CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO DE ALGUNOS MAESTRO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA A PARTIR DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACION, MANIFESTADO EN SUS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS CUANDO RESUELVEN ALGUNOS PROBLEMAS. UN ESTUDIO DE CASOS

CINDY CATHERINE RUEDA ARREDONDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA DE EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2017

CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO DE ALGUNOS MAESTRO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA A PARTIR DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACION, MANIFESTADO EN SUS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS CUANDO RESUELVEN ALGUNOS PROBLEMAS. UN ESTUDIO DE CASOS

CINDY CATHERINE RUEDA ARREDONDO

Asesor del trabajo

Cristian Andrés Hurtado Moreno

Informe final realizado en el marco de la Línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2017

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico Lic en ed Bus con enfasis en mat

Fecha

Día	Mes	Año
28	04	17

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ____

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Niveles de algebrización de las prácticas mat que realizan algunos maestros

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director
Cristian Andres Hurtado
Nombre del Primer Evaluador
Ligia Amparo Torres Rengifo
Nombre del Segundo Evaluador
Wildebrando Miranda

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Cindy Catherine Rueda	0873946	3469	cicarru14@hotmail.com	

Evaluación

Aprobado ☑ Meritorio ☐ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ____________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente),se da un plazo máximo de ____________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador
[firma]	[firma]	Wildebrando Miranda

F-0401-03-04-02
V-02-2015 19-10-2015

Elaborado por Instituto de Educación y Pedagog

Tabla de contenido

Índice de esquemas

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

El presente trabajo presenta una caracterización del razonamiento algebraico de algunos profesores de educación básica secundaria y media a partir de los niveles de algebrización, que manifiestan en sus práctica matemáticas cuando resuelven algunos problemas, este estudio fue realizado utilizando herramientas que propone el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), en particular se aborda el análisis en términos “objetos y procesos” intervinientes en la práctica matemática y la caracterización del razonamiento algebraico propuesta por Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi (2014), según los niveles de algebrización. Esta investigación pone en evidencia algunos conocimientos algebraicos de algunos maestros en ejercicio, los cuales al ser previstos, permite tomar decisiones respecto a nuevos planes de formación.

Palabras claves: formación docente, razonamiento algebraico, objetos y procesos

Introducción

Diversas investigaciones realizadas en Didáctica del Álgebra han centrado su interés en los procesos de enseñanza, la formación de profesores, en identificar las dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza y procesos de aprendizaje del álgebra que presentan los estudiantes y las que enfrentan los maestros en la promoción y desarrollo del razonamiento algebraico, entre otros (Castro, 2012; Socas, 2011). Estas investigaciones identifican y aportan factores significativos que influyen sustancialmente en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar[1], sin embargo, a pesar de sus aportes a estos procesos, hay cuestiones aun no resueltas, lo que genera necesidad de investigación en buscar formas efectivas para abordar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra cuando es objeto de estudio en las aulas de clase.

Así, la formación de profesores y las formas de enseñanza del álgebra, han sido y sigue siendo en múltiples investigaciones un tema central (Socas, 2011; Castro, 2008, Kieran, 2007), donde algunos señalan que existe ciertas dificultades para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de las investigaciones y aplicarlos en la instrucción. También hay trabajos que ponen su énfasis en el desarrollo profesional (didáctico, matemático, filosófico, epistemológico, etc.), y en los conocimiento y creencias de los profesores para la enseñanza del álgebra, sin embargo, quedan aún grandes áreas de investigación que necesitan indagarse.

De acuerdo a lo planteado, la formación del maestro referida a la actividad algebraica que despliega, ha sido un asunto de interés en la investigación de la Didáctica del álgebra, en este orden de ideas, este trabajo considera importante indagar las prácticas algebraicas que manifiesta el docente en la resolución de problemas, y realizar algunas reflexiones acerca del razonamiento algebraico que pone de manifiesto en dichas prácticas, para así dar posibles implicaciones de la actividad algebraica de él en la promoción y desarrollo del razonamiento algebraico en sus alumnos, con lo cual se espera aportar a la literatura existente.

[1] El álgebra escolar a la que aquí se alude refiere al álgebra de las expresiones algebraicas, la cual trabaja con objetos del álgebra clásica, donde la resolución de ecuación se hace por radicales, la cual circula en los currículos institucionales de la Educación Básica Secundaria en Colombia. En adelante, sin hacer distinción alguna, se entenderá que es únicamente a esta álgebra a la que se hace referencia.

Para indagar sobre las prácticas matemáticas de los docentes, se seleccionaron dos maestros de la Educación Básica Secundaria y media que enseñan o hayan enseñado álgebra en su labor docente, a los cuales se plantearon seis problemas y haciendo uso del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS), se analizaron los tipos de objetos y procesos matemáticos que emergen e intervienen sus prácticas matemáticas al resolver dichos problemas. Dicho análisis permitió caracterizar su actividad como más algebraica o menos algebraica, según niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014), que inician en un nivel 0, con una ausencia de características algebraicas, seguidos de dos niveles primarios o incipientes de actividad algebraica, hasta otros cuatro niveles en los que se considera la actividad matemática como propiamente algebraica.

Ciertamente este trabajo permite reflexionar sobre el razonamiento algebraico manifestado en las prácticas matemáticas del docente y sus competencias para promover dicho razonamiento, lo cual, puede brindar pautas interesantes para emprender planes de formación tanto para docentes en ejercicio como para futuros docentes, el cual se desarrolla en cuatro capítulos:

En el primer capítulo se presenta la problemática de la investigación partiendo de la preocupación por la influencia del docente en el aprendizaje del álgebra y la necesidad que el maestro reconozca y promueva el razonamiento algebraico en sus estudiantes, se presentan también los objetivos que orientan el trabajo, la justificación del mismo y las etapas que componen esta investigación.

En el segundo capítulo se expone los referentes conceptuales, para ello se presentan tres apartados, a saber: en el primero, se presenta el EOS desde el cual se considera, caracterizar una práctica y el pensamiento que la acompaña a partir de los objetos y procesos. En el segundo, se exponen algunas características del razonamiento algebraico tomadas de la literatura y los dos referentes anteriores permiten concebir un tercer apartado los niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014), este modelo articula bajo la interpretación del EOS, las diferentes características del razonamiento algebraico.

En el tercer capítulo, se presentan los cinco problemas seleccionados, se describe la población objeto de estudio, la implementación de las hojas de trabajo y la entrevista y finalmente se presenta el análisis y los resultados obtenidos.

En el último capítulo se desarrollan las conclusiones de la investigación y las reflexiones sobre las prácticas algebraicas de los docentes y su impacto en el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes.

CAPITULO 1

ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO

En este capítulo se presentan algunas consideraciones sobre un aspecto central en la enseñanza y aprendizaje del álgebra la formación de profesores, tomando de diversos estudios en didáctica del álgebra cuestiones que permiten ubicar la problemática de investigación, la cual surge de la preocupación por la influencia del docente en el aprendizaje del álgebra y la necesidad que el docente reconozca y promueva el razonamiento algebraico en sus estudiantes, tal como ha sido discutido en múltiples investigaciones en el campo de la Educación Matemática y en particular, qué rasgos algebraicos manifiestan las prácticas matemáticas de un docente, en una situación problema. También se presenten en este capítulo los objetivos generales y específicos, la justificación y finalmente se describe la metodología y las etapas que componen esta investigación.

1.1 Presentación del problema de estudio

Las investigaciones en Didáctica del álgebra (Socas, 2011; Palarea, 1999; Castro, 2012) durante las últimas décadas han reportado numerosas dificultades, obstáculos y errores que presentan tanto los estudiantes en el proceso de aprendizaje del álgebra como aquellas relacionadas con su enseñanza. Ciertamente dichas dificultades son atribuibles, en parte, al desarrollo cognitivo de los alumnos, a la dificultad inherente a las propias matemáticas, y a la forma en que los profesores organizan el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, entre otros (Socas, 1997; Garriga, 2011). Y es en la forma de enseñar de los docentes, donde se evidencia diversas concepciones que este tiene del álgebra, impartidas en el aula que define en gran manera como los estudiantes la aprenden. En este mismo orden de ideas, Santos (1993) afirma que las ideas que los profesores tengan acerca de las matemáticas moldean las actividades del salón de clases, las tareas, la metodología, la evaluación, y en general su quehacer pedagógico. Así, por ejemplo, si el profesor asume el álgebra como un tópico de reglas sintácticas, enseñadas en un lenguaje simbólico, entonces los estudiantes deberán dominar las habilidades de manipulación simbólica antes de aprender acerca de la finalidad y el uso del álgebra.

Por eso algunas dificultades reportadas en investigaciones se agudizan debido algunas de estas concepciones que resaltan lo sintáctico sobre lo semántico, que desconocen la experiencia previa de los estudiantes en el dominio numérico, métrico y espacial, tanto en lo que saben cómo en las particularidades de ese conocimiento que debe ser reconocido para efectos de la construcción de un nuevo conocimiento (Castro, 2008).

Se deja ver hasta el momento la preocupación del impacto de las concepciones del docente y de sus prácticas, en lo que aprenden los estudiantes Por lo cual, se considera necesario abordar el análisis de las prácticas algebraicas de algunos profesores, puesto que generalmente los docentes están alejados de tener una visión amplia del álgebra, y lo manifiestan en sus prácticas, sin tener presente los aspectos que brindan las diversas perspectivas para introducir el álgebra y promover el razonamiento algebraico en los estudiantes (e.g. Benardz, Kieran y Lee, 1996). Tal como lo afirma Rico (1997) para la enseñanza de las matemáticas en general (1997) “el profesor es un profesional que se ha iniciado en la práctica de la enseñanza mediante ensayo y error, que ha logrado su competencia y capacitación con escasa ayuda institucional" (p.19). Se trata entonces de resaltar la necesidad de formación para los profesores de matemáticas tal cual como se ha debatido durante los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Rico, 1997, 1998; Bedoya, 2011; Puig, 1998*a*; Flores y Fernández, 2001; Socas, Camacho & Hernández, 1998).

A lo anterior se propone, que un paso previo será conocer e indagar sus conocimientos, por esto a través de este estudio se caracteriza el razonamiento algebraico de algunos docente que permite proponer aspectos para planes de formación de los docente, donde la manera de concebir la enseñanza y aprendizaje sea a partir de tares de geometría, de números y operaciones, de análisis de datos, etc. a través de las cuales se desarrolle razonamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad, siendo el objetivo facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión

Este aspecto, de ir introduciendo el carácter algebraico desde la matemática elemental, a través de tareas, no es una labor sencilla, puesto que, es necesario que los docentes tengan "oídos y ojos algebraicos" que identifiquen las oportunidades para promover y desarrollar el razonamiento algebraico (Aké, 2013). En este sentido el profesor necesita tener cierta formación como a continuación lo expone Azcarate (1998):

> En general y en lo que respecta a los profesores de matemáticas uno de los aspectos en que todos están de acuerdo es en la necesidad de conocer a profundidad su materia y las relaciones con otras áreas, pero no solo en el sentido de un conocimiento formal del contenido, sino de un profundo conocimiento de la naturaleza de las matemáticas, su estructura, sus relaciones y sus representaciones, sus conocimientos filosóficos y epistemológicos, datos con una considerable incidencia en la selección y secuenciación de los contenidos y su tratamiento en el aula. (p.133)

Entonces los docentes deben reconocer las relaciones con otras áreas; su naturaleza; sus representaciones; sus rasgos característicos. Todos estos aspectos se pueden considerar, a través de varias perspectivas del álgebra, lo cual se concreta en una caracterización del razonamiento algebraico, llamada los niveles de algebrización propuesto por Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi (2014).

Así, desde este enfoque el modo en que los docentes llevan a cabo su práctica y su formación didáctica-matemática, influyen en la promoción y desarrollo de este razonamiento en el aula de clase. Esta visión del álgebra, tiene en cuenta: los procesos de generalización, simbolización, lo funcional y estructural, la modelación, el cálculo analítico y también crea un vínculo significativo ente el pensamiento algebraico en la enseñanza de secundaria y primaria. De manera que, se hace importante analizar las prácticas matemáticas que el docente manifiesta, a luz del modelo mencionado, el cual hace posible distinguir distintos niveles de algebrización de las prácticas, el cual deja ver el desarrollo del razonamiento algebraico como una cuestión progresiva. Investigaciones (Beadnerz, Kieran y Lee, 1996) muestran que los maestros, cuando hacen acciones informadas, hay mayores probabilidades que la conciencia de los alumnos este siendo activada, que cuando el profesor no es consciente de los objetos matemáticos trabajados, de las relaciones existentes, etc.

Cuestiones como las anteriores poseen una influencia directa en la forma en cómo las matemáticas en general, y en álgebra en particular son enseñadas y muestran la necesidad de poner en el centro de atención al docente, debido al papel fundamental y determinante de este en el aprendizaje las matemáticas (Santos, 1993; Azcarate, 1998; Rico, 1994) y, por tanto, en la promoción y desarrollo del razonamiento algebraico (Aké, 2013). Por esto, el interés en este trabajo está en examinar el razonamiento algebraico de algunos maestros en ejercicio, el cual es caracterizado, entre otros autores, por Godino et al. (2014) según niveles de algebrización, en los cuales se presentan rasgos de este razonamiento.

Así, se propone analizar las prácticas matemáticas del maestro al resolver problemas y por tanto el razonamiento algebraico manifestado en dichas prácticas, para ello este estudio pretende responder el siguiente interrogante.

¿Qué características del razonamiento algebraico presentan algunos maestro de educación básica secundaria y media, a partir de los niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014) en sus prácticas matemáticas cuando resuelven algunos problemas?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar el razonamiento algebraico de algunos maestros de la educación básica secundaria y media a partir de los niveles de algebrización propuesto por Godino et al, (2014), manifestado en sus prácticas matemáticas cuando resuelven algunos problemas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar el razonamiento algebraico desde la perspectiva del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) según niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014), a partir de la emergencia de objetos y procesos de las prácticas matemática

- Identificar y caracterizar en las prácticas matemáticas los objetos matemáticos, sus atributos contextuales y procesos de los maestros objetos al solucionar los problemas

- Proponer algunas reflexiones y recomendaciones sobre la formación docente en relación con la promoción y desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes.

1.3 Justificación

El álgebra se considera uno de los pilares del conocimiento matemático, con un rol en el desarrollo de avances científicos y tecnológicos, en los cuales se utilizan sistemas de codificación, se diseñan y avalúan modelos, se plantean y analizan generalizaciones, estimaciones y predicciones (Martínez, 2014). El álgebra es importante para la vida adulta, tanto para el trabajo como para la educación superior (Aké, 2013), así su aprendizaje representa un aspecto esencial en el proceso de formación matemática de todos los estudiantes.

Según lo anterior, enseñar álgebra en la escuela es importante y para tal labor investigaciones (Rico, 1997; Aké, 2013; Godino et al, 2014; Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A., 2015) consideran al profesor un agente fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Por tal motivo, el estudio de las prácticas matemáticas del maestro, se hace significativo porque la manera de ver el álgebra del docente es movilizada en el aula de clase y consecuentemente en sus prácticas matemáticas en la resolución de tareas, así que indagar estas prácticas, permiten caracterizar el razonamiento algebraico que los docentes manifiestan, permitiendo ver que rasgos algebraicos intentan movilizar en sus estudiantes, entonces se hace pertinente llamar la atención en que los maestros no deberían ver el álgebra como una lista de procedimientos y conceptos sino como una forma de pensamiento (Stephens, 2008), que desea desarrollar en sus estudiantes.

Debido a que el pensamiento algebraico es una manera pensar y actuar muy compleja, no es suficiente con elaborar propuestas curriculares, es necesario que los maestros participen de la concepción amplia del álgebra que proponen diversas investigaciones (Ake, 2013; Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012). Cuestiones como las anteriores permiten mostrar la importancia de este estudio, puesto que presenta una caracterización del razonamiento algebraico que deja claro una forma de entenderlo y abordar su desarrollo en los estudiantes.

Dado que el profesor tiene gran responsabilidad con la promoción del razonamiento algebraico, se hace importante estudiar sus prácticas matemáticas, sobre todo porque, el profesor debe ser capaz de crear oportunidades para ubicar el razonamiento algebraico a partir de tareas geométricas, de medida, aritméticas, etc. como parte de sus clases. Por lo cual se espera que los rasgos algebraicos que presenta el docente en las prácticas permitan ver el desarrollo de su sentido algebraico como lo nombra Aké (2013). Por lo tanto el profesor debe tener unas competencias algebraicas para enfrentar esta tarea.

Esta cuestión de indagar el conocimiento del profesor, se justifica dado que el conocimiento que el maestro exhibe ha sido identificado como un aspecto determinante en su gestión docente e incide en las ideas que impartirá a los estudiantes (Castro, 2008; Aké, 2013; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014), se precisa, entonces, reflexionar acerca de los conocimientos que los maestros poseen de índole algebraico. De modo que, la formación del maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones y procesos algebraicos, para describir su función central en la actividad matemática y ser maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles de escolaridad (Godino et al., 2012).

Además de lo anterior, este trabajo se hace importante, porque a pesar de que hay diversos estudios en la formación de profesores, los hay en mayor medida dirigidos a investigar las situaciones presentadas en el aprendizaje del álgebra escolar (Socas, 2011). Por tal motivo, se pretende resaltar el papel protagónico del quehacer del maestro.

De acuerdo con el propósito de este trabajo, se identifican rasgos algebraicos de las prácticas manifestadas por los docentes, según los niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014) recientemente, dado que este modelo está en su génesis se considera que este trabajo puede ser material para aplicar este modelo, incluso realizar aportes o sugerencias a este, poniendo en práctica esta herramientas ya investigada, lo cual hace también significativo este estudio.

Una vez analizadas las prácticas matemáticas del docente, según las herramientas del EOS (configuración de objetos y procesos) y los niveles de algebrización, se tendrá características de la actividad algebraica manifestada de algunos maestros, lo cual permite detectar las necesidades formativas y favorecer, impulsar, fomentar o desarrollar planes de formación para maestros para fortalecer sus debilidades y potenciar sus fortalezas, quedando abierta esta investigación. Por lo que se considera brindar elementos para pensar este tipo de problemas, si se quisiera aportar al desarrollo del razonamiento algebraico del maestro.

Así que, estudiar las prácticas matemáticas, los objetos y procesos que intervienen en la misma, es una cuestión de interés para la investigación en educación matemática, dado que la educación se ocupa de mejorar la enseñanza y aprendizaje y un paso previo deberá ser comprender con profundidad los conocimientos que se desean promover y desarrollar.

1.5 Metodología

Dado que, el propósito de este trabajo es analizar las prácticas matemáticas del docente, identificando objetos y procesos algebraicos que permiten caracterizar su razonamiento algebraico según niveles de algebrización propuesto por Godino (2014), este se describe dentro del paradigma investigativo cualitativo, con estudio de casos. Los trabajos de este tipo, según Cohen & Manion (1990) tiene como propósito observar las características de una unidad que puede ser: un individuo, un niño, una familia, una clase o una comunidad, el fin de tal observación es analizar, examinar e indagar los diversos elementos que constituye la investigación.

Atendiendo lo anterior, el presente trabajo se estructura en tres fases, en la primera de estas se planearon todos los elementos que direccionan el trabajo, donde se registran cuestiones como la problemática de estudio en relación con el papel del maestro en la actividad de aula, para lo cual se toman como referente diversas investigaciones; también se delimitan los referentes teóricos que orientan el trabajo, tales como: el EOS, el razonamiento algebraico y los niveles de algebrización, los cuales permiten realizar un análisis y ofrecer algunas consideraciones de las prácticas matemáticas del docente, de sus competencias algebraicas y de la promoción de razonamiento algebraico en sus estudiantes.

En la segunda fase se delimitan los seis problemas que fueron solucionados por los docentes, son tomados de Castro (2008) y Aké (2013), pero al sexto problema se le hacen algunas modificaciones, debido a los propósitos del trabajo. Los problemas fueron escogidos a partir de realizar la lectura del análisis epistémico, este análisis mostró que los primeros cuatro problemas permiten a los maestros manifestar una práctica matemática en cualquiera de estos niveles 0, 1, 2 o 3, el quinto problema se caracteriza en que exige al resolutor una actividad algebraica descrita en el nivel 3, donde se considera la actividad matemática propiamente algebraica y el sexto problema, da cuenta de las prácticas relacionadas con un nivel 5. En el capítulo 3, para cada uno de los problemas se ha recopilado las soluciones esperadas y un análisis detallado de las mismas basadas en el marco teórico, tomadas de Aké (2013).

Se eligieron tres docentes en ejercicio de la Educación Básica secundaria y media, que fueron estudio de caso tomando como criterio el hecho que hayan enseñado álgebra, se diseña una entrevista semi-estructurada a partir de los registros que presentan los docentes en la hoja de trabajo, esto con el propósito de aclarar aspectos que permiten profundizar en rasgos del razonamiento algebraico manifestado por el docente, en la resolución de los problemas propuestas.

Y en la última fase, se realiza un análisis de las soluciones presentadas por los docentes y del material audiovisual de las entrevistas, intentando con ello analizar su razonamiento algebraico, de acuerdo a las nociones teóricas indicadas en la fase 1. Consolidando en cada etapa la escritura del informe final, se pretende culminar en esta. A continuación se presenta una tabla con una síntesis de la información de cada fase mencionada

Fase 1: Delimitación del trabajo	***Fase 2: Diseño y recolección de la información***	***Fase 3: Análisis de la información recolectada***
En esta fase, se pone de manifiesto varios aspectos como la problemática, los objetivos, la justificación, los referentes teóricos que permiten analizar las prácticas del docente, entre otras que dejan ver los propósitos que se tiene con este trabajo.	En esta fase, se precisan los criterios para seleccionar los profesores y los problemas, se presenta un análisis a las posibles soluciones de estos problemas, se recogieron los datos mediante hojas de trabajo y material audiovisual de las entrevistas.	En esta etapa, se realizó un análisis de las soluciones presentadas por los maestros usando uno de los análisis del EOS y se caracteriza el razonamiento algebraico manifestado por ellos en la resolución de problemas según niveles de algebrización propuestos por Godino et al. (2014).

Tabla 1. Síntesis de la metodología desarrollada en este estudio.

CAPITULO 2

MARCO DE REFERENTES CONCEPTUALES

En este capítulo se presentan los referentes conceptuales que dirigen el trabajo, los cuales permitirán hacer una descripción detallado de las prácticas algebraicas de los maestros y analizar la información recolectada de acuerdo con el propósito. Para ello se presentan tres apartados a saber: el primero, Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009), desde el cual se considera que, en la actividad matemática emergen e intervienen objetos y procesos matemáticos; seguido de una aproximación al razonamiento algebraico (Aké, 2013), en este se presentan algunas características tomadas de la literatura, estos dos referentes anteriores permite concebir unos niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014), los cuales se ilustrara mediante ejemplos, estos permite caracterizar las prácticas matemáticas de un sujeto como más o menos algebraicas, es decir, este modelo articula bajo la interpretación del enfoque ontosemiótico, las diferentes características del razonamiento algebraico.

2.1 Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

Godino (2002) señala que hay diversos trabajos que muestran la variedad de programas de investigación en el campo de educación matemática, manifestando la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en relación al estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el crecimiento de la Didáctica de las Matemáticas y de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para entender de mejor manera sus objetos de estudio. Como parte de este creciente corpus teórico, Godino y un conjunto de colegas vio la necesidad de construir un enfoque teórico unificado, el cual se conoce hoy día como el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Este enfoque teórico no surgió solamente de la unión de elementos de distintos enfoques, sino que fue necesario elaborar otros elementos nuevos, para evitar redundancias y conservar una consistencia en este enfoque, el cual se fue construyendo progresivamente y ha ido refinando sus nociones teóricas, a lo largo de tres etapas (Godino et al., 2012): t*eoría de significados sistémicos, teoría de funciones semióticas y teoría de configuración Didácticas*

En la primera etapa, sus trabajos desarrollaron y precisaron las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión; en la segunda etapa, consideraron necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta el momento, continuaron con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones; en la tercera etapa se interesaron por modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre instrucción matemática.

En las etapas anteriores se elaboraron las nociones teóricas que constituyen el enfoque ontológico semiótico, clasificadas en cinco grupos cada una de las cuales permite un nivel de análisis didáctico de naturaleza distinta pero que se articulan para comprender la complejidad inherente de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2012):

1. Sistemas de prácticas

2. Configuración de objetos y procesos
3. Configuración Didáctica
4. Dimensión normativa
5. Idoneidad didáctica

De acuerdo con esto, el enfoque del EOS comprende el estudio de cinco tipos de análisis didácticos, tal y como lo señala su progenitor. Dado el interés de este trabajo, esto es, caracterizar el razonamiento algebraico según los niveles de algebrización que se despliegan en la práctica matemática del docente, se centra la atención en uno de los niveles de análisis: la configuración de objetos y procesos, porque permite describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas, caracterizando una práctica matemática y el pensamiento que la acompaña en términos de objetos y procesos que interviene en las prácticas, las cuales tiene lugar cuando una persona se enfrenta a una tarea o un problema. A continuación se caracterizan las variables teóricas de este nivel.

