Heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes de la Educación Media Colombiana y profesores en formación en Educación Matemática al resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado con una incógnita real

Jhon Andrés Jaramillo Ruiz

200634583

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

2017

Heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes de la Educación Media Colombiana y profesores en formación en Educación Matemática al resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado con una incógnita real

Jhon Andrés Jaramillo Ruiz

200634583

Directora

Ángela María Gómez Vela

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
2017

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas. Fecha

Día	Mes	Año
30	06	2017

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ________

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes de la Educación Media Colombiana y profesores en formación en Educación Matemática al resolver

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director
Lic. Angela María Gómez Vela

Nombre del Primer Evaluador
Mg. Maritza Pedreros

Nombre del Segundo Evaluador
Mg Cristian Hurtado

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Jhon Andrés Jaramillo	200634558	3-3469	jhon1986xx@gmail.com	3146411142

Evaluación

Aprobado ☒ Meritorio ☐ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

*En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ______________ (máximo un mes) **ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

*En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ______________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ____ dd ____ mm ____ aa

*En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

	Maritza Pedreros P.	
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
- 4 JUL. 2017
Área de Educación Matemática
RECIBIDO

Recomendaciones ☐	Observaciones ☒	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

- Se destaca en el trabajo de grado la coherencia entre el marco de referencia y los análisis del mismo, alrededor de la resolución de problemas. Lo anterior es un aporte a la Educación Matemática, ya que permite un contraste entre las heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes y profesores.
- Se acogen las sugerencias de forma y presentación en el resumen, introducción y análisis.

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador
[signature]	Maritza Pechenes P.	[signature]

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creat ivecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes de la educación media colombiana y profesores en formación en educación matemática al resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado con una incógnita real

Autores:

Nombre: Jhon Andres Jaramillo Firma: C.C. 1130588432

Nombre: —— o —— Firma: C.C.

Nombre: —— o —— Firma: C.C.

Fecha: Sept 26 /2017

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El trabajo propone el análisis de las heurísticas empleadas por profesores en formación y estudiantes de la Educación Media al resolver algunos problemas no rutinarios donde se relacione la resolución de problemas como eje de estudio y las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, además también se resalta: la importancia de incorporar la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje, las dificultades presenten en la resolución de ecuaciones, el empleo de las heurísticas generales y especificas en la solución de problemas. Debido a que estos tiene una gran importancia en el desarrollo de nuevas habilidades que permitan afrontar situaciones cada vez más complejas, puesto transferencia de algunas estrategias y conocimientos es de gran importancia en los procesos de aprendizaje, puesto que como lo menciona (Santos, 2007) la memorización de algunas heurísticas será importante para pensar creativamente, razonar adecuadamente y posteriormente llevar a cabo la toma de decisiones en situaciones que pertenezcan a las matemáticas u otras disciplinas.

Palabras claves: resolución de problemas, heurísticas, ecuaciones de segundo grado.

INTRODUCCIÓN

Desde el año 1980, cuando la National Council of Teachers of Mathematics en adelante NCTM reconoce que la resolución de problemas es una de las diez habilidades básicas para el aprendizaje de las matemáticas, se le ha dado importancia a que en la Educación Matemática fuese necesario replantear la forma como se venía trabajando en las escuelas, esto se debe a que la forma tradicional se estaba limitando a la utilización de problemas que poco se reflejaban en la actividad cotidiana, lo cual se evidencia en la falta de habilidades por los profesores y estudiantes al intentar solucionar otro tipo de problemáticas específicas, lo que trae como consecuencia un dificultad en los procesos de aprendizaje ya que se está restringiendo solo a la aplicación o memorización de algunas técnicas o algoritmos como única estrategia de solución (Santos, 2007).

Como consecuencia de este cambio para la enseñanza de las Matemática a nivel nacional, el MEN (1998, 2006) promueve un cambio entre la enseñanza y la resolución de problemas, es decir, una forma de enseñar y aprender que relaciona los problemas que pertenecen a un contexto en el cual los estudiantes puedan explorar estrategias útiles en otros campos de las ciencias y de esta forma se empiecen a emplear problemas contextualizados, los cuales posibilitan ahondar cada vez más en el concepto matemático permitiendo así afrontar problemas cada vez más complejas.

Además, como este trabajo tiene como objetivo general diferenciar las heurísticas generales y específicas usadas al resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, en los profesores de Matemáticas en formación y estudiantes de la Educación Media. Con el fin de propiciar una reflexión en donde se resalte la importancia de la enseñanza de estrategias específicas como una herramienta para la solución de problemas.

Con el fin de cumplir con el objetivo general se plantea una división del trabajo de grado de la siguiente manera: el primer capítulo se expone el planteamiento del problema, justificación y objetivos, antecedentes donde se refleja algunas de las investigaciones análogas con la problemática, en la segundo capítulo se abordan los componentes teóricos dividido en 3 dimensiones, en primer lugar está la didáctica donde se presenta la resolución de problemas desde algunos autores como lo son: Polya (1981), Schoenfeld (1985) y Santos (2007) además, se definen conceptos como problemas no rutinarios, el termino heurística generales y específicas, en segundo lugar la matemática donde se define y caracteriza las ecuaciones de segundo grado, en tercer lugar la curricular donde se relacionan algunos documentos vigentes expedidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, como lo son: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). El tercer capítulo es el metodológico donde se definen criterios para la selección de los problemas y la población, además también se identificarán algunas de las dificultades propuestas por (Kieran, y Filloy, 1989). En el cuarto capítulo se aplican los problemas no rutinarios a los profesores de matemática en formación y a los estudiantes de la Educación Básica Media y posteriormente se analizan los resultados encontrados para presentar las conclusiones de cada uno de los problemas y por último unas generales que aborden todo el trabajo de grado. Finalmente se presentarán las respectivas referencias usadas.

CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN

A continuación, se presentan los aspectos generales del trabajo de grado desarrollado, como son la problemática, justificación, objetivos y antecedentes.

1.1 Planteamiento del problema

En la resolución de problemas no rutinarios se percibe que los estudiantes presentan dificultades con las tareas donde se relaciona el concepto matemático alrededor de la resolución de problemas, una posible causa es la poca habilidad para afrontar situaciones donde se encuentren relacionadas entre si, debido a que en la educación tradicional poco se profundiza en contextos de la vida cotidiana que impliquen usar los elementos propios de las ecuaciones, además (Santos, 2007) indica que en general el aprendizaje se ha limitado al uso reiterativo de fórmulas, procesos de despeje de variables o la aplicación de la factorización para dar respuesta a los problemas, donde se pretende homogenizar los procesos de enseñanza y aprendizaje desconociendo o poco resaltando las estrategias específicas de cada concepto matemático y cómo estas contribuyen de forma significativa en el aprendizaje de los estudiantes, lo cual se puede abordar desde dos aspectos.

El primero referencia la enseñanza en la cual los profesores en formación tienen gran importancia dado que estos se enfocan en replicar los métodos y ejercicios con los cuales aprendieron y por ende, hay pocas evidencias de situaciones que contribuyan a trabajar el conocimiento matemático a un nivel más alto en los estudiantes, el segundo aspecto son los estudiantes que se deben enfrentara problemas que requieran de conocimientos específicos para solucionar los problemas del diario vivir como lo por ejemplo el cálculo de áreas, volumen, alcance máximo, combinación. Por esta razón, es importante involucrar a los estudiantes con situaciones de la vida cotidiana en las cuales la forma de solucionar no sea intuitiva, porque se está dejando de lado el uso de otras estrategias.

Sin embargo las nuevas estrategias provocan en los estudiantes una dificultad ya que estos tienen presente procesos intuitivos propios de la aritmética y las nuevas evocan el uso del álgebra en algunos casos, es decir, que es necesario cambiar la forma como se venían afrontando los problemas por parte de los estudiantes para ampliar esta idea (Kieran, y Filloy, 1989) afirma que: “Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética” (p.229).

De lo anterior, se puede concluir que los estudiantes traen consigo algunas nociones de la aritmética a las cuales se aferran convirtiéndose en una dificultad ya que no permiten un cambio en la forma de pensar y es por esta razón que contraste con el álgebra debido a que esta implica que se realice un cambio en como se viene trabajndo en el aprendizaje.

El poco uso de problemas contextualizados genera que se le de más importancia al desarrollo de otras habilidades como lo es la memorización de algoritmos y esto se convierte en una dificultades para el aprendizaje, para apoyar esta idea (Mejía, 2004) sostiene que en las manipulaciones algebraicas con lápiz y papel por parte de los profesores se generan limitaciones y por esta razón se induce a sólo memorizar los algoritmos sin ser conscientes del significado y la interpretación que deben tener estas expresiones algebraicas y la correlación que hay entre los conocimientos adquiridos. Sin embargo, (Blanco, 1996) (citado por (Palacios y Solarte, 2013)) indica que esta problemática está relacionada con las creencias que tienen los docentes en cómo enseñar matemáticas, puesto que en muchas ocasiones los profesores en formación o los novatos posiblemente utilicen los mismos problemas con los cuales aprendieron y terminan utilizando así las mismas estrategias para la solución de problemas, lo que genera dificultad en los estudiantes posteriormente.

Esta es una dificultad debido a la formación que traen los estudiantes para ampliar esta idea (Kieran, y Filloy, 1989) indican que durante la formación académica los estudiantes han adquirido conceptos aritméticos de expresiones numéricas que involucran otro tipo de habilidades para encontrar la solución a problemas en los cuales poco se aborda el álgebra. Por esta razón cuando deben resolver problemas que requieran procesos algebraicos usualmente recurren a las estrategias intuitivas que fueron aprendidas en años anteriores donde solo usaban operaciones aritméticas, lo cual se puede ampliar desde lo indicado (Kieran, y Filloy, 1989) quienes afirman que: “el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.” (p.229). Esta falta de generalización y significado de los conceptos algebraicos se evidencia en los juicios desacertados que los estudiantes manifiestan, un caso específico se puede encontrar en Sánchez (citado por (Palacios y Solarte, 2013)), quien indica que:

> Existen unas concepciones erróneas con los temas afines a la factorización de expresiones polinómicas, como, por ejemplo:

> La factorización es un procedimiento (exclusivo) para expresiones cuadráticas,
> En las factorizaciones los números que intervienen son enteros,
> Las raíces se obtienen solo aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado,
> La gráfica de un polinomio no proporciona información para su factorización. (p.8)

De lo anterior, se evidencia que algunos estudiantes tienen poca claridad entre las diferentes técnicas de factorización y esto probablemente puede suceder en la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado, dado que la factorización es una de las herramientas inmersas en estas problemáticas.

Como ya se ha mencionado, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos con poco énfasis en trabajar sus significados genera que en la práctica se le dé más importancia a los problemas de ejercitación o rutinarios, y adicionalmente a esto, se debe indicar que no es la ejercitación un proceso completo para el afianzamiento de los conceptos ya que con la incorporación de problemas no rutinarios, es decir, con la resolución de problemas se puede mostrar que no es suficiente tener una buena base teórica sino que también es necesario contar con habilidades que permitan afrontar situaciones que requieran de poco manejo algebraico de las ecuaciones y sí del uso de los significados matemáticos.

De lo anterior, se ratifica la necesidad de incorporar la resolución de problemas en los procesos de aprendizaje ya que garantiza que los estudiantes desarrollen habilidades las cuales son conocidas dentro del modelo de resolución como heurísticas que fueron definidas por (Polya, 1981) como los procesos cognitivos desarrollados al encontrar una estrategia, y es por esta razón que se necesita centrar la atención en la forma de enseñanza de la educación tradicional que no estaba centrada en este enfoque, dejando por fuera los problemas que forman parte de la vida cotidiana o los de carácter científico; estos últimos cobran importancia porque contribuyen de manera significativa a la formación del conocimiento matemático en los estudiantes.

Con lo planteado en esta problemática, el presente trabajo de grado se abordará desde la resolución de problemas reconociendo las heurísticas generales y especificas desarrolladas por los profesores de matemática en formación y los estudiantes de la Educación Media, cuando se trabajan problemas en los cuales están presentes las ecuaciones de segundo grado, como por ejemplo en el cálculo de áreas, en física en el lanzamiento de proyectiles para ver el alcance máximo horizontal o en estadística, incluso en problemas de combinación como por ejemplo el de los saludos, las escaleras.

A partir de lo anterior, el trabajo gira en torno a la siguiente pregunta problema:

¿Qué diferencia existe entre las heurísticas generales y especificas utilizadas por los estudiantes de la Educación Media Colombiana y los profesores en formación en Educación Matemática al resolver problemas no rutinarios de ecuaciones de segundo grado con una incógnita real?

1.2 Justificación

La importancia de esta propuesta de trabajo de grado se puede abordar desde dos perspectivas. La primera está relacionada con la pertinencia de implementar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas y la segunda razón gira alrededor del concepto matemático, que en este caso son las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, dada su presencia en el currículo colombiano vigente.

En cuanto a la primera razón vale la pena resaltar que en la sociedad existe la necesidad de formar estudiantes con mejores conocimientos y habilidades en matemáticas, que puedan ser aplicadas en espacios de la vida cotidiana las cuales pueden ir variando hasta ser cada vez más complejas esta idea se reafirmar con lo propuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas por el (MEN, 1998), de la siguiente manera:

> En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. (p. 74 – 75)

Ahora bien para lograr alcanzar un nivel más alto en la resolución de problemas es necesario desarrollar unas competencias en matemáticas que están definidas en el (MEN, 1998) "como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (p. 49).

Es necesario indicar que, cuando se habla de desarrollar competencias en matemáticas en el contexto del currículo colombiano, se deben abordar los distintos pensamientos que el (MEN, 1998) menciona, estos son: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, los cuales se apoyan a su vez en los sistemas: numéricos, geométricos, de medidas, de datos, y algebraicos y analíticos, permitiendo así generar una estructura articulada de los conocimientos y pensamientos matemáticos. Además, es importante resaltar que, estos no deben estar fragmentados sino que debe estar vinculados entre sí, para de esta forma, evitar la desarticulación de los conceptos, permitiendo así que los estudiantes utilicen los conocimientos previos adquiridos, por ejemplo, en el caso del presente trabajo de grado se puede evidenciar que cuando se trabaja con las ecuaciones de segundo grado se involucran algunos conceptos, como lo son: la incógnita, factorización, modelación, proporcionalidad y variables, además se aborda el álgebra en su sentido simbólico, entre otros.

Por lo tanto, con la resolución de problemas se podrá involucrar diferentes conceptos como los mencionados anteriormente, que permitirán la construcción de nuevos conocimientos en los estudiantes, Sin embargo, es importante resaltar que solo será posible si se abordan diferentes heuristicas como las generales y específicas, ya que los procesos generales resultan ser en algunas ocasiones poco eficientes, puesto que en algunas veces es necesario que los estudiantes cuenten con habilidades especificas propias de cada concepto matemático.

Son estas habilidades especificas las que tienen gran importancia para en el trabajo de grado ya que estas permiten contrastar las heurísticas generales y especificas que se pueden llegar a ser utilizadas en la solución de un problema no rutinario, poniendo en evidencia si la forma en cómo se venía enseñando y aprendiendo son parecidas ya que los profesores en formación terminan utilizando los mismos problemas con los cuales ellos aprendieron.

La segunda razón de importancia del presente trabajo alude a las ecuaciones de segundo grado, ya que permiten modelar algunas situaciones que se evidencian en la actividad humana donde los estudiantes se enfrentan a problemas no rutinarios que se pueden solucionar por medio de conceptos matemáticos, como por ejemplo, el alcance máximo de un proyectil, el cálculo de áreas, combinaciones, entre otros, lo cual dirige la atención a las ecuaciones de segundo grado ya que este concepto poco permite a los resolutores emplear estrategias intuitivas propias de la aritmética para dar solución y de esta manera se logra generar un cambio en el pensamiento para así alcanzar un conocimiento matemático cada vez más alto, dado que permite desarrollar otro tipo de estrategias. Además, en este se pueden variar las condiciones según el contexto permitiendo así cambiar el nivel de complejidad dependiendo del interés que se tenga, lo que potencializa el aprendizaje en diferentes contextos.

Con lo mencionado se evidencia que involucrar la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado debe estar presente en la actividad matemática escolar ya que permite a los estudiantes avanzar en sus procesos de tal forma que puedan utilizar los conocimientos adquiridos en su vida diaria debido ha que permite modelar diferentes situaciones.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diferenciar las heurísticas generales y específicas usadas por estudiantes de la Educación Media y profesores de matemática en formación en Educación Matemática al resolver problemas no rutinarios de ecuaciones de segundo grado con una incógnita real.

1.3.2. Objetivos específicos

- Indagar sobre la importancia de involucrar la resolución de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado desde tres aspectos el didáctico, matemático y curricular.
- Explorar a partir de un conjunto de problemas no rutinarios propuestos a profesores en formación y estudiantes de la Educación Media las heurísticas generales y específicas que se pueden presentar

1.4 Antecedentes

En primera instancia se referencia el trabajo de grado “Un estudio de la resolución de problemas no rutinarios con docentes en formación, buscando una aproximación a algunas heurísticas” de (Palacios y Solarte, 2013), esta investigación tiene como propósito principal estudiar algunos de los alcances, limitaciones y posibilidades en la emergencia y apropiación de estrategias heurísticas por parte de los profesores de matemáticas en formación, como proceso y metodología de enseñanza; para llegar a este propósito las autoras primero identificaron los modelos de resolución de problemas y las alternativas que proponen algunos de los profesores de matemáticas en formación, luego estudiaron estas estrategias heurísticas a la luz de un marco teórico donde se abordan algunos modelos de resolución de problemas propuestos por autores como Polya (1981), Schoenfeld (1985), Santos Trigo (2007), Bransford y Stein (1986) en su Modelo llamado IDEAL. (Identificación del problema, D: Definición y representación del problema, E: Exploración de posibles estrategias, A: Actuación, fundada en una estrategia, L: Logros.)

Este primer antecedente trabajo de grado ayuda al reconocimiento y caracterización de algunas heurísticas que posiblemente los profesores y estudiantes que son objeto de estudio en este trabajo, pueden llegar a usar, también ratifica que el trabajo desde el enfoque o modelo de resolución de problemas debe ser un aspecto muy importante en el aprendizaje de las matemáticas para mejorar su desempeño en esta disciplina. Además, en el presente trabajo de grado se implementa uno de los problemas no rutinarios denominado saludos trabajado en esta tesis, el cual involucra las ecuaciones de segundo grado, dado que cumple con el requisito de tener una incógnita real.

El segundo antecedente que se presenta es el trabajo de grado “Análisis Didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas” de (Mejía, 2004), en el cual se resalta la importancia del uso de las Nuevas Tecnologías de la Informáticas y la comunicacion (NTIC) para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas donde se involucró el uso de las calculadoras graficadoras algebraicas como la Voyage 200 y la TI-92

Plus para potencializar el aprendizaje significativo de las ecuaciones de segundo grado en los estudiantes de grado noveno de la Escuela Normal Farallones de Cali.

En esta investigación se desarrolló una Unidad Didáctica por la autora y los docentes del Área de Matemáticas de la institución mencionada con el fin de realizar actividades que se ajustaran a la realidad escolar de los estudiantes, se evidenció que por medio de las calculadoras graficadoras algebraicas los estudiantes pudieron reconocer y aprender las características de las expresiones polinómicas de segundo grado, puesto que permitió a los participantes manipular y modificar las expresiones haciendo uso de las herramientas que brinda la calculadora. Además, en este trabajo se resalta que la forma de representar un concepto matemático incide en el proceso de aprendizaje y para lograr desprenderse del uso del papel y el lápiz se hace necesario la implementación de las NTIC como una estrategia didáctica para el aprendizaje.

El poder manipular los objetos matemáticos en las calculadoras graficadoras algebraicas permitió tener un mejor aprendizaje del concepto, dado que se evidenció que los estudiantes interactuaron con las expresiones polinómicas por medio del arrastre o utilizando el comando Y= Editor.

La investigación aporta al presente proyecto, la identificación de algunas dificultades presentes en la manipulación algebraica de ecuaciones de segundo grado y da un acercamiento a la noción de variación, además de la caracterización del concepto matemático como tal. Sin embargo, a pesar de trabajar con algunas ecuaciones cuadráticas, esta investigación tiene poco énfasis en la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado dando más importancia al aprendizaje de otras habilidades como lo son la manipulación algebraica de las ecuaciones por medio de las calculadoras. De esta manera queda abierta la posibilidad de trabajar con ecuaciones de segundo grado desde este enfoque.

El tercer trabajo que se tendrá en cuenta es “Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones” de (Abrate, R. & Otros, 2008), en el cual se realizó una descripción sobre la producción escrita de 429 estudiantes que aspiraban a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María (Argentina), durante el año 2007. El propósito de esta investigación fue comparar los métodos de resolución usados por los estudiantes que cursaban el módulo de matemáticas y los métodos presentes en 60 libros que lo tienen como eje de estudio. Además, se buscaba identificar los métodos que emplean los estudiantes para solucionar ecuaciones y si estos eran producidos por algunos modelos de resolución de ecuaciones que no resultaron apropiados, dado que se evidenció que al poseer las técnicas para la solución de ecuaciones, estos terminaron utilizándolas de forma indiscriminada sin ser conscientes que por otros métodos hubiese resultado más fácil y menos laboriosa su resolución.

