



**Diseño de un recurso pedagógico para la enseñanza de la multiplicación al integrar
GeoGebra en tercer grado de la educación básica primaria**

**MAURICIO RODRÍGUEZ AGÜÍÑO 201134333
YESID FERNANDO PEREZ BERNAL 201223346**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017**



**Diseño de un recurso pedagógico para la enseñanza de la multiplicación al integrar
GeoGebra en tercer grado de la educación básica primaria**

**MAURICIO RODRÍGUEZ AGÜÍÑO 1134333
YESID FERNANDO PEREZ BERNAL 1223346**

Director:
Mg. MARITZA PEDREROS PUENTE

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017**



Programa Académico Licenciatura en Educación Básica Enfasis en Matemáticas Fecha

Código del programa: 3469

Resolución del programa:

Día	Mes	Año
11	7	2017

Titítulo del Trabajo o Proyecto de Grado

Diseño de un recurso pedagogico para la enseñanza de la multiplicación al integrar GeoGebra en tercer grado de la educación básica

Proyecto

Informe Final

Director

Maritza Pedreros Puente

Nombre del Primer Evaluador

Diana Ximena Ortiz Collazos

Nombre del Segundo Evaluador

Gilbert Andrés Cruz

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Mauricio Rodríguez Aguiño	1134333	3469	mauricio.rodriguez@correounivalle.edu.co	310-5379782
Yesid Fernando Pérez Bernal	1223346	3469	yesid.perez@correounivalle.edu.co	312-222-5931

Evaluación

Aprobado Meritorio Laureado

Aprobado con recomendaciones No Aprobado Incompleto

En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de 30 (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado Primer Evaluador Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

Maritza Pedreros P

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por estar presente en cada una de las etapas de mi vida, por haberme acompañado y guiado a lo largo de la carrera, darme fortaleza en los momentos de debilidad, y sobre todo, mucha sabiduría y entendimiento para lograr culminar una meta más de mi vida.

A mis padres Oliva Bernal y Lisimaco Perez les agradezco por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. A mis hermanos, quienes con sus esfuerzos y ganas de que pueda salir adelante, me han apoyado en mi proceso de formación; gracias por ese apoyo y por permitirme cumplir cada etapa que me propongo.

A la directora de trabajo de grado Maritza Pedreros Puente por habernos brindado la oportunidad de poder trabajar bajo su asesoría, por sus valiosas orientaciones, por su acompañamiento, entrega y comprensión durante este trabajo, por su valioso tiempo y dedicación con su conocimiento nos brindó elementos para que este trabajo culminara satisfactoriamente y sobre todo por permitirnos conocer a tan excelente persona.

A mis compañeros, que durante la carrera me acompañaron, me apoyaron e hicieron que mi estudio fuera más enriquecedor. Agradezco también a la Institución Educativa Liceo Departamental, Sede la Presentación, por brindarme la oportunidad implementar el recurso pedagógico y aportar su granito de arena en el desarrollo de este trabajo.

Por último agradezco a mis profesores y evaluadores que contribuyeron con sus grandes aportes para la elaboración de este trabajo, por su paciencia y sobre todo por brindarme la oportunidad de compartir y enriquecer mi conocimiento bajo su compañía, con dedicación y comprensión.

YESID FERNANDO PEREZ BERNAL.

AGRADECIMIENTOS

Inicio dando gracias al Dios por la vida, la salud, y por todas bendiciones que he recibido en el transcurso de mi carrera, y especialmente, por brindarme la oportunidad de asumir tan valioso reto en esta etapa de mi vida, para crecer como persona y ser ejemplo de vida para mis semejantes.

Gracias a mi esposa Lidia Cristina, por ser la persona que me acompaña con todo su empeño y sacrificio, para poder culminar mis estudios. A mis hijos, especialmente a Danna Cristina, por todo el optimismo, acompañamiento y fortaleza que me brindó.

Doy gracias a mis padres; Beatriz Agüiño (Q.E.P.D) y Francisco Rodríguez por el sacrificio que hicieron para darme una mejor educación, por los buenos principios que me inculcaron en mi niñez, que hicieron que me convirtiera en una persona de bien, con valores para vivir en sociedad.

Gratitud para mis hermanos, familiares y amigos por sus consejos y su apoyo incondicional, que me llenaron de fuerza para que no sucumbiera en los momentos difíciles de mi carrera.

Un especial agradecimiento a mi directora de trabajo de grado, Maritza Pedreros, por sus orientaciones y su dedicación. A mi compañero Yesid Pérez, por su empeño, esfuerzo y entrega.

A mis profesores y compañeros de la carrera, que con su paciencia, su comprensión y colaboración contribuyeron a que llegara a la meta.

A los Directores y profesores del colegio *Pedro Antonio Molina*, por haberme permitido realizar las prácticas de formación en su institución.

Muchísimas gracias a todos.

MAURICIO RODRÍGUEZ AGÜIÑO

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	11
INTRODUCCIÓN	12
CAPÍTULO I ASPECTO GENERALES	14
1.1 Presentación del problema	14
1.2 Justificación.....	19
1.3 Objetivos	22
1.3.1 Objetivo general	22
1.3.2 Objetivos específicos	22
1.4 Antecedentes	23
CAPÍTULO II REFERENTES TEÓRICOS.....	28
2.1 Referente matemático.....	28
2.1.1 Tablas de multiplicar	31
2.1.2 Modelos lineales	32
2.1.3 Modelos cardinales	33
2.1.4 Modelos combinatorios	34
2.2 Referente curricular.....	36
2.2.1 Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas ..	40
2.2.2 Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	41
2.3 Referente didáctico.....	44
2.3.1 Recurso pedagógico.....	44
2.3.2 Orquestación instrumental	46
CAPÍTULO III REFERENTES METODOLÓGICOS	54
3.1 Desarrollo del análisis didáctico	58
3.1.1 Fase I: determinación de contenidos y objetivos	58
3.1.2 Fase II: análisis	59
3.1.3 Fase III: diseño de actividades.....	64

CAPITULO IV DISEÑO DE ACTIVIDADES	65
4.1 Selección del software.....	65
4.2 Criterio para el diseño de las actividades	66
CONCLUSIONES.....	85
REFERENCIAS.....	88

LISTA DE FIGURAS

Figura N° 1 Resultados de tercer grado en el área de matemáticas – Entidad territorial Cali....	18
Figura N° 2 Multiplicación como producto cartesiano.....	29
Figura N° 3 Patrón numérico	32
Figura N° 4 Multiplicación como modelo lineal	33
Figura N° 5 Multiplicación como unión repetida	33
Figura N° 6 Multiplicación como esquema rectangular	34
Figura N° 7 Multiplicación como producto cartesiano de dos conjuntos	34
Figura N° 8 Multiplicación como diagrama de árbol	35
Figura N° 9 Elementos, dimensiones y tipos de orquestación instrumental	48
Figura N° 10 Ciclo de análisis didáctico.....	57
Figura N° 11 Estructura conceptual de la multiplicación	59
Figura N° 12 Diferentes sistemas de representación de la multiplicación.....	60
Figura N° 13 Diferentes modelos para el estudio de la multiplicación	61
Figura N° 14 Actividad 1 - uso del conteo.....	68
Figura N° 15 Retroalimentación del medio	69
Figura N° 16 Propiedad distributiva de la multiplicación respeto a la suma en GeoGebra.....	70
Figura N° 17 Propiedad commutativa en GeoGebra.....	70

LISTA DE TABLAS

Tabla N° 1 Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento numérico y los sistemas numéricos.....	40
Tabla N° 2 Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento numérico y los sistemas numéricos	41
Tabla N° 3 Tipos de orquestación	52
Tabla N° 4 Ficha técnica e identificación	71
Tabla N° 5 Ficha de escenario.....	72
Tabla N° 6 Ficha del profesor	74
Tabla N° 7 Ficha del estudiante	81

RESUMEN

Este trabajo de grado tiene como objetivo presentar una propuesta de configuración de un recurso pedagógico que integre GeoGebra y proporcione una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* para la enseñanza de la multiplicación en grado tercero, partiendo del aporte que brinda la integración de diferentes sistemas de representación para el estudio de las tablas de multiplicar y algunas de sus propiedades (Propiedad modulativa, conmutativa y propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma). Para diseñar las actividades del recurso pedagógico, se tendrá en cuenta como marco teórico la concepción de *Recurso Pedagógico*, desde el enfoque instrumental y la *Orquestación Instrumental*, para dar cuenta de la gestión del *recurso pedagógico*. El enfoque metodológico se fundamentará en la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*, la cual es un constructo que admite diseñar actividades de aprendizaje que aporten a la construcción de un concepto matemático, en este caso la multiplicación, a partir de la construcción de las tablas de multiplicar para estudiantes de la educación básica primaria.

Palabras claves: recurso pedagógico, multiplicación, tablas de multiplicar, orquestación instrumental, GeoGebra, Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC), Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pertenece a la Línea de Tecnología de la Información y la Comunicación en Educación Matemática (TICEM), para obtener el título de Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle; propone la configuración de un recurso pedagógico, que contribuya a la enseñanza de la multiplicación de manera contextualizada, a través de actividades que involucran diferentes sistemas de representación. Para el desarrollo de este trabajo se utilizó como referente teórico la concepción de *recurso pedagógico*, *la orquestación instrumental* y como referente metodológico, la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*.

Se parte del hecho de que durante los primeros años de educación se deben construir la mayoría de las bases del conocimiento matemático. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, plantean que “*Una parte importante del currículo de matemáticas en la educación básica primaria se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales*” (MEN, 1998, p.48). A diferencia de la suma y la resta, la multiplicación requiere un poco más de estudio debido a su complejidad conceptual y la necesidad de múltiples modelos, para que los estudiantes puedan identificar los diferentes problemas que esta operación permite resolver.

Unos de los objetivos constantes en la enseñanza de la multiplicación son el aprendizaje y memorización de las tablas de multiplicar, el trabajo con estas se convierte en un elemento indispensable en la aplicación de diferentes conceptos matemáticos (división, proporcionalidad, potenciación, radicación y logaritmación) por esto el profesor debe utilizar diferentes estrategias metodológicas para lograr dicho objetivo.

Este trabajo busca configurar un recurso pedagógico a partir del cual el profesor pueda brindar a sus estudiantes un acercamiento a partir de la identificación de diferentes propiedades y sistemas de representación de la multiplicación.

Para la configuración del recurso pedagógico se diseñaron actividades interactivas en GeoGebra que involucran la tabla pitagórica y su representación geométrica, pues esta permite la exploración de diferentes propiedades de la multiplicación. También se crearon las fichas de trabajo que complementan las actividades propuestas.

Para dar cuenta de dicha configuración el presente trabajo se estructuró en cuatro capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo I se presentaron los aspectos generales que permitieron contextualizar y definir el problema de investigación, referido especialmente a la enseñanza de la multiplicación por su complejidad conceptual y las diferentes estrategias metodológicas que se pueden abordar. Se presentó también la importancia del presente trabajo, los objetivos generales y específicos a alcanzar y las diferentes investigaciones que se han realizado con relación a este tema.

En el capítulo II se presentó el marco teórico. En él que se mencionan algunos referentes del concepto matemático, curricular y didáctico. Se resaltan los elementos teóricos referidos a la concepción de *Recurso Pedagógico y Orquestación Instrumental*.

En el capítulo III se presentaron los referentes metodológicos, teniendo en cuenta la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* (THA), como enfoque metodológico para el diseño del recurso pedagógico, especialmente en la visión que se tiene de los contenidos matemáticos que se van abordar, su relación con el análisis de contenido, las estrategias de solución como parte del análisis cognitivo, y la especificación del tipo de actividades a trabajar como parte del análisis de instrucción.

En el capítulo IV se concretó el diseño de las actividades en GeoGebra con sus respectivas fichas de trabajo (ficha técnica e identificación, ficha de escenario, ficha del profesor y ficha del estudiante).

Finalmente, se presentan las conclusiones y los referentes bibliográficos utilizados para el desarrollo del trabajo.

CAPÍTULO I ASPECTO GENERALES

En este capítulo se presentan los elementos que facilitaron estructurar formalmente la idea de investigación, la naturaleza y dimensión del problema. Se tuvieron en cuenta aquellas problemáticas y estudios que se han realizado con relación a la enseñanza de la multiplicación, que permiten justificar y formular los objetivos que guían el trabajo.

1.1 Presentación del problema

Durante los primeros años de educación se construyen la mayoría de las bases del conocimiento matemático, por eso, la organización de este conocimiento en el currículo está dada para que en los primeros grados de escolaridad se enseñen las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). La multiplicación es una operación muy importante y necesaria para la construcción de otros conceptos (proporción, razón, producto cartesiano, entre otros), que permiten llevar al individuo a la comprensión de situaciones problemas relacionadas con esta operación; a partir de lo anterior se considera importante indagar acerca de las estrategias que utilizan los profesores de grado tercero de básica primaria, para la enseñanza de este concepto.

Aunque el concepto de multiplicación como operación aritmética frecuentemente es abordado como una suma reiterada, lo cual es válido para iniciar el trabajo de esta operación, el problema está, en que puede limitar la comprensión de algunas propiedades dependiendo del conjunto numérico. Varios estudios sustentan lo anterior, entre ellos, lo expuesto por Fernández quien afirma que “*Al expresar, en los procedimientos didácticos, la multiplicación aritmética como una suma de sumandos iguales, arriesgamos la compresión del concepto en su auténtica ortodoxia*” (2007, p.119). En este sentido, según lo expuesto por el autor, no se puede considerar la multiplicación como una suma de sumandos iguales si no se cumple de manera general para todos los conjuntos numéricos, pues al hacerlo se estaría arriesgando la comprensión de este concepto, debido a ello, es necesario tener la precaución, al momento de relacionar la multiplicación como una suma reiterada, especificar el conjunto numérico con el que se está trabajando. En el caso de

trabajar la multiplicación con números racionales y los números naturales estos presentan limitaciones cuando se aplica la propiedad modulativa, por ejemplo, si se multiplica un número cualquiera por uno (1) tal como 1×5 , dificultaría ver la multiplicación como suma reiterada, puesto que, para hablar de sumandos deben existir al menos dos elementos y en este caso se estaría hablando de una vez cinco ($1 \times 5 = 5$). Por lo tanto, es permitido indicar que toda suma reiterada de un mismo número puede expresarse como un producto, pero no todo producto es el resultado de una suma reiterada.

Otro estudio de investigación también muestra que la definición de multiplicación que se maneja en la escuela está encaminado a explicar esta operación como suma reiterada, lo que se puede considerar un problema, puesto que los textos escolares tienden a generalizar esta definición, dejando de lado que la multiplicación presenta ciertas limitaciones dependiendo del conjunto numérico y que existen múltiples modelos para que los estudiantes pueda identificar los diferentes problemas que esta operación permite resolver (Ramírez, 2006, Citado por Ángel, Candamil, 2013, p.5). Además, el concepto de multiplicación como operación aritmética dentro del sistema numérico y su aplicación, con frecuencia presenta dificultad en la comprensión por parte de los estudiantes, especialmente cuando se enfrentan a situaciones en las cuales se involucra esta operación y en muchos casos la búsqueda de la solución se ve reducida a procesos memorísticos basados en el aprendizaje de las tablas de multiplicar.

De igual manera Gvartz, S. en su trabajo presenta un análisis de los diferentes problemas que podrían dar sentido a la operación de la multiplicación, dentro de éste se resalta que “*(...). Si los alumnos trabajaron solo alguno de los tipos de problemas, asociados a uno solo de los sentidos de la multiplicación, es difícil que puedan reconocer el producto en otros tipos de problemas*” (2008, p.91). En otras palabras, es necesario trabajar diferentes tipos de problemas para que los estudiantes comprendan los sentidos y significados de esta operación.

Como no todos los problemas multiplicativos son de la misma naturaleza, dentro de esta variedad de problemas Gvartz, S plantea la siguiente tipología:

- Aquellos que para ser resueltos necesitan de la suma de una cierta cantidad de números iguales, este tipo de problemas tiene características que son propias de una proporcionalidad directa.
- Otros problemas invitan a pensar la multiplicación como la operación que permite resolver problemas en los que los elementos que intervienen están organizados en filas y en columnas.
- También existen situaciones a las que se les suelen llamar *problemas de conteo* o *problemas de combinatoria*, son aquellas en las que es preciso combinar elementos de diferentes colecciones. (2008, p.90-91).

Por lo expuesto anteriormente es necesario trabajar cada uno de estos tipos de problemas en diferentes momentos del año escolar y a lo largo de varios años, con el fin de lograr en los estudiantes una comprensión clara de la multiplicación como una herramienta para resolver esos problemas.

Esta autora también señala que la enseñanza de las tablas de multiplicar se ha realizado de manera secuencial, memorística, evocando que “*Es reconocido que los estudiantes tienen dificultades para recordar los resultados de los productos. A su vez, pocas veces, las relaciones entre los resultados de las diferentes tablas se transforman en objeto de enseñanza*”. (Gvirtz, 2008, p.94). En otras palabras, los estudiantes presentan dificultad en el aprendizaje de las tablas de multiplicar, porque se realiza de manera memorística y solo ocasionalmente se enseña a reconocer que el producto apela a las diferentes relaciones y propiedades de la multiplicación.

Finalmente, Gvirtz menciona que: “*El algoritmo convencional oculta las razones matemáticas por las que se hace lo que se hace en cada uno de los pasos*” (2008, p.100). Es decir, que en la escuela se centran más en enseñar las reglas, que en especificar la importancia del valor posicional entre los factores.

Autores como Fernandez (2007), Gvirtz (2008), Ángel & Candamil (2013), entre otros, de alguna manera cuestionan la forma como se enseña este concepto, debido a que, al centrarse

solamente en la enseñanza del algoritmo convencional, la memorización de las tablas de multiplicar, la introducción del concepto como suma reiterada, hace que se pierda el significado de la operación y sus propiedades y que estas limitaciones se vean evidenciadas al momento de enfrentarse a la resolución de problemas. Si se continúa la enseñanza de la multiplicación de la misma manera, seguirá siendo un problema, porque se omite la complejidad conceptual y la necesidad de abordar múltiples perspectivas y diferentes contextos para llegar a comprenderla y avanzar en el reconocimiento de sus propiedades. También constituye un problema la falta de disponibilidad de recursos pedagógicos puestos a disposición del profesor en el aula de clase, para que pueda brindar diferentes acercamientos al concepto de multiplicación.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) proponen que para trabajar de múltiples maneras la multiplicación se puede abordarse como factor multiplicante, suma repetida o razón y producto cartesiano. Cada una de estas formas permite evidenciar las ventajas y restricciones que presenta al involucrar los diferentes sentidos y significados de ella.

Se considera que al tener en cuenta lo propuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) se puede aportar al mejoramiento de los resultados de la prueba Saber 3° a nivel nacional, pues se evidencia que varias de las problemáticas que se presentan en el desempeño de los estudiantes en matemáticas se deben a lo mencionado anteriormente. En el informe de la prueba Saber entidad territorial certificada Cali 2015, los resultados de evaluación de desempeño indican que se sigue presentando un nivel bajo en matemáticas, tal como se presenta en la figura N° 1.

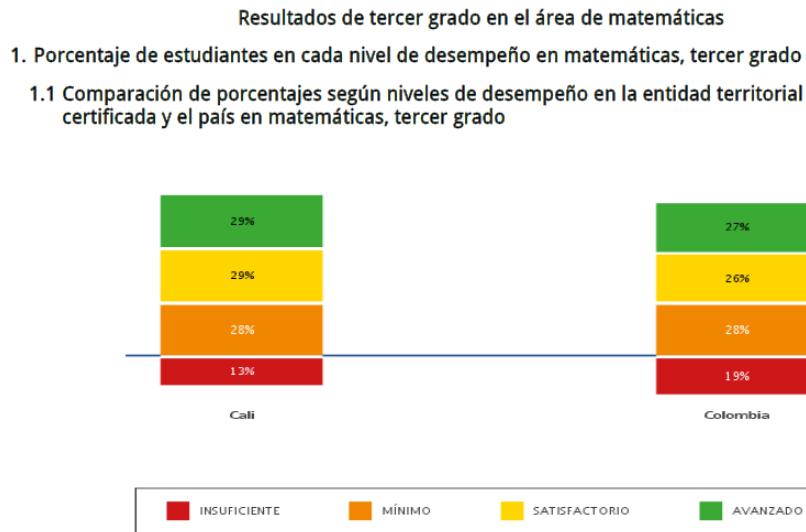


Figura N° 1 Resultados de tercer grado en el área de matemáticas – Entidad territorial Cali.
Tomado de: Icfesinteractivo, 2016.p1.

Dichos resultados permiten inferir que solamente el 29% de los estudiantes en Cali presentó un nivel avanzado, el 29% un nivel satisfactorio, el 28% un nivel mínimo y el 13% un nivel insuficiente. Este resultado permite percibir que el desempeño de los estudiantes de Cali en la prueba saber no fue el mejor. El informe arroja el estado de las competencias y aprendizajes en matemáticas, haciendo énfasis en aquellos aprendizajes en los que se deben realizar acciones pedagógicas para el mejoramiento y que, a propósito, para el interés de este trabajo se destacan: “*Los estudiantes no resuelven y formulan problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano; los estudiantes no resuelven problemas sencillos de proporcionalidad directa, entre otros*” (Ministerio de Educación Nacional. (2016, Octubre 11). Pruebas saber 3° 5° 9 - ICFES Interactivo).

De acuerdo a las consideraciones mencionadas anteriormente, surge la siguiente pregunta:

- ¿Qué tipo de acercamientos se pueden favorecer al configurar un recurso pedagógico que integre GeoGebra para la enseñanza de la multiplicación en grado tercero de la Educación Básica Primaria?

1.2 Justificación

Un aspecto importante que motivó la realización de este trabajo es que a pesar de que se han realizado diferentes propuestas relacionadas con la enseñanza de la multiplicación no se encuentran trabajos que involucren el diseño de recursos pedagógicos con TIC para la enseñanza de esta en grado tercero, de ahí el interés de proporcionar un recurso pedagógico que brinde un acercamiento a dicha operación, a partir de la construcción de las tablas de multiplicar y el reconocimiento de algunas de sus propiedades y su representación geométrica.

Teniendo en cuenta las dificultades que se presentan en la enseñanza de la multiplicación, se considera pertinente implementar en este trabajo una propuesta orientada a la integración de las TIC, que aporte a la enseñanza de la multiplicación con números naturales en grado tercero, y que permita comprender el significado y los diferentes sentidos asociados a esta operación. Es importante precisar, que en este trabajo se entenderá por recurso pedagógico aquel artefacto que está a disposición del profesor, susceptible de evolución (Guin y Trouche, 2007, Citado por Garzón, Pabón, Vega, 2013, p. 2-3).

Otro aporte importante de este trabajo, es contar con un recurso pedagógico diseñado en un software libre interactivo como “GeoGebra”. Se propone este recurso pedagógico, porque es de fácil manipulación para el profesor, quien podrá modificarlo y adaptarlo a sus necesidades con el fin de promover su aprovechamiento didáctico en el aula de clase. El recurso diseñado estará a disposición de la comunidad en la página principal del programa, acompañado del objetivo para el cual fue creado.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en aras de mejorar la calidad de la educación, en uno de sus programas banderas, *Computadores para educar*, afirma que “(...), para promover las TIC como un factor de desarrollo equitativo y sostenible en Colombia, las coloca al alcance de las comunidades educativas, especialmente en las sedes educativas públicas del país, mediante la entrega de equipos de cómputo y la formación de profesores para su máximo aprovechamiento” (Ministerio de Educación Nacional. (2016, Abril 12). Computadores para Educar). Teniendo en

cuenta lo anterior, otra de las pretensiones que está inmersa dentro de la propuesta, además de que el profesor cuente con un nuevo recurso pedagógico para la enseñanza de la multiplicación, es contribuir de alguna manera para que el profesor utilice en su labor, los medios tecnológicos que está implementando el MEN en la mayoría de las instituciones educativas públicas del país, a través de programas como TITA, colegios 10 TIC y computadores para educar, entre otros programas.

Cabe destacar las diferentes propuestas hechas desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, donde se hace referencia a:

Los aspectos básicos que según varios investigadores se pueden tener en cuenta para construir el significado de las diferentes operaciones y que pueden dar pautas para orientar el aprendizaje de cada operación, las cuales tienen que ver con: reconocer el significado de la operación en situaciones concretas de las cuales emergen; reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones; comprender el efecto de cada operación y sus propiedades matemáticas, así como las relaciones entre operaciones. (NCTM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntosh, 1992, citado por MEN 1998, p.48).

De ahí la importancia de diseñar un recurso pedagógico que brinde la posibilidad de reconocer algún modelo usual y de aplicar algunas de las propiedades de la multiplicación, de tal manera que permita partir de los conocimientos previos de los estudiantes y se pueda avanzar en la construcción de las tablas de multiplicar.

Uno de los pasos necesarios para la elaboración de la propuesta, es el de estudiar y analizar algunas de las maneras en que este concepto es abordado tanto en los textos, como por los profesores en la escuela (suma repetida, razón, factor multiplicante). Posteriormente diseñar un recurso que brinde un acercamiento al concepto de multiplicación haciendo uso de las TIC y que además sea apropiado para que el profesor lo pueda manejar en el contexto de su escuela. Como se especifica en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas "*El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes*" (1998, p.18). Es decir, que el profesor al integrar este recurso pedagógico, que es dinámico, puede tener también la posibilidad de investigar y hacer seguimiento

sobre el progreso de este material de apoyo y modificarlo gradualmente a medida que lo requiera, de tal modo que este ejercicio le permitirá en algún momento ampliar sus conocimientos en este campo.

De este modo una de las contribuciones del trabajo, es ampliar los recursos pedagógicos que hay a disposición de los profesores para la enseñanza de la multiplicación, ya que actualmente cuentan con pocos recursos de este tipo para trabajar este concepto en la educación básica primaria. Dicho recurso estará publicado en la página principal de GeoGebra y se especificará la intencionalidad de cada una de las actividades propuestas, de tal manera que el profesor pueda adaptarlas en el aula de clases y con ello brindar novedosas herramientas que puedan ayudar a enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Configurar un recurso pedagógico que integre GeoGebra y proporcione una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la multiplicación en grado tercero de la Educación Básica Primaria.

1.3.2 Objetivos específicos

- Fundamentar teóricamente el concepto de multiplicación teniendo en cuenta los diferentes modelos de este concepto para formular una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.
- Proponer un diseño de actividades en GeoGebra para el estudio de la multiplicación.
- Documentar la configuración del recurso pedagógico a través de las fichas de trabajo.

1.4 Antecedentes

Para comenzar a desarrollar la investigación fue necesario efectuar una revisión de diferentes trabajos que se han efectuado con relación a la enseñanza de la multiplicación y la integración de las TIC en la educación básica primaria y que se presentan a continuación:

A nivel institucional

Se han realizado trabajos de grado que dan cuenta de diferentes acercamientos al concepto de multiplicación desde la construcción de una secuencia didáctica o del análisis de textos o de las estructuras multiplicativas a partir de la resolución de problemas.

Ángel. K & Candamil. M (2013) en su trabajo de investigación “*Una secuencia didáctica para fortalecer el concepto de multiplicación de números naturales en el grado segundo de la educación básica*” proponen una secuencia didáctica que fortalezca el concepto de multiplicación en los números naturales en grado segundo, partiendo del aporte que brinda el sistema de numeración decimal en este proceso y las propiedades conmutativa y distributiva como estrategias de aplicación para situaciones en las que se requiera del cálculo mental y escrito.

Ospina. M & Piamba. J (2011) en su trabajo de investigación “*Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo*” plantean algunos aspectos teóricos y metodológicos relativos al concepto de multiplicación en el ámbito escolar. Se identifica que se dedica demasiado tiempo una forma en extremo convencional, a saber, la adición iterada y las tablas de multiplicar, sin que esto se traduzca necesariamente en aprendizajes significativos; en consonancia con lo expuesto, se plantea el análisis de algunos libros de texto de tercer grado de primaria, buscando caracterizar las propuestas de trabajo que se presentan en los mismos, en torno a las estructuras multiplicativas de Vergnaud, y teniendo como herramienta de análisis las configuraciones epistémicas.

Aguirre. D (2011) en su trabajo de investigación “*Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigido a tercer grado de educación básica*” propone estudiar algunos aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas, con el fin de permitir una reflexión más profunda por parte de los profesores, sobre el papel que juega la resolución de estos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las estructuras multiplicativas, ya que tradicionalmente es considerada como un aprendizaje mecánico de un algoritmo. Por ser considerada de esta manera, se le da más importancia a la memorización de las tablas de multiplicar y a la resolución de problemas de multiplicación y división presentados en los textos escolares, dejando de lado teorías como la expuesta por Vergnaud, que permite estudiar todas las posibles operaciones aritméticas de multiplicación y división, a través de distintas situaciones problema clasificados en subclases dentro de las categorías de las estructuras multiplicativas.

Los trabajos mencionados anteriormente brindan elementos conceptuales de los diferentes modelos e identificación de las propiedades (comutativa y distributiva) que se deben tener en cuenta para abordar la multiplicación, así como para fundamentar y justificar la problemática propuesta en el presente trabajo.

Vale la pena rescatar también las siguientes investigaciones a nivel local, enfocadas en la línea de Tecnología de la Información y Comunicación en Educación Matemática, que abordan en su referente teórico la conceptualización de la Orquestación instrumental y un rastreo de los diferentes trabajos realizados con las TIC, en el suroccidente colombiano.

La investigación realiza por Santacruz, M (2011), titulada “Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria” hace referencia a la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor, en relación con el desarrollo de génesis instrumentales del arrastre exploratorio en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), con estudiantes de educación primaria. A partir de la concepción, diseño, puesta en escena y evaluación de una secuencia didáctica que toma en consideración aspectos de la orquestación instrumental y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), alrededor de la noción de

transformación de rotación, contemplando la emergencia y evolución de un Esquema Social de Uso (ESU).

Pechené, M & Yela, L (2016) en su trabajo de investigación “*Diseño de una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la transformación de rotación en el espacio en grado noveno de educación básica*” proponen caracterizar el diseño de una Secuencia Didáctica (SD) mediada por un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como GeoGebra 3D, desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI) la cual se encarga de proveer y acompañar las Génesis Instrumentales de los estudiantes, con la finalidad de propiciar la necesidad de integrar instrumentos que medien la actividad matemática, en este caso, para explorar la transformación de rotación en un espacio de tres dimensiones.

En la investigación realizada por Herrera. B (2016) “Tecnología y Educación Matemática: un Meta-Estudio realizado en el Sur Occidente de Colombia”, se presenta una caracterización de los trabajos de investigación que se han realizado en distintas universidades del Suroccidente Colombiano con relación a la integración de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en educación matemática, durante un periodo comprendido entre el 2004 y 2014. El resultado que se obtuvo de esta investigación revela una baja producción de investigaciones que contemplen las nuevas tecnologías de la información y comunicación en la educación básica primaria, especialmente evidencia que se han realizado escasos estudios que involucren el uso de GeoGebra como artefacto para la mediación del saber matemático en grado tercero. Solamente existen dos trabajos sobre el pensamiento geométrico y ninguno relacionado con la enseñanza de la multiplicación.

La investigación “El desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por GeoGebra” realizada por Sánchez. L (2016) este toma como fundamento la teoría de la actividad, derivada de los planteamientos de Lev Vigotsky y la teoría de objetivación de conocimiento de Luis Radford para el diseño, implementación y análisis de unas tareas, que integran GeoGebra como un instrumento. Este instrumento le permite al estudiante expresar, operar e intercambiar información, relacionada con el desarrollo del pensamiento

algebraico en grado cuarto de Educación Básica Primaria y que al estar inmersas en un sistema de actividad, forman una unidad analítica.

El trabajo realizado por Campo. K & Meléndez. J (2017) “Una propuesta para el diseño de tareas que integra GeoGebra para la enseñanza de la función exponencial en grado noveno” propone caracterizar una configuración para el diseño de tareas alrededor de la función exponencial, a partir de lo planteado en la orquestación instrumental, en relación a sus dimensiones, tipos y elementos. Se parte de la identificación de algunas dificultades y necesidades relacionadas con el concepto de función exponencial, seguido del desarrollo histórico de dicha función y sus implicaciones didácticas. Todo esto se integró para el diseño de tareas, y su implementación y análisis se realizó con la metodología *Experimentos de enseñanza*.

Las anteriores investigaciones aportaron al presente trabajo referentes teóricos acerca de las dimensiones, elementos y tipos de orquestación instrumental, que debe tener en cuenta el profesor para la gestión del recurso pedagógico. Por último, el trabajo de Herrera (2016) muestra la ausencia de investigaciones realizadas con GeoGebra para favorecer el desarrollo del pensamiento numérico en la educación básica primaria, en el suroccidente colombiano. Todo lo anterior reitera la importancia de iniciar el trabajo en este campo.

A nivel internacional

Fernández. J (2007) en el artículo “La enseñanza de la multiplicación aritmética” expone que el aprendizaje de la matemática en la educación básica primaria necesita incorporar un significado que dote de fundamento epistemológico el conocimiento adquirido. Además especifica que al expresar en los procedimientos didácticos la multiplicación aritmética como suma de sumandos iguales, se arriesga la comprensión del concepto en su auténtica ortodoxia y por lo tanto se sugiere un procedimiento para la intervención educativa en la enseñanza de la multiplicación.

Gvirtz. S (2008) en su libro “La Matemática Escolar” especialmente en el capítulo 4 “El trabajo con la multiplicación y división”, desarrolla un análisis de los diferentes problemas que podrían dar sentido a esta operación. También propone un abanico de recursos de cálculo asociados a ella, que podrían surgir a la luz de los problemas y que permitirían avanzar en el reconocimiento de las propiedades de la multiplicación.

Se considera pertinente conocer sobre estos trabajos de investigación, porque brindan diferentes acercamientos, que corregirían las problemáticas que se han presentado al respecto de la enseñanza de la multiplicación. Además aportan información precisa sobre algunos aspectos relevantes para este trabajo, que podrían ser el punto de partida para la concepción y el diseño del recurso que se va configurar, con la intención de favorecer el aprendizaje significativo de este concepto. El estudio de los antecedentes nos sugiere una sustentación teórica de las características conceptuales y de aplicación de la multiplicación en sí, y de los procesos mentales y prácticos que se pueden dar en los estudiantes, con la integración del recurso que se quiere proponer en el aula de clase.

En la revisión bibliográfica sobre este tipo de investigaciones y propuestas a nivel internacional, también es claro que son pocos los trabajos de investigación realizados que involucran las TIC en el primer ciclo de la educación básica primaria. Existen algunos estudios realizados en grado tercero, que involucran *Cabri* como artefacto en la mediación de la enseñanza de algunos conceptos geométricos. Todo esto permite mostrar la necesidad de ampliar los recursos disponibles con GeoGebra para ser implementados en la educación básica primaria, en especial para trabajar las operaciones aritméticas en grado tercero, pues actualmente son pocos los recursos disponibles para trabajarlas, específicamente la multiplicación. GeoGebra puede brindar otros acercamientos a la solución de las problemáticas y dificultades que presenta la enseñanza de esta operación en la escuela, en lo que se refiere al uso de sus propiedades y en particular de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

CAPÍTULO II REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presentan algunos referentes teóricos, que sustentarán este trabajo de grado. Como marco general se consideran algunas reflexiones en torno a la multiplicación como concepto matemático. Otras se realizarán desde lo curricular enmarcado en un contexto local, y por último se plantearán reflexiones referidas a lo didáctico, a partir de la concepción de un recurso pedagógico y orquestación instrumental.

2.1 Referente matemático

Para empezar a fundamentar el concepto de multiplicación es necesario considerar las distintas formas como se define este concepto. Desde el punto de vista algebraico, la multiplicación es entendida como una operación binaria de $R \times R \rightarrow R$, así para cada pareja $(a, b) \in R \times R \exists c$ tal que $c = a \cdot b$, con $c \in R$, en otras palabras, cualquier par de números reales multiplicados darán como resultado otro número real.

De manera análoga, el concepto de multiplicación en el conjunto de los números naturales, se estudiará a partir de las propiedades matemáticas que lo sustentan y según lo expuesto por Godino “*(...) siempre que multiplicamos dos números naturales obtenemos otro número natural, decimos que la multiplicación es una operación en el conjunto de los números naturales*” (Cid, Godino, Batanero, 2003, p.272). Es decir, dentro del dominio de los números naturales cualquier par de números multiplicados dará como resultado un número natural; mostrando la importancia del papel que tienen los números para dotar de significado esta operación y la comprensión de sus propiedades.

Ahora bien, otra manera de interpretar la multiplicación es por medio de la **definición conjuntista**, que parte de la idea de producto cartesiano entre conjuntos. “*La multiplicación corresponde a la idea de repetición, pues al formar un producto cartesiano se repite cada elemento del primer conjunto junto a cada elemento del segundo. Recoge especialmente los problemas de combinación, tal como se visualiza en el esquema*” (Godino, 2003, p.272).

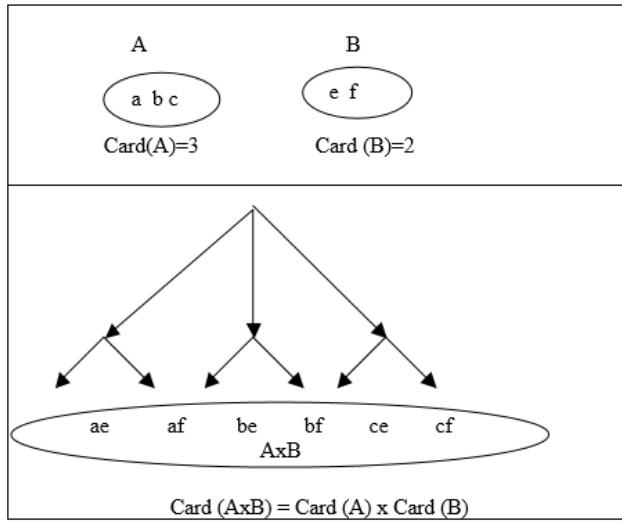


Figura N° 2 Multiplicación como producto cartesiano.

Tomado de: Cid, Godino & Batanero, 2003, p.272

Existe otra interpretación de la multiplicación como **Producto Cartesiano**, pues dados dos números naturales a, b , se llama multiplicación $a \times b$ al cardinal del conjunto producto cartesiano $A \times B$, siendo A y B dos conjuntos cuyo cardinal es a y b respectivamente. (Cid, Godino, Batanero, 2003, p.273). En otras palabras, la multiplicación se puede definir como producto cartesiano, en el que, el conjunto producto es el producto de los cardinales de cada conjunto.

Estas definiciones ponen en juego dos operaciones bien distintas:

- La operación que se hace sobre los conjuntos, de tal manera que dado un conjunto A cuyo cardinal sea a , se puede realizar la unión del conjunto A consigo mismo, tantas veces como indique el cardinal b , obteniendo el cardinal c del conjunto unión de todos los anteriores.
- La operación que se hace dado un conjunto A cuyo cardinal sea a y un conjunto B cuyo cardinal sea b , al formar el producto cartesiano $A \times B$, el cardinal de dicho producto es el resultado deseado c .

Propiedades:

- Clausurativa: el producto de dos números naturales es otro número natural.

- Asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Comutativa: $a \times b = b \times a$
- Existencia de elemento neutro: el natural 1 ; $a \times 1 = 1 \times a = a, \quad \forall a \in N$
- Distributiva respecto a la adición: $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$ para cualesquieras números a, b y c .

Al cumplirse la propiedad clausurativa, la multiplicación es una ley de composición interna en N . Esto quiere decir que a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, que suele llamarse la suma de ambos números. En términos simbólicos, si $a \in M$ y $b \in M$ entonces $ab \in M$. En particular, si $M = N$ donde N es el conjunto de los números naturales, entonces la multiplicación, en tanto operación binaria, es una función de $N \times N$ en N , que envía (a, b) en $a \times b$, esto es:

$$\begin{aligned} &N \times N \rightarrow N \\ &(a, b) \rightarrow a \times b \end{aligned}$$

Finalmente, se presenta la **definición recursiva de la multiplicación**, basada en los axiomas de Peano, en la que se retoma la idea euclídea de multiplicación en los números naturales así:

1. A cada par de números x, y corresponde exactamente un número natural llamado $x \cdot y$, que se lee “veces” tal que:
 - i) $x+1 = x^+$, para todo x
 - ii) $x \cdot y^+ = x \cdot y + x$, para todo x, y

$x \cdot y$ es llamado el producto de x y y , o el número obtenido de la multiplicación de x y y .
2. La multiplicación de números naturales también admite una definición por recurrencia de la siguiente manera:
 - i) $n \cdot 0 = 0$
 - ii) $n k^+ = n k + n$, para cualquier números naturales n y k .

En la etapa del cálculo multiplicativo, el trabajo con las tablas de multiplicar como herramientas para la solución de algoritmos es necesario, sin embargo lo realmente interesante de estas tablas

no es su resultado sino los conceptos implícitos de la multiplicación que se encuentran en ellas, como la adición, valor posicional y descomposición del número, entre otros conceptos.

En los apartados del 2.1.1 al 2.1.4 se presentan diferentes acercamientos a la multiplicación desde lo didáctico y fundamentados desde el referente matemático.

2.1.1 Tablas de multiplicar

Para que el trabajo de las tablas de multiplicar sea más significativo por parte de los estudiantes se han propuesto algunas estrategias de cálculo que les permitan calcular las multiplicaciones básicas (Heege, 1985, Citado por Maza, 1991, p 87-89).

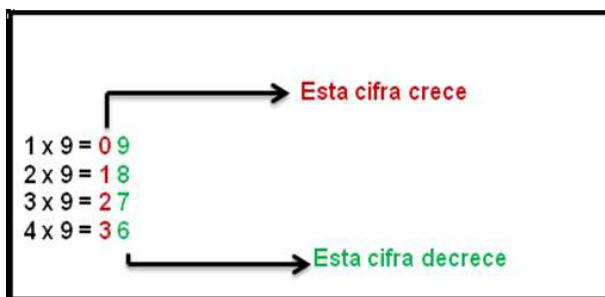
- i) **Propiedad Conmutativa:** el orden de los factores no altera el resultado de la multiplicación, esto conduce a reducir el aprendizaje memorístico de las tablas a la mitad.
- ii) **Multiplicación por 10:** la regla de que un número multiplicado por 10 es igual a ese mismo número añadiéndole un cero a la derecha.
- iii) **Calculo del doble:** a partir de las multiplicaciones por 2 es posible deducir aquellas donde el factor es 4 sin más que doblar el resultado anterior. Asimismo, al doblar las multiplicaciones por 4 se deducen los resultados de multiplicar por 8; la misma relación une a las multiplicaciones por 3 y por 6.
- iv) **Calculo de la mitad:** aunque esta estrategia pueda aplicarse de 8 a 4, de 4 a 2 o de 6 a 3, lo habitual es hacerlo de 10 a 5.
- v) **Adición del multiplicando:** apoyándose en una multiplicación por un determinado número es posible obtener el resultado de multiplicar por el siguiente número sin más que añadir una vez el multiplicando. De esta forma se puede deducir el valor de 6×8 recordando el resultado de 5×8 y añadirle 8 al mismo.

$$6 \times 8 = 5 \times 8 + 8 = 40 + 8 = 48$$

vi) **Sustracción del multiplicando:** la estrategia simétrica de la anterior es particularmente aplicable a las multiplicaciones del 9 por los restantes números, sin más que partir del conocido resultado de multiplicar por la decena. Por ejemplo:

$$9 \times 7 = 10 \times 7 - 7 = 70 - 7 = 63$$

vii) **Patrones:** sin necesidad de efectuar ningún cálculo, simplemente creciendo o decreciendo el valor en las cifras numéricas. Por ejemplo:



*Figura N° 3 Patrón numérico
Tomado de: Ángel & Candamil, 2013. p.26*

Otro aspecto importante que es necesario tener en cuenta en la fundamentación del concepto de la multiplicación es lo expuesto por Castro. E, Rico. L y Castro, E, quienes afirman que “*Comenzar a trabajar el producto exige que el niño tenga un nivel de uso y dominio de los números, que conozca su simbolización, todo ello en un grado más completo que en el caso de la suma y la resta*” (1999, p.139) es decir, que el producto requiere ser tratado con conocimientos más estructurados, por esta razón, se presentan algunos modelos a través del cual se estudia la multiplicación y se enfatiza un contexto particular del número. A continuación, se presentarán los modelos que se tendrán en cuenta:

2.1.2 Modelos lineales: se utiliza la línea numérica, si la línea numérica tiene un soporte gráfico, el producto $n \times a$ (“ n veces a ”) se modeliza formando un intervalo de longitud a - unidades y contándolo n -veces. Cuando la recta no tiene soporte material se cuenta sobre la sucesión numérica de a en a , hasta hacer n veces ese recuento. Esta destreza se ha estimulado con trabajo previo sobre recuentos en la recta de *2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4*, etc. Tal como se presenta en la figura N°4.

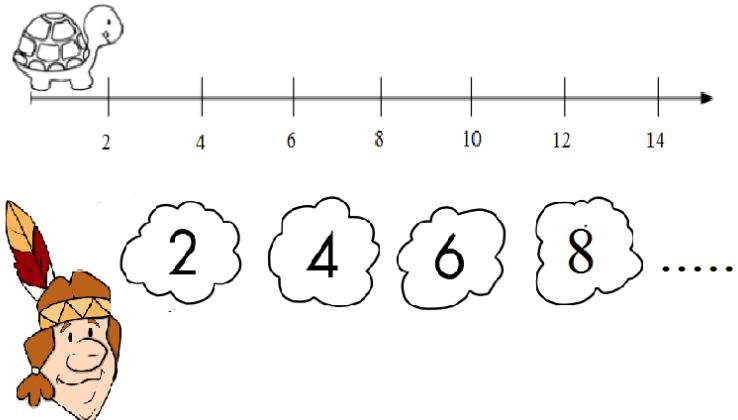
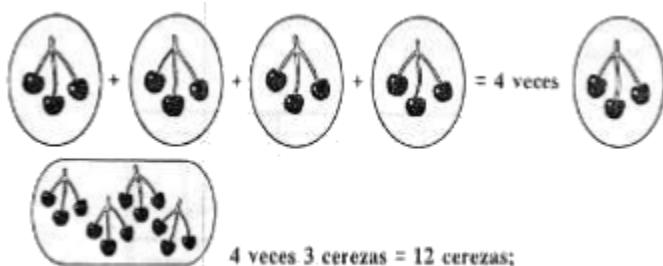


Figura N° 4 Multiplicación como modelo lineal

2.1.3 Modelos cardinales: se utiliza en el contexto cardinal para representar uno o los dos factores. Entre los tipos más utilizados tenemos:

- La unión repetida o adición repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos. Tal como se presenta en la figura N°5.



*Figura N° 5 Multiplicación como unión repetida
Tomado de: Ángel & Candamil, 2013. p.27*

- La distribución de objetos en un esquema rectangular, en el cual se hace una fila con tantos objetos como nos indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador. Tal como se presenta en la figura N°6.

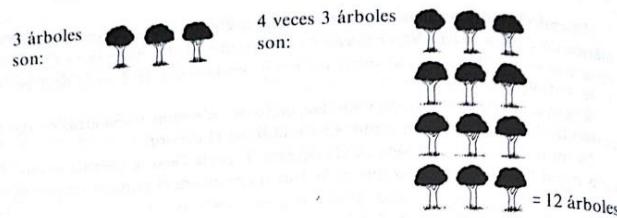


Figura N° 6 Multiplicación como esquema rectangular
Tomado de: Ángel & Candamil, 2013. p.28

- Más formalizado que el caso anterior es la representación mediante producto cartesiano de dos conjuntos. Así el producto 2×3 se puede representar tomando un conjunto de 2 blusas y otro de 3 pantalones, y formar todos los pares ordenados de blusa y pantalón, normalmente mediante un cuadro de doble entrada. El total de pares ordenados nos da el resultado del producto 2×3 , tal como se presenta en la figura N° 7.

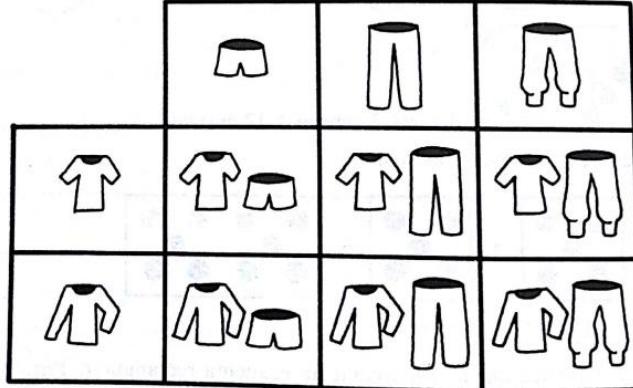


Figura N° 7 Multiplicación como producto cartesiano de dos conjuntos
Tomado de: Ángel & Candamil, 2013. p.28

2.1.4 Modelos combinatorios: otra forma de usar los diagramas lineales para representar un producto es mediante el diagrama de árbol. En el diagrama de árbol se abren a partir de un punto, tantas líneas como indique el multiplicador, y en cada uno de los extremos se

vuelven abrir tantas líneas como indique el multiplicando. Tal como se observa en la siguiente figura Nº 8.

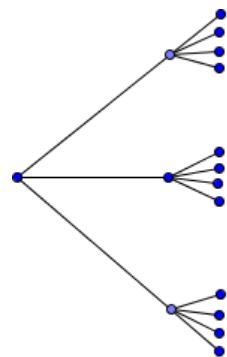


Figura Nº 8 Multiplicación como diagrama de árbol
Adaptado de: Ángel & Candamil, 2013. p.29

En este trabajo, se pretende hacer uso de uno de los modelos anteriores para el diseño del recurso pedagógico, porque cada uno de ellos va a permitir diseñar distintas actividades que brinden acercamientos diferentes a la manera como tradicionalmente se aborda la multiplicación que permitan a los estudiantes reconocer los diferentes tipos de representación y propiedades de esta operación. Tradicionalmente el concepto de multiplicación es introducido como suma reiterada, pero para la elaboración de la propuesta de este recurso pedagógico se tomará como referencia el modelo lineal. También se utilizará la representación geométrica para contribuir a la construcción de las tablas de multiplicar y las propiedades inmersas en ellas.

2.2 Referente curricular

En aras de mejorar la calidad de la educación, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1.998), presenta una estructura curricular en la que se incluyen unos *procesos generales* relacionados con el aprendizaje; unos *conocimientos básicos* ligados a los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas; un *contexto* que tiene que ver con el ambiente que rodea al estudiante y que le da sentido a las matemáticas que aprende. Uno de los retos de los profesores en su labor profesional es relacionar estos tres grandes aspectos que hacen parte de la estructura curricular con los cinco pensamientos matemáticos. Dicha estructura curricular debe articularse con las áreas del conocimiento para contribuir con la educación y con el desarrollo integral de los estudiantes.

Es importante considerar que los lineamientos curriculares hacen énfasis en la manera que se deben modelar los procesos generales al momento de enseñar y en la forma como se deben abordar los conocimientos matemáticos. Para lograrlo plantean cinco procesos generales:

- **Planteamiento y formulación de problemas:** este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de las matemáticas y no una actividad aislada y esporádica, es decir, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo, debido a que las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y por ende sean más significativas para los estudiantes.
- **Modelación:** el punto de partida de la modelación es una situación problemática real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses de quien resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se pueda manejar en el aula), que por una parte aún contiene las características

esenciales de la situación original; y por otra parte, está ya tan esquematizada que permite una aproximación con medios matemáticos.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los “elementos básicos” de la situación original o del problema formulado; y de ciertas relaciones entre esos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos “elementos básicos”.

- **La comunicación:** en este proceso las matemáticas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y se representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicional a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente. El proceso de comunicación hace referencia a como se pueden representar los objetos de diferentes maneras, teniendo distintos registros de representación.
- **El razonamiento:** en este proceso, el desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones, o sea que, se evidencia la manera como se pueden justificar, refutar las conjeturas, dar explicaciones coherentes o poder decidir sobre la veracidad de un razonamiento lógico. Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos, geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas.

- **La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos:** este proceso implica comprometer a los estudiantes tanto en la construcción como en la ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”, en otras palabras, se emplean mecanismos que contribuyen a la ejecución de procedimientos rutinarios para la adquisición de un concepto.

En el diseño del recurso pedagógico se hará énfasis en el razonamiento como proceso general, puesto que permite evidenciar las estrategias, procedimientos o explicaciones coherentes que realiza el estudiante al enfrentarse a diferentes actividades matemáticas, como se menciona en los lineamientos curriculares: “se entiende por razonamiento la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión” (1998, p.77), es por esto que se considera conveniente involucrar el razonamiento en todas las actividades matemáticas, especialmente en el diseño del presente recurso pedagógico.

Con el uso del recurso pedagógico se pretende hacer énfasis en el razonamiento numérico para la construcción de las tablas de multiplicar, a partir de sus propiedades, particularmente de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y a la propiedad conmutativa, de tal manera que puedan fortalecer como estrategia el cálculo mental.

Es importante que los estudiantes desarrollen habilidades para justificar estrategias y procedimientos, encontrar patrones y especialmente argumentar, basándose en que las matemáticas son lógicas y deben potenciar la capacidad de pensar.

Desde los lineamientos curriculares se presentan los conocimientos básicos, que hacen referencia a aquellos procesos propios que fundamenten y permiten el desarrollo del pensamiento matemático, en este caso, dicho conocimiento se centrará en el pensamiento numérico y sistemas numéricos. Los sistemas son las herramientas para desarrollar dicho pensamiento, en este sentido McIntosh (1992) citado por el MEN (1998), amplía este concepto y afirma que “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad e inclinación a usar esta

comprensión de formas flexibles para hacer juicios matemáticos, así como, para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Además, se hará énfasis en las operaciones básicas de la aritmética y particularmente en la multiplicación, pues como las demás operaciones, desarrolla en los estudiantes habilidades y estrategias útiles para resolver diferentes situaciones de su vida cotidiana.

Para lograr que los estudiantes desarrollen pensamiento numérico, el profesor debe idear y utilizar estrategias que les brinden la posibilidad de pensar en los números mediante actividades que se relacionen con su vida cotidiana, en diversos contextos y que puedan usar en un entorno significativo; tal como lo menciona el (MEN, 1998, p. 26).

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos. Por lo cual la multiplicación según el (MEN, 1998, p. 33) debe ser abordada como:

- Factor multiplicante
- Adicción repetida
- Razón
- Producto cartesiano.

Lo anterior permite ilustrar el significado de esta operación y pone de manifiesto los contextos generales del número y la peculiaridad de cada operación, lo que significa que con las diferentes maneras de acceder a diferentes representaciones se pueden producir acercamientos contextualizados a dicho concepto, que permiten que los estudiantes adquieran habilidades y destrezas que favorezcan el desarrollo del pensamiento numérico. Por ello la importancia de tener en cuenta la coherencia horizontal y vertical del pensamiento numérico.

2.2.1 Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Teniendo en cuenta la correspondencia que existe entre la multiplicación con cada uno de los pensamientos matemáticos, y el papel que juega el saber matemático cuando se aborda esta operación en el proceso de enseñanza, es importante conocer sobre la relación que mantiene el estándar del pensamiento numérico, con los procesos de la actividad matemática y la integración de éste con los distintos pensamiento dentro del mismo grado.

De ahí el interés de que el análisis se cierre en el primer conjunto de grados, que va desde el grado primero hasta tercero, porque en este ciclo es en el que se fundamenta el concepto de la multiplicación.

Tabla N° 1 Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento numérico y los sistemas numéricos

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos
Tipo de Pensamiento Matemático
Pensamiento Numérico y los sistemas numéricos: Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Pensamiento Espacial y sistemas geométricos: Reconozco nociones horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.
Pensamiento Métrico y los sistemas métricos o de medida: Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir (longitud, área) y en los eventos su duración.
Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos.

Adaptado de: *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006, p.80-81.*

Los estándares que se han seleccionado por tipos de pensamiento descritos en la tabla N°1 presentan elementos conceptuales que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y una articulación entre ellos, en un mismo grado escolar. Desde esta perspectiva se puede percibir que la multiplicación como operación aritmética, no solo se relaciona dentro del pensamiento

numérico con otras operaciones, sino que se articula con los otros pensamientos matemáticos, presentados en la tabla anterior.

Al analizar la relación que presenta el estándar del pensamiento numérico con los estándares de los demás pensamientos, se puede observar como dentro del *Pensamiento Numérico* se pueden utilizar situaciones problemas que propicien el uso del cálculo mental como estrategia para resolver situaciones multiplicativas. El *Pensamiento Espacial* está encaminado al reconocimiento de nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos, este se podría relacionar en la construcción de la tabla pitagórica cuando se articula la representación geométrica. El *Pensamiento Métrico* está orientado a procedimientos que aluden al uso de medición y patrones arbitrarios dentro de distintos contextos, en situaciones multiplicativas se puede favorecer la estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes, como la longitud y el área. El *Pensamiento Variacional* está orientado a reconocer patrones en distintos contextos, estos se pueden utilizar en la construcción de las tablas de multiplicar. Todo lo anterior permite evidenciar una de las relaciones que tiene el estándar del pensamiento numérico con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo grado, y que es necesario tener en cuenta al momento de realizar la configuración del recurso pedagógico.

2.2.2 Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En cuanto a la coherencia vertical, hay que tener presente la correspondencia que debe existir entre un estándar del grado de interés, con los estándares de los otros grados, como se muestra en la siguiente tabla N° 2

Tabla N° 3 Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento numérico y los sistemas numéricos

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos	
Conjunto de grados	Estándar básico
Primero a tercero	<ul style="list-style-type: none"> Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Cuarto a quinto	<ul style="list-style-type: none"> Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Sexto a séptimo	<ul style="list-style-type: none"> Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
Octavo a noveno	<ul style="list-style-type: none"> Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

Adaptado de: *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006, p.80-86.*

Teniendo en cuenta la relación que debe mantener cada estándar con el pensamiento numérico, en cada uno de los grados, tanto de la educación básica como de la media, se evidencia que la multiplicación es una operación fundamental para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, pues se observa que en los diferentes grados de la escolaridad, este algoritmo se utiliza con cierta regularidad en la resolución de diferentes tipos de situaciones problema, en diferentes procesos de aprendizaje matemático.

Al analizar los estándares del pensamiento numérico, propuestos para los grados cuarto y quinto, es evidente que el concepto de multiplicación evoluciona con la enseñanza de la proporcionalidad directa e inversa; de las conversiones en las medidas de longitud, de la potenciación, la radicación, los criterios de divisibilidad y la teoría de números en general. En la propuesta para sexto y séptimo encontramos una extensión de lo propuesto para cuarto y quinto, pero además se destaca la teoría de números. Ya que es una herramienta para la enseñanza del algoritmo de suma, resta, multiplicación y división con números racionales. Además se pretende que el estudiante pueda realizar conjeturas correctas para resolver determinados problemas.

Por último, en octavo y noveno se proponen dentro de los estándares el estudio de la potenciación, la radicación y logaritmación de números reales, en los que se involucra el concepto de multiplicación. En este ciclo, cuando se aborda el estudio del álgebra, el concepto de multiplicación se hace indispensable para resolver operaciones con polinomios y realizar la

factorización de los mismos. Lo anterior permite realizar discernimiento sobre los criterios que debemos manejar cuando se diseñe el recurso pedagógico, de acuerdo a los planteamientos que se presentan tanto en los lineamientos como en los estándares básicos de competencia.

En cuanto al impacto de la tecnología computacional en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, según las investigaciones realizadas en distintos niveles educativos por Hoyles y Sutherland, 1989; Balacheff y Kaput, 1996; Dettori et al., 2001; Mariotti, 2005 (Citado por Ursini) se pudo concluir que cierta manera de usarla puede ayudar a los estudiantes a:

- Formular y probar hipótesis.
- Modelar matemáticamente situaciones.
- Experimentar con modelos matemáticos.
- Trabajar con diferentes representaciones.
- Resolver problemas.
- La construcción conjunta de significados a través de la comunicación entre estudiantes y con el profesor.
- Disminuir notablemente la práctica de aplicar los algoritmos de manera rutinaria y se concentre en la resolución de problemas y la familiarización con los conceptos matemáticos involucrados.
- Aumentar la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas (Ursini, 2006, p.25).

Es muy importante aclarar, que no se trata de enseñar con las TIC para embellecer las clases, pues su finalidad pedagógica debe ser la de propiciar el desarrollo de los procesos cognitivos necesarios para aprender significativamente. En este sentido Coll y Gros (Citado por Rizzo) sostienen que “(...) No son las TIC, sino en las diversas actividades propuestas por el profesor, donde se observa el impacto sobre la enseñanza y aprendizaje” (Rizzo, 2014, p.6) Se puede hacer uso de las TIC para ofrecer distintas formas de trabajar los contenidos y actividades, de tal modo que el estudiante sea el que construya su propio conocimiento, a través de la retroalimentación inmediata que brinda la tecnología, lo que le permite descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos. La tecnología puede permitirle al estudiante profundizar de manera más inmediata, sin

embargo debe ser el profesor quien oriente y desarrolle ambientes de trabajo que estimulen la reflexión y conviertan a los estudiantes en sujetos proactivos, en la construcción de su conocimiento.

2.3 Referente didáctico

En la realización del presente trabajo es necesario precisar elementos didácticos de los instrumentos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Rabardel (1999) hace un acercamiento desde la perspectiva instrumental en el campo de la Didáctica de las Matemáticas estudiando la influencia profunda de los instrumentos en el aprendizaje de las Matemáticas (Rabardel, 1999, citado por Santacruz, M. 2013, p. 2). Este autor muestra la importancia que tiene la mediación de los instrumentos en la construcción del saber matemático, en este caso, el papel que juega la integración de GeoGebra en el diseño de un recurso pedagógico para la enseñanza de la multiplicación.

2.3.1 Recurso pedagógico

Procurar analizar y comprender el concepto de **recurso pedagógico**, permite aludir a diferentes estudios que se relacionan con este tema, en los que se contrastan la expresión “recurso pedagógico” para abarcar en un mismo campo de reflexión a todo lo que el profesor puede apelar para la puesta en marcha de sus clases; sin embargo, se ha presentado un redimensionamiento acerca del desarrollo de la noción de recurso pedagógico, en el que se identifican tres perspectivas (Garzón. D, Pabón. O, Vega. M. 2013, p. 2):

- En la primera perspectiva, Guin y Trouche (2007) describen los recursos pedagógicos bajo tres componentes: el conjunto de documentos, la situación matemática, y el aprovechamiento didáctico. En sus investigaciones, han destacado particularmente los procesos de documentación de los profesores. Para el estudio del conjunto de documentos de los recursos se consideran *los escenarios de uso* que caracterizan la organización de una secuencia de situaciones con una estructura, en la que además de la situación, se tiene en

cuenta la mediación de un artefacto en la actividad de los profesores y los estudiantes. Esta perspectiva además considera el recurso pedagógico como un artefacto que está a disposición del profesor y que es susceptible de evolución.

- En la segunda perspectiva, Haspekian y Artigue (2007) formulan la conceptualización de los recursos pedagógicos a partir del estudio e integración de artefactos informáticos en la enseñanza de las matemáticas que no están diseñados para tal fin, pero que pueden apoyar o ayudar en otras actividades profesionales, es el caso de hoja de cálculo.
- En la tercera perspectiva, Hegedus y Moreno (2010) amplían la manera de entender el artefacto en el enfoque instrumental, en particular, relacionándolo con los procesos de instrumentación e instrumentalización asociados a diferentes niveles de la orquestación instrumental (Rabardel, 1995) y con la clasificación de los artefactos que propone Wartofsky. Este último autor clasifica los artefactos en primarios, secundarios y terciarios. Los **primarios**, corresponde al dispositivo que es usado. Los **secundarios**, son los que se configuran con base en las representaciones que el usuario hace de los artefactos primarios. Los **terciarios**, constituidos por los expertos quienes los usan tanto en situaciones simuladas como en situaciones en las que son dominantes los métodos reflexivos y de autoanálisis de su propia actividad o de la actividad colectiva.

De acuerdo a las tres perspectivas planteadas anteriormente en cuanto a la noción de recurso pedagógico, en este trabajo se tendrá en cuenta la perspectiva de Guin y Trouche (2007) como un conjunto de documentos que ponen a disposición de los profesores situaciones matemáticas y elementos para implementarlos en sus clases. La noción de recurso pedagógico utilizada para el desarrollo del trabajo se define bajo tres componentes:

- El primer componente considera todos los documentos que soportan la idea que se tiene para el diseño del recurso pedagógico como es el caso de los Lineamientos curriculares de Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y el referente matemático. Estos presentan la estructura curricular que debe articularse con las áreas del conocimiento, a fin de contribuir en la educación y desarrollo integral de los estudiantes e

indagar acerca del artefacto que se va emplear en el diseño, de las potencialidades que este puede brindar y de la manera como se va utilizar.

Otro documento importante son las fichas de instrucción que hacen parte integral del recurso. Para las fichas de instrucción se tuvo en cuenta lo expuesto por Joab, Guin y Trouche (2003), quienes afirman que un recurso pedagógico está compuesto de varios elementos: la ficha de identificación, la ficha del estudiante, la ficha del profesor, la ficha de escenario de uso, la ficha técnica y el informe de experimentación. Dentro del trabajo no se va dar cuenta del informe de experimentación, porque no se va aplicar y como consecuencia no se recibirá una retroalimentación de los profesores, solo se dejará a disposición de ellos el recurso, en la página oficial de GeoGebra.

- El segundo componente, tiene en cuenta el tipo de actividades que se van a proponer al estudiante.
- El tercer componente, es la gestión didáctica que puede emplear el profesor para concebir el conocimiento en el aula de clase, considerando también la práctica discursiva como aquella que permite potenciar el aprendizaje del estudiante.

Con todo lo expuesto se pretende diseñar un recurso a disposición del profesor, para que lo integre al aula de clase, teniendo en cuenta las sugerencias dadas en la ficha del profesor y del escenario de uso, según sus necesidades. El recurso diseñado puede ser también consultado y utilizado por los estudiantes para que interactúen con el artefacto en la actividad matemática y así puedan comprender o concebir un nuevo conocimiento.

2.3.2 Orquestación instrumental

Uno de los constructos teóricos importantes del enfoque instrumental es la denominada *Orquestación Instrumental*, que en términos de Trouche es definida como:

La gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor lo que implica que él tenga en consideración los artefactos (computadores, lápiz y papel, GeoGebra, calculadoras, entre otros) que se van a integrar a la clase, así como la intencionalidad didáctica de los mismos, con el objetivo de proporcionar construcciones mentales en los estudiantes acerca de las nociones matemáticas, además el profesor debe tomar decisiones respecto al diseño de la clase y a los criterios que orientan el diseño de las actividades (Santacruz , 2011. Citado por Campo & Meléndez, 2016, p. 17-18).

La orquestación instrumental es interpretada como la relación que se da entre todos los elementos que intervienen en el aula de clase, en un ambiente de aprendizaje tecnológico, en el que el profesor dentro de la gestión didáctica ayuda a la generación de una génesis instrumental en los estudiantes, propiciando la emergencia de instrumentos que medien la actividad matemática y generen procesos cognitivos o esquemas de acción instrumentada de las nociones matemáticas.

Uno de los propósitos de la orquestación instrumental, es el de proporcionar las condiciones para que los estudiantes se desenvuelvan con fluidez y eficacia ante una situación matemática haciendo uso de las TIC, teniendo en cuenta en cada actividad, el direccionamiento del profesor. Para la orquestación instrumental, el profesor tiene un papel central, pues es “(...) el conductor de la orquesta antes que una banda de un solo hombre” (Trouche, 2004, p. 299); sin embargo, la orquestación instrumental, siempre da un espacio para la improvisación del estudiante, porque le da la posibilidad de elegir la configuración didáctica del recurso, lo que sucede siempre bajo la dirección del profesor.

Un punto de vista de la orquestación instrumental, es que éste debe hacerse en diferentes niveles. Chevallard (1992, citado por Guin & Trouche, 2007) Estos tres niveles de interacción didáctica esencial son:

- *Hardware Didáctico*: formado por los componentes materiales del ambiente, diversos artefactos tales como calculadoras, retroproyector, programas para la enseñanza, así como modos de empleo, fichas técnicas, entre otros.

- *Software Didáctico*: constituido por las actividades de aprendizaje.
- *Sistema de aprovechamiento didáctico*: las instituciones escolares deben encargarse de hacer explícitos los procesos de enseñanza, esto requiere del diseño de situaciones que aseguren la integración de instrumentos en una clase, su viabilidad, coordinación e integración de los dos primeros niveles. Para ello es necesario definir el tiempo, el espacio y la organización de instrumentos en el aula, que guíen a los profesores y estudiantes en su empleo.

El propósito de la orquestación instrumental, tal como se concibe en este trabajo, es la de promover la génesis instrumental de los estudiantes, a partir de la implementación de las TIC (GeoGebra), con la finalidad de propiciar la construcción de un instrumento que medie en la actividad su aprendizaje matemático; para conseguirlo, conviene que el profesor indague y se apropie de los elementos, dimensiones y tipos de orquestación instrumental, tal y como lo muestra la siguiente figura (Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K., 2010, Citado por Campo & Meléndez, 2016, p. 18):

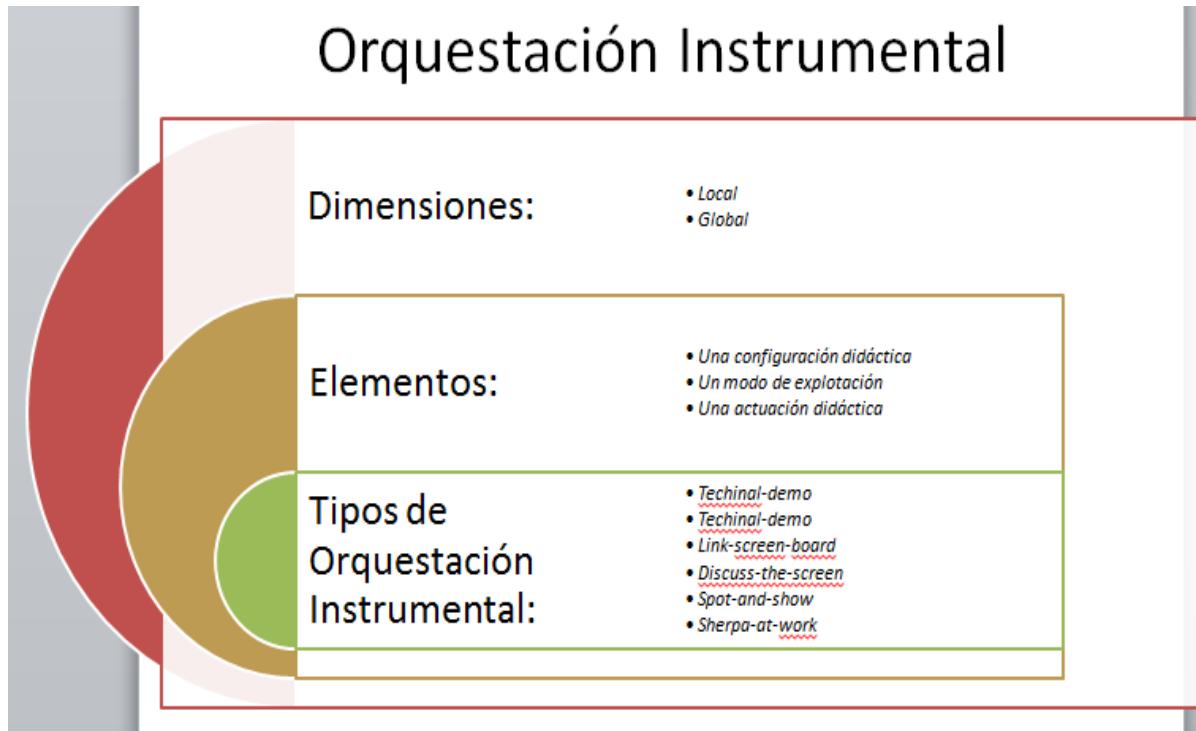


Figura N° 9 Elementos, dimensiones y tipos de orquestación instrumental
Adaptado de: Campo & Meléndez, 2016, p.18.

La dimensión local hace referencia al entorno didáctico que se ha acondicionado en el salón de clase, para un determinado grupo de estudiantes, con los que se pretende alcanzar unos logros y competencias bajo unas determinadas directrices didácticas. *La dimensión global* apunta a todas las estrategias y métodos de enseñanza que utiliza el profesor en el salón de clase, para la configuración del recurso pedagógico. En este trabajo se tendrá en cuenta la dimensión local, ya que con ella se puede abordar de manera puntual un concepto matemático “la enseñanza de la multiplicación” con un determinado grupo de estudiantes.

Respecto a los elementos de la orquestación, se tendrá en cuenta lo expuesto por Perez, C., quien hace referencia a que la orquestación instrumental es parcialmente preparada de antemano, pero también creada en el lugar, mientras se realiza la enseñanza (Drijvers & Kieran, 2010. Citado por Perez, 2014, p. 143).

1. ***Una configuración didáctica*** es un arreglo de artefactos en el ambiente, en otras palabras, es una configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella.
2. ***Un modo de explotación*** de una configuración didáctica es la manera como el profesor decide explotarla para beneficio de sus intenciones didácticas. Incluye las decisiones sobre la forma en que una actividad es introducida y trabajada. Además debe considerar los posibles roles que juegan los artefactos y los esquemas y las técnicas que serán desarrolladas y establecidas por los estudiantes.
3. ***Una actuación didáctica*** involucra las decisiones ad hoc tomadas durante la enseñanza, en lo que atañe a la forma en que debe llevarse a cabo esta, y que fue definida en la configuración didáctica. Además debe tenerse en cuenta los modos de explotación elegidos.

Los elementos de la orquestación y la configuración didáctica hacen referencia a la manera como se configuran los objetos o artefactos que se involucran en la enseñanza. *Los modos de explotación* de una configuración didáctica hacen énfasis en la forma en la que el profesor utiliza y aprovecha la configuración didáctica, en pro de cumplir los objetivos propuestos. *La actuación didáctica* se refiere al funcionamiento de la misma, que depende de las medidas que tome el profesor, durante el transcurso de la clase.

Los tres elementos de la configuración experimental contribuyen a una adecuada planificación de las actividades que el profesor pretende realizar, con la intención de que cuando se pongan en escena se vea reflejada en la articulación y óptimo funcionamiento de todos y cada uno de los elementos de la clase. El papel del profesor es el de velar por el buen funcionamiento de ésta y para lograrlo debe realizar los ajustes correspondientes sobre la marcha hasta alcanzar los objetivos propuestos.

En cuanto a los tipos de orquestación (Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K., 2010, Citado por Campo & Meléndez, 2016, p. 18-21) se distinguen seis. Estos seis tipos de orquestación se pueden dar por separado o por combinaciones entre ellos. Estas son sus definiciones:

Techinal-demo: Demostración de las técnicas de la herramienta por parte del profesor. El trabajo del estudiante es generalmente individual. El objetivo es evitar que surjan obstáculos por la falta de experiencia de los estudiantes con los artefactos, incluye el acceso al applet y al Entorno Digital de Matemáticas (EDM), procedimiento para conectar la pantalla al ordenador. Además, incluye la distribución del aula, de tal manera, que permita a los estudiantes seguir las construcciones o instrucciones. Como modo de explotación, los profesores pueden demostrar técnicas en una actividad o utilizar el trabajo de los estudiantes para mostrar diferentes técnicas.

Explain-the-screen: Explicación guiada a toda la clase por parte del profesor, de lo que sucede en la pantalla del ordenador. La explicación va más allá de las técnicas e implica el contenido matemático. Las configuraciones didácticas pueden ser similares a las características del *Techinal-demo*. Como modo de explotación, los profesores pueden utilizar el trabajo de los estudiantes como punto de partida para la explicación o iniciar dándole solución a sus propias actividades.

Link-screen-board: El profesor hace hincapié en la relación que se genera entre el entorno tecnológico y su representación en las matemáticas convencionales (lápiz y papel). Además facilita el acceso y proyección al EDM (Entorno Digital de Matemáticas); que es una configuración didáctica, que incluye una pizarra que se ajusta, para que la pantalla y el tablero

sean visibles en toda el aula. Como modo de explotación, los profesores pueden tomar el trabajo del estudiante como punto de partida o comenzar con la actividad que él mismo ha propuesto.

Discuss-the-screen: Discusión con toda la clase de lo que sucede en la pantalla del ordenador. El objetivo es mejorar la génesis instrumental colectiva e individual. Se explota el trabajo previo e individual. Una configuración didáctica incluye el acceso al EDM (Entorno Digital de Matemáticas) y los applets que se proyectan, estos permiten el acceso al trabajo de los estudiantes, propiciando una configuración favorable para la discusión en clase. Como modos de explotación, en el punto de partida o para la retroalimentación del trabajo que hacen los estudiantes, se pueden utilizar actividades o problemas recogidos por el profesor o las soluciones que proponen los mismos estudiantes.

Spot-and-show: El razonamiento del estudiante se pone en primer plano, a través de la identificación del trabajo en el EDM, durante la preparación de la lección y su uso en el aula. Además de las características mencionadas anteriormente, una configuración didáctica incluye el acceso al EDM durante la preparación de la lección. Como modos de explotación, el profesor puede pedirles a algunos estudiantes que expongan sus razonamientos, para que los demás estudiantes debatan sobre ellos.

Sherpa-at-work: Un determinado estudiante-sherpa, utiliza la tecnología para presentar el trabajo realizado o para llevar a cabo las peticiones del profesor. En las configuraciones didácticas, el estudiante puede tener el control del uso de la tecnología, los demás estudiantes deben ser capaces de seguir las acciones del estudiante y del profesor. El aula debe estar adecuada para que el Sherpa-estudiante pueda tener el control en la utilización de la tecnología y para que los demás estudiantes puedan seguir fácilmente las acciones del Sherpa-estudiante y del profesor. Como modos de explotación, el profesor o el sherpa-estudiante pueden presentar y explicar el trabajo o el profesor puede plantear preguntas al sherpa estudiante y pedirle que lleve a cabo acciones específicas en el entorno tecnológico.

Tabla Nº 4 Tipos de orquestación

Tipo de Orquestación	
Techinal-demo	Se apoya en la demostración de las técnicas de la herramienta por parte del profesor
Explain-the-screen	El profesor explica la clase, guiado por lo que sucede en la pantalla del computador
Link-screen-board	El profesor hace hincapié para relacionar lo que ocurre en un entorno tecnológico y como esto se presentan en las matemáticas convencionales (lápiz y papel)
Discuss-the-screen	Discusión con toda la clase de lo que sucede en la pantalla del computador
Spot-and-show	El razonamiento del estudiante se pone en primer plano a través de la identificación del trabajo en el entorno digital de matemáticas
Sherpa-at-work	El estudiante Sherpa utiliza tecnología para presentar el trabajo realizado.

Adaptado de: Campo & Meléndez, 2016, p.18.

En los seis tipos de orquestación instrumental que se acaban de presentar, se puede notar que los tres primeros están centrados en el papel que desempeña el profesor, mientras que en los tres restantes hay más participación de los estudiantes. Los seis tipos no son aislados si no que se relacionan entre ellos. La mayoría de los profesores están familiarizados con todos los tipos de orquestación instrumental, sin embargo deben tener en cuenta que algunos de ellos son más específicos para el uso de la tecnología y otros son más pertinentes para el estudio o la utilización de herramientas en particular.

La orquestación instrumental establece un dispositivo experimental propio de ambientes de aprendizajes informáticos, en los que el diseño y la puesta en escena de actividades son aspectos esenciales. Para efectos de la configuración del recurso pedagógico se tendrán en cuenta dos de los seis tipos de orquestación instrumental antes mencionados; estos son el *Explain-the-screen* y el *Spot-and-show*. Se escoge el *Explain-the-screen*, porque este tipo de orquestación instrumental permite que el profesor explique lo que sucede, a través de la pantalla del ordenador a toda la clase. En la configuración incluye el acceso al applet y al Entorno Digital de Matemáticas (EDM), en este caso GeoGebra. En el modo de explotación, los profesores pueden utilizar como punto de

partida la solución a sus propias actividades o el trabajo de los estudiantes. El *Spot-and-show* se escoge, porque brinda la posibilidad de poner en primer plano el razonamiento del estudiante y posee una configuración didáctica que incluye el acceso al EDM durante la preparación de la lección, Además en el modo de explotación, le da la opción al profesor de solicitar a algunos de sus estudiantes, que expongan sus razonamientos.

CAPÍTULO III REFERENTES METODOLÓGICOS

En el presente trabajo, la naturaleza del problema implica la incursión de un estudio de tipo cualitativo, apoyado en el análisis previo de actividades de aprendizaje, pues se requiere caracterizar a través del diseño de un recurso pedagógico, un acercamiento para la enseñanza de la multiplicación.

En el aprendizaje del sentido numérico, según Clements & Sarama (2009), los estudiantes siguen procesos naturales de desarrollo, adquiriendo ideas y habilidades a su manera. Cuando los profesores comprenden estos procesos de desarrollo, elaboran y siguen secuencias de actividades basadas en tales procesos y construyen ambientes de aprendizaje que son apropiados y efectivos en términos de desarrollo. Estas rutas de desarrollo son la base para las *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje* (THA).

Para diseñar las actividades del recurso pedagógico puesto a disposición de los profesores, se tendrá en cuenta como enfoque metodológico la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*, porque le proporciona al profesor criterios para seleccionar un diseño en particular; como consecuencia el profesor puede tomar decisiones de enseñanza basándose en la mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje (Simón, 1995, p. 135).

Las actividades diseñadas se ubicarán en un nivel global, de acuerdo a la orientación curricular para que permitan brindar un acercamiento al concepto de multiplicación con números naturales. Si los profesores conocen la idea de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* de tópicos matemáticos del currículo escolar, esta idea puede ayudarles a comprender el aprendizaje de sus estudiantes y a ajustar la planificación de la enseñanza en cualquier circunstancia.

Dentro del constructo de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* se presentan tres componentes relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del objetivo del aprendizaje, la planificación del profesor y las hipótesis del profesor acerca del proceso de aprendizaje (Clements y Sarama, 2009, Citado por Martínez, Llinares, Torregrosa, 2015, p.4). El primer componente de este

constructo permite especificar los contenidos y objetivos que se tienen en cada una de las actividades propuestas. El segundo componente hace énfasis en el diseño de algunas actividades que permitan brindar un acercamiento al concepto matemático. Por último, el tercer constructo admite reflexionar acerca de la manera cómo el conocimiento matemático es llevado a cabo en cada una de las actividades de aprendizaje propuestas.

La *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* según lo planteado por (Gómez, 2002, p.258) inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los estudiantes y teniendo en cuenta el contexto social, educativo e institucional. A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido, delimitando los contenidos que se pretenden tratar y los objetivos que se quieren lograr; para ello debe considerar el diseño curricular propuesto por los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas.

El análisis de contenido es un análisis desde la perspectiva de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. Con él se busca identificar y describir organizadamente los diversos significados matemáticos de la estructura matemática. La estructura matemática tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (Gómez, 2002, p.262). El análisis de contenido se presenta en este trabajo cuando se desarrolla el referente matemático y curricular, sin embargo se realizará de manera particular en el diseño del recurso pedagógico propuesto.

En el análisis cognitivo, el profesor describe sus hipótesis acerca de la forma como los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática, cuando se enfrenten a las actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis cognitivo es un análisis a priori y con este, el profesor pretende proveer las actuaciones de los estudiantes según las actividades que él ha diseñado. Estas hipótesis deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura

matemática sobre la cual se trabaja, en dichas actividades. El análisis de contenido sirve de punto de partida y de referencia para el análisis cognitivo (Gómez, 2002, p.271-272).

El análisis cognitivo es también la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al abordar dichas actividades; de las dificultades que subyacen a esos errores; y de los obstáculos que es necesario superar, para resolver dichas dificultades. El interés del profesor se debe centrar en identificar las capacidades de los escolares para establecer las relaciones necesarias al abordar y resolver las actividades propuestas, que a su vez se relacionan con los niveles del conocimiento procedural (Rico, 1997, Citado por Gómez, 2002, p.273):

Los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de las actividades matemáticas. Podemos distinguir tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos: las destrezas, los razonamientos y las estrategias. Las destrezas consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión; para que suceda dicha transformación hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos. Por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos. Los razonamientos se presentan al procesar relaciones entre conceptos y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos. Las estrategias se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

La configuración del recurso pedagógico se centra en el diseño de las actividades que lo conformarán y que son compatibles con el análisis de contenido y el análisis cognitivo. En el análisis de instrucción, el profesor organiza este universo y lo complementa con dos consideraciones adicionales: los materiales y los recursos disponibles (Gómez, 2002, p.277).

Desde la perspectiva del análisis de instrucción, la gestión de las actividades está encaminada al desarrollo de destrezas, razonamientos y estrategias de solución. En este sentido se establece

una relación entre el análisis de contenido; las estrategias de solución (análisis cognitivo) y la resolución de problemas (análisis de instrucción) (Gómez, 2002, p.278).

Al realizar el análisis de instrucción y el diseño de las actividades, el profesor pone en juego diversos conocimientos, la manera cómo él aborde el diseño y el tipo de actividad, depende de la visión y el conocimiento que tenga sobre la enseñanza de la matemática. El profesor pone también en juego conocimientos que son específicos de la estructura matemática (Gómez, 2002, p.282). En este caso, para el análisis de instrucción es importante dejar plasmada la intencionalidad con que fueron creadas las actividades, así como el tipo de actividad matemática que se pretende desarrollar y la manera en que se pueden gestionar las actividades de aprendizaje.

En el trabajo de grado estará presente el objetivo de aprendizaje en cada una de las actividades propuestas a los profesores, con el fin de dar claridad sobre la intención que se tiene en cada una de ellas. A continuación se presentan las fases propuestas para el ciclo del análisis didáctico, figura N°10, en la que se muestran herramientas conceptuales y metodológicas que se tendrán en cuenta para el desarrollo metodológico del presente trabajo. Se debe aclarar que de las seis fases sólo se desarrollaran las tres primeras.

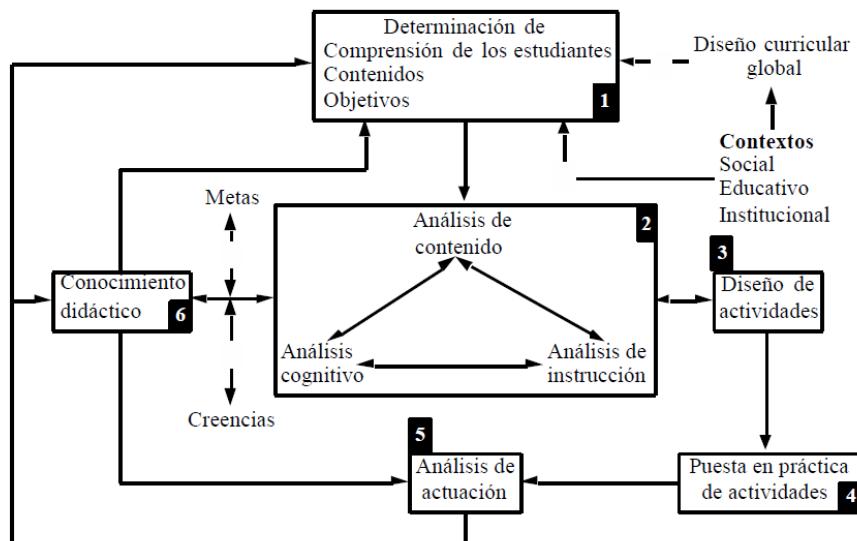


Figura N° 10 Ciclo de análisis didáctico
Tomado de: Gómez, 2002. p.258.

3.1 Desarrollo del análisis didáctico

En esta sección se delimitan los aspectos que guiarán el diseño de las actividades del recurso pedagógico, según los componentes que conforman el análisis didáctico.

3.1.1 Fase I: Determinación de contenidos y objetivos: se inicia con la determinación por parte del profesor (en este caso los autores del recurso pedagógico), de los conocimientos previos del estudiante, los contenidos matemáticos que se pretenden tratar y los objetivos que se quieren lograr en cada una de las actividades que conforman el recurso pedagógico.

Contenidos de la actividad 1:

- Figuras geométricas
- Patrones
- Variación
- Superficies

Objetivo: identificar la relación entre la medida de los lados de los rectángulos y su superficie, así como la variación que se da entre largo, ancho y la superficie de los mismos.

Contenido de la actividad 2:

- Conteo
- Descomposición de números
- Composición de superficies
- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Objetivo: Fortalecer el cálculo mental en los estudiantes y la aplicación de diferentes estrategias para la construcción y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Contenido de la actividad 3

- Propiedad conmutativa de la multiplicación

Objetivo: Identificar la propiedad conmutativa de la multiplicación al estimar la superficie de aquellos terrenos que tienen igual forma y tamaño, pero están ubicados en diferente posición.

3.1.2 Fase II: Análisis: En esta segunda fase se abordará el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

- **ANÁLISIS DE CONTENIDO:** este es un análisis de las matemáticas escolares, su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula (Gómez, P. 2002, p. 262) Permite describir la estructura conceptual que se va abordar en el proceso de enseñanza. Para este análisis se tendrán en cuenta los referentes matemáticos desarrollados en la sección 2.1 del presente trabajo y que son organizados en la figura N°11.

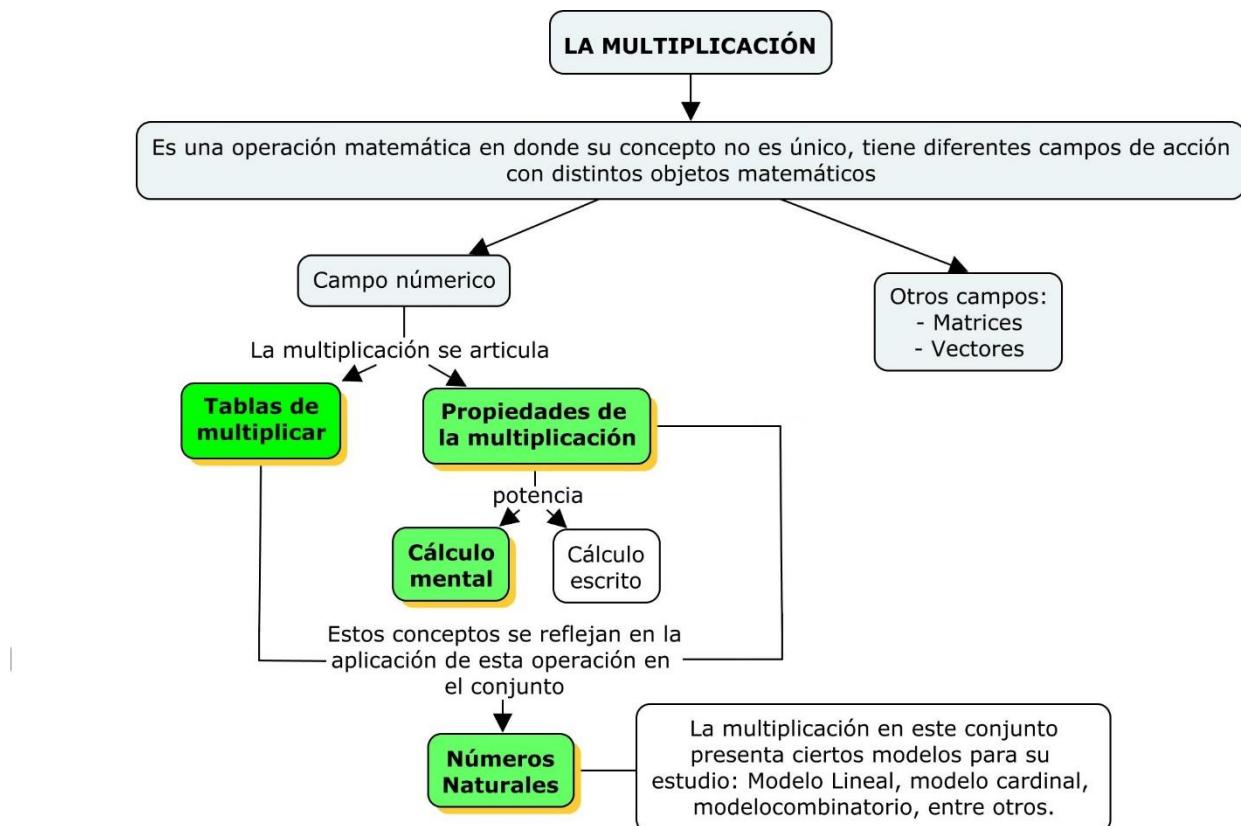


Figura N° 11 Estructura conceptual de la multiplicación

La estructura conceptual se ve enriquecida cuando se manejan los diferentes tipos de representación (numérica, geométrica y tabular). Para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta la representación gráfica, al vincular la representación geométrica en la tabla pitagórica y su relación con la representación tabular, para validar el resultado obtenido. El manejo de los diferentes sistemas de representación brinda diferentes posibilidades de construcción de las tablas de multiplicar. En la figura N°12 se muestran los diferentes sistemas de representación utilizados.

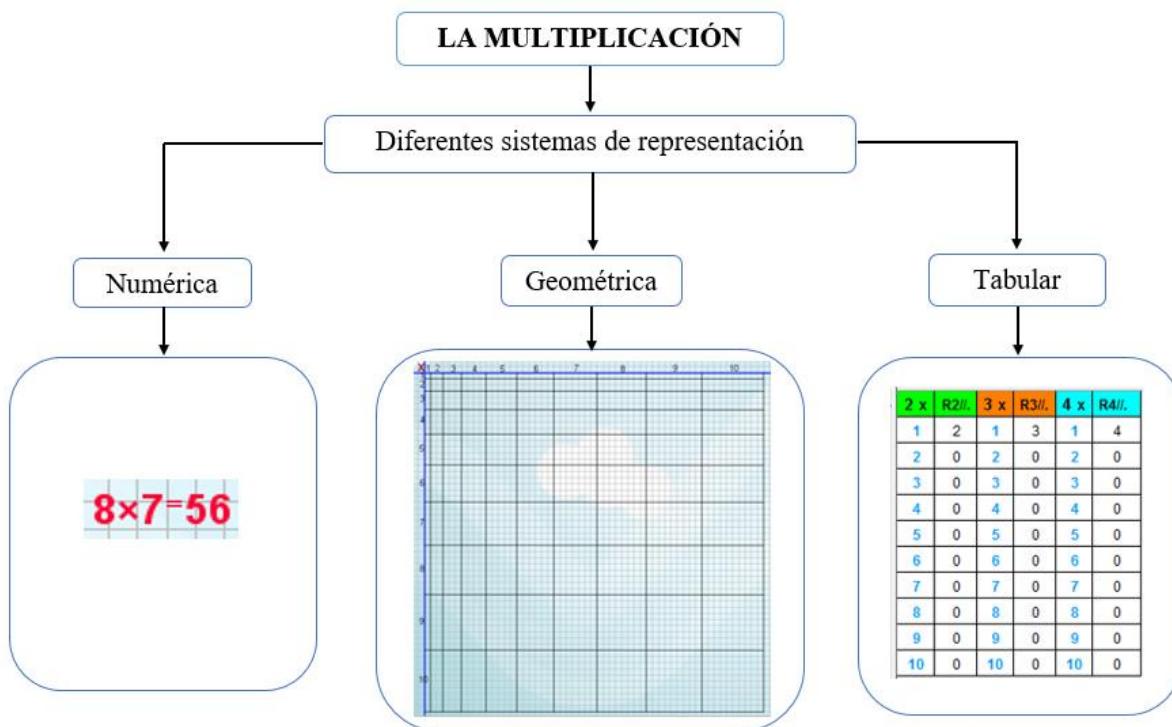


Figura N° 12 Diferentes sistemas de representación de la multiplicación

La cuadricula utilizada en la representación geométrica es considerada una variable didáctica, que permite al estudiante emplearla como estrategia para determinar la medida de la superficie de cada figura geométrica. Se utiliza la unidad cuadrada como el patrón de medida para calcular la superficie y hacer uso de unidades de medida no estandarizadas.

En GeoGebra es posible establecer la relación entre la representación geométrica y tabular, a partir de la retroalimentación que da el medio cuando se desea calcular el valor de la superficie de una figura. Se parte de la representación geométrica para realizar el conteo de unidades cuadradas y determinar la medida de la superficie, luego se digita el resultado obtenido en la tabla (hoja de cálculo) y si el valor es correcto aparece el resultado numérico en la respectiva figura.

En ese proceso de calcular la medida de la superficie de cada figura se presentan elementos conceptuales que permiten trabajar la construcción de las tablas de multiplicar y relacionar algunas de las propiedades de la multiplicación (Modulativa, Distributiva y Comutativa). Una de las estrategias utilizadas es hacer uso de un intervalo de longitud de unidades cuadradas contándolo n veces, para determinar la medida de la superficie de la figura.

Esta última estrategia utilizada para determinar la medida de la superficie, alude al modelo lineal para estudiar la multiplicación con los números naturales. A continuación se presentan en la Figura N°13 los modelos que permiten el estudio de la multiplicación.

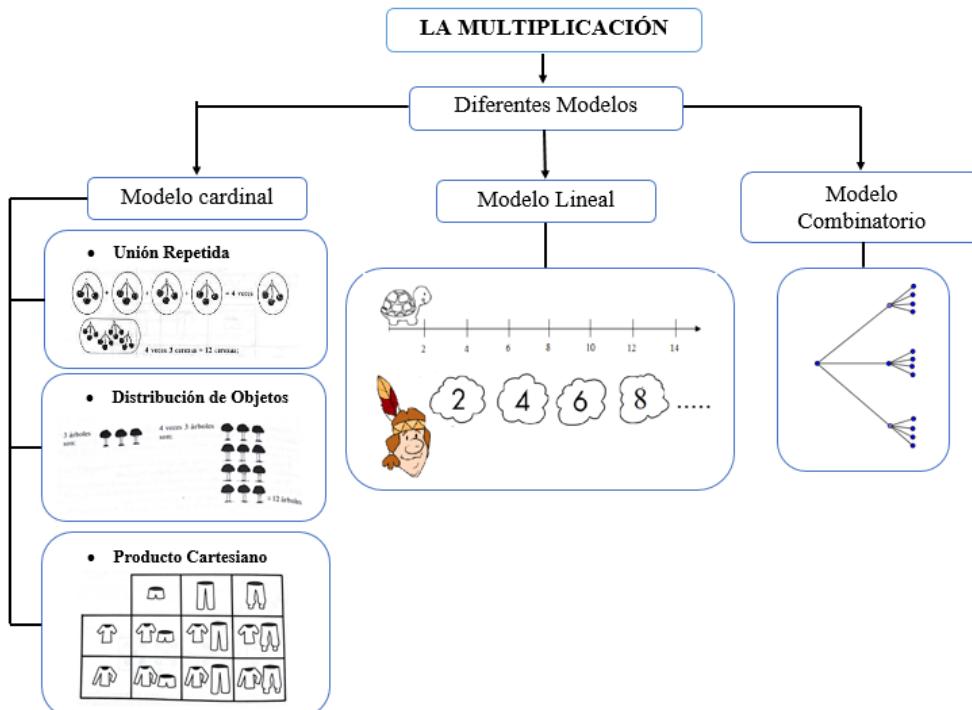


Figura N° 13 Diferentes modelos para el estudio de la multiplicación

- **ANÁLISIS COGNITIVO:** este es un análisis en el que el profesor describe su hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrentan a las actividades propuestas.

Una de las dificultades reconocidas en la enseñanza de las matemáticas es el aprendizaje de las tablas de multiplicar, sin embargo los estudiantes tienen como conocimientos previos el conteo de 1 en 1, de 2 en 2 y de 5 en 5, el cual es realizado con facilidad, se espera iniciar la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* de la multiplicación a partir de dicho conteo. Para ello se construyen las tablas de multiplicar del 1, 2 y 5 para que al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, se puedan construir las tablas de multiplicar del 3, 4, 6, 7, 8 y 9.

Los estudiantes deben descomponer uno de los números que se quieren multiplicar utilizando el 1, 2 y 5, por ejemplo para encontrar el resultado de $6 \times 7 = 6 \times (5+2) = (6 \times 5) + (6 \times 2) = 30+12=42$. La aplicación de esta propiedad puede ser muy abstracta para los estudiantes, pero con el apoyo de las tabletas como representación geométrica, los estudiantes pueden seleccionar las tabletas correspondientes a $6 \times 5 = 30$ y $6 \times 2 = 12$ y encontrar el resultado final. Existe una referencia espacial que permite determinar las tabletas que componen la tabla de 6×7 y aplicar de manera más intuitiva dicha propiedad.

Los estudiantes también pueden utilizar la representación geométrica para realizar el conteo directamente sobre la figura seleccionada y encontrar la medida de su superficie. En ambos casos se espera que los estudiantes desarrollen como estrategia, el cálculo mental.

- **ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN:** este es un análisis con el que el profesor especifica el tipo de actividades a trabajar, la intencionalidad con la que fueron creadas y la manera en que se pueden gestionar las actividades de aprendizaje.

El recurso pedagógico diseñado “*Aprende con TOM*” consta de tres actividades interactivas en GeoGebra que integran diferentes sistemas de representación y con el que se espera promover el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación, a partir de la tabla pitagórica y su representación geométrica.

Inicialmente se espera que cuando el estudiante comience a interactuar con el recurso pedagógico, reconozca el contexto que se está presentando, es decir, que identifique que se trata de un terreno que se desea distribuir en pequeñas superficies. En dicho contexto se llevarán a cabo las siguientes actividades:

Actividad 1. Una miradita: en esta primera actividad se espera que el estudiante realice un reconocimiento de los diferentes objetos geométricos y su variación, es decir, que comiencen a identificar cómo varían los puntos ubicados en las rectas dadas e indique la distancia entre cada uno de ellos. Posteriormente deberán determinar cómo es la relación que se da entre los lados de las figuras y la medida de su superficie. En este proceso se espera que recurran a diferentes estrategias para determinar la superficie de una figura. Las estrategias a las que deberán recurrir son el conteo de unidades cuadradas o determinar la longitud de medida de uno de sus lados y contar las n veces que se repite esta medida.

Actividad 2. ¿Dónde va este?: en esta segunda actividad se espera que los estudiantes no se queden solo en la manipulación de las tabletas, sino que empleen alguna estrategia para estimar el tamaño de la superficie de cada una de estas. Se espera también que luego hagan uso de las tabletas iniciales para utilizar la composición de tabletas y así poder completar toda la tabla pitagórica, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. Por último, se espera que los estudiantes desarrollen el cálculo mental y empleen diferentes estrategias para la construcción y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Actividad 3. La pareja ideal: en esta última actividad se espera que los estudiantes puedan hacer una estimación del tamaño de todas las superficies en que se dividió el terreno y puedan reconocer aquellas que tienen el mismo tamaño, de tal modo que identifiquen la propiedad

comutativa de la multiplicación, para justificar la razón por la que, aunque, los terrenos están en diferente posición, tienen el mismo tamaño.

Para dar cuenta de este análisis se crearon las fichas del docente y del estudiante, en las que se especifica lo que se espera que el estudiante realice cuando se enfrente a las actividades propuestas en el diseño del recurso pedagógico. (Dichas fichas son presentadas en el Capítulo IV).

3.1.3 Fase III: Diseño de actividades: este diseño se concreta con el recurso pedagógico elaborado en GeoGebra, que puede ser consultado dentro de la página oficial.

La propuesta de diseño del recurso pedagógico se realizó teniendo como referente la tabla pitagórica y la integración de la representación geométrica en GeoGebra, de tal modo que permita la participación activa de los estudiantes en el proceso de medición de superficies, desarrollo del cálculo mental y la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación (la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y la propiedad comutativa)

Se espera que con las tres actividades propuestas en GeoGebra, el estudiante haga uso de sus conocimientos previos y genere nuevas habilidades que le permitan construir y aprender las tablas de multiplicar. En este sentido, es importante que el profesor comprenda este proceso y gestione junto con los estudiantes cada una de las actividades propuestas, a través de la manipulación en un entorno dinámico. Las actividades serán presentadas en el capítulo IV del presente trabajo.

CAPITULO IV DISEÑO DE ACTIVIDADES

En este capítulo se presentará el criterio de selección del software y de las actividades propuestas, así como cada una de las fichas que complementan el recurso pedagógico elaborado.

El recurso pedagógico diseñado y las fichas que suministran información acerca del mismo quedarán a disposición del profesor en el siguiente enlace: << <https://ggbm.at/amhAkTkV> >>

4.1. Selección del software

Existen varias razones para la selección de GeoGebra como el software adecuado para el diseño de las actividades. Algunas de ellas son:

- GeoGebra es un software libre de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, para educación, en todos sus niveles.
- Combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto, tan sencillo a nivel operativo como potente cognitivamente.
- Combina diferentes sistemas de representación (vista algebraica, vista gráfica y hoja de cálculo)
- La barra de herramientas se puede configurar para dejar visibles sólo los botones necesarios.
- Permite publicar el diseño del recurso pedagógico en la página oficial de GeoGebra.
- El recurso puede ser utilizado y adaptado de acuerdo a las necesidades del usuario.
- El recurso se puede utilizar online o utilizar la versión portable.
- GeoGebra es un programa de fácil acceso, permite que los estudiantes puedan visualizar, representar y experimentar con objetos matemáticos, de manera que se adquiera un aprendizaje significativo.
- Existe la versión de GeoGebra para computador, tablet y dispositivos móviles.
- Se cuenta con la experiencia en el manejo de algunas herramientas de GeoGebra adquirida en los cursos de la línea TICEM que ofrece el programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

4.2 Criterio para el diseño de las actividades

Para el diseño de las actividades se tuvieron en cuenta los prerrequisitos que ya tienen los estudiantes, así como uno de los objetivos de la enseñanza de la multiplicación como lo es el aprendizaje y memorización de las multiplicaciones básicas (desde el 1 hasta el 10). Su importancia, es que gran parte del conocimiento aritmético posterior se basa en este aprendizaje, pues en general una adecuada utilización de las multiplicaciones básicas se halla en todo el desarrollo de las denominadas estructuras multiplicativas.

Es evidente que las multiplicaciones básicas han de memorizarse en un determinado momento del aprendizaje, lo importante es conocer cuándo y cómo. El cuándo suele situarse entre el segundo y tercer año de escolaridad. Para responder al cómo, en este trabajo se ha considerado la construcción de una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*.

Para iniciar la memorización de las multiplicaciones básicas se parte de la ley de formación de las mismas, que además prepara al estudiante para posteriormente adquirir el concepto de múltiplo. Así en la tabla del 2 ha de notarse que los sucesivos resultados obtenidos varían de dos en dos: 2, 4, 6, etc. De igual forma, en la tabla del cinco, los resultados sucesivos se diferencian en cinco: 5, 10, 15, etc. Ambas versiones se fundamentan en la repetición y en la práctica.

Una vez verificado el conteo de uno en uno, de dos en dos y de cinco en cinco, se espera realizar la construcción de las tablas de multiplicar de 3, 4, 6, 7 y 8 a partir de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y demás estrategias definidas en la sección 2.1.1.

Para abordar todos los productos de los números del 1 al 10, se puede trabajar con la tabla pitagórica, que consiste en un cuadro de doble entrada para los productos hasta 10 por 10. Hay varias estrategias para completarla, pero todas se basan en las relaciones que se establecen entre los diferentes productos. Cada estrategia lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados. Como variable didáctica para este diseño, a la tabla pitagórica tradicional se le adicionó la representación geométrica, con el objetivo que los estudiantes puedan

relacionar la multiplicación con la fórmula del área del rectángulo. La transformación de resultados en una multiplicación se realiza casi siempre mediante la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, lo que le va a permitir obtener unos productos a partir de la suma de otros. Para tomar conciencia y ejercitarse en el uso de esta propiedad, los problemas de descomposición rectangular ofrecen una relación concreta y espacial para que los estudiantes comprendan las relaciones entre los diferentes productos.

El diseño de las actividades que involucra la tabla pitagórica con la representación geométrica, llevó a pensar en cómo se podría utilizar este tipo de representación para transponer los productos, de tal forma que se generare la comprensión por parte de los estudiantes y qué tipo de consideraciones se deberían tener en cuenta para concretar el diseño. Para responder a estos cuestionamientos, se realizó un primer pilotaje con esta idea a lápiz y papel, este permitió definir los siguientes aspectos:

- La importancia de la ubicación espacial en una hoja cuadriculada y la identificación del patrón de distancia entre los puntos de cada eje.
- La identificación de las figuras geométricas que se forman y sus propiedades (cuadrados y rectángulos).
- Identificar la facilidad que tienen los estudiantes para el conteo de dos en dos y de cinco en cinco. Por consiguiente, se tomó la decisión de construir el resto de las tablas de multiplicar a partir de las tablas del 1, 2 y 5.
- Otro aspecto importante que se logró identificar, está relacionado con la descomposición de los números para que los estudiantes, de acuerdo a valores conocidos, construyan el resultado de la multiplicación que se deseaba calcular.

Para el diseño también fue importante definir el contexto en el que se desarrollarían las actividades, teniendo en cuenta la representación geométrica que lo favorece y que se relaciona directamente con una superficie plana. En el diseño del recurso pedagógico se plantea un contexto con el que se pretende dividir un terreno en espacios más pequeños y determinar la medida de cada superficie, este tipo de contexto está relacionado con elementos cercanos al estudiante. Para su desarrollo se hace uso de un personaje central llamado “**Tom**” , quien

propone en cada una de las actividades, una serie de interrogantes que permiten al estudiante razonar y hacer uso del cálculo mental para generar su propio conocimiento, dándole sentido a las matemáticas que aprende.

Las actividades propuestas en el recurso pedagógico van dirigidas a estudiantes de tercer grado de la educación básica primaria. El orden de las actividades tiene el objetivo de promover el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación, a partir de la tabla pitagórica y su representación geométrica. Se concretaron las siguientes actividades:

La primera actividad diseñada, a la que se tituló “Una miradita” tiene como objetivo, la identificación de la variación del largo y ancho de cada rectángulo y la relación que se establece entre la longitud de medida de los lados de los rectángulos y su superficie. Para establecer dicha variación es fundamental la gestión del profesor, con el fin de indagar respecto a los argumentos que puedan dar los estudiantes e identificar en qué nivel de desarrollo se encuentran. Si los estudiantes utilizan como estrategia el conteo unitario para determinar la relación entre el ancho, el largo y la superficie de cada figura, es conveniente que hagan uso de la unidad cuadrada para realizar el conteo. Si los estudiantes establecen una unidad de longitud y determinan la cantidad de veces que se repite o si por el contrario llegan a la conclusión de la fórmula para calcular la superficie del rectángulo al multiplicar la medida del largo por el ancho. A continuación se muestra la unidad cuadrada utilizada por los estudiantes, para determinar la medida de la superficie de las figuras coloreadas (ver Figura N° 14).

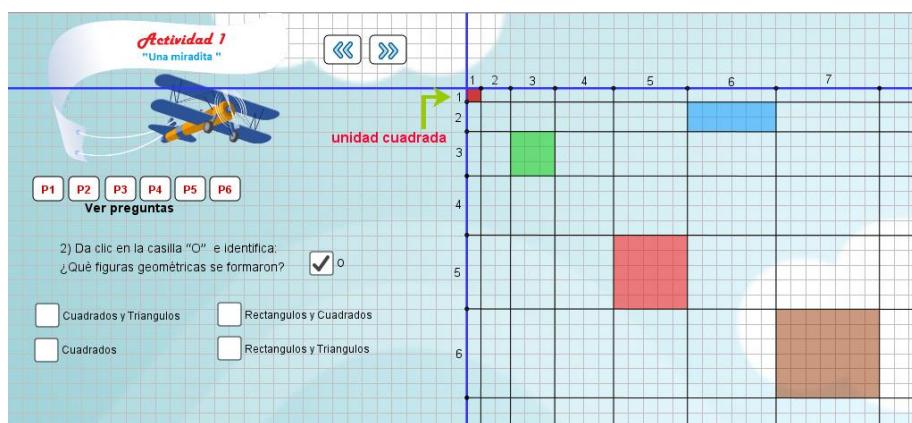


Figura N° 14 Actividad 1 - uso del conteo

La segunda actividad diseñada a la que se llamó “¿Dónde va este?” tiene como objetivo la construcción de las tablas de multiplicar. Con ella se espera que los estudiantes, a través de los diferentes sistemas de representación (geométrico y tabular), puedan generar un razonamiento que les permita utilizar la descomposición de números como estrategia para obtener un nuevo resultado, a partir de resultados ya conocidos, para lo que requerirá del uso de la propiedad distributiva.

La transformación de resultados en la construcción de las tablas de multiplicar se va a realizar mediante la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, lo que va a permitir obtener un producto a partir de la suma de otros (resultados de las tablas de multiplicar del 1,2 y 5), el resultado obtenido se puede verificar en la hoja de cálculo y el medio dará una retroalimentación así:

Los estudiantes deben registrar el resultado calculado en la tabla de representación tabular correspondiente. Si el resultado es incorrecto, el medio le devolverá un mensaje indicando que debe corregir el resultado, tal como se observa en la Figura N° 15.

Figura N° 16 Retroalimentación del medio

Si el valor registrado es correcto, no sale ningún mensaje, simplemente sale el valor correspondiente en el rectángulo, generando una nueva tableta, tal como se presenta en la Figura N° 17.

Figura N° 18 Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma en GeoGebra

La tercera actividad diseñada a la que se nombró “La pareja ideal” tiene como propósito que los estudiantes, partiendo de todos los resultados conocidos, puedan identificar con los punteros dados, aquellos que representan el mismo resultado. Para dar cuenta de esta equivalencia es importante que se relacione la representación simbólica (expresada en los resultados) y la representación geométrica. Dicha representación permite identificar que, aunque las figuras tengan distinta posición, están representando el mismo valor, aludiendo a la propiedad conmutativa; tal como se observa en la Figura N° 19.

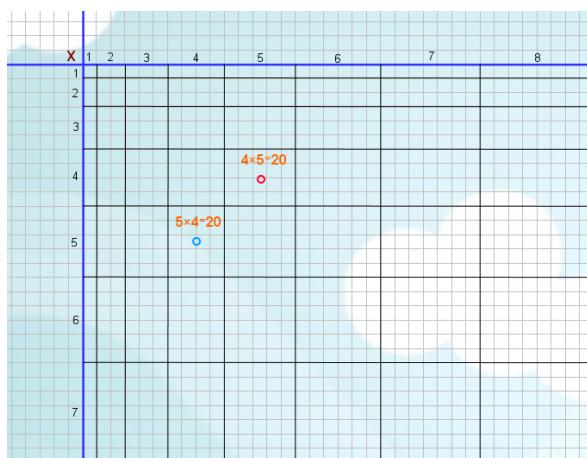


Figura N° 20 Propiedad conmutativa en GeoGebra.

Las actividades del recurso son complementadas con la ficha técnica y de identificación, la ficha de escenario, la ficha del profesor y la ficha del estudiante. Estas fichas se muestran a continuación:

FICHA TÉCNICA Y DE IDENTIFICACIÓN

Tabla N° 5 Ficha técnica e identificación

Título del recurso:	Aprende con Tom
Nombre del archivo	Diseño
Autores:	Yesid Fernando Pérez Bernal & Mauricio Rodríguez Agüíño
Asesor(a)	Maritza Pedreros Puente – Magister en Educación
Nivel o grado de escolaridad	Grado Tercero de la Educación Básica Primaria (3º)
Contenidos	Tablas de multiplicar y propiedades de la multiplicación
Descripción de los referentes curriculares en el que se enmarca las actividades	Énfasis en el razonamiento como proceso general, para evidenciar las estrategias que realiza el estudiante al enfrentarse a diferentes actividades matemáticas que relaciona el pensamiento numérico, métrico y espacial; propicio para potenciar el uso del cálculo mental como estrategia en el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación.
Resumen del recurso pedagógico	<i>Aprende con Tom</i> es un recurso pedagógico que integra elementos de la tabla pitagórica y su representación geométrica en GeoGebra, permite una participación activa del estudiante para la medición de superficies con unidades cuadradas e identificar relaciones entre la medida de los lados de las figuras y su superficie, así como la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación tales como: la propiedad modulativa, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, la propiedad conmutativa y el desarrollo del cálculo mental.
Descripción del software	GeoGebra es un software libre de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas para educación en todos sus niveles. Combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente cognitivamente, que permite llevar el desarrollo de la actividad propuesta para ser abordada en el aula de clase.
Requerimientos mínimos del software	<ul style="list-style-type: none"> - Disco duro de 4MB - Sistema operativo Windows, Linux, Mac y Androide. - Java

FICHA DE ESCENARIO

Tabla N° 6 Ficha de escenario

Título del recurso:	APRENDE CON TOM
Palabras claves:	Razonamiento, multiplicación, cálculo mental, recurso pedagógico
Objetivo	Promover el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la aplicación de algunas propiedades a partir de la tabla pitagórica y su representación geométrica.
Recomendaciones para el escenario.	Para la puesta en escena del recurso pedagógico, se requiere contar con computadores o tablet que tengan instalado GeoGebra y que cumpla con las especificaciones que se establecen en la ficha técnica, además, se debe contar con internet para descargar el recurso o trabajar en línea y un video beam para facilitar la gestión del profesor y la participación de la población a quién va dirigido el recurso. Teniendo en cuenta la organización institucional el profesor debe encargarse del acondicionamiento del aula antes de la clase.
Distribución de los estudiantes.	<p>Se puede organizar a los estudiantes en filas o en mesa redonda, de manera individual o en parejas, dependiendo de la cantidad de equipos con que se cuente y el número de estudiantes; lo ideal es un equipo por estudiante para realizar las actividades así:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Trabajo Individual</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Trabajo en Parejas</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Trabajo Grupal</p> </div> </div>
Gestión del profesor	<p>Para la puesta en escena de cada una de las actividades se tendrán en cuenta todas las estrategias y métodos de enseñanza que utiliza el profesor en el salón de clase, de modo que todos y cada uno de los elementos que están en el aula se articulen para el buen funcionamiento del recurso pedagógico.</p> <p>El profesor debe realizar la presentación del recurso pedagógico, indicando los pasos para acceder a cada una de las actividades y los estudiantes deben leer la introducción que se presenta al inicio del recurso, de manera que ellos tengan una idea clara y precisa del contexto en el que deben desarrollar las actividades.</p>

	Finalmente, cuando los estudiantes estén interactuando con el recurso y se presente alguna dificultad que les impida continuar realizando las actividades, el profesor debe guiarlos mediante preguntas orientadoras, además, debe tener buen conocimiento tanto del recurso pedagógico como de cada uno de los elementos que se están utilizando, para dar solución a cualquier imprevisto que se presente en la marcha.
Modo de explotación	<p>En el modo de explotación, se tendrá en cuenta la articulación de dos de los seis tipos de orquestación instrumental el <i>Explain-the-screen</i> y el <i>Spot-and-show</i>, porque brindan información clara y precisa al profesor sobre cómo y cuándo hacer uso de ciertas herramientas que le proporcionan algunas estrategias para el buen desempeño en el aula.</p> <p>En la actividad 1 se hace énfasis en el modo de explotación <i>Spot-and-show</i> en el que el profesor brinda explicación a toda la clase, guiada por lo que sucede en la pantalla del ordenador. La explicación va más allá de las técnicas e implica el contenido matemático. El profesor puede utilizar también el razonamiento y argumentos de los estudiantes como punto de partida para la explicación, orientándolos para llegar a la solución de las preguntas propuestas.</p> <p>En la actividad 2 y 3 se utiliza principalmente el modo de explotación <i>Explain-the-screen</i>, que consiste en apoyarse en algunos de los estudiantes que hayan realizado las actividades y proyectarlas haciendo uso del video beam, como estrategia pedagógica para socializar y formalizar los conceptos matemáticos que ellos están intentando construir.</p>
Tiempo presupuestado para cada actividad	Se considera la necesidad de un planteamiento flexible del tiempo para la ejecución del recurso pedagógico, puesto que las actividades necesitan de tiempos diferenciados dependiendo de la complejidad de cada una y de las estrategias que emplee cada estudiante en su ejecución. En el esquema de acción, se espera que el profesor lo ejecute con los estudiantes en secciones o períodos de tiempo que oscilen entre los 30 y 45 minutos, aproximadamente.

A continuación se presenta la ficha del profesor. En ella se describen las posibles soluciones que podría emplear el estudiante en cada una de las actividades, la forma como el estudiante podría interactuar con el recurso pedagógico, los conceptos que se movilizan y las estrategias que

desarrollan. Todo esto servirá de guía al profesor, sobre la intención y manejo del recurso pedagógico.

FICHA DEL PROFESOR

Tabla N° 7 Ficha del profesor

Título del recurso:	Aprende con TOM
Autores:	Yesid Fernando Pérez Bernal & Mauricio Rodríguez Agüíño
Palabras claves:	Razonamiento, Multiplicación, Cálculo Mental, Recurso Pedagógico
Objetivo	Promover el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la aplicación de algunas propiedades a partir de la tabla pitagórica y su representación geométrica.
Resumen del recurso pedagógico	<p><i>Aprende con Tom</i> es un recurso pedagógico que integra elementos de la tabla pitagórica y su representación geométrica en GeoGebra, permite una participación activa del estudiante para la medición de superficies con unidades cuadradas e identificar relaciones entre la medida de los lados de las figuras y su superficie, así como la aplicación de algunas propiedades de la multiplicación tales como: la propiedad modulativa, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, la propiedad conmutativa y el desarrollo del cálculo mental.</p> <p>El recurso pedagógico consta de tres actividades interactivas en GeoGebra que integra diferentes sistemas de representación:</p> <p>Actividad 1: Una miradita Actividad 2: ¿Dónde va este? Actividad 3: La pareja ideal</p>
Actividad 1: Una miradita	Esta es la primera de las tres actividades propuestas, en ella se realiza el reconocimiento de diferentes objetos geométricos tales como: rectas, puntos, segmentos, cuadrados y rectángulos, la identificación de patrones, de unidades cuadradas y superficies. Se espera que los estudiantes logren identificar la relación que se establece entre la medida de los lados de los rectángulos y su superficie, para que a través de esta relación se genere un primer acercamiento a la multiplicación. También deberá establecer la variación que se da entre el largo, el ancho y la superficie de los mismos.

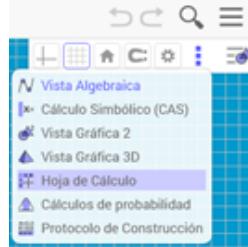
Actividad 2: ¿Dónde va este?	En esta segunda actividad se realiza una estimación del tamaño de las superficies, se calcula la medida de la superficie de cada tableta y se completa toda la tabla pitagórica a partir de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma con las tablas de multiplicar del 1, 2 y 5. Se espera que los estudiantes desarrollen el cálculo mental y empleen diferentes estrategias para la construcción y aprendizaje de las tablas de multiplicar.
Actividad 3: La pareja ideal	En esta última actividad, se realiza una estimación del tamaño de la superficie de cada terreno, con el fin de identificar aquellos que tienen la misma forma y tamaño. Se espera que los estudiantes identifiquen la propiedad conmutativa de la multiplicación para justificar la razón por la que, aunque los terrenos están en diferente posición, tienen el mismo tamaño.
Sugerencias metodológicas	El recurso pedagógico <i>Aprende con Tom</i> ha sido diseñado para estudiantes de tercer grado de la Educación Básica Primaria. Se espera que cada estudiante de manera individual interactúe con el recurso pedagógico y a través de este pueda, de manera autónoma, llegar al objetivo propuesto en cada actividad. También se espera que logre identificar las posibles respuestas, ya sean correctas o erradas, y partiendo de las devoluciones del medio, encuentre las estrategias adecuadas que le permitan avanzar en el aprendizaje de las tablas de multiplicar.
Sugerencias para la gestión del profesor en acto	<p>Se presentan las sugerencias instrumentales, para abordar con los estudiantes cada una de las actividades que configuran el recurso pedagógico.</p> <p>Actividad 1: Una miradita</p> <p>En esta primera actividad se espera que el profesor permita que el estudiante, a través de la interacción con el medio reconozca los objetos geométricos, la unidad cuadrada, y la relación que se da entre la medida de la superficie de cada figura geométrica y la de sus lados, brindando así un primer acercamiento a la multiplicación.</p> <p>Para ver cada una de las preguntas propuestas en las actividades, el estudiante debe dar clic izquierdo en los botones P1, P2..., P6 para así poder responder cada una de ellas.</p> <p>Pregunta 1: los estudiantes deben analizar e identificar que los puntos ubicados sobre las rectas azules están distribuidas de manera ascendente, es decir, que existe un patrón arbitrario que permite que la distancia entre los puntos aumente de uno en uno, tanto de forma horizontal como vertical.</p>

	<p>Los estudiantes deben identificar la posición de las rectas (horizontal y vertical), de tal modo que pueda determinar cómo aumenta la distancia entre los puntos ubicados en cada una de ellas, para poder responder la pregunta de selección múltiple propuesta en esta actividad. De acuerdo a la opción seleccionada, el medio dará una retroalimentación indicando si es correcta o no.</p> <p>Pregunta 2: para poder seleccionar la casilla “o” es necesario que los estudiantes utilicen la herramienta <i>elige y mueve</i>  que permite que los estudiantes puedan arrastrar o seleccionar objetos. En este caso se debe utilizar para dar clic en la casilla “O”  para poder identificar las figuras geométricas que se forman. Se espera que los estudiantes reconozcan que las figuras geométricas que se forman son rectángulos y cuadrados. También deben ser capaces de identificar la unidad cuadrada que se presenta y el valor de medida de las longitudes entre punto y punto.</p> <p>Si seleccionan la opción cuadrados, el medio dará como respuesta “fíjate bien” y el profesor deberá preguntar por su definición y verificar que todas las figuras cumplan con ella, así: ¿qué diferencia existe entre un cuadrado y un rectángulo?, ¿cómo son las medidas de sus lados?, ¿cómo son las medidas de sus ángulos?, ¿para qué cree que sirve la unidad cuadrada?</p> <p>Pregunta 3: se espera que los estudiantes calculen la medida los lados y la superficie de cada figura geométrica coloreada, de tal manera que reconozcan que la multiplicación de la medida de los lados de la figura permite determinar la cantidad de unidades cuadradas que la componen. Para encontrar la medida de la superficie, los estudiantes pueden utilizar diferentes estrategias como el conteo de uno en uno o tener en cuenta el intervalo de medida de uno de sus lados e ir sumando las veces que éste se repite (modelo lineal). Esta actividad brinda a los estudiantes un primer acercamiento al concepto de área.</p> <p>Pregunta 4: para dar cuenta de la variación del largo, ancho y superficie de las tabletas rectangulares coloreadas, se espera que el estudiante observe la medida del ancho de una tableta e identifique si es la misma para todas ellas, sino es así, debe especificar cuantas unidades varía.</p>
--	---

	<p>Pregunta 5: se debe realizar el mismo procedimiento de la pregunta 4, pero teniendo en cuenta la medida del largo.</p> <p>Pregunta 6: en esta pregunta el estudiante debe dar cuenta del tamaño de cada superficie, comparando si todas tienen la misma cantidad de unidades o si son diferentes, además debe identificar de cuánto es la variación.</p> <p>El profesor debe preguntar si el tamaño de la superficie de cada tabletas se puede ver reflejado por el cambio en el largo y el ancho de cada una.</p> <p>Es importante que el profesor genere junto a sus estudiantes un espacio de discusión para reflexionar acerca de las posibles estrategias que puede construir cada uno, en cada una de las preguntas propuestas en la actividad.</p> <p>Actividad 2: ¿Dónde va este?</p> <p>En esta segunda actividad se espera que el estudiante construya y aprenda las tablas de multiplicar mediante el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación y su relación con el pensamiento métrico y espacial, haciendo énfasis particularmente en la propiedad modulativa y distributiva de la multiplicación respecto a la suma.</p> <p>Pregunta 1: los estudiantes deben hacer uso de la herramienta arrastre  para ubicar las tabletas amarillas en la posición adecuada (horizontal) y que logren identificar que la medida del ancho de las tabletas siempre es uno, y que la medida del largo y la superficie es la misma. Al multiplicar el largo por el ancho siempre va dar como resultado la medida del largo, lo cual corresponde a la propiedad modulativa.</p> <p>Pregunta 2: los estudiantes deben hacer uso de la herramienta arrastre  para recubrir el terreno con las tabletas verdes y azules. Al ubicar las tabletas en la posición correcta se debe seguir la instrucción dada por el medio: dirigirse al menú en la opción vista y activar la hoja de cálculo  Vista Algebraica Ctrl+Mayús+A Hoja de Cálculo Ctrl+Mayús+S y en ella se debe registrar la cantidad de unidades cuadradas que tiene la tabletas.</p> <p>Si se está trabajando la actividad en línea para activar la hoja de cálculo, se debe dar clic en los tres puntos que se encuentra en la</p>
--	--

parte superior derecha y seleccionar la opción Abrir con GeoGebra. Luego dirigirse nuevamente a las opciones que aparecen en la parte

superior derecha , dar clic en los tres puntos, y del menú flotante seleccionar la opción “Hoja de cálculo”.



Es importante que el estudiante no deje la casilla vacía para que no se genere un error en el programa. Se espera que el estudiante recurra al conteo de unidades para registrar en la tabla su respectivo tamaño y en caso de algún error tendrá una devolución del medio

que le permita verificar el valor ingresado.

Para continuar con la ubicación de las tabletas restantes es necesario dar clic en la opción mostrar nueva figura Mostrar otra figura para poder ubicarlas y determinar su tamaño.

En esta segunda parte se espera que los estudiantes no se queden en el proceso de ubicar las tabletas, sino que apartir de la interacción con el recurso pedagógico pueda construir la tablas de multiplicar del 2 y del 5 y determinar así el tamaño de cada tableta.

Pregunta 3: para dar respuesta a este último interrogante, se espera que los estudiantes utilicen la descomposición de cada número utilizando como base las tabletas del 1,2 y 5 para construir y determinar el tamaño de las tabletas restantes, de esta forma por ejemplo, la tableta que representa la tabla del 3 se puede obtener uniendo la tableta del 2 y del 1. Se debe tener en cuenta el orden de la ubicación de las tabletas, ubicar primero la tableta del 2 (arriba) y luego la del 1 (abajo) para generar así una nueva tableta.

Para determinar la tableta que representa la tabla de multiplicar del 4 se puede usar la tableta del 1 y la del 3 que se acabó de generar y así determinar el tamaño de la nueva tableta, sin embargo, en este proceso de componer la tabletas no es posible utilizar dos veces una misma tableta, pero el estudiante si puede comparar el tamaño de las tabletas y determinar que una es el doble o la mitad de la otra. En este caso no es posible utilizar dos tabletas del 2 para generar la tableta del 4.

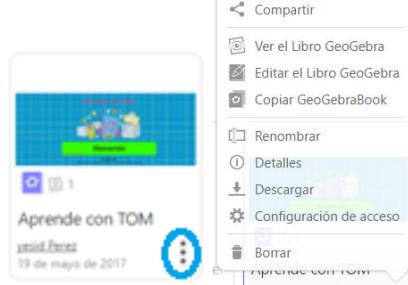
	<p>Al utilizar las tabletas del 1 y del 3 para determinar el tamaño de la nueva tabla el medio genera una retroalimentación donde aparece la propiedad distributiva que se aplica.</p> <p>En la construcción de las tabletas que representan las tablas de multiplicar del 6,7,8,9,10 en la retroalimentación que da el medio no aparece la propiedad distributiva, pero el estudiante debe escribir en la ficha la propiedad distributiva que aplicó. El profesor decide si debe escribir el procedimiento para todas o para algunas de las tablas de multiplicar.</p> <p>El mismo procedimiento se debe realizar para generar las tabletas restantes, teniendo en cuenta las siguientes descomposiciones:</p> <p>En la construcción de la tabla que representa la tabla de multiplicar del 6 se puede utilizar la tabla del 1 y la del 5 o la tabla del 2 y la del 4 que se acabó de generar para determinar el tamaño de cada una, sin embargo, en este proceso de componer tabletas no es posible utilizar dos tabletas del 3 para generar la tabla del 6.</p> <p>Para determinar la tabla que representa la tabla de multiplicar del 7 se puede usar la tabla del 1 y la del 6 o la tabla del 2 y la del 5, y la tabla del 4 y la del 3, sin embargo, en esta última composición de tabletas es importante tener en cuenta el orden de la ubicación de estas, es decir, se debe ubicar primero la tabla del 4 (arriba) y luego la del 3 (abajo) para generar así una nueva tabla.</p> <p>Para generar la tabla que representa la tabla de multiplicar del 8 se puede emplear la tabla del 1 y la del 7 o la tabla del 2 y la del 6, también se puede utilizar la tabla del 3 y la del 5 para generar el tamaño de la nueva tabla. En este caso no es posible utilizar dos tabletas del 4 para generar la tabla del 8.</p> <p>Del mismo modo, para generar la tabla que representa la tabla de multiplicar del 9 se puede emplear la tabla del 1 y la del 8 o la tabla del 2 y la del 7, también se puede emplear la tabla 3 y la del 6 o la tabla del 5 y la del 4, sin embargo, en esta última composición de tabletas es necesario tener en cuenta el orden de la ubicación de estas, es decir, se debe ubicar primero la tabla del 5(arriba) y luego la del 4 (abajo) para generar así una nueva tabla.</p>
--	---

	<p>Finalmente, para generar la tableta que representa la tabla del <i>10</i> se puede emplear la tableta del <i>1</i> y la del <i>9</i>, la tableta del <i>2</i> y la del <i>8</i>, la tableta del <i>3</i> y la del <i>7</i> y la tableta del <i>4</i> y la del <i>6</i>, sin embargo, en este proceso de componer tabletas no es posible utilizar dos tabletas del <i>5</i> para generar la tableta del <i>10</i>.</p> <p>Es importante que el profesor genere un espacio de discusión, que permita a los estudiantes identificar las diferentes estrategias y procedimientos que utilizan al enfrentarse a las actividades, con el fin de promover en ellos el razonamiento numérico en la construcción de las tablas de multiplicar a partir de sus propiedades, especialmente de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, propiedad que permite fortalecer como estrategia el cálculo mental.</p> <p>Este tipo de enseñanza propicia que los estudiantes hagan uso de conocimientos previos (descomposición de números) como estrategia para desarrollar nuevas capacidades que generan un nuevo conocimiento.</p>
	<p>Actividad 3: La pareja ideal</p> <p>Pregunta 1: Esta última actividad tiene como objetivo potenciar en el estudiante el aprendizaje de la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p> <p>Se espera que el estudiante al señalar aquellas tabletas de igual forma y tamaño, pueda responder los siguientes interrogantes: ¿por qué tienen el mismo tamaño? ¿qué diferencia existe entre las tabletas?, cuando el estudiante responda dichos interrogantes se espera que comprenda que, aunque la posición de las tabletas varía, el tamaño de la superficie es la misma.</p> <p>Es importante que las tabletas de igual tamaño que han sido seleccionadas tengan sus lados de igual longitud, pero que estén en diferente posición.</p>

Para finalizar, se presenta la ficha del estudiante, en ella se escriben las instrucciones que debe realizar en cada una de las actividades propuestas en el recurso pedagógico.