2.1.1 Configuración de objetos y procesos

En el EOS se ha introducido la noción de configuración de objetos y procesos como un recurso para describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas matemáticos. Esta noción incluye el estudio de tipos de objetos (naturaleza ontológica) que intervienen y emergen de las prácticas y los procesos ligados a dichos objetos.

Para entender la configuración de objetos y procesos es central la noción teórica de *práctica matemática*, entendida como "toda actuación o expresión (verbal, grafica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p.334), es decir, es todo lo que hace o dice una persona o ente institucional para atender cierto tipo de tarea o problema, comunicarlo y validar o generalizar su solución. Se debe aclarar que una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas (Godino, Batanero y Font, 2009).

En estas prácticas matemáticas emergen e intervienen *objetos matemáticos*, los cuales se conciben como: “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas” (D`amore, Font & Godino, 2007, p. 4), desde esta perspectiva el objeto matemático no se concibe como un ente inteligible, de naturaleza abstracta, sino como un ente que emerge al hacer matemáticas. Ahora, en toda práctica matemática emerge e intervienen diversidad de objetos matemáticos, lo cual implica considerar dos niveles de ellos, en el primer nivel se tiene los *tipos de objetos matemáticos primarios*, los cuales se describen a continuación:

Elementos lingüísticos: es entendido en este marco teórico como los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los que se presentan, a su vez, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

Situaciones problemas: son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas.

Conceptos – definición: corresponden a aquellas construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.

Proposiciones: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.

Procedimientos: comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modo de ejecutar determinadas acciones.

Argumentos: Comprenden enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución del problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo.

En el segundo nivel, se tienen los *atributos contextuales* aplicables a los distintos objetos primarios, estos son:

Personal-institucional: si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338).

Expresión-contenido: relativos al significante – significado, de este modo, el signo (la marca) funge como la expresión, y aquello a lo que evoca, como su contenido.

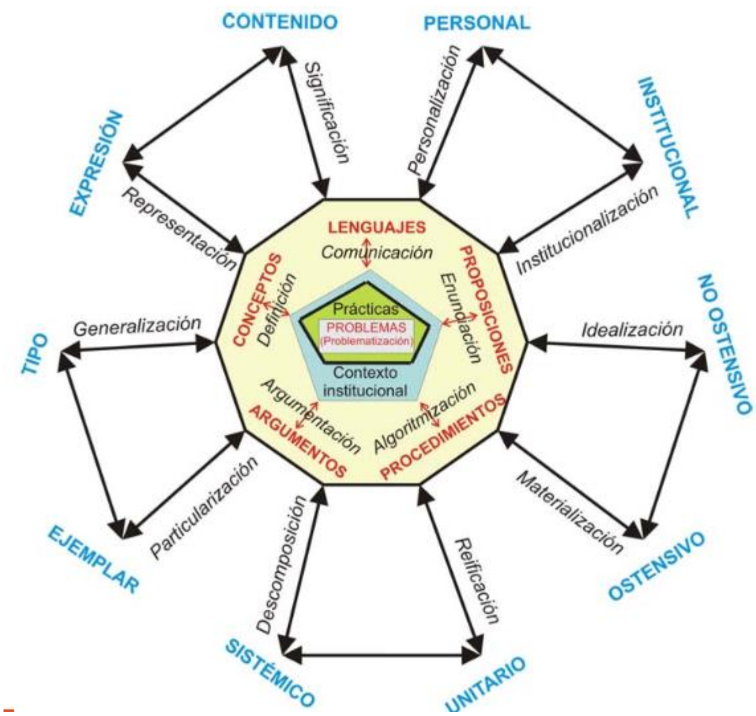
Ostensivo - no ostensivo: un objeto matemático tiene carácter ostensivo en tanto participa de sistema de representación que lo hace presente, público, con lo cual se hace posible mostrarlo. Los objetos personales e institucionales son esencialmente no ostensivos, por lo cual es necesario de ostensivos (símbolos, gestos, gráficos, entre otros) para su comunicación. Relativos al público que se puede mostrar a otro o no perceptibles por sí mismos

Extensivo-intensivo: esta dualidad contextual permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general. Así se puede tener un objeto que evoca a un caso particular (extensivo) de un caso general (intensivo). Ejemplo: en el estudio de funciones, $y = x^2 + 5x + 2$, seria una función particular perteneciente al tipo de funciones cuadráticas, $y = x^2 + bx$ +c (esta función sería un objeto intensivo)

Unitario-sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio, es decir, como entes sistémicos. Ejemplo: En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en los primeros cursos de primaria tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Teniendo en cuenta los objetos matemáticos primarios y sus posibles atributos contextuales, el EOS describe tipos de *procesos* en cada uno de los niveles de objetos, en donde los objetos primarios tienen lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación. Mientras que las dualidades contextuales a diferencia de los objetos primarios, dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos como: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; concreción – abstracción; expresión – significación.

A continuación se exhibe en un esquema las diferentes nociones teóricas descritas hasta el momento.



Esquema 1. Articulacion de nociones teoricas presentes en la configuracion de objetos y procesos matematicos. (Esquema tomado de Godino, Batanero y Font, 2009, p.10)

En el esquema 1, se muestra como en el EOS las prácticas matemáticas ocupan el lugar central, siendo la situación-problema la promotora de las prácticas matemáticas de un sujeto, se entiende entonces que una situación-problema comprende problema más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios o cualquier tarea que implique utilizar unos conocimiento (son situaciones problemas) y una práctica como todo aquello que hace o dice un sujeto para resolver dicha situación-problema. Y es esta práctica matemática lo que permite la emergencia de los objetos matemáticos primarios mediante los procesos de argumentación, algoritmización, enunciación, comunicación y definición; así mismo, se consideran como los atributos contextuales que pueden ser aplicables a los objetos matemáticos primarios, dependiendo del lenguaje empleado en las prácticas matemáticas, dan lugar a los procesos de institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; concreción – abstracción; expresión – significación.

Para los propósitos de este trabajo se tomaron los siguientes nociones teóricas del EOS, los tipos de objetos matemáticos primarios (conceptos, argumentos, procedimientos, proposiciones, lenguajes) y de los procesos la generalización, particularización, reificación, materialización.

Ahora bien, esta herramienta del EOS que permite describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas matemáticos, nos ayuda hacer un análisis en términos de tipos de objetos y significados, que permiten poner de manifiesto los rasgos algebraicos de un problema matemático, este análisis se entiende como *análisis epistémico*, es decir, consiste en identificar y poner en correspondencia los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) puestos en juego en una solución posible de un problema con los respectivos significados, este análisis puede explicar los posibles errores y dificultades frecuentes en la resolución de tareas matemáticas y el *análisis cognitivo*, consiste en el estudio de las respuestas dadas al problema por un resolutor o un grupo de resolutores tomando en consideración los resultados del análisis epistémico (Rivas, Godino y Konic, 2009). De este modo en este enfoque se proponen estos dos análisis (epistémico y cognitivos) que son tomados para los propósitos de este trabajo, tal y como se presentara en el siguiente capítulo.

2.2 Una aproximación al razonamiento algebraico (RA)

En el siguiente apartado se recogen las diferentes caracterizaciones del razonamiento algebraico que han planteado diversas investigaciones, las cuales permiten identificar lo que el docente puede considerar como algebraico para su enseñanza y promoción en la escuela. Esto con el propósito de identificar rasgos que aporten a una caracterización del razonamiento algebraico y a su desarrollo en los estudiantes, a través del diseño de tareas que lo promuevan.

Martínez (2014) aporta que concebir el razonamiento algebraico como una habilidad más compleja que la tarea de aprender álgebra, corresponde con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional de Colombia que propone el pensamiento variacional como un tipo de pensamiento matemático superior que incluyen los demás tipos de pensamientos, con respecto a lo antes mencionado, Vasco (citado por Martínez, 2014) piensa que el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables. Por lo que el razonamiento algebraico comprende ciertamente al pensamiento variacional.

El razonamiento algebraico implica identificar patrones y regularidades, codificarlos, generalizarlos y formalizarlos en cualquier contexto, sea éste matemático o no. A medida que estas habilidades se desarrollan, se mejora el uso del lenguaje y el simbolismo que representa y permite comunicar el pensamiento algebraico, y de esta manera llena de significado, se da lugar al uso de las variables, las ecuaciones y las funciones (Godino & Font, 2003)

Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (citado en Godino et al., 2014) señalan asimismo que el razonamiento algebraico implica también:

- Desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones.
- Transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta.
- Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones

(ej., asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).

Kaput (2008) identifica dos aspectos característicos del razonamiento algebraico: el primer aspecto, el álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones, es decir, este aspecto tiene que ver con el reconocimiento y hacer explicita la generalidad, usando diversos lenguajes. El segundo aspecto, el álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales, en este aspecto se expresan generalidades propiamente en un lenguaje simbolico- literal, y se opera de manera analítica con dicho lenguaje.

También Radford (2011) destaca como rasgo típico del razonamiento algebraico la generalidad, en este sentido estudia los tipos de generalizaciones de patrones numérico-geométricos, identifica dos tipos de generalización pre-algebraica: la generalización factual y la contextual[2], y llama las generalizaciones de un nivel más avanzado las simbólicas algebraicas[3]. Esto se puede interpretar en términos de "capas de generalidad" (Aké, 2013), Radford (citado en Godino, 2012) también considera que tratar con cantidades indeterminadas como si fueran conocidas y operar con ellas como lo hace con números conocidos, distingue un modo algebraico de pensar.

Otros autores como Puig y Rojano interesados también en definir lo algebraico, proponen las siguientes características: el uso de un lenguaje simbólico-literal, la ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos que les permita representar cualquier tipo de objeto

---

[2] Las generalización factuales están frecuentemente asociadas a un nivel concreto, como al uso de símbolos numéricos, el discurso no va más allá de los ejemplos particulares, los medios de expresión en este nivel son términos deícticos, gestos, actividad perceptual y acciones corpóreas. Las contextuales no se hace uso de los gestos, los deícticos desaparecen y no centran su atención en un elemento de la secuencia, sino en cada uno de los objetos de ella, logrando percibir la generalidad, se empiezan a utilizar términos y adjetivos que describen de manera precisa el espacio que ocupan los elementos; un ejemplo, es el uso de palabras *arriba, abajo* o recurren a términos lingüísticos como la *figura anterior* o la *figura siguiente*, que se refieren a un representante genérico, aun no recurren al lenguaje de símbolos (como ***n*** para representar la posición de la figura), los términos lingüísticos quedan entonces arraigados al contexto

[3] Estas aparecen, en tanto que se usa el lenguaje simbólico para representar el patrón, sin embargo, esta representación está sujeta al contexto espacio-temporal de la situación, aun no reconocen las formas canónicas de expresión de generalidad.

matemático y el carácter analítico del uso de los sistemas de signos para llegar a una forma canónica.

Aké (2013), cita a Kaput y Lins; Carpenter y Levi; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, mostrando que hay una discrepancia en caracterizar el razonamiento algebraico ya que se centran en dimensiones específicas de su interés, por lo tanto considera que el análisis de este razonamiento algebraico y su caracterización aún está en su infancia, Sin embargo, afirma que hay un consenso en distinto autores en que la generalización resulta fundamental para que una tarea pueda tener un carácter algebraico. Además, reconoce que las situaciones y prácticas algebraicas pueden implementarse apoyadas en el uso de la lengua natural, y otras formas no analíticas de expresión, empero se reconoce que lo simbólico es un rasgo algebraico central. Precisa tener en cuenta que existe una concepción más amplia sobre la naturaleza del álgebra en la que el énfasis no está en el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos, sino que el objetivo es desarrollar el razonamiento algebraico, no el uso experto de los procedimientos del álgebra.

Lo anterior se puede interpretar, como el razonamiento algebraico puede ser adquirido a través del desarrollo progresivo de un lenguaje, al tiempo que se reconoce, se expresa y se transforma las generalizaciones, en el campo de las relaciones (equivalencia o de orden), estructuras, el estudio de funciones y en la modelización de situaciones, a través de diversas tipología de tareas.

Nótese que además de las indicaciones de Aké (2013), el razonamiento algebraico es muy potente en el trabajo matemático, puesto que permite justificar procedimientos, demostrar que esas transformaciones son válidas, comprender conceptos, estructuras y principios que rigen dichas manipulaciones, registrar ideas y ampliar la comprensión de las situaciones, donde el álgebra puede ser utilizada como herramienta.

Así, el razonamiento algebraico es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización- particularización, teniendo como resultado, la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad. Esta manera de pensar puede ser desarrollada a partir de tareas aritméticas, de medida, geométricas y de análisis de datos. Además, actividades como analizar las relaciones entre cantidades, notar la estructura, el estudio del cambio, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir, entre otros, son fundamentales para generar y promover este razonamiento (Godino et al., 2014).

2.2.1 Elementos para una caracterización del razonamiento algebraico propuesta por Godino et al. (2014).

Hasta este punto se ha presentado como diversos autores *caracterizan del razonamiento algebraico*, además de algunas nociones d*el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)*, el cual propone una tipología de *objetos* que interviene en las prácticas matemáticas y unos *procesos* ligados a dichos objetos que ayudan a una caracterización del razonamiento algebraico que permite varios *niveles de algebrización*. Estos surgieron de tomar en consideración rasgos característicos del razonamiento algebraico propuestos por autores mencionados en el apartado anterior y de tomar los elementos del EOS antes mencionados. Se explica como Godino y colaboradores articulan estos elementos que permite una concepción del razonamiento algebraico, la cual propone unos niveles de algebrización, que serán ampliados en el apartado siguiente.

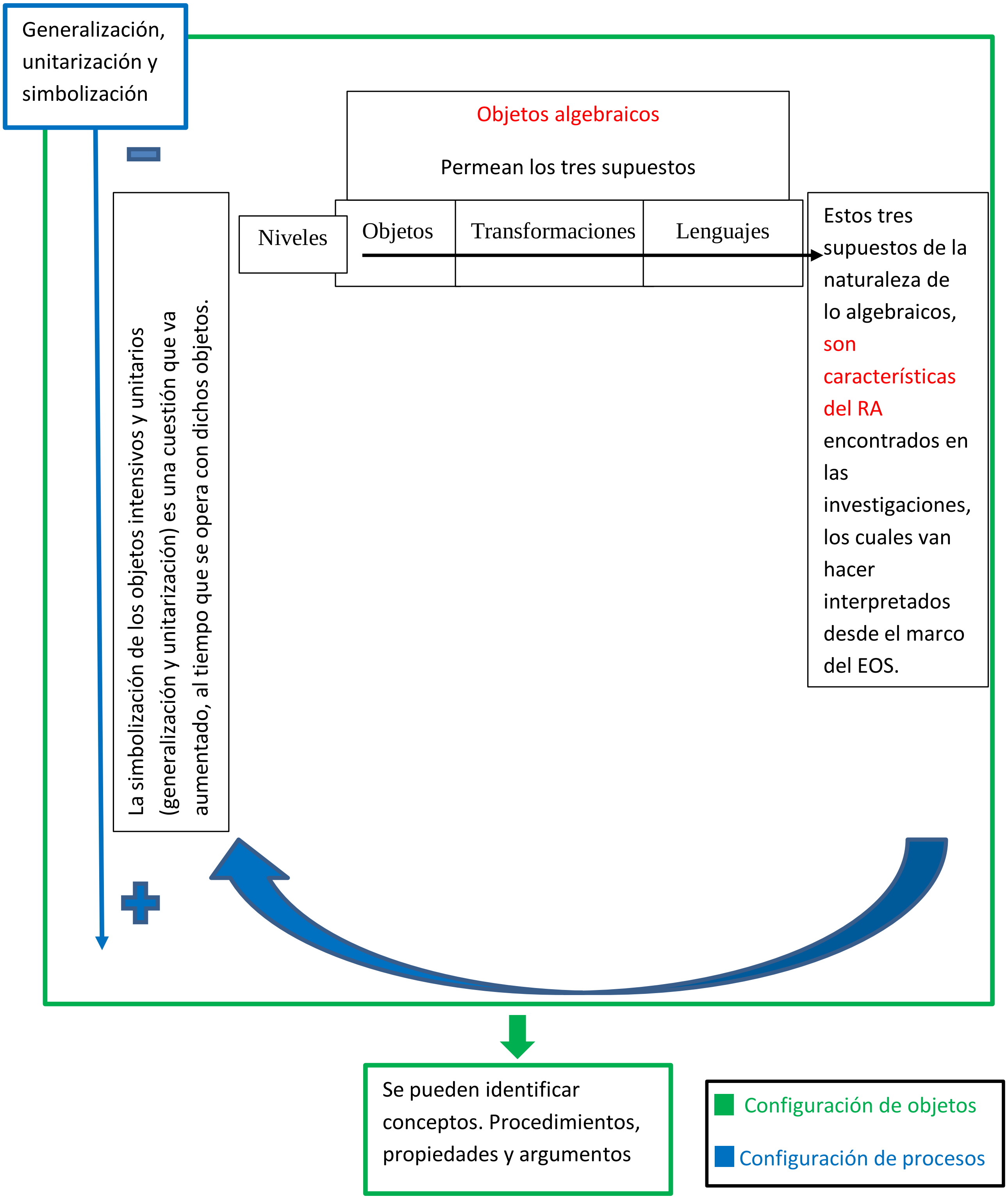
En el EOS, la actividad matemática, algebraica o de otro tipo, tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas. En esas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. Por esto, la caracterización de una práctica, y el pensamiento que la acompaña, como de índole algebraica habrá que hacerla en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma.

De acuerdo a lo anterior, Aké (2013) propone una caracterización de la práctica algebraica y de su pensamiento (razonamiento algebraico), considerando desde la literatura los siguientes objetos algebraicos[4]: *relaciones binarias, operaciones y propiedades, funciones* y *estructuras*. Estos pueden ser conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, expresados en un lenguaje. Además, estos objetos que interviene en las prácticas algebraicas, desde el marco del EOS pueden tener unos atributos contextuales[5] que se consideran, junto con otros autores, rasgos característicos de la actividad algebraica: la dualidad extensivo-intensivo, unitario-sistémico y ostensivo- no ostensivo, también se tiene en cuenta que los respectivos procesos que acompañan a cada dualidad son fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por lo tanto, la consideración de una práctica matemática como de índole algebraica, puede hacerse con base en la presencia de cierto tipo de objetos. De aquí que la presencia o ausencia de algunos de ellos establezcan pautas para considerar más algebraica o menos algebraica una práctica.

A continuación se presenta la articulación de las nociones teóricas presentadas anteriormente para la caracterización del RA tomado en este enfoque:

[4] En el siguiente apartado se caracterizan estos objetos algebraicos.
[5] En el próximo apartado se ampliaran estas dualidades y sus procesos, que ayudan a la caracterización de la práctica algebraica,



Esquema 2. La articulación de las nociones teóricas para la caracterización del razonamiento algebraico, según niveles de algebrización.

En este sentido Aké (2013) plantea una concepción del razonamiento algebraico que surge por una parte de las investigaciones realizadas en torno a la inclusión del álgebra en primaria y la algebrización del currículo, y por otro lado, de considerar desde la perspectiva del EOS las herramientas de análisis que permiten distinguir que objetos matemáticos tiene una naturaleza algebraica y en qué medida pueden ser introducidos en la escuela elemental. Esta concepción permite la integración del razonamiento algebraico en todos los grados.

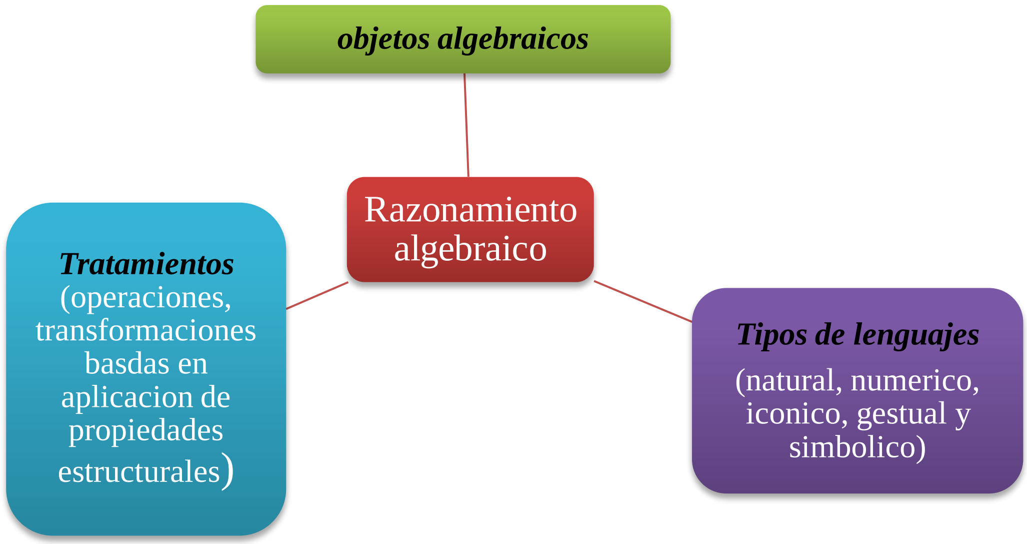
Esta caracterización se plantea de la siguiente manera, considerando desde la literatura que los procesos de generalización y la formalización de una generalidad, son importantes para el desarrollo del razonamiento algebraico, se tiene en cuenta este aspecto como parte fundamental para esta caracterización, pero es en términos de la presencia de objetos intensivos o extensivo que consideran la generalización, así, es a través de la identificación de objetos intensivos o extensivos que desde el EOS se propone un análisis más profundo de las prácticas matemáticas. Este proceso de generalización lo acompaña el de simbolización que permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión. Luego ese objeto intensivo pasa a ser visto como una entidad unitaria, este proceso lo describe la dualidad unitaria-sistémica, además de la generalización y unitarización, la entidad unitaria tiene que ser hecho ostensiva mediante un nombre, icono, gesto o símbolo, y finalmente este símbolo se desprende de los referente a los cuales representa para convertirse en el objeto sobre el cual se realizan acciones. Las variables que caracterizan el razonamiento algebraico, según el modelo propuesto pueden servir de base para modificar adecuadamente las tareas a fin de promover progresivamente este razonamiento en sus alumnos.

Desde esta perspectiva, la concepción del razonamiento algebraico (RA) propuesta por Godino et al. (2014) asume tres supuestos básicos sobre la naturaleza de lo algebraico que también ha sido explicitado por autores como Radford (2011), Kaput (2008), Puig y Rojano (2004).

1. La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
2. El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

3. Tipo de lenguajes usados.

A continuación se representa los tres aspectos que caracterizan el razonamiento algebraico:



Esquema 3. Características esenciales de los niveles de algebrización

De esta manera, se definen los niveles, como se indica en la cita: “En grados de generalidad, combinados con el uso de diversos registros de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, los cuales son indicativos de fases en el proceso de reificación de los objetos intensivos intervinientes”(Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray, y Lasa, 2015, p.14). Teniendo en cuenta lo dicho en este apartado, se desarrolló los niveles de algebrización.

2.3 Los niveles de algebrización

Diversos autores han propuesto considerar niveles de algebrización que distinguen acciones de los estudiantes frente a diferentes tipos de tareas matemáticas a las que se les concede cierto carácter algebraico (Martínez, 2014). Las actividades se consideran “algebraicas” en tanto que exhiban algunas características atribuidas por el maestro y utilizadas por los estudiantes para resolverlas. Godino et al. (2014) proponen características que permiten definir distintos niveles o grados de algebrización. El nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser caracterizada.

Ahora bien, para poder referir a los niveles de algebrización de la actividad matemática de un sujeto, es necesario considerar, de acuerdo con Godino et al. (2014), los siguientes tipos de *objetos algebraicos*: *relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones, estructuras, sus tipos y propiedades.*

En relación a los atributos contextuales y sus procesos este investigador propone considerar que, la *generalización – particularización* tiene una importancia especial, puesto son rasgos característicos del razonamiento algebraico, estos procesos permiten caracterizar los objetos matemáticos intervinientes en las prácticas matemáticas como intensivos o extensivos. Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil identificar estos atributos contextuales de los objetos resultantes de estos procesos. Entendiéndose el objeto *intensivo*, como la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada, este puede ser visto como la regla que genera los elementos que componen una colección o conjunto, sea finito o infinito, mientras, el *objeto extensivo*, son objetos particulares. Por ejemplo, en el estudio de funciones, $y = x^2 + 5x + 2$, sería una función particular, perteneciente al tipo de funciones cuadráticas, $y = x^2 + bx + c$; esta expresión será un objeto intensivo.

Asimismo, la *unitarización* es otro proceso en el cual esos objetos intensivos emergentes de la generalización son reconocidos como entidades *unitarias*, es decir, que este objeto intensivo es visto, además de la regla que genera cada elemento del conjunto, como una entidad diferente de los elementos que describe. Una vez el intensivo es visto como una entidad unitaria podrá dar lugar a intensivos de orden superior.

Luego la nueva entidad unitaria, tiene que ser hecha *ostensiva* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. Usualmente los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc) se consideran objetos ideales o mentales, o sea, objetos no ostensivos. Sin embargo, su "producción" y comunicación tiene que hacerse con la intervención de objetos perceptibles (objetos ostensivos) como lo sería a través del uso de palabras, de representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos y algebraicos (polinomios, funciones o ecuaciones, etc.) y de figuras geométricas. Las generalidades o abstracciones, sean conceptos, procedimientos, propiedades, son en sí mismas no ostensivas, pero su toma de conciencia y manipulación por el sujeto requiere el uso de símbolos ostensivos para su comunicación, en este sentido la *simbolización*, parte esencial del razonamiento algebraico permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión (Aké, 2013).