Los autores resaltaron que los métodos empleados en la enseñanza de las matemáticas ocasionan obstáculos en el aprendizaje debido a que los profesores en ejercicio son poco conscientes de las dificultades que estos producen, de ahí que se piense en los interrogantes planteados en esta investigación como lo son:

- ¿Cuáles son los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que utilizan los alumnos?
- ¿Qué obstáculos y dificultades producen estos modelos y métodos de resolución de ecuaciones sobre los alumnos?
- ¿Qué modelos y métodos de resolución de ecuaciones utilizan los libros de Matemática cuando abordan estos temas?

Para dar respuesta a esos interrogantes el trabajo se dividió en dos fases: en la primera se analizó el discurso escrito de los estudiantes y los obstáculos presentes en la mala transposición de términos, en la segunda fase se revisaron 60 libros de Matemáticas con el fin evidenciar cómo estos presentan la resolución de ecuaciones.

En la primera fase se concluyó que la transposición de términos es el método empleado para la resolución de ecuaciones, sin embargo la poca consciencia de esta transposición ocasiona que los estudiantes presenten errores al operar debido a que cuando se les pidió encontrar el conjunto de soluciones para una ecuación de segundo grado estos presentaron falencias, por ejemplo sólo conciben soluciones con números enteros, dejando de lado la posibilidad de encontrar números racionales, además pocos estudiantes conocen el hecho que un número entero es un numero racional y por lo tanto se puede representar como tal.

En la segunda fase se concluyó que sólo el 84.5% de los libros emplean la transposición de términos, lo cual es nombrado por los autores como “metáforas operacionales" para la resolución de ecuaciones; mientras que el restante 15.5% enfoca la resolución de ecuaciones mediante propiedades, para el que los autores utilizan la expresión "metáfora objetual".

Esta investigación sirve como un antecedente puesto que permite identificar algunos métodos empleados para la resolución de ecuaciones, sin embargo es importante destacar que actividades realizadas durante la investigación fueron orientadas a encontrar el valor de una incógnita remitiéndose así a la aplicación de problemas rutinarios en los cuales los estudiantes presentaron la misma falencia, es decir, conocían las técnicas pero se les dificultaba solucionar todas las ecuaciones debido a que son poco conscientes de la relación que hay entre el significado de las respuestas encontradas y el objeto matemático. De la misma manera el énfasis del trabajo no está orientado a la resolución de problemas, lo que deja abierta la posibilidad de realizarse.

Como último antecedente se presenta el trabajo de grado "Sistematización de una experiencia didáctica que propone integrar algunos contenidos de las asignaturas de física y de matemáticas de grado decimo mediante el uso de TIC" de (Marinez, 2013), en esta investigación se sistematizan las experiencias de cinco años escolares y el objetivo principal es describir e interpretar los conocimientos, saberes o competencias disciplinares y didácticas. Además es la sistematización de experiencias docentes de un profesor de matemáticas y física de grado 10° con el fin de desarrollar o implementar una propuesta didáctica que integre y articule los contenidos temáticos correspondientes a matemáticas y física anteriormente referidos, y para lograr este propósito utiliza las Tecnologías de la

Información y la Comunicación (TIC), como instrumento mediador para registrar la representación múltiple además de la visualización de estos contenidos. Para desarrollar tal objetivo primero se formuló una propuesta de análisis basado en la visualización, modelización y la comprensión intuitiva e integradora de los contenidos, luego propuso una Unidad Didáctica que permitiera concretar dichos conceptos trabajados los cuales fueron La función cuadrática en Matemáticas, y el movimiento parabólico en física.

Del trabajo se resalta la importancia de trabajar con ecuaciones de segundo grado con actividades contextualizadas en otra ciencia como lo es la física, pero el énfasis no es la reflexión desde la resolución de problemas, de aquí la necesidad de relacionar las ecuaciones de segundo grado con incógnita real y la resolución de problemas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El desarrollo de la actividad humana en cada generación ha marcado la forma cómo se aprenden las matemáticas y cómo estas son concebidas dentro del medio social en el cual son aplicadas, como lo afirma Davis y Hersh (1981) citado en (Santos, 2007)"la definición de las matemáticas cambia, cada generación y cada matemático notable en esa generación formula una nueva definición de acuerdo a sus luces" (p. 49). Es por este cambio del pensamiento propio de cada época que terminan por afectarse las propuestas didácticas, matemáticas y curriculares en lo que respecta a las matemáticas escolares, dependiendo del lugar donde se aborden. Por este motivo, se pretenden abordar algunos elementos de estos tres dimensiones los cuales deberán girar alrededor de cambios o posturas vigentes sobre el proceso de resolución de problemas.

2.1. Dimensión Didáctica

En cuanto a los aspectos didácticos al inicio se presenta lo que se entiende por resolución de problemas y heurística, seguidamente se aborda la resolución de problemas desde dos enfoques teóricos, uno desde los métodos generales propuestos por (Polya, 1981) para definir heurísticas generales y sus elementos desde (Schoenfeld, 1985), además, en este apartado se alude a la importancia de las heurísticas específicas como lo indica (Santos, 2007). Otro de los aspectos que se desarrolla es lo que se entenderá por problemas y sus tipos desde los autores (Díaz y Poblete, 2001), y las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones desde los autores (Kieran, y Filloy, 1989).

2.1.1 La resolución de problemas y sus elementos

Desde año 1908 la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), resaltó la importancia de la resolución de problemas como eje central de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se hizo necesario precisar las siguientes preguntas: ¿Qué se entendía por aprender matemáticas? o ¿Qué significa que un estudiante aprenda matemáticas?, para (Santos, 2007) resolver estas inquietudes es una tarea compleja debido a que la respuesta más conocida es que el aprendizaje de las matemáticas es considerado como la acumulación de conceptos y habilidades que permiten mecanizar las soluciones de los problemas. Sin embargo, con el surgimiento de nuevas perspectivas como lo expone (Santos, 2007) :

> "la idea de que aprender matemáticas se relaciona con la participación activa del estudiante en la construcción y desarrollo de relaciones o resultados matemáticos" Santos (2007) p. 17
>
> Adicional a esto "Devlin (1994) (citado por Santos, 2007) caracteriza a las matemáticas como la ciencia de patrones es una forma de ver al mundo físico, biológico y sociológico que habitamos en el mundo de nuestras mentes y pensamientos." p.18

De lo anterior, se infiere que el estudiante tiene un rol importante en la construcción activa de conceptos matemáticos, y que la relación con el mundo se puede estudiar desde las matemáticas.

Además, (Santos, 2007)indica que son precisamente estas nuevas perspectivas las que conducen a replantear cómo se estaba concibiendo el aprendizaje de las matemáticas ya que en 1960 se le daba gran importancia a la estructura formal de las matemáticas, en la cual se entendió que aprender matemáticas era enfatizar los métodos demostrativos. En periodos siguientes se pasó a darle preponderancia al manejo de operaciones fundamentales y procesos algorítmicos, a lo cual se llamó el "regreso a lo básico". Sin embargo, este movimiento tampoco permitió un mejor aprendizaje de las matemáticas, debido a que los estudiantes eran capaces de resolver operaciones sin entender el significado o sentido de las respuestas.

Además, otro aspecto importante expuesto por el NCTM (1989,1991) citado en (Santos, 2007) en cuanto al significado de los conceptos matemáticos, es que en varias investigaciones se ha indicado que el aprendizaje de las matemáticas se ha caracterizado por la poca interacción con otras ciencias cuando se hace referencia a la búsqueda de conexiones, de esta manera se le da un sentido limitado a los conceptos matemáticos y esto trae como consecuencia que los estudiantes desarrollan ciertas formas de operar algoritmos o fórmulas sin poder vincularlas a otros campos de su vida cotidiana. Es precisamente esta desvinculación lo que propicia el surgimiento de un nuevo contexto con la propuesta de relacionar el aprendizaje de las matemáticas con la resolución de problemas, en la cual se busca que los estudiantes favorezcan un avance en el pensamiento matemático al plantear estrategias y solucionar un problema. En este sentido, el resolutor, que en este caso es el estudiante, es quien tiene el papel central en la actividad de resolver problemas, más que la situación en sí misma, esta idea puede corroborase con lo mencionado por Puig citado en (Piñeiro, 2015) quien después de revisar la literatura desde la psicología, señala que "la resolución de problemas es un factor del sujeto más que de la situación" (p. 2).

Por este motivo, si se analiza la resolución de problemas desde la actividad del sujeto, esta proporciona a los estudiantes un avance en su conocimiento matemático, debido a que con cada problema se puede utilizar un concepto diferente y este puede ser aplicado a varios contextos o situaciones de la vida cotidiana.

Sin embargo, para comprender cómo el estudiante construye el conocimiento matemático es necesario definir las problemas no rutinarios y resolución de problemas en matemáticas, esto se presentará desde la concepción de varios autores como (Polya, 1981), (Schoenfeld, 1985), Pelares (1993), Foong (2013), entre otros; los cuales se indican a continuación con el fin de buscar el enfoque en el cual se realizará el presente trabajo.

Uno de los precursores en este campo de la resolución de problemas es Polya (Polya, 1981), quien desde la publicación del trabajo "*How to solveit*" en el año 1945, influenció innumerables investigaciones hasta el punto que terminó asentándose como una categoría independiente, además, (Polya, 1981) es quien define lo que es la resolución de problemas como el camino que se debe encontrar para solucionar un problema sorteando una serie de dificultades. Para ampliar esta idea, (Polya, 1981) lo indica de la siguiente manera:

> "... se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados." (Citado en (Sigarreta y Ladorde, sf) (p. 1).

De lo anterior, se puede inferir que encontrar el camino adecuado para la solución está enmarcado en la selección apropiada de algunas estrategias a las cuales Polya (citado por (Sigarreta y Ladorde, sf) definió como heurísticas. En este sentido el autor hace referencia a los procesos mentales que realiza el individuo para poder dar respuesta a un problema, sin embargo, el proceso no termina en la solución como tal sino que este continua donde se puede avanzar o retroceder en el proceso. Para ampliar esta idea Labarrere (1988) citado en (Sigarreta y Ladorde, sf) afirma que:

> "La solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución." (p. 3)

De lo anterior, se puede inferir que el proceso no termina con la solución, ya que es posible seguir ahondando en un rio de estrategias para ser empleadas en diversos problemas, de ahí la importancia de reconocer las heurísticas diferenciando las generales de las específicas. Para profundizar esta idea Polya citado en él (MEN, 1998), caracteriza las heurísticas como:

> "…las estrategias para avanzar en problemas desconocidos y no usuales, como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás. " (p.75).

Adicional a esto sobre las heurísticas o estrategias citadas algunas se describirán en el apartado 2.1.4 desde la perspectiva de (Polya, 1981). Para la selección y aplicación de algunas de las heurística Polya citado por (Alfaro , 2008)señala que es importante comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la ejecución del plan; lo que se conoce como el método lineal para la solución. Además, este mismo autor, resalta en su trabajo que para la resolución de problemas es necesario exponer a los estudiantes a una serie de preguntas que los conduzcan a una heurística ideal, sin embargo, estás deberán ser espontáneas y de ninguna manera impuestas con el fin de poder formar un resolutor ideal, que debe ser capaz de pasar de forma linealmente desde el enunciado hasta la solución, y por tal razón propone un modelo de resolución que cuenta con 4 fases, las cuales se pueden aplicar a cualquier problema.

A continuación se exponen las 4 fases del modelo empleado por (Polya, 1981) para la resolución de problemas compuesto por:

- Comprender el problema: en esta etapa se pretende realizar una serie de preguntas que permitan entender el problema algunas de las cuales pueden ser: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos? y ¿Cuál es la condición?
- Concepción de un plan: se debe crear una estrategia que permita dar una respuesta y esto puede ser posible si se relaciona con problemas semejantes.
- Ejecución de un plan: poner en práctica el plan creado teniendo en cuenta las reglas posibles en la ejecución.
- Visión retrospectiva: examinar si la o las soluciones encontradas dan respuesta al problema.

Sin embargo, el modelo de resolución lineal propuesto por (Polya, 1981) contrasta con lo expresado por (Schoenfeld, 1985) en su obra "Mathematical Problem Solving", la cual está basada en las investigaciones realizadas en la resolución de problemas hechas por Polya citado por (Blanco, 1996), este trabajo de Schoenfeld plantea una mirada diferente de lo que es resolver un problema, dado que no pretende formar a un individuo como un resolutor ideal sino que se debe mejorar a partir de un doble conocimiento, uno el de las técnicas consagradas y el de las características de tal modo que sea capaz de enfrentarse a su medida a los problemas; de esta forma Schoenfeld resalta que la resolución no es lineal sino que esta es en zigzag, lo que quiere decir que puede ir de atrás hacia adelante.

(Schoenfeld, 1985) también afirma que pensar en la resolución de problemas significa que se va mucho más allá de poseer una gran cantidad de conocimientos, sino que es necesario pensar matemáticamente, es decir se debe resaltar y abstraer el objeto matemático con el fin de desarrollar competencias útiles. Schoenfeld citado por (Barrantes, 2006) resalta que trabajar desde este enfoque como una estrategia didáctica implica pensar en situaciones que profundicen en las heurísticas y para esto se deben tener en cuenta otros aspectos como recursos, control y sistemas de creencias. Se debe indicar que, no hay una definición unificada de cada uno de estos aspectos, y después de revisar autores como (Barrantes, 2006) y (Blanco, 1996) se optó por exponer las nociones que ellos indican de estos ítems:

Los recursos referencia los conocimientos previos que debe poseer el individuo para la solución de un problema. Estos pueden ser algoritmos, fórmulas, técnicas, u otros. Es decir, todas las nociones que se consideren pertinentes en la ejecución de un plan. En cuanto a este aspecto, el profesor debe ser consciente de los estereotipos o recursos defectuosos o mal aprendidos, dado que los conceptos matemáticos mal aprendidos o mal utilizados pueden ocasionar dificultades en el uso de dichos recursos.

El control son los diferentes caminos que puede tomar un estudiante al aborda el proceso que lleva acabo al resolver un problema haciendo uso de los recursos básicos de las matemáticas y las estrategias que posee. De esta forma, el estudiante puede entender que es posible plantear varias formas de solución y de estas él deberá seleccionar una que le permita llegar a la respuesta deseada.

Los sistemas de creencias influyen notablemente en la forma de abordar las situaciones, tanto en los estudiantes como en los profesores, Blanco citado en (Palacios y Solarte, 2013) expresa que se puede ocasionar que el problema se abandone o no por parte de los estudiantes, y en los profesores se puede indicar que algunos terminan utilizando el mismo método con el cual ellos mismos aprendieron cuando eran estudiantes, y adicionalmente esto conllevaría a que posiblemente se usen los mismos ejercicios o similares. De esta manera profesores, y estudiantes están influenciados por las creencias sociales, algunos ejemplos pueden esbozarse de la siguiente manera: el primero cuando se piensa que solo existe un método o forma para resolver una determinada situación dejando de lado la exploración de nuevas estrategias, es decir que existe un único camino para llegar a la solución, la segunda creencia es que sólo es posible aprender matemáticas memorizando o mecánicamente, otro ejemplo será que la actividad matemática es propia de cada individuo y por tal razón no se puede trabajar en grupo; y otra de las creencias más difundidas es que enseñar o aprender matemáticas son considerados procesos muy difíciles.

Estos son aspectos que (Schoenfeld, 1985) considera importantes en la resolución de problemas, ya que tienen un rol en el desarrollo de las heurísticas que permitan llegar a la solución del problema. A continuación se describe la interpretación de lo que se entiende por problema en Polya y Schoenfeld.

Los problemas son considerados en matemáticas como situaciones en las cuales se pretende alcanzar un objetivo, sin embargo es importante resaltar que lo que se considera problema para un estudiante no necesariamente lo será para todos. Para ampliar esta idea

Schoenfeld citado en (Blanco, 1996), expresa que el término problema es más bien considerado como la relación existente entre el individuo y una tarea, además, Polya (1981) (citado por (Corbalán y Deulofeu, 1996) considera que los problemas deben ser vistos como un todo, que se debe familiarizar y resolver, es decir, que al abordar la resolución de un problema, este se debe ver de forma global donde lo que se pretende es generalizarlo.

Otro autor como Pelares citado por (Piñeiro, 2015) define problemas como situaciones de incertidumbre que producen el efecto de la búsqueda de una solución y a la resolución como el proceso mediante el cual se resuelve. Y para complementar esta idea Foong (2013) citado por (Piñeiro, 2015) plantea que sin importar la definición de problemas que se utilice, lo fundamental es la forma de proceder cuando un sujeto se enfrenta a uno.

Como la definición de problema puede variar dependiendo del autor, para cumplir con los propósitos del presente trabajo se considera situaciones problema aquellas donde los estudiantes no pueden llegar de forma directa a sus soluciones, es decir, que de forma inmediata no se cuente con un algoritmo o ecuación dada en el problema no rutinario, sino que estos tengan que generalizar el proceso para la construcción de esta para que le permita hallar la solución y de esta manera evidenciar la incertidumbre en el camino el cual se adopta desde Pelares citado por (Piñeiro, 2015).

Ahora, después de asumir una postura respecto a la noción de problema, se hace necesario clasificar o caracterizar los distintos tipos de problemas, para esto se cuenta con lo planteado por (Díaz y Poblete, 2001), quienes afirman que los problemas son situaciones en las cuales es necesario desarrollar una estrategia y los clasifican en **problemas rutinarios** y **no rutinarios** sin embargo es importante aclarar que ambos se encuentran relacionados o clasificados dentro de un contexto los cuales serán explícitos posteriormente.

Acerca de los problemas rutinarios, se denomina así dado que son los más utilizados en los procesos de enseñanza y se pueden a su vez clasificar según su contexto o enfoque en problemas alusivos al contexto real, realista, fantasioso y los que son puramente matemático. A continuación se indican las diferencias entre ellos:

En los problemas rutinarios de contexto real se les pide a los estudiantes medir o contar objetos que se encuentran en el mundo físico como por ejemplo: medir el diámetro de monedas, longitud de mesa, cálculo de superficies. Con este tipo de problemas generalmente se establece relaciones de razón entre varios objetos.

Los problemas de contextos realistas son situaciones susceptibles a que posiblemente pueden ocurrir u ocurrieron en el mundo real, es decir este tipo de problemas son muy empleados generalmente cuando se mide la producción de máquinas o personas usado en la regla de tres, como por ejemplo en el siguiente problema: Una cuadrilla compuesta por 12 obreros pinta un muro 6 metros en 24 minutos ¿Cuántas horas tardan en pintar el mismo muro una cuadrilla de 5 obreros?

Los problemas de contexto fantasioso se ocasionan cuando son producto de la imaginación y por tal razón no se basan en la realidad, es decir establecen los problemas en situaciones que involucran personajes como súper héroes y seres fuera del planeta.

Los problemas de contextos puramente matemáticos son las situaciones en las cuales los estudiantes operan con procesos aritméticos y donde solo se remiten a aplicar un algoritmo que sirva para llegar a la solución como expresan (Díaz y Poblete, 2001) indicando que este tipo de problemas se presentan "Si se hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos (números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.)" (p. 2)

Ahora, sobre los **problemas no rutinarios** se debe indicar que son las situaciones que no se pueden solucionar aplicando un algoritmo que involucre los datos del problema. Para ampliar esta idea, (Díaz y Poblete, 2001) expresan que "son problemas no rutinarios en el sentido de que un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina para encontrarla." (p. 3)

De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que los problemas no rutinarios son aquellos donde no se conoce un camino directo para su solución, y el uso de estos permite involucrar diferentes contextos que permitan desarrollar heurísticas generales o particulares ya que cada contexto se encuentra enmarcada por un concepto matemático, como lo afirma (Santos, 2007) de la siguiente manera:

> "la importancia del uso de estrategias generales y particular en la resolución de problemas ha propiciado diversas discusiones relacionadas con el énfasis o las tendencias en cuanto a su papel en la educación. Por un lado existe la idea de poner en un primer plano el desarrollo de estrategias con amplio margen de aplicaciones la resolución de problemas: mientras que por el otro lado. Se argumenta que para que una estrategia pueda realmente asimilarse tiene que estar necesariamente ligada a un contexto o contenido en específico." (p. 28)

De lo anterior, se puede interpretar que el resolutor debe identificar las estrategias que utilizara en la resolución de problemas y para esto debe tener en cuenta el tipo de contexto involucrado en la problemática, el concepto matemático involucrado, además al identificar el contenido se podrá emplear heurísticas de otros contextos además transferir a otros campos las desarrolladas ya que algunas de las estrategias se pueden memorizar, para completar esta idea (Santos, 2007) afirma que: "algunas heurísticas identificadas como necesarias para la resolución de problemas incluían estrategias para memorizar, para tomar decisiones, para pensar creativamente y para razonar adecuadamente" (p.32). Además, este autor resalta que esta trasferencia no es posible en todos los casos debido a que los conocimientos específicos requieren de habilidades específicas que permitan de esta manera poder ampliar el conocimiento cognitivo de los estudiantes en los procesos de aprendizaje. Para ampliar esta idea, Perkins y Salomon citado en (Santos, 2007) afirman que "las habilidades cognitivas generales no funcionan tomando el lugar del conocimiento del dominio especifico, ni opera de la misma forma de un dominio a otro dominio" (p, 37). De aquí la importancia de reconocer y caracterizar las heurísticas específicas de las ecuaciones de segundo grado, dado que según estos autores no se recomienda generalizar estrategias utilizadas en otras situaciones debido a que el concepto involucrado puede variar en su aplicación.

Sin embargo, para determinar las heurísticas apropiadas en la solución se debe pensar en los conocimientos previos con los que llegan los estudiantes es decir, son los recursos según la clasificación de (Schoenfeld, 1985), ya que estos pueden llegar a ser poco eficientes y de esta manera generar dificultades al afrontar problemas que involucren ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, debido a que se siguen resolviendo con las estrategias empleadas en la aritmética lo que resulta ineficaz para solucionar la mayoría de los problemas no rutinarios que se van a seleccionar, y de esta manera termina volviéndose un dificultad para el aprendizaje.

A continuación se presentaran algunas de las dificultades presentes en la resolución de las ecuaciones.

2.1.2 Dificultades en el aprendizaje del álgebra

Son muchas las investigaciones realizadas acerca de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Como lo resalta Socas (1999,), en estos trabajos se ha puesto en evidencia las dificultades presentes en el aprendizaje del lenguaje algebraico, autores como Lins (citado en Kieran y Filloy , (1989), Kieran y Filloy (1989), MacGregor y Stacey (2000), Pinzón y Gallardo (2000) (p.2), reconocen que algunas de las dificultades presentes en los estudiantes durante la adquisición del álgebra pueden asociarse a aspectos como: el significado de las ecuaciones para los estudiantes, las reglas que se deben aplicar para transformar las expresiones algebraicas a otras más sencillas, la resistencia a emplear ecuaciones, dificultades en el empleo de los signos, falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y por otra parte las operaciones entre los números conocidos y los desconocidos se convierte en una dificultad.

Para iniciar la descripción detallada de algunas dificultades que aporten de manera significativa a los objetivos del presente trabajo, se abordará la postura de (Kieran, y Filloy, 1989), quienes entienden por dificultad en el aprendizaje como la falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se pueden llegar a utilizar al resolver problemas. Las investigaciones acerca de la enseñanza del álgebra son muchas y por lo tanto abordarlas todas es una tarea muy amplia, los autores en mención centraron su trabajo solo en algunas dificultades que consideraron principales.

Para fines de este trabajo se describen algunas de esas dificultades en los autores (Kieran, y Filloy, 1989), ya que los estudiantes pueden presentarlas al trabajar con ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, como la forma en que comprenden los simbolismos, los teoremas que se pueden aplicar y las diferentes soluciones que pueden llegar a tener, entre otras. A continuación se enuncian algunas de estas dificultades.

Las dificultades asociadas a la forma de ver el signo igual, son aquellas que se presentan al resolver problemas donde para los estudiantes el uso del signo igual (=) es solo un indicativo de realizar una acción que permita encontrar la solución, también lo interpretan como un mero separador de una expresión sin ser conscientes de la equivalencia, es decir, no correlacionan el lado izquierdo con el derecho, además otra posible dificultad que se puede asociar a esta es la poca relación que existe con expresiones que involucren variables en ambos lados de la igualdad.

Esta dificultad es posible que aparezca debido a la costumbre de trabajar siempre las matemáticas con problemas rutinarios en el cual siempre se le dio gran importancia a la acción que implica el signo igual.

La dificultades con la convención de notación, son debidas a la interpretación inadecuada de los términos por parte de los estudiantes que inician su proceso de aprendizaje en el álgebra, lo que ocasiona que se generalizase lo que era correcto en aritmética se transfiere al álgebra, como lo expresa (Kieran, y Filloy, 1989): “En aritmética la concatenación denota adición (p. e., 37 significa 30 + 7; $2{}^1/_4$ significa $2 + \frac{1}{4}$). Sin embargo, en álgebra, la concatenación significa multiplicar (p. e., 4b significa 4 x b).” (p. 230). Es decir, que el estudiante deberá cambiar la forma en como venía pensando y sobre todo tendrá que optar por otras heurísticas.

La dificultad asociada a los métodos de simbolizar, consiste en la falta de habilidad para representar las situaciones problema, para ampliar esta idea (Kieran, y Filloy, 1989) sostiene que: “El álgebra les fuerza a formalizar procedimientos por los que puede que antes nunca se hayan preocupado” (p. 230), es decir, que algunos estudiantes pueden relacionar los datos brindados con la incógnita o con la pregunta central del problema, con el fin de ir planteando la ecuación que pueda llevar a la solución del problema.

La dificultad asociada a la interpretación o uso de las variables, se presenta cuando se utiliza como una expresión en la cual solo hay que remplazar un valor o solamente para etiquetar, para ampliar esta idea (Kieran, y Filloy, 1989) afirman que:

> La experiencia de los niños en la escuela elemental con las letras en ecuaciones se reduce a menudo a fórmulas como A=bxh, y relaciones entre unidades de medida como 10 mm=l cm. La primera supone reemplazar b y h por valores diferentes para encontrar el área de rectángulos dados; la segunda regla se usa para encontrar, por ejemplo, el número de milímetros a que corresponde 5 centímetros. (P. 231)

De lo anterior se puede concluir que los estudiantes solo se limitan a remplazar las letras por números, o las relacionan solo como equivalencias entre las unidades. Este último ocasiona la dificultad que en álgebra pocos alumnos comprendan el significado de variable representada por medio de letras, dado que se consideran como la representación de un único elemento.

La dificultad asociada a la resolución de ecuaciones, se muestra cuando los métodos empleados por los estudiantes para dar solución pueden ser: en primer lugar intuitivo, las cuales consisten en utilizar técnicas de conteo, sin embargo estos método a menudo no se pueden generalizar; en segundo lugar, está el método por tanteo que consiste en remplazar valores numéricos en la ecuación, pero este método termina siendo muy dispendioso. Y en tercer lugar está el método formal el cual lleva a la aplicación de las propiedades o teoremas para dar una solución, es decir, puede recurrir a la aplicación inadecuada de la propiedad uniforme.

2.1.3 Algunas concepciones sobre el término heurística

El resolutor debe afrontar un problema no rutinario donde deberá diseñar o seleccionar una estrategia que le permita llegar a una solución, por esta razón es necesario precisar lo que se entenderá por heurística y como se clasifican además se resaltará la importancia de su enseñanza y que tan pertinente es el aprendizaje de algunas o muchas estrategias puesto que se puede terminar perdiendo tiempo porque también es necesario aprender cómo utilizarlas de acuerdo a la situación, lo que termina volviéndose una dificultad. Esto es debido a que la generalización de las heurísticas propuestas por Polya no es práctico en el modelo, para ampliar esta idea (Schoenfeld, 1985) plantea:

> “hay una problemática con las heurísticas en el trabajo de Pólya, y es que prácticamente cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares; por ejemplo, Pólya propone como heurísticas hacer dibujos, pero Schoenfeld dice que no en todo problema se puede dar este tipo de heurística específica. En general, el problema con las heurísticas tal como lo propone Pólya, según Schoenfeld, es que son muy generales, por eso no pueden ser implementadas. Dice que habría que conocerlas, saber cómo usarlas, y tener la habilidad para hacerlo. Esto es así porque, posiblemente, mientras el estudiante aprende un cúmulo de heurísticas particulares, ya podría haber aprendido mucho sobre otros conceptos.” (Citado en (Barrantes, 2006. P.3)

De lo anterior, se puede concluir que la generalización de las heurísticas es un camino para dar solución a un problema, pero deja por fuera la posibilidad de resolver otras situaciones problemas, ya que dependiendo del tipo de problema y sobre todo del concepto matemático, se deberá seleccionar o desarrollar una estrategia específica para ser aplicada, Además (Santos, 2007) menciona que las estrategias que se pueden aplicar varían ya que los conocimientos son específicos y así mismo lo deberán ser los métodos para solucionar problemas.

Al respecto se presenta la tabla de Koichu, Berman & Moore, (2006) citada por (Palacios y Solarte, 2013), para precisar distintas posturas sobre el término heurística, esta tabla se referencia para efectos del presente trabajo de grado como tabla 1.

Autor	*Definición*
Polya (1945/1973)	*Las heurísticas son formuladas como preguntas que los buenos resolutores de problemas deben hacerse a sí mismos en diferentes etapas de la resolución de un problema o como un consejo general (iniciado y concluido por marcas de exclamación ¡!) a los resolutores de problemas. Las preguntas heurísticas incluyen "¿Qué es lo desconocido?!", "¿¡Cuáles son los datos?!", "¿¡Ha visto usted tal problema antes o tal vez en una forma ligeramente diferente!?" El consejo heurístico incluye "¡dibuje una figura sí es posible!" "¡encuentre la conexión entre lo dado y lo desconocido!"*
Newell y Simon (1972)	*Las heurísticas son tratadas como estrategias que hacen la resolución de problemas más eficiente que aleatoria. Ejemplos de heurísticas incluyen "análisis de medios – objetivos" "cadenas de atrás para adelante".*
Perkins (1981)	*La estrategia heurística es una regla a seguir que a menudo ayuda a resolver una cierta clase de problemas, pero que no ofrece ninguna garantía.*
De Bono (1984)	*"[La idea de heurísticas] incluye todos esos aspectos de pensamiento que no pueden ser proporcionadas en las formulaciones matemáticas" (p. 10).*

Schoenfeld (1985)	*"Las estrategias heurísticas son principios generales para la resolución exitosa de problemas, sugerencias generales que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o hacer progresos hacia la solución" (p. 23). Ejemplos de heurísticas incluyen "dibuje una figura", "argumente por contradicción", "considere un problema general", "intente establecer subjetivos".*
Martínez (s.f)	*"La [heurística] es una estrategia que es poderosa y general, pero no tiene garantía absoluta de que funcione. Las heurísticas son cruciales porque ellas son las herramientas a través de las cuales los problemas son resueltos" (p. 606).*
Goldin (1998)	*"[El proceso heurístico es] la más útil unidad organizativa y constructo culminante, en un sistema [representacional] de planificación, observación y control ejecutivo. Tal proceso incluye "ensayo y error", "pensar en un problema más simple", "explorar casos especiales", "Dibujar un diagrama", etc., (p. 153).*

Tabla N^0 1: Diferentes definiciones y posturas sobre el término "heurística"

A partir de la tabla se puede inferir que estas definiciones anteriores se enmarcan en el campo de las heurísticas generales las cuales serán descriptas en el apartado 2.1.4, y tiene como propósito contribuir a la comprensión del problema, por lo tanto se debe resaltar que no son las únicas sino que existen otras y que además se tienen en cuenta el proceso de resolución, como lo son las heurísticas específicas y son estas las que tiene en cuenta el concepto matemático vigente en cada problema no rutinario de cada disciplina. Sin embargo para desarrollar estas heurísticas los estudiantes deberán tener unas competencias en cada disciplina.

En las matemáticas se forman competencias en los estudiantes y desarrollar estas, se pueden presentar una gran variedad de factores que se deben tener en cuenta, cuando se forma estudiantes desde el área de matemáticas (Pifarré, 2001) expone algunos de estos que podrían llegar afectar, ya sea desde la enseñanza o el aprendizaje entre los que se tienen indicados:

> a) La importancia del conocimiento declarativo sobre el contenido específico del problema;
> b) El repertorio de estrategias generales y específicas que es capaz de poner en marcha el sujeto para resolver el problema concreto;
> c) El papel de las estrategias meta cognitivas;
> d) La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema –entre los múltiples factores incluidos en esta dimensión destacan las actitudes, las emociones y las creencias sobre la resolución de un problema matemático (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994, Puig, 1993; entre otros).

Estos factores tienen un rol importante en el aprendizaje, puesto que serán experimentados por los estudiantes al momento de afrontar un problema de la vida real, sin embargo, hay un agente que influye en el proceso de forma significativa, en este caso es el profesor de matemáticas quien tiene como función de facilitar el aprendizaje, y para cumplir con este fin, el deberá tener en cuenta los aspectos propuestos por (Pifarré, 2001) como son:

> a) Ha de facilitar el aprendizaje de estrategias, bien con su instrucción directa o bien con el diseño de los materiales didácticos adecuados; b) ha de ser un modelo de pensamiento para sus alumnos; y c) ha de ser un monitor externo del proceso de aprendizaje de los alumnos (p. 3)

De lo anterior, se puede concluir que el trabajo realizado por el docente tiene como propósito ayudar a construir las estructuras en los resolutores. Ya que el docente es quien debe incorporarlo en los procesos de enseñanza las heurísticas útiles para la resolución de problemas. Además, él deberá definir una postura clara sobre los modelos o modelo que se puede llegar aplicar, aunque son muchas, vale la pena resaltar que existen varias investigaciones realizadas sobre la importancia que tiene la enseñanza de heurísticas generales en los procesos de enseñanza-aprendizaje, para ampliar esta idea (Pifarré, 2001) sostiene que:

> Se ha diseñado un gran número de propuestas para la enseñanza de estrategias generales o heurísticas. Entre estas propuestas, y sin ánimo de ser exhaustivos sino citar las que nos han sido útiles para el diseño de nuestro trabajo, destacamos, en primer lugar, el modelo «ideal» de Bransford y Stein (1986) y el de Krulik y Rudnik (1989) como modelos instruccionales que han seguido de manera fiel el propuesto por Polya (1945). Y, en segundo lugar, los modelos de Schoenfeld (1985) y Lester (1985). (p.2)

El autor (Pifarré, 2001) resalta que en la variedad de propuestas diseñadas para la enseñanza de estrategias generales se presentan varias recomendaciones que se deberán tener en cuenta en el diseño de los modelos y con el fin de precisar estas, solo citaron o identificaron algunas entre las cuales están:

- Aplica un modelo lógico-matemático a partir de un a priori, para resolver problemas, donde la dificultad radica en asignar un modelo lógico que le dé importancia a los métodos formales para así llegar de forma directa.

- La segunda consiste en asignar etapas a los procesos de resolución, consiguiendo con esto segmentar métodos donde la intención es facilitar la enseñanza y posibilitar el aprendizaje, pero esto no siempre se logra porque seguir las etapas no garantiza el resolver los problemas.

- En tercer lugar, (Schoenfeld, 1985) destaca que existen programas de instrucción de estrategias o heurísticas en los cuales no se le da importancia a la enseñanza de ellas. Además manifiesta que estos términos son demasiado globales ya que encierran a su vez un conjunto de estrategias específicas a las cuales no se les hace el reconocimiento necesario en los procesos de resolución.

- En cuarto lugar (Schoenfeld, 1985) resalta que los programas instrucción de estrategias que incorporan en los procesos de aprendizaje la enseñanza de estrategias meta-cognitivas pueden alcanzar mejores resultados.

- En quinto lugar está el papel desarrollado por el profesor en los procesos de resolución y por tal razón se deben diseñar métodos en los cuales este tenga un rol más participativo.

Se debe aclarar, que estas sugerencias sobre los modelos no poseen una jerarquía específica para fines de este trabajo de grado, sin embargo, la tercera recomendación será un punto de apoyo porque la enseñanza de heurísticas generales debe estar acompañado de las específicas, ya que el concepto matemático o la disciplina que se aborde, requieren de algunas para potencializar el aprendizaje, de aquí lo importante de reconocer y caracterizar estas estrategias en las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, teniendo en cuenta las dificultades presentes en la aplicación de este conocimiento.

Por esta razón es necesario tener en cuenta: 1) describir algunas de las heurísticas generales propuestas por (Polya, 1981) para la resolución de problemas, entre las cuales solo se identificaran y se realizara una breve descripción de algunas que posiblemente estén presentes en la solución de los problemas planteados en ecuaciones de segundo grado con una variable real. Y 2) resaltar la importancia de la enseñanza de heurísticas específicas ya que estas se están dejando de lado.

2.1.4 Algunas heurísticas generales descritas en la obra de (Polya, 1981)

Las heurísticas generales están comprendidas como los principios básicos de la resolución de problemas, sin embargo, como lo resalta (Santos, 2007) estas estrategias están sustentadas en las teorías del aprendizaje como principios generales, donde no se le da la importancia a los detalles de cada disciplina por ser considerados poco importantes para el aprendizaje. Por tal razón, fue necesario cuestionar las teorías del aprendizaje como lo manifiesta Shulman (1986) citado por (Santos, 2007) "conforme avanzaban las ciencias cognitivas se empezó a cuestionar la propuesta de aprendizaje independiente del contenido específico" (p.28). Es decir, en la resolución de problemas matemáticos no se puede considerar que el aprendizaje esta desvinculado del concepto específico, puesto que, aprender matemáticas implica la aplicación y reconocimiento de conceptos y estrategias diferentes a los que se pueden aplicar en otras ciencias.

Además, el aprendizaje de estas estrategias tiene como propósito la transferencia de las experiencias vividas por los resolutores a otros campos, lo que conlleva a pensar que se puede transferir de la resolución de problemas, para complementar esta idea como lo expresa Perkin (1981) citado por (Santos, 2007): "Un conocimiento general incluye estrategias ampliamente aplicables para resolver, tomar decisiones, desarrollar un pensamiento inventivo y regular o monitorear el proceso de solución de un problema." (p. 29). Es decir, que las estrategias generales son útiles para la aplicación en cualquier contexto, mientas que las específicas son propias e influyen en aspectos específicos de cada disciplina. Con base en lo anterior se presentaran algunas de las heurísticas propuestas por Polya, las cuales serán interpretadas como las heurísticas generales en matemáticas.

La descripción de estas estrategias se realiza tomando como base la publicación de Zugazagoitia (1989) quien en la quinta edición realiza una traducción de la obra "*How to solve it" de* (Polya, 1981) con el título "*como planear y resolver problemas",* en este documento se presentan algunas heurísticas propuestas, reconociendo así los procesos meta-cognitivos realizados por los estudiantes. A continuación se enuncian las 7 heurísticas denominadas así: analogía, ¿Cuál es la incógnita? , descomponer y recomponer, diagnóstico, figuras, generalización y concebir un plan. Vale la pena reforzar la idea de que (Polya, 1981) no rotula ni enumera las heurísticas generales sino, que toma una serie de situaciones que usa como ejemplo para indicar que estrategia se está utilizando. A continuación se describe cada una.

- La analogía hace referencia a la similitud de los problemas en los cuales se deberá reconocer algunos elementos presentes en las situaciones con el fin de determinar que comparten entre ellos, para así mismo ver si las heurísticas aplicadas serán útiles de un problema a otro, esto se debe a que en su mayoría los problemas que afrontan a diario ya se han solucionado en otras situaciones, y de aquí surge la pregunta ¿conoce algún problema que se relacione con el suyo?

- ¿Cuál es la incógnita? Es una de las preguntas que tiene como objetivo orientar a los estudiantes y es el profesor quien es el encargado de formularla para verificar si se comprendió el problema, además de atraer la atención hacia las partes principales del problema. Sin embargo es importante resaltar que pueden ser varias incógnitas que se formulen dentro de un mismo problema.

- Descomponer y recomponer el problema referencia los procesos mentales en los cuales se ve el problema como un todo, para posteriormente prestar atención a detalles esenciales con el fin de comprender el todo, generalmente estos aspectos esenciales están promovidos por el interés particular del resolutor.

- Hacer un diagnóstico es un término utilizado en la educación que significa según Polya (Polya, 1981): "apreciación precisa del trabajo del alumno" (p. 81) esta heurística tiene el propósito de reconocer las condiciones en la cuales el resolutor enfrenta el problema determinando, si el trabajo realizado cumple con las condiciones para establecer si lo planteado hasta el momento es útil, además este autor también reconoce que pueden ocurrir dos situaciones, la primera es que el estudiante se involucre en la tarea de realizar cálculos sin un plan de ejecución, o la segunda está relacionada a la realización de la situación sin tener concebida una idea general de que es lo que se busca solucionar y le permita llegar a la solución del problema.

- El uso de figuras es quizás de las heurísticas más utilizadas cuando se afrontan situaciones que involucran conceptos geométricos donde esta estrategia se puede implementar de dos formas, una de ellas es imaginar la figura que se describe en el problema permitiendo obviar la necesidad de plasmar la imagen en el papel, otra forma de utilizarla es realizar un dibujo sobre el papel en donde se deja registro de todos los datos que van a intervenir en la solución, sin embargo, esta estrategia no es solo para este tipo de problemas, sino que también se puede implementar en otras situaciones que carezcan de una parte geométrica permitiendo representar de forma hipotética el problema en cuestión.

- El uso de generalización es una estrategia que consiste en el examen de un objeto para posteriormente examinar un conjunto de objetos, es muy utilizada en la solución de problemas ya que permite ver problemas que a simple vista parecen más difíciles con aquellos de su misma naturaleza que son sencillos de comprender permitiendo así para de un conjunto limitado a otras más extenso, en donde se contenga el objeto limitado.

- llevar a cabo un plan resulta ser muy difícil ya que este puede ir cambiando dependiendo del punto de vista del resolutor puesto que no se aceptaran argumentos que sean poco decisivos para la solución, sin embargo mientras que cuando se concibe el plan se seguirá un razonamiento plausible y heurístico para que todo conduzca a una idea buena.

La descripción anterior evidencio algunas heurísticas generales en (Polya, 1981) y tienen el propósito de hacerlas esplicitas en el análisis de los problemas, y evidenciar cuales de ellas son utilizadas por los resolutores dentro del presente trabajo de grado.A continuación de describe la necesidad de las heurísticas especificas

2.1.5 Discusión sobre la necesidad de las heurísticas específicas

La transferencia de heurísticas generales a diferentes contextos no se logra de fácil manera, ya que estas siempre deben estar permeadas por un concepto específico, lo cual siempre hace parte de un tipo de conocimiento, por tal razón, es necesario revisar el contexto en el cual se va a mover el resolutor, donde debe ser capaz de comprender y utilizar unos conocimientos básicos que le serán útiles en otras disciplinas. Lo que lleva al cuestionamiento planteado por (Santos, 2007) ¿Cuál es el tipo de conocimiento que se debe enfatizar más en el aprendizaje: el conocimiento general de como pensar bien, o el conocimiento específico de los detalles internos o externos de determinado campo de estudio? (p.29).

Esta pregunta es afín al presente trabajo de grado, ya que cuando se plantea la reflexión sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes y profesores alrededor del concepto matemático, es importante resaltar que no es posible separar las heurísticas generales y específicas de los contextos ya que están estrechamente relacionadas, y es debido a que las primeras son la base para concebir las segundas, es decir que las generales facilitan la comprensión de las situaciones a trabajar y permiten al resolutor una posibilidad de diseñar o aplicar una heurística especifica partiendo de las que ya pudo concebir, de aquí la importancia que existe en presentar las estrategias generales a los estudiantes. Sin embargo, es también relevante enseñarles las heurísticas de tipo específicas, ya que si estas son bien constituidas pueden ser luego vistas como generales, cuando se logra este paso es posible la transferencia de heurísticas a otros campos disciplinarios. Pero aun no es claro lo que se debe enseñar ya que la pregunta conlleva a proponer las siguientes posturas que definió (Santos, 2007) de la siguiente manera:

> Una posición asegura que se debe enseñar completamente para el desarrollo de un conocimiento local, es decir, materia por materia.
> Otra posición está a favor de que debe investigarse una gran cantidad de recursos en el desarrollo de habilidades generales para resolver problemas, autorregularse en el proceso de aprendizaje y evaluar el propio aprendizaje.

> Una tercera posición afirma que, en realidad, esta dicotomía oscurece algunos aspectos importantes. Es decir, se debe apuntar a una combinación de estrategias generales y particulares. (p. 30)

Tomando coma referencia las afirmaciones expuestas por (Santos, 2007) se puede llegar a la conclusión que en los procesos de enseñanza y aprendizaje es importante presentar los conocimientos de tal forma que los estudiantes cuenten con variadas herramientas para afrontar situaciones en su vida cotidiana, lo cual implica que se debe enseñar tanto lo general como lo particular y es debido a que los campos disciplinarios en los que se van a desarrollar los estudiantes requieren estrategias generales para la comprensión de las situaciones, pero posteriormente también se deben aplicar unos conocimientos propios o detallados de las situaciones y son estos lo que se consideran como los específicos de este problema y concepto matemático al cual se enfrentan los estudiantes.

Se ha precisado que es importante también enseñar las heurísticas especificas dentro de los procesos de aprendizaje, aun no se ha definido una postura sobre lo que se entenderá por este tipo de heurísticas, aunque en (Santos, 2007) no hay una postura definida sobre lo especifico, el hace referencia a este como el conjunto de habilidades propias de cada disciplina que permiten al resolutor alcanzar un alto nivel en sus procesos de razonamiento matemático ya que el resolutor puede reconocer la estructura inmersa en cada concepto. Con base en esta interpretación se alude a las estrategias más utilizadas en las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real, debido a que es el concepto matemático que se aplica en el desarrollo de las situaciones escogidas en el presente trabajo de grado las cuales son: casos de factorización y el uso del algoritmo llamado ecuación generales, transposición de términos en la manipulación de las ecuaciones y completación de cuadrados, que serán definidas a continuación.

2.2 Dimensión matemática:

En este apartado se presenta la definición formal de la ecuación de segundo grado con una incógnita real de (Dewar, y Zill , 2012) y (Arthur, 1996).

2.2.1 Ecuaciones de segundo grado con incógnita real

En esta parte se esbozará el concepto matemático de ecuaciones de segundo grado el cual estará restringido a las ecuaciones donde solo aparezca una incógnita de solución real, con una incógnita real, es decir, que este solo se tendrá en cuenta un tipo de solución que se refleje en situaciones aplicadas de la vida cotidiana.

En la vida cotidiana es posible resolver algunas situaciones por medio de las ecuaciones de segundo grado, como por ejemplo: el cálculo de áreas, lanzamiento de proyectiles, alcance máximo entre otras. Por lo cual es necesario comprender lo que se deberá entender por una ecuación, según los autores (Dewar, y Zill , 2012) es:

> "una afirmación de que dos expresiones son iguales cuando se igualan entre sí dos expresiones, y al menos una de ellas contiene una variable, entonces la proposición matemática es una **ecuación en una variable".**
>
> Por ejemplo,
>
> $\sqrt{x-1} = 2$; $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; $|x + 1| = 5$

De lo anterior, se puede concluir que las ecuaciones son aquellas expresiones en las cuales interviene una variable la cual puede estar en ambos lados de la igualdad como se evidencia en los ejemplos mencionados. Vale la pena indicar que para fines del presente trabajo de grado, se está usando la expresión incógnita en lugar de variable usado por (Dewar, y Zill , 2012), y esto es debido a que se genera una confusión con el uso del término porque la variable referencia un valor cambiante mientras que la incógnita relaciona un valor fijo desconocido.

Cómo las ecuaciones son expresiones matemáticas que cumplen una relación de equivalencia entre dos términos en los cuales está presente una incógnita que cumple con una serie de teoremas y propiedades propias de los conjuntos numéricos en cuanto a su operatividad.

En la solución de ecuaciones está presente la ley uniforme con respecto a las operaciones de multiplicación y suma ya que se debe garantizar la equivalencia entre los términos. Como lo enuncia (Dewar, y Zill , 2012)

> "resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes.
> Teorema 3.1.1 Operaciones que producen ecuaciones equivalentes
> i) Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.
> ii) Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión. Que represente un número real diferente de cero."(p, 113).

Resolver una ecuación es un proceso que consiste en encontrar la o las soluciones que satisfacen la igualdad (Dewar, y Zill , 2012) muestran el siguiente ejemplo para resolver una ecuación en este caso lineal.

$$3x - 18 = 0$$

$$3x - 18 + 18 = 0 + 18 \rightarrow por\ i)\ teorema\ 3.1.1$$

$$3x = 18$$

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(18) \quad \rightarrow por\ i)\ teorema\ 3.1.1$$

$$x = 6$$

Comprender la propiedad uniforme para la solución de ecuaciones no resulta fácil, ya que no se le da este tratamiento sino que se opera de forma intuitiva realizando una transposición didáctica de la propiedad y por tal razón los estudiantes se equivocan en el significado de operaciones básicas como sumar, restar, multiplicar y dividir. Sobre lo anterior, en la educación matemática se ha indicado que una dificultad escolar es que muchas veces los estudiantes resuelven estas ecuaciones por tanteo, es decir ensayo y error. Además, hay poco uso de las propiedades de ley uniforme y muchas veces tanto profesores como estudiantes recurren a técnicas como lo que está sumando pasa a restar y lo que está multiplicando pasa a dividir, lo cual genera muchas dificultades en el hallazgo de la solución.

Del uso de las propiedades y operaciones anteriormente mencionadas surge otro tipo de ecuaciones al momento de multiplicar una ecuación lineal por la misma variable que aparece en uno de los lados de la igualdad, es decir, que esta operación permite que se piense en otro tipo de ecuación como lo son las ecuación polinomial para ampliar esta idea es necesario dar una definición formal de una ecuación polinomial a lo que (Dewar, y Zill , 2012), menciona que:

"Una **ecuación polinomial de grado n** es una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots + \ a_2 x^2 + a_1 x^1 \ + a0 \ = 0\, , con\ an \ \neq \ 0 \quad (1)$$

Donde $\boldsymbol{n}$ es un número entero no negativo y $\boldsymbol{ai}$ con $i = 0, 1 \dots \boldsymbol{n},$ son números reales. Una ecuación lineal corresponde al grado n = 1 si se observa las ecuación (1) Salvo por los símbolos, que son diferentes, $ax + b$ es lo mismo que $a_1 x = a_0$." (p. 127).

Con lo anterior, se hace una breve introducción a la representación de las ecuaciones polinomiales la cual al tener grado $n = 2$ y tener una variable reciben el nombre de ecuación de segundo grado o cuadrática, las que se definen según (Arthur, 1996) como forma canónica como $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ Encontrar las soluciones para estas, varían y resulta ser un proceso que se puede abordar mediante varias estrategias entre las cuales está la factorización, transposición de términos para (Kieran, y Filloy, 1989), la aplicación de un algoritmo como lo es la ecuación general entre otras.

Como el interés se centró en las soluciones reales se deberá tener él cuenta el discriminante el cual se encuentra clasificado en: 1) $b^2 - 4ac > 0$ en este caso la solución es real, 2) $b^2 - 4ac = 0$ en este caso la solución es real sin embargo no se tendrá en cuenta el caso donde $b^2 - 4ac < 0$ ya que la solución será compleja.

Las estrategias usadas para la solución de ecuaciones de segundo grado requieren de unos procesos muy específicos propios de cada concepto o reglas. Por esta razón, es necesario precisar cómo se deben encontrar la solución, además de ser conscientes de las estrategias más utilizadas en los detalles propios del concepto, de las cuales se mencionarán algunas de las más utilizadas por profesores en ejercicio y estudiantes como lo son la factorización de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, el método de la raíz cuadrada para algunas ecuaciones, el algoritmo llamado ecuación general. Los cuáles serán definidos a continuación:

El método de la raíz cuadrada, indica que si la ecuación tiene la forma $x^2 = d$, *con* $d \geq 0$ o puede llevarse a esta forma, se resuelve aplicando la extracción de la raíz a ambos lados de la ecuación teniendo en cuenta dos posibilidades de esta, lo que es equivalente a una diferencia de cuadrados en donde la raíces solución serán $x = \sqrt{d}$ *o* $x = -\sqrt{d}$ como lo afirma (Dewar, y Zill , 2012).

Ejemplo de la p.129

$$(2x^2) = 6$$

$$\frac{1}{2}(2x^2) = \frac{1}{2}(6)$$

$$x^2 = 3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Entonces la incógnita solución es $\pm\sqrt{3}$ es decir, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$

Otro de los métodos más utilizados es el de factorización, el cual consiste en la reducción de la ecuación a una expresión equivalente al producto de dos términos que son polinomios de primer grado que contienen la raíz o raíces de la ecuación de segundo grado. Sin embargo dependiendo del caso de factorización aplicado la técnica puede variar, y para resolverlo se aplica la propiedad de los productos nulos que puede indicarse de la siguiente manera:

$$Si \;\; a \cdot b = 0 \;\; entonces \;\; a = 0 \quad o \;\; b = 0$$

Esta propiedad de los productos nulos permite la utilización de una estrategias que resulta ser de las más utilizadas por los profesores en ejercicio y estudiantes cuando estos abordan la expresión de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, El método se puede aplicar teniendo en cuenta dos condiciones, la primera cuando $a = 1 \; y \; a \neq 0$, la segunda cuando $a \neq 1 \; y \; a \neq 0$. En el primer caso se puede aplicar la siguiente estrategia, el método consiste encontrar dos números $p \; y \; q$ que cumplan con que $p.q = c$, además estos números satisfacen lo siguiente $p \pm q = b$ la factorización de la forma es el más utilizado por los profesores en formación ya que permite hallar rápidamente los ceros de la expresión. En el segundo caso la estrategia remite al resolutor a transformar la expresión al primer caso esto es debido a que cuando $a \neq 1 \; y \; a \neq 0$. Se dificultad encontrar los números que satisfacen las siguientes igualdades $p.q = a.c$ y $p \pm q = b$ por tal razón es necesario realizar una manipulación algebraica la cual consiste en multiplicar y dividir por el coeficiente del ax^2 que en estos casos es a es decir, $\frac{a(ax^2 \pm bx \pm c)}{a} = 0$ con esta manipulación se facilita encontrar los números. Se indica que en esta estrategia de factorizar se pueden desprender varios casos como lo son cuando $a = 1$ y a diferente de 1 como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones según el caso que corresponda de la p.127:

a. $x^2 + 6 = 5x$

b. $2x^2 - 3 = -5x$

Solución del punto a:

$$x^2 + 6 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 5x - 5x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$(x - 3) = 0 \quad o \quad (x - 2) = 0$$

Entonces las soluciones de la ecuación son: ($x = 3$ y $x = 2$)

Solución del punto b:

$$2x^2 - 3 = -5x$$

$$2x^2 + 5x - 3 = -5x + 5x$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\frac{2(2x^2 + 5x - 3)}{2} = 0$$

$$\frac{(2x)^2 + 5(2x) - 6)}{2} = 0$$

Luego aplicando la misma estrategia usada en el ejemplo (a) y por posteriormente la propiedad del cero se puede llegar a $(x+3)(2x-1)=0$, por lo tanto las soluciones están dadas por: $x+3=0$ y $2x-1=0$, es decir, que $x=-3$ y $x=\frac{1}{2}$

Sin embargo, estos casos anteriormente mencionados no se pueden aplicar en ciertos casos ya que es poco posible hallar los números que satisfacen las igualdades por esta razón se recurre a desarrollar la estrategia de completación de cuadrados. Para ampliar esta idea (Dewar, y Zill , 2012) lo expresa que:

> "Cuando una expresión cuadrática no puede factorizarse fácilmente y la ecuación no tiene la forma especial (4) es decir $x^2 = d$, podemos hallar las raíces completando el cuadrado. Esta técnica se aplica a la expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; es decir, la expresión cuadrática debe tener 1 como su coeficiente principal. Reescribimos la ecuación a la forma $x^2 + bx + c = 0$ p.129

Es posible hallar las raíces completando el cuadrado y para esto se reescribe la expresión de tal forma que su coeficiente principal sea 1. Es decir que el resolutor para aplicar esta estrategia ha de recurrir a tomar el coeficiente de x y realizar la siguiente operación $(\frac{b}{2})^2$

Ejemplo resuelva el siguiente ejercicio completando cuadrados

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Se divide la ecuación por 2

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Al sacar raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación tendremos que la solución es:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Donde las dos soluciones serian:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

El método de usar la fórmula cuadrática proviene de la técnica de completar cuadrados y permite reducir a una regla la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, $con\ a \neq 0$. Lo que permite encontrar las raíces de las ecuaciones de segundo grado sin la necesidad de recurrir al método de factorización, este algoritmo es conocido como la ecuación cuadrática (Dewar, y Zill , 2012) lo definen así

“Si $a \neq 0$, entonces las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con este método lo que se busca es remplazar los valores de a, b y c en la ecuación de tal manera que facilite el cálculo de las raíces ya que evita la situación de tener que buscar o explorar que números satisfacen las siguientes igualdades $p.q = a.c$ y $p \pm q = b$.

Ejemplo resuelve: $3x^2 - 2x - 4 = 0$

En esta estrategia es importante identificar el valor de a, b y c los cuales en este caso serán:

$a = 3, b = -2$ Y $c = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

Luego las soluciones serian:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 + 48}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{6} = 1.53$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 + 48}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{52}}{6} = -0.86$$

Estas son algunas de las heurísticas que los profesores y estudiantes pueden llegar a utilizar, aunque es importante mencionar que no se constituyen como todas las estrategias, ya que estás son de tipo algorítmico y por tal razón se espera que sean de las más usadas, sin embargo, también existe la posibilidad que los participantes encuentren otras heurísticas que les permitan solucionar las situaciones, y serán estas nuevas estrategias las que permitirán realizar la diferenciación de las heurísticas, además cabe resaltar que se evidenciará las dificultades presentes en el manejo de las ecuaciones desde los autores (Kieran, y Filloy, 1989).

2.3 Dimensión curricular de la resolución de problemas en Colombia

En la dimensión curricular en Colombia, se precisan dentro de los documentos vigentes del MEN (1998, 2006), los referentes sobre el proceso de resolución de problemas y sus implicaciones para el trabajo escolar en el país, así mismo se evidencia la relación de la resolución de problemas con los estándares que evidencian el uso de las ecuaciones de segundo grado con una variable real.

2.3.1 Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998)

Este documento tiene como introducción la reflexión histórica de la Educación Matemática en Colombia, la cual ha originado muchos cambios acerca de la concepción de las matemáticas, por tal motivo se toma como base teórica que el conocimiento matemático es una actividad social. Ahora bien, para seguir este parámetro, es necesario considerar una estructura curricular la que referencia a tres grandes aspectos, como lo son: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto, para ampliar sobre ellos en el documento se indica lo siguiente:

> "De acuerdo con esta visión global e integral del quehacer matemático, proponemos consideras tres aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso:
> **Procesos generales** que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelización y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
> **Conocimientos básicos** que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.
> **El contexto** tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende." (MEN, 1998, p. 35-36).

Para ampliar acerca de estos aspectos, se tiene que pensar en cómo se han venido utilizando las situaciones problemáticas en la resolución de problemas, ya que en el enfoque tradicional no se trabajaba, puesto que los estudiantes aprendían matemáticas formales, descontextualizadas y luego se aplicaban los problemas en contextos o en ocasiones se omitían por falta de tiempo, pero después de la publicación de este documento se promueve el uso de contextos variados para acercar al estudiante con el conocimiento matemático en la escuela, para ello en (MEN, 1998) se aclara lo siguiente:

> "El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de los procesos del pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas." (p. 41).

De esta manera, se puede evidenciar que el trabajo con problemas no rutinarios es muy importante, ya que permite la aplicación de los conceptos matemáticos que se aprenden en las clases, puesto que estos eran dejados para el final, en cambio sí desde que inicia la clase se trabaja en los diferentes contextos que el estudiante conoce, se brindan la posibilidad de motivar a los estudiantes para que exploren las matemáticas desde lo que él vive en su vida cotidiana en un contexto conocido para él, y así pueda desarrollar una actitud crítica y flexible ante el uso de las matemáticas.

Por tal motivo, se busca que la apropiación de los conocimientos matemáticos contribuyan a la formación del pensamiento matemático que ayudará a que los estudiantes sean ciudadanos, además estarán en capacidad de enfrentar los retos de cada día en el mundo actual y para esto es necesario que trabajen lo concerniente a los conocimientos básicos que los estudiantes deben adquirir. Para este trabajo, el enfoque gira alrededor de la resolución de problemas y cómo esta potencializa el pensamiento en los estudiantes.

Ahora bien en la construcción del conocimiento matemático tiene un rol muy importante las ecuaciones de segundo grado ya que estas permiten que los estudiantes empiecen a utilizar otros métodos poco intuitivos, incorporando así un cambio en la forma de pensar de lo aritmético a lo algebraico, además, no son el único concepto que interviene, por tal motivo es importante mostrar los diferentes conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación en la representación, ya que la relación mutua entre estos permite que los estudiantes adquieran actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Otro aspecto importante a indicar es que en toda actividad matemática existen unos procesos generales los cuales intervienen en el quehacer diario de las actividades escolares, pero se hace hincapié en la resolución y el planteamiento de problemas, ya que es considerado como eje central del currículo de matemáticas, debido a la búsqueda de que este proceso sea transversal y sea integrado a todo el currículo, por tal motivo el MEN (MEN, 1998) señala que:

> "Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes:
> Formulación del problema a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
> Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
> Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
> Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
> Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas." (MEN, 1998, p. 75).

Por lo anterior, se resalta la importancia del presente trabajo de grado, ya que se enuncia desde lo curricular las estrategias para resolver problemas y su generalización que en este caso será las heurísticas específicas, además, se le da una gran importancia a la actividad de resolver problemas, para el desarrollo del conocimiento matemático, como el (MEN, 1998) indica que se puede lograr un avance significativo al formular y solucionar problemas, como por ejemplo poder comunicar ideas matemáticamente, pensando racionalmente, reconociendo y verificando la existencia de diversas formas de representar y resolver situaciones o ejercicios, lo cual ha originado diversas propuestas de enseñanza, algunas de estas son las investigaciones hechas por (Polya, 1981) y (Schoenfeld, 1985) de las cuales se habló anteriormente.

Para terminar se hace énfasis en la perspectivas sobre el contexto y para esto es importante comprender lo que se entenderá por contexto.

El contexto son los diferentes factores que rodean los problemas no rutinarios los cuales se ven afectados en la solución ya que puede ocasionar dificultades por esta razón es importante aclarar lo que se entenderá por contexto en el (MEN, 1998) :

> Tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.(p. 19).