FICHA DEL ESTUDIANTE

Tabla N° 8 Ficha del estudiante

Título del recurso: Disponibilidad del recurso pedagógico	<p>Aprende con Tom</p> <p>Para acceder al recurso pedagógico “aprende con Tom ” sigue los siguientes pasos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Utiliza el navegador (Mozilla, Internet Explorer o Google Chrome) e ingresa a la siguiente página: www.geogebra.org 2) Da clic en la opción recursos  <ol style="list-style-type: none"> 3) En la parte superior izquierda encontrarás el buscador <input type="text" value="Aprende con Tom"/> , dentro de él escribe: Aprende con TOM y da enter. 4) De los resultados encontrados selecciona aquel recurso que se llama Aprende con Tom <u>yesid perez</u> y en la parte inferior derecha da clic en los tres puntos y selecciona la opción descargar.  <ol style="list-style-type: none"> 5) Una vez que hayas descargado el recurso pedagógico, verifica que se cuente con el programa GeoGebra en el computador o tablet para poder abrirlo <ul style="list-style-type: none"> - Para abrir el recurso debes dar doble clic sobre él y éste se abrirá. - Debes hacer clic en el botón <i>bienvenido</i> que aparece en la pantalla principal para comenzar a interactuar con él. - Utiliza los botones “atrás y siguiente”  que aparecen en la pantalla para llevar acabo cada una de las actividades propuestas. - Sigue las instrucciones paso a paso, para desarrollar las actividades con éxito.
--	--

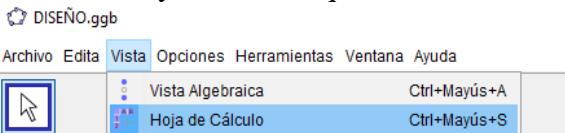
	<p>6) Si vas a trabajar en línea, debes realizar las mismas instrucciones del punto 4 y seleccionar la opción “ver el Libro de GeoGebra” y dar doble clic sobre <i>Aprende con TOM</i>.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Una vez abras el recurso, en la parte superior derecha encontrarás las siguientes opciones , da clic en los tres puntos y selecciona la opción  Abrir con GeoGebra - Para la actividad 2 necesitas activar la hoja de cálculo, para hacerlo debes dirigirte a las opciones que aparecen en la parte superior derecha y debes dar clic en los tres puntos y seleccionar la opción “Hoja de cálculo”. 
Presentación	Hola mi nombre es <i>Tom</i> , tengo un terreno que mi padre me regaló y que deseo aprovechar de la mejor manera, para ello lo he distribuido como se observa en el recurso, ayúdame a realizar las siguientes actividades:
Actividad 1: “Una miradita”	
Instrucciones:	
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Para ver las preguntas debes dar clic izquierdo en los botones P1, P2..., P6. ➤ Para responder las preguntas de opción múltiple, selecciona solo una de las respuestas que consideres que es la correcta. ➤ Ten en cuenta que para activar la casilla “O” es necesario dar clic izquierdo sobre el recuadro ubicado al lado de la pregunta. ➤ Si quieras avanzar o retroceder de una actividad a otra, puedes utilizar los botones “atrás y siguiente”  ubicados en cada actividad, con ellos puedes desplazarte hacia adelante o hacia atrás. ➤ Se recomienda que no hagas uso del zoom para no alterar la visualización de la actividad. <p>Ten en cuenta que puedes desplazar la interface dando clic izquierdo y moviendo el mouse.</p>	
Preguntas	Respuestas
1. ¿Cómo es la posición de cada línea recta?	
2. ¿Cómo aumenta la distancia entre los puntos ubicados en cada recta?	

3. ¿Qué relación existe entre la cantidad de unidades cuadradas y la medida de los lados de las figuras coloreadas?

Actividad 2: ¿Dónde va este?

Instrucciones:

- Para ver las preguntas debes dar clic izquierdo en los botones P1, P2, P3.
- Para ubicar la tableta en la posición correcta, es necesario que pongas el puntero sobre ella, da clic izquierdo sostenido y mueve el mouse hasta la posición deseada.
- Para activar la hoja de cálculo, da clic izquierdo en la opción **Vista** y desplaza el mouse hasta la opción **Hoja de Cálculo** y dale clic izquierdo o enter.



- Para componer las tabletas del 3, 7 y 9, debes realizar lo siguiente:
 - Para la tableta del 3 ubica primero la tableta del 2 (arriba) y luego la del 1 (abajo).
 - Para la tableta del 7 ubica primero la tableta del 4 (arriba) y luego la del 3 (abajo).
 - Para la tableta del 9 ubica primero la tableta del 5 (arriba) y luego la del 4 (abajo).
- Para determinar la medida de las tabletas del 4, 6, 8 y 10 mediante la composición de dos tabletas no puedes utilizar dos veces una misma tableta.
- Las celdas resaltadas con color, que aparecen en la hoja de cálculo te indican la tabla de multiplicar que vas a construir. De manera vertical parecen los números por los que debes multiplicar ese valor. En la columna del lado se encuentra resaltada la celda del resultado de la operación que realizarás (R//2).

		Hoja de Cálculo					
		Celda de respuesta de la tabla					
		2 x	R2//.	3 x	R3//.	4 x	R4//.
Tabla de multiplicar que se va construir		1	2	1	3	1	4
		2	0	2	0	2	0
		3	0	3	0	3	0
		4	0	4	0	4	0
		5	0	5	0	5	0
		6	0	6	0	6	0
		7	0	7	0	7	0
		8	0	8	0	8	0
		9	0	9	0	9	0
		10	0	10	0	10	0

- Para que puedas calcular la medida de las tabletas del 6, 7, 8, 9 y 10 mediante la composición de dos tabletas, debes escribir los números que utilizaste para aplicar la propiedad distributiva y encontrar el tamaño de la nueva tableta.

Se te recomienda que no dejes vacía la celda de respuesta para que el programa no te genere error.

Preguntas	Respuestas
1. Escribe la propiedad distributiva que utilizaste para la tableta del 6	
2. Escribe la propiedad distributiva que utilizaste para la tableta del 7	
3. Escribe la propiedad distributiva que utilizaste para la tableta del 8?	

4. Escribe la propiedad distributiva que utilizaste para la tableta del 9?	
5. Escribe la propiedad distributiva que utilizaste para la tableta del 10?	
Actividad 3: La pareja ideal	
Instrucciones:	
<p>Recuerda que para señalar las tabletas de igual forma y tamaño debes hacer uso de los puntos rojos y azules. Es importante que los puntos queden ubicados en el centro de cada figura para que la expresión aparezca.</p>	
Preguntas	Respuestas
1. ¿Por qué las tabletas tienen el mismo tamaño?	
2. ¿Qué diferencia existe entre las tabletas?	

Con el diseño de las actividades y de las fichas presentadas anteriormente se concreta la configuración del recurso pedagógico, que da cuenta de la trayectoria hipotética de aprendizaje construida.

Para dar cuenta de las actividades del recurso pedagógico diseñadas en GeoGebra, se realizó un segundo pilotaje con estudiantes de grado tercero de una Institución Pública de la Ciudad de Cali. Este pilotaje permitió definir los siguientes aspectos, con relación al recurso pedagógico:

- Se requiere de un mensaje para iniciar el recurso.
- Es importante la gestión del profesor en la actividad 1.
- No se debe alterar el zoom de la pantalla, para poder desarrollar las actividades de manera satisfactoria.
- Se debe especificar como realizar el arrastre de las tabletas y la activación de la hoja de cálculo en la actividad 2.
- Utilizar colores adecuados para los productos en la tabla pitagórica.
- Es importante la gestión del profesor en la actividad 3 y que luego los estudiantes desarrollos la actividad de manera libre.
- El medio debe dar una retroalimentación cuando los estudiantes encuentren la pareja ideal, es importante que justifiquen porqué son la pareja ideal.

CONCLUSIONES

La información obtenida de las diferentes investigaciones a nivel nacional e internacional en torno a la enseñanza de la multiplicación, fueron primordiales para definir la problemática y estructurar la propuesta. Los referentes teóricos sirvieron para la fundamentación y configuración del recurso pedagógico. La configuración se dio a partir del diseño de las actividades. En estas actividades se involucraron de manera proactiva el concepto de la multiplicación y algunas de sus propiedades, la tabla pitagórica y su representación geométrica para la construcción de las tablas de multiplicar del 1 al 10. Las diferentes fichas que dan cuenta de la gestión del recurso pedagógico favorecen la adecuada integración de este en el aula de clase.

La fundamentación teórica del trabajo brindó elementos importantes para el diseño de las actividades. El *referente matemático* permitió el reconocimiento de las propiedades de la multiplicación y de los diferentes modelos que se pueden abordar para la enseñanza de esta operación, como también el reconocimiento de algunas estrategias de cálculo que se pueden emplear al multiplicar y que favorecen el desarrollo del pensamiento numérico. El *referente curricular* sirvió para establecer la coherencia vertical al considerar el concepto de multiplicación como base para la construcción de otros conceptos tales como la división, la proporcionalidad, la potenciación, la radicación y la logaritmación. En la coherencia horizontal, el referente curricular sirvió para determinar la importancia de la articulación que se establece entre el pensamiento numérico y los pensamientos variacional, espacial y métrico. El *referente didáctico* ofreció una concepción de recurso pedagógico sustentada desde tres elementos básicos: la documentación, el diseño de actividades y la gestión del profesor. Estos tres elementos fueron el soporte indispensable para el desarrollo del presente trabajo.

Este diseño brinda un acercamiento diferente al aprendizaje de las tablas de multiplicar, puesto que no se hace de manera memorística, sino que se construyó una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* que parte de los conocimientos previos de los estudiantes tales como el conteo, la descomposición de números, el reconocimiento de patrones y de figuras geométricas. A partir de los anteriores conocimientos previos se construyen las tablas de multiplicar del 1 hasta el 10 y se generan nuevas estrategias de cálculo mental al aplicar algunas propiedades de la multiplicación.

Para el diseño se consideró la construcción de una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* que orientó la secuencia de actividades propuestas en el recurso pedagógico, con el fin de brindar un acercamiento alternativo para la enseñanza de la multiplicación. Dicha trayectoria inicia con el conteo de uno en uno, la aplicación del modelo lineal como estrategia de cálculo para el conteo de dos en dos (cálculo de dobles) y de cinco en cinco. Se continúa con la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma para la construcción de las tablas de multiplicar del 3, 4, 6, 7, 8, 9 y 10. Se finaliza con la aplicación de la propiedad commutativa. Para concretar la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* se creó un contexto que involucrara la representación geométrica, para determinar el producto como la medida de la superficie de figuras geométricas (cuadrado y rectángulo), para que complementara la tabla pitagórica.

La representación geométrica permitió un acercamiento al modelo lineal, al realizar el conteo de la medida de la superficie de figuras, teniendo en cuenta un intervalo de medida y el número de veces que se repite. De manera simultánea se favoreció un acercamiento a las tablas de multiplicar a partir de la identificación de algunas propiedades como la distributiva y la commutativa, para esto fue importante el manejo de diferentes sistemas de representación (geométrico y tabular).

Para la selección del software y el diseño de las actividades, se tuvo en cuenta GeoGebra por ser un software libre de tal manera que el recurso pedagógico pueda ser usado por los profesores sin restricciones de licencia. Además puede ser adaptado a su práctica, para hacerlo evolucionar. También cuenta con una interface de fácil manejo para los estudiantes, con el fin de interactuar con el medio y recibir una retroalimentación. Fuera de las anteriores bondades GeoGebra brinda otras posibilidades como la de usar el arrastre en el desarrollo de las actividades, permitir el trabajo con diferentes sistemas de representación y la publicación de dicho recurso pedagógico en su comunidad.

Las actividades propuestas en GeoGebra son complementadas con las fichas de trabajo que se diseñaron y que brindan información al usuario sobre la intencionalidad, objetivos, restricciones y formas de acceder y gestionar el recurso pedagógico.

Para dar cuenta de la gestión del recurso pedagógico, se tuvo en cuenta como referente teórico la *orquestación instrumental*, para definir la configuración didáctica y el modo de explotación que puede ser utilizado para la puesta en escena del recurso pedagógico. La orquestación instrumental permite al profesor organizar y articular cada uno de los materiales del aula para la construcción del conocimiento que se pretende formalizar con los estudiantes.

La contribución principal de este trabajo fue poner a disposición de los profesores de primaria un recurso pedagógico que brinde un acercamiento alternativo para la enseñanza de la multiplicación, haciendo uso del modelo lineal y de algunas propiedades de la multiplicación (modulativa, distributiva de la multiplicación respecto a la suma y conmutativa).

La prueba piloto que se realizó en una institución educativa oficial de Cali – Valle, contribuyó a que se hicieran los ajustes y modificaciones necesarios con el propósito de lograr mejoras en el recurso pedagógico. Se observó que las preguntas que se formularon eran complejas para estudiantes de grado tercero de básica primaria, puesto que no guiaban a los estudiantes sobre las actividades y pasos que debían seguir para completar cada una de las preguntas. Durante la aplicación del pilotaje, la profesora que lo aplicó se vio en la necesidad de realizar muchas intervenciones para guiar a los estudiantes durante el proceso; este ejercicio contribuyó en el replanteamiento de algunas preguntas que hacen parte de las actividades que conforman el recurso pedagógico.

Queda abierta la posibilidad de implementar el recurso pedagógico para dar cuenta de la calidad del aprendizaje de los estudiantes, y a partir de este evaluarlo y hacerlo evolucionar. Se espera también que el recurso pueda ser utilizado para afianzar otros conceptos como el de números cuadrados, área y perímetro.

Se espera que a partir de este trabajo surjan otros en los que se ofrezcan novedosos diseños de actividades en GeoGebra, que permitan a los estudiantes un acercamiento a la multiplicación desde otros modelos distintos al lineal y que aporten al desarrollo del pensamiento numérico en la básica primaria.

REFERENCIAS

- Aguirre. D (2011). *Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigido a tercer grado de educación básica.* (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali.
- Ángel, K y Candamil, M (2013). *Una secuencia didáctica para fortalecer el concepto de multiplicación de números naturales en el grado segundo de la educación básica.* (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali.
- Campo, K y Meléndez, J (2016). *Una propuesta para el diseño de tareas que integra GeoGebra para la enseñanza de la función exponencial en grado noveno.* (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali.
- Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1999). Producto y división. *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar.* (pp. 139-145). Madrid. Síntesis, S.A.
- Ceballos, M. T. R. (2006). Enseñanza de las matemáticas con tecnología (EMAT). *Enseñanza de la física y las matemáticas con tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula.* (pp. 25-41). México. Centro de investigación y de estudios avanzados – IPN Departamento de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/EFIT-EMAT_RojanoEd_06.pdf
- Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de: www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Clements, D., & Sarama, J. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. New York: Routledge.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75(2), 2013-234.

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista iberoamericana de educación*, (43), 119-130. Recuperado de: rieoei.org/RIE43A06.pdf.

Garzón, D., Pabón, O., y Vega, M. (2013). Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas. Recuperado de: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/428-234-3-DR-C.pdf>.

Google Cities. (2017, Febrero 02). Características de GeoGebra- GeoGebra – Google Cities [Página web]. Recuperado de: <https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra>.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.

Gvartz, S. (2008). El trabajo con la multiplicación y con la división. *La Matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula*. (pp. 89-130). Ciudad de Buenos Aires. Aique Grupo Editor S.A.

Guin, D., & Trouche, L. (2007). Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques. En M. Baron, D. Guin, & T. Luc,

Environnemnets, informatisés er ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croises (p. 197-226). Paris: Lavoisier.

Herrera. B (2016). *Tecnología y educación matemática: un Meta- Estudio realizado en el sur occidente de Colombia.* (Trabajo de grado para optar el titulo Licenciatura en matemática y física), Universidad del Valle, Cali.

Icfesinteractivo. (2016). Pruebas saber 3° 5° 9 - ICFES Interactivo [Pagina web]. Recuperado de: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEntidadTerritorial.jspx>

Joab, M., Guin, D., & Trouche, L. (2003). Conception et réalisation de ressources pédagogiques vivantes: des ressources intégrant les TICE en mathématiques. In EIAH'03: Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (pp. 259-270). INRP.

Martínez, F., Llinares, S., y Torregrosa, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos. Recuperado de: <http://web.ua.es/es/ice/jornadas-redes-2015/documentos/tema-1/410766.pdf>.

Maza, C. (1991). Las multiplicaciones básicas. Multiplicar y dividir A través de la resolución de problemas. (pp. 87-89). Madrid. Visor Distribuciones, S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2016, Abril 12). Computadores para educar [Pagina web]. Recuperado de: <http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-321612.html>.

Ospina. M & Piamba. J (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo.* (Trabajo de grado para optar el titulo Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali.

Pechené, M y Yela, L (2016). *Diseño de una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la transformación de rotación en el espacio en grado noveno de educación básica.* (Trabajo de grado para optar el titulo Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca.

Perez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la Educación Matemática1. *Revista electrónica “Perspectiva Educacional. Formación de Profesores”*, 53(2), 129-150. Recuperado de: <http://www.perspectivaeducacional.cl/index.php/peducacional/article/viewFile/200/117>.

Rizzo, K. (2014). El desafío de enseñar Funciones Exponenciales y Logarítmicas con tecnología. Implementación del modelo 1 a 1. Recuperado de: www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/425.pdf

Sánchez, L (2016). *Una aproximación al desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por GeoGebra.* (Trabajo de investigación para optar el titulo Maestría en educación con énfasis en educación matemática), Universidad del Valle

Santacruz, M. (2011). Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: el caso de la rotación en educación primaria. Cali, Colombia: Universidad del valle.

Santacruz, M. (2013). La actividad mediada por instrumentos en didáctica de las matemáticas. Recuperado de:
https://campusvirtual.univalle.edu.co/moodle/pluginfile.php/536549/mod_resource/content/1/Mediaci%C3%B3n.pdf.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 114-145. Recuperado de:
<http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/Students/Gainey/Article%20.pdf>.