados (1° a 3°, 4° y 5°, 6 y 7°, 8° y 9°, 10° y 11°), de acuerdo a cada tipo de pensamiento y guardando correspondencia con los procesos generales de aprendizaje. De esta manera, los EBCM proponen como objetivo central en la educación comenzar a hablar de estudiantes matemáticamente competentes, por encima del desarrollo de contenidos fragmentados. Al respecto, el MEN (2006) en los EBCM define la competencia matemática como:

> "Todas estas dimensiones se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase". (p. 49)

Tomando en consideración lo expuesto por el MEN y en concordancia a los fines de este trabajo de grado, se resalta que uno de los principales objetivos de la educación matemática en Colombia debe estar enfocado en formar estudiantes competentes con respecto a los contenidos propuestos en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, en particular, en aquellos contenidos que guardan relación a la enseñanza de la Esperanza Matemática. Es importante resaltar también, que el MEN no hace referencia explícita a la esperanza matemática, por ello surge la necesidad de rastrear aquellos estándares que aluden a conceptos previos necesarios para su enseñanza y aprendizaje. A continuación, se presentan a modo de tabla los estándares mencionados:

Tabla 2: Estándares curriculares que guardan relación con la Esperanza Matemática

Grado	Estándares
1° a 3°	• Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
4° y 5°	• Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos
6° y 7°	• Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. • Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. • Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.
8° y 9°	• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
10° y 11°	• Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. • Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo). • Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas

Tabla 2

Por último, en el año 2015, el MEN presenta al sector educativo los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (DBA), este documento cumple las funciones de ejemplificar y actualizar los EBCM para los educadores, identificando para cada grado en particular, los saberes básicos que han de aprender en las instituciones educativas a lo largo del país. Es importante resaltar que los DBA buscan una "mejoría sustancial" en la calidad educativa en el país, estableciendo una serie de competencias esperadas por desarrollar, cada una acompañada con una actividad didáctica ilustrativa (Gómez, 2016).

En cuanto a los DBA, las competencias y situaciones que guardan relación con la enseñanza y aprendizaje de la esperanza matemática asociada a los juegos equitativos son relativamente pocas; esto se debe a que este concepto probabilístico no ha sido tomado en consideración en los EBCM, por ello las actividades y las competencias básicas propuestas en los DBA, no guardan relación explícita con este concepto. Sin embargo, ante dicha adversidad, surge la necesidad de delimitar algunas competencias y evidencias de aprendizaje que, a modo de conceptos previos, se relacionan "indirectamente" con la esperanza matemática. Al respecto, se presenta la actividad #10 asociada al grado 10°. En un análisis previo a la competencia, las evidencias y la situación propuesta, se puede inferir que esta actividad, al ser de carácter aleatorio con un espacio muestral indeterminado requiere -necesariamente- de una estimación o inferencia para su resolución. Por esta razón, dichas estimaciones pueden ser llevadas a cabo por diferentes métodos y conceptos probabilísticos, en este caso, se puede emplear una medida de centralización de variables aleatorias como lo es la Esperanza Matemática (Ver Ilustración 3).

10. **Propone y realiza experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predice la ocurrencia de eventos, en casos para los cuales el espacio muestral es indeterminado.**

Evidencias de aprendizaje

- Plantea o identifica una pregunta cuya solución requiera de la realización de un experimento aleatorio.
- Identifica la población y las variables en estudio.
- Encuentra muestras aleatorias para hacer predicciones sobre el comportamiento de las variables en estudio.
- Usa la probabilidad frecuencial para interpretar la posibilidad de ocurrencia de un evento dado.
- Infiere o valida la probabilidad de ocurrencia del evento en estudio.

Ejemplo

En una revista médica se menciona lo siguiente: "Se ha estimado que la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo es de aproximadamente $\frac{1}{2}$".

Se trata de describir un método posible por medio del cual se haya podido llegar a este resultado. "Afirma que el estudio se pudo realizar en una muestra aleatoria de la población de personas fumadoras en donde se calculó la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo. Concluye que lo previsible es que en esa muestra el resultado haya sido $\frac{1}{2}$."

Ilustración 3

Luego de explicitar la manera en que el MEN que entiende organiza y propone el *pensamiento variacional y sistemas de datos* en la educación básica y media, y también de hacer un rastreo sobre los contenidos, estándares y DBA que guardan relación con la enseñanza y aprendizaje de la Esperanza Matemática se puede establecer lo siguiente:

- Primero, como se ha mencionado reiteradamente durante este rastreo curricular, la Esperanza Matemática es un concepto en estadística y probabilidad que no se tomado en consideración para la estructuración del currículo en matemáticas.
- Segundo, en los LCM, en particular, en la descripción general del Pensamiento Aleatorio y sistemas de datos, se hace explícito que uno de los objetivos de desarrollar este tipo de pensamiento es contribuir a la toma mejores decisiones en situaciones de azar o incertidumbre. Sin embargo, durante el rastreo de los EBCM y los DBA no se ha encontrado evidencias que apuntan a cumplir este objetivo. Por esta razón se afirma, basándose en reflexiones y críticas realizadas por Batanero (2014), Guerrero

(2015) y Cañizales y Ortiz (2013) a currículos internacionales, que la organización de los contenidos en estadística y probabilidad en el currículo de matemáticas se encuentra de manera segmentada.

- Tercero, en los LCM durante la delimitación de los tres ejes fundamentales que rigen la actividad matemática, en particular en el aspecto contextual, se ha manifestado la importancia de brindar contextos significativos a los estudiantes permitiéndoles dar sentido a las matemáticas que aprende. Sin embargo, se ha podido constatar que durante la estructuración del currículo en matemáticas no se hace mención sobre las potencialidades que conlleva introducir al aula de clases contextos relativos a los juegos de azar, siendo este un fenómeno social que afecta comúnmente los estudiantes de secundaria (Iglesias, Míguez, Vázquez; 2001).

4.2 PERSPECTIVA INTERNACIONAL

En los últimos años, el plan curricular de matemáticas en Colombia ha estado enfatizado en reconocer el pensamiento aleatorio y sistemas de datos como un elemento fundamental para la formación de ciudadanos competentes en su diario vivir, en especial la toma de decisiones en situaciones permeadas por el azar y la aleatoriedad (MEN, 1998). Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional ha considerado pertinente en la elaboración del currículo de matemáticas, tomar en consideración recomendaciones y tendencias de currículos internacionales que buscan establecer a la estadística y probabilidad como uno de los pilares fundamentales en la formación matemática a nivel mundial. Sin embargo, según Castellanos (2001) este tipo de recomendaciones no han surtido efecto en el currículo de matemáticas en Colombia, esto se debe a que principalmente el MEN no ha reestructurado su currículo de matemáticas en función de las recomendaciones y comparaciones de la situación internacional.

A raíz de los cuestionamientos sobre la manera en que se debe actualizar el currículo en matemáticas, en particular aquellas orientadas a la reorganización y reestructuración del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, se trae a colación tres currículos internacionales (ESO, NCTM y Proyecto GAISE), los cuales ante los ojos de diversos investigadores como Batanero y Díaz (2011), Guerrero (2015), Cañizales y Ortiz (2012) han considerado que éstos currículos hacen un mayor énfasis en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y probabilidad como disciplina de estudio. A continuación se presenta, un análisis descriptivo de cada uno de los currículos internacionales mencionados anteriormente, en comparación con el currículo de matemáticas en Colombia.

4.2.1 Currículo Español

Primeramente, se presenta el currículo de matemáticas español para secundaria, el cual está regido actualmente por la Ley Orgánica para la Mejora en la Calidad Educativa (LOMCE) propuesta en el año 2013 por el Ministerio de Educación Español. En este documento se implanta la Escuela Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la cual se fundamenta los contenidos, criterios de evaluación y estándares para la enseñanza de distintas áreas conocimiento, en jóvenes con edades desde los 12 años a 18 años. Cabe aclarar que el currículo español de secundaria se encuentra dividido en 2 partes, la primera parte corresponde a cuatros ciclos propios de la ESO (1°, 2°, 3° y 4°); y luego, de manera optativa, el estudiante profundiza sus estudios en los ciclos 1° y 2° de Bachillerato.

En particular, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el currículo español, se distingue distintas materias, las cuales van en relación con las aptitudes y orientaciones académicas de los estudiantes. A continuación se presenta la tabla X, en la cual están organizadas las materias que le corresponden a los distintos grados de la ESO y Bachillerato.

Tabla 3: Cursos de matemáticas ofertados en la ESO y Bachillerato.

	Ciclo	Materias Ofertadas
Escuela Secundaria Obligatoria	1°	• Matemáticas
	2°	• Matemáticas
	3°	• Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas I • Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas I
	4°	• Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas II • Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas II
Bachillerato	1°	• Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I • Matemáticas I
	2°	• Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II • Matemáticas II

Tabla 3

Es importante resaltar, que en durante la educación primaria en España, los estudiantes han tenido acercamientos intuitivos al concepto de probabilidad desde la asignación frecuencial dado que han realizado actividades de: acercamiento intuitivo al concepto de probabilidad; reconocimiento de la presencia de la aleatoriedad en contexto, simulación de experimentos aleatorios sencillos, reconocimiento de sucesos con igual probabilidad de ocurrencia y empleo de técnicas de conteo (Guerrero, 2015). En definitiva, se espera que estudiantes en su formación primaria comprendan la intrínseca relación que existe entre la estadística y la probabilidad, desde la experimentación y la asignación frecuencial.

La enseñanza de las matemáticas en España, a partir del Real Decreto de Enseñanzas Mínimas propuesto en el año 2006, se ha organizado en seis bloques temáticos, los cuales especifican los Contenidos, Criterios de evaluación y Estándares de aprendizaje evaluables (CCE), Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Números y álgebra, Análisis, Estadística y probabilidad, Geometría, Funciones.

En particular, para este trabajo de grado se hace especial énfasis en el bloque de estadística y probabilidad, el cual se encuentra ubicado en todos los grados de escolaridad de la ESO y Bachillerato. Cabe aclarar, que la manera en que se van a indagar los elementos curriculares contenidos este bloque, se basan principalmente en los análisis propuestos por Guerrero (2015), en los cuales explicita de manera detallada los distintos elementos propios del currículo de matemáticas en España para el bloque de estadística y probabilidad. Por otro lado, la metodología que se utilizará para su indagación es a partir de la agrupación de parejas de grados (1° y 2° ESO; 3° y 4° ESO; 1° y 2° Bachillerato); esto con la intención de identificar singularidades que se presentan en la transición de contenidos de una materia a otra (Ej. Matemáticas I - Matemáticas II), lo cual constituye en un punto de discusión importante en el análisis general de la perspectiva curricular internacional.

Durante la indagación de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables propuestos para los ciclos 1° y 2° de ESO, se puede inferir, de manera general, los estudiantes pasan por un proceso de formalización de conjeturas sobre el comportamiento de los fenómenos aleatorios. De igual manera, se prevé que los estudiantes poseen las competencias para diferenciar fenómenos aleatorios de deterministas, puesto que han desarrollado estrategias para identificar las regularidades y efectuar predicciones a partir de objetos y conceptos propios de la estadística y probabilidad. Es importante resaltar, que en estos ciclos no se aborda explícitamente la Esperanza Matemática, sin embargo en el rastreo de los CCE se han encontrado algunos elementos interesantes (Tabla 4) que se relacionan en la enseñanza previa de este concepto (Guerrero, 2015)

Tabla 4: Elementos curriculares de 1° y 2° de la ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática

Ciclo	Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Aprendizaje Evaluables
ESO 1° y 2°	• Medidas de tendencia central y dispersión. • Conjeturas sobre el comportamiento de Fenómenos Aleatorios. • Frecuencia relativa y aproximación de la probabilidad • Equiprobabilidad de sucesos elementales • Espacios muestrales • Tablas y diagramas de árbol	• Utiliza vocabulario acorde para describir situaciones relacionadas con azar. • Analiza e interpreta información que aparece en medios de comunicación • Calcula probabilidades simples y compuestas y las utiliza para resolver problemas en contexto.	• Identifica fenómenos aleatorios y deterministas • Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. • Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. • Describe experimentos aleatorios sencillos apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.

Tabla 4

Tomando como punto de partida que los grados 1° y 2° de ESO son congruentes a los grados 6° y 7° de la educación básica secundaria colombiana. Se puede inferir luego de la delimitación los estándares para estos grados, en comparación a la perspectiva nacional, que:

- El currículo colombiano no toma en consideración los distintos significados de la probabilidad.
- No presenta una coherencia explícita en entre la relación estadística - probabilidad, puesto que da por hecho que las aproximaciones frecuenciales de los datos recolectados corresponden directamente a la probabilidad del fenómeno aleatorio analizado.

- Por último, en los estándares propuestos por el MEN, no se toma en consideración contenidos relacionados con la definición y cálculo de espacios muestrales para un fenómeno aleatorio sencillo. Es importante reconocer que se considera la noción de espacio muestral en probabilidad y estadística como un objeto fundamental en el aprendizaje de estadística y probabilidad, dado que permite interpretar el comportamiento de los datos.

Con respecto a los niveles 3° y 4° de la ESO en España, la indagación de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables propuestos, permite inferir que de manera superficial que el estudiante posee herramientas conceptuales para predecir la posibilidad de un suceso a partir de información previamente recolectada; también es capaz de identificar, en un contexto cotidiano, el espacio muestral de un evento aleatorio haciendo uno de la regla de Laplace, tablas de contingencia o diagramas de árbol, esto con el fin de calcular las probabilidades asociadas a un evento aleatorio. Es importante aclarar que durante los niveles 3° y 4° de la ESO, los estudiantes asumen la probabilidad como una herramienta potencial y enriquecedora, la cual permite tomar decisiones razonables a problemas en contexto permeados por el azar y la incertidumbre. Es importante destacar, que en este nivel se introducen las medidas de centralización de variables aleatorias, en las cuales está inmersa la Esperanza Matemática de manera operativa. A continuación se presenta la Tabla 5, la cual contiene los CCE que guardan relación con la enseñanza de la esperanza matemática para los dos niveles anteriormente mencionados (Guerrero, 2015)

Tabla 5: Elementos curriculares de 1° y 2° de ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática

Nivel	Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Aprendizaje Evaluables
ESO 3°	• Gráficas estadísticas. • Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. • Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	• Analizar e interpretar la información estadística de los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad. • Estimar la posibilidad de un suceso aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa.	• Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación. • Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias. • Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.
ESO 4°	• Combinaciones, variaciones y permutaciones. • Probabilidad simple, compuesta y condicionada. • Análisis crítico de talas y gráficas. • Medidas de dispersión y centralización.	• Resolución de problemas a partir de la aplicación del cálculo de probabilidades y técnicas de conteo. • Utiliza lenguaje adecuado para describir, analizar e interpretar datos estadísticos. • Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales.	• Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. • Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. • Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. • Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. • Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados.

Tabla 5

Partiendo del hecho que los grados 3° y 4° de ESO, son congruentes a los grados 8° y 9° de la educación básica secundaria colombiana. Se puede inferir luego de la delimitación los estándares, criterios de evaluación y contenidos para estos grados que:

- Es importante destacar, que al igual que la ESO, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el MEN, destacan la necesidad de abordar en los grados 8° y 9° la interpretación analística y crítica de la información estadística proveniente de los medios de comunicación.

- Con respecto a los estándares para 3° y 4° de la ESO, se puede inferir que los estándares propuestos por el MEN no toman en consideración los contenidos de estadística y probabilidad suficientes para desarrollar el pensamiento aleatorio y sistemas de datos en estudiantes de 14 y 15 años. Puntualmente, se identifica que falta tomar en consideración en el currículo de matemáticas para grado 8° y 9° contenidos como: permutaciones, combinaciones, medidas de dispersión, medidas de centralización y parámetros estadísticos.
- El currículo de matemáticas en Colombia, específicamente el diseñado para grado 8° y 9° posee limitantes en los procesos de resolución de problemas relacionados con estadística y probabilidad, dado que no se toma en consideración estándares que incentiven la aplicación en contexto de los contenidos. Es importante destacar, que el desarrollo de éste tipo de competencias, contribuyen sustancialmente a la toma de decisiones por parte de los estudiantes, por tal razón es fundamental que aparezca en cada uno de los grados de escolaridad.

Por último, los ciclos 1° y 2° de Bachillerato en España, la indagación de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables propuestos, permite inferir que el estudiante es capaz de determinar las probabilidades de un suceso aleatorio complejo, analizar una situación permeada por el azar y tomar la opción más adecuada a partir de la utilización de objetos estocásticos. De igual manera, el estudiante es capaz reconocer la amplia gama de procedimientos que conlleva asignar la probabilidad de un suceso aleatorio, con esta competencia el estudiante desarrolla capacidades para tomar decisiones sociales previamente o sobre la marcha (a priori o posteriori), compuestas o condicionadas. A continuación se presenta la Tabla 6, la cual contiene los CCE que guardan relación con la enseñanza de la esperanza matemática para los dos ciclos anteriormente mencionados.

Tabla 6: Elementos curriculares de 1° y 2° de la ESO que guardan relación con la Esperanza Matemática

Nivel	Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Aprendizaje Evaluables
Bachillerato 1°	• Probabilidad condicionada. • Dependencia e independencia de sucesos. • Distribución de probabilidad. • Media, varianza y desviación típica • Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.	• Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad. • Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas.	• Construye la función de probabilidad de una variable discreta asociada a un fenómeno y calcula parámetros y probabilidades asociadas. • Razona y argumenta la interpretación de informaciones estadísticas o relacionadas con el azar presentes en la vida cotidiana.
Bachillerato 2°	• Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. • Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.	• Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.	• Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. • Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones.

Tabla 6

Partiendo del hecho que los grados 1° y 2° de ESO, son congruentes a los grados 10° y 11° de la educación media secundaria colombiana. Se puede inferir, luego de la delimitación los estándares para estos niveles que los EBCM toman en consideración gran parte de los estándares propuestos por Bachillerato en sus niveles 1° y 2°. Sin embargo, se reconoce una limitación en los contenidos, tales como: el teorema de Bayes, modelación de funciones de probabilidad, predicciones y fiabilidad de las mismas, entre otros. La introducción de este tipo de contenidos permite desarrollar conocimientos, habilidades y destrezas estocásticas delimitadas por la IASE.

La comparación entre el currículo de matemáticas en Colombia con el currículo de matemáticas en Español, permite concluir que Colombia posee un atraso de aproximadamente 2 años (lectivos) en los estándares relacionados con estadística y probabilidad. De igual manera, esta comparación permitió identificar la necesidad de introducir nuevos elementos curriculares que permitan desarrollar un razonamiento estocástico en niveles mucho mayores a los que se tienen actualmente en Colombia, en particular se destacan en la ESO y Bachillerato la delimitación explícita de los criterios de evaluación y los contenidos estocásticos, dado que contribuyen -notablemente- a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y probabilidad en el aula de clases.

4.2.2 Currículo y Proyectos Estadounidenses.

Algunos de los referentes curriculares principales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel mundial, son realizados en el marco del currículo de matemáticas en Estados Unidos. En particular, para esta investigación se destaca las reflexiones y recomendaciones hechas por el National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y el Project Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (Proyecto GAISE) (Franklin y Cols, 2007). Cabe resaltar, que la selección de estos dos documentos se hace a partir de reflexiones de investigadores internacionales (Batanero y Díaz, 2011; Guerrero, 2015; Díaz, 2014) sobre la pertinencia e impacto en el currículo español y demás currículos internacionales.

Estándares del NCTM 2000

Los Estándares propuestos por el NCTM buscan principalmente dar respuesta a la pregunta ¿Qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar cuando avancen en su educación? Para abordar este interrogante, proponen, en primera instancia, establecer cuatro (4) objetivos fundamentales por cumplir:

- Establecer los contenidos y procesos matemáticos que deberían de aprender los estudiantes desde el nivel preescolar (pre-kindergarten) hasta el grado 12 (K-12);
- Servir como recurso pedagógico a profesores de matemática en programas de instrucción;
- Guiar a la elaboración de macros curriculares, evaluaciones y materiales educativos para la enseñanza de las matemáticas;
- Estimular discusiones e ideas que promuevan el mejoramiento de la calidad educativo en los ámbitos nacional, local, estatal y provincial.

De igual manera, el NCTM (2000) establece cinco bloques de contenidos, los cuales direccionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela: Números y Operaciones; Álgebra; Geometría; Medición; Análisis de Datos y Probabilidad.

En particular, de acuerdo con los fines de este trabajo se toman en consideración el contenido propuesto sobre probabilidad y análisis de datos propuestos en los NCTM (2000). A continuación en la Tabla 7 y Tabla 8 se presentan los estándares para todos los grados de 6° a 8° y 9° a 12° que guardan relación con la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos de azar, así como una breve inferencia sobre las competencias previstas por desarrollar en los estudiantes en los núcleos de **Inferencia** y **Probabilidad**. Es importante aclarar, que las interpretaciones sobre los estándares y evidencias contenidos propuestos por los NCTM se hacen a partir de las reflexiones hechas por Guerrero (2015).

Tabla 7: Estándares y Evidencias del NCTM de 6° a 8° que guardan relación con la Esperanza Matemática

NCTM Grado 6° a 8°	
Estándar	**Evidencias**
Formular cuestiones que pueden ser tratadas por medio de la recopilación, organización y visualización de la información.	• Seleccionar, crear y utilizar apropiadas representaciones graficas de la información, incluyendo histogramas, box plots y gráficos de dispersión.
Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar la información.	• Busca, usa e interpreta las medidas de centralización y extensión, incluyendo media y rango intercuartílico.
Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones que son basadas en la información	• Utiliza nuevas observaciones sobre las diferencias entre dos o más muestras para hacer conjeturas sobre los eventos donde tomo las muestras. • Utiliza conjeturas para formular nuevas preguntas y planear nuevos estudios para solucionarlas.
Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.	• Comprende y utiliza la terminología apropiada para describir eventos complementarios y mutualmente excluyentes • Utiliza la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para realizar y probar conjeturas sobre los resultados de experimentos y situaciones aleatorias. • Calcula probabilidades para eventos aleatorios compuestos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

Tabla 8: Estándares y Evidencias del NCTM de 9° a 12° que guardan relación con la Esperanza Matemática

NCTM Grado 9° a 12°	
Estándar	**Evidencias**
Formular cuestiones que pueden ser tratadas por medio de la recopilación, organización y visualización de la información.	• Reconocer las características de estudios bien diseñados, incluyendo el rol del azar en las encuestas y experimentos. • Calcula estadísticas básicas y entiende la distinción entre una estadística y un parámetro.
Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar la información.	• Para una medición de datos invariados, se puede realizar distribución, describir su forma y seleccionar y calcular las estadísticas resumidas.
Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones que son basadas en la información	• Utiliza simulaciones para explorar la variabilidad de las muestras estadísticas de una población conocida y construir distribuciones muestrales.
Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.	• Comprende conceptos como espacios muestrales y distribución de probabilidad, y construye espacios muestrales y distribuciones en casos simples. • Calcula e interpreta el valor esperado de variables aleatorias en casos simples. • Comprende los conceptos de probabilidad condicional y eventos independientes. • Comprende cómo calcular la probabilidad de un evento compuesto.

Núcleo de Inferencia:

- A partir de los estándares y las evidencias propuestas para los grados 6° a 8°, se interpreta que los estudiantes tienen la plena capacidad de observar, analizar y conjeturar sobre datos recolectados en dos tipos de muestras; también de hacer conjeturas sobre las posibles relaciones entre muestras y sus singularidades; construir diagramas de dispersión con el fin de presentar la información de manera organizada y precisa.

- Con respecto a los estándares y evidencias propuestas para los grados 9° a 12°, se puede inferir que los estudiantes poseen competencias para elaborar simulaciones de fenómenos aleatorios, así como la capacidad de explorar la variabilidad de las muestras de población y construir distribuciones a partir de los datos recogidos; comprender la estadística y la probabilidad aplicada a parámetros de población, crecimiento, y por último establecer la veracidad de los informes publicados a partir del análisis de los datos.

Núcleo de probabilidad:

- En los grados de 6° a 8°, se puede identificar que los estudiantes son capaces de comprender y emplear un lenguaje algebraico que permita describir sucesos aleatorios; de igual forma, el estudiante es capaz de comprender la relación que existe entre la proporcionalidad y la definición básica o intuitiva de probabilidad, y la utiliza para validar conjeturas en torno a las actividades de experimentación y simulación. Se espera luego de haber desarrollado todos los contenidos, que los estudiantes posean competencias para calcular las probabilidades asociadas a eventos aleatorios simples y compuestos, haciendo uso de distintos métodos de representación como: diagramas, tablas, gráficos y etc.
- Con relación a los grados de 9° a 12°, el NCTM (2000) propone que los estudiantes debe de estar en la capacidad de significar en contexto los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad; de igual manera deben son capaces de simular eventos aleatorios sencillos, calculando e interpretando conceptos probabilísticos como valor esperado, probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes, probabilidad compuesta, etc.

Proyecto GAISE

El proyecto GAISE (2005) surge en el año 2005 con el objetivo de contribuir a una "alfabetización estadística" en estudiantes próximos a graduarse (K-12) y para grupos de estudiantes matriculados en curso preuniversitarios. Específicamente, el Proyecto GAISE propone reexaminar y revisar el curso de estadística y probabilidad, con el fin de contribuir al sus procesos de enseñanza. Para lograr este objetivo, se brinda una serie de recomendaciones metodológicas y conceptuales sobre la manera adecuada de propiciar el conocimiento y aplicación de la estadística y probabilidad en problemas de la vida cotidiana permeados por el azar y la incertidumbre (Franklin y Cols, 2007).

Para cumplir este objetivo, Franklin y Cols (2005) establecieron directrices claras sobre la manera en que se debe enseñar estadística. Primeramente distinguieron dos pilares, sobre los cuales se pueden agrupar las directrices, estos pilares son: el reconocimiento de la variabilidad y la cuantificación y explicación de la variabilidad. En el primer pilar se organizan todos los estándares que guardan relación con el reconocimiento de las variables de naturaleza aleatoria, ya sea la experimentación, simulación, sistematización de los datos. Es importante aclarar que es vital la implementación de este tipo de actividades en el aula de clases, dado que el reconocimiento de la variabilidad es la esencia de la estadística y probabilidad como disciplina de estudio. Con respecto al segundo pilar, es fundamental que el estudiante comprenda que la variabilidad puede ser medida y explicada, para llevar a cabo esto se toman en consideración el aula conceptos y objetos asociados a la teoría de la probabilidad y estadística (medidas de tendencia central, medidas de dispersión, modelos matemáticos paramétricos, distribuciones de probabilidad), esto permitirá a los estudiantes conjeturar sobre los comportamientos del fenómeno aleatorio (Guerrero, 2015).

Como anteriormente se había mencionado, el Proyecto GAISE busca revisar y reexaminar el curso de estadística, esto con el propósito de propiciar la alfabetización estadística en estudiantes de los niveles K12 y cursos pre-universitarios. Para lograr lo anterior, este proyecto emite las siguientes recomendaciones: "

- Los estudiantes deben entender por qué:
    - La variabilidad es natural y también predictible y cuantificable.
    - La muestra aleatoria en encuestas y experimentos da resultados que pueden ser extendidos a la población de la cual fueron tomados.
    - La asignación aleatoria en experimentos comparativos permite extraer conclusiones de causa y efecto y asociación no es sinónimo de casualidad.
    - La significación estadística no necesariamente implica importancia práctica, especialmente para estudios con muestras grandes.
    - Encontrar diferencias o relación no significativas estadísticamente no necesariamente significa que haya diferencia o relación en la población, especialmente para estudios con muestras pequeñas.
- Los estudiantes deben reconocer:
    - Las fuentes usuales de sesgos en encuestas y experimentos.
    - Cómo determinar la población a la que los resultados de inferencia estadística pueden ser extendidos, dependiendo de cómo se recogieron los datos.
    - Cómo determinar cuándo una inferencia de causa y efecto puede ser deducida de una asociación, dependiendo de cómo se recogieron los datos (por ejemplo, el diseño de un estudio).

- Que palabras, tales como “normal”, “aleatorio” y “correlación” tienen significados específicos en estadística que pueden ser diferentes al uso común.

- Los estudiantes deben entender las ideas básicas de la inferencia estadística:
    - El concepto de distribución muestral y cómo aplicarlo en la inferencia estadística basada en muestra de datos (incluyendo la idea de error típico).
    - El concepto de significación estadística incluyendo nivel de significación y p-valor.
    - El concepto de intervalo de confianza, incluyendo la interpretación de nivel de confianza y margen de error.
- Finalmente, los estudiantes deben saber:
    - Cómo interpretar resultados estadísticos en el contexto.
    - Cómo criticar/interpretar noticias y artículos periodísticos.

” (Tomado de Guerrero, 2015, p. 16-17)

En conclusión, la descripción y comparación del NCTM (2000) y el Proyecto GAISE permite afirmar que el currículo de matemáticas en Colombia posee múltiples vacíos en los objetivos, herramientas y procedimientos utilizados para enseñar estadística y probabilidad. Principalmente resaltamos la importancia de establecer criterios claros de evaluación. los cuales permitan al docente enriquecer y sacar un mayor provecho a los procesos de evaluación; así mismo, la importancia de la delimitación de los contenidos y objetivos en currículos internacionales permite inferir que en Colombia el currículo de matemáticas se hace de manera segmentada y sin relación alguna con otras disciplinas de estudio, dejando de lado elementos fundamentales como lo son la experimentación, la cultura estadística, la estadística por proyectos y la resolución de problemas relativos al azar y la aleatoriedad.

4.3 CONCLUSIONES

A lo largo de los dos apartados se ha intentado describir, analizar y comparar el currículo de matemáticas, en particular, contenidos de estadística y probabilidad propuesto por el MEN en Colombia, con respecto a currículos y proyectos internacionales como lo son la ESO, NCTM y Proyecto GAISE, esto con el fin de resaltar, a manera de resultados, los elementos metodológicos y conceptuales necesarios para la enseñanza de la Esperanza Matemática en la Educación Básica y Media en Colombia. Específicamente, para éste cuarto capítulo se tenía como objetivo específico:

- *Describir los elementos que posibilitan la aparición de la esperanza matemática en el currículo nacional y compararlo con algunos referentes internacionales como: Proyecto GAISE, NCTM y ESO.*

Para lo cual, se puede afirmar que:

- La comparación entre la perspectiva nacional e internacional ha permitido afirmar que la delimitación de contextos aleatorios significativos en el aula de clases durante la enseñanza de la estadística y probabilidad es fundamental en el desarrollo del razonamiento estadístico en estudiantes. Específicamente se ha encontrado en recomendaciones efectuadas por el Proyecto GAISE, que la introducción del contexto de los juegos equitativos potencia la significación de la estadística y probabilidad en estudiantes, así como contribuye a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

- Resulta indispensable para el desarrollo y evolución del currículo de matemáticas en Colombia que el MEN diseñe y establezca contenidos mínimos asociados para la enseñanza de la estadística y probabilidad. En particular, se resalta la importancia de introducir estándares y contenidos relacionados con la esperanza matemática, dado que actualmente el currículo de matemáticas no toma este concepto probabilístico en consideración. A partir de la indagación de contenidos y recomendaciones hechas por ESO, NCTM y Proyecto GAISE., se proponen los siguientes contenidos para introducción de la Esperanza Matemática en el aula de clases:
    1. El estudiante reconoce e interpreta la Esperanza Matemática como una medida de centralización de eventos aleatorios.
    2. El estudiante reconoce y establece la equitatividad de un juego de azar desfavorable, ya sea utilizando razonamientos proporcionales inductivos o utilizando la definición formal de Esperanza Matemática.
- Resulta importante y significativo para el cumplimiento de los estándares curriculares en matemáticas y el desarrollo del pensamiento aleatorio y sistemas de datos en estudiantes, que el MEN delimite y establezca criterios básicos para la evaluación en estadística y probabilidad. En particular, para la enseñanza de la esperanza matemáticas se resaltan tres criterios básicos de evaluación:

1. Identifica cuándo un juego de azar es equitativo;
2. Modifica un juego de azar desfavorable, de tal manera que este nuevo juego sea equitativo para todos los apostadores;

3. Utiliza razonamientos proporcionales y probabilísticos para estimar la ganancia promedio de un apostador, luego de un número indeterminado de apuestas.

CAPÍTULO V: PERSPECTIVA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA

En este capítulo se describen aquellos elementos didácticos que guardan relación con la enseñanza de la Esperanza Matemáticas asociada a los juegos equitativos. Inicialmente, se presenta el diseño y análisis a priori del instrumento de investigación titulado "Evaluación de conocimientos sobre esperanza matemática y juegos equitativos", el cual va dirigido a estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle. Posteriormente, se presentan, a modo de síntesis, los resultados obtenidos luego de la aplicación de la prueba, en dichos resultados se explicitan los criterios de calificación de cada pregunta, así como las respuestas correctas, parcialmente-correctas e incorrectas más frecuentes de los estudiantes. Luego, se presenta el análisis de los resultados, el cual busca delimitar todos aquellos elementos didácticos que se pueden extraer a partir de la recolección de los resultados del instrumento, entre estos elementos se encuentra delimitar algunos errores, dificultades y sesgos asociados con la enseñanza y el aprendizaje de la Esperanza Matemática. Por último, se presentan la descripción de las categorías de conocimiento necesarias para determinar el Conocimiento Didáctico del Contenido en relación con la enseñanza de la esperanza matemática, así como la delimitación y caracterización de cada uno de los elementos que componen las categorías de conocimiento.

Finalmente, se presentan las conclusiones encontradas luego de delimitar las categorías del Conocimiento Didáctico del Contenido y de diseñar, aplicar y analizar el instrumento de investigación. Cabe aclarar que las conclusiones encontradas se establecen a partir del tercer objetivo específico planteado en el Capítulo 1 (Ver apartado 1.2) y también del marco didáctico presentado en el Capítulo 2 (Ver apartado 2.3)

5.1 DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN:

Para la variable didáctica, la evaluación de conocimientos a profesores en ejercicio se ha llevado a cabo a partir de la aplicación de un cuestionario de investigación, el cual se encuentra validado por 2 investigadores del Instituto de Educación y Pedagogía. Es importante aclarar que cada una de las situaciones y preguntas planteadas en el instrumento son adaptaciones tomadas de instrumentos de investigación de maestría y doctorado, por lo cual cada una de las respuestas han sido estudiadas, de manera tal que permite cumplir el objetivo inicial de la aplicación de la prueba, el cual es:

- Evaluar conocimientos sobre juegos equitativos a profesores en ejercicio, con el fin de identificar algunos elementos didácticos importantes para la enseñanza de la Esperanza Matemática en el aula de clases.

A continuación se presenta el análisis de cada uno de los problemas propuestos, las soluciones correctas e incorrectas, así como las respuestas esperadas por parte de los profesores.

Análisis a priori situación 1:

Situación 1: Un auto está dispuesto a estacionarse, este está colocado ante un laberinto de aparcamientos que empieza a explorar. En cada cruce, el auto tiene tantas posibilidades de irse por un camino u otro, pero no puede regresar por un mismo camino que ya recorrió. En total hay 8 caminos diferentes para estacionar varios autos en cada uno (ver Ilustración 1).

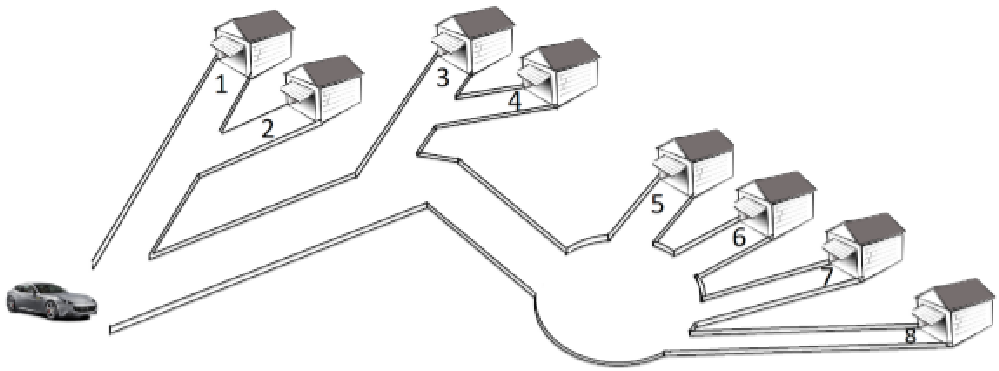


Ilustración 1

A partir de la situación anterior responde:

a) ¿En qué estacionamiento o estacionamientos tiene el auto más posibilidades de estacionarse? ¿Por qué?

b) Si suponemos que hay 32 autos en fila dispuestos a estacionarse, ¿cuántos autos piensas que acabarán en los estacionamientos #1 o #2? ¿Por qué?

Es importante resaltar que el Problema #1 surge como una adaptación a otro utilizado en investigaciones sobre razonamientos probabilísticos en estudiantes de bachillerato (Guerrero, 2016) y con futuros profesores de educación básica (Gómez, 2014). Precisamente, en las investigaciones mencionadas anteriormente las preguntas propuestas se asemejan -en cierto modo- a las planteadas en este cuestionario, sin embargo éstas han sufrido algunos cambios y precisiones, esto con el fin de direccionar los argumentos de los estudiantes al concepto de esperanza matemática. A continuación se presenta las soluciones correctas a cada pregunta, así como las posibles respuestas de los estudiantes.

Respuesta al primer interrogante:

En esta situación de experimento, en donde el auto posee múltiples opciones para estacionarse se tiene que en un primer momento del experimento, se produce una bipartición de las probabilidades de seguir por cada camino, es decir, el auto puede ir tanto por la izquierda como por la derecha, con iguales probabilidades $\frac{1}{2}$. Seguidamente, como el auto no posee preferencias sobre la ruta, en cada intersección se aplica el principio de la indiferencia, obteniendo entonces la probabilidad para cada camino posible es de $\frac{1}{n}$, en donde n es el número de particiones del camino. En Gómez (2014) se presenta un diagrama matricial de árbol, en donde se asignan las probabilidades de seguir cada camino (Ver Ilustración 4).

Probabilidad de estacionar en cada uno de los lugares

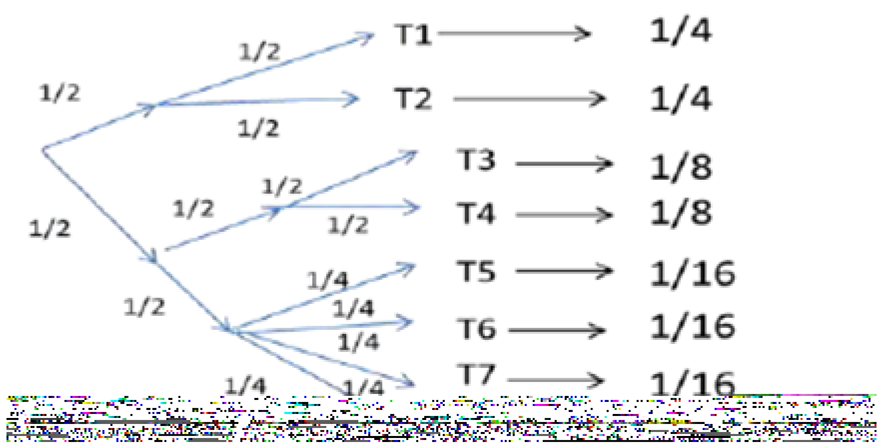


Ilustración 4.

(Tomado de Gómez, 2014, p. 182)

El auto puede continuar su trayecto a la izquierda o la derecha en cada experimento, para encontrar las probabilidades de estacionarse en cada uno de los lugares disponibles basta con aplicar el principio de la multiplicación, obteniendo entonces la probabilidad de cada suceso.

Ejemplo, el caso en donde el auto continuara en la ruta hacia el estacionamiento #4, las probabilidades que ocurran sería:

$$p(x = 4) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Análogamente se realiza con cada uno de los ocho estacionamientos disponibles, por tanto se obtiene que la distribución de probabilidades para esta situación está dada en la Tabla 9:

Tabla 9: Probabilidades de estacionar para la situación.

Número del estacionamiento	Probabilidades de suceso
1	1/4
2	1/4
3	1/8
4	1/8
5	1/16
6	1/16
7	1/16
8	1/16

Tabla 9

De acuerdo al análisis de la situación 1, se pueden prever algunas de las respuestas de los estudiantes (Guerrero, 2016; Gómez, 2015), las cuales se pueden catalogar entre correctas e incorrectas. A continuación las respuestas previstas para la primera pregunta son:

Respuestas correctas:

- El estudiante señala que el estacionamiento 1 y el estacionamiento 2 son más probables, su argumento está basado en el principio de la multiplicación y la comparación de las probabilidades.

- El estudiante manifiesta que el estacionamiento 1 y el estacionamiento 2 son más probables, debido a que el número de intersecciones o caminos los cuales debe de recorrer el auto son muchos menores con respecto a los otros estacionamientos (3, 4, 5, 6, 7,8). Si bien, esta respuesta carece -en cierto modo- de un componente teórico, es importante señalar que el estudiante reconoce que hecho de que haya más opciones asociadas a cada estacionamiento influye directamente en la probabilidad de estacionarse.

Respuestas Incorrectas:

- El alumno no contempla que el problema posee dos resultados, es decir, manifiesta que solo hay una trampa probable (1 o 2) y no ambas al mismo tiempo.
- El estudiante manifiesta que todos los resultados sin igualmente probables; lo que se supone como un sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; citado en Guerrero, 2015), Este tipo de respuesta se cataloga como una de las más habituales según Gómez (2014), debido a que asocian la distancia del origen con cada estacionamiento y omiten el número de intersecciones o cruces.
- El estudiante trae a colación factores externos ajenos a la situación planteada Ej. Ancho de los caminos, tráfico, número de autos por estacionamiento, etc.
- No responde.

Respuesta al segundo interrogante:

Esta pregunta aporta nuevos elementos de estudio, precisamente agrega una nueva variable aleatoria la cual conlleva la necesidad de utilizar la esperanza matemática para obtener el número de autos que le corresponden en un caso hipotético a cada estacionamiento. La esperanza matemática asociada a la situación sería de la forma:

$$E(X) = n\,P(1\ \cup 2) = 32\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 32\,\frac{1}{2} = 16$$

Cabe resaltar, que los estudiantes pueden llegar a la solución correcta utilizando razonamientos intuitivos, debido que al momento de efectuar el primer experimento (primer cruce) se puede inferir que la mitad de los autos irán hacia la derecha y la otra mitad irá hacia la izquierda, dando como resultado 16 autos para los estacionamientos 1 o 2. A continuación las respuestas previstas para el interrogante 2.

Respuesta correcta:

- El estudiante hace uso de uno de los dos métodos mencionados anteriormente, calcula por medio de la esperanza matemática el número total de autos que se pueden estacionar en los lugares 1 y 2 o hacen uso de su razonamiento intuitivo para inferir el número de carros que le corresponde a cada estacionamiento.

Respuesta Incorrecta:

- El estudiante deja a un lado el número de autos previstos a parquear y realiza un diagrama de árbol asociando a cada estacionamiento un número posible de autos. Si bien, en un caso particular este método puede resultar correcto, a decir verdad los argumentos se alejan del sentido de equitatividad en un suceso aleatorio.

Análisis Situación 2:

Situación 2: Daniel, un hincha fiel del Deportivo Cali y Antonio, un fanático del América de Cali, están apostando $10.000 cada uno, en un partido de fútbol entre sus equipos; la condición para ganar la apuesta es que uno de los dos equipos llegue primero a 3 goles. Desafortunadamente, el partido debe detenerse por fuertes lluvias, con un marcador de 2:1 a favor del América de Cali.

Sin embargo, luego de detener el partido Antonio y Daniel conversan sobre la manera correcta en que deben de repartir la apuesta. Por un lado, Daniel afirma que el partido no terminó; por ello ninguno de los participantes debe recibir alguna ventaja monetaria sobre su oponente. Por otro lado, Antonio afirma que, aunque el partido no terminó, el factor de los goles convertidos incide -en cierto modo- en la apuesta, dado que el América de Cali está 1 gol más cerca de convertir los 3 goles que con respecto el Deportivo Cali. Por esta razón, Antonio afirma que es necesario repartir la apuesta tomando en consideración los goles convertidos.

Es importante aclarar, que el Problema 2 surge como una adaptación a un problema utilizado por Díaz y Arbeláez (2010) en un Test de Esperanza Matemática propuesto a estudiantes de programa de Estadística en la Universidad del Valle en el curso de Historia de la Estadística. Específicamente, este test de conocimientos se enmarca en la historia y epistemología de la probabilidad y la esperanza matemática para elaborar una prueba de conocimientos, por esta razón resulta relevante para este trabajo de grado tomar este referente para la construcción del instrumento.

El problema adaptado, surge inicialmente como una variación del problema del reparto, propuesto inicialmente por Luca Pacioli en el año 1494 en su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita.* De igual manera, cada una de las preguntas planteadas en el problema ha surgido a partir de las reflexiones y/o preguntas encontradas en el test de conocimientos. A pesar de ello, este problema ha sufrido algunos cambios leves con el objetivo de estudiar los tipos de argumentación de los estudiantes a la hora de justificar cuándo un juego de azar es equitativo.

Respuesta al primer interrogante:

En este interrogante se requiere que el estudiante establezca conjeturas sobre la manera “correcta” de repartir una apuesta interrumpida, para esto es importante que reconozca principalmente que el desenlace futuro de esta situación está permeado por el azar, por esta razón su argumento debe de estar en términos probabilísticos y no aritméticos, como se pensaría comúnmente. Se espera entonces que el estudiante haga uso de su intuición y experiencias pasadas para afirmar que el factor “goles convertidos” es una variable importante en la situación, y la cual afecta directamente la manera en que se debe de repartir la apuesta.

De acuerdo con el análisis previo del primer interrogante, se pueden prever algunas de las respuestas de los estudiantes, las cuales se catalogan entre correctas e incorrectas. A continuación las respuestas previstas para la primera pregunta de la situación 2 son:

Respuestas Correctas:

- El estudiante afirma que el factor goles repercute directa en la manera de repartir la apuesta, justificando que en caso de que el partido continúe sería el conjunto América de Cali quien tendría más chances de marcar primero los tres coles, dado que solo le falta 1 gol con respecto al Deportivo Cali que le hacen falta 2 goles.

  Por otro lado, las ventajas tiene tomar en consideración los goles en el reparto son:

1. Toman en consideración lo ocurrido con el enfrentamiento, lo cual da un parte de tranquilidad al apostador del equipo que lleva la ventaja.

2. Deja al azar el desenlace futuro del enfrentamiento entre los equipos, dando chances a ambos equipos de ganar. Esto repercute considerablemente en la manera noción de justicia en el reparto de la apuesta, puesto que se dan posibilidades "justas" a cada uno de los equipos de acuerdo a su rendimiento previo.

En cambio, la desventaja que trae no tomar en cuenta los goles convertidos es:

1. Inequidad en el reparto de la apuesta por ambas partes, debido a que el equipo América de Cali marcó un número mayor de goles, con respecto al otro equipo durante el tiempo que jugaron. Por tanto, fácilmente Antonio al dar por finalizado el encuentro exige que se le reconozca monetariamente la ventaja en el marcador.

Respuesta Incorrecta:

- El estudiante manifiesta que no es necesario tomar en consideración el número de goles marcados hasta durante el encuentro, y justifica que la manera correcta de repartir la apuesta es proporcionando a cada jugador la cantidad de dinero inicial que tenía. Si bien, los argumentos de Daniel pueden haber estado influenciado por un sentido intuitivo de justicia, claramente se puede justificar que los goles convertidos y lo que podría pasar si el encuentro "hipotéticamente" continuar. En definitiva, éstos son factores que inciden a la hora de repartir la apuesta, por tanto el argumento de

Daniel no cumple con las expectativas de solución de acuerdo a la situación planteada.

- No responde.

Respuesta al segundo interrogante:

En el segundo interrogante de la situación 2, en concordancia con el interrogante anterior, se requiere que el estudiante efectúe un método de solución para el reparto de la apuesta. Cabe aclarar, que el hecho de tomar en consideración el número de goles para el reparto de la apuesta no significa que la respuesta sea catalogada como correcta. Para ello, es necesario tomar en consideración otros factores de la situación como lo son: número de anotaciones que le falta a cada equipo para llegar a los 3 goles, el valor de la apuesta, número de apostadores, etc.

En esta situación, en existen múltiples formas de repartir la apuesta para ambos equipos. Sin embargo, solo una forma de solución es correcta para establecer la proporción exacta que debe obtener cada apostador de acuerdo a sus posibilidades de ganar, para ello es necesario que el estudiante reconozca inicialmente el carácter inherente de la probabilidad en la situación y con ello modelar “hipotéticamente” la ocurrencia de un evento aleatorio. A continuación en la Ilustración X se presenta un diagrama matricial de árbol, en donde se asignan las probabilidades de anotar cada gol.

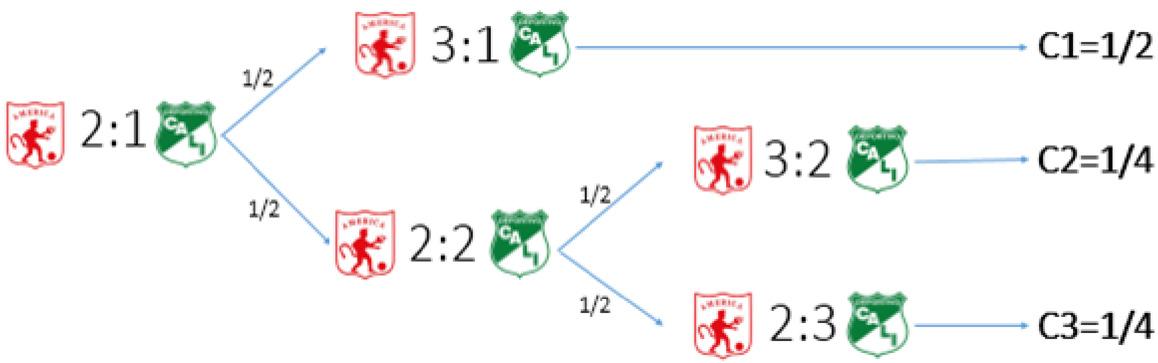


Ilustración 5

Partiendo del hecho de que la apuesta acabará cuando uno de los dos equipos convierta los 3 goles y que las probabilidades de anotar un gol para cada equipo es de $\frac{1}{2}$, se tiene que por el principio de la suma y multiplicación de eventos aleatorios independientes que las probabilidades de cada apostador son:

- La probabilidad de que el América de Cali convierta primero los 3 goles es de $\frac{3}{4}$, en estos casos, el ganador de la apuesta sería Antonio.

- La probabilidad de que el Deportivo Cali convierta primero los 3 goles es de $\frac{1}{4}$, en este caso el ganador de la apuesta sería Daniel.

Entonces, la apuesta queda repartida de la siguiente manera: la proporción que le corresponde a Antonio de la apuesta es 3/4 del total de la apuesta, es decir, $15.000 (Ver 1). Mientras que a Daniel le corresponde 1/4 del total de la apuesta, es decir, $5.000 (Ver 2).

$$20.000 * \frac{3}{4} = 15.000 \qquad (1)$$

$$20.000 * \frac{1}{4} = 5.000 \qquad (2)$$

De acuerdo al análisis de la situación 2, se pueden prever algunas de las respuestas de los estudiantes, las cuales se pueden catalogar entre correctas e incorrectas. A continuación las respuestas previstas para la segunda pregunta son:

Respuesta Correcta:

- El estudiante argumenta utilizando métodos probabilísticos que la apuesta debe de repartirse de la siguiente manera: $15.000 para Antonio y $5.000 para Daniel. Se espera en esta respuesta que los argumentos de los estudiantes sean semejantes a los utilizados por Daniel Bernoulli, Pascal o Fermat.

Respuestas Incorrectas:

- No toma en consideración los goles convertidos durante el partido, y argumenta que se debe de repartir en partes iguales la apuesta. Este tipo de respuesta evidencia que el estudiante posee un sesgo de equiprobabilidad (Guerrero, 2015), debido a que afirma que todos los eventos aleatorios son poseen iguales probabilidades de ocurrencia.

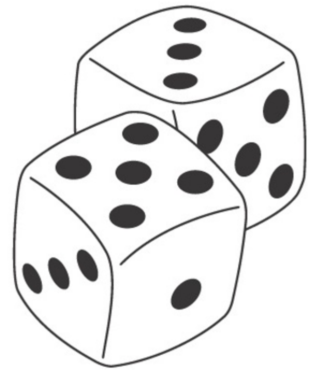
- Toma en consideración los goles convertidos o faltantes, sin embargo, utiliza métodos aritméticos para repartir la apuesta. Este tipo de respuesta se asemeja a las respuestas proporcionadas por Luca Pacioli y Niccolo Tartaglia, debido a que excluye toda variable aleatoria que permea la situación.

- No responde.

ANÁLISIS SITUACIÓN #3:

Situación 3: Alejandra y Amparo son estudiantes muy curiosas. Cansadas de jugar siempre lo mismo, han decidido poner en uso su imaginación para inventar un juego que consiste en lanzar dos dados. Para jugar deben de tener en cuenta las siguientes reglas:

- Calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si el resultado es 0, 1 o 2, entonces Alejandra le cobra a Amparo $1.000
- En cambio, si el resultado es 3, 4 o 5, Amparo es quien le cobra a Alejandra $1.000



A partir de la situación anterior responde:

1. Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.
2. En caso de que su respuesta anterior sea negativa, ¿cuál sería la manera de modificar el juego para volverlo justo?
3. Si usted decidiera jugar con las condiciones iniciales de Alejandra y Amparo, luego de n-partidas ¿cuánto se esperaría que ganara o perdiera cada una de las participantes?

Este problema ha sido tomado y modificado de la Tesis Doctoral elaborada por Mohamed (2012), la cual tiene por título "*Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad".* Específicamente en este problema se requiere que los estudiantes utilicen sus intuiciones para expresar qué entienden por juego equitativo, también que hagan uso de diversos tipos de razonamientos (proporcional inverso y combinatorio) para encontrar la manera de modificar el juego de modo que los participantes luego de jugar en repetidas ocasiones sus ganancias no aumentan ni disminuyen. A continuación se presenta la respuesta correcta a cada pregunta, así como las respuestas esperadas de los estudiantes.

Respuesta al primer interrogante:

La primera pregunta es sobre si el juego diseñado por Alejandra y Amparo es justo, la respuesta correcta es que el juego no es equitativo, debido se espera que gane en 24 de cada

36 veces que lance los dados, es decir $\frac{2}{3}$ de las tiradas, mientras que Amparo se espera que gane en 12 de cada 36 lanzamientos, es decir $\frac{1}{3}$ de todos los lances. El método que se espera que el estudiante realice es un recuento de todos los casos posibles en donde el resultado de la resta sería 1, 2, 3, 4 o 5.

Sea "x" el resultado de la resta entre ambos dados, se tiene entonces que:

- $X = 0: 6-6, 5-5, 4-4, 3-3, 2-2, 1-1.$
- $X = 1: 6-5, 5-6, 5-4, 4-5, 4-3, 3-4, 3-2, 2-3, 2-1, 1-2.$
- $X = 2: 6-4, 4-6, 5-3, 3-5, 4-2, 2-4, 3-1, 1-3.$
- $X = 3: 6-3, 3-6, 5-2, 2-5, 4-1, 1-4.$
- $X = 4: 6-2, 2-6, 5-1, 1-5.$
- $X = 5: 6-1, 1-6.$

De igual manera, por principio de la multiplicación en eventos aleatorios independientes, se tiene que el espacio muestral para el lanzamiento de dos dados de seis caras es:

$$6 * 6 = 36$$

Por lo cual, las probabilidades asignadas para cada uno de los resultados del lanzamiento de los dos dados son:

- $P(X = 0) = \frac{6}{36}$
- $P(X = 1) = \frac{10}{36}$
- $P(X = 2) = \frac{8}{36}$

- $P(X = 3) = \frac{6}{36}$
- $P(X = 4) = \frac{4}{36}$
- $P(X = 5) = \frac{2}{36}$

Entonces, adicionando las probabilidades respectivas de cada resultado a las opciones de ganar la apuesta de Alejandra y Amparo se tiene que:

- Alejandra: La probabilidad que al lanzar dos dados, restarlos entre sí y que se obtenga como resultado 0, 1 o 2, es de $\frac{24}{36}$.
- Amparo: La probabilidad que al lanzar dos dados, restarlos entre sí y que se obtenga como resultado 3, 4 o 5, es de $\frac{12}{36}$.

Por tanto, se espera que el estudiante catalogue el juego inventado por Alejandra y Amparo como injusto, puesto que al tener la misma recompensa cada jugador, las probabilidades asignadas para cada uno son desiguales. Cabe aclarar, aquellas respuestas que no argumentan -ampliamente- el por qué el juego inventado por Amparo y Alejandra es injusto serán catalogadas como incorrectas.

Respuesta al segundo interrogante:

Para el segundo interrogante se espera que el estudiante haga uso de la Esperanza Matemática o un razonamiento proporcional inverso para la modificación del juego. La respuesta a este interrogante se puede dar por dos vertientes, la primera es modificar el valor de la apuesta a uno de los dos jugadores de acuerdo a las probabilidades de ganar de cada jugador y el premio que obtiene su adversario. La segunda consiste en modificar las opciones de ganar para cada jugador, de tal manera que la probabilidad de cada jugador sea la misma, así como el premio que obtenga. A continuación se presentan tres métodos de solución correctos para la situación:

Método 1: Haciendo uso de la Esperanza Matemática

Partiendo del hecho que cada que Alejandra gane, Amparo debe de pagar 1000, y además que las probabilidades de ganar al lanzar dos dados es $\frac{24}{36}$ para Alejandra y $\frac{12}{36}$ para Amparo. El valor de la apuesta "justo" que amparo debe ganar al lanzar los dados es:

$$E(a = x) = x * (\frac{12}{36}) - (1000) * (\frac{24}{36})$$

$$x * (\frac{12}{36}) - (1000) * (\frac{24}{36}) = 0$$

$$\frac{12x}{36} = \frac{24.000}{36}$$

$$12x = 24.000$$

$$x = 2.000$$

Por tanto, haciendo uso de la Esperanza Matemática la ganancia esperada (por tiro) de Amparo es de \$2.000 y la de Alejandra es de \$1.000, quedando el juego modificado de la siguiente manera:

- Si el resultado de restar los dados es 0,1 o 2 Alejandra le reclama a Amparo \$1.000

- Si el resultado es 3, 4 o 5 Amparo le reclama a Alejandra 2.000.

Método 2: Razonamiento Proporcional Inverso

Tomando en consideración de que debe haber una proporción igual de ganancias con respecto a las probabilidades de ganar para ambos apostadores, se hace uso explícito del razonamiento proporcional para estimar el valor justo que debe de ganar un jugador. Para ello se establece lo siguiente:

- a = la probabilidad de ganancia del jugador 1 (Alejandra)
- b = la probabilidad de ganancia del jugador 2 (Amparo)
- c = lo que debe de pagar el jugador 1, en caso de que la apuesta del jugador 2 salga favorecida.
- d = lo que debe de pagar el jugador 2, en caso de que la apuesta del jugador 1 salga favorecida.

A partir de lo anterior se tiene que:

Ahora, el objetivo principal es buscar el valor correcto que debe de obtener Amparo al salir favorecida en su apuesta, lo cual se obtiene reemplazando la información de la situación y despejando la variable incógnita.

Por tanto, Alejandra debe de pagar $2.000 cada vez que Amparo gane una ronda, en cambio, Amparo debe de pagar $1.000 cada vez que Alejandra gane.

Método 3: Agrupación de Probabilidades

En este método toma en consideración únicamente la distribución de probabilidad para los resultados de los dados, con el fin de encontrar un punto de equilibrio para la asignación de probabilidades de la situación. Se parte del hecho de que hay 36 formas diferentes de caer dos dados, por lo cual se busca proporcionar 18 posibilidades a cada jugador para equilibrar el juego, es decir, que cada jugador tenga iguales probabilidades de ganar.

Para lograr esto, se hace uso de los cálculos efectuados para la solución del primer interrogante de la situación 3, en donde se halla la probabilidad asociada a cada uno de los resultados de efectuar la diferencia entre el resultado mayor y el menor al momento de tirar dos dados. Las probabilidades asignadas para cada uno de los resultados del lanzamiento de los dos dados son:

$$P(X=0) = \frac{6}{36};\ P(X=1) = \frac{10}{36};\ P(X=2) = \frac{8}{36};$$

$$P(X=3) = \frac{6}{36};\ P(X=4) = \frac{4}{36};\ P(X=5) = \frac{2}{36}$$

A partir de esta información, se puede asignar grupos de resultados los cuales tienen iguales probabilidades de ocurrencia (18/36). A continuación se presenta todas las posibles combinaciones para que el juego inventado por Alejandra y Amparo sea justo:

- (0, 1, 5) – (2, 3, 4)
- (1, 3, 5) – (2, 4, 6)
- (1, 2) – (0, 3, 4, 5)

En definitiva, la respuesta esperada por los estudiantes debe estar acorde a uno de los tres métodos presentados anteriormente, en caso contrario se cataloga su respuesta como Incorrecta.

Respuesta al tercer interrogante:

En esta situación, en donde se cuestiona sobre la ganancia o pérdida “hipotética” de un jugador, se requiere específicamente el uso de la Esperanza Matemática como método para calcular la ganancia promedio de los participantes luego de “n” rondas. Inicialmente se toma en consideración 2 elementos fundamentales: primero son las probabilidades de ganancia para cada jugador, y segundo los premios que se le asignan a cada participante. Luego, se procede a calcular la Esperanza Matemática de la situación, y se calcula la ganancia esperada de los jugadores luego de 10 rondas.

$$n * E(x = a) = (1000 * (\frac{2}{3}) - 1000 * (\frac{1}{3})$$

$$= n * (\frac{2.000}{3} - \frac{1.000}{3})$$

$$= 333\, n$$

Por tanto, se espera que los estudiantes concluyan que la ganancia esperada de Alejandra por cada ronda, es de $333 pesos, de igual manera se espera que expresen que Amparo pierde promedio de $333 por ronda. En los resultados de Guerrero (2015) y Mohamed (2012) amplían esta respuesta afirmando que es posible que los estudiantes emplean un razonamiento proporcional inverso para éste tipo de situaciones, lo cual constituye en un acercamiento intuitivo al concepto de Esperanza Matemática desde una perspectiva geométrica.

Por último se presenta la tipología de objetos matemáticos y estocásticos que están en juego en la solución de las tres situaciones propuestas en el instrumento de investigación ver Tabla 10 (Mohamed, 2012):

Tabla 10: Tipología de conceptos estocásticos involucrados en el instrumento de investigación.

		Situación		
	Problemas/Contenidos	1	2	3
Conceptos	Espacio Muestral	x	x	x
	Tipos de Sucesos	x	x	x
	Sucesos seguros y probables		x	
	Probabilidad Compuesta	x		
	Independencia de Eventos	x	x	x
	Juegos Equitativos		x	x
	Esperanza Matemática	x	x	x
Procedimientos	Cálculo Probabilístico Formal	x	x	x
	Comparación de Probabilidades	x		x
Lenguajes	Diagrama de árbol	x	x	
	Verbal	x	x	x
	Numérico	x	x	x
	Gráfico	x		x
	Simbólico (Tabla)			x
Argumentos	Razonamiento Formal	x	x	x
	Razonamiento Empírico	x	x	
Sesgos	Equiprobabilidad	x	x	x
	Dependencia de variables aleatorias	x		

5.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez aplicado el instrumento a los estudiantes de maestría, se recogen los resultados. Es importante aclarar que para cada una de las tres situaciones se establecieron tres tipos de respuestas: Correctas, Parcialmente-Correctas e Incorrectas. A continuación se presentan los criterios de calificación para cada situación y pregunta; de igual manera se hace una recolección de los diversos tipos respuestas proporcionados por los estudiantes

RESULTADOS SITUACIÓN 1

En particular, la situación #1 está compuesta por dos preguntas, las cuales buscan que el estudiante establezca y calcule las probabilidades de estacionar un auto, cuando está colocado ante diversas opciones de estacionarse. Los criterios de calificación de las preguntas A y B son:

- **Pregunta A:** Para esta pregunta, se han considerado correctas aquellas respuestas que comprenden que la situación tiene elementos aleatorios, también aquellas respuestas que calculan correctamente las probabilidades de cada uno de los estacionamientos disponibles; las preguntas no contestadas o que involucran elementos externos en la actividad son catalogadas como Incorrectas.
- **Pregunta B:** En esta pregunta, se consideran correctas respuestas que establezcan que es posible que 16 autos se estacionen en los aparcamientos 1 y 2. Por otro lado, se consideraron incorrectas aquellas respuestas que tomen en consideración factores externos, tales como: distancia entre el carro y el estacionamiento, cantidad de estacionamientos por caminos y cantidad de autos por estacionamiento; en este tipo

de respuesta el estudiante no comprende que la situación está permeada por el azar y la aleatoriedad.

A continuación se muestra la Ilustración 6, en la cual se encuentran consignados los resultados obtenidos para la Situación 1, en las preguntas A y B.

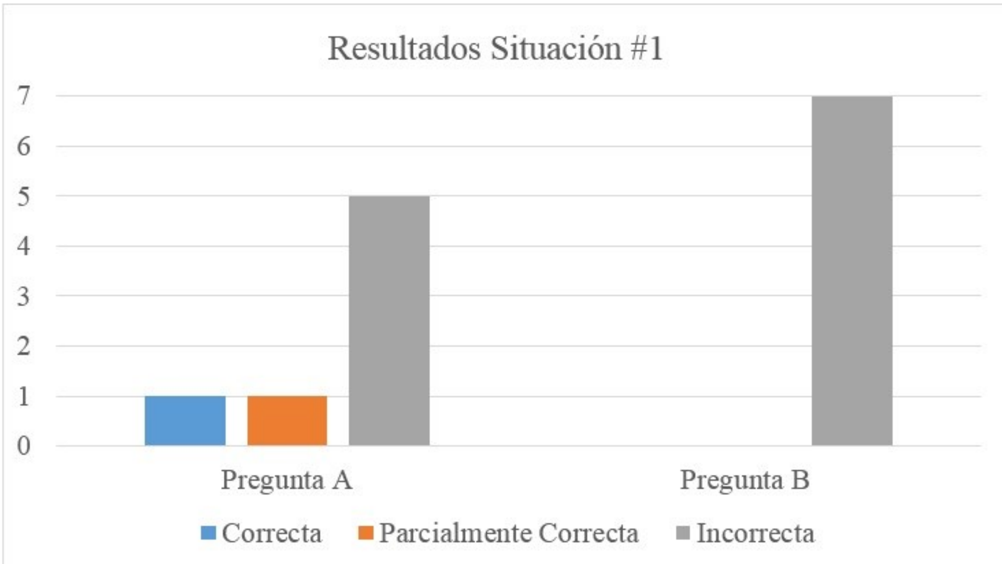


Ilustración 6

A partir de la recolección de los resultados se ha podido identificar que la mayoría de los estudiantes no respondió correctamente las preguntas #1 y #2. A continuación se presentan los diversos tipos de respuestas encontradas para las preguntas A y B:

Respuestas Pregunta A:

- **R1**: El estudiante manifiesta que todos los aparcamientos son igualmente probables, dado que estacionarse en el lugar #1 resulta igual que en el lugar #3 (Ver Ilustración 7).

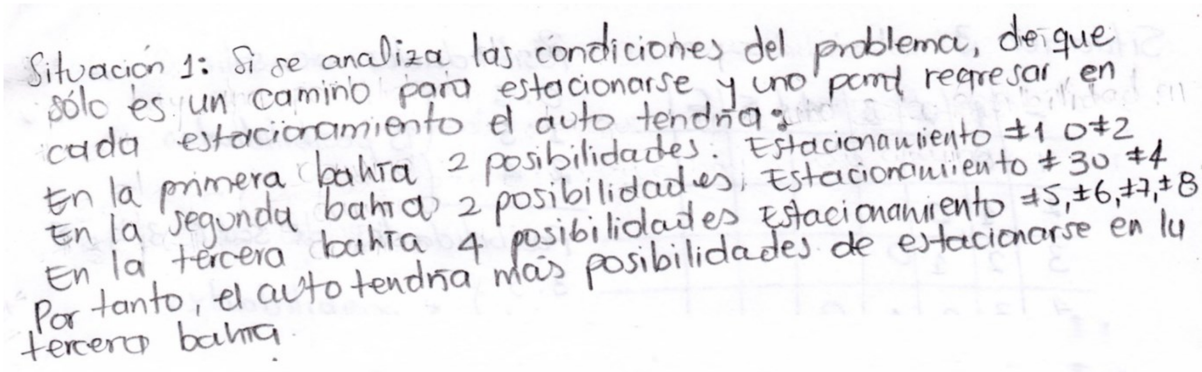
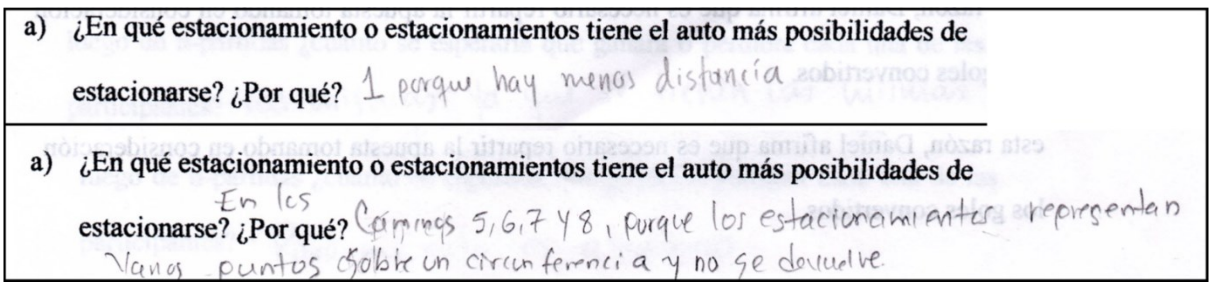

Situación 1: Si se analiza las condiciones del problema, de que sólo es un camino para estacionarse y uno para regresar en cada estacionamiento el auto tendría:
En la primera bahía 2 posibilidades: Estacionamiento #1 o #2
En la segunda bahía 2 posibilidades, Estacionamiento #3 o #4
En la tercera bahía 4 posibilidades Estacionamiento #5, #6, #7, #8
Por tanto, el auto tendría más posibilidades de estacionarse en la tercera bahía.

Ilustración 7

- **R2**: El estudiante trae a colación factores externos a la situación, tal como la distancia de los aparcamientos o puntos sobre una circunferencia (Ver Ilustración 8)


a) **¿En qué estacionamiento o estacionamientos tiene el auto más posibilidades de estacionarse? ¿Por qué?** 1 porque hay menos distancia

a) **¿En qué estacionamiento o estacionamientos tiene el auto más posibilidades de estacionarse? ¿Por qué?** En los Caminos 5, 6, 7 y 8, porque los estacionamientos representan varios puntos sobre un circunferencia y no se devuelve.

Ilustración 8

Respuestas Pregunta B:

- **R1**: El estudiante manifiesta que al haber 8 estacionamientos y 32 autos por aparcar, haciendo uso de regla de tres, se puede afirmar que en cada estacionamiento caben 4 autos; por tanto el número de autos que acabarán en los estacionamientos 1 o 2 serían 8 (Ver Ilustración 9).

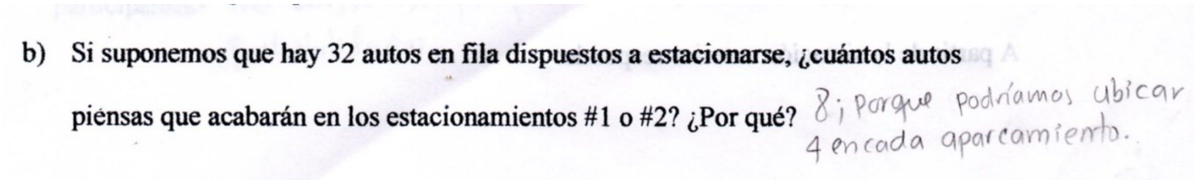

b) Si suponemos que hay 32 autos en fila dispuestos a estacionarse, ¿cuántos autos piensas que acabarán en los estacionamientos #1 o #2? ¿Por qué? 8; Porque podríamos ubicar 4 encada aparcamiento.

Ilustración 9

- **R2**: El estudiante afirma que solo cabe un auto en los estacionamientos 1 o 2 (Ver Ilustración 10).

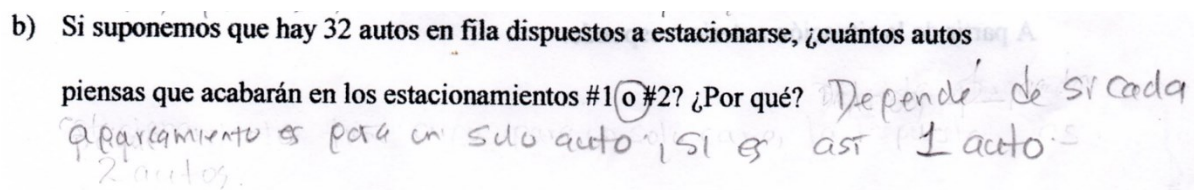

b) Si suponemos que hay 32 autos en fila dispuestos a estacionarse, ¿cuántos autos piensas que acabarán en los estacionamientos #1 o #2? ¿Por qué? Depende de si cada aparcamiento es para un solo auto, si es así 1 auto
2 autos.

Ilustración 10

RESULTADOS SITUACIÓN 2:

Esta situación está compuesta por dos preguntas, las cuales buscan que el estudiante reconozca y establezca los factores aleatorios que conlleva repartir la apuesta luego de haber interrumpido un suceso aleatorio. Del mismo modo, se espera que el estudiante establezca una manera “correcta” de repartir la apuesta para la situación planteada. Es importante resaltar, que este esta situación es una adaptación del “Problema del reparto”, el cual es un problema histórico de probabilidad que tardó más de 300 años en resolverse y fue abordado por distintos matemáticos célebres como Pascal, Fermat, Huygens, Cardano, entre otros. Los criterios de calificación de las Preguntas A y B son:

- **Pregunta A:** Para esta pregunta en particular, se han considerado correctas todas aquellas respuestas que consideran válido el argumento de Antonio, es decir, respuestas que tomen en consideración el factor goles en el reparto de la apuesta; por otro lado, se clasifica como incorrectas todas las respuestas que consideran válido el argumento de Daniel, es decir, aquellas respuestas que manifiestan la no necesidad de tomar en consideración el factor goles, dado que al interrumpir el juego cada uno de los participantes (Daniel y Antonio) deberían de recibir su apuesta inicial.

- **Pregunta B:** En esta pregunta consideramos correctos todas las respuestas que establezcan que Antonio debe de recibir, luego de interrumpido el juego, $\frac{2}{3}$ de la apuesta total; por otro lado, se consideran incorrectas todas aquellas respuestas que establezcan que el premio debe de repartirse en partes iguales para cada jugador.

A continuación se muestra la Ilustración 11, la cual muestra los resultados obtenidos para la Situación 2, en las Preguntas A y B.

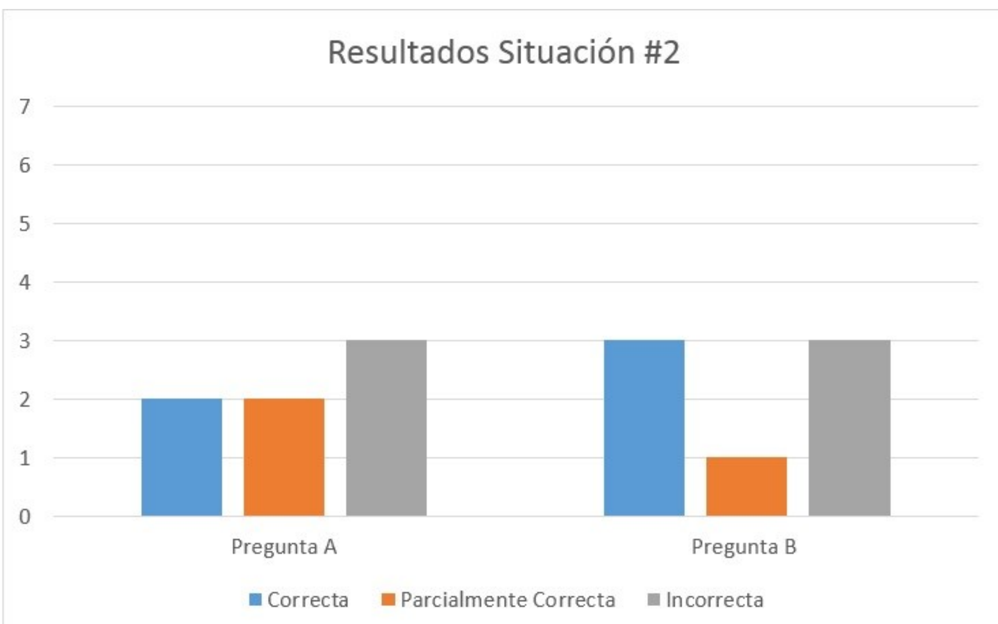
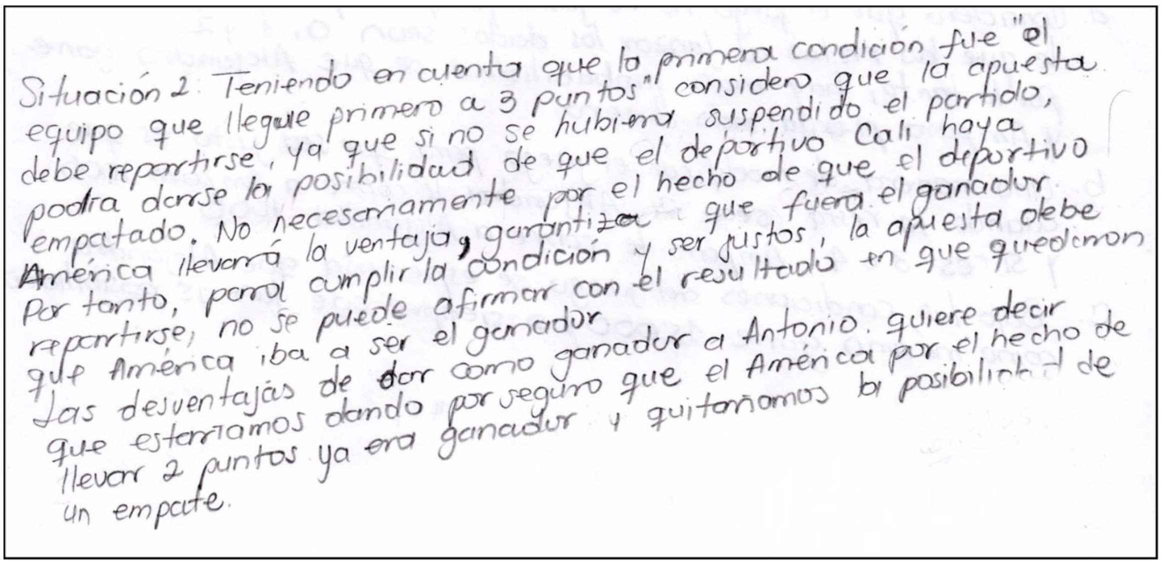


Ilustración 11

A partir de la recolección de los resultados se ha podido identificar que la mayoría de los estudiantes no respondió correctamente la pregunta A; en cambio, una la mayoría de los estudiantes respondió de manera correcta la pregunta B. A continuación, se presentan los diversos tipos de respuestas encontradas para las preguntas A y B:

Respuestas Pregunta A:

- **R1**: El estudiante manifiesta que el argumento de Antonio es el correcto, y justifica las ventajas y desventajas que conlleva tomar en consideración el factor goles durante el reparto de la apuesta (Ver Ilustración 12).

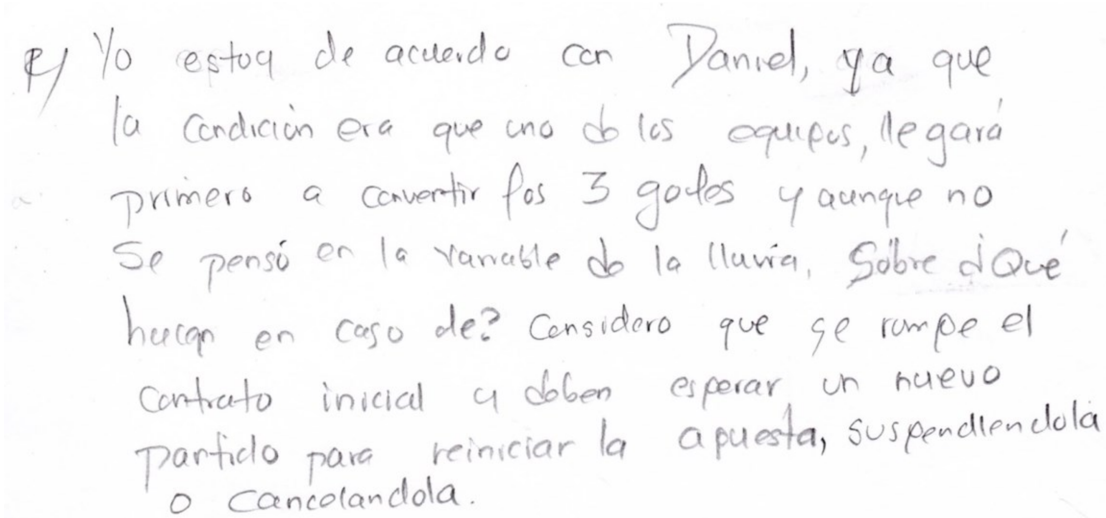


Situación 2: Teniendo en cuenta que la primera condición fue "el equipo que llegue primero a 3 puntos" considero que la apuesta debe repartirse, ya que si no se hubiera suspendido el partido, podría darse la posibilidad de que el deportivo Cali haya empatado. No necesariamente por el hecho de que el deportivo América llevará la ventaja, garantiza que fuera el ganador por tanto, para cumplir la condición y ser justos, la apuesta debe repartirse, no se puede afirmar con el resultado en que quedaron que América iba a ser el ganador.

Las desventajas de dar como ganador a Antonio, quiere decir que estaríamos dando por seguro que el América por el hecho de llevar 2 puntos ya era ganador y quitaríamos la posibilidad de un empate.

Ilustración 12

- **R2**: El estudiante manifiesta que no es necesario tomar en consideración los goles convertidos, dado que al interrumpirse el juego lo más "consecuente" es devolver el dinero apostado a cada Antonio y Daniel (Ver Ilustración 13).

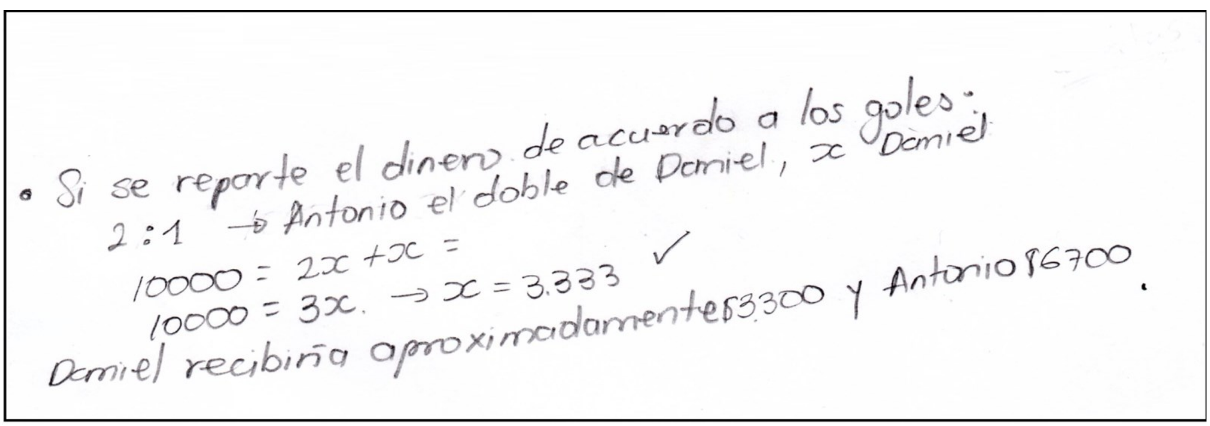


R/ Yo estoy de acuerdo con Daniel, ya que la condición era que uno de los equipos, llegará primero a convertir los 3 goles y aunque no se pensó en la variable de la lluvia, Sobre ¿Qué hacer en caso de? Considero que se rompe el contrato inicial y deben esperar un nuevo partido para reiniciar la apuesta, suspendiendola o cancelandola.

Ilustración 13

Respuestas Pregunta B:

- **R1**: El estudiante argumenta que la manera "correcta" de repartir la apuesta es tomando en consideración la proporción goles convertidos, es decir, 2:1. Cabe aclarar que en este tipo de respuestas es común que el estudiante calcule erróneamente la ganancia o pérdida del jugador, dado que debe de tomar en consideración el total de las apuestas y no la apuesta por cada uno de los jugadores (Ver Ilustración 14).



• Si se reparte el dinero de acuerdo a los goles:
2:1 → Antonio el doble de Daniel, x Daniel
$10000 = 2x + x =$ ✓
$10000 = 3x. \rightarrow x = 3.333$
Daniel recibiría aproximadamente $3300 y Antonio $6700.

Ilustración 14

- **R2**: El estudiante manifiesta que no es necesario tomar en consideración los goles convertidos para repartir la apuesta y afirma que la manera “razonable” de dividir la apuesta es devolviendo a cada jugador lo apostado (Ver Ilustración 15)

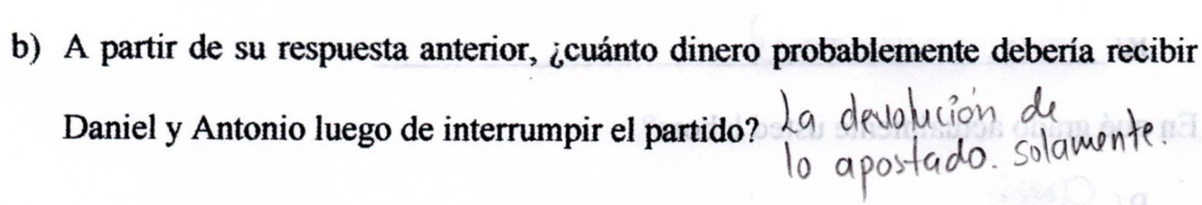

b) A partir de su respuesta anterior, ¿cuánto dinero probablemente debería recibir Daniel y Antonio luego de interrumpir el partido? La devolución de lo apostado. solamente.

Ilustración 15

RESULTADOS SITUACIÓN 3:

Esta situación está compuesta por tres preguntas, las cuales buscan que el estudiante utilice su intuición para establecer cuándo un juego de azar es equitativo, también se espera que haga uso de diversos tipos de razonamientos (proporcional inverso y combinatorio) para modificar el juego, de manera que, sea justo para los participantes. Por último se requiere que el estudiante haga una predicción luego de “n” rondas de la ganancia y pérdida esperada para cada uno de los participantes; es importante resaltar que en esta pregunta es fundamental la interpretación del resultado, dado que permite estudiar si se ha desarrollado la idea intuitiva de Esperanza Matemática. Los criterios de calificación de las Preguntas A, B y C son:

- **Pregunta A:** Para esta pregunta en particular, se consideran correctas todas aquellas respuestas que justifiquen que el juego inventado por Amparo y Alejandra no es justo. Los argumentos deben estar encaminados en afirmar que las probabilidades de ocurrencia de la resta entre el dado mayor y dado menor diera como resultado 0, 1, 2, 3, 4 o 5 no son homogéneas, por tal razón se considera el juego como injusto. Se consideran incorrectas todas las respuestas que afirmen que el juego es justo.

- **Pregunta B:** En esta pregunta se consideran correctas todas aquellas respuestas que busquen "equilibrar" este juego; ya sea utilizando la Esperanza Matemática para modificar el valor de la apuesta; utilizar razonamientos proporcionales inversos sobre la manera en que se reparten las ganancias; o utilizando razonamiento combinatorios en donde se modifiquen las opciones de ganar para cada apostador, de tal manera ambos tengan las mismas probabilidades de éxito. Se consideran incorrectas todas aquellas respuestas que al modificar el juego, no persista la equidad, en términos probabilísticos, para todos los jugadores.
- **Pregunta C:** Para esta pregunta, se consideran correctas todas aquellas respuestas que calculen la esperanza matemática de la situación e interpreten el resultado. Para este juego en particular, el cálculo de esperanza da como resultado 333n, donde n es un número indeterminado de experimentos; La interpretación de este resultado es la afirmación que Amparo pierde cada ronda \$333. En cambio, se clasifican como incorrectas todas aquellas respuestas que no hagan uso de este concepto, ya sea de manera explícita o intuitiva.

A continuación se muestra la Ilustración 16, la cual muestra los resultados obtenidos para la Situación 2, en las Preguntas A, B y C.

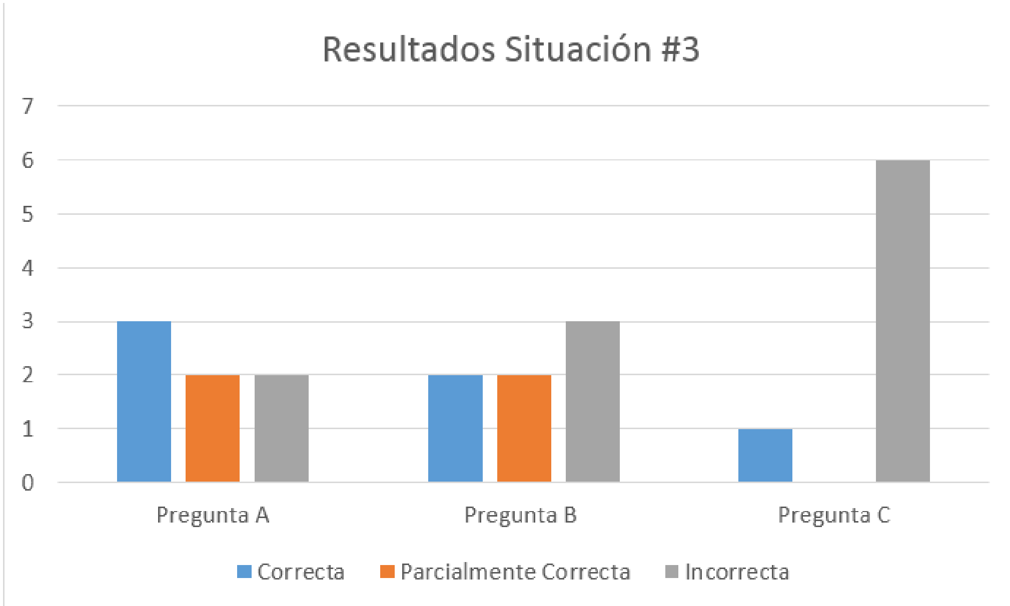


Ilustración 16

A partir de los resultados en esta situación, se puede interpretar que los estudiantes comprenden la idea de juegos equitativos y también poseen competencias para modificar un juego injusto, de manera que sea equitativo para todos los jugadores. Sin embargo, se ha podido identificar que existen dificultades en el cálculo e interpretación de la esperanza matemática, dado que carecen de competencias para estimar la ganancia o pérdida promedio luego de jugar un número indeterminado de veces. A continuación se presentan los diversos tipos de respuestas encontradas para las preguntas A, B y C:

Respuestas Pregunta A:

- **R1:** El estudiante afirma que el juego inventado por Amparo y Alejandra es justo, dado que cada una cuenta con 3 opciones para ganar (Ver Ilustración 17).

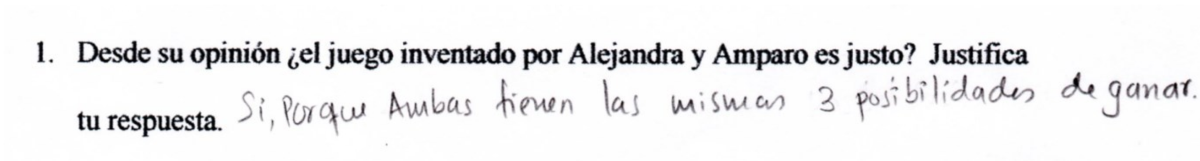

1. **Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.** Si, Porque Ambas tienen las mismas 3 posibilidades de ganar.

Ilustración 17

- **R2:** El estudiante manifiesta que el juego es injusto, dado que la probabilidad de al lanzar el dado salga favorecida en su apuesta Alejandra es de 2/3 y Amparo es de 1/3 (Ver Ilustración 18).

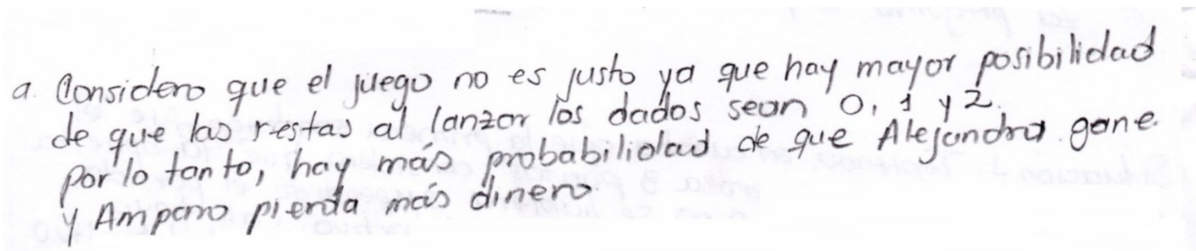
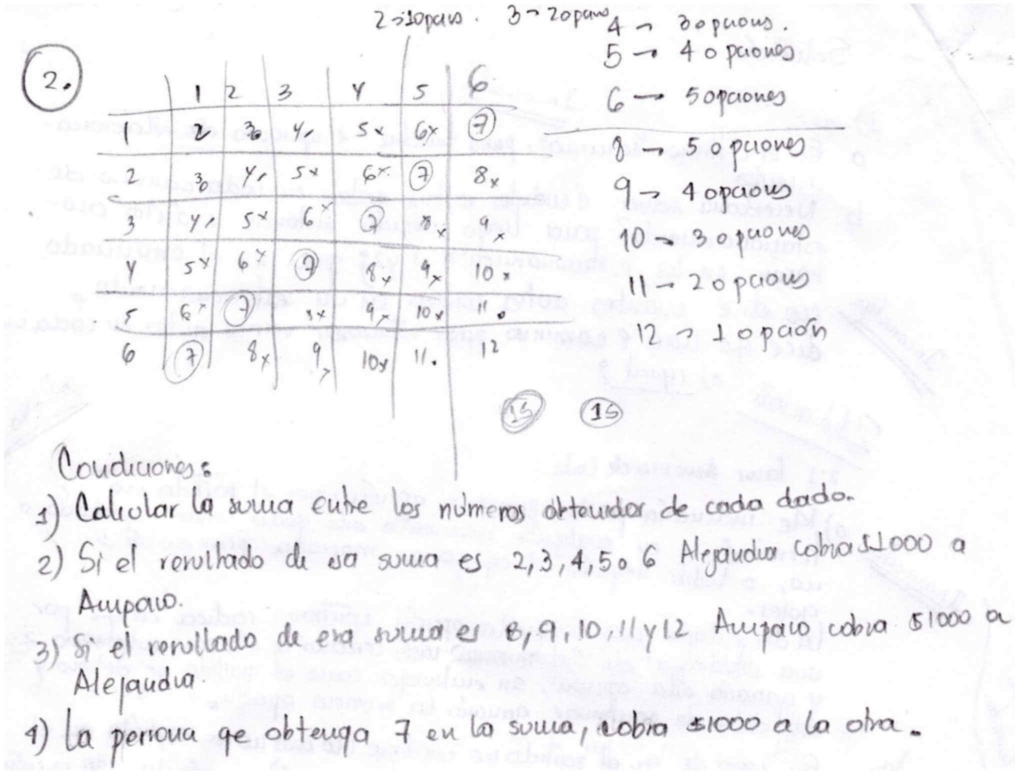

a. Considero que el juego no es justo ya que hay mayor posibilidad de que las restas al lanzar los dados sean 0, 1 y 2. por lo tanto, hay más probabilidad de que Alejandra gane y Amparo pierda más dinero

Ilustración 18

Respuestas Pregunta B:

- **R1:** El estudiante modifica el juego, de tal manera que cada uno de los participantes tengan iguales probabilidades de ganar (Ver Ilustración 19)


2.

2 → 1 opción. 3 → 2 opciones 4 → 3 opciones.
5 → 4 opciones
6 → 5 opciones
8 → 5 opciones
9 → 4 opciones
10 → 3 opciones
11 → 2 opciones
12 → 1 opción

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

15 15

Condiciones:
1) Calcular la suma entre los números obtenidos de cada dado.
2) Si el resultado de esa suma es 2,3,4,5 o 6 Alejandra cobra $1000 a Amparo.
3) Si el resultado de esa suma es 8,9,10,11 y 12 Amparo cobra $1000 a Alejandra.
4) La persona que obtenga 7 en la suma, cobra $1000 a la otra.

Ilustración 19

- **R2:** El estudiante propone una variación del juego diferente a la inicial; sin embargo las probabilidades de éxito para cada uno de los apostadores difieren entre sí, es decir, continúa el juego siendo injusto (Ver Ilustración 20).

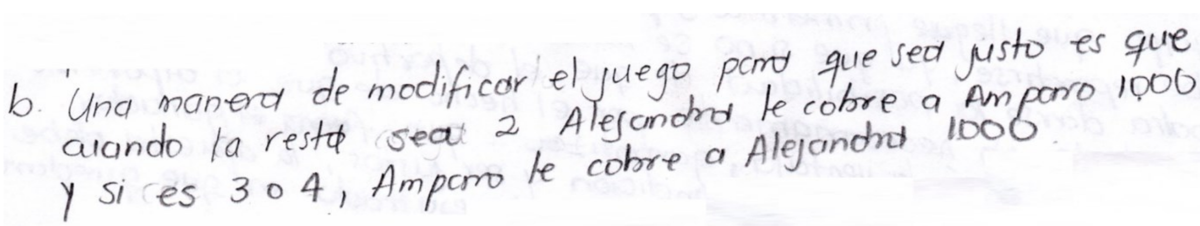
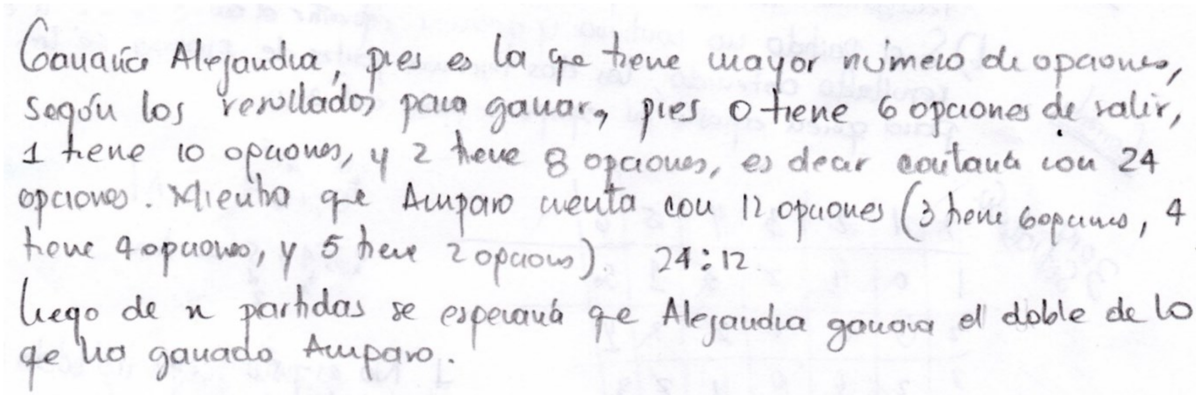

b. Una manera de modificar el juego para que sea justo es que cuando la resta sea 2 Alejandra le cobre a Amparo 1000 y si es 3 o 4, Amparo le cobre a Alejandra 1000.

Ilustración 20

Respuestas Pregunta C

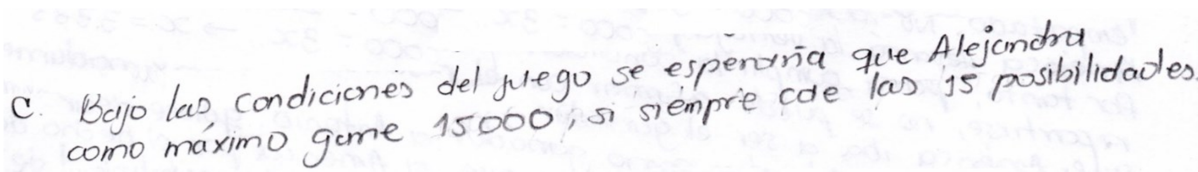
- **R1:** El estudiante en su respuesta hace una estimación correcta de la ganancia o pérdida de Alejandra y Amparo luego de "n" partidas (Ver Ilustración 21)



Ganaría Alejandra, pues es la qe tiene mayor número de opciones, según los resultados para ganar, pues 0 tiene 6 opciones de salir, 1 tiene 10 opciones, y 2 tiene 8 opciones, es decir contaría con 24 opciones. Mientra qe Amparo cuenta con 12 opciones (3 tiene 6 opciones, 4 tiene 4 opciones, y 5 tiene 2 opciones). 24:12
luego de n partidas se esperaría qe Alejandra ganara el doble de lo qe ha ganado Amparo.

Ilustración 21

- **R2:** El estudiante en su respuesta hace una estimación incorrecta de la ganancia o pérdida de Alejandra y Amparo luego de "n" partidas (Ver Ilustración 22)



c. Bajo las condiciones del juego se esperaría que Alejandra como máximo gane 15000, si siempre cae las 15 posibilidades.

Ilustración 22

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS:

En la Tabla X se presentan los resúmenes estadísticos de la puntuación total de los desempeños de los estudiantes de maestría durante la realización del cuestionario. Tomando en consideración que la puntuación total de la prueba son 14 puntos (2 puntos por pregunta, de 7 propuestas en total), se obtiene que la puntuación total media para los estudiantes de Maestría en Educación con Énfasis en Matemáticas cohorte 2017-II fue de los 4,71 puntos, dicho resultado nos indica que, en promedio, el desempeño es catalogado como Insuficiente. De igual manera, se ha encontrado que la mediana de los desempeños fue de 5 puntos, lo cual nos indica que el número de estudiantes de maestría con una puntuación menor a 5 es igual que el número de estudiantes con una puntuación mayor a 5. A continuación en la Figura 23 se muestra el resumen estadístico para las calificaciones de desempeños de los estudiantes.

Tabla 11: Promedio de puntuación para estudiantes analizados.

Media	3,72
Mediana	5
Moda	n.a
D. Tipica	3,23

Tabla 11

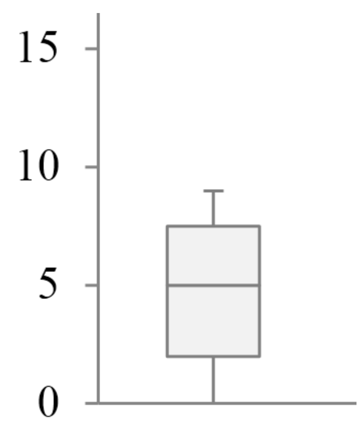


Ilustración 23

Es importante aclarar que aunque la muestra para este instrumento es de siete estudiantes, la cual reconoce que es relativamente pequeña. Por lo cual, la síntesis de los resultados se hace con el fin de brindar al lector una muestra general de los resultados obtenidos luego de la aplicación del instrumento.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS:

Luego de la recolección y síntesis de los resultados de aplicar el instrumento elaborado, se procede a realizar el análisis de los resultados, este se hace con el fin de precisar y condensar las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes, y así describir las respuestas de los estudiantes durante la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos. Cabe aclarar, que los principales hallazgos en este apartado van a contribuir directamente en la delimitación del Conocimiento del Estudiante, el cual hace parte fundamental del Conocimiento Didáctico del Contenido Específico para la Esperanza Matemática.

Además, es importante resaltar que el análisis de los resultados del instrumento se hace con base en el marco teórico del Conocimiento Didáctico del Contenido propuesto por Shulman y Cols (1986a); en especial, para analizar las respuestas de los estudiantes y describir las respuestas de los estudiantes más recurrentes, se toma en consideración dos elementos el marco teórico (Conocimiento de la didáctica específica y Conocimiento del estudiante) los cuales permiten determinar hasta qué nivel el estudiante comprende y conoce el contenido propio de la materia, en particular, el concepto de esperanza matemática.

En educación, se alude a la palabra *Sesgo* como aquel razonamiento del estudiante que no corresponde a una "estimación" correcta de un suceso aleatorio, ya sea que utiliza factores externos a la situación, hace una estimación incorrecta de los eventos aleatorios o interpreta incorrectamente la información recolectada. Luego de un rastreo exhaustivo sobre las respuestas del cuestionario por parte de los estudiantes para la situación 1, 2 y 3; se identifica que los tres principales sesgos asociados a la esperanza matemática son (Guerrero, 2015):

- *Sesgo de Equiprobabilidad*: Este sesgo radica en que el estudiante cree que todos los resultados de un experimento aleatorio son igualmente probables. Este sesgo ha sido plenamente identificado en investigaciones como Guerrero (2015) y Lecoutre (1992). Una de las razones por la cual sucede constantemente este sesgo es que las personas, por lo general, asocian el azar y la aleatoriedad con resultados concretos y modelos no combinatorios (Guerrero, 2015, p. 26-27). Para ver una ejemplificación de este sesgo en particular, se recomienda al lector remitirse a las Ilustraciones 7, 9 y 17.
- *Enfoque del resultado*: tipo de sesgo se caracteriza porque el estudiante estima la frecuencia de un suceso de forma no probabilística, es decir, trae a colación factores deterministas. Este sesgo ha sido identificado en investigaciones como Lecoutre (1992) y Díaz (2003). Para ver una ejemplificación de este sesgo en particular, se recomienda al lector remitirse a las Ilustraciones 8 y 10.
- *Utilidad vs Ganancia*: Este sesgo es bastante común en los estudiantes a la hora de interpretar el resultado luego de utilizar la definición de Esperanza Matemática; Esto se debe a que no reconocen que la esperanza matemática o el valor esperado está definidos en términos de utilidad, por ende, cada vez que se interprete el resultado, se requiere -necesariamente- que el estudiante efectúe inferencias sobre la utilidad promedio que obtiene un apostador luego de un número indeterminado de experimentos. Si bien, este sesgo probabilístico no ha sido documentado de manera explícita, se infiere en las competencias de razonamiento estadístico expuestas por Batanero (2000). Para ver una ejemplificación de este sesgo en particular, se recomienda al lector remitirse a la Ilustración 22.

Luego de la recolección y sistematización de los resultados en las situaciones 1, 2 y 3 se ha encontrado que en numerosas ocasiones los estudiantes cometen errores al solucionar actividades relacionadas con juegos de azar. A continuación se catalogan los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes al responder el instrumento aplicado:

- *El estudiante confunde la independencia y dependencia de eventos aleatorios.* Es recurrente encontrar que algunos de los estudiantes no reconocen intuitivamente las propiedades de los eventos independientes y dependientes de evento aleatorio. Este tipo de errores han sido documentados en Guerrero (2015), por lo que se propone brindar un mayor acompañamiento a los estudiantes durante los procesos de instrucción que se refieren a la naturaleza de las variables aleatorias. Para ver una ejemplificación de este error en particular, se recomienda al lector remitirse a las Ilustraciones 8 y 10.
- *Errores en la modificación de la ganancia para que el juego sea equitativo.* Es común encontrar que los estudiantes -en su gran mayoría- en vez de modificar las ganancias esperadas para cada jugador, se ven evocados en cambiar las leyes del juego. Se consideran este tipo de respuestas erróneas, dado que el estudiante no hace el ejercicio de buscar la manera de modificar el juego actual. Este tipo de errores ha sido hallados y justificados en Cañizares (1997) (Citado en Guerrero, 2015). Para ver una ejemplificación de este error en particular, se recomienda al lector remitirse a la Ilustración 20
- *No realiza el cálculo inverso de las ganancias.* En algunos casos, los estudiantes hacen el cálculo de la probabilidad de ganancia para cada uno de los participantes y de ello se obtienen respuestas como "*Alejandra tiene el doble de probabilidades de*

ganar que Amparo". Sin embargo, este tipo de respuestas no se consideran como completas, dado que es necesario efectuar el cálculo inverso de ganancias con respecto a la distribución de probabilidad. Por ejemplo, para la situación 3, una respuesta tentativa a la pregunta C sería: *"Alejandra debería de ganar $6.666 y Amparo $13.333, por cada ronda, para que el juego sea justo"*. Para ver una ejemplificación de este sesgo en particular, se recomienda al lector remitirse a la Ilustración 14 y 21.

- *Calcula de forma incorrecta las probabilidades.* Es reiterativo que en las respuestas de los estudiantes se evidencian errores de cálculo y operación de probabilidades. Un ejemplo de respuestas que contengan este tipo de errores son: "*El auto tiene las mismas probabilidades de estacionarse en cualquiera de los aparcamientos*", "*Alejandra y Amparo tienen las mismas probabilidades de ganar*". Para ver una ejemplificación de este sesgo en particular, se recomienda al lector remitirse a la Ilustración 22.

Por otro lado, luego de la implementación del instrumento y recolección de las respuestas, se ha identificado que los estudiantes poseen algunas dificultades recurrentes con respecto a la teoría de la probabilidad, juegos equitativos y esperanza matemática. En análisis de los resultados se ha identificado -explícitamente- dichas dificultades y se han categorizado en dos tipos de dificultades:

- *Dificultades en la interpretación de tablas y diagramas.* Durante la indagación de las respuestas se ha encontrado que los estudiantes, en su mayoría, poseen en dificultades en la construcción, interpretación y comprensión de los diferentes registros de representación asociados la estadística y probabilidad. Específicamente se detectan dificultades con respecto a los registros gráficos, tabulares y diagramas.

- *Dificultades en la interpretación de resultados, luego de aplicar la definición de Esperanza Matemática.* Durante el análisis de los resultados, se ha podido reconocer que la mayoría de estudiantes poseen dificultades en la interpretación del cálculo de la esperanza matemática, esta dificultad se propicia por tres factores, ya documentados en Guerrero (2015): primero, la confusión en términos probabilísticos de ganancia y utilidad; segundo los errores al realizar estimaciones de un número indeterminado de ensayos; tercero la comprensión y construcción del concepto de Esperanza Matemática, la cual es una medida de centralización para sucesos aleatorios.

5.3 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO ESPECÍFICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA

El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) es un marco teórico y metodológico elaborado por Shulman y Cols (1986) que permite comprender la relación intrínseca entre un saber determinado y la didáctica para su instrucción. Específicamente el CDC representa la intersección entre el conocimiento de la materia específica (biología, matemáticas, español, etc.) y los principios generales de la didáctica, la pedagogía y el contexto; cabe resaltar que esta intersección no es en términos de integración o conjunción, sino en términos de transformación de conocimientos, la cual permite adaptar el saber de una materia a las características de los estudiantes (Ver Ilustración 24).

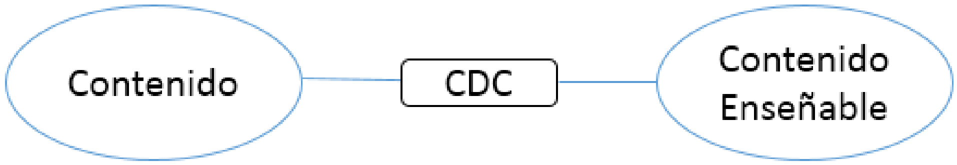


Ilustración 24

En particular, el CDC no está limitado a indagar las didácticas o metodologías de enseñanza de contenidos, más bien, centra su mirada en buscar que el profesor comprenda efectivamente los contenidos (que aprenderán los estudiantes), y reconozcan las maneras en que este contenido puede ser enseñado durante la práctica docente e identifique las maneras en que los estudiantes aprenden dicho contenido. A continuación se presenta una cita de Shulman (1987), en donde se describe el CDC (Tomado de Pinto y Astudillo, 2008):

> "Representa la mezcla entre materia y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento didáctico de la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (p.8).

En particular para este marco de referencia, tal como se menciona en el Marco Didáctico (ver 2.2.3), se distinguen inicialmente tres categorías de investigación, sobre las cuales se establecen los tipos conocimientos componen el Conocimiento Didáctico del Contenido (Shulman et al, 1987):

- *Conocimiento del Contenido de la disciplina por enseñar*: se define este tipo de conocimiento como aquel que se encarga de la organización de los saberes previos del profesor antes de su práctica en el aula. Se caracteriza porque el profesor además de conocer o comprender los contenidos, es capaz de reconocer la naturaleza conceptual y epistemológica de la materia.
- *Conocimiento de la Didáctica Específica:* como bien se sabe, para enseñar es necesario mas no suficiente comprender el contenido dispuesto a enseñar, por ello también requiere que el profesor reconozca aquellos elementos didácticos y metodológicos necesarios para una enseñanza efectiva. En resumidas cuentas, es importante que el profesor organice, secuencie y presente el contenido a los estudiantes tomando en consideración sus habilidades, motivaciones e intereses. Cabe resaltar, que las representaciones y estrategias instruccionales cobran un papel fundamental en este tipo de conocimiento.
- *Conocimiento del Estudiante*: Este tipo de conocimiento se centra en los procesos de aprendizaje del estudiante, buscando desarrollar en profesores habilidades para hacer "penetrable" los contenidos (Pinto & Astudillo, 2008). Este tipo de habilidades se desarrollan a partir de la consideración de errores, dificultades y problemáticas más recurrentes; de esta manera se establecen condiciones didácticas estructuradas que permitan desarrollar procesos cognitivos en los estudiantes.

Con respecto a este trabajo de investigación, se reconoce las propiedades y potencialidades que conlleva determinar el Conocimiento Didáctico del Contenido Específico para la Esperanza Matemática en sus tres categorías (*conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, conocimiento de la didáctica específica y conocimiento del Estudiante*), dado que resulta imprescindible explicitar la relación intrínseca entre el saber (Esperanza Matemática), las metodologías de enseñanza y formas en que los estudiantes llegan a un proceso de significación y comprensión de este concepto. De igual manera, se expone a manera de ítems las razones por las cuales se considera importante reconocer y determinar el CDC en la Esperanza Matemática:

- Pocos antecedentes que aborden cuestiones didácticas y pedagógicas en la enseñanza de la Esperanza Matemática.
- Resultados desfavorables en profesores de matemáticas que han dejado la aplicación del instrumento de investigación titulado "Evaluación de conocimientos sobre esperanza matemática y juegos equitativos".
- Ineludible necesidad de introducir y delimitar aquellos elementos históricos y curriculares importantes en la enseñanza de la Esperanza Matemática.

Luego de la descripción de las categorías para determinar el Conocimiento Didáctico del Contenido y también de exponer las razones de peso que conllevan a realizar dicha determinación en relación con el concepto de Esperanza Matemática. Se presenta a continuación, las categorías en relación con la Esperanza Matemática, cabe hacer la aclaración que la construcción y caracterización de cada uno de los elementos en las tres categorías mencionadas se hace a partir de supuestos, los cuales surgen producto de la indagación bibliográfica y experimental de los elementos para la enseñanza de la esperanza matemática.

5.3.1 Conocimiento del Contenido de la Disciplina por Enseñar

Antes de comenzar a abordar cuestiones didácticas y metodológicas sobre la manera efectiva o adecuada para enseñar el concepto de Esperanza Matemática, es necesario detenerse en responder la cuestión ¿Que conocimiento base requiere el profesor de matemáticas para introducir el concepto de Esperanza Matemática en el aula de clases? En respuesta a esta cuestión, diversas investigaciones (Bolívar, 2005; Pinto & Astudillo, 2008) se ha encontrado que las orientaciones curriculares en matemáticas -en los últimos años- han estado alejadas del estudio de la comprensión, por parte de los profesores, de los conocimientos previos para la enseñanza de la estadística y probabilidad. Por esta razón, para este apartado denominado *Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar* se pretende reconocer elementos de contenido fundamentales, que orienten al lector a desarrollar esta categoría de conocimiento para la enseñanza de la Esperanza Matemática.

Inicialmente se establece una serie de contenidos fundamentales previos a la enseñanza de la Esperanza Matemática, entre los cuales se destacan:

- definición clásica y frecuencial de la probabilidad;
- espacios muestrales;
- dependencia e independencia de eventos aleatorios;
- permutaciones y combinaciones;
- equitatividad de un fenómeno aleatorio.

Cabe resaltar que es indispensable que los estudiantes comprendan con anterioridad cada uno de los contenidos mencionados, dado que la definición y algoritmo de la Esperanza Matemática requieren especial uso de cada uno de ellos. De igual manera, resulta necesario que el docente enfatice en el cumplimiento y asimilación de dos logros en estadística y probabilidad, los cuales han sido mencionados -reiteradamente- en currículos internacionales (ESO y NCTM):

- comprender y aplicar las medidas de tendencia central en contextos reales;
- construye e interpreta la información consignada en gráficos estadísticos.

Por otro lado, se destaca la necesidad reconocer algunos elementos históricos y epistemológicos relacionados con el surgimiento y establecimiento de la Esperanza Matemática como método de solución predilecto a situaciones relacionadas con el azar y la incertidumbre. Es importante que el conocimiento del contenido del docente integre dichos elementos, dado que la profundización del “por qué” y “para que” de la enseñanza adquiere un valor significativo y motivacional a los estudiantes, y permite reconocer qué supuestos o creencias poseen los estudiantes previos a los procesos de instrucción. Cabe resaltar que estos elementos han sido establecidos en el Capítulo 3 del presente trabajo de grado, por lo cual se recomienda al lector remitirse a este apartado para mayor precisión.

5.3.2 Conocimiento de la Didáctica Específica

Muchos son los expertos que afirman que para enseñar matemáticas, no solo basta con saber matemáticas; la labor de instrucción de esta disciplina de estudio requiere que el docente sea capaz de transmitir ese contenido de forma clara y significativa (Bolívar, 2005). Sin embargo, cumplir dicho propósito no es del todo sencillo, requiere que el docente organice, secuencie y presente el contenido de estadística y probabilidad de manera tal que los estudiantes desarrollen sus habilidades a medida que el docente instruya (Pinto & Astudillo, 2008). A éste tipo de conocimiento Shulman (1987) lo define como *Conocimiento de la didáctica específica* y sobre el cual se aglomeran todos los conocimientos y estrategias instruccionales del profesor que permiten enseñar el conocimiento de manera efectiva. En particular, para este trabajo de grado, se destaca el conocimiento de la didáctica específica para la Esperanza Matemática, el cual está compuesto por todas aquellas estrategias, organizaciones, contextos y métodos que propicien un aprendizaje significativo.

El primer elemento que se distingue en el conocimiento de la didáctica específica para la esperanza matemática, es la organización y secuenciación de los contenidos que guardan relación para este concepto. Dicho así, se propone entonces una organización que pretende presentar el contenido de forma clara, gradual y concisa para los estudiantes, lo cual permite promover el interés y el desarrollo de habilidades de manera sistemática (Ver Ilustración 25)

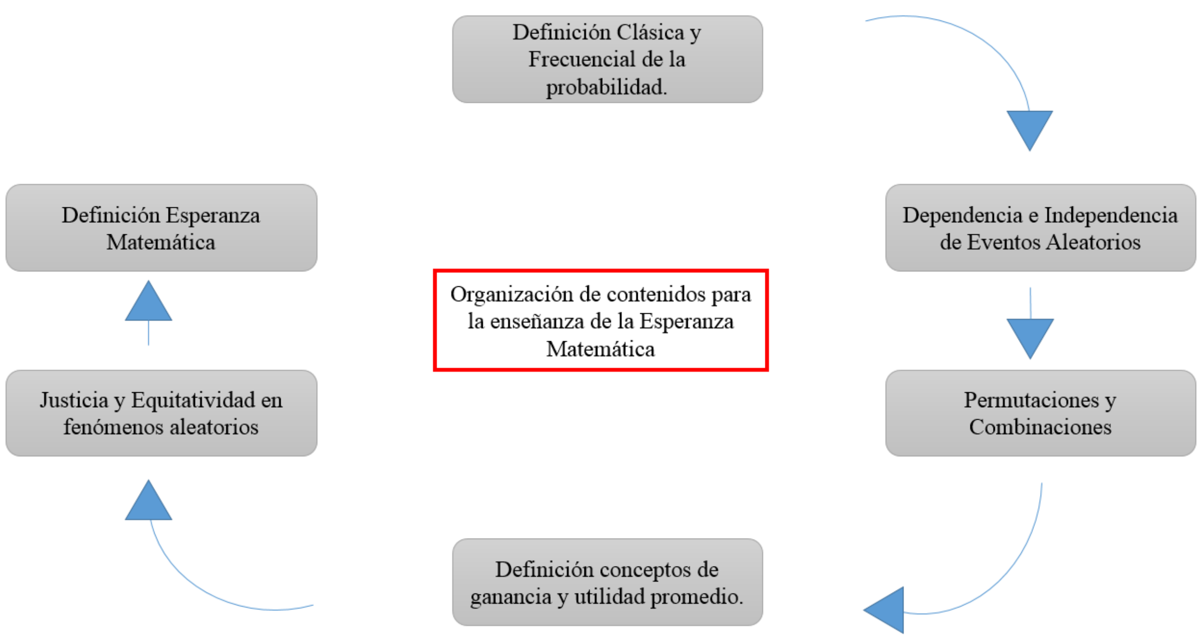


Ilustración 25

Otro elemento importante por destacar en este conocimiento del docente, es la utilización del contexto en actividades para promover el interés y desarrollo de habilidades significativas en estudiantes. Específicamente, la enseñanza de la Esperanza Matemática, desde sus inicios, estuvo enmarcada en fenómenos contexto (Ver apartado 3.2), por esta razón la utilización de este tipo de situaciones como los juegos de azar, el comportamiento poblacional, el clima, etc., contribuyen de forma positiva al aprendizaje, comprensión y significación de la esperanza. En este sentido, se destacan los aportes realizados por Ribeiros (2016), en la cual propone la inclusión de la educación crítica a modo de proyectos para promover el desarrollo de competencias en estadística y probabilidad.

En los últimos años, el papel de las representaciones en la educación matemática ha cobrado gran interés en la investigación; esto se debe a que las distintas representaciones mentales y semióticas contribuyen -notablemente- a la comprensión y significación de los conceptos en matemáticas (Duval, 2003). En particular, para la enseñanza de la esperanza matemática, se destaca la importancia de las representaciones gráficas, tabulares, algebraicas y diagramas; dado que la formación, tratamiento y conversión de estas representaciones permiten a docentes y estudiantes vislumbrar la esperanza matemática desde diferentes perspectivas, lo cual contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

5.3.3 Conocimiento del Estudiante

El tercer componente del CDC, es el Conocimiento del Estudiante, el cual comprende los conocimientos del docente con respecto a los procesos de aprendizaje de los alumnos (Pinto & González, 2009). En específico, el Conocimiento del Estudiante en la enseñanza de la

Esperanza Matemática busca -principalmente- reconocer todos aquellos errores, dificultades, problemáticas, preconcepciones y condiciones instruccionales., que conlleva la enseñanza de este concepto; de tal manera que la distinción de cada uno de estos elementos permite que los estudiantes, durante los procesos de instrucción, comprendan globalmente el significado del concepto.

Primeramente se reconocen, como elemento indispensable en la enseñanza, todos aquellos errores, dificultades y problemáticas que se ven manifestados en los estudiantes durante el aprendizaje de la Esperanza Matemática. Este tipo de elementos se reconocen, a partir de los análisis y reflexiones de los resultados de la Evaluación de conocimientos sobre esperanza matemática y juegos equitativos (Ver apartado 5.2), por tanto se consideran los siguientes sesgos, errores y dificultades:

- Sesgos:
  - Sesgo de Equiprobabilidad.
  - Enfoque del resultado.
  - Utilidad vs Ganancia.
- Errores:
  - El estudiante confunde la independencia y dependencia de eventos aleatorios.
  - Errores en la modificación de la ganancia para que el juego sea equitativo.
  - No realiza el cálculo inverso de las ganancias.
  - Calcula de forma incorrecta las probabilidades

- Dificultades:
    - Dificultades en la interpretación de tablas y diagramas.
    - Dificultades en la interpretación de resultados, luego de aplicar la definición de Esperanza Matemática.

Es importante aclarar, que la descripción y ejemplificación de cada uno de los elementos mencionados se puede encontrar en el apartado 5.3 del presente trabajo de grado.

Otro elemento indispensable a la hora de describir el Conocimiento del Estudiante, son todas aquellas preconcepciones que poseen los estudiantes alrededor del concepto de esperanza matemática. Según Díaz (2013), históricamente el concepto de esperanza matemática surge a partir de la idea de justicia y equitatividad del azar; por esta razón aquellas conjeturas y concepciones estudiantes que busquen principalmente la "domesticación" del azar son importantes a tomar en consideración a la hora de diseñar una estrategia para la enseñanza de este concepto, dado que permiten potencializar los conocimientos y evitar que se generan nuevas problemáticas.

Por último, se distingue en este tipo de conocimiento, algunos elementos importantes que permiten establecer una Condición Instruccional adecuada para el aprendizaje y enseñanza de la Esperanza Matemática. Inicialmente se reconoce la necesidad de investigar y analizar algunas estrategias y metodologías óptimas para el aprendizaje de cada estudiante; de igual manera, es importante tomar en consideración para la planeación de aula, las expectativas e intereses que tiene cada estudiante por la asignatura; por último y no menos importante, está el estudio de la evolución de los procesos cognitivos en los estudiantes, dado que es necesario tomar un punto de referencia inicial para identificar -en qué medida- han desarrollado un razonamiento estadístico y probabilístico los estudiantes, luego de los procesos de instrucción.

5.4 CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo se ha intentado describir y delimitar los conocimientos y elementos didácticos que guardan relación con el Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a los juegos equitativos. Es importante destacar, que el diseño, implementación y análisis de la Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática a estudiantes de Maestría en Educación de la Universidad del Valle, se hizo con el fin de delimitar algunos de las problemáticas más recurrentes en la enseñanza y aprendizaje de este concepto; dado que la indagación bibliográfica nacional e internacional arrojó relativamente pocos elementos didácticos para la enseñanza de este concepto. Específicamente, para éste primer capítulo se tenía como objetivo:

- *Identificar las categorías y elementos que componen el Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos.*

Para lo cual, se puede afirmar que:

- Resulta importante y significativo para los procesos de enseñanza de la esperanza matemática que el docente comprenda cada uno de los elementos descritos en la delimitación de las categorías que componen el CDC: *Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar*; *Conocimiento de la didáctica específica* y *Conocimiento del estudiante.* El reconocimiento de dichos elementos permitirá al docente profesionalizar la enseñanza de la esperanza matemática, mejorar el desarrollo de habilidades cognitivas en estudiantes en fenómenos aleatorios y permitirá vislumbrar de manera global la enseñanza de un concepto estocástico y todas las particularidades que lo comprenden.

- El análisis de los resultados del cuestionario (Ver apartado 5.2) permitió identificar que los profesores de matemáticas poseen bajos niveles de competencia con respecto al *conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar* y *conocimiento de la didáctica específica*.
- Uno de los propósitos principales en la planeación de este capítulo era identificar, algunos errores, dificultades y sesgos que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto de Esperanza Matemática. Dicho propósito se cumplió eficazmente, dado que el análisis de los resultados permitió clasificar y ejemplificar cada uno de estos.

Es importante señalar, que uno de los puntos limitantes durante la estructuración y recolección de este capítulo, es el número de estudiantes analizados, debido a que esta muestra (7) no resulta una población significativa para el análisis de docentes en matemáticas a nivel nacional; sin embargo, esta calamidad es ajena a la planeación del presente trabajo de grado, dado que surge por el cierre de programas y becas para profesores del sector oficial financiados por el Ministerio de Educación Nacional.

RECOMENDACIONES PARA UNA POSTERIOR INVESTIGACIÓN Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

De acuerdo con el trabajo adelantado y las conclusiones correspondientes a cada capítulo, han quedado abiertos varios aspectos sobre los cuales se dan pie a la formulación de nuevas investigaciones. En este orden de ideas, las consideraciones que garantizan la continuidad de este proyecto o que se han quedado por fuera de los alcances de este trabajo de investigación son:

- Se considera necesario comenzar a reflexionar sobre el abordaje de cuestiones didácticas de la estadística y probabilidad en el aula de clases que tomen en consideración el contexto de los juegos de azar y la esperanza matemática. Es por ello que esta investigación propone como proyección la elaboración de secuencias didácticas o propuestas de aula que tenga como fin implementar y desarrollar el concepto de esperanza matemática en el aula de clases, tomando en consideración el contexto de juegos de azar para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.
- Se reconoce que uno de los limitantes principales a lo largo del presente trabajo de grado es el tamaño de la muestra analizada para el instrumento titulado "Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y Juegos Equitativos"; se propone entonces, en un futuro, rediseñar e implementar dicho instrumento a una muestra mucho mayor, esto con el fin de reconocer nuevos elementos didácticos en la enseñanza y el aprendizaje de la esperanza matemática.
- La delimitación y caracterización de los elementos didácticos para la enseñanza de la esperanza matemática permitió reconocer la importancia de los diversos registros de

representación. Por ello se propone, como complemento o proyección a este trabajo de grado, desarrollar investigaciones en torno al papel de los registros de representación en la educación en estadística y probabilidad, por parte de los estudiantes y profesores.

- La caracterización de los elementos curriculares para la enseñanza de la esperanza matemática permitió identificar que el currículo de matemáticas en Colombia posee diversas falencias y limitaciones, con respecto a currículos internacionales. Por tanto, se propone como proyección a este trabajo de grado, desarrollar investigaciones que tengan como foco central una renovación curricular en el núcleo de estadística y probabilidad en Colombia.

PROYECCIONES DE TRABAJO DE GRADO

- Evento: 3° Encuentro de Investigación en Educación Matemática

  Modalidad: Comunicación Breve
  Título: Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a juegos equitativos.
  Lugar: Universidad del Atlántico, Barranquilla – Colombia

- Evento: 2° Encuentro Colombiano en Educación Estocástica
  Modalidad: Conferencia
  Título: Reflexiones epistemológicas y didácticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de media.
  Lugar: Universidad los Libertadores, Bogotá – Colombia

- Evento: 24° International Conference on Learning

  Modalidad: Comunicación Breve
  Título: Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a juegos de azar.
  Lugar: University of Hawaii at Manoa, Honolulu – USA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arbeláez D. y Díaz. D. (2010). El discreto encanto del cálculo de probabilidades. Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle.

Aristóteles. (1990). Metafísica de Aristóteles, Edición Trilingüe por Valentín García Yebra, Editorial Gredos.

Aristóteles. (1995). Ética Nicomaquea, traducción y notas por Julio Pallí Bonet, Introducción por Emilio Lledó Ínigo, Editorial Gredos.

Alcina, A. (2016). Artículo: De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática - Número 48.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 24 (40), 789-810

Batanero, C. (1994). "Presente y Futuro de la Educación Estadística". Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2002a). Retos de la cultura estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C. Ortíz, J. Serrano, L. (2007). Investigación en Didáctica de la Probabildiad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Grana

Batanero, C. (2002b). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. Novedades educativas, 261, 78-84.

Batanero, C. Guea, M. Arteaga, P. Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. Revista digital — Matemática, Educación e Internet. Vol. 14, No 2.

Bernoulli, J (1713): *Ars Conjectandi.* Basilea: Thurnisiorum.

Bolívar, A. y Salvador Mata, F. (2004). Conocimiento didáctico. En Fco. Salvador Mata, J.L.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento Didáctico del Contenido y Didácticas Específicas. Revista currículum y formación del profesorado, 9, 5. Universidad de Granada.

Campos. C. (2016). La Educación Estadística Crítica. Conferencia 2° Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, Bogotá, Colombia.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. & Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. Números, 37, 37-55.

Carranza P. (2009). La dualite de la probabilite dans L'enseignement de la statistique, Une experience en classe de BTS. (Tesis doctoral). Universidad Paris 7 Denis Diderot.

Carranza, P. (2014) Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en Francia. Revista: Educación Matemática, v.16, n.3, pp. 1071-1087.

Castellanos, MT. Arteaga, P. (2001). Gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia. Universidad de los Llanos y Universidad de Granada.

Coljuegos. (2015). Caracterización jugador Colombiano de JSA – JUGADORES. Ministerio de Hacienda, República de Colombia.

Daston, L. J (1980). *Probabilistic expectation and rationality in classical probability theory.* Historia Mathematica Vol. 7, n°3, pp. 234-260.

Díaz, D. (2007). Significado atribuido al concepto de media aritmética por estudiantes de grado séptimo. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Díaz. D. (2010). Del Valor del Juego a la Esperanza Matemática: Una Mirada Alrededor de 1650. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Díaz. D. (2013). Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). A curriculum framework for K-12 statistics education.GAISE report. Online: http://www.amstat.org/education/gaise/.

Gal, Iddo. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, and Responsibilities. University of Haifa, Israel.

Guea, M. Fernandes, J. Batanero, C. Benavides, A. (2016). Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación Primaria. Atas Provis´orias do XXVII Sem. Investiga¸c˜ao em Educa¸c˜ao Matem´atica. Porto: APM, pp. 63–76

Guerrero, H. (2015). Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gómez, E. (2016). Estadística y Probabilidad en el currículo colombiano para la educación básica y media. Departamento de Estadística, Universidad Nacional.

González, P. (2004). Artículo: La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Revista *SUMA* Ed. 45. pp. 17-28.

Hacking, I. (1995). *El Surgimiento de la Teoría de la Probabilidad.* Barcelona: Gedisa.

Huygens, C. (1657). *De ratiociniis in ludo alea, en Oeuvres Complètes*. Société Hollandaise des Sciences, vol. XIV, pp. 1-179, 1888-1950. La Haya: Nijhoff.

Iglesias, E. Míguez, M. Vásquez, F. (2001). El juego problema en los estudiantes de enseñanza secundaria. Revista Psicothema, Vol. 13, nº 4, pp. 551-556

Leal Castro, A. (2015). El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC): una herramienta que contribuye en la configuración de la identidad profesional del profesor. Revista Magistro, 8(15).

Leinhart, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. En V. Richarson (ed.), Handbook of Research on Teaching, 4ª ed.. Washington, DC: AERA, 333-357

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. Journal of Teacher Education, 41 (3), 3-11.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas. Bogotá.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte España, MECD (2014). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

Mohamed, N; Ortiz, J; Serrano, L. (2013). Evaluación del conocimiento sobre juego equitativo en futuros profesores. Universidad de Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (2002). Making sense of fractions, ratios, and proportions. (Bright, George W., & Litwiller, Bonnie, eds.). Reston, VA.Ortiz, J. (2005) deas del alumnado de Primaria y Secundaria sobre aleatoriedad.

Ortiz, J.; Batanero, C.; Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. Revista Latino Americana de Matemática Educativa, México, v. 15, n. 1, p. 63-91, marzo 2012

Pinto Sosa, J. (2010). Conocimiento Didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudio de casos de profesores de estadística en carreras de Psicología y Educación. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Salamanca

Pinto Sosa, Jesús Enrique, & González Astudillo, María Teresa. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?. *Educación matemática*, *20*(3), 83-100. Recuperado en 07 de marzo de 2017.

Rescher, N. (1997*)* *La suerte: aventuras y desventuras de la vida cotidiana*. Barcelona: Andrés Bello.

Ruiz, Gabriel (1999). La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica. SUMA, 32, pp. 5-9.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Sheynin, O. (2009). Theory of Probability, A Historical Essay. Revised and Enlarged Edition. Berlin, Alemania.

Shulman, L.S. (1986a). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57 (1), 1-22. Edic. cast.: Conocimiento y enseñanza: fundamentos de las nueva reforma. Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 9 (2), 2005

Van Jaag. (2015). Manual para el jugador profesional. Createspace Independent Pub 8. Madrid, España.

Vásquez, C. & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. Números, n. 85, p. 5-23.

Vidakovic, D. Berenson S. Brandsma J. (1998). Children's intuition of probabilistic concepts emerging from fair play. Nosth Carolina State University, USA.

Vega Amaya, O. (2002) "Surgimiento de la Teoría de la Probabilidad" Apuntes de Historia de las matemáticas VOL 1, Nº 1, Universidad de Sonora, México