De lo anterior, se puede concluir que es importante incorporar el contexto en los procesos de enseñanza, debido a que se puede despertar en el estudiante interés por un aprendizaje, además el contexto permite involucrar situaciones de la vida diaria entre otras.

2.3.2 Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN 2006)

Cuando se busca potenciar el pensamiento matemático se reconocen tres factores adicionales a los ya existentes en el quehacer matemático que se pretenden abordar desde la escuela con el fin de formar mejores ciudadanos, los cuales son: “La necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de valores democráticos” (MEN, 2006, p. 47).

De esta manera se busca una formación que esté al alcance de toda la población del país una educación incluyente además que sea de calidad, transversal en todos los oficios de la ciudadanía buscando que todos los estudiantes adquieran unos conocimientos básicos que le van ayudar a contribuir a la toma de decisiones de manera eficaz y critica, para cumplir lo anterior el aprendizaje matemático debe ser significativo y comprensivo, por lo anterior el (MEN, 2006) menciona que: “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.” (p. 49).

De aquí, se ratifica la intención de trabajar con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas puesto que permite el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes y así estos serán más competentes en una comunidad que está en constante cambio, ya que la matemática se encuentra inmersa en la cultura, en las actividades diarias de los estudiantes, sin dejar atrás problemas de otras ciencias o de las mismas matemáticas, que le permitirán al estudiante interpretar o desarrollar algunas estrategias de llegar a la solución sin la utilización de un algoritmo, de ahí la incorporación del proceso general: la formulación, tratamiento y resolución de problemas.

Lo anterior no es lo único que determina la expresión ser matemáticamente competente, para lograrlo es necesario también adquirir unos conocimientos básicos y desarrollar un pensamiento lógico y un pensamiento matemático el cual está dividido en cinco tipos referenciados en el (MEN, 1998), los sistemas algebraicos y analíticos tienen un rol muy importante debido a que permiten la movilización de otros tipos de pensamientos propuesto por el (MEN, 1998), lo que ha centrado la mirada en las ecuaciones de segundo grado de una incógnita real puesto que dependiendo del contexto así mismo puede variar el sistema de representación asociado.

Sin embargo, se hará referencia al pensamiento variacional, añadiendo que los pensamientos no se encuentran fragmentados, sino que ellos están estrechamente relacionados el (MEN, 2006, p. 79).

Este trabajo de grado se apoyará en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) en lo concerniente al Pensamiento Variacional y para la Educación Media, dado que los problemas serán aplicados a estudiantes de 10° de la Educación, con el fin que apliquen algunas heurísticas en la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado.

Algunos de los estándares propuestos por el (MEN, 2006) para la Educación Media son:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. (P.87)

Es importante resaltar que estos son los algunos de los estándares propuestos para los estudiantes de 10° y 11° de la Educación Colombiana los cuales son afines a presente trabajo de grado y por lo tanto se espera que al finalizar su formación los estudiantes cuenten con estos Estándares Básicos de competencia en Matemáticas.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA Y CONTEXTUALIZACIÓN

La metodología que se adopta para la realización de este trabajo de grado es de tipo cualitativo con un corte interpretativo desde los autores (Garcia, 1996) quienes definen una investigación cualitativa como:

> Estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales—entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos – que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas. (Pag, 32).

A partir de lo anterior, en el presente trabajo de grado busca diferenciar y describir las heurísticas usadas por los profesores en formación y los estudiantes de la Educación Media en Colombia, alrededor de la resolución de problemas donde es posible involucrar las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real y los problemas no rutinarios, tomando como material de interpretación los escritos e imágenes hechas por los resolutores.

Para este propósito se tienen en cuenta las heurísticas utilizadas por los profesores y estudiantes en la resolución de problemas, para así analizar las heurísticas generales propuestas por (Polya, 1981) y se resaltan las específicas en el sentido de (Santos, 2007), ya que estas tienen un rol importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje, vale la pena aclarar que (Santos, 2007) no hace referencia a cuáles son esas heurísticas específicas, ya que dependen de cada concepto matemático.

3.1 Los criterios utilizados para la selección de los problemas no rutinarios

Los problemas presentados a profesores en formación y estudiantes fueron seleccionados con el fin de propiciar un ambiente para el desarrollo y uso de las heurísticas tanto generales como específicas para lo cual se tiene en cuenta los siguientes:

Los problema deben pertenecer a los problemas no rutinarios con el fin de no recaer en la repetición de ejercicios, además se debe tener presente que estas deben formar parte de la actividad cotidiana a la que puede estar expuesto el resolutor.

Otro criterio obedece a que como las situaciones problema se encuentran enmarcadas en un contexto real y forman parte de la actividad cotidiana, estas deberán tener soluciones reales es decir, que no se tiene en cuenta aquellas que presenten al resolutor soluciones en el conjunto de los números complejos.

Además de los dos criterios anteriores, también se tiene en cuenta que el resolutor no podrá relacionar los datos del problema no rutinario con algún algoritmo o ecuación que le permita hallar de forma directa la solución. Por otro lado, se espera que en las heurísticas generales y específicas se puedan identificar los métodos presentes en las soluciones, todo esto se realiza con el fin de resaltar la importancia que tienen las estrategias específicas en la solución de las situaciones como un medida para llegar a la solución, además permite profundizar en los conceptos matemáticos y así ahondar en situaciones cada vez con mayor grado de dificultad.

3.2 Heurísticas empleadas en la solución de los problemas no rutinarios

La metodología que se implementa en este apartado será la siguiente; en una primera instancia se expone los problemas que se pretende solucionar y posteriormente realiza la descripción correspondiente de las heurística tanto generales como especifica utilizadas por los profesores en formación y estudiantes. Además también se quiere dar cuenta de los procesos implementados por el resolutor con el fin de evidenciar si las estrategias utilizadas forman parte de sus herramientas útiles para la resolución.

Además, es importante mencionar que las heurísticas serán nombradas y enumeradas como se presenta en la siguiente tabla

Tabla N° 2: nomenclatura de las heurísticas previstas

Número y tipo de heurística	Nombre se la heurística
Heurística general N° 1	Resolver un problema más sencillo
Heurística general N° 2	Hacer un gráfico
Heurística general N° 3	Construcción de una tabla
Heurística general N° 4	Generalización
Heurística especifica N° 5	Factorización
Heurística especifica N° 6	Uso de la ecuación general

Problema no rutinario A: apretón de manos

En una reunión hay veinte personas y todas ellas se saludan dándose un apretón de manos. ¿Cuantos apretones se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado? ¿Y si hubiese *n* personas? Tomado del trabajo de grado de (Palacios y Solarte, 2013),(p 58).

Figura 1 apretón de manos problema no rutinario

A continuación, se presentarán las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario A

Heurística N° 1: Resolver un problema más sencillo

Las primeras experiencias que ha tenido el resolutor pueden evocar que se relacione el problema no rutinario con otro más sencillo que puede ir desde pensar casos más pequeños hasta llegar a unos más grandes en cuanto al valor de los datos.

Heurística N° 2: Hacer uso de un gráfico

En esta heurística el resolutor puede evidenciar por medio de un dibujo la solución del problema no rutinario, es decir, como se ilustra a continuación.

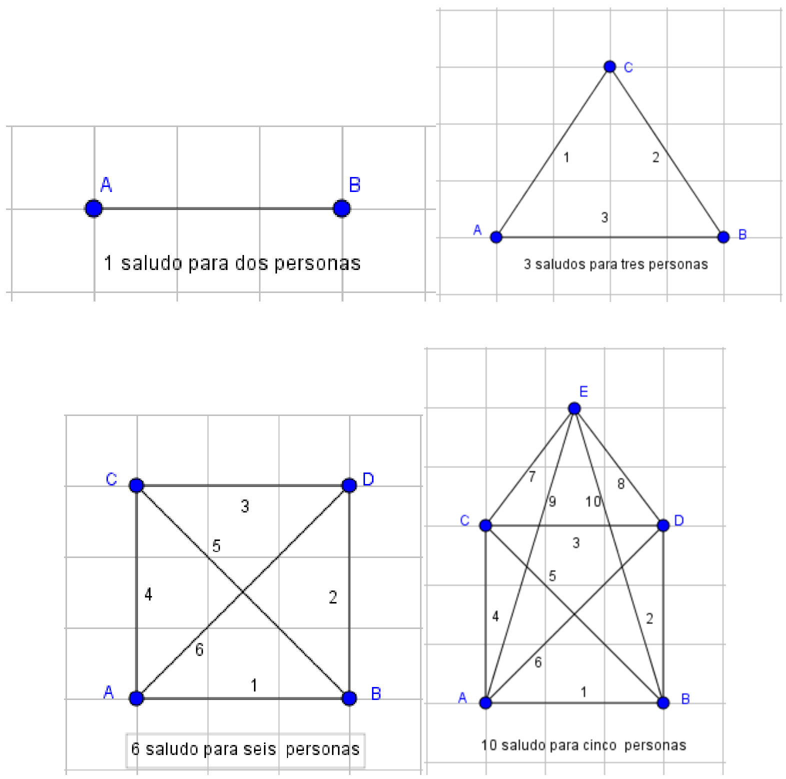

Figura 2 soluciones al problema apretón de manos

Heurística N° 3: Construcción de una tabla

Realizar una tabla con los datos encontrados en las gráficas anteriores, donde se espera poder iniciar los procesos de generalización, es decir, encontrar el patrón que rige la solución

Personas	**2**	**3**	**4**	**5**
Saludos	*1*	*3*	*6*	*10*

Heurística N° 4 Generalización

Se observa que el número de apretones tiende a ir creciendo o aumentado, ya que de la tabla se puede establecer, primero se suma 2 cuando hay tres personas, luego para 4 personas se sumó 3, para 5 personas se sumó 4, es decir, que a medida que va aumentando el número de personas ocurre a los saludos se le debe sumar la cantidad de personas anteriores a estos, para determinar así la cantidad de saludos en ese momento.

Es posible que el resolutor realice los siguientes razonamientos:

- Cada persona deberá estrechar la mano de todos los asistentes a la reunión sin embrago este no podrá estrecharse a sí mismo.
- Conociendo que si hay 3 personas, cada persona debe saludar a las otras dos, si se realiza de esta forma los datos no concuerdan y es debido a que si: A saluda a B, luego B saluda A se presenta la situación donde se repite el saludo y por ende aquí se espera que el resolutor comprenda que debe dividir por dos para que no se repitan saludos.

Después de realizar los razonamientos anteriores se llegaría a que la fórmula general del patrón es $\frac{n(n-1)}{2}$, con esta se puede encontrar la solución de otras situaciones similares.

Una modificación al problemas de (Palacios y Solarte, 2013). Permite que se pueda ir un poco más allá en el desarrollo de nuevas heurísticas como las específicas mencionadas en la tabla N°2 p 70. Es decir corresponden a las utilizadas en la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita real.

Problema no rutinario B: estrechón de manos

Las personas que asistieron a una reunión se estrechan las manos, podrías decir ¿cuántas personas asistieron a esa reunión sabiendo que hubo 15 apretones de mano? ¿Y si fueron 30 los apretones podrías decir cuántos asistieron? Tomada de *100 problemas matemáticos* de (Bernaubeu, 2016) (p. 32)

A continuación, se presentarán las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario B

Heurística N° 4: Generalización

Una vez el resolutor logra la heurística N°4 puede utilizarla en el problema y al resolverla se encuentra con una ecuación de segundo grado en la cual relaciona los datos suministrados en el problema y así poder aplicar los métodos de solución de la siguiente manera:

Donde n representa la cantidad de personas

$$\frac{n(n-1)}{2} = 15$$

$$\frac{2.n\,(n-1)}{2} = 15\,.\,2$$

$$n\,.\,(n-1\,) = 30$$

$$n^2\; - n = 30$$

$$n^2\; - n - 30 = 0$$

Para solucionar esta expresión final el resolutor deberá aplicar las heurísticas específicas para resolver una ecuación de segundo grado de la siguiente manera:

Heurística N° 5: Factorización

Caso de factorización de la forma $ax^2 \pm bx\; \pm c = 0$ donde $a = 1$

Al solucionar la ecuación utilizando este método se obtiene lo siguiente

$$n^2\; - n - 30 = 0$$

$(n + 5)(n\; - 6) = 0$ Por la propiedad del producto nulo

$$(n + 5) = 0 \quad o \quad (n\; - 6) = 0$$

Luego las soluciones para la ecuación serian $n\; = \; -5\, y\, n\; = \; 6$ pero son personas por lo tanto la solución no admite valores negativos es decir que la respuesta correcta sería $n\; = \; 6$

Heurística N° 6: Uso de la ecuación general

Otra de los métodos que el resolutor puede utilizar es aplicar la ecuación general

$Donde\ a = 1, b = -1, c = -30$, n= catidad de peronas

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-30)}}{2(1)}$$

Al resolutor calcular las operaciones necesarias llegara a las soluciones de la ecuación $n = -5\ y\ n = 6$ pero como son personas en la reunión la respuesta correcta seria $n = 6$

Problema no rutinario C: Escaleras

Las siguientes escaleras de 3 y 4 pisos están formadas por 6 y 10 ladrillos respectivamente. ¿Cuántos ladrillos utilizaran una escalera de 6 pisos? ¿Y de 10 pisos? ¿Y de 50 pisos? tomado de *100 problemas matemáticos* de (Bernaubeu, 2016)(p 32)

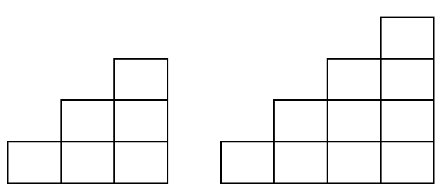

Figura 3: escaleras de 3 y 4 pisos

A continuación se presentaran las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario C

Heurística N° 1: Resolver un problema más sencillo

El resolutor puede relacionar el problema no rutinario con otra más sencilla de aplicar como por ejemplo empezar con menos pisos, como se puede evidenciar en la heurística N°2

Heurística N° 2 hacer uso de un gráfico

En esta heurística el resolutor puede evidenciar por medio de un dibujo se llega a la solución del problema no rutinario.

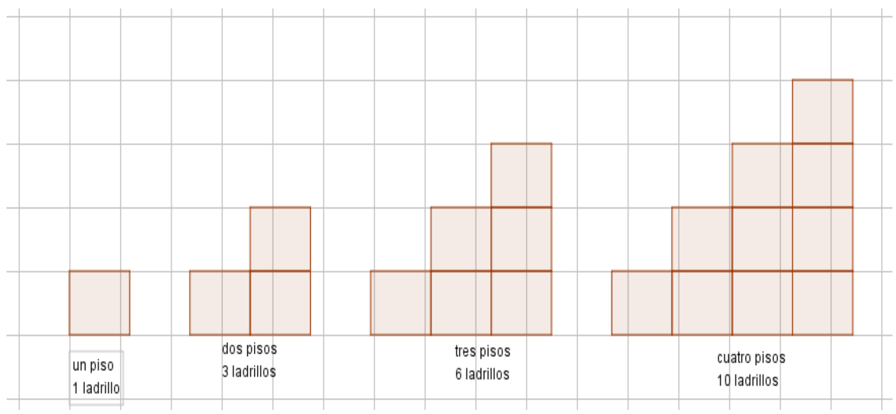

Figura 4: escaleras

Heurística N° 3: Construcción de una tabla

Realizar una tabla con los datos encontrados en la gráfica, donde se espera poder iniciar los procesos de generalización, es decir, encontrar el patrón que rige la solución.

Pisos	***Ladrillos***
1	*1*
2	*3*
3	*6*
4	*10*
5	*15*

Heurística N° 4: Generalización

Se observa de la tabla que a medida que aumenta el número de pisos así mismo aumenta el número de ladrillos necesarios para la construcción, se evidencia que el patrón que rige es que para determinar el número de ladrillos requeridos se debe sumar el número del piso siguiente con la cantidad anterior necesaria de ladrillo para el piso $n-1$.

Se espera que el resolutor realice los siguientes razonamientos:

- La cantidad de ladrillos está relacionada con el número del piso.

- La cantidad se obtiene al sumar el número de ladrillos del piso anterior con el piso que se desea encontrar es decir, $n+1$
- Luego se debe dividir por dos para no repetir cantidades

La fórmula general del patrón es $\frac{n(n-1)}{2}$, con esta se puede generalizar la solución permitiendo así calcular la cantidad necesaria para cualquier piso.

A continuación se presentaran las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario C

Heurística N° 5: Factorización

Caso de factorización de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ donde $a = 1$

Solucionar la ecuación utilizando este método.

Para cuando son 6 pisos

Entonces necesario indicar que n = cantidad de personas

$$\frac{n(n-1)}{2} = 6$$

$$\frac{2.n\,(n-1)}{2} = 6\,.\,2$$

$$n\,.\,(n-1\,) = 12$$

$$n^2 - n = 12$$

$$n^2 - n - 12 = 0$$

$$(n+3)(n-4) = 0$$

$$(n+3) = 0 \quad o \quad (n-4) = 0$$

Luego las soluciones a la ecuación serian $n = -3$ y $n = 4$ pero como son personas en la reunión la respuesta correcta seria $n = 4$

Heurística N° 6: Uso de la ecuación general

Otra de los métodos que el resolutor puede utilizar es aplicar la ecuación general

$$Donde\ a = 1, b = -1, c = -12$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

Al resolutor calcular las operaciones necesarias llegara a las soluciones de la ecuación $n = -3\ y\ n = 4$ pero como son pisos la respuesta correcta seria $n = 4$

Ahora resolvemos las otras dos preguntas es decir para cuando: Sean 10 pisos.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 10$$

$$\frac{2. n\ (n-1)}{2} = 10 . 2$$

$$n . (n - 1) = 20$$

$$n^2 - n = 20$$

$$n^2 - n - 20 = 0$$

$$(n + 4)(n - 5) = 0$$

$$(n + 4) = 0 \quad o \quad (n - 5) = 0$$

Luego las soluciones a la ecuación serian $n = -4\ y\ n = 5$ pero como son pisos la respuesta correcta seria $n = 5$

A continuación la misma heurística para el caso de 10 pisos

Heurística N° 6: Uso de la ecuación general

Otra de los métodos que el resolutor puede utilizar es aplicar la ecuación general

$$Donde\ a = 1\,, b = -1\,, c = -20$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-20)}}{2(1)}$$

Al resolutor calcular las operaciones necesarias llegara a las soluciones de la ecuación $n = -4\ y\ n = 5$ pero como son pisos la respuesta correcta seria $n = 5$

Ahora para cuando sean 50 pisos

$$\frac{n(n-1)}{2} = 50$$

$$\frac{2.n\ (n-1)}{2} = 50\,.\,2$$

$$n\,.(n-1\,) = 100$$

$$n^2\ - n = 100$$

$$n^2\ - n - 100 = 0$$

Utilizando la **heurística N° 6: uso de la ecuación general** se tiene que**:**

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-100)}}{2(1)}$$

Donde las soluciones serian $n = 10.51$ y $n = -9.51$ sin embargo estas soluciones no dan solución al problema ya que no es posible contar fracciones de un piso.

Problema no rutinario D

Un grupo de jóvenes decide pagar por partes iguales el arriendo de $14.000 de un bote. A última hora, tres de los jóvenes se arrepintieron, con lo cual la cuota de cada uno de los restantes jóvenes subió en $1.500.

a) ¿Cuántos jóvenes había en el grupo original?

(b) ¿Cuánto pagó cada uno de los jóvenes del grupo final?

Tomado de (Arya ,y Lardnery, 2009)(p.86.)

A continuación se presentaran las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario D

Para la solución de este problema es necesario recurrir a la regla de 3 simple para realizar una equivalencia utilizando los datos suministrados. De la siguiente manera:

Heurística N° 4: Generalización

El resolutor deberá primero plantear una ecuación donde se relaciona la cantidad de dinero que deben pagar cada uno de los jóvenes con el número de personas que arriendan, es decir:

Se definen las variables

n= catidad de personas

x = valor que paga cada uno

$$\frac{14000}{n} = x$$

Con la otra parte de la información se plantea la siguiente ecuación donde se relacionan los jóvenes que se retiran y el incremento que se debe hacer con los que aún queda para realizar el arriendo.

$$\frac{14000}{n-3} + 1500 = x$$

Se igualan las dos ecuaciones

$$\frac{14000}{n} = \frac{14000}{n-3} + 1500$$

$$\frac{14000}{n} = \frac{14000 \ + (n-3).1500}{n-3}$$

$$\frac{14000}{n} = \frac{14000 + 1500n - 4500}{n-3}$$

$$14000.(\,n-3\,) = 14000n + 1500n^2 - 4500n$$

$$14000n - 42000 = 14000n + 1500n^2 - 4500n$$

$$0 = 1500n^2 - 4500n + 42000$$

Dividimos la ecuación por 1500

$$0 = n^2 - 3n + 28$$

La ecuación de segundo grado que nos resultó se puede resolver por medio de las heurísticas N°5 y N°6 dando como solución $n = 7$ y $n = -4$ pero como estamos hablando de personas la respuesta correcta seria $n = 7$ para el del grupo y para el pago seria 3500 de cada uno.

Problema no rutinario E

Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye a partir de una pieza cuadrada de metal cortando cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Encuentre las dimensiones de la hoja metálica, si el volumen de la caja será de 50 pulgadas cúbicas. Tomado de (Arya ,y Lardnery, 2009) *p.86*

A continuación se presentaran las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución de la problema no rutinario E

Heurística N° 1: hacer uso de un gráfico

En esta heurística el resolutor puede relacionar los datos con una Figura para de esta forma comprender el problema, es importante mencionar que la heurística no permite dar una solución concreta.

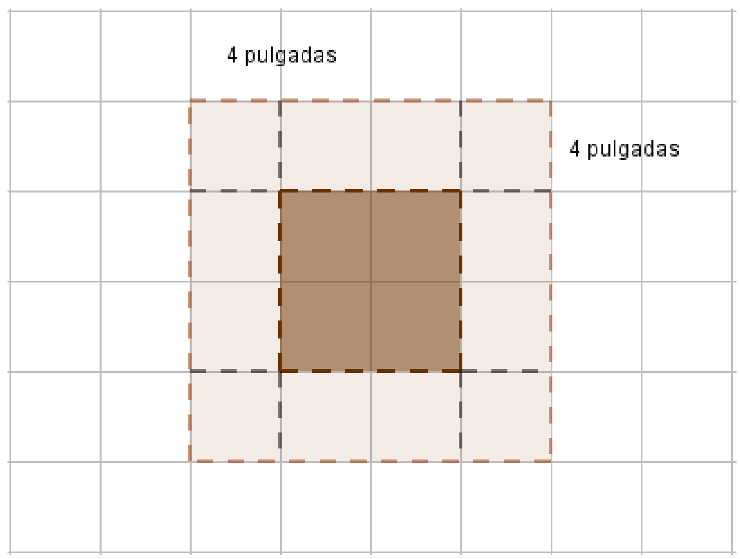

Figura 5 lámina cuadrada

A continuación se presentaran las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario E

Heurística N° 4: Generalización

El resolutor observa en la gráfica la relación que existe entre el enunciado y su representación geométrica, lo cual le será útil para poder plantear una expresión matemática que le puede conducir a la solución, sin embargo deber tener entre sus recursos el concepto de volumen para de esta forma pensar en la siguiente ecuación:

$$(n-8)(n\ -8).4=50$$

A continuación se presentaran las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario E

$$(n^2\ -16n+64).4=50$$

$$4n^2\ -64n+256=50$$

$$4n^2\ -32n+256-50=50-50$$

$$4n^2\ -32n+216=0$$

$$\frac{1}{4}(4n^2\ -32n+216)=0$$

$$n^2\ -8n+64=0$$

La solución de este caso particular no se contempla ya que arroja $n=\frac{8+\sqrt{-192}}{2}$ y $n=\frac{8-\sqrt{-192}}{2}$ y son soluciones complejas que no se tendrán en cuenta para el presente trabajo de grado.

Problema no rutinario F

Determine dos números cuya suma sea 15 y la suma de sus cuadrados sea 137. Tomado de (Arya ,y Lardnery, 2009), (p.86)

A continuación se presentaran las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario F

Heurística N° 3: Construcción de una tabla

Realizar una tabla con los datos encontrados en el enunciado, donde se espera poder iniciar los procesos de generalización, es decir, encontrar el patrón que rige la solución.

X	*Y*	*X + Y*	*$X^2 + Y^2$*
1	*14*	*15*	*196*
2	*13*	*15*	*173*
3	*12*	*15*	*153*
4	*11*	*15*	*137*

Heurística N° 4: Generalización

Generalizar el este problemas implica que el resolutor comprenda que la estrategia que le permitirá dar solución implica construir un sistema de 2x2 en donde se involucre dos ecuaciones y dos incógnitas, para esto deberá dos ecuaciones una de segundo grado y la otra ecuación será una lineal:

Ecuación de segundo grado la información donde se menciona que la suma de sus cuadrados es 137 es decir:

$$h = x^2 + y^2$$

Donde h, x, y representan números reales con $h = 137$

Por otro lado en la ecuación lineal se relaciona que la suma de dos números es 15 es decir: $x + y = 15$

A continuación se presentaran las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario F

Al aplicar el método de sustitución para encontrar la solución del sistema

$$x + y = 15$$

$$-x + x + y = -x + 15$$

$$y = -x + 15$$

Se reemplaza en la ecuación pitagórica los valores de h y y

$$137 = x^2 + (-x + 15)^2$$

$$137 = x^2 + x^2 - 30x + 225$$

$$0 = 2x^2 - 30x + 225 - 137$$

$$0 = 2x^2 - 30x + 88$$

Se divide la ecuación por 2 entonces se tendría:

$$0 = x^2 - 15x + 44$$

Sin embargo para solucionar esta ecuación de segundo grado se debe recurrir a otras heurísticas que forman parte de las específicas como se observa a continuación:

Heurísticas N° 5: Factorización

Caso de factorización de la forma $ax^2 \pm bx + c = 0$ donde $a = 1$

$$(n-4)(n-11) = 0$$
$$(n-4) = 0 \quad o \quad (n-11) = 0$$

Luego las soluciones a la ecuación serian $n = 4 \, y \, n = 11$

Heurística N° 6: Uso de la ecuación general

Otra de los métodos que el resolutor puede utilizar es aplicar la ecuación general

$$Donde\ a = 1 \,, b = -15 \,, c = 44$$

$$n = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(44)}}{2(1)}$$

Al resolutor calcular las operaciones necesarias llegara a las soluciones de la ecuación $n = 4 \, y \, n = 11$

Problema no rutinario G

La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 13 centímetros. Determine los otros dos lados del triángulo, si su suma es 17 centímetros. Tomado de *matemáticas aplicadas a la administración y la economía* de (Arya ,y Lardnery, 2009), (p.86)

A continuación se presentaran las heurísticas generales que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario G

Heurística N° 1: Hacer uso de un gráfico

Con esta heurística el resolutor puede comprender y modelar el problema no rutinario, sin embargo no le presenta solución ya que solo evidencia la relación con los datos y el diagrama.

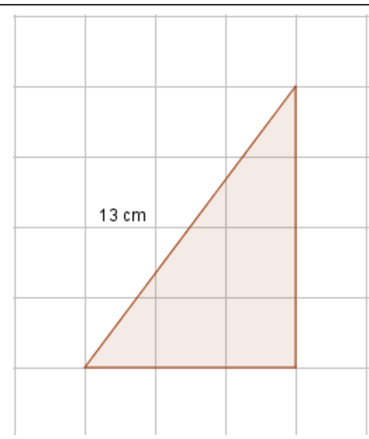

Figura 6 triangulo

Heurística N° 3: Construcción de una tabla

Para aplicar esta heurística el resolutor deberá comprender que es por medio del teorema de Pitágoras que podrá encontrar las soluciones ya que esta situación es muy similar a la problema no rutinario N° D

x	y	$x+ y$	$x^2 + y^2$
1	16	17	256
2	15	17	229
3	14	17	205
4	13	17	185

Heurística N° 4: Generalización

El resolutor deberá poder contar entre sus recursos con el teorema de Pitágoras ya que en la solución de triángulos es una heurística muy frecuente, y tomando como base esta estrategia podrá construir un sistema de 2x2 que le permita relacionar la información.

En la ecuación de segundo grado se relaciona el teorema de pitadoras con la longitud de la hipotenusa es decir que:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

Donde $h = 13$ y su cuadrado seria $h^2 = 169$

Por otro lado en la ecuación lineal se relaciona que la suma de sus lados es 17 centímetros es decir $x + y = 17$ al aplicando el método de sustitución para encontrar la solución del sistema

$$x + y = 17$$

$$-x + x + y = -x + 17$$

$$y = -x + 17$$

Se reemplaza en la ecuación pitagórica los valores de h^2 y y

$$169 = x^2 + (-x + 17)^2$$

$$169 = x^2 + x^2 - 34x + 289$$

$$0 = 2x^2 - 34x + 289 - 169$$

$$0 = 2x^2 - 34x + 120$$

Se divide la ecuación por 2 entonces se tendría:

$$0 = x^2 - 17x + 60$$

A continuación se presentaran las heurísticas específicas que posiblemente sean usadas en la resolución del problema no rutinario G

Para solucionar esta ecuación de segundo grado se debe recurrir a las heurísticas específicas que pueden ser:

Heurísticas N° 5: Factorización

Caso de factorización de la forma $ax^2 \pm bx + c = 0$ donde $a = 1$

$$(n - 5)(n - 12) = 0$$

$$(n - 5) = 0 \quad o \quad (n - 12) = 0$$

Luego las soluciones a la ecuación serian $n = 5 \; y \; n = 12$

Heurística N° 6: uso de la ecuación general

Otra de los métodos que el resolutor puede utilizar es aplicar la ecuación general

$$Donde\ a = 1, b = -12, c = 60$$

$$n = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(60)}}{2(1)}$$

Al resolutor calcular las operaciones necesarias llegara a las soluciones de la ecuación $n = 5\ \ y\, n = 12$

A continuación se presentara la descripción de la población.

3.3 Contextualización de la población

Con el fin de poder reconocer y diferenciar las heurísticas se tiene en cuenta que los participantes tengan de alguna manera la influencia de la resolución de problemas, para esto se utiliza como criterio de selección en los profesores en formación del programa académico Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, y que adicional a esto cuenten con la aprobación del curso de resolución de problemas dictado como asignatura en la Universidad en mención. En cuanto a los estudiantes estos pertenecen al Colegio Mayor Santiago de Cali, el cual es de caracter privado y hace parte de la fundación Urdaneta situado en el estrato 3, además su población estudiantil es de aproximadamente 365 estudiantes repartidos en los grado primero de primaria a grado once de la Educación Media, los participantes son 33 estudiantes que están cursando grado 10° en el año (2016 – 2017) del calendario B, los cuales cuentan con docentes formados en el programa académico mencionado de la Universidad del Valle. Además, asisten al curso de Matemáticas el cual es una asignatura obligatoria del colegio por lo tanto la asistencia fue masiva, sin embargo los horarios en los que se realizó la práctica fue extracurricular como un requisito para poder hacer la práctica en los días martes y jueves de 3:00pm a 5:00pm.

Los otros participantes de la práctica son los profesores en formación en Educación Matemática que se encuentran cursando el Trabajo de grado II en el semestre febrero – junio del año 2017, se toma como referencia una población de 5 profesores con el fin de facilitar el análisis ya que se espera poder evidenciar dos aspectos, el primero es la repetición de los procesos con los cuales estos aprendieron, el segundo aspecto es observar si estos por contar con una formación en la disciplina poseen un mayor cumulo de heurísticas. La práctica con los profesores se realizó de forma individual en diversos horarios según la disponibilidad de tiempo de cada uno.

En términos generales los participantes cuentan con los conocimientos necesarios para el desarrollo de las situaciones problemas, en este caso son las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real.

3.4 Forma de aplicación de los problemas no rutinarios

Para llevar a cabo la práctica los participantes contaron con el material impreso donde se recogen diversos problemas que se caracterizan por pertenecer a los problemas no rutinarios, para de esta manera garantizar que los estudiantes exploren y reconozcan la importancia del uso de heurísticas generales y especificas propias de cada concepto matemática, lo cual para fines del presente trabajo de grado son las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real.

La modalidad de la práctica fue el trabajo de forma individual para los profesores en formación y en pequeños grupos de dos o individualmente para los estudiantes de grado 10° de la Educación Media con el fin de propiciar un ambiente en el que se permitió un espacio para el debate de las heurísticas generales y específicas, es decir, se busca que en el caso de los estudiantes estos puedan contribuir en los procesos de resolución para así poder disipar dudas y corroborar los resultados encontrados además de las heurísticas desarrolladas ya que estos son observadores del proceso de resolución desarrollado por sus compañeros.

En general se debe destacar que el presente trabajo tiene como interés en la resolución de problemas es diferenciar de las heurísticas utilizadas por los profesores en formación y los estudiantes de la Educación Media con el fin de propiciar una reflexión sobre la importancia que existe en involucrar las heurísticas específicas en los procesos de enseñanza, ya que estas permiten desarrollar algunas competencias en los estudiantes y así permiten abordar el concepto desde diversas aplicaciones lo que trae como consecuencia que el aprendizaje se realice de manera significativa.

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de los problemas no rutinarios se lleva a cabo teniendo en cuenta la interpretación de las estrategias desarrolladas por los estudiantes y profesores en formación, ya que el principal interés del trabajo de grado está centrado en evidenciar y diferenciar las heurísticas empleadas por los resolutores. Además también se dará cuenta de algunas dificultades presentes desde Kieran y Filloy (1989) en el manejo de las ecuaciones que para fines de este trabajo serán las de segundo grado con una incógnita real.

Problema no rutinario A

En la solución del problemas se observó que un grupo 5 de estudiantes que intentan relacionar una variable y simbología algebraica con una estrategia es decir, utilizan letras del alfabeto para construir un diagrama que le permita solucionar la primera parte del problema donde se pide calcular cuántos apretones se darían si fueran 20 personas las que asistieron a la reunión sin embargo no se logra plantear una estrategia clara.

Por otro lado se evidencia que la mayor cantidad de los estudiantes recurren al uso de la heurística N°1 es decir, llegan a la solución partiendo de los casos más sencillos comenzando por el caso cuando hay dos personas, luego con tres personas y así sucesivamente hasta llegar a 6 personas que donde llega a la solución.

Por otro lado 7 de los estudiantes resuelven el problema por medio de una suma progresiva de números, que se inicia en 1 y va hasta el 19 de la siguiente manera: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19,$ sin embargo, cabe resaltar que el método utilizado no da cuenta de cómo se realizó el razonamiento heurístico que le permite plantear esta estrategia, esto se puede observar en la figura N°7.

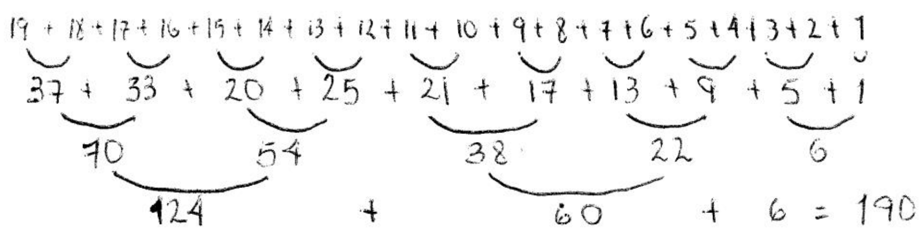

Figura 7 solución del problema A proporcionada por los estudiantes

De la anterior figura se concluye que, los estudiantes lograron dar solución exitosa a la problema no rutinario A empleando la heurística N°1, sin embargo, no se puede identificar las etapas del modelo de resolución de problemas y sobretodo no existe un visión retrospectiva que permita corroborar que la respuesta encontrada es la correcta, además otro aspecto que se puede señalar es la falta de asociación de métodos para simbolizar lo que según Kieran y Filloy (1989), y por último se puede mencionar que los estudiantes no desarrollan o usan heurísticas especificas en la solución lo cual se puede deber a las dificultades mencionadas anteriormente ya que no es claro por qué sumaron los números del 19 al 1.

Ya para terminar se presentó el caso donde 5 estudiantes no intentaron dar respuesta al problema, lo cual puede estar relacionado con la falta de interés como lo indico Santos (2007) o que no lograron comprender el problema según las fases de Polya (1981).

Ahora, en el caso de los profesores en formación se observó que todos recurren al uso de las heurísticas N° 1 y N°4 con el fin de plantearla y generalizar del patrón, el cual usan para corroborar la solución encontrada esto se puede inferir como la fase IV de Polya (1981) sobre la visión retrospectiva. Esto se observa en la figura N°8

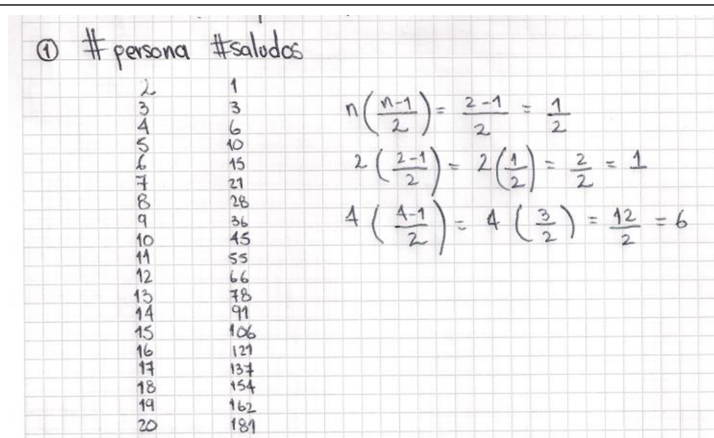

Figura 8 solución del problema A proporcionada por los profesores

Otro aspecto que se puede señalar es el uno de la heurística N° 3 al realizar una tabla con el fin de ir generando las soluciones, aunque cabe resaltar que no se evidencia se seguimiento o implementación de un modelo de resolución como el expuesto por Polya

(1981), además, otro de los puntos a señalar el uso de la heuristica N°4 como un recurso lo cual es señalado por Shoenfield (1985) como una de las fases de su modelo.

En la segunda parte del problema no rutinario A, se pedía a los resolutores encontrar la cantidad de apretones para n personas. En esta etapa se abría el espacio la utilización de las heurísticas específicas, es decir, encontrar un patrón que permita generalizalor arrojando los siguientes resultados, en los estudiantes se evidencia una nueva heurística la cual es el uso del factorial, además se empieza a construir ecuaciones que aún no son de segundo grado como por ejemplo $\frac{n!}{(n-2)!\,.2!}$, $\frac{n}{(n-2\,)\,.2}$ sin embargo, ningún participante logra encontrar la generalización de la situación de tal manera que fuera la correcta lo cual se puede deber a las dificultades señaladas por Kieran y Filloy (1989) como: dificultad en los métodos de simbolizar, o en el uso de variables, además, tampoco hay uso de la fase IV de Polya (1981) de la visión retrospectiva para corroborar los resultados encontrados como se evidencia en la siguiente figura N°9

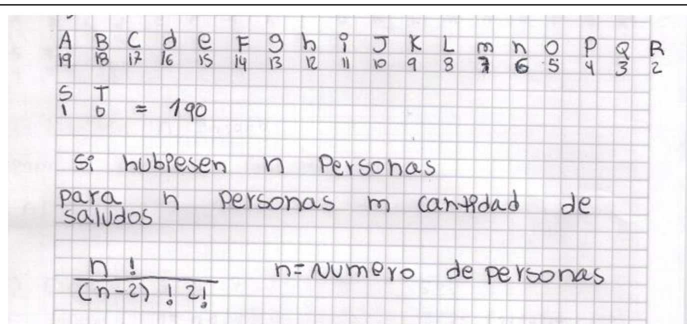

Figura 9 solución del problema A proporcionada por los estudiantes

De esta figura se puede concluir que los resolutores utilizan variables es decir, el uso de letras pero con la dificultad de hacerlo únicamente como una etiqueta que solo proporciona la referencia de individuos en la solución del problema aunque en otro apartado de misma figura se evidencia que la toman como una variable propia de una expresión matemática, sin embargo se encuentra dificultad en los métodos para simbolizar de Kieran y Filloy (1989), ya que se forma errada la generalización de la heurística N° 4 aunque, otro de los aspectos a resaltar es que aquellos estudiantes que llegaron a esta generalización presentan dificultades en la solución. Debido a la asignación de valores diferentes para la misma incógnita es decir, $n = 2$ y $n = 18$ lo que concuerda con lo expuesto por Kieran y Filloy (1989). Como se observa en la figura N°10

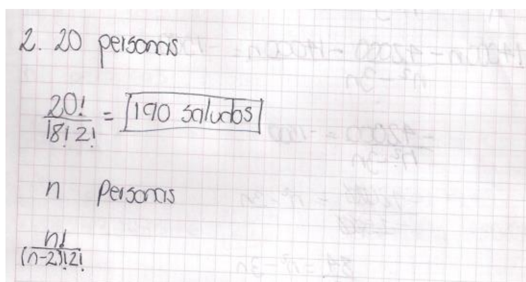

Figura 10 solución del problema A proporcionada por los estudiantes

Ahora en el caso de los profesores en formación se evidencia que relacionan el problema no rutinario con la heurística N°4 además también la utilizan como método para corroborar que el patrón satisface la solución que se pedía cuando eran 20 personas, es decir, que si se evidencia la fase IV de Polya (1981) sobre la visión retrospectiva como se observa en la figura N° 11

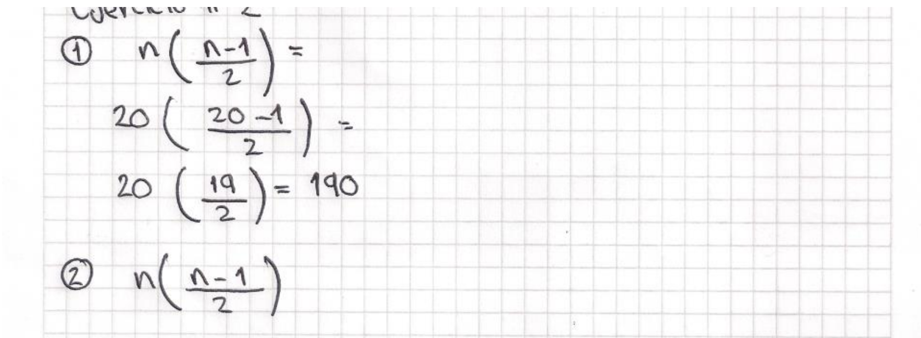

Figura 11 solución del problema A proporcionada por los profesores

Sin embargo como tal poco se puede evidenciar la aplicación de un modelo de resolución como el propuesto por Polya (1981), aunque como es de esperarse no presentan las dificultades que sí estuvieron presentes en los estudiantes.

Problema no rutinario B

Para la implementación de esta situación se le proporciona a los resolutores preguntas que los orientan a casos específicos de la situación anterior, sin embargo, poco se logra relacionar la situación A con la B, en los estudiantes se debe a que ninguno de los estudiantes logra generalizar la situación A y terminan utilizando las heurística general N° 3 para encontrar la respuesta, es decir, que la gran mayoría utiliza los métodos gráficos para dar solución, además también se hace presente la poca utilización de algún método algebraico recurriendo así a la sumatoria de números como se puede evidenciar en la figura N° 12

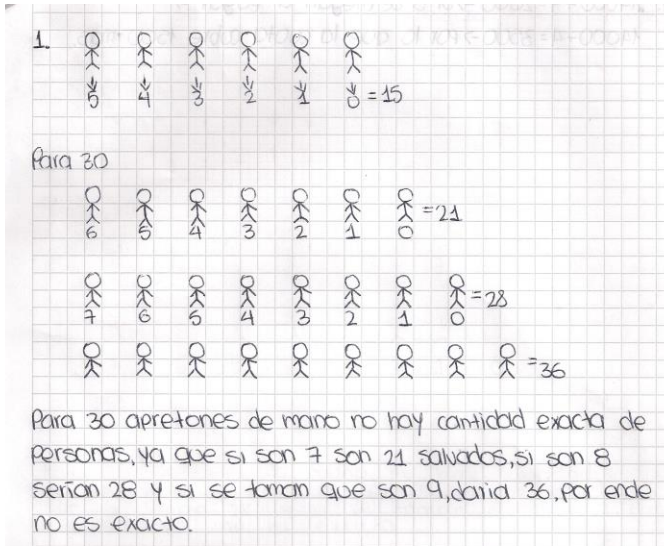

Figura 12 solución del problema B proporcionada por los estudiantes

De la imagen anterior se puede concluir que aún persisten las dificultades en los métodos de simbolizar y en el uso de variables expuestas por Kieran y Filloy (1989), es decir hay un intento por representar el problema por medio de ilustraciones (muñequito) para representar un número aunque es importante resaltar que se utiliza la misma figura para cada número. Otro aspecto a mencionar que la compresión del problema en la fase I es decir encuentra una solución que no hace parte de las posibles respuestas lo cual se asemeja a lo expuesto por Polya (1981). Es decir, los estudiantes encuentran una situación en la cual no hay solución ya que el valor encontrado no es un numero entero, es decir, no es un número exacto para el caso en que se daban 30 apretones de esta respuestas se puede señalar que existe un buen razonamiento sobre el tipo de solución que debería aparecer.

Ahora por otro lado dos de los estudiantes desarrollaron una heurísticas encontradas no contemplada la cual se basa en el uso de las combinatorias, en método consiste en relacionar las personas con letras del alfabeto y adicional a esto se van relacionando entre sí con la condición que se va disminuyendo el uso de letras esto último con el fin de no repetir apretones. Cabe resaltar que estos estudiantes también terminan concluyendo de la misma manera que para el caso de 30 apretones no tiene solución como se evidencia en la figura N°13

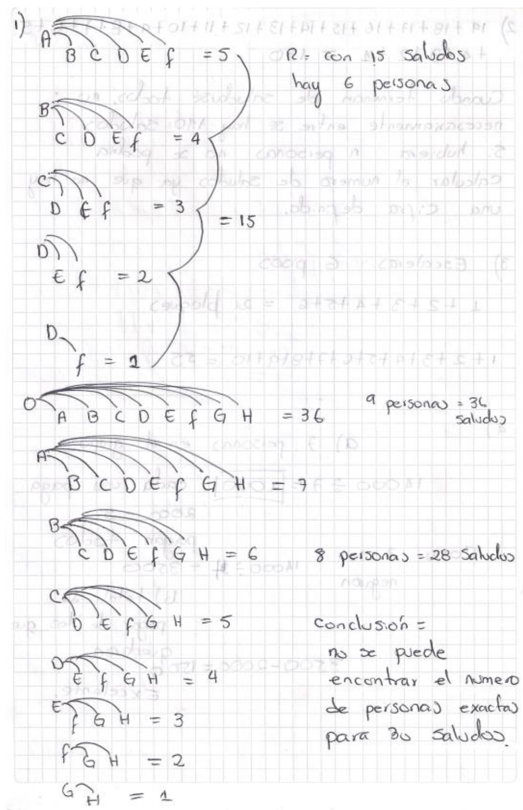

Figura 13 solución del problema B proporcionada por los estudiantes

De la figura anterior se puede concluir que aún persisten las dificultades sobre los métodos para simbolizar y el uso de variables propuestos por Kieran y Filloy (1989). Aunque tiene un recurso en sus conocimientos como lo es la combinatoria la cual usan como estrategia de solución, esta respuesta se asemeja a lo expuesto por Shoenfield (1985) en cuanto a los recursos y sus sistemas de creencias.

Otra de las heurísticas empleadas por los estudiantes es la comprensión y la relación que existe entre el problema no rutinario A y la B ya que este utiliza la generalización como medio para dar solución, sin embargo, como no logró encontrar de forma correcta termina dando una respuesta incorrecta, además, se puede observar la dificulta en el uso de la variable ya que se le asina una etiqueta como lo menciona Kieran y Filloy (1989) es decir poco se comprende el significado de esta variable ya que diferentes valores en la misma situación eso se puede deber a que primero se pensó en la respuesta y por ende no se concibe un plan adecuado para proporcionar la solución como se puede observar en la figura N° 14

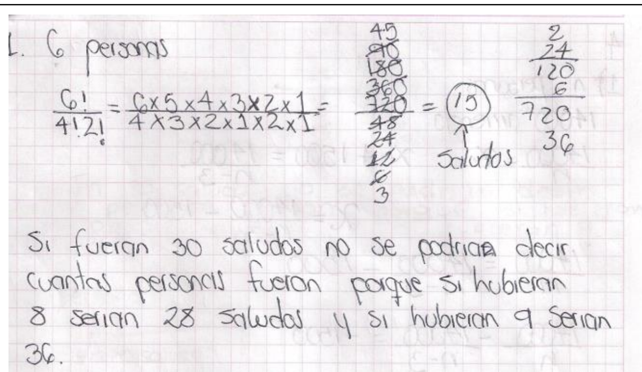

Figura 14 solución del problema B proporcionada por los estudiantes

De la figura anterior se concluye que las dificultades expuestas por Kieran y Filloy (1989) siguen presentes, además poco se puede evidenciar un modelo de resolución o el uso de las heurísticas propuestas por Polya (1981), es decir, que se esta utilizando una estrategia errada lo cual se puede deber a la fase I del modelo ya que no se comprende lo que se estaba buscando, sin embargo, en la solución de 30 saludos lo relacionan con hechos reales y terminan concluyendo que no tine solución para llegar a este razonamiento se utiliza la simplificación de fracciones con la intención de llegar al número 30 el cual relacionan con el problema.

Por otro lado los profesores en formación aunque logran generalizar la expresión, presentan algunas dificultades, en un comienzo acerca de cómo resolver y encontrar el valor de una incógnita esto es debido a que recurren a una heurística de factor común la cual no estaba contemplada y además resulta ser incorrecta para este caso, sin embargo si es importante resaltar que estos si recurren a las heurísticas específicas como la N°6 uso de la ecuación general, aunque en el proceso terminan por descartar esta heurística y recuren a la N° 5 Factorización para dar solución como se evidencia en la figura N° 15

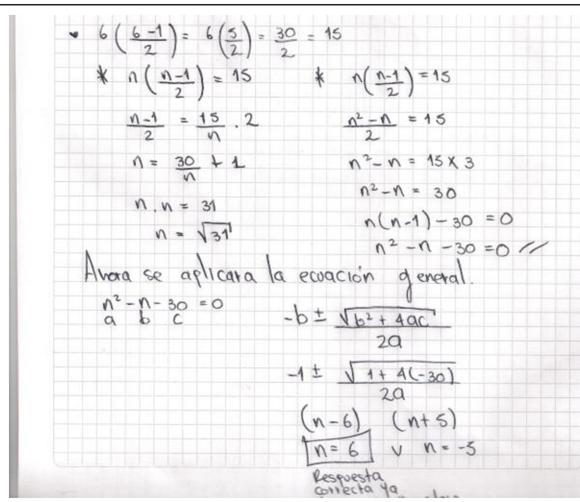

Figura 15 solución del problema B proporcionada por los profesores

De la figura anterior se concluye que la heurística N°4 y el factor común hace parte de los recursos con los que cuentan los profesores a la hora de abordar ecuaciones de segundo grado lo cual nos referencia a lo expuesto por Shoenfield (1989).

Problema no rutinario C

La aplicación de este problema tenía como propósito que los resolutores lograran relacionar con el anterior con el fin de poder encontrar alguna relación existente en las heurísticas, sin embargo, son las generales las que predomina en los estudiantes, ya que una vez más se recurre a la heurística N°1 para ir construyendo las solución es la sumatoria de números la estrategia más frecuente para dar solución, es decir, que se parte de resolver un problema simple hasta llegar a la situación esperada. Como se evidencio en la figura N° 16.

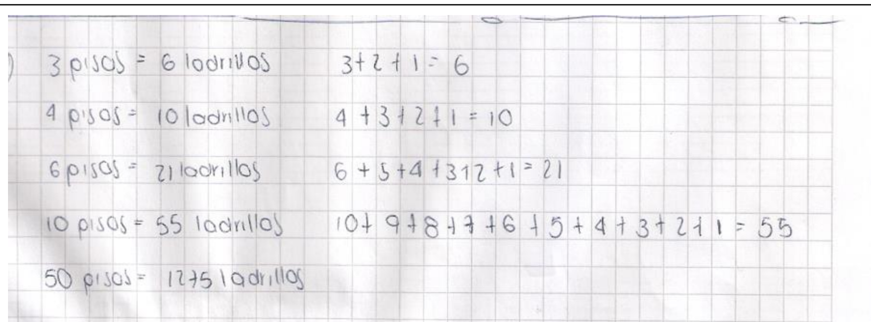

Figura 16 solución del problema C proporcionada por los estudiantes

De la figura anterior se puede concluir que en este problema se esperaba que el resolutor encuentre el patrón partiendo de las heurísticas generales como lo son el uso de un diagrama la cual hace referencia a la heurística N°1 (resolver un problemas más simple) y N°2 (hacer un gráfico), que en este caso es realizar el diagrama para posteriormente ir agregando casos más sencillos hasta llegar a la solución, sin embargo existe dificultad para formalizar métodos de simbolizar Kieran y Filoy (1989).

Otro de los resolutores en el mismo problema no rutinario empleo el uso de la heurística N°4 generalización, sin embargo, se nombra de diferente forma la misma incógnita, es decir que presentan dificultades en los métodos para simbolizar y al uso de las variables Kieran y Filloy (1989). Como se evidencia en la siguiente expresión tomada de la figura N°17:

$$\frac{1 + ultimo\ digito}{2}\ .numero\ de\ digitos$$

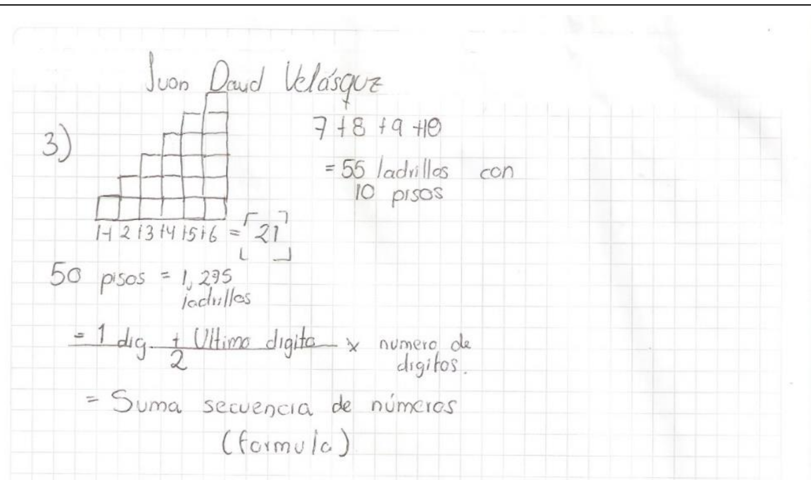

Figura 17 solución del problema C proporcionada por los estudiantes

Cabe resaltar que aunque están presentes las dificultades expuestas por Kieran y Filloy (1989), los resolutores nombran de diferente forma para la misma incógnita terminan asignándole el mismo valor en la misma etiqueta al remplazar en la heurística N°4 determinando así de forma más rápida la solución del problema no rutinario como se puede observar en la siguiente figura N° 18

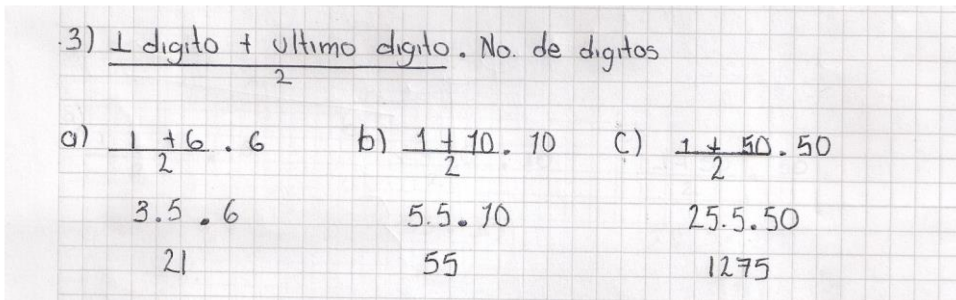

Figura 18 solución del problema C proporcionada por los estudiantes

Otros de los resolutores fueron los profesores en formación y en ellos se puede observar dos situaciones, la primera es que 3 de ellos recurren a la heurística N°1 al igual que los estudiantes, es decir, que parten de resolver problemas más sencillos y los van sumando hasta llegar a la respuesta es decir que recurren a la misma estrategia que los estudiantes sin embargo no presentan la misma resistencia al uso de las ecuaciones, a emplear métodos de simbolizar y al uso de variables es decir que poco presentan las dificultades expuestas por Kieran y Filloy (1989), esto puede deberse a las creencias y los recursos expuestos en el modelo de Shoenfied (1985), es decir que los profesores en su formación adquirieron estrategias que les permite ir un poco más allá de las heurísticas generales. Sin embargo poco se evidencia un modelo de resolución que predomine. En la segunda situación se evidenció que dos profesores terminan empleando la heurística general N°4 para dar solución pero existe la resistencia al empleo de heurísticas específicas. Como se observa en la figura N° 19

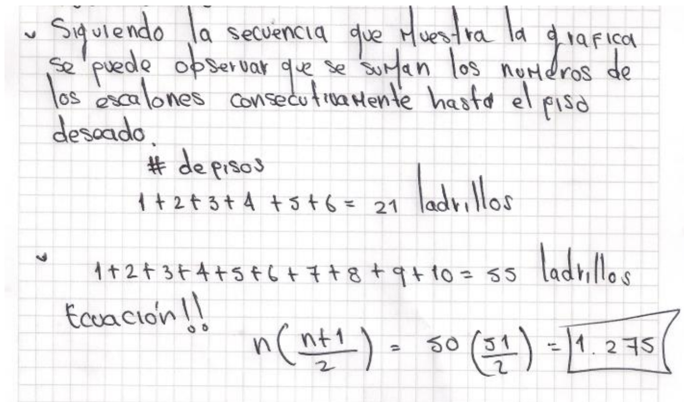

Figura 19 solución del problema C proporcionada por los profesores

Problema no rutinario D

En este problema se evidenció que poco permitió la exploración de heurísticas generales ya que el problema no rutinario requería más de un manejo algebraico para dar solución arrojando como resultado que poco aparecieran las heurísticas generales y si más las específicas.

Sin embargo, en algunos resolutores la estrategia utilizada fue más por tanteo realizando un razonamiento se da evidencia de la fase I del modelo de Polya (1981). Es decir que los resolutores logra comprender el problema y con base en eso desarrollar la siguiente estrategia:

En primera instancia encontraron los divisores de 14000 y posteriormente exploraron esos números para determinar la cantidad de personas que se reunieron para pagar el alquiler del bote como se evidencia en la figura N° 20.

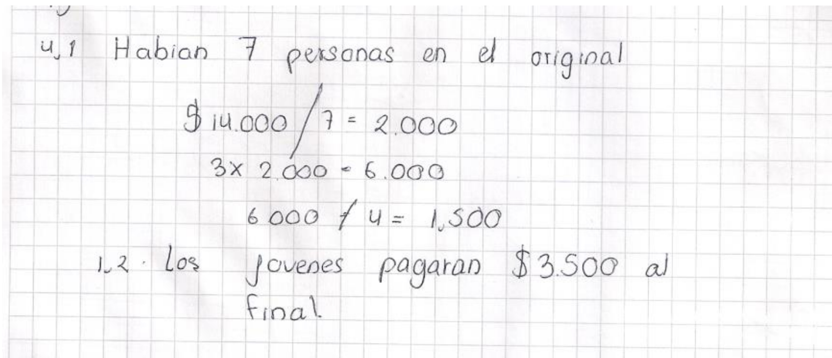

Figura 20 solución del problema D proporcionada por los estudiantes

De esta figura se puede concluir que los estudiantes logran concebir un plan y posteriormente lo ejecutan, sin embargo no hay visión retrospectiva y hay resistencia al uso de métodos para simbolizar es decir, siguen dejando de lado el uso del pensamiento algebraico y el uso de ecuaciones como parte de la respuesta.

Sin embargo se resalta que este es un problema no rutinario en el que un estudiante logro construir la ecuación de segundo grado con una incógnita real valiéndose del uso de la regla de 3 como parte del proceso en este punto se podría concluir que el modelo de Shoenfield (1985) está presente en cuanto a los recursos y los sistemas de creencias. Otro aspecto a resaltar es el uso de las heurísticas específicas N°5 (factorización) para hallar la solución de la ecuación de segundo grado es importante resaltar que este resolutor es el único que logra desarrollar e implementar estas heurísticas por encima de los profesores en formación como podemos observar en la figura N° 21.

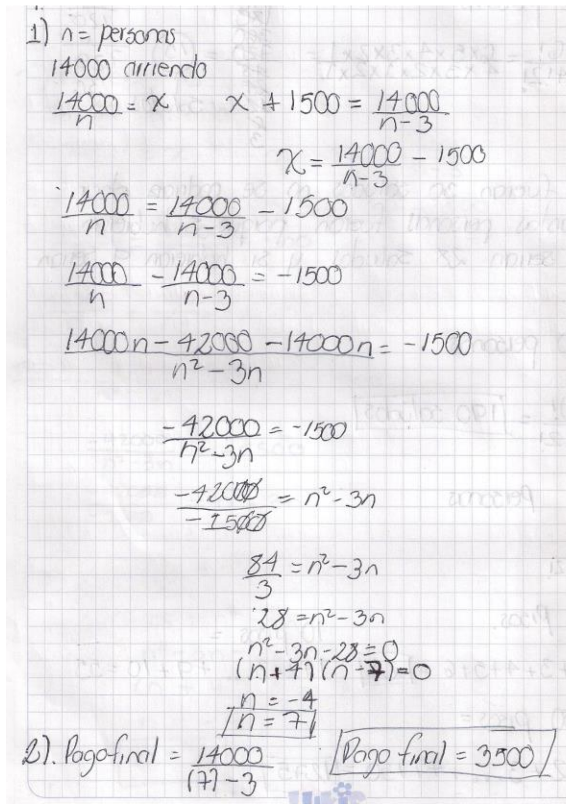

Figura 21 solución del problema D proporcionada por los estudiantes

Por otro lado se esperaria que los profesores en formacion cuenten con más heuristicas para la solución de este problema no rutinario, sin embargo se evidencia que presentan dificultades en cuanto al uso de los metodos para simbolizar. en la comprencion del problema del modelo de Polya (1981) y por ende son poco capaces de planterar una expresión correcta en la cual se relacione los datos y la generalización de la heuristica utilizada, por tal razón no son capaces de hallar la solución como se puede observar en la figura N° 22

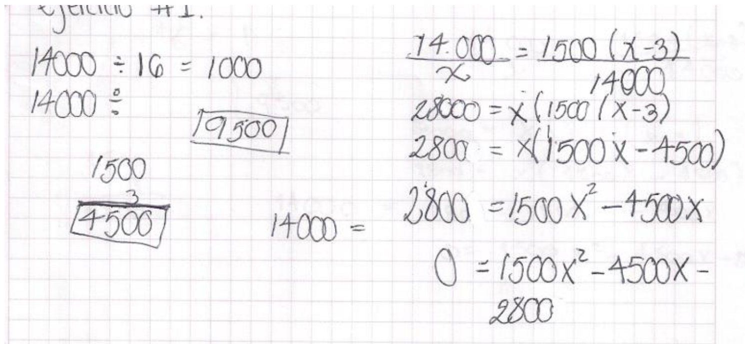

Figura 22 solucion del problema D proporcionada por los profesores

De la figura anterior se puede concluir que la dificultad presente se observa en la equivalencia sé que plantea y se puede deber a la mala comprensión del problema ya que los profesores la plantean de la siguiente forma:

$$\frac{1400}{x} = \frac{1500(x-3)}{14000}$$

En lugar de plantear la expresión:

$$\frac{1400}{x} = \frac{14000}{x-3} - 1500$$

A manera de conclusión se observa que en este caso la dificultad no estuvo presente en la heurística ya que tanto profesores como estudiantes recurren a la misma estrategia específica, sin embargo, se podría pensar que la dificultad obedece más a comprensión del problema y por lo tanto se relaciona con las heurísticas generales las cuales tiene como propósito el entendimiento de la situación.

Problema no rutinario E

En el análisis de este problema no rutinario se observó que los estudiantes recurren a la heurística N°1 resolver un problema más sencillo para tratar de dar solución, puesto que se evidenció el uso de la suma como medio para identificar la medida de los lados de la caja, sin embargo se centran únicamente en la base de la caja sin ser conscientes que solo hacen referencia al área y no al volumen además cabe resaltar que no logran llegar a la heurística N°4 dejando expuesto la dificultad en los métodos para simbolizar y por lo tanto no logran hallar la solución como se observa en la figura N° 23

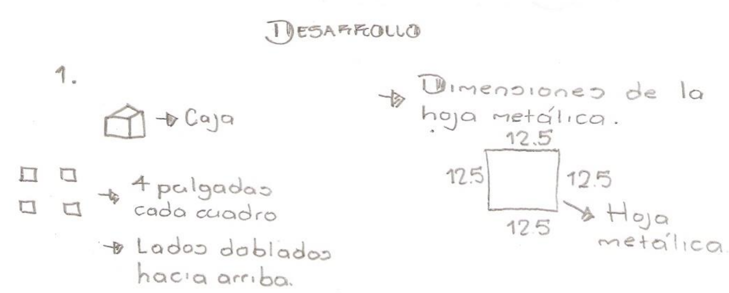

Figura 23 solución del problema E proporcionada por los estudiante)

Por otro lado uno de los resolutores que hace parte de los estudiantes comprende el concepto de volumen, pero se apoya en la heurística N°1 para lograr generar la heurística N°4, sin embargo el uso de estas dos heurísticas y la poca comprensión del problema ocasiona una ecuación de segundo grado incorrecta y por lo tanto no logra hallar la solución como se puede observar en las ilustraciones N° 24 y 25

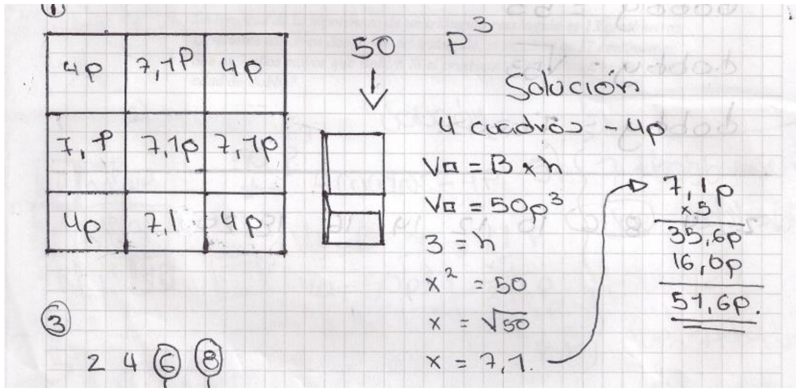

Figura 24 solución del problema E proporcionada por los estudiantes

De la anterior figura se puede concluir que los resolutores asumen que todos las dimensiones de la caja son iguales por el hecho de tener una base cuadrada, además, hay una dificultad en el resolución de las ecuaciones de segundo y tercer grado debido a la equivalencia que se plantea como se observa en la relación extraída de la ilustración: $x^2 = 50$ es decir que se relaciona el área con el volumen como si fueran iguales.

Un aspecto que se resalta en esta figura es el intento por construir una ecuación que se plantea la siguiente: $4\,cuadrados - 4p$ aunque sin un propósito a que no se termina utilizando para nada.

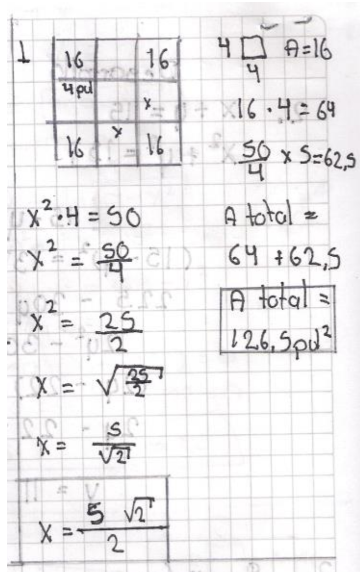

Figura 25 solución del problema E proporcionada por los estudiantes

De la figura se concluye que la mala comprensión del problema conlleva a la mala selección de una heurística útil en la solución, además la falta de la fase IV del modelo de Polya (1981) es un factor que puede terminar si la solución encontrada satisface o no el problema.

Por otro lado en los profesores en formación se observó que recurren a la heurística N°2 para comprender y generalizar el problema no rutinario, se evidencia la construcción de la ecuación de segundo grado sin embargo no recurren a ninguna de las heurísticas específicas para hallar la solución sino que solo se limitan a dar una respuesta sin emplear ninguna de las heurísticas específicas, y al igual que los estudiantes no corroboran si la solución encontrada satisface el problema como se observó en la figura N° 26

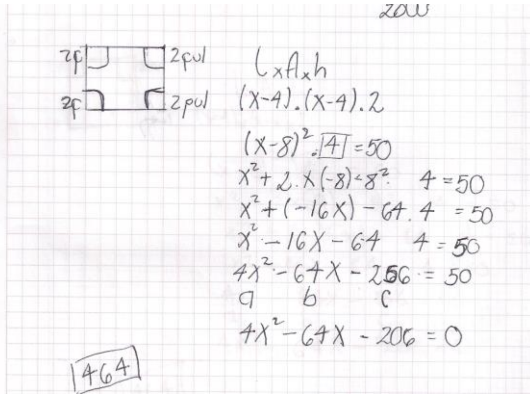

Figura 26 solución del problema E proporcionada por los profesores

Problema no rutinario F

En el análisis del problema no rutinario se observó que tanto los estudiantes como los profesores en formación recurren a la exploración de números que satisfacen la problemática para dar solución como se observa en la figura N° 27

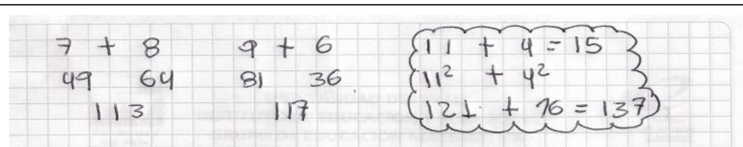

Figura 27 solucion del problema F proporcionada por los estudiantes

Por otro lado también se evidenció que uno de los estudiantes utiliza heurísticas específicas para solucionar el problema no rutinario como se observa en la figura N° 28

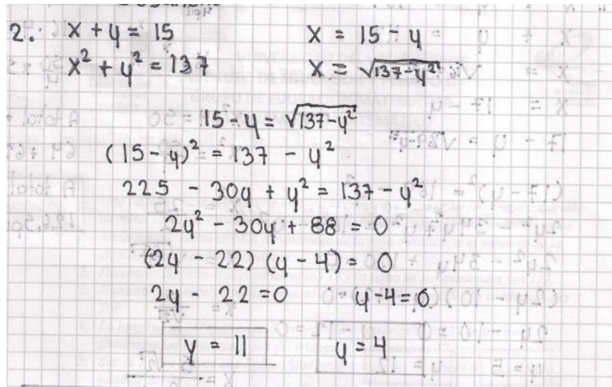

Figura 28 solucion del problema F proporcionada por los estudiantes

De lo anterior, se puede concluir que este resolutor presenta otro tipo de razonamiento ya que este no recurre a las heurísticas generales**,** además, no presenta las dificultades expuestas por Kieran y Filloy (1989) y emplea a satisfacción el modelo de resolución de Polya (1981) y el de Shoenfied (1985)

A manera de conclusión general sobre el problema no rutinario se infiere que los resolutores como los profesores y algunos estudiantes tiene más dominio en uso de las potencias de los números y por ende les resulto fácil encontrar la solución por medio de la exploración y tanteo de que números cumplen con las condiciones, sin embargo, en el caso del estudiante que utilizo heurísticas específicas se puede inferir que el manejo de ecuaciones fue un fuerte en su proceso de aprendizaje.

Problema no rutinario G

En el análisis del problema no rutinario se observó que algunos estudiantes recurren al uso de la heurística N°2 (hacer un gráfico) ya que relacionan los datos del problema con un diagrama, además, se evidencia que hay un manejo de ecuaciones lineales y de segundo grado aunque cabe resaltar que solo se plantean y no se resuelven es decir no hay dificultades en los métodos para simbolizar pero si en la resolución del ecuaciones ya que no se intenta encontrar la solución por medio de las ecuaciones Kieran y Filloy (1989).

Lo anterior se puede deber a la exploración de números que cumplen con la condición, y es debido a la relación existente entre el problema no rutinario F y G y por lo tanto terminan utilizan la misma estrategia como se evidencio en la figura N° 29

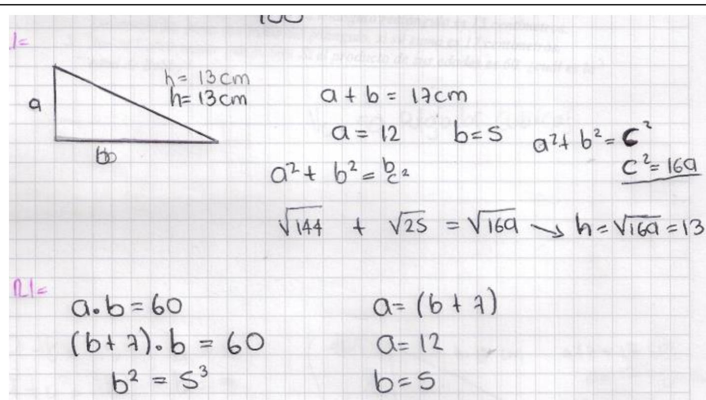

Figura 29 solución del problema G proporcionada por los estudiantes

Por otro lado uno de estos resolutores no utiliza las heurísticas generales sino que centra su atención en el uso del álgebra y de las específicas para dar solución al problema como se puede observar en la figura N° 30

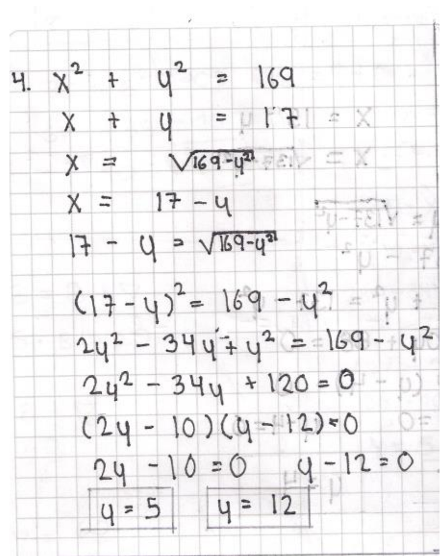

Figura 30 solución del problema G proporcionada por los estudiantes

De la figura se puede resaltar la importancia que existe en el enseñanza de heurísticas específicas Santos (2007) ya son empleadas a la hora de encontrar la solución.

En cuanto a los profesores en formación se puede observar que hay un intento por el uso de las ecuaciones de segundo grado, sin embargo, al percatarse de la similitud de este problema con el F ocasiona que utilicen la misma estrategia para dar solución esto puede deberse se renuncia al manejo del concepto matemático como se evidencia en la figura N° 31

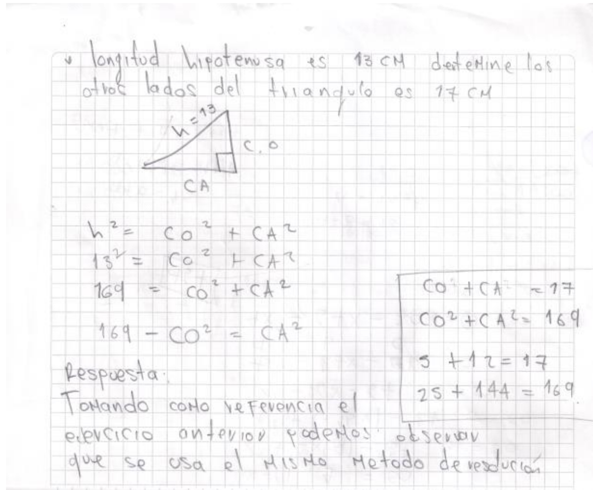

Figura 31 solución del problema G proporcionada por los profesores

A manera de conclusión del análisis de los problemas no rutinarios aplicados se puede inferir que:

En los problemas no rutinarios A, B, C, F se presentó un predominio por el uso de las heurísticas generales sobre todo a la N°1 resolver un problemas más sencillo ya que se recurrió en su gran mayoría a realizar procesos aritméticos como la suma de números es decir, la utilización de una situación más simple para de esta forma llegar a la solución. Lo que se puede mencionar que existe poco uso de las específicas por parte de ambos resolutores.

En los problemas no rutinarios D, E, G se evidenció que algunos resolutores realizan intentos por el empleo de heurísticas específicas partiendo de una general como lo es la N° 4. Sin embargo, existe resistencia al uso de ecuaciones y en la resolución de estas en algunos resolutores.

CONCLUSIONES

El presente trabajo de grado tenía como finalidad realizar un contraste de las heurísticas empleadas por los profesores en formación y los estudiantes de la Educación Media, al resolver problemas no rutinarios que se encuentren enmarcadas en la resolución de problemas y que además que fuera posible relacionarlas con las ecuaciones de segundo grado con una incógnita real. Después de realizar el análisis de la práctica se puede concluir:

- Una de las primeras conclusiones que se pueden hacer es la resistencia de los resolutores por el empleo de métodos para simbolizar y para involucrar heurísticas específicas de algún concepto matemático que en este caso son las ecuaciones de segundo grado, es decir, poco manejo algebraico por parte de los resolutores al momento de afrontar un problema no rutinario, además, que tanto los estudiantes como los profesores en formación resolvieron los problemas recurriendo a las heurísticas generales esto puede ser debido a que los resolutores emplean las estrategias que se pueden usar los métodos más desarrollados durante su formación académica.

- La segunda conclusión es la memorización de expresiones algebraicas como el teorema de Pitágoras, regla de tres, el cálculo áreas y volumen las cuales son aprendidas en el ámbito escolar y hacen parte del patrimonio matemático de cada resolutores, sin embargo este recurso conlleva a dificultades en el aprendizaje debido a que solo se limitan al remplazo de una variable por un valor numérico como parte de la ejercitación algebraica.

- El uso de heurísticas generales es un proceso muy arraigado, tanto en los profesores en formación como en los estudiantes, sin embargo, es importante resaltar que: en los primeros se utilizan estas estrategias como medio para comprender la problema no rutinario como lo menciona Polya (1941), y posteriormente lo emplea para confirmar los resultados. En el caso de los profesores y los estudiantes es evidente que como este tipo de heurísticas es suficiente para hallar la solución de la situación poco continúan explorando nuevas estrategias o profundizan en la generalización.

- Aunque la generalización es una heurística utilizada en la solución del problema no rutinario se evidencia que ambos resolutores poco emplean esta heurística y esto se puede deber a la resistencia del uso de ecuaciones o procesos algebraicos o a que presentan dificultades en el álgebra como las expuestas por Kieran y Filloy (1989), esto puede deberse también al cambio de pensamiento que trae consigo el álgebra.

- Los pocos resolutores que sí lograron el empleo de la heurística N°4 se evidenció que los estudiantes presentan dificultades en el uso de las variables ya que al momento de asignar un nombre o valor para la misma incógnitas terminan utilizando diferentes nombres o valores.

- El rechazo a los métodos empleados para simbolizar tiene como consecuencia la poca utilización de la heurística N°4 (generalización), lo que termina ocasionando una dificultad, en el desarrollo y empleo de las heuristicas específicas esto se debe a que estas últimas se desprenden y tiene su aparición partiendo de la generalización de un problemas que involucre un concepto matemático.
- Por último se concluye que es importante involucrar los problemas no rutinarios en los procesos de enseñanza y aprendizaje ya que en estos forman parte de la resolución de problemas y por lo tanto a través de este modelo se puede generar nuevos conocimientos.

REFERENCIAS

Abrate, R. & Otros. (Agosto de 2008). Reunión Pampeana de Educación Matemática. Recuperado el Abril de 2015, de Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones.: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Trabinvest/C27.pdf

Alfaro . (2008). Universidad de Costa Rica. Recuperado el Julio de 2015, de Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática. ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense.: revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6902/6588

Alfaro, C. (2006). Universidad de Costa Rica. Recuperado el Junio de 2015, de Portal de revistas académicas de la Universidad de Costa Rica. Las ideas de Polya en la Resolución de Problemas.: http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6967/6653

Arthur, g. &. (1996). ÁLGEBRA Y TRIGOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. MEXICO, D. F: PRETICE HALL.

Arya ,y Lardnery. (2009). matemáticas aplicadas a la adminitración y la economía.

Barrantes, H. (2006). Universidad de Costa Rica. Recuperado el Julio de 2015, de Portal de revistas académicas.Resolución de Problemas El Trabajo de Allan Schoenfeld.

Bernaubeu. (6 de agosto de 2016). Recursos para el aula. Obtenido de 100 problemas matemáticos: http://www.lavirtu.com/eniusimg/enius4/2002/01/adjuntos_fichero_3543.pdf

Blanco, J. (1996). Resolución de problemas una revisión teórica. SUMA(21), 11-20.

Corbalán y Deulofeu. (1996). Polya, un clásico resolutor de problemas. Suma(22), 103-107.

Dewar, y Zill . (2012). álgebra, trigonometría y geometría analítica. España: tercera edición.

Díaz y Poblete. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. Revista didáctica de las matemáticas, 45, 33-41.

Garcia, eat. (1996). Metodologia de la investigacion cualitativa. Granada (España): Aljibe.

Kieran, y Filloy. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Recuperado el MARZO de 2015, de ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS: REVISTA DE INVESTIGACIÓN Y EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS. Traducido de Luis Puig: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51268/93013

Mancera, E. & Pérez, C. (2007). XII Conferencia Interamericana de Educación Matematica. Recuperado el 2015, de CIAEM.Historia y Prospectiva de la Educación Matemática.: http://www.tutoriaaprendizajeadolescentes.org/mate/4.pdf

Marinez, M. (2013). Sistematización de una experiencia didáctica que propone integraralgunos contenidos de las asignaturas de física y matemáticas de grado décimo mediante el uso de TIC. (Tesis de Pregrado). Cali: Universidad del Valle.

Mejía, M. (2004). Análisis Didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. (Tesis de Pregrado). Cali: Universidad del Valle.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. En documento No. 3. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Noda, M. (2000). Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación. (Tesis de Doctorado). La Laguna: Universidad de la Laguna.

Olmedo et al. (3-7 de Mayo de 2015). XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado el Julio de 2015, de CIAEM. Errores y concepciones de los alumnos en álgebra.: http://www.xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/.../367

Palacios y Solarte. (2013). Estudio de la Resolución de Problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: Una aproximación a las estrategias heurísticas. (Tesis de Pregrado). Cali: Universidad del Valle.

Pifarré, M. y. (2001). la enseñanza de las estrategias de resolucion de problemas Matematicos en la ESO: un ejemplo concreto. Enseñanza de las ciencias, 297-308.

Piñeiro, L. P. (8 de enero de 2015). ¿Que es la resolucion de problemas? Revista Virtual Redipe, 2.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery. New rork : Wiley.

Santos, L. (2007). La resolucion de problemas matematicos fundamentos cognitivos. Mexico, D.F: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Sigarreta y Ladorde. (sf). Sociedad Argentina de Educación Matemática. Recuperado el Junio de 2015, de SOAREM. Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural.: www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf

Socas (Actas III) . (1999). Universidad de los Andes. Recuperado el Julio de 2015, de Funes. Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico.Actas del III SEIEM (pp. 261-282).: funes.uniandes.edu.co/1460/

Zill, D & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. México. D. F.: Mc Graw Hill. Tercera Edición .