UNA PROPUESTA DE APRENDIZAJE DEL ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS DESDE UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICO COGNITIVA PARA ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO DE PRIMARIA.

Natalia Sandoval Otero
201358901

Lina Marcela Tascón Cardona
201358547

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTANDER DE QUILICHAO
2018

UNA PROPUESTA DE APRENDIZAJE DEL ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS DESDE UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICO COGNITIVA PARA ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO DE PRIMARIA.

Natalia Sandoval Otero
201358901

Lina Marcela Tascón Cardona
201358547

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Dirigido por:
Lic. Carlos Alberto Melán Jaramillo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTANDER DE QUILICHAO
2018

AGRADECIMIENTOS.

Con toda la gratitud y humildad que nuestro corazón puede emanar, dedicamos este logro al creador del universo por darnos la fortaleza necesaria para continuar cuando a punto de desfallecer nos encontrábamos. A él, sea toda la gloria y la honra.

A la universidad del valle y a cada uno de los profesores que aportaron su grano de arena en esta etapa tan significativa para nuestras vidas. Al Profesor Jorge Enrique Galeano nuestra más sincera admiración.

A nuestro tutor, por el apoyo y por creer en nosotras.

A la Institución Educativa Técnico Ambiental Fernández Guerra- Sede Nariño Unido, por abrirnos sus puertas y permitirnos llevar a cabo esta investigación.

A todas aquellas personas que de forma directa o indirecta aportaron en la realización de este proyecto.

A ustedes, infinitas gracias.

DEDICATORIA.

Llena de orgullo, de amor y esperanza, dedico este logro a todos mis seres queridos.

A mi madre y hermanos, gracias por ser el pilar fundamental en todo lo que soy. Gracias por confiar siempre en mí.

A Edwin, por acompañarme en cada paso que doy, por su incondicional apoyo y por demostrarme la gran fe que tiene en mí. Gracias por ser parte de mi vida. Gracias por permitirme ser parte de tu orgullo.

A Ruby, por siempre creer en mí.

A Nata, por su amistad sincera e incondicional.

A mí, por tanta paciencia.

A ustedes, con quienes estoy profundamente agradecida. Gracias por formar parte de este sueño.

Lina Marcela Tascón Cardona.

A mis padres, Tulio Cesar Sandoval & Virginia Otero Paja por ser la fortuna más grande que tengo.

A mis tíos, Raúl Sandoval & Gladys Velasco por confiar en mí y abrirme las puertas de su Hogar.

A mis primos, Magaly, Yesid y Arley por estar siempre a mi lado y apoyarme, los quiero mucho.

A Lina, por el grupo de trabajo que formamos, las discusiones que tuvimos y los momentos de alegría y tristeza que compartimos.

Natalia Sandoval Otero.

RESUMEN.

El presente trabajo de grado tiene como finalidad presentar una propuesta de aprendizaje realizada al interior de la Institución Técnico Ambiental Fernández Guerra- Sede Nariño Unido, ubicada en el Municipio de Santander de Quilichao en el Norte del Cauca. La propuesta se realizó mediante un estudio de casos, donde se aplicó una prueba escrita en la cual se proponen cuatro situaciones relacionadas con el área y perímetro de figuras planas a un grupo de estudiantes de grado quinto de primaria, con las cuales se buscó promover las actividades cognitivas de tratamiento y conversión considerándose fundamentales en el proceso de aprehensión de conocimiento matemático. En este proceso, se tuvieron en cuenta dos tipos de representación semiótica. El primero relacionado con el lenguaje de las figuras y, el segundo, el registro discursivo, donde los estudiantes deben realizar tratamientos figurales relacionados con la aprehensión perceptiva y la aprehensión operatoria, y además, deben realizar un proceso de conversión relacionado con la aprehensión discursiva.

Palabras claves:
Tratamiento, Conversión, Representaciones Semióticas, Área, Perímetro, Figuras Planas, Aprehensión Perceptiva, Aprehensión Operatoria, Aprehensión Discursiva, Enseñanza De La Geometría, Perspectiva Semiótico Cognitiva.

Contenido

Introducción. 1

Capítulo 1. Aspectos Generales del Proyecto. 3

1.1 Planteamiento del problema. 3

1.2 Objetivos de la investigación. 7

1.2.1 Objetivo General. 7

1.2.2 Objetivos Específicos. 7

1.3 Justificación. 7

1.4 Antecedentes de la Investigación. 10

Capítulo 2. Fundamentación Teórica. 13

2.1 Referente curricular 13

2.1.1 Consideraciones alrededor del pensamiento espacial y sistemas geométricos. 14

2.1.2 Consideraciones Alrededor Del Pensamiento Métrico Y Sistemas de Medidas. 15

2.2 Referente Semiótico. 18

2.2.1 Registro figural y el discurso matemático. 22

2.2.2 Aprehensión Perceptiva. 24

2.2.3 Aprehensión Operatoria de las modificaciones posibles de una figura geométricas. 24

2.3 Referente Matemático. 26

Capítulo 3. Fundamentos Metodológicos Del Proyecto. 34

3.1 Estudio de Casos Como Método de Investigación 34

3.1.1 Fases de la investigación. 34

3.1.2 Instrumentos y técnicas de recolección de la Información. 36

3.1.3 Instrumento de análisis. 36

3.1.4 Aproximación contextual. 37

3.1.5 Diseño de las actividades 38

Capítulo 4. Análisis, Resultados y Consideraciones Finales De Las Situaciones Propuestas En El Aula. 44