Así, se considera una actividad matemática como propiamente algebraica, si el sujeto que realiza la actividad reconoce la regla que conforma el objeto intensivo, considera la generalidad como una nueva entidad unitaria y realiza su materialización mediante cualquier objeto ostensivo para llegar a su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) es un rasgo esencial y central que caracteriza el razonamiento algebraico (Godino et al., 2014).

Para ilustrar los atributos contextuales de los objetos matemáticos así como sus procesos asociados (objeto intensivo, generalización, unitarización, materialización) se presenta a continuación un problema con su respectiva solución, el cual ha sido tomado de Aké (2013).

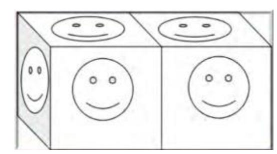
<table>
<tr><td>Problema: Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila, la compañía usa una máquina para etiquetar y poner sticker en cada cara, es decir, cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener un sticker. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría 10 sticker. ¿Cuantos sticker necesitan para una barra de: 3, 4, 6, 10, 30 cubos? con esta información determina ¿cuál es la regla a seguir para hallar el número de sticker para una barra de longitud cualquiera? (Aké, 2013, p.142).</td><td></td></tr>
<tr><th>Planteamiento de posible solución</th><th>Análisis de la solución</th></tr>
<tr><td>Para 3 cubos, se necesitan 14 sticker.
Para 4 cubos, se necesitan 18 sticker.
Para 6 cubos, se necesitan 26 sticker.
Para 10 cubos, se necesitan 42 sticker.
Para 20 cubos, se necesitan 126 sticker
Para n cubos, se necesitan $4n + 2$ sticker</td><td>Emergencia de objetos extensivos mediante lenguaje natural y numérico. Hay un reconocimiento de la regla, que relaciona el término con el siguiente.</td></tr>
<tr><td>Así, la regla a seguir para determinar el número de sticker para una barra de cualquier longitud es dada por la expresión por 4n+2</td><td>Se reconoce la generalidad (proceso de generalización).</td></tr>
<tr><td>De esta manera, se entiende que <u>para obtener el número de sticker que necesita una barra de longitud determinada se multiplica el número de cubos por cuatro y se le suman dos sticker</u></td><td>Este elemento lingüístico, se caracteriza por ser un objeto intensivo, además de ostensivo, el cual indica un proceso de generalización verbal, que implica establecer una regla de correspondencia entre el número de cubos y el número de sticker, que evoca al concepto de función lineal (Aquí el objeto intensivo emergente de la generalización es visto como una entidad unitaria – proceso de unitarización)</td></tr>
</table>

Tabla 2. Ejemplo de proceso y objetos algebraicos emergentes en la resolución de un problema

Es importante destacar que los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización, pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford citado por Godino et al, 2014; Aké, 2013).

Ahora bien, una vez detallados los objetos y procesos que son propios del trabajo algebraico según el enfoque adoptado, se describen las características de cada nivel de algebrización, mostrando con un ejemplo tomado de Godino (2015), como la actividad algebraica de un sujeto, manifestada en la solución de un problema deja ver ciertos rasgos algebraicos, que permite determinar como más algebraica o menos algebraica su solución:

Ejemplo 1: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Con el ejemplo 1 se ilustrara los niveles 0,1,2,3 y 4, con el ejemplo 2 el nivel 5 y con el ejemplo 3 el nivel 6, mostrando en cada nivel una práctica que dé cuenta de este.

Nivel cero de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)

> *Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.* (Godino et al., 2014, p. 289)

En este nivel intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. En la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos (objetos intensivos) de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, estos procesos de particularización no se consideran como propios del razonamiento algebraico.

A continuación se muestra una solución posible del ejemplo 1, la cual deja ver rasgos algebraicos que describe este nivel:

Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte); de cada 12 alumnos 3 irían en coche. Por tanto, 53 alumnos irían en coche. La solución sería 53 alumnos van en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 van andando

Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

> *Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (Godino et al., 2014, p. 289).*

En este caso las prácticas matemáticas ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, [ ]) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia de este nivel

El alumno resuelve tareas evocando propiedades de las operaciones como propiedad asociativa, conmutativa, etc, pero no es necesario que las llame de esa manera, lo esencial es que establecen una relación genérica entre números y unas propiedades que pueda utilizar en las operaciones. Los datos desconocidos aun no los manipulan, pero para hallarlos no realizan cálculos sobre los números particulares que intervienen, ni utiliza ensayo y error para resolver ecuaciones. También se consideran las generalizaciones factuales propuestas por Radford (citado en Godino et al, 2014).

A continuación se muestra una solución posible del ejemplo 1, la cual deja ver rasgos algebraicos que describe este nivel:

Por cada 4 alumnos hay 3 que van andando. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad:

4 (niños) ➔ 3 (niños van andando)

212 (niños en la escuela) ➔ x (van andando)

$$\frac{4}{3} = \frac{212}{x}$$

$$x = \frac{3 \times 212}{4}$$

Una vez que obtenemos el número de los que van andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para obtener los que acuden al colegio en coche.212 - 159 = 53 niños van en coche.

Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. *En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión (Godino et al., 2014, p. 289).*

Aparecen en este nivel las variables, expresadas en un lenguaje algebraico, estos objetos están ligados al contexto, aun no se opera con las variables, pero hay un acercamiento a la generalidad. Las cantidades desconocidas se representan mediante ecuación aritméticas (con una sola ocurrencia de la indeterminada). El lenguaje natural, los gestos y la visión ayudan a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón y se expresa la regla a través de símbolos alfa numéricos, pero no se opera con las indeterminadas o variables. En este nivel se incluye las generalizaciones contextuales y las generalizaciones simbólicas, propuestas por Radford (citado en Godino et al, 2014).

En tareas estructurales, las ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$ (llamadas ecuaciones aritméticas), no se consideran como propiamente algebraica, debido a las acciones necesaria para resolverlas, es decir, basta con realizar operaciones sobre los datos de la ecuación (A, B y C), acciones que caracterizan el trabajo aritmético, pero aún no se opera con la cantidad a encontrar (la incógnita), acción que se requieren en el tratamiento de las ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ las cuales son ecuaciones no aritméticas o algebraicas (Gallardo y Rojano, 1988) . A continuación se muestra una solución posible del ejemplo 1, la cual deja ver rasgos algebraicos que describe este nivel:

$212 = x + 3x$

$212 = 4x; x = \frac{212}{4}; x = 53$

53 alumnos van en coche y 212-53 = 159 van andando.

Nivel consolidado de algebrización (nivel 3)

> *Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (Godino et al., 2014, p. 289).*

Además de usar símbolos algebraicos, se opera con ellos, haciendo transformaciones para generar expresiones equivalentes (se genera objetos intensivos). Se formulan reglas canónicas que expresan funciones y patrones de manera simbólica y descontextualizada.

A continuación se muestra una solución posible del ejemplo 1, la cual deja ver rasgos algebraicos que describe este nivel:

Sea x la cantidad de alumnos que van en coche

Sea y la cantidad de alumnos que van andando

Ecuación 1: $\boldsymbol{x + y = 212}$	Reemplazo E2 en E1: $\boldsymbol{x + 3x = 212}$;
Ecuación 2: $\boldsymbol{y = 3x}$	$\boldsymbol{4x = 212}$; $\boldsymbol{x = 212/4 = 53}$

En los más recientes avances de este modelo, Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray, & Lasa, (2015) han delimitado otros tres niveles más de algebrización, los cuales toman en consideración las distinciones ontosemióticas sugeridas por el EOS: la presencia, uso y tratamientos de parámetros, estos criterios sirven para delimitar las diferencias entre los siguientes tres niveles, ya que están ligados a las familias de funciones y ecuaciones, determinan nuevas capas de generalidad, los cuales se consideran como superiores del razonamiento algebraico. Se tiene en cuenta los cuatro usos del parámetro propuestos por Drijvers (citado en Godino et al., 2015), la comprensión de los usos por los estudiantes, condicionan el aprendizaje del álgebra.

Nivel de algebrización 4

"Se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes" (Godino et al., 2015, p.19).

Se usan parámetros como registro numérico y para expresar familias de funciones y ecuaciones.

Por ejemplo, en una expresión de tipo $y = ax$, el símbolo *a* es también una variable, pero con un grado de generalidad superior, se dice que un parámetro es una variable que se usa junto con otras dos o más variables para indicar una familia de funciones o ecuaciones.

A continuación se muestra una solución posible del ejemplo 1, la cual deja ver rasgos algebraicos que describe este nivel:

Dado que por cada alumno que va en coche (C), hay tres que van a pie (P), las funciones lineales que modelizan el problema son:

$$C(x) = \frac{1}{4}x \, ; P(x) = \frac{3}{4}x$$

Estas funciones tienen solución entera siempre que x sea un múltiplo de 4; en particular, si $x = 212$. Así, el enunciado puede ser generalizado de la siguiente forma: por cada "a" alumnos que van en coche (C), hay "b" que van a pie (P) ($m = a + b;\ a, b \in N$):

$$C_a(x) = \frac{a}{m}x;\ P_b(x) = \frac{b}{m}x; con\ x \in \{z \in \mathbf{Z} \mid z = mk, k \in \mathbf{Z}\}$$

Existe solución entera siempre que ax sea un múltiplo de m; en particular, para $x = 212, a = 1, b = 3$ y, por lo tanto, $m = 4$.

Nivel de algebrización 5

"Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) que implican el uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas" (Godino et al., 2015, p.19).

Se liga a la actividad matemática desplegada cuando se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables, las operaciones con uno o más parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conlleva una complejidad semiótica mayor, cuando estas operaciones son realizadas de manera comprensiva implica una fase superior en el proceso de reificación de los objetos: familias de funciones y ecuaciones (proceso en el cual el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa, para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones).

A continuación se presenta un ejemplo de una tarea, la cual permite al estudiante manifestar en su solución rasgos algebraicos de este nivel, el ejemplo con el que se venía trabajando no permite desplegar una actividad que permitan un tratamiento con parámetros y variables, por lo que se toma una tarea propuesta por Godino et al. (2015):

Ejemplo 2: obtención de la formula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Suponiendo que el coeficiente director a es distinto de 0 ($a \neq 0$) –en caso contrario, la ecuación no sería de segundo grado–, se tiene:

$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Se divide por a toda la expresión, simplificación
$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	Propiedad uniforme
$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	Propiedad uniforme, completar cuadrados
$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Propiedades de las fracciones (suma)
$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Factorizar
$\leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Propiedad uniforme, Propiedades de la raíz cuadrada
$\leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Propiedad uniforme, propiedad de la raíz cuadrada
$\leftrightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Propiedad de las fracciones (suma)

Nivel de algebrización 6

"Se comienzan a estudiar estructuras algebraicas en sí misma, sus definiciones y propiedades estructurales" (Godino et al., 2015, p.19).

Se introducen algunas estructuras algebraicas (como las de espacio vectorial o la de grupo) y se estudia el álgebra de funciones, poniendo en juego objetos de mayor grado de generalidad que los considerados en el nivel quinto.

Es posible que el nivel 6 de algebrización, cuya descripción refleja una fase incipiente de reificación de los objetos intensivos intervinientes, se puede completar otros dos niveles más avanzados, propios de los estudios universitarios (Godino et al., 2015). A continuación, se toma un ejemplo de Godino et al. (2015) el cual permite al estudiante manifestar rasgos algebraicos propios de este nivel:

Ejemplo 3: Composición de funciones.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, de variable real, se llama composición de la función f y g, a la función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por $(g \circ f)(x) = g[f(x)])$

La función $(g \circ f)(x)$ se lee f compuesto con g aplicado a x

$$x \to f(x) \to g[f((x)]$$

Para hallar la expresión analítica de la función compuesta de dos funciones primero actúa la función f y después actúa la función g, sobre f(x).

La noción de función se pone en juego en toda su generalidad, refiriéndose a una función cualquiera, y no a una familia de funciones particulares, se opera con ella (función cualquiera) para producir otra nueva función y estudiar sus propiedades.

A continuación, se presenta la tabla 3, para indicar en términos de objetos, transformación y tipo de lenguaje usado, los niveles de algebrización que permiten caracterizar una práctica como más o menos algebraico:

Niveles	Objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se operan con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos extensivos, tanto en tareas estructurales como funcionales.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.
2	Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos.	En tareas estructurales son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se operan con las variables para obtener formar de expresión canónica.	Simbólico- literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.
3	Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.
4	Interviene parámetros, familias de funciones y ecuaciones.	Se realizan operaciones con variables.	Lenguaje simbólico, los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.
5	Parámetros, variables o indeterminadas	Se realizan cálculos analíticos con variables, parámetros.	
6	El estudio de estructuras algebraicas	Se realizan cálculos analíticos con variables, parámetros, funciones, vectores.	

Tabla 3. Rasgos característicos de los niveles de algebrización.

En este apartado se han presentado indicadores de la actividad algebraica organizados en niveles progresivos de algebrización, esta propuesta puede ser útil para la orientación del maestro que trata de impulsar la promoción del pensamiento matemáticos de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia representacional y operatoria (Godino et al., 2014). Sin embargo, es necesario reconocer que las fronteras a veces pueden ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podría llevar a proponer nuevos niveles.

CAPITULO 3

ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMATICAS DE LOS MAESTROS

En este capítulo se presentan los cinco problemas seleccionados y se argumenta su elección. Recalcamos que tanto los problemas como la previsión de sus posible soluciones en cada una de las tareas y sus nivel de algebrización, son tomados el primero de Castro (2008), el segundo, el tercero, el cuarto de Aké (2013) y el quinto tomado de la misma autora se modifica para integrar el contenido deseado, se describe el contexto en el que se llevó a cabo la aplicación de estos. Se presenta el análisis y discusión de los resultados obtenidos y finalmente se realiza una síntesis y las conclusiones de este estudio.

3.1 Descripción y análisis de los problemas presentados a los maestros

Los seis problemas se han escogidos porque permiten manifestar prácticas en diferentes niveles de algebrización, para cada uno de ellos se presenta soluciones esperadas y posteriormente se describe la presencia o ausencia de ciertos rasgos algebraicos, que se encuentran en las prácticas matemáticas ligadas con la resolución de los problemas, esta descripción se presenta de acuerdo a la propuesta realizada en términos del EOS del razonamiento algebraico (capítulo 3) en donde la naturaleza algebraica se concibe desde una perspectiva amplia que permite reconocer distintos tipos y grados de algebrización en la actividad matemática. Además, este análisis permite identificar las diferentes prácticas que un sujeto puede manifestar al resolver el problema.

3.1.1 Problema 1

Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

3.1.1.1 Previsión de posibles soluciones al problema 1

Se describen las posibles soluciones del problema 1, aunque se podría considerar más soluciones. Las que aquí se presentan, se corresponden con diferentes niveles de algebrización, en los casos que fue posible encontrar una variante de la misma.

Solución 1: Una posible solución al problema anterior sería: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 monedas, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

Solución 2: Juan comienza con n monedas (cantidad desconocida). Al ponerlas en la máquina obtiene 2n; paga 4 y se queda con $2n - 4$. Introduce $2n - 4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea $2(2n - 4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, es decir:

$$2(2n-4)-4=0 \;\; (n \in \mathbb{N}, n>0);$$
$$4n-8-4=0;$$
$$4n-12=0;$$
$$n=3$$

Por lo tanto, juan tenía 3 monedas al principio.

3.1.1.2 Nivel de algebrización asociado al problema 1 y sus soluciones posibles

Nivel 0	**Solución 1** La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos.
Nivel 2	**Solución 2:** La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax+B=C.$ Se representa lo desconocido en lenguaje simbólico-literal, aunque no se opera con ello.

3.1.2 Problema 2

Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres rebotes la altura alcanzada es de 6 cm., ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota?

3.1.2.1 Previsión de posibles soluciones al problema 2

Es claro que existen muchas otras soluciones al problema, diferentes a las que se brindan aquí, pero el análisis epistémico se ha de basar en una de tales soluciones para identificar los objetos, significados que podrían surgir en las soluciones de los estudiantes.

Solución 1: Sea x la altura desconocida, como en cada rebote la altura a la que rebota es un quinto de la altura inicial, entonces la altura del primer rebote será $\frac{1}{5}x$; por tanto en dos rebotes más, la altura alcanzada será: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right)$; y como $6\ cm$. Corresponden a la altura del último rebote, entonces tenemos la relación $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right) = 6, (x \in \mathbb{N}, x > 0)$; de donde el valor buscado será $x = 5 \times 5 \times 5 \times 6$

Solución 2: Se sabe que la altura a la cual rebota la pelota es un quinto de la altura a la cual fue soltada, como $6\ cm$ es la última altura, entonces la altura previa es: 6×5 ; y la altura previa en el segundo rebote es: $6 \times 5 \times 5$; finalmente la altura inicial es: $6 \times 5 \times 5 \times 5$

3.1.2.3 Nivel de algebrización asociado al problema 2 y sus soluciones posibles

Nivel 0	**Solución 2:** Se obtiene el resultado atendiendo al uso de operaciones aritméticas. Se trabaja operaciones inversas entre las operaciones, en este caso multiplicación y división. Se utiliza un lenguaje numérico-aritmético.
Nivel 2	**Solución 1:** Intervienen objetos intensivos, se utilizan las letras para expresar cantidades desconocidas, se obtiene el valor, planteando ecuaciones de la forma $A \pm B = C$. Se utiliza un lenguaje simbólico-literal

3.1.3 Problema 3

Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que se va en coche hay tres que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

3.1.3.1 Previsión de posibles soluciones al problema 3

Solución 1:

$$\mathbf{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + \ldots = 159}$$

$$\mathbf{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = 53}$$

$$\mathbf{159 + 53 = 212}$$

Teniendo en cuenta que por cada alumno que va en coche tres van a andando, se hace dos sumas en una los tres que van andando y en la otra la persona que va andando, hasta llegar a 212

Solución 2:

Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va en coche (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte); de cada 12 alumnos 3 irían en coche. Por tanto, 53 alumnos irían en coche. La solución sería 53 alumnos van en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 van andando

Solución 3:

Por cada 4 alumnos hay 3 que van andando. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad:

4 (Niños) → 3 (Niños van andando)

212 (niños en la escuela) → x (van andando)

$$\frac{4}{3} = \frac{212}{x}$$

$$x = \frac{3 \times 212}{4}$$

Una vez que obtenemos el número de los que van andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para obtener los que acuden al colegio en coche.212 - 159 = 53 niños van en coche.

Solución 4:

$212 = x + 3x$, $(x > 0)$

$212 = 4x; x = \dfrac{212}{4}; x = 53$

53 alumnos van en coche y 212-53 = 159 van andando.

Solución 5:

Sea x la cantidad de alumnos que van en coche.

Sea y la cantidad de alumnos que van andando.

Se plantean dos ecuaciones:
$x + y = 212, (x \wedge y \in \mathbb{N}, x \wedge y > 0)$ (Ecuación 1)
$y = 3x$ (Ecuación 2)

Se reemplazó en la ecuación 1 y despejo

$$x + 3x = 212; 4x = 212; x = 53$$

Por lo tanto, hay 53 alumnos que van en coche y 159 que van andando.

3.1.3.3 Nivel de algebrización asociado al problema 3 y sus soluciones posibles

Nivel 0	**Solución 1 y 2:** En esta solución se obtienen los valores que se desconocen realizando operaciones aritméticas sobre valores particulares. no interviene ningún objeto algebraico.
Nivel 1	**Solución 3:** se reconoce una cantidad desconocida, se emplea un literal para expresarla, los procedimientos son aritméticos pero se diferencia propiedades. Reconoce propiedades de corte algebraico como la asignación uno a uno.
Nivel 2	**Solución 4:** En el problema intervienen dos datos desconocidos, uno se puede expresar en términos del otro. En la solución se plantea de manera simbólica una ecuación de la forma $Ax \pm B = C$ y se realizan transformaciones para resolverla. Intervienen el uso de símbolos literales para denotar los valores que se desconocen (incógnitas), el planteamiento de una ecuación y la aplicación de transformaciones que preservan la equivalencia entre expresiones para resolver la ecuación.
Nivel 3	**Solución 5:** Intervienen las variables x y y, se operan con ellas, se usa un lenguaje simbólico-literal. los *conceptos* de variable independiente y dependiente pueden ser potenciados y se abre paso a la interpretación del problema en términos funcionales

3.1.4 Problema 4

> *a) ¿Qué valores deben tener las letras para que las siguientes igualdades sean verdaderas?*
>
> *1)* $36 \times b = b$
> *2)* $a \times a = a$
> *3)* $c + c = c$
> *4)* $b \times 0 = 0$
> *5)* $12 \times a = a \times 12$
> *6)* $2 \times b = b + 5$
>
> *b) ¿Cómo sabes que esos valores son correctos?*

3.1.4.1 Previsión de posibles soluciones al problema 4

Solución 1:

Los valores para cada uno ítems del punto 1 son:

1) $b = 0$
2) $a = 1,\ a = 0$
3) $c = 0$
4) $b \in \mathbb{R}$
5) $a \in \mathbb{R}$
6) $c = 6$
7) $b = 5$

En la asignación de valores se considera los ítems 1, 2 y 4 que todo número multiplicado por cero es igual a cero, que el cero es neutro aditivo y que el uno es neutro multiplicativo; en otros casos como el 3, 5, 6 y 7 las soluciones se obtienen a través de la aplicación de transformaciones elementales. Así los valores son correctos y satisfacen la igualdad.

Solución 2:

$36 \times b = b$

$b = 0;\ 36 \times 0 = 0$

$a \times a = a$

a		
0	0×0	0
1	1×1	1
2	2×2	4

$c + c = c$

c		
0	$0 + 0$	0
1	$1 + 1$	1
2	$2 + 2$	4

$b \times 0 = 0$

b		
0	0×0	0
1	1×0	0
2	2×0	0

$12 \times a = a \times 12$

a	
1	$12 \times 1 = 1 \times 12$ $12 = 12$
2	$12 \times 2 = 2 \times 12$ $24 = 24$
3	$12 \times 3 = 3 \times 12$ $36 = 36$
4	$12 \times 4 = 4 \times 12$ $48 = 48$
5	$12 \times 5 = 5 \times 12$ $60 = 60$

$2 \times b = b + 5$

b	
1	$2 \times 1 = 1 + 5$ $2 = 6$
2	$2 \times 2 = 2 + 5$ $4 = 7$
3	$2 \times 3 = 3 + 5$ $6 = 8$
4	$2 \times 4 = 4 + 5$ $8 = 9$
5	$2 \times 5 = 5 + 5$ $10 = 10$

Como se ha presentado en anteriormente, a partir de las operaciones realizadas tenemos que

1) $b = 0$
2) $a = 1,\ a = 0$
3) $c = 0$

4) $b \in \mathbb{R}$

5) $a \in \mathbb{R}$

6) $c = 6$

7) $b = 5$

3.1.4.3 Nivel de algebrización asociado al problema 4 y sus soluciones posibles

Nivel 0	**Solución 2:** Se obtiene los valores atendiendo al uso de operaciones aritméticas. Se utiliza un lenguaje numérico-aritmético, aunque intervienen símbolos que se refieren a un objeto desconocido, estos se hallan probando sucesivos números.
Nivel 3	**Solución 1:** Se pone énfasis en el uso de las letras y se aprecia que la resolución de esta tarea implica el reconocimiento de propiedades, Los símbolos se utilizan de manera analítica

3.1.5 Problema 5

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

3.1.5.1 Previsión de posibles soluciones al problema 5

Solución 1: la cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces Sea x la edad actual de John.

Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x:

Sea $x - 8$ la edad actual de Bill. ($x \in \mathbb{N}, x > 0$)

Sea $x - 2$ la edad de John hace dos años

Sea $(x - 8) - 2$ la edad de Bill hace dos años

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x - 2 = 5(x - 10),$$

Resolvemos esta ecuación

$$x - 2 = 5x - 50$$

$$48 = 4x$$

$$x = 12$$

Entonces, la edad actual de John es 12

3.1.5.3 Nivel de algebrización asociado al problema y sus soluciones posibles

En la solución propuesta para este problema se utiliza un lenguaje simbólico-literal para representar incógnitas, se definen y se operan con ellas de manera analítica, el signo igual se usa para designar una relación. Se plantean ecuaciones de la forma $Ax \pm C = Bx \pm D$, esta solución se relaciona con un nivel tres de algebrización

3.1.6 Problema 6

Sea tres números cuya suma sea $\boldsymbol{S}$*, tales que el segundo supera al primero en* $\boldsymbol{a}$ *y que el tercero sea la suma de los dos primeros.*

a) ¿Encuentre los tres números?
b) ¿Cómo se relacionan $\boldsymbol{S}$ *y* $\boldsymbol{a}$ *para obtener el primer, segundo y tercer número?*

3.1.6.1 Previsión de posibles soluciones al problema 6

Solución 1

Si se representa el primer número por x, se tiene:

Sea x primer número

Sea $x + a$ el segundo número

Sea $x + x + a$ el tercer número

y por tanto,

$$x + x + a + x + x + a = S$$

o

$$4x\ +\ 2a\ =\ S, x \wedge a \wedge S \in \mathbb{R},$$

Restando $2a$ a los dos miembros de la igualdad se obtiene

$$4x\ =\ S - 2a$$

y dividiendo por

$$x = \frac{S - 2a}{4}$$

De donde se ve que el primer número es igual a la cuarta parte de la diferencia entre la suma de los tres números buscados y el doble de la diferencia de los dos primeros números.

Como el segundo numero supera al primero en a, entonces, el segundo numero estaría dado por

$$x + a = \frac{S}{4} - \frac{a}{2} + a$$

$$(x + a) = \frac{S}{4} + \frac{a}{2}$$

El segundo número estaría dado por la expresión $\frac{S}{4} + \frac{a}{2}$

Y como el tercero número es la suma de los primeros, entonces

$$x + (x + a) = (\frac{S}{4} - \frac{a}{2}) + (\frac{S}{4} + \frac{a}{2})$$

$$x + (x + a) = \frac{S}{4} + \frac{S}{4}$$

$$x + (x + a) = 2\frac{S}{4}$$

$$x + (x + a) = \frac{S}{2}$$

Entonces, el tercer número está dado por la expresión $\frac{S}{2}$

Solución 2

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{S}$
1	3	4	7	14
2	4	6	10	20
3	5	8	13	26
4	6	10	16	32
….	….	….	…	….

En esta solución se escogen tripletas de números particulares que cumplan con las indicaciones dadas en el problema. Aunque puede resultar tedioso, encontrar la relación para cualquier S y a, que permite hallar el primer, segundo y tercer número, se debe tener en cuenta este razonamiento que parte de aspectos particulares para encontrar la relación pedida

3.1.6.3 Nivel de algebrización asociado al problema 6 y sus soluciones posibles

Nivel 0	**Solución 2:** interviene objetos intensivos , se opera con ellos y el lenguaje que se usa es el numérico
Nivel 5	**Solución 1:** se pone énfasis en el uso de letras, se representan números a través de ellas, las letras son de distintas naturaleza y el resultado obtenido proporciona los pasos a seguir para resolver todos los problemas que sólo se diferencian por el valor numérico de los datos (S, a). Se aprecia un lenguaje simbólico-literal, se usan símbolos sin referir a la información del contexto, como parámetros y variables de manera analítica, lo implica un nivel 5 de algebrización.

Este análisis de los problemas permite la previsión de las posibles soluciones, a través del cual se pueden identificar algunos rasgos algebraicos de las posibles soluciones y relacionarla con un nivel de algebrización, lo cual se hace importante para mostrar que los problemas permitían a los docentes manifestar prácticas en varios niveles.

3.2 Metodología para la recolección de la información

3.2.1 Población objeto de estudio

El estudio de caso se realizó con tres profesores de matemáticas, sus nombres serán confidenciales, por tal motivo se hará alusión a ellos como el profesor **A**, **B** y **C**, los cuales tienen en común el hecho que enseñen o hayan enseñado álgebra, el profesor A y B laboran en instituciones públicas, el primero de ellos con 15 años de experiencia como profesor de matemáticas, enseña en noveno y décimo, actualmente ha iniciado sus estudios de maestría en una universidad privada en Santiago de Cali, el segundo de ellos con 40 años de experiencia ejerciendo su práctica docente, enseña en decimo y once, licenciado en matemáticas y física e ingeniero electricista con una especialización en finanza, egresado de una universidad pública. El docente C tiene tres años de experiencia, como maestro en ejercicio, licenciado en educación básica con énfasis en matemática, labora en una institución privada, en los grados séptimo, octavo y once.

3.2.2 Implementación de las hojas de trabajo

La aplicación se realizó de manera individual con cada docente, en dos sesiones de 45 minutos, la primera sesión, se le indica a los maestros que se les sería proporcionado un cuestionario con seis problemas matemáticos. Se solicitó que siguieran las indicaciones planteados en la hoja de trabajo. La segunda sesión, fue desarrollada con el profesor **C** ocho días después, y con los profesores **A** y **B**, quince días después, en esta se realizó una entrevista semiestructurada al docente, la construcción de esta se basó en las soluciones de los problemas que ellos realizaron, identificando en ellas aspectos para aclarar o ampliar de índole algebraico, de esta manera se formularon las preguntas, las cuales develan o indagan aspectos algebraicos que no era posible observar en los registros realizados por los maestro en las hojas de trabajo, de ahí su importancia.

Así que, tanto la hoja de trabajo como la entrevista fueron instrumentos para recolectar información, adicional a ello, se registró una filmación en cada sesión lo cual permitió tener un protocolo escrito para el análisis de algunas de las respuestas dadas por ellos en la hoja de trabajo y para realizar consideraciones generales sobre las prácticas algebraicas de los docentes.

3.3 Análisis de las prácticas de los maestros.

Las respuestas obtenidas de la implementación de los problemas y la entrevista con los maestros estudio de caso junto con sus respectivos análisis se presentan en este apartado. Para ello, se presenta simultáneamente las prácticas matemáticas de los profesores, por cada problema que conforma la hoja de trabajo y a la luz de los elementos teóricos presentados en el capítulo 2, que permiten una caracterización del razonamiento algebraico, se realiza el análisis de las prácticas algebraicas manifestadas por los profesores en cada problema.

El análisis de las posibles respuestas (apartado 3.1), permitió caracterizar la actividad matemática que se despliega en cada método de solución en cada uno de los problemas, según los niveles de algebrización, lo cual permite relacionar la solución del maestro con un nivel, dependiendo del método de solución empleado. La caracterización de la práctica del maestro se hace también a través del análisis de los elementos lingüísticos, los conceptos, los procedimientos, propiedades y argumentaciones puestos en juego en las soluciones de los docentes, para identificar el uso de objetos algebraicos. Se trata de una aplicación del modelo de análisis descrito en el capítulo 2.

En relación con el problema 1

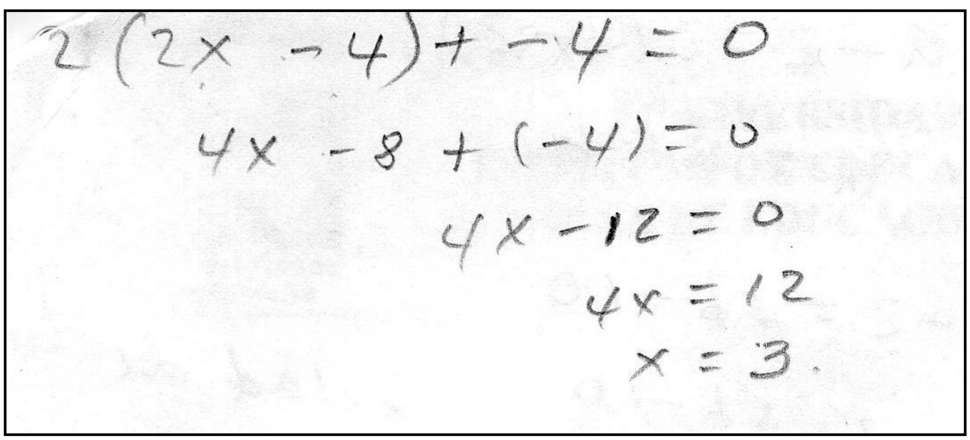


Figura 1. Resolución del maestro A, problema 1

La figura 1 muestra la respuesta realizada por el maestro A para solucionar este problema. En esta práctica matemática se observan elementos lingüísticos registrados en un lenguaje alfanumérico, donde inicialmente se ha planteado una ecuación, este objeto algebraico tiene carácter de ostensivo en tanto participa de un sistema de representación que lo hace público. El proceso de materialización de esta ecuación (concepto), se hace evidente entre **L2** y **L8** de la figura 2, en las cuales el docente hace lectura del problema y articula las condiciones dadas por este:

[L1] **E**: ¿Explícanos como lo empezaste a realizar?
[L2] **A**: una caja mágica duplica el número de monedas…eh…pero después que se usa hay que pagar
[L3] cuatro monedas, se duplica y se debe de pagar, se resta (señalando en la hoja de trabajo lo que **[L4]**
leyó anteriormente), pero duplico, entonces esa cantidad tiene que ser el doble (señala la **[L5]**
primera línea de su solución). Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y efectivamente **[L6]** se
duplicaron, paga cuatro monedas y volvió a intentarlo, entonces le hago la **[L7]**
diferencia….ehhh…de nuevo se duplicaron, pero al pagar cuatro monedas se quedó sin dinero, **[L8]**
entonces eso para plantear una ecuación lo igualo a cero.
[L9] Y de ahí se resuelve la ecuación, aplicando la propiedad distributiva, $2 \times 2x$ y 2×4 ehhh nos
[L10] da $4x - 8$ y con el menos cuatro, hago la suma de menos ocho menos cuatro, eso nos da menos
[L11] doce, da $4x - 12 = 0$, de ahí despejamos el valor de x, listo…
[L12] Una caja mágica duplica el número de monedas, pero después de que se usa se deben pagar
[L13] cuatro monedas, entonces la cantidad de monedas es el valor de x ?
[L14] **E**: aja
[L15] **A**: entonces las duplica pero para eso, debo de entregar cuatro monedas, entonces esa cantidad
[L16] que se ha duplicado debo de restar esas cuatro y hago otra vez la misma operación, entonces el
[L17] doble de los que me quedo, pero tengo que entregar cuatro, entonces en ese punto me quedo **[L18]**
igualado a cero, se resuelve la ecuación y me nos da tres

Figura 2. Entrevista del problema 1, maestro A

A partir de lo expresado por el docente en estas líneas se logra también evidenciar las distintas relaciones que el reconoce entre los objetos intensivos y extensivos, al plantear la ecuación "$2(2x - 4) - 4 = 0$", estas se pueden ver explícitamente, en las líneas 3 y 4 cuando el docente expresa a través de un lenguaje natural que "duplicar" es multiplicar por dos y que el hecho de pagar cuatro es una "resta" y cuando señala los registros realizados en la figura 1 donde están representadas en un lenguaje simbólico-literal tal como se indica en la línea 4 y 5 del discurso del profesor, en esta representación que el maestro manifiesta, la multiplicación se presenta no ostensiva, mientras la suma y la resta se ostentan, estos procedimientos se realizan entre las cantidades conocidas, tal como se muestra en las líneas 9,10, y 11, de la figura 2.

En estas líneas también el docente alude a través del lenguaje natural a la propiedad distributiva (*procedimiento*) para resolver la ecuación; además realiza el procedimiento de sumar menos ocho y menos cuatro, utilizando implícitamente el concepto de términos semejantes para despejar el dato desconocido, el cual es encontrado, pero cabe resaltar que el docente no verifica la solución hallada, ni en términos de las condiciones del problema, ni en la ecuación planteada.

También se utiliza el signo igual en esta práctica, como un indicador para dar la respuesta a una secuencia de operaciones.

En las líneas 12 y 13 de la figura 2, se observa como el docente manifiesta en la entrevista que "la cantidad de monedas" con las cuales Juan inicia es la incógnita "x", entendida esta como la letra que se asigna a una cantidad desconocida (concepto). Ahora bien tanto la incógnita como la ecuación son objetos algebraico que se caracterizan por ser intensivos que resultan de un proceso de generalización que se evidencian en las prácticas matemáticas que el profesor ha manifestado, también a partir de esas prácticas, se puede apreciar, que el hecho de realizar un tratamiento sobre la ecuación, aplicando propiedades y procedimiento, resulta de considerar ese objeto intensivo (ecuación), como una entidad unitaria. Se aclara que esta caracterización de los objetos matemáticos se hace según el marco teórico adaptado a partir de las prácticas realizadas por el docente, así que es posible que el docente no sea consciente de esta caracterización, que dejan ver sus acciones y representaciones. De esa manera se observa la ecuación como objeto unitario, lo cual indica un proceso de reificación de los objetos intensivos que intervienen.

En síntesis, el análisis de esta práctica matemática manifestado por el profesor A, se identifican objetos algebraicos, que de acuerdo con el modelo de algebrización tomado en el capítulo 2, se relaciona con un nivel 2, puesto que, se usa un lenguaje simbólico-literal para referirse a objetos intensivos como la incógnita y una ecuación de tipo $Ax \pm B = C$, a la cual se le aplican propiedades y procedimientos, que permiten una manipulación sintáctica.

A continuación, se presenta la práctica matemática del profesor B, para resolver el problema 1:

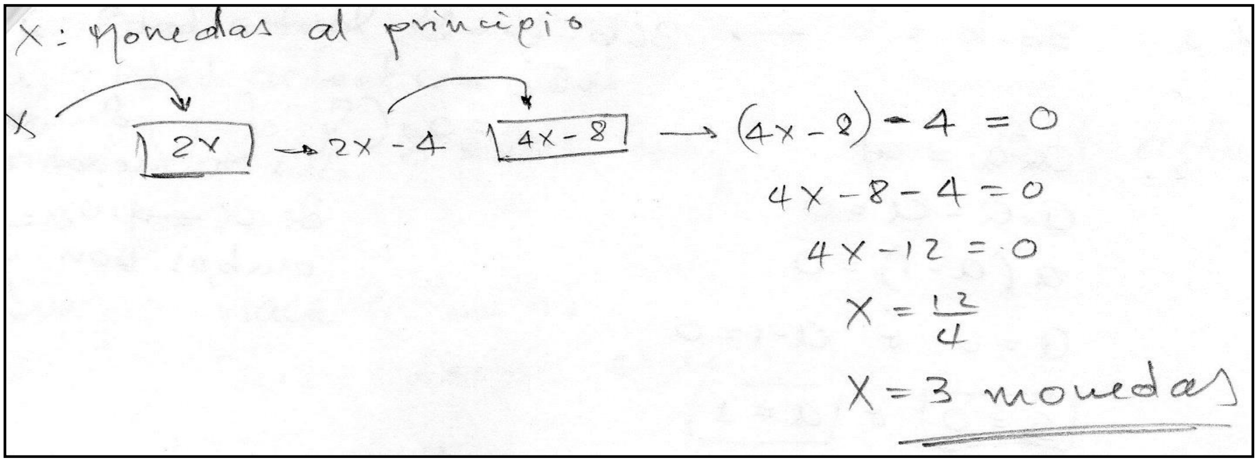


Figura 3. Resolución del maestro B, problema 1

En la figura 3, inicialmente el docente a través de un lenguaje simbólico- literal registra un *elemento lingüístico* "x", que representa la cantidad desconocida (*concepto*), siendo este el número de monedas que juan tenia al principio, la aparición de este *objeto intensivo* (incógnita), implica un proceso de *generalización*, este se evidencia además, en la ecuación $(4x - 8) - 4 = 0$, la cual modela la situación-problema y se caracteriza por ser un objeto intensivo. Ahora bien la construcción de esta ecuación en esta práctica se presenta de forma sistemática, ya que a partir de una cadena de expresiones unidas por flechas, se puede apreciar la *materialización* de esta. Donde cada expresión de la cadena va surgiendo de la misma forma que va indicando la lectura del problema, de esta manera se entiende que la primera y la tercera flecha indican el proceso de introducir las monedas y duplicarlas; la segunda y la cuarta flecha señalan que después de usar la caja se le restan cuatro monedas, esto se logra apreciar en las líneas 4 al 10, en lo que enuncia el maestro B, tal como se aprecia a continuación:

[L1] **E**: como llego a esta ecuación?
[L2] **B**: aquí nos habla de una máquina, y esa máquina duplica y después de que se utilice descuenta
[L3] cuatro, inicialmente determino cual es la cantidad de monedas, como no sé cuál es entonces x,
[L4] igual puede ser cualquier letra, bueno, ese dinero (señala a x) entra a la máquina (señala la
[L5] flecha) y se duplica (señala el primer recuadro), y la utilizo y como la va a utilizar entonces le
[L6] resto cuatro, esto fue lo que me quedo después de utilizar la maquina en primera instancia
[L7] (señala la flecha y la expresión $2x-4$).
[L8] Entonces entra a la maquina (señala la tercera flecha) y se duplica, entonces el duplo de esto
[L9] (señala esta expresión $2x-4$) multiplicando por dos, (dice) $4x-8$, luego a esto, como estaba
[L10] utilizando la máquina, le resto cuatro, y eso lo igualo a cero, porque dice que finalmente quedo
[L11] sin dinero
[L12] **E**: ahora, explíquenos lo que haces para resolver esta ecuación?
[L13] **B**: a bueno, primero destruir el paréntesis, luego suma de términos semejantes y luego lo que
[L14] hago es la transposición de términos, y de ahí determine la cantidad de monedas

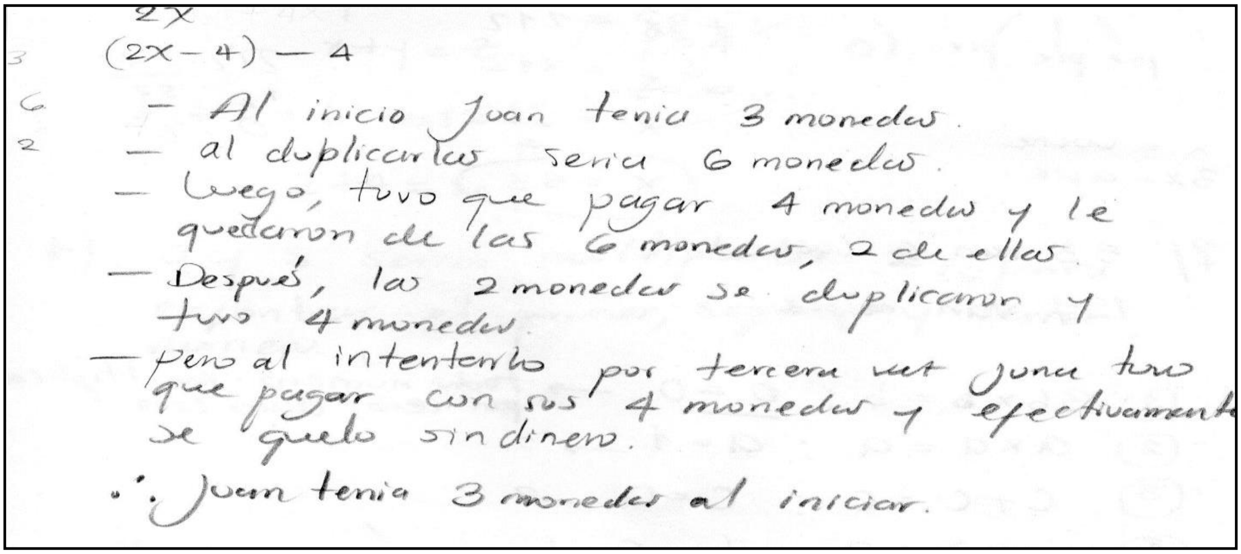
Figura 4. Entrevista del problema 1, maestro B

Nótese además en estas líneas como el profesor comunica el planteamiento de la ecuación a través de un registro verbal, donde se aprecia también las relaciones entre la cantidad desconocida y las conocidas que el docente reconoce, estas se ostentan en la ecuación "$(4x-8)-4=0$", que el docente logra abordar como una entidad unitaria, en tanto la reconoce como un objeto algebraico sobre la cual recae ciertas propiedades estructurales, también es importante resaltar los procedimientos que se realizan con objetos extensivos donde la multiplicación tiene un carácter no ostensivo, mientras que la resta si lo es.

El maestro reconoce el orden de las operaciones (*propiedades*) establecidas en la ecuación y aplica la trasposición de términos adecuadamente, *procedimientos* que se hacen *ostensivo* en la entrevista, tal como se aprecia en las lineas 13 y 14 de la figura 4, en estas lineas tambien se ostenta que el docente opera los términos semejantes (*procedimiento*). Finalmente encuentra el valor de la incógnita, obteniendo un objeto extensivo, lo cual implica un *proceso de particularización* y cuyos resultados son dados en términos de lo que representa la incógnita esto es "$x = 3\ monedas$". Sin embargo, al igual que el docente anterior, este maestro no verifica si el valor hallado satisface la igualdad de la ecuación o las condiciones dadas en el problema.

De acuerdo a lo anterior, las prácticas matemáticas de este maestro se relaciona con un nivel 2 de algebrización, ya que se observa que hay presencia de objetos intensivos, representados en un lenguaje simbólico literal, puesto que en la resolución del problema, intervienen una incógnita, ligado a la información del contexto, y una ecuación de la forma $Ax \pm B = C$, esta se logra ver como un objeto unitario lo cual implica un proceso de reificación.

Finalmente se presenta a continuación en la figura 5, la práctica matemática que propuso el maestro C, para resolver el problema 1:



$2x$
3 $(2x - 4) - 4$
6 - Al inicio Juan tenia 3 monedas.
2 - al duplicarlas seria 6 monedas.
- Luego, tuvo que pagar 4 monedas y le quedaron de las 6 monedas, 2 de ellas.
- Después, las 2 monedas se duplicaron y tuvo 4 monedas.
- pero al intentarlo por tercera vez Juan tuvo que pagar con sus 4 monedas y efectivamente se quedo sin dinero.
∴ Juan tenia 3 monedas al iniciar.

Figura 5. Resolución del maestro C, problema 1.

El docente presenta dos formas de abordar el problema, en la primera manera, se ostenta un objeto *intensivo* con la letra "x" el cual se supone que hace referencia a la cantidad de monedas iniciales (incognita), aunque el maestro no hace explicito lo que representa la letra. Tambien representa algunas relaciones que da el problema, en la siguiente expresion algebraica "$(2x - 4) - 4$" (*elemento linguistico*), en particular: duplica la cantidad de monedas desconocidas la primera vez que usa la caja y le resta cuatro, y en la segunda vez que utiliza la caja, expresa la diferencia, pero no duplica la cantidad de monedas que introduce y no logra materializar el hecho de quedarse sin dinero, por lo cual la la expresion que el docente ostenta no modela la situacion. En otras palabras, desde esta perpectiva el maestro logra identificar ciertas relaciones, pero le faltan algunas que son centrales para plantear la ecuacion. Asi que, en esta práctica aunque se identifican relaciones entre objetos intensivos y extensivos e interviene objetos intensivos para representar la incógnita, lo cual es un rasgo algebraico que el maestro pone en juego; no logra dar valor a ella, ni plantear una ecuación de la forma $Ax + C = D$, por lo tanto, esta práctica describe un nivel 1 de algebrización.

Dado que no obtiene resultados en esta manera de abordar el problema, inicia por ensayo y error, como se expone a continuación en lo que enuncia el maestro C:

[L1] **E**: ¿Explícanos lo que has realizado?
[L2] **C**: como en el enunciado de la hoja, es un trabajo de investigación sobre el álgebra, entonces
[L3] intente realizar una ecuación, pero vi, que no llegaba a la solución, que yo sabía que era, o que
[L4] yo podía entender que era, y al final lo hice lógicamente, o sea por medio de las palabras
[L6] **E**: como llegaste a la respuesta?
[L7] **C**: empecé probando con uno, y no me dio, luego probando con dos y tampoco y luego
[L8] con tres.
[L9] **E**: ¿crees que tres es la única solución? Porque?
[L10] **C**: no, probablemente hay más, porque el álgebra es muy diversa y puede que
[L11] encuentre varias soluciones

Figura 6. Entrevista del problema 1, maestro C.

Nótese que, en esta manera de abordar el problema comienza considerando cantidad concretas hasta encontrar la respuesta, probando con una moneda luego con dos monedas y finalmente con tres monedas, haciendo uso de *extensivos* para resolverlo, lo cual indica un proceso de particularización. El cual también se evidencia en los *elementos lingüísticos* presentes: “al duplicarlas seria 6 monedas”, “tuvo que pagar cuatro” que, en esta práctica matemática hace referencia a los procedimientos de resta y multiplicación, de manera no ostensiva, sin embargo si se hace ostensivos los resultados de estas, finalmente son las diversas operaciones entre los extensivos lo que efectivamente permite llegar a la solución.

Así que, en esta práctica matemática aunque inicialmente intervienen algunos objetos intensivos, a falta de poder expresar algunas relaciones en un lenguaje simbólico literal, abandona esta manera de abordar el problema y empieza a trabajar con valores particulares y a realizar operaciones con ellos, sus registros son en un lenguaje natural y numérico, lo que evidencia que esta manera de hallar la solución del problema se relaciona con un nivel 0 de algebrización.

En relación con el problema 2

En la figura 7 se muestra la práctica matemática manifestada por el maestro A en la resolución del problema 2:

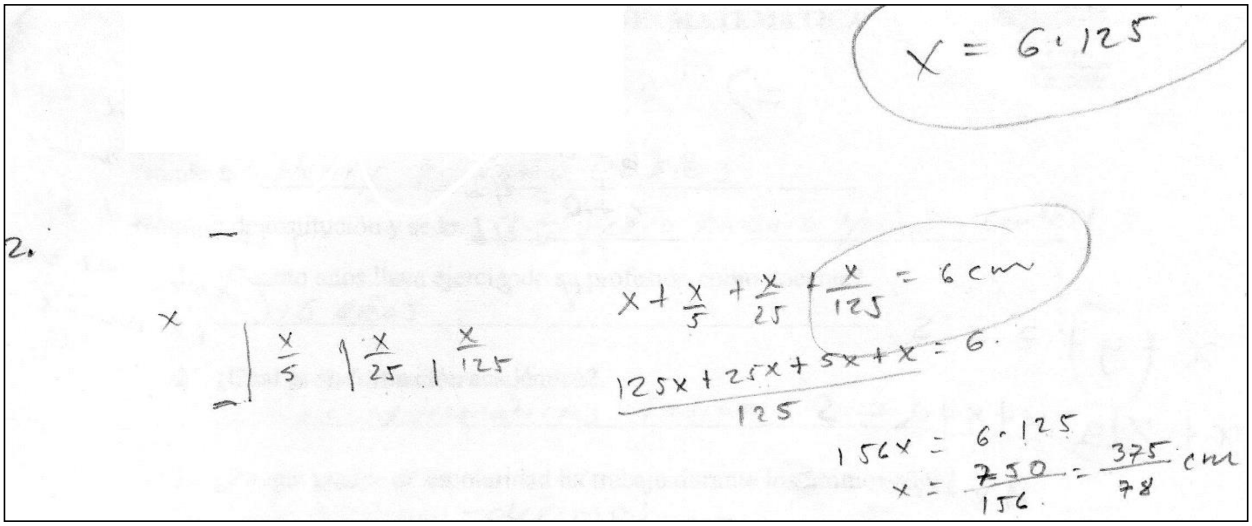


Figura 7. Resolución del maestro A, problema 2

En la práctica de este maestro se observa: una representación de las alturas que indica el problema, a través de un lenguaje gráfico y alfanumérico; una ecuación "$\frac{125+25+5x+x}{125} = 6\ cm$" con su respectiva solución; y dos expresiones encerradas en círculos. En el gráfico (*elemento lingüístico*) se presentan dos segmentos horizontales que indican la altura inicial desde la cual es lanzada la pelota, esta altura es desconocida y también se ostenta a través de un lenguaje simbólico-literal haciendo uso del elemento lingüístico "x", que se caracteriza por ser un objeto algebraico e intensivo que indica la incógnita que se debe encontrar, también se observan tres segmentos verticales que representa respectivamente los tres rebotes indicados en la situación problema y hay una representación de estos, en términos de la incógnita "x": $\frac{x}{5}, \frac{x}{25}\ y\ \frac{x}{125}$", cada uno de estas expresiones indican una relación que ha sido reconocida por el maestro en el elemento lingüístico: "que rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó" dado en el problema, en L3 y L4, de la figura 8, del discurso del maestro A, se aprecia lo anterior:

[L1] **E**: ¿cómo has entendido el problema?
[L2] **A**: al principio te había comentado, que había sumado todos los rebotes e igualado a
[L3] seis...ehhh… (Lee el problema) cuando lanzamos una pelota desde cierta altura, rebota
[L4] hasta un quinto de la altura a la que se lanzó, esa es la condición, si después de tres
[L5] rebotes la altura alcanzada es de seis centímetros ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota?.
[L6] Bueno en el primer rebote va a quedar a una altura de equis quintos, en el segunda va
[L7] hacer equis quintos sobre cinco y en el tercer rebote seria equis veinticincoavo sobre
[L8] cinco, y esto nos daría equis sobre ciento veinticinco, y de acá, me di cuenta al final que
[L9] se puede igualar a la altura en que quedo de seis centímetros, después de los tres rebotes,
[L10] entonces resolviendo esa ecuación, nos da que nos da seis por ciento veinticinco
[L11] que sería setecientos cincuenta.
[L12] **E**: ¿Por qué al principio sumo?
[L13] **A**: …..ehhh…. la verdad estaba en otro cuento, plantee una ecuación ahí, considerando
[L14] que la altura que daban era la total, pues al principio esa fue la interpretación que di.
[L15] Entonces después leí, que después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm, entonces
[L16] ya, ahí dije como así. Seguí haciendo los otros problemas pero al final leí esa partecita
[L17] y caí en cuenta.

Figura 8. Entrevista del problema 2, maestro A.

Nótese que es una relación numérica entre la altura desde la que cae la pelota y la altura a la cual rebota, esta se considera el número de veces que rebota la pelota según las condiciones del problema, como se muestra en L6 a L8, de la figura 8, donde hay un proceso de materialización de la altura que alcanza la pelota en cada uno de los tres rebotes y como ya sea mostrado en la figura 7. En esta práctica se asume la fracción como relación parte todo, indicando así el procedimiento de dividir entre cinco la altura desde la que cae la pelota. Como se ha señalado anteriormente, en esta práctica matemática se aprecia la ecuación "$x+\frac{x}{5}+\frac{x}{25}+\frac{x}{125}=6\ cm$", en la figura 7, expresada por el maestro, donde suma todas las alturas, pero como él manifiesta en L13 y L14, de la figura 8, que esta fue planteada considerando que seis centímetros era la altura total, y que fue una manera errónea de interpretar el problema, por eso finalmente encierra en un círculo la ecuación que da cuenta de la situación problema y en otro circulo el valor de la incógnita esto es $\mathrm{x}=6\times 125$.

La ecuación en esta práctica se entiende como la expresión matemática que relaciona una cantidad conocida con una desconocida y permite hallar el valor de la cantidad desconocida, así $\frac{x}{125}$ y $6cm$, son dos cantidades, que de acuerdo con el enunciado del problema, representan la misma altura, la intervención de esta ecuación y de la incógnita en esta práctica matemática permiten apreciar un proceso de generalización, puesto que, se establece una relación general entre la altura inicial y la altura del ultimo rebote de la pelota a estos objetos intensivos el docente aplica un tratamiento para lo cual se debe considera como una entidad (unitaria) que se le pueden atribuir ciertas propiedades, de esta manera ocurre el proceso de reificación.

En suma, en este análisis se identifica intensivos como una incógnita y una ecuación, expresados en un lenguaje simbólico-literal, lo cual permite relacionar esta práctica con un nivel 2 de algebrización.

A continuación, se presenta la práctica matemática realizada por el profesor B, en la resolución del problema 2:

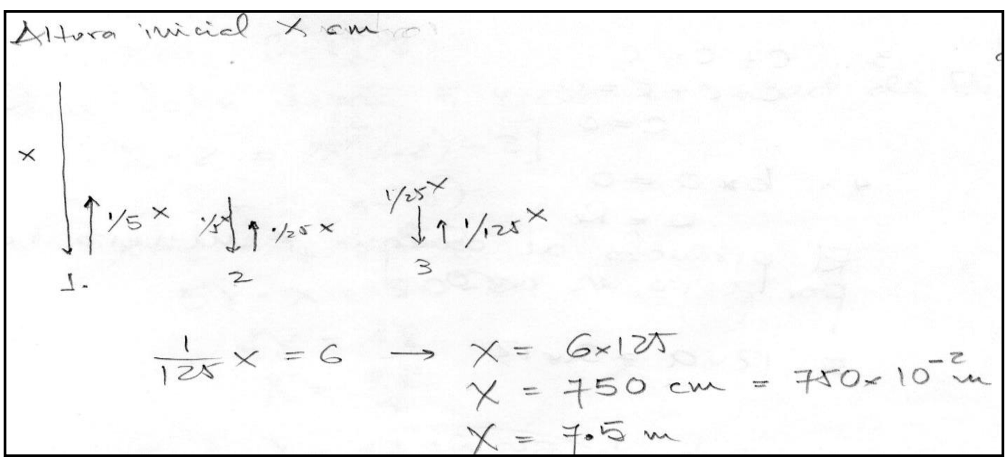


Figura 9. Resolución del maestro B, problema 2.

Inicialmente este maestro simboliza con la letra x, la altura inicial desde la cual fue lanzada la pelota y realiza una representación gráfica de esta y de los tres rebotes que se exponen en el planteamiento del problema, cada una de ellas le asocian una expresión (objetos intensivos) en un lenguaje simbólico-literal. Y finalmente el maestro reconoce y establece una relación entre la representación alfanumérica de la altura del tercer rebote y el dato conocido dado, que es seis centímetros, tal como se aprecia en lo enuncia el docente en la figura 10, en L8 yL9:

[L1] E: ¿Cómo entendiste el problema?
[L2] B: una altura inicial que no sabemos cuál es equis, entonces el primer rebote es la quinta parte
[L3] de esa altura, en el segundo lanzamiento como va rebotar la quinta parte de esa altura, entonces
[L4] en el segundo lanzamiento la altura es un quinto, entonces la quinta parte, un quinto por un
[L5] quinto o un quinto dividido cinco, que me da un veinticincoavo y para el tercero, la altura es un
[L6] veinticincoavo y lo que va a rebotar es la quinta parte de eso, ósea un veinticincoavo
[L7] multiplicado un quinto o dividido por cinco y obtengo ese valor.
[L8] Y me dicen que ese tercer rebote es de seis centímetros, entonces esa última expresión un
[L9] veinticincoavo de equis la igualo a seis y ya, hago transposición de términos

Figura 10. Entrevista del problema 2, maestro B.

La ecuación $\frac{x}{125} = 6$ (objeto intensivos) manifestada en la práctica del maestro modela la situación problema y permite encontrar el valor de la incógnita, haciendo uso de propiedades (transposición de términos) como se ostenta en L9, de la figura 10. Y en esta misma figura en L2 a L6 se observa que para llegar a la expresión $\frac{x}{125}$ el maestro realiza el procedimiento de multiplicar por un quinto la altura de la cual se lanzó inicialmente, luego la altura de ese primer rebote la multiplica nuevamente por un quinto y de esta altura del segundo rebote la multiplica por un quinto y de esta manera encuentra esa expresión, este procedimiento se evidencia a través un discurso en un lenguaje natural, y no se manifiesta en un lenguaje alfanumérico, solo se ostentan a través de este lenguaje alfanumérico la altura final de los rebotes y no el proceso mediante el cual se obtienen. En la figura 9, estos procedimientos muestran que el docente ha reconocido la relación numérica entre la altura desde la que cae la pelota y a la cual rebota, también se aprecia el uso que el profesor hace de la fracción como relación parte todo y el uso del signo igual para designar una relación de equivalencia.

Ahora bien, en esta práctica se presenta un proceso de generalización, de donde resulta los objetos intensivos antes mencionados, los cuales son visto como entidades, sobre las cuales puede operar a través de propiedades que lo permiten, esto hace posible caracterizar esos objetos como unitarios, así que en esta práctica matemática donde hay uso del lenguaje simbólico-literal para referirse a la incógnita y a la ecuación de la forma $Ax = C,$ que da cuenta de la situación problema, permite relacionarla con un nivel dos de algebrización.

Finalmente se presentan la figura 11 con la práctica matemática del maestro C, manifestada en el problema 2:

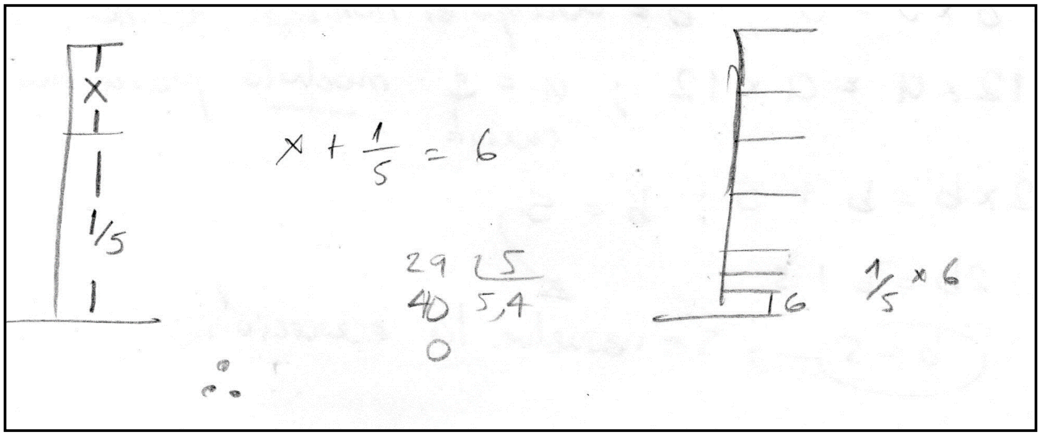


Figura 11. Resolución del maestro C, problema 2.

Aunque el maestro C no encuentra la solución del problema, se pueden identificar algunos objetos matemáticos en su práctica. Se observa una representación gráfica acompañada de un objeto intensivo x, que para el docente representa el valor que no conoce en el problema y un objeto extensivo $\frac{1}{5}$ y 6; también se observa una ecuación en la cual se relacionan las expresiones dadas en esa gráfica, a continuación, en la figura 12, se presenta su discurso en el cual aclara, la práctica manifestada en la figura 11:

[L1] **E**: miremos el segundo problema, que no concluiste, explícanos cuando escribes esta ecuación
[L2] $x + \frac{1}{5} = 6$, (la señalo). Como la entiendes?
[L3] **C**: como decía que la pelota se lanzaba desde cierta altura, y ella en el primer rebote llegaba
[L4] hasta un quinto de la altura, entonces equis seria la altura que me falta por hallar, para saber
[L5] cuál es la altura máxima y un quinto es el rebote que la pelota hace, ehhh el primer rebote que
[L6] ella hace.
[L7] **E**: explícanos esta expresión un quinto por seis?
[L8] **C**: seis es el último rebote que hace, porque en el último rebote ella llega hasta seis centímetros
[L9] y un quinto seria la quinta parte de…., digamos que la altura está dividido en cinco partes,
[L10] digamos…ehhh…. dividida en cinco pisos, así lo entendí yo.
[L11] **E**: es decir este un quinto representa que la altura inicial está dividida en cinco pedazos.
[L12] Cuando haces esta división (señala, veintinueve dividido cinco). El veintinueve de dónde sale?
[L13] **C**: intente despejar esta ecuación (señala: $x + \frac{1}{5} = 6$), y eso me dio veintinueve quintos
[L14] **E**: En el problema cuando dice que rebota hasta un quinto de la que se lanzó, y después hace
[L15] otro tres rebotes, como interpretas lo de los tres rebotes, porque utilizaste no más un rebote
[L16] durante tus explicaciones?
[L17] **C**: lo que pasa es que el ultimo rebote son seis centímetros, pero no se los anteriores y como
[L18] no sabía cómo representar los otros dos rebotes, entonces lo deje ahí.

Figura 12. Entrevista del problema 2, maestro C.

Tal como se aprecia en L3 a L5 de esta figura, el docente manifiesta su interpretación del problema donde ve a un quinto como una cantidad que hace parte de la altura de la cual se lanzó la pelota inicialmente, por lo que considera que un quinto más esa cantidad desconocida que ha nombrado "x" daría cuenta de la altura inicial, que la representa $\frac{1}{5} + x$. Luego presenta en la figura 11, la expresión $\frac{1}{5} \times 6$, y la explica en L7 a L9 de la figura 12, donde reconoce que seis centímetro corresponde a la altura del ultimo rebote, y sería la quinta parte de una altura, sin embargo lo que se puede percibir es que no hay una comprensión del problema y hay ideas separadas de este, lo cual impide que ostente una expresión que indique la relación desde la cual cae la pelota y a la cual rebota, así que no identifica la altura total inicial desconocida como la incógnita y tampoco establece que la altura de cada rebote se caracteriza por ser la quinta parte de la altura de la cual cae, lo cual implica también que no se logre representar la altura del segundo y del tercer rebote.

Por lo tanto, a pesar de que usa un lenguaje alfanumérico para representar ciertas relaciones que identifica según su comprensión del problema, a falta de que no logra entender el problema no se adjudica ningún nivel de algebrización.

En relación con el problema 3

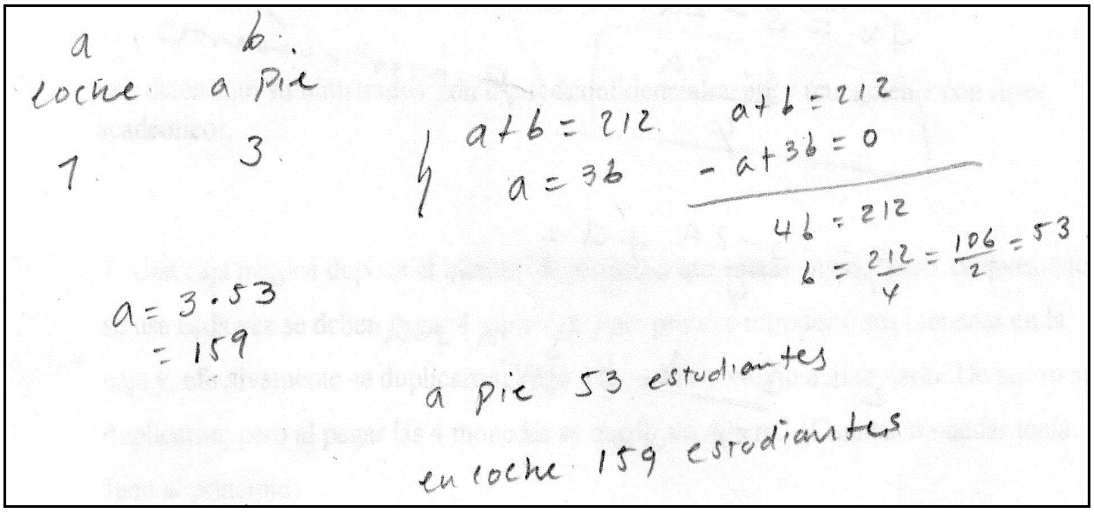


Figura 13. Resolución del maestro A, problema 3.

La figura 13, presenta la práctica matemática realizada por el maestro A, al resolver el problema 3. En esta práctica se *materializan* a través de un lenguaje simbólico-literal dos datos desconocidos: la cantidad de estudiantes que van a pie y la cantidad de estudiantes que van en coche, y se representan "a" y "b" respectivamente, estas dos incógnitas son reconocidas por el maestro en L3 y L8 en su discurso:

[L1] E: como has entendido el problema y como lo empezaste a resolver
[L2] A: bueno, a ver retomemos, para ir a la escuela los alumnos toman dos medios de locomoción, **[L3]** hay dos variables, por cada alumno que va en coche hay tres que van andando, pues los medios **[L4]** de locomoción es ir en coche e ir a pie. Entonces si hay doscientos doce alumnos en las escuela, **[L5]** se supone que cuantos alumnos utilizan cada medio de locomoción, ahí me doy cuenta de algo **[L6]** que no todos los alumnos tiene coche, pero bueno vamos a ver mi planteamiento
[L7] Así por cada alumno que vaya en coche, hay tres que van a pie, entonces se supone que son los **[L8]** alumnos que hay, entonces las variables van hacer los alumnos que van en coche y los alumnos **[L9]** que van pie, de ahí se plantea la ecuación que a mas b es igual a doscientos doce alumnos en la **[L10]** escuela y la otra condición es por cada alumnos que va en coche, hay tres que van a pie, **[L11]** entonces se resuelve el sistema de ecuaciones dos por dos, y se obtiene que son cincuenta y tres **[L12]** estudiantes y ciento cincuenta y nueve estudiantes en coche,
[L13] E: como entiende esta ecuación de a es igual a tres b
[L14] A: ahhhh se supone que esto era al contrario, claro, porque se supone que son cincuenta y tres **[L15]** estudiantes los que van en coche y el triple de cincuenta y tres es ciento cincuenta y nueve, y hubo en error ahí.

Figura 14. Entrevista del problema 3, maestro A.

Se observa además en la figura 14 en L7 como el docente establece una relación que por cada estudiante que va en coche hay tres estudiantes que van a pie, esta relación se representa también en la figura 13 en la parte superior izquierda cuando pone el uno y al frente pone el tres, caso concreto que permite ver una correspondencia entre dos cantidades. Seguidamente en esta misma práctica, se plantean dos ecuación "$a + b = 212$" y "$a = 3b$", en la primera establece una relación entre la suma de los estudiantes que van en a pie y en coche y el total de alumnos de la escuela; en la segunda está estableciendo una relación que el triple de alumnos que van a pie son los que van en coche, esta relación ostentado por el maestro es aclarada en L14 y L15, al aceptar que su representación esta errada puesto que la forma correcta es el triple de los que van en coche es equivalente de los van a pie

Después de plantear estas dos ecuaciones, el docente emplea procedimientos para encontrar el valor de las incógnitas, a través de un lenguaje simbólico literal aplica la técnica de eliminación para resolver el sistema dos por dos de ecuaciones que ha planteado, no antes haciendo transposición de términos en la segunda ecuación, quedando así $-a + 3b = 0$, de esta manera encuentra el valor de una de las incógnitas, b igual a 53 y ese valor lo sustituye en una de las ecuaciones para hallar la segunda incógnita, esta es 159.

En suma, en esta práctica se plantea de manera simbólica las relaciones presentadas en el problema, de manera que se expresan a través de las ecuaciones "$a + b = 212$" y "$a = 3b$", las cuales implican operar con la incógnita, y permite caracterizar esta práctica en un nivel tres de algebrización, en estas también se evidencia un proceso de generalización del cual resulta objetos intensivos, lo cuales son operados sintácticamente y hay un desprendimiento ontológico de los que son estos objetos, por lo cual se evidencia un proceso de reificación que caracteriza el objeto intensivo como unitario. Es importante notar que el docente da su respuesta en un lenguaje natural y no la verifica con las condiciones del problema de manera semántica, tal como se observa, en su práctica matemática manifestada en su registro escrito, por lo cual, es posible que el docente no caiga en cuenta del error.

A continuación se presenta la figura 15, con la actividad matemática desarrollada por el maestro B, en el problema 3:

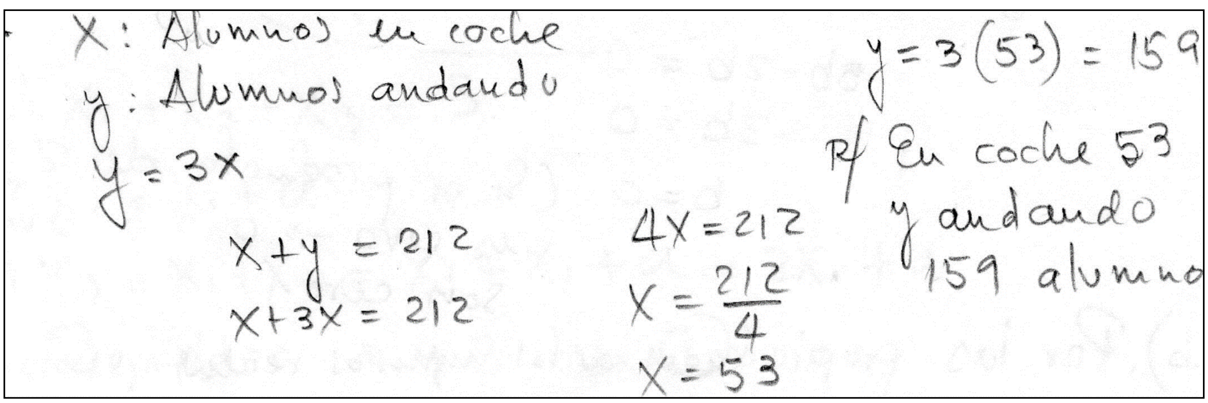


Figura 15. Resolución del maestro B, problema 3.

Como puede observarse en esta práctica del maestro B, comienza con una representación simbólica de las incógnitas: x y y, objetos intensivos que materializan las cantidad de los alumnos que van en coche y la cantidad de los alumnos que van andando. Luego, ostenta dos ecuaciones, la primera considera que la cantidad de alumnos que van andando es tres veces la cantidad de alumnos que va en coche, planteando la siguiente expresión $y = 3x$, la segunda ecuación $x + y = 212$ toma en cuenta la condición dada en el problema, hay 212 alumnos en la escuela. Así, plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y empieza a manipularlas.

En el siguiente cuadro de dialogo se puede apreciar también algunos elementos lingüísticos verbales que dan cuenta de conceptos que utiliza el maestro en sus procedimientos:

[L1] **E**: Como has realizado este problema?
[L2] **B**: Cantidad de chicos que van en coche no sé cuánto es entonces equis, y cantidad de chicos
[L3] que van andando no sé cuánto es entonces ye, pero nos dice que los que van andando es el
[L4] triple de los que van en coche, por eso los que van andando ye es igual a tres veces equis, que
[L5] son los que van en coche y además la cantidad total de los que van en coche y los que van
[L6] andando es doscientos doce, es decir, los chicos andando ye más los chicos en coche equis es
[L7] doscientos doce, pero ya sabemos que este ye que los que van andando es tres veces los que
[L8] van en coche, entonces nos queda una ecuación en una sola variable.

Figura 16. Entrevista del problema 3, maestro B

En este registro verbal, en L2 de la Figura 16, se encuentra la expresión "cantidad de chicos que van en coche no sé cuánto es entonces equis", que evoca el *concepto* de *incógnita* como cantidad desconocida, otro de los conceptos que puede identificarse en la solución de este docente, es el de *ecuación*, entendida como expresión matemática que permite relacionar cantidades conocidas y desconocidas; permite encontrar el valor desconocido. Este concepto también es utilizado, cuando el docente representa las dos condiciones dadas en el problema a través de dos ecuaciones, que se observan en una representación simbólica a través de un registro escrito como se observa en la figura 15, y en la figura 16, en L4 a L6, en el cuadro de dialogo en un lenguaje natural a través de un registro verbal, luego utiliza un *procedimiento* para encontrar las incógnitas a través de la técnica de sustitución, tal proceso se realiza en un plano analítico, manipulando sintácticamente lo que ha representado.

En la solución que presenta el maestro B, se observa un proceso de *generalización* cuando se plantea un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (*objeto intensivo*), lo cual, según el análisis de las soluciones previstas del problema esta manera de resolverlo implica una práctica en un nivel algebraico consolidado, donde se evidencian objetos intensivos, tales objetos establecen relaciones entre ellos, se realizan operaciones esto conlleva una complejidad mayor donde estas entidades intensivas son vistas como *unitarias* dando lugar a un proceso de *reificación.*

Por último, estas prácticas matemáticas indican un nivel tres de algebrización en donde se representan de manera simbólica, las cantidades desconocidas y se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia, aunque no se resuelven ecuación de tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, el hecho de pensar y representar dos incógnitas en la resolución de este problema y de utilizar la técnica de sustitución la cual implica una manipulación de lo desconocido, se considera como una práctica de tercer nivel, lo cual indica que los niveles no es una cuestión rígida.

A continuación, se presenta la figura 17, con la actividad matemática del docente C, en el problema 3:

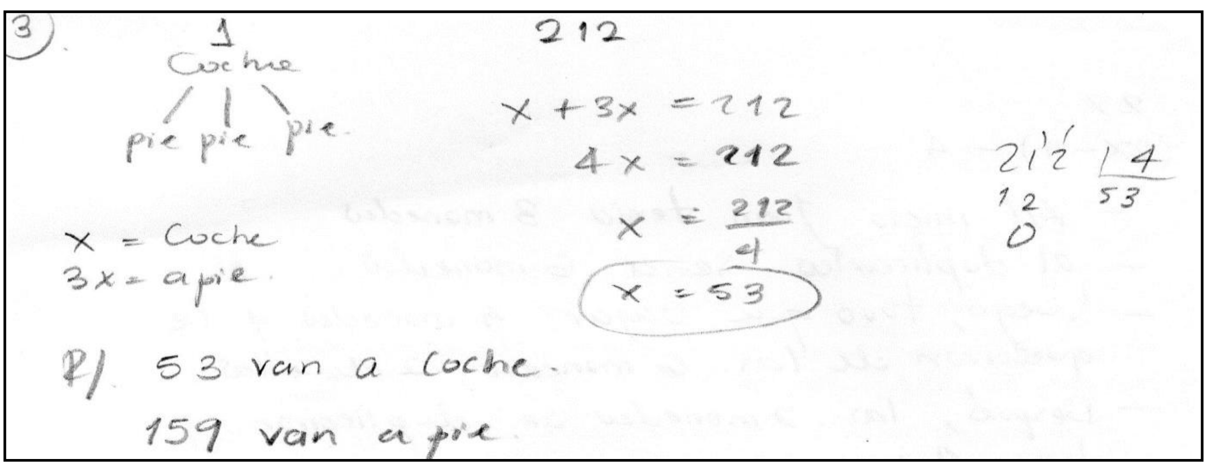


Figura 17. Resolución del maestro C, problema 3.

Inicialmente el docente C, ostenta una representación gráfica en la que expone una de las condiciones dadas del problema: por cada alumno que va en coche hay tres que van andando, tal como se observa en la figura 17, en la parte superior izquierda, después representa la cantidad de alumnos que van en coche con una "x", y la cantidad de estudiantes que van andando como "$3x$", luego toma en cuenta otra condición del problema: que la suma de todos los alumnos es 212, así que toma la suma de x y 3x, y la relaciona mediante una igualdad con la cantidad total de alumnos. De esa manera plantea la ecuación que cumple con las condiciones dadas en el problema y mediante unos procedimientos encuentra la cantidad desconocida, que a continuación se presenta el cuadro de dialogo del profesor C, donde se ostenta verbalmente como este docente ha entendido y realizado el problema, además de percibir algunos objetos matemáticos primarios utilizados:

[L1] **E:** Como lo ha realizado?
[L2] **C:** intente hacer una diagrama de árbol, entonces sabía que por un coche tres personas iban a
[L3] pie, lo que yo hice fue realizar la ecuación equis más tres equis es igual doscientos doce, realice
[L4] la ecuación despeje la variable y me dio cincuenta y tres, luego sabía que equis es igual a las
[L5] personas que van en coche y que tres equis es igual a las personas que van a pie.
[L6] **E:** Cuando despejaste la variable, como lo hiciste?
[L7] **C:** pues tu sabes que cuando uno le va a enseñar a los pelaos tú debes explicarles que si tu pones
[L8] algo al lado derecho también debe ponerlos al lado izquierdo, pues yo no lo puse ahí, pero uno
[L9] sabe, uno intenta hacerlo demasiado rápido, entonces sume equis más tres equis y me dio cuatro
[L10] equis, luego pues yo sé que si yo divido a ambos lado por cuatro, el cuatro se va volver en uno,
[L11] pero uno no hace eso, entonces de una pase al otro lado el cuatro, entonces dividí doscientos
[L12] doce en cuatro y me dio cincuenta y tres, seria los alumnos que van en coche. Y luego
[L13] multiplique tres por cincuenta y tres que son las personas que van a pie.

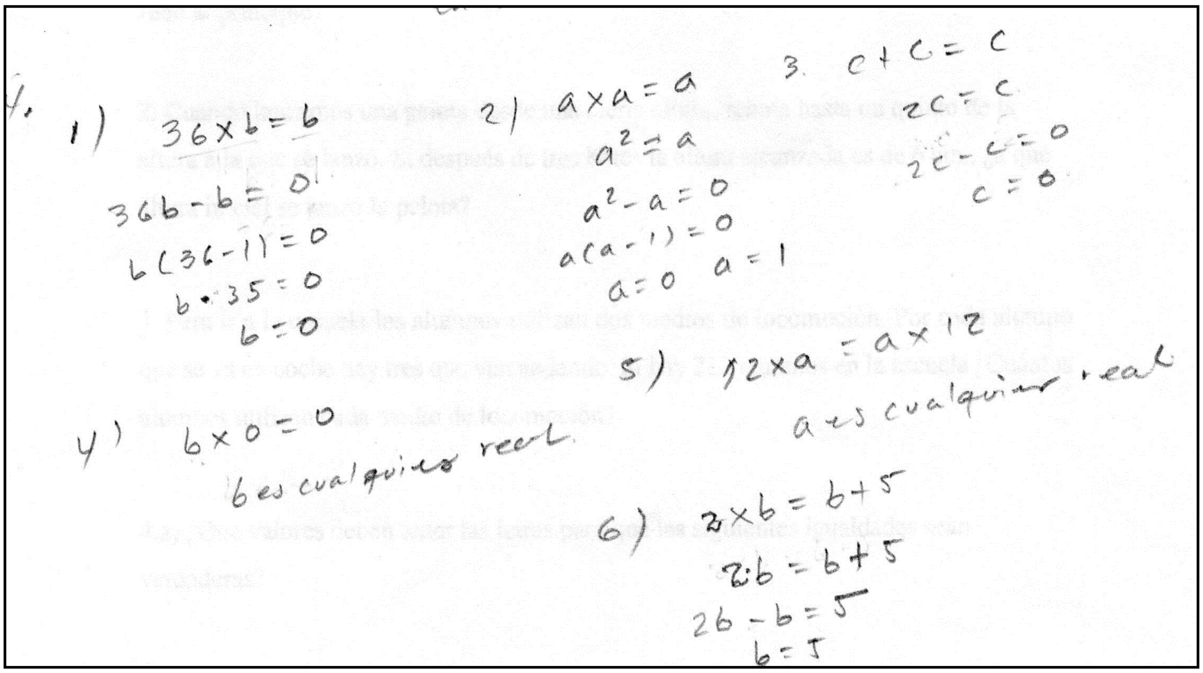
Figura 18. Entrevista del problema 3, maestro C.

Ahora bien, como ya se ha mencionado, en esta práctica se ostenta en un lenguaje simbólico dos datos desconocidos, sin embargo, como se observa en L2 de la Figura 18, también se expresan en lenguaje natural, uno expresado en términos del otro, relación que se establece mediante una igualdad. Además se plantea una ecuación tal como se muestra en la Figura 18 en L3 en un registro verbal: "equis más tres equis es igual doscientos doce", de la forma $Ax \pm C = D$, la cual indica una relación entre las cantidad total de alumnos y la suma de la cantidad de alumnos que van en los dos medios de locomoción, se aplican transformaciones que preservan la equivalencia, como se indica en L7 a L8 de la figura 18, donde el docente hace un acercamiento de lo que él entiende como la ley uniforme (procedimiento), pero lo que ostenta en su práctica escrita en la figura 17 es la transposición de términos.

En la práctica que presenta el maestro C, pueden identificarse el uso de *incógnitas* y de *ecuaciones* (conceptos) tales objetos intensivos indican un proceso de generalización, en la solución dada por el maestro, el reconocimiento de ciertas propiedades y procedimientos sobre estos objetos algebraicos permiten caracterizarlos como entidades unitarias, quedan lugar al proceso de reificación. La actividad matemática desarrollada por este maestro, intervienen un lenguaje simbólico- literal, usado para referirse a objetos intensivos, en esta práctica se usa una incógnita y una ecuación, caracterización propia de un nivel de algebrización dos.

En relación con el problema 4

A continuación la Figura 19 muestra la solución del maestro A, dada al problema 4:


4.

1) $36 \times b = b$
$36b - b = 0$
$b(36-1) = 0$
$b \cdot 35 = 0$
$b = 0$

2) $a \times a = a$
$a^2 = a$
$a^2 - a = 0$
$a(a-1) = 0$
$a = 0 \quad a = 1$

3. $c + c = c$
$2c = c$
$2c - c = 0$
$c = 0$

4) $b \times 0 = 0$
b es cualquier real

5) $12 \times a = a \times 12$
a es cualquier real

6) $2 \times b = b + 5$
$2b = b + 5$
$2b - b = 5$
$b = 5$

Figura 19. Resolución del maestro A, problema 4

A partir de los elementos lingüísticos en un registro simbólico de la solución de este maestro, podemos identificar algunos procedimientos que ha realizado, como la aplicación de transformaciones elementales y de algunas propiedades para encontrar las soluciones, se observa además que no realiza un registro escrito de la respuesta a la pregunta ¿Cómo sabes que esos valores son correctos?, sin embargo, si hay evidencia de un registro verbal que se presenta a continuación en el cuadro de dialogo , donde se aprecia conceptos, procedimientos y argumentos, de esta práctica matemática:

[L1] **E:** Como haz encontrado los valores de cada ítems y como sabes que son correctos?
[L2] **A:** Miremos esta treinta seis por b igual a b, cancelo b al otro lado, no perdón ahí factoricé para **[L3]** que treinta cinco por b me de cero, necesariamente debe ser cero, teniendo en cuenta que el **[L4]** producto entre dos números debe ser cero, en este caso b sería igual a cero.
[L5] En la segunda multiplicamos a por a y utilizamos el mismo procedimiento, me quedaría a al **[L6]** cuadrado menos a igual cero, cancelo a este lado (señala el lado derecho de la igualdad) haría **[L7]** la factorización y me doy cuenta que a puede ser cero o uno
[L8] En este caso (en el tercer ítems) sumo c con c me da dos c igual c, realizo el mismo **[L9]** procedimiento y me doy cuenta que c es cero.
[L10] Ehh luego en la cuarta, b por cero es cero, b es cualquier real.
[L11] Y en la quinta a es cualquier real lo asumí como la propiedad conmutativa.
[L12] Y por último, en la seis cancelo b en este caso me queda al otro lado b menos b y eso me da **[L13]** que b es igual a cinco.

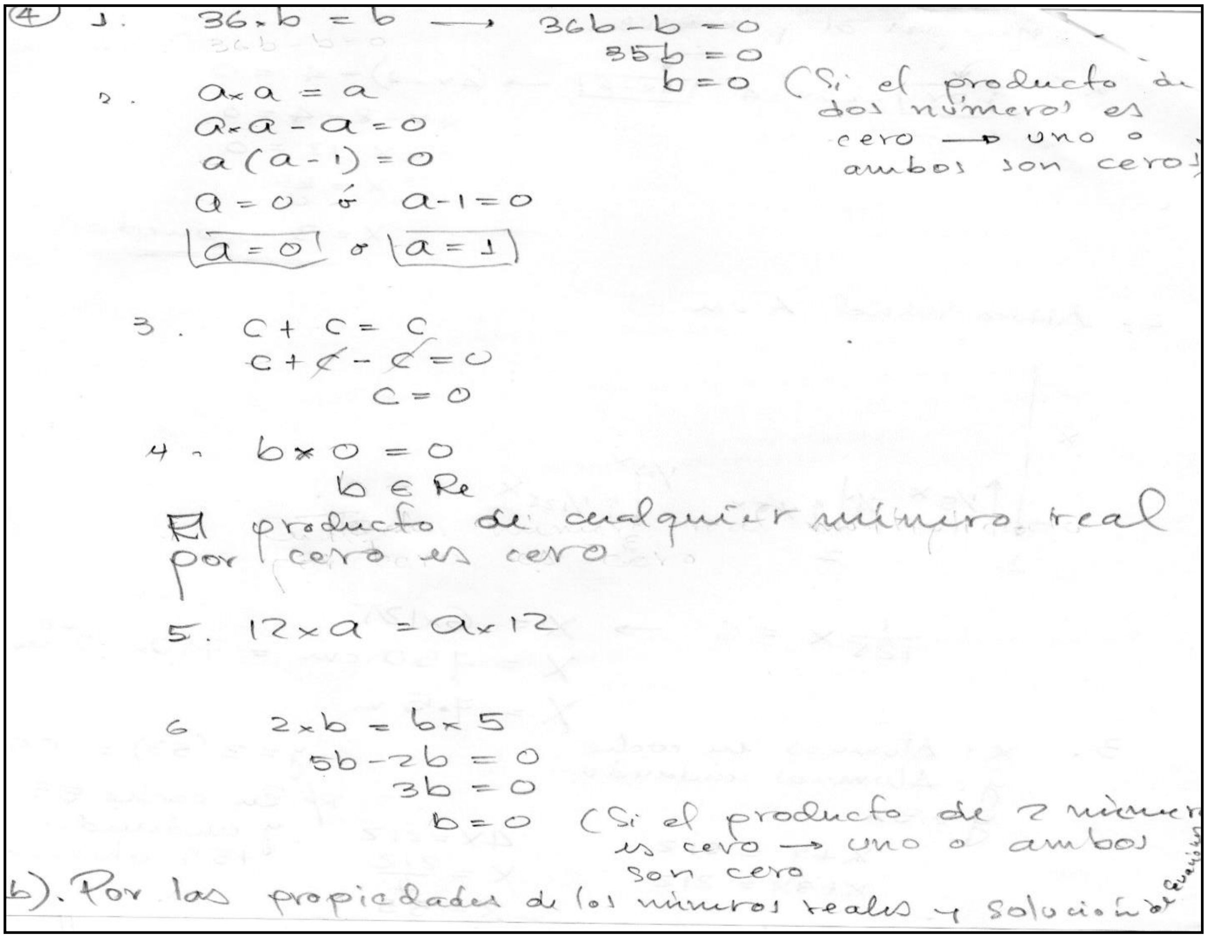
Figura 20. Entrevista del problema 4, maestro A

En la Figura 20, puede identificarse varios objetos matemáticos primarios, en L2 puede observarse como el docente da evidencia de procedimientos como factorizar, el cual usa en algunos de los ítems para encontrar el valor pedido. En L3 y en L4, usa la frase "*necesariamente debe ser cero, teniendo en cuenta que el producto entre dos números debe ser cero, en este caso b sería igual a cero*" que indica el teorema del producto nulo[6], también se observa el uso de la propiedad del elemento absorbente de la multiplicación[7], la transposición de términos y la simplificación como procedimiento, los cuales se utiliza para argumentar la solución de algunas de las igualdades, también se hace uso de la propiedad conmutativa como se evidencia en L12. Los conceptos puesto en juego es el de incógnita y el de número generalizado, es decir los literales pueden tomar un valor específico o indicar que pueden ser cualquier número.

En esta práctica se pone énfasis en el uso de las letras, además se puede apreciar un proceso de generalización que permite ver los objetos intensivos como entidades unitarias desligadas a la información del contexto. El uso de propiedades y de teoremas se puede considerar como indicativo del proceso de reificación, de acuerdo con estas caracterizaciones esta práctica matemática se relaciona con un nivel tres de algebrización.

[6]El teorema del producto nulo establece que si $ab = 0$, entonces ya sea $a = 0$ o $b = 0$ (o ambos). Un producto de factores es cero si y solo si uno o más de los factores es cero
[7] El producto de cualquier número a por el cero es igual a cero

En la siguiente figura 21, se presenta la práctica matemática presentado por el maestro B, en la resolución del problema 4:


(4) 1. $36 \times b = b \longrightarrow 36b - b = 0$

$35b = 0$

$b = 0$ (Si el producto de dos números es cero $\rightarrow$ uno o ambos son cero)

2. $a \times a = a$

$a \times a - a = 0$

$a(a-1) = 0$

$a = 0$ ó $a - 1 = 0$

$\boxed{a = 0}$ ó $\boxed{a = 1}$

3. $c + c = c$

$c + \cancel{c} - \cancel{c} = 0$

$c = 0$

4. $b \times 0 = 0$

$b \in Re$

El producto de cualquier número real por cero es cero

5. $12 \times a = a \times 12$

6 $2 \times b = b \times 5$

$5b - 2b = 0$

$3b = 0$

$b = 0$ (Si el producto de 2 números es cero $\rightarrow$ uno o ambos son cero

b). Por las propiedades de los números reales y solución de ecuaciones

Figura 21. Resolución del maestro B, problema 4.

En esta práctica matemática el docente realiza tratamientos sintácticos sobre las expresiones dadas, la noción de términos semejantes resulta central en el tratamiento dado a cada una de estas igualdades, en la figura 21 se pone en evidencia argumentos como *"si el producto de dos números es cero, entonces uno o ambos son cero"*, que evoca el teorema del producto nulo, asimismo frases como: "*el producto de cualquier número real por cero es cero*" ostentadas en un registro escrito como se aprecia en la figura 20, indica una propiedad del elemento absorbente de la multiplicación, otro de los argumentos en esta práctica se encuentra en el enunciado: "*por las propiedades de los números reales y solución de ecuaciones*" que es usado para justificar porque es correcto el valor hallado de los literales. Adicional a estos objetos matemáticos identificados encontramos otros ostentados en un registro verbal, como se muestran en la siguiente figura 22:

[L1] E: Como empezaste a resolver la cuarta?
[L2] B: En la primera del literal a, treinta seis b igual a b lo que yo hice aquí fue dejar términos **[L3]** semejantes a un lado, hice la transposición, treinta seis b menos b igual a cero, he hice la resta **[L4]** treinta cinco b iguala a cero, y concluyo que b es cero, porque el producto de dos números es **[L5]** cero si uno o ambos son ceros, entonces aquí hay uno que no es cero, entonces b necesariamente **[L6]** tiene que ser cero,
[L7] En la segunda del literal a, a por a igual a a, hice lo mismo, hice la transposición de términos y **[L8]** luego saque factor común y aplique la misma propiedad, si el producto de dos números es cero, **[L9]** un factor o ambos factores son cero, entonces iguale cada factor a cero, y ahí determine los **[L10]** factores de a.
[L11] En la tercera volví he hice lo mismo.
[L12] En la cuarta por la propiedad.
[L13] En la quinta, ay!! No la resolví, doce por a igual a a por doce, aquí me están dando dos **[L14]** expresiones que son iguales, si yo aplico la propiedad cancelativa, entonces me queda que a es **[L15]** igual a, y todo número real es igual a el mismo, o aquí es cualquier número real.
[L16] En la seis dos por b igual a b por cinco, lo mismo hice transposición, entonces me queda tres b **[L17]** igual a cero y el producto de dos números son cero si uno o ambos son cero.

Figura 22. Entrevista del problema 4, maestro B

En esta figura se identifica algunos procedimientos explícitos como: el de transponer términos utilizados en los ítems uno, dos, tres y seis para resolver las ecuaciones, tal como se muestra en L3 y L7, también se aplica factor común a la ecuación del ítems dos para encontrar el valor de la incógnita y de manera implícita el uso de la propiedad distributiva, se usa la propiedad cancelativa en el ítems cinco después de afirmar que la expresión de cada miembro de la ecuación son iguales, llegando a la identidad "$a = a$" que el docente manifiesta en L15 que "*todo número real es igual a el mismo*". En esta práctica matemática desarrollada por este maestro se observa frecuentemente el uso de propiedades estructurales para justificar o explicar procedimientos, aspecto que el docente hace ostensivo en su última respuesta como se observa en la Figura 21. En el ítem seis aunque se percibe un error en la transcripción de la ecuación de la hoja de problemas a la hoja de trabajo por parte del docente, se despejan la ecuación asumida por el docente correctamente.

En suma, en esta actividad matemática del docente B, hay presencia de objetos algebraicos intensivos (ecuaciones y propiedades), lo cual indica un proceso de generalización, además se encuentra transformaciones y procedimientos aplicados a los objetos intensivos basadas en propiedades que dejan ver los intensivos como unitarios, indicando un proceso de reificación, de acuerdo a los objetos algebraicos que intervienen y emergen en esta práctica, se corresponde con un nivel tres de algebrización.

La siguiente figura 23, muestra la solución presentada por el docente C, al problema 4:

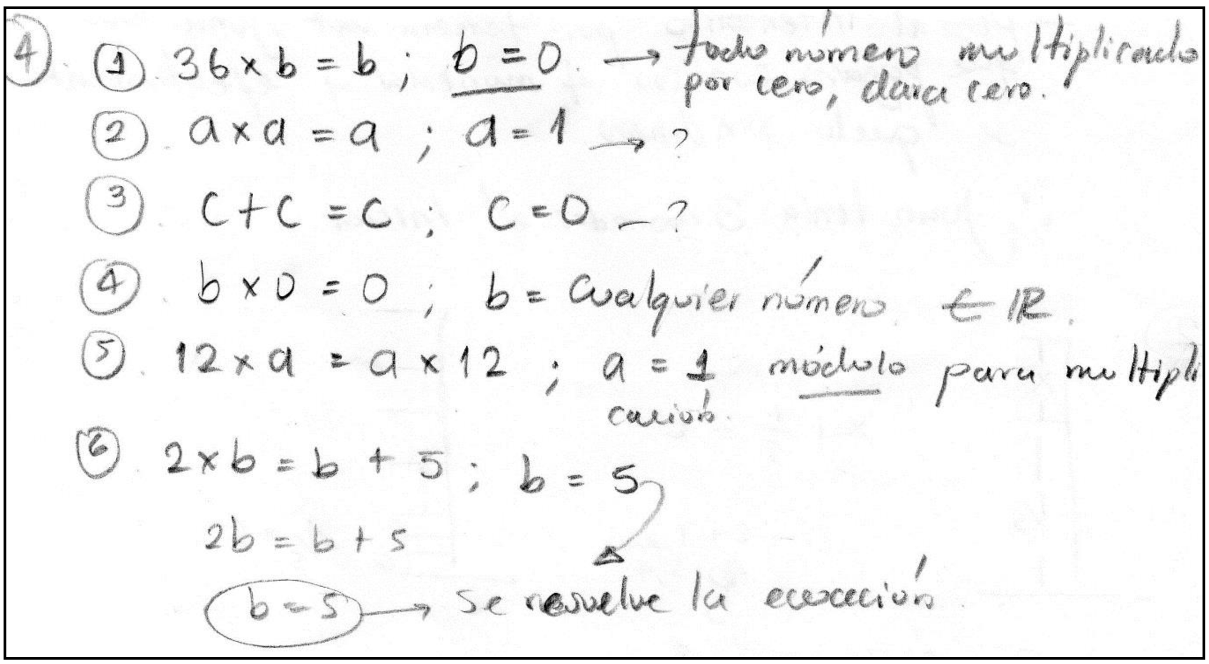

4) 1) $36 \times b = b$; $b = 0$ → todo numero multiplicado por cero, dara cero.
2) $a \times a = a$; $a = 1$ → ?
3) $c + c = c$; $c = 0$ — ?
4) $b \times 0 = 0$; $b =$ cualquier número $\in \mathbb{R}$.
5) $12 \times a = a \times 12$; $a = 1$ módulo para multiplicación.
6) $2 \times b = b + 5$; $b = 5$
$2b = b + 5$
$b = 5$ → se resuelve la ecuación.

Figura 23. Resolución del maestro C, problema 4.

En esta práctica matemática expresada por el maestro C, encontramos varios elementos lingüísticos que usa para argumentar, tales como: "todo numero multiplicado por cero, dará cero" que indica la propiedad del elemento absorbente de la multiplicación; "modulo para multiplicación" que hace referencia a una *propiedad* (la existencia del elemento neutro en la multiplicación); en el ítems seis el docente registra que *"resuelve la ecuación"*, sin hacer ostensivo las operaciones y los procedimientos realizados, pero se entiende que hace transformaciones para hallar el valor desconocido. Además se percibe en algunos ítems que da la respuesta de los valores que satisfacen la igualdad sin hacer ostensiva una justificación. Se identifican entre los conceptos que intervienen en esta práctica el de ecuación y el uso de la letra como incógnita y como número generalizado.

Seguidamente en la figura 24, se muestra un cuadro dialogo que nos ayuda a identificar otros objetos algebraicos que permiten caracterizar la práctica realizada por el maestro C:

[L1] **E:** Como hiciste cada ítems para hallar el valor que nos diste en tu hoja de trabajo?
[L2] **C:** En la primera treinta seis por *b* igual a *b*,…. Y yo dije pues el cero, treinta seis por cero es
[L3] igual a cero, pues todo número multiplicado por cero va a dar cero
[L4] **E:** Y puede haber otro número?
[L5] **C:** No creo
[L6] **E:** Y en la segunda sentencia?
[L7] **C:** También lo mismo, por ejemplo en la tabla de uno, uno por uno, uno
[L8] **E:** Puede que hallan otros valores?
[L9] **C:** Menos uno………, no, no
[L10] **E:** En la tercera?
[L11] **C:** Escogí el cero porque cero más cero, cero
[L12] **E:** Puede hacer otro número que satisfaga las condiciones de esa igualdad
[L13] **C:** No
[L14] **E:** Porque escogiste el cero?
[L15] **C:** Pues porque cero más cero nos da cero
[L16] **E:** En la cuarta?
[L17] **C:** Pues como cualquier número multiplicado por cero va a dar cero, por eso pongo los reales
[L18] **E:** como sabes eso?
[L19] **C:** Pues todo número multiplicado por cero va a dar cero
[L20] **E:** En la quinta?
[L21] **C:** Utilice el módulo de la multiplicación
[L22] **E:** Puede que haya otro número?
[L23] **C:** Quizás el cero doce por cero, cero y cero por doce, cero
[L24] **E:** Y otro número?
[L25] **C:** También la conmutativa
[L26] En la seis resolví la ecuación dos *b* igual a *b* más cinco, resolví la ecuación y me dio cinco.
[L27] La *b* que estaba al lado derecho, al lado del cinco la pase a restar al otro lado del dos *b*, eso
[L28] medio *b* igual a cinco

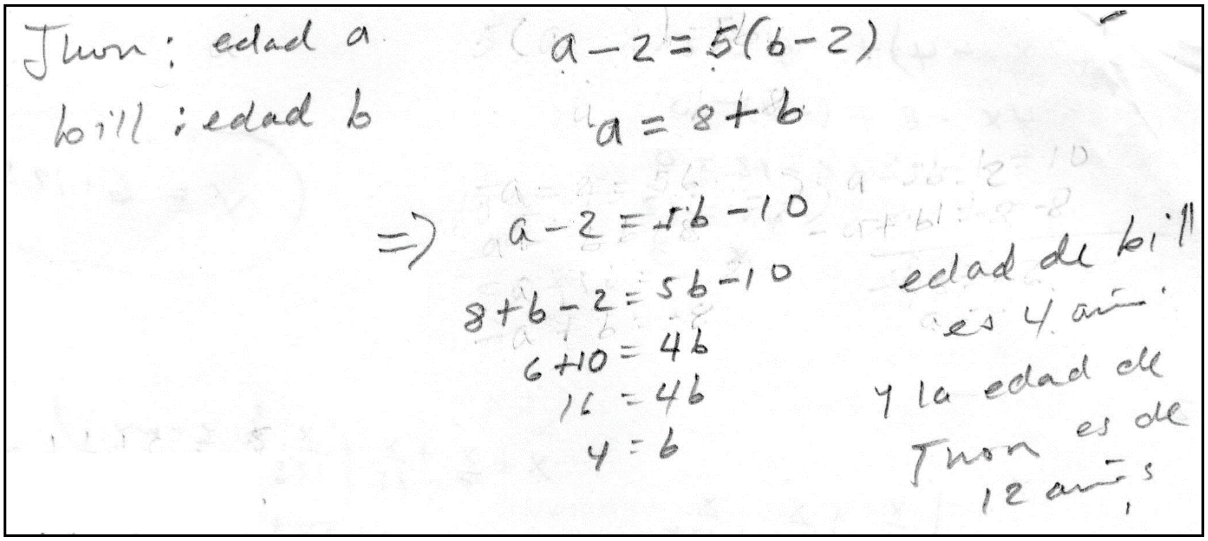
Figura 24. Entrevista del problema 4, maestro C.

Se observan en este cuadro de dialogo como el docente manifiesta argumentos que ya había expresado en su registro escrito, a través de los cuales explica y justifica la validez de la solución dada en cada ítems, tal es el caso del ítems 1, 4 y 5, así como otros que no había expresado en la figura 23, como en el ítems cinco cuando se hace explicito que la igualdad hace referencia a la propiedad conmutativa. Además en varios de los ítems se atendieron a través de ensayo y error como se aprecia en L2 en el ítems uno, en el ítems dos cuando expresa en L7: "*También lo mismo, por ejemplo en la tabla de uno, uno por uno, uno*", en el ítems tres reemplazando el numero escogido en la igualdad, sin hacer ostensivo como llega a encontrarlo, estos ítems el docente los ha resuelto a través de casos particulares. Y finalmente en el ítem seis justifican verbalmente que es a través de la aplicación de operaciones y propiedades (transposición de términos) que encuentra la solución como se muestra en L26 a L28 de la figura 24.

Se puede apreciar objetos extensivos en esta práctica matemática, ya que como se observan en la figura 23 los ítems 1, 2 y 3 han sido particularizados, cuando utilizan ensayo y error para encontrar los valores, lo cual se confirma en la figura 24 a través de la entrevista, sin embargo, se logra reconocer la presencia de objetos intensivo cuando hace uso de las propiedades, cuando logra ver la ecuación como un objetos unitario, y logra aplicar transformaciones, , estos objetos emergentes de la generalización, son visto como ya se ha mencionado como objetos unitarios que permiten dar lugar a intensivos de orden superior.

Así que, según las características descritas, el docente C tiene una tendencia a exhibir poco algebrizada su práctica matemática, en tanto, que resuelve la mayoría de los ejercicios para casos particulares, su práctica se relaciona con un nivel 0 de algebrización.

En relación con el problema 5



Jhon: edad a

bill: edad b

$a-2=5(b-2)$

$a=8+b$

$\Rightarrow a-2=5b-10$

$8+b-2=5b-10$

$6+10=4b$

$16=4b$

$4=b$

edad de bill es 4 años

y la edad de Jhon es de 12 años

Figura 25. Resolución del maestro A, problema 5.

En la figura 25 se muestra la práctica matemática del maestro A para resolver el problema 5. En esta se observa inicialmente como el docente representa elementos lingüísticos en un lenguaje simbólico-literal: la edad actual de Jhon y la edad de Bill, a través de dos literales, "a" y "b" respectivamente, ostenta también en este lenguaje dos ecuaciones, que representan las condiciones dadas en el problema, para resolver este sistema de ecuaciones dos por dos con dos incógnitas se observa que utiliza la técnica de sustitución (procedimiento), reemplazando el literal a de la primera ecuación por la segundo ecuación, y realiza las operaciones multiplicación, suma y resta, usando transposición de términos (procedimiento), para encontrar el valor de las incógnitas. Seguidamente se presenta en la figura 26 una entrevista que permite ver la explicación del maestro en un registro verbal de cómo ha realizado el problema:

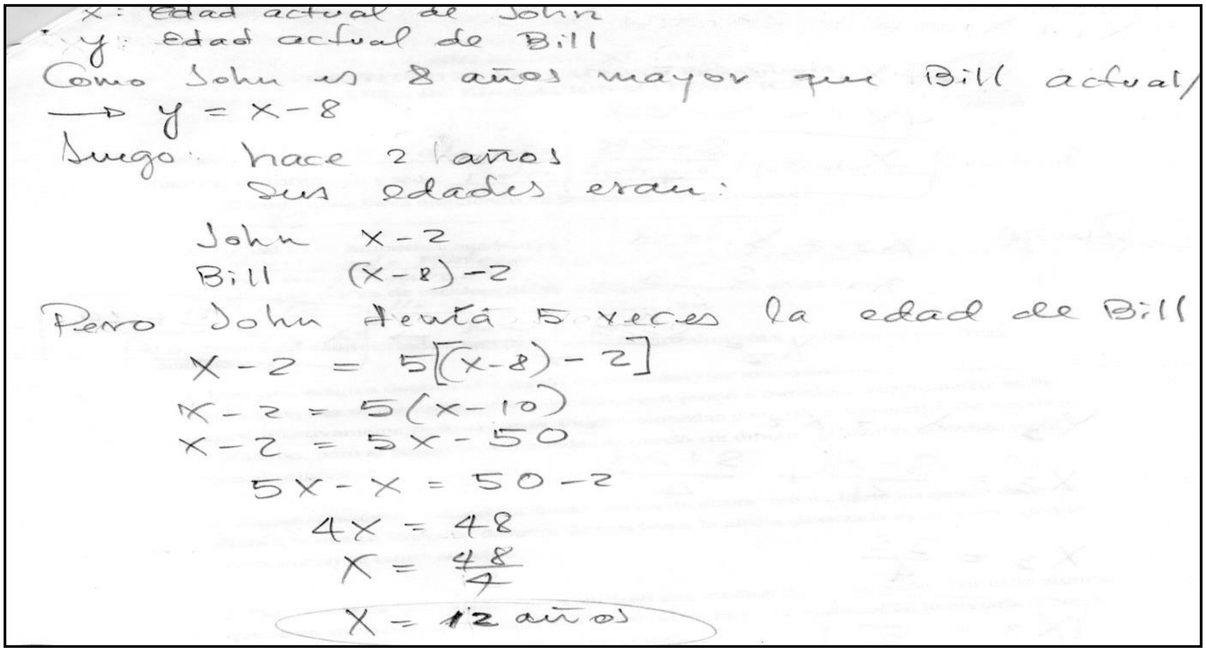
[L1] **E:** como entiendes el quinto problema?
[L2] **A:** Con base en la primera premisa que hace dos hace años Jhon tenía cinco veces la edad de
[L3] Bill, lo plantee de la forma "hace" como pasado, cierto, hace dos años hago la resta, a menos
[L4] dos igual a cinco veces la edad de Bill, en este caso pues él tendría quedaría cinco factor de b
[L5] menos dos
[L6] **E:** Entonces a y b serian la edad actual de Jhon y Bill
[L7] **A:** Claro, la a se tomo como la edad de Jhon y la b como la edad de Bill
[L8] **E:** Entonces la segundo condición, ahora Jhon es ocho años mayor que Bill, a es mayor que la
[L9] edad Bill, listo, encuentre la edad de John, resolvemos la ecuación nos quedaría reemplazamos
[L10] la edad de a, eso fue lo que yo hice, a es ocho más b, reemplazamos y tenemos que la edad de
[L11] Bill es cuatro, la verdad no la probre, esto son edades actuales, pero miremos a ver, entonces
[L12] Bill hace dos años tenía dos y el (Jhon) tenía diez, se me cumple en esta pero no sé en esta,
[L13] ……también ……. si estaría como correcta esta interpretación

Figura 26. Entrevista del problema 5, maestro A.

En este registro se puede constatar que ha utilizado el método de sustitución para encontrar los valores desconocidos, el docente confirma que ha sustituido una de las incógnitas como se puede observar en L10, el docente también verifica los valores encontrados, reemplazando dichos valores en las ecuaciones y verificando que las satisfacen, como se afirma en L11 a L13.

En esta práctica intervienen objetos intensivos como el de incógnita y ecuación (conceptos) que resultan de un proceso de generalización, esos objetos son vistos como entidades unitarias, que se empieza a operar y a manipularlos de manera sintáctica, usando procedimientos como el de sustitución, lo cual puede caracterizarse como el proceso de reificación, las ecuaciones son de la forma $AX + B = CX + D$, lo cual permite relacionar esta práctica con un nivel tres de algebrización.

A continuación se presenta la actividad matemática desarrollado por el maestro B, el problema 5:



x: Edad actual de John
y: edad actual de Bill
Como John es 8 años mayor que Bill actual/
$\rightarrow y = x - 8$
Luego: hace 2 años
sus edades eran:
John $x - 2$
Bill $(x-8)-2$
Pero John tenía 5 veces la edad de Bill
$x - 2 = 5[(x-8)-2]$
$x - 2 = 5(x-10)$
$x - 2 = 5x - 50$
$5x - x = 50 - 2$
$4x = 48$
$x = \frac{48}{4}$
$x = 12$ años

Figura 27. Resolución del maestro B, problema

En esta práctica matemática inicialmente se observan elementos lingüísticos en un lenguaje simbólico literal que expresan dos cantidades desconocidas, la edad actual de Bill y la edad actual de Jhon, respetivamente x y y . Seguidamente el docente representa la edad actual de Bill tomado en cuentan las condiciones del problema, en virtud que Bill es menor que Jhon, la representa como la edad de Jhon menos ocho (años), luego expresa las edades de cada uno de ellos hace dos años, mediante un lenguaje simbólico restando (operación) dos a cada una de las edades actuales, pero en la edad de Bill la expresa en términos de la edad de Jhon que previamente a expuesto. Y después plantea la ecuación que representa que *Jhon hace dos años tenía cinco veces la edad de Bill* como se puede observar en la figura 27, y finalmente opera sobre esta ecuación aplica operaciones y propiedades: destruye paréntesis, usa el concepto de términos semejante, realiza transposición de términos y se ve la aplicación de la propiedad distributiva hará llegar al valor buscado. Esto se puede ver en la figura 17 y en un registro verbal que se presenta a continuación en la figura 28:

[L1] **E:** Como realizaste el quinto problema?
[L2] **B:** Nos preguntan por edad actual de Jhon, entonces yo empecé por allí, que equis es la edad
[L3] actual de Jhon, entonces ye es la edad actual de Bill, porque no sabemos cuáles son las edades
[L4] de cada uno, como jhon es ocho años mayor que Bill actualmente, entonces la edad de Bill es
[L5] igual a la edad de Jhon que es equis menos ocho, porque Jhon es mayor, ósea que Bill es menor
[L6] en ocho años, esas son las edades actuales entonces para Jhon equis y para Bill equis más ocho.
[L7] Entonces sus edades hace dos años eran, la edad de hoy disminuida en dos, entones la edad de
[L8] Jhon es equis menos dos y la edad de Bill, equis menos ocho disminuida en dos, pero Jhon
[L9] tenía cinco veces la edad de Bill, hace dos años.
[L10] Entonces la edad de Jhon que es equis menos dos sería igual a cinco veces la edad de Bill que
[L11] equis menos ocho menos dos, y lo que sigue es destruir paréntesis, términos semejantes y
[L12] despejar equis, entonces ahí determinamos la edad actual de Jhon, que es la preguntan qué
[L13] hacen.

Figura 28. Entrevista del problema 5, maestro B

En esta práctica se ha trabajado con dos incógnitas y aunque el maestro no hace explicito se puede ver una método de sustitución de la incógnita "y" por la expresión "$\mathrm{x} - 8$", los cuales son vistos como objetos intensivos que resultan de un proceso de generalización, pero a partir de procedimientos y propiedades que se aplican estos objetos, en la medida que lo permitan dan lugar a un proceso de reificación, por lo tanto esta práctica matemática se puede relacionar con un nivel tres de algebrización.

Finalmente se presenta a continuación en la figura 29, la práctica matemática que propuso el maestro C, para resolver el problema 5:

Jhon $\rightarrow$ $2+5x$ $\qquad$ $8(2+5x)+x$
Bill $\rightarrow$ x

Figura 29. Resolución del maestro C, problema 5.

Aunque el maestro C no encuentra la solución del problema, se pueden identificar algunos objetos matemáticos en su práctica, el docente usa un lenguaje alfanumérico para representar los valores que para él son desconocidos en el problema, reconoce que hay incógnitas una la llama x y la otra la representa en términos de edad de Bill. También se observa una expresión en la cual se relacionan las expresiones dadas, Sin embargo, las representaciones de estos términos lingüísticos no son correctas, ya que el maestro no logra relacionar los datos desconocidos y los datos numéricos del problema. A continuación, en la figura 30, se presenta su discurso de la práctica manifestada en la figura 29:

[L1] **E:** Explícanos lo que hiciste?
[L2] **C:** Hice varios intentos para para hallar la edad de Jhon intente poner dos más cinco equis, luego
[L3] cinco equis menos dos, luego dos menos cinco equis, pero no logre llegar a una solución que yo
[L4] quedara satisfecho, entonces lo deje planteado así.
[L5] **E:** Y de dónde sacas el dos y de donde sacas el cinco?
[L6] **C:** El dos representa hace dos años, cinco equis es q hace dos años Jhon tenía cinco veces la
[L7] edad de Bill, equis es la edad de Bill.
[L8] **E:** Cuando sumas la equis, porque lo haces.
[L9] **C:** Si ahí la sume porque no sabía quemas hacer.

Figura 30. Entrevista del problema 5 maestro C.

En su registro verbal, se evidencia que el docente hace varios intentos para hallar los datos que desconocen, y encontrar una ecuación que permita encontrar el valor que le piden, pero presenta dificultades en la comprensión del problema y no logra resolverlo, por lo tanto no se le adjudica ningún nivel de algebrización.

En relación con el problema 6

En la Figura 31 se muestra la práctica matemática manifestada por el maestro A en la resolución del problema 6:

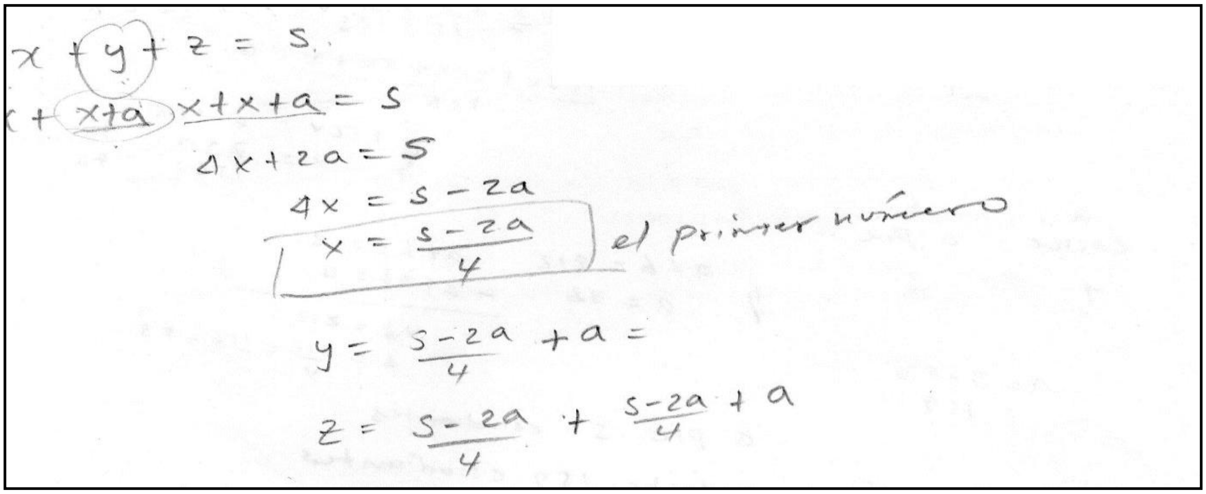


Figura 31. Resolución del maestro A, problema 6.

Se observa en esta práctica del maestro A, que el registro escrito mediante el cual ha ostentado su actividad matemática es a través de un exclusivo lenguaje simbólico, se puede apreciar materializados todos los datos del enunciado, donde inicialmente representa con literales: x, y y z, los tres números, seguidamente expresa el segundo y el tercer numero en términos de: x y a, dando lugar al planteamiento de la ecuación "$x + x + a + x + a = S$" que cumple con las condiciones dadas en el problema y también se observa transformaciones aplicadas a esta para llegar a la expresión $4x + 2a = S$. A continuación se muestra la figura 32, donde se presenta un registro verbal del docente que forma parte de su práctica matemática realizada en este problema:

[L1] **E:** La sexta, explícanos como la haz realizado?
[L2] **A:** Sean tres números cuyas sumas sean ese, supuse que las variables eran equis, ye y zeta,
[L3] entonces *equis* más *ye* más *zeta* es nuestra condición, igual a *ese*, tales que el segundo supera al
[L4] primero en a, si dije que el primero había sido *equis* y si lo supera en a entonces sería *equis* más
[L5] a, entonces lo estoy dando en una sola variable y ahora miremos la tercera condición y que el
[L6] tercero sea la suma de los dos primeros, entonces sería *equis* más *equis* mas a, y todo eso sería
[L7] igual a *ese*, si resolvemos esta ecuación me da cuatro *equis* más dos a, eso es *ese*.
[L8] Encuentra los tres números, entonces resolviendo eso me da que el primer número es *ese* menos
[L9] dos a sobre cuatro, el segundo numero va ser ese valor más a y el tercer número va ser la suma
[L10] de esos dos.
[L11] **E:** Según el contexto de este problema que entiendes por los literales *ese* y a?
[L12] **A:** En cuanto a si son cantidades variables o fijas, ………pueden ser variables, sean tres
[L13] números cuya suma sea *ese*, estoy manipulando variables, ahh esa fue la segunda pregunta que
[L14] no respondí, permítame solucionar eso ahí que no respondí, y (empieza a operar las respuestas
[L15] que dejo indicadas en términos de s y a), el tercer número seria la mitad de *ese*, describir ahí la
[L16] resta entre ellos dos, si se restan, es el dato fijo menos el doble de lo que puede ser a, pero que
[L17] relación puedo establecer ahí, yo puedo describir ahí la resta pero que relación puede describir
[L18] ahí.
[L19] **E:** Qué diferencia hay entre equis y *ese*, que características tienen?
[L20] **A:** *ese* es una constante y esa constante estaría relacionada con el primer valor en la diferencia
[L21] del doble de a sobre cuatro,
[L22] Revisemos esta segunda, supera el segundo en a, a puede ser una constante también, debe ser
[L23] porque le estoy dando valores variables a un resultado fijo, la cantidad constante menos el doble
[L24] de a sobre cuatro, la cuarta parte de esa diferencia.

Figura 32. Entrevista del problema 6, maestro A.

En esta figura se puede identificar elementos lingüísticos como: "*variables*" que indica un objeto intensivo cuando se refiere a *equis*, *ye* y *zeta*; "*dato fijo*" o "*constante*" cuando hace referencia a ese y a. También se observa en L7 como ha operado términos semejantes (concepto), cuando está despejando la variables x, pero no hace explícito este procedimiento, operaciones como suma, resta, multiplicación y división también se evidencia en esta práctica, además se ve como x depende de los datos S y a, igual que los números y y z, los cuales en el registro escrito se pueden simplificar, procedimiento que realiza en el momento de la entrevista y se ostenta en L15, L22 y L23. El maestro logra reconocer que la cuarta parte de la diferencia de *ese* menos el doble de a, describe una relación.

Esta práctica se caracteriza por que permite ver un modelo de todos los problemas que solo se diferencian por el valor numérico de sus datos, contiene la solución de todos los problemas de la misma naturaleza, permitiendo ver un proceso de generalización, y de entidades que dan lugar a objetos intensivos de orden superior, dejando ver que también hay un proceso de reificación.

Esta actividad matemática se caracteriza por la intervención de variables y la operación con ellas, por el uso de un lenguaje simbólico-literal, donde sus símbolos se usan de manera analítica, y por el uso de parámetros, lo cual permite relacionarla con un nivel cuatro de algebrización.

A continuación, se presenta la actividad matemática manifestada por el profesor B, para resolver el problema 6:

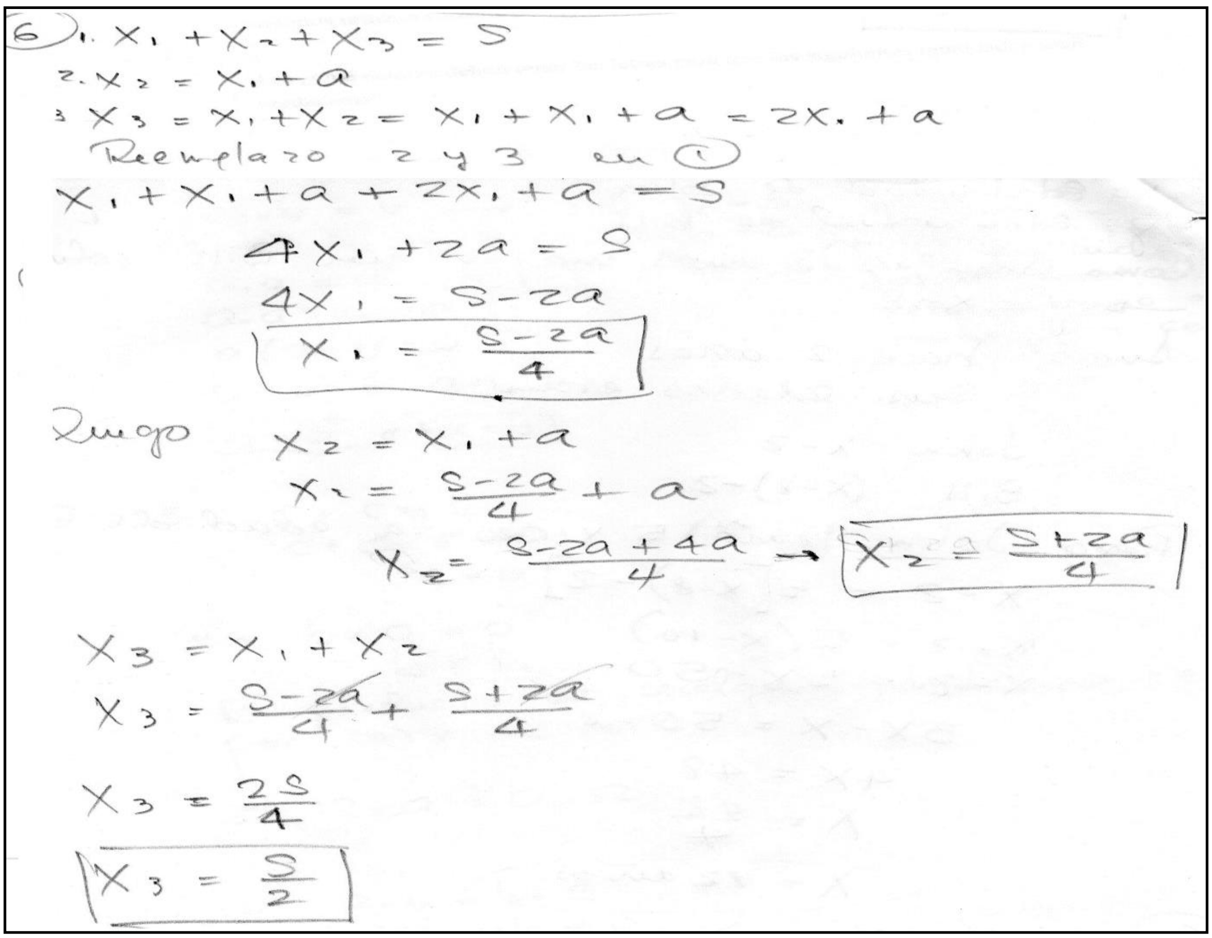


Figura 33. Resolución del maestro B, problema 6.

En la práctica matemática manifestada por este maestro, se observa que ha ostentado cuatro literales tal como se muestra en la Figura 33, inicialmente cuando plantea la ecuación $x + x +$

$x = S$, seguido esto vemos como plantea otras dos ecuaciones e interviene otro literal: a, luego el elemento lingüístico "*reemplazo 2 y 3 en 1*" que hace referencia a un procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones, el de *sustitución*, donde se observa la manipulación de expresiones algebraicas con varias variables y parámetros, lo cual viene dado de un trabajo de modelización. Luego vemos que ha ostentado los tres números pedidos en términos de ese y a, donde se observa que unas cantidades dependen de otras.

Se identifica además en la entrevista presentada en la Figura 34, otros objetos algebraicos:

[L1] E: Como realizaste el problema?
[L2] B: Entonces yo no sé cuáles son los números, entonces digo que son equis sub-uno, equis sub-
[L3] dos, y equis sub-tres, no indica que sea consecutivos pero me dicen que el segundo número es
[L4] igual al primero aumentado en a y que el tercero es igual a la suma de los dos anteriores,
[L5] entonces como es la suma de los dos anteriores, entonces sería equis sub-uno más equis sub-dos **[L6]** que es equis sub-uno más a, con lo cual me queda que equis sub-tres es dos veces equis sub-**[L7]** uno más a.
[L8] Luego estas dos expresiones, la dos y la tres la reemplazo en la uno, para que todo quede en
[L9] términos de equis sub-uno, entonces me queda una ecuación con una sola incógnita equis sub-
[L10] uno, y de esa manera obtenemos equis sub-uno, luego como ya conozco equis sub-uno, puedo
[L11] hallar equis sub-dos, aumentándole a, y como ya tengo equis sub-uno y equis sub-dos, sumo
[L12] esos dos para obtener equis sub-tres
[L13] E: En el contexto de este problema como entiendes los literales *ese* y a?
[L14] B: *ese* y a son dos valores, donde *ese* es mayor que a.
[L15] E: Y como se relacionan *ese* y a, en el primer término.
[L16] B: se relacionan a través de una diferencia

Figura 34. Entrevista del problema 6, maestro B.

Llama la atención que en la entrevista no ostenta el hecho de que *ese* y a, son parámetros, pero cuando en L10 expresa que "*ya conozco equis sub-uno*" se puede pensar que el maestro considera a *ese* y a, como valores conocidos, pero los manipula como si fueran desconocidos que pueden tomar cualquier valor. Así que vemos un proceso de modelización algebraica donde se produce una unificación y reducción de este tipo de problema, generalizando la solución de este, a través de unas expresiones algebraica (objetos intensivos), como se muestra en la figura 33. el docente también logra reconocer la relación entre las variables S y A que intervienen, como se aprecia en L16.

En esta práctica, se pone énfasis en el uso de letras, se representan números a través de ellas, los cálculos no pueden efectuarse y el resultado obtenido proporciona los pasos a seguir para resolver todos los problemas que sólo se diferencian por el valor numérico de los datos (S, a). Se aprecia un lenguaje simbólico-literal, se usan símbolos sin referir a la información del contexto, como parámetros y variables, lo que permite apreciar un proceso de reificación, lo que implica un nivel 4 de algebrización.

La figura 35 muestra la solución realizada por el maestro C para solucionar este problema:

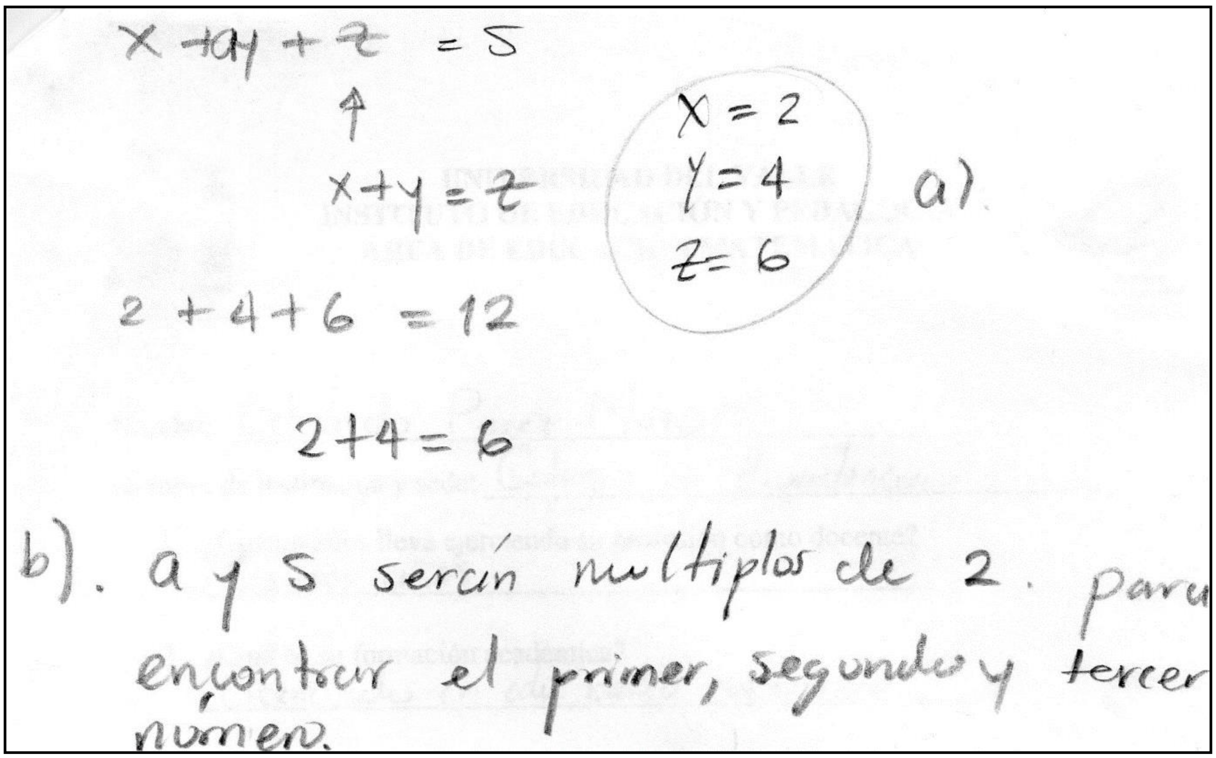


Figura 35. Resolución del maestro C, problema 6.

En esta práctica matemática se ostentan objetos intensivos tales como: la ecuación $x + ay + z = S$, donde se identifican los cantidades del problema representados en un lenguaje simbólico, también $x + y = z$, donde el docente C expresa un dato en términos de otro, pero en su práctica se observan también objetos extensivos, como los números 2, 4 y 6 que representan los tres números pedidos en el problema. De este modo la solución expresada por este docente La solución expresada por este docente no generaliza la solución de este tipo de problemas puesto que particulariza $a = 2$, y $x = 2$ y los otros valores los encuentra con las condiciones dadas en el problema.

Sin embargo en la respuesta al ítem b, trata de establecer una relación general para estos literales, diciendo que serán múltiplos de dos, condición que siempre no se van a cumplir como se evidencia en la entrevista que se presenta a continuación en la figura 36:

[L1] E: Explícanos como realizaste el sexto problema?
[L2] C: Yo puse tres múltiplos de dos, cuatro y seis…. se ……. que el segundo supero a……,
[L3] bueno, si tomo la equis como dos, la *ye* como cuatro y la a como dos entonces dos por dos da
[L4] cuatro, entonces esa a supera a *ye* en dos.
[L5] Y luego sume dos más cuatro y me da seis, y luego la suma de ellos pues me da doce.
[L6] E: Y como harías para cualquier a y para cualquier *ese*, hallar la relación, sino le hubieras dado
[L7] valores particulares, como harias si equis y *zeta* no fueran múltiplos de dos?
[L8] C: ah pueden ser múltiplos tres
[L9] E: Explica en el contexto del problema a que se refieren los literales ese y a?
[L10] C: Pues *ese* es el total de la suma de los tres números y ….. la a …… no se… me ocurre nada
[L11] E: Crees que hay otra manera de resolver la sexta o consideras correcta esta solución
[L12] C: Correcta como tal sí, pero puede que haya otra solución.

Figura 36. Entrevista del problema 6 maestro C.

Tal como se muestra en L8, cuando dice que también pueden ser múltiplos de tres, donde se observa que trata de resolver el problema para casos particulares. Así que, intervienen datos desconocidos, pero el tratamiento que se da al problema es a través de un lenguaje numérico con objetos extensivos, dando valores particulares a los datos pedidos, por lo tanto su práctica se relaciona con un nivel cero de algebrización.

3.3.1. Perspectiva general de los análisis presentados de las prácticas de los maestros.

En virtud que el estudio se realizó con tres maestros, se van a referir a cada uno de ellos, teniendo en cuenta los objetos algebraicos intensivos presentados, las transformaciones aplicadas a dichos objetos y los tipos de lenguajes usados en las prácticas manifestadas en cada uno de los problemas propuestos, lo cual permite establecer pautas para considerar una práctica como más o menos algebraicas y en estos términos se trata de trazar una tendencia de las prácticas presentadas por cada profesor.

En relación con el maestro A, en sus prácticas manifestadas en cada problema hay una tendencia a representar en un lenguaje simbólico literal las condiciones dadas en los problemas propuestos en un lenguaje natural, este maestro en todas sus prácticas ostenta datos desconocidos a través de este lenguaje, para lo cual hace uso de incógnitas, variables o parámetros, lo cual permite también establecer relaciones entre estos datos desconocidos y los conocidos a través de expresiones como ecuaciones y funciones, estos objetos se distinguen por ser intensivos y expresar generalidad lo cual permite caracterizar la práctica de este maestro.

Además de esto, en sus prácticas se puede observar el uso del signo del igual como una relación de equivalencia, maneja propiedades y teoremas del conjunto de $\mathbb{R}$, tales como distributiva, la conmutativa y el elemento absorbente de la multiplicación y el teorema del producto nulo lo que le permite a este maestro hacer transformaciones de los objetos intensivos que ostenta. De acuerdo con esto, una característica que sobresale en estas prácticas es el carácter analítico de ellas, en tanto que operan en el plano de la expresión simbólico literal, con una ausencia de significado a la cual refieren esos símbolos que usa, por lo que se puede afirmar que todas sus prácticas tienden a estar algebrizadas, mostrando un nivel de algebrización consolidado.

En relación con el maestro B, en sus prácticas se observa un uso exclusivo de un lenguaje simbólico literal, para resolver los problemas propuestos, lo cual lleva a ostentar a través de este; variables, incógnitas y parámetros para representar lo indeterminado y expresar relaciones entre estos objetos (intensivos) y los extensivos a través de ecuaciones y funciones que cumplen las condiciones dadas del problema. Además de esto, unas de las características de las prácticas de este maestro es el uso propiedades y teoremas propios de $\mathbb{R}$, tales como la distributiva, la propiedad conmutativa, cancelativa, el elemento absorbente de la multiplicación y el teorema del producto nulo, y conceptos como el de términos semejantes, permiten realizar transformaciones a los objetos anteriormente indicados. Lo que hace que se dote de un carácter analítico sus prácticas donde hay un desprendiendo del contexto al que se refiere los objetos intensivos. En general, este maestro al atender cada uno de los problemas propuestos, mostró en su práctica el mayor nivel de algebrización que permitía cada problema al solucionarlos

En relación con el maestro C, se observó que en sus prácticas hay una tendencia por buscar casos concretos y usar objetos extensivo para encontrar la solución de los problemas, lo que lo lleva hacer uso de un lenguaje natural y numérico para resolverlos, donde el método que privilegia es el de ensayo y error. En pocos casos en sus prácticas se logra ver que intervienen símbolos para referir a objetos intensivos, y aún más escaso es el uso de objetos como ecuaciones y funciones que permiten establecer relaciones entre objetos desconocidos y conocidos a partir de las condiciones dadas en el problema. En general la tendencia que muestra este maestro hacia usar casos concretos no le permite reconocer y usar propiedades generales de $\mathbb{R}$, sin embargo en algunos casos este maestro logra reconocer la presencia de ciertas propiedades como: elemento absorbente de la multiplicación, existencia del elemento neutro de la multiplicación y la conmutativa, solo cuando ha resuelto para casos concretos algunos problemas logra reconocerlas, las prácticas de este maestro están menos algebrizadas según el análisis de las posible respuestas presentadas en el apartado 3.1.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de este trabajo, tomando en consideración el objetivo trazado para su desarrollo: “Caracterizar el razonamiento algebraico de algunos maestros de la educación básica secundaria y media a partir de los niveles de algebrización propuesto por Godino et al, (2014), manifestado en sus prácticas matemáticas cuando resuelven algunos problemas” Para ello, se utilizó algunas herramientas teóricas del EOS que permitieron identificar objetos algebraicos que se pueden relacionar con un nivel de algebrización. De manera que se resalta la pertinencia de EOS para esta caracterización del razonamiento algebraico según los niveles de algebrización y finalmente se presenta algunas reflexiones sobre las prácticas algebraicas de los docentes y su posible impacto en el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes.

4.1. Conclusiones

En cuanto a las prácticas de los maestros y los rasgos algebraicos que ha manifestado, se puede concluir que el profesor C, muestra prácticas en niveles incipientes o con ausencia de rasgos algebraicos, y los profesores A y B manifiestan prácticas caracterizadas en niveles consolidados de algebrización (3, 4, 5) cabe resaltar que se esperaba que cada profesor manifestara en sus prácticas el mayor nivel de algebrización en la medida que cada problema lo permitía.

Acerca de los seis problemas seleccionados, favorecieron dar cuenta del objetivo trazado, en tanto que a través de ellos el sujeto permitía desplegar prácticas que dan elementos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y argumentos) que permiten caracterizar el RA que los profesores pusieron en juego cuando enfrentaron los problemas, dado que las situaciones problemas permitían una flexibilidad amplia para manifestar practicas más o menos algebrizadas, lo que permitió en este trabajo poder identificar los niveles de algebrización que se ponían en juego en las prácticas de los maestros.

De acuerdo, al marco teórico, es posible concluir que los niveles de algebrización no es para encasillar los sujetos ni los problemas, sino para caracterizar el RA manifestado en las prácticas algebraicas, en este sentido no es el sujeto sino que son sus prácticas que el despliega que para un problema A, puede relacionarse con un nivel 2, para otro problema B con nivel 1 y para un problema C con un nivel 5, siendo sus prácticas unas más algebraicas que otras, lo cual da elementos para promover y desarrollar el RA poco a poco, y no introducirlo como una cuestión que per se está dada o como algo determinado. De modo que se apuesta a un desarrollo del razonamiento algebraico gradual y pese a lo anterior la importancia de promoverlo desde los primeros grados de escolaridad para avanzar y madurar en este y conforme se madure, el nivel de la práctica será cada vez mayor.

Además, desde los aspectos teóricos escogidos para realizar este estudio se puede concluir la pertinencia de las herramientas teóricas que brinda el EOS para la propuesta que caracteriza el razonamiento algebraico realizada por Aké (2013): niveles de algebrización, puesto que permite un análisis detallado y fino de la práctica matemática identificando unos objetos matemáticos primarios y procesos, a partir del cual los objetos intensivos, unitarios y ostensivo que evocan a proceso de generalización, simbolización y reificación que son aspectos considerados centrales para la actividad algebraica según la propuesta de Aké, que los toma en consideración debido al consenso de las investigación en didáctica del álgebra para considerarlos rasgos característicos del RA. Asimismo consideran el pensamiento funcional y estructural, como la modelación son aspectos centrales en esta caracterización de RA. Lo cual permiten configurar un panorama amplio, porque toman en cuenta distintas variables, pero a la vez claramente delimitado porque fija la atención en hechos que son centrales que se ponen en juego cuando se razona algebraicamente al enfrentar distintas situaciones, en este sentido tomar este marco teórico se considera que es pertinente, pero además potente para intentar caracterizar el RA presentado por unos sujetos cuando enfrentan ciertas situaciones.

4.2. Reflexiones

Una reflexión que se deriva del desarrollo de este trabajo, en tanto que ha mostrado, por un lado un marco de referencia sobre los rasgos algebraicos que los docentes manifiestan en sus prácticas donde se evidencia carencias formativas en los conocimientos algebraicos, y por otro, presenta un marco teórico para desarrollar el RA, se propone que este marco se puede usar para la formación didáctico-matemático de los profesores, ya que la distinción de los niveles de RA, permite desarrollar sentido algebraico en el docente, el cual permite reconocer rasgos algebraico de las practicas matemáticas de sus estudiantes, sobre los cuales pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la practica matemática de los alumnos. Este sentido algebraico, según Aké (2013), se entiende como la capacidad del sujeto para reconocer y aplicar propiedades estructurales; reconocer patrones, regularidades y funciones; usar símbolos para expresar generalizaciones y modelizar situaciones del mundo real o matemáticas. Lo anterior se propone alcanzar mediante espacios de discusión de este modelo que permite desarrollar el sentido algebraico de los profesores.

En este proceso formativo que permite este marco, la exposición del maestro a determinados problemas no solo implica la resolución de este, sino también exigen al maestro en formación la identificación de objetos algebraicos implicados en sus soluciones, se considera entonces que este proceso se consolida con la puesta en común y discusión de las prácticas matemáticas y los conocimientos puestos en juego en ellas. Este proceso propone que una de las competencias que los maestros debería tener es el reconocimiento de elementos algebraicos.

Además de permitir un proceso de formación, este marco de referencia permite dejar claro una manera de entender este pensamiento y por lo tanto una forma de actuar en el aula de clase que permite introducirlo e ir promoviéndolo en sus estudiantes, en tanto que el razonamiento algebraico es una manera de pensar que progresa y va madurando, se precisa entonces que también aporta a delimitar tareas y actividades las cuales deben de apuntarle a mayores grados de generalidad y abstracción, para que efectivamente este vaya madurando.

Puesto que gran responsabilidad del desarrollo y promoción de este razonamiento recae en los docente, se ve la importancia también de que las practicas matemáticas manifestadas por ellos muestren rasgos algebraicos consolidados, dado que si el profesor no cuenta con elementos suficiente para enfrentar las actividades, como entonces puede agenciar actividades que aporten a este razonamiento, de modo que si los docentes son los encargados de promocionar el RA, debe partir de ellos mismos. De lo contrario va ser difícil que el profesor que carece de conocimientos pueda aportar al desarrollo de este.

Consideramos que otra reflexión a partir de la caracterización del RA de los maestros, en torno al desarrollo del RA de los estudiantes, es apreciar un proceso formativo que contemple el desarrollo del RAE, a partir de varias perspectivas y cuya finalidad sea brindar a los maestros oportunidades para desarrollar competencias de análisis para la identificación de rasgos algebraicos en la tareas de la matemática escolar.

A partir de este estudio, surge a modo de recomendación para los docentes el uso de los niveles de algebrización para identificar una ruta algebraica en el conjunto de tareas propuestas a las estudiantes, tareas muchas veces tomadas de libro de texto. Según Martínez (2014) se entiende como ruta algebraica una secuencia de tareas cuya naturaleza algebraica es atribuida según los niveles y que señala el proceso gradual de introducir el razonamiento algebraico a través de tareas. Se hace hincapié que el RA se desarrolla a lo largo del tiempo dada su complejidad.

En síntesis se han presentado en el primer apartado unas conclusiones en torno a las prácticas algebraicas de los maestros y su caracterización según los niveles de algebrización, a la pertinencia de los problemas y los referentes teóricos para cumplir los objetivos trazados y en el segundo apartado algunas reflexiones y recomendaciones sobre su formación, a partir de la caracterización de su razonamiento algebraico, y el aporte de los niveles para promover en su enseñanza el razonamiento algebraico a los estudiantes.

REFERENCIAS

Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *EMA*, *10*(2), 375-412.

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Arroyo, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Revista Uniciencia*. 28(2), 15-44.

Azcarate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 129-132.

Cabanne, N. (2010a). De la aritmética al álgebra. En N. Cabanne (Ed.), Didáctica de la matemática ¿cómo aprender? ¿Cómo enseñar? (pp. 73-103). Buenos Aires, Argentina: Bonum.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Castro, W. (2008). Razonamiento algebraico elemental en futuros maestros un estudio exploratorio (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Cohen, L. &Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a. 18(2), 49-77.

Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento-numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'EducazioneMatematica*, 3, 278-306.

Flores, P. & Fernández, F. (2001). Reflexión sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/FloresFFernadez.pdf

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 188.

Garriga, M. (2011). El lenguaje algebraico: un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemáticas*, 11(1), 77-88.

Godino, J. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros, director: Juan D. Godino. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237284.*

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3),* 325-355.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199 – 219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., &Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, Rio Claro, 26*(46), p. 483-511.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 117 – 142.

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIE

Hurtado, C. (2014). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica (Tesis de Maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números, revista de didáctica de la matemática*. 76, 83-103.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C &. Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp. 390-419). New York.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Álgebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Martínez, J. (2014). *Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna, Tenerife, España.

Puig, L (Ed.) (1998*a*). *Investigar y Enseñar: Variedades de la Educación Matemática*. Bogotá D.C: Una Empresa Docente.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*. *Advances in mathematics education.* (pp. 303 -320). Berlin: Springer-Verlag.

Rico, L. (1994). Componentes básicos para la formación de profesores de matemáticas. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *21*, 33-44.

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 22-39.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado*, *8*(1), 17-28.

Rico, L. (Coord.) (1997). La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.

Rivas, M., Godino, J. D., Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 453-462). Santander: SEIEM

Santos Trigo, L. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. *Mathesis.* 9(4), 419-432.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números. *Revista de didáctica de las matemáticas*. (77), 5-34.

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. CastroRodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C.

Socas, M., Camacho, M. & Hernández J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *32*, 73-86.

Torres, L., Valoyes, L. & Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA*, 7(2), 227-246.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*, 6(3), 90-108.

Vicente, S. Valenzuela, T. Fortes, M. Solaz, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias.* 6(3), 538-561.

ANEXOS

Anexo 1. Hoja de trabajo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
AREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

Apreciado profesor, en el marco del trabajo de grado *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas de algunos docentes*, realizado por la estudiante Cindy Catherine Rueda (código de estudiante 0936946) del programa académico Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, solicitamos muy amablemente su colaboración en la resolución de los siguientes problemas, dado que aporta insumos para los propósitos del trabajo en mención, al reflexionar sobre posibles prácticas matemáticas que se pueden generar al atender los problemas propuestos.

PROBLEMAS:

1. Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

2. Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm., ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota?

3. Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que se va en coche hay tres que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

4.a) ¿Qué valores deben tener las letras para que las siguientes igualdades sean verdaderas?

1) $36 \times \mathrm{b} = \mathrm{b}$
2) $\mathrm{a} \times \mathrm{a} = \mathrm{a}$
3) $\mathrm{c} + \mathrm{c} = \mathrm{c}$
4) $\mathrm{b} \times 0 = 0$
5) $12 \times \mathrm{a} = \mathrm{a} \times 12$
6) $2 \times \mathrm{b} = \mathrm{b} + 5$

b) ¿Cómo sabes que esos valores son correctos?

5. Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John

6. Sea tres números cuya suma sea $\mathbf{S}$, tales que el segundo supera al primero en $\mathbf{a}$ y que el tercero sea la suma de los dos primeros.

a) ¿Encuentra los tres números?
b) ¿Cómo se relacionan $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{a}$ para obtener el primer, segundo y tercer número?