4.1 Análisis y Resultados De Las Situaciones Propuestas En El Aula 44

4. 1.1 Situación 1: Celebrando El Día De La Familia. 45

Análisis de Tratamientos. 45

4.1.2 Situación 2: Recubriendo La Figura. 55

4.1.3 Actividad 3: Midiendo Mi Entorno. 68

4.1.4 Situación 4: Construyendo Figuras. 75

4.2 Consideraciones Finales. 88

4.2.1 Conclusiones. 88
4.2.2 Recomendaciones. 90
Bibliografía.......... 92
Anexos. 95

Tabla de Ilustraciones.

Ilustración 1.Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. 5
Ilustración 2. Clasificación de las unidades figurales elementales. 23
Ilustración 3. Aprehensión perceptiva del hexágono como patrón de medida. 24
Ilustración 4. Aprehensión operatoria del hexágono como patrón de medida. 25
Ilustración 5. Línea poligonal abierta 30
Ilustración 6 Línea poligonal cerrada 30
Ilustración 7. Línea poligonal cerrada simple 31
Ilustración 8. Representación gráfica del área del rectángulo. 32
Ilustración 9 Estrategia de medida usando elementos convencionales. 45
Ilustración 10. Estrategia de medida por superposición. 46
Ilustración 11.Recorte de la figura B en subfiguras. 47
Ilustración 12.Reconfiguración de la figura B sobre la figura A. 47
Ilustración 13. Transformación de la figura A en un cuadrado. 47
Ilustración 14. Reconfiguración de la figura B. 47
Ilustración 15. Estrategia de conteo de las unidades cuadradas para la identificación de la figura con mayor cantidad de área. 48
Ilustración 16. Medida del contorno de la figura A. 49
Ilustración 17. Medida del contorno de la figura B. 49
Ilustración 18. Comparación de las cintas para establecer la figura con mayor cantidad de longitud .. 49
Ilustración 19.Razonamiento presentado por un grupo de estudiantes relacionado con el reconocimiento de la independencia entre las magnitudes área y perímetro. 50
Ilustración 20. Razonamiento presentado por un grupo de estudiantes relacionado con el reconocimiento de la independencia de las magnitudes área y perímetro. 50
Ilustración 21.Explicación de un grupo de estudiantes sobre los tratamientos figurales realizados para responder a las tareas uno y dos. 50
Ilustración 22. Proceso de sobreposición realizada por un grupo de estudiantes. 56
Ilustración 23. Superficie de la figura D que queda sin cubrir haciendo uso solo de cuadriláteros. 57
Ilustración 24. Proceso de recubrimiento con cuadriláteros y triángulos. 58
Ilustración 25. Recorte del cuadrilátero en triángulos. 58
Ilustración 26. Explicación de un grupo de estudiantes del proceso que desarrollaron para cumplir con su tarea. 58
Ilustración 27. Recubriendo la superficie de la figura D con diferentes patrones de medida. 59
Ilustración 28. Proceso de recubrimiento de la superficie de la figura D. 60
Ilustración 29. Proceso de reagrupamiento de los cuadriláteros y triángulos en hexágonos. 60
Ilustración 30. Respuesta de un grupo de estudiantes a la tarea 4. 61
Ilustración 31. Respuesta de un grupo de estudiantes respuesta 4. 61
Ilustración 32. Explicación sobre los tratamientos y el patrón de medida empleado para medir el contorno del escritorio. 69
Ilustración 33. Medida del contorno del escritorio con patrón arbitrario. 69
Ilustración 34. Medida con patrón arbitrario de la cantidad de cuerda necesaria para cubrir el contorno del escritorio 69

Ilustración 35. Explicación sobre los tratamientos y el patrón de medida empleado para medir el contorno del escritorio. 69
Ilustración 36. Medida de longitudes con patrones arbitrarios. 70
Ilustración 37. Representación gráfica del escritorio, teniendo en cuenta los tratamientos realizados y el patrón de medida. 70
Ilustración 38. Representación gráfica del escritorio donde se describe la cantidad de longitud de cada uno de sus lados teniendo en cuenta el patrón de medida utilizado. 71
Ilustración 39.Medida del escritorio por un grupo de estudiantes. 71
Ilustración 40. Medida del escritorio por un grupo de estudiantes, donde se utiliza un registro numérico para sustentar su respuesta. 71
Ilustración 41.Explicación sobre el porqué la medida del contorno del escritorio no es igual para todos los grupos. 72
Ilustración 42.Explicación sobre el porqué la medida del contorno del escritorio no es igual para todos los grupos. 72
Ilustración 43.Uso de una medida estándar para hallar el perímetro del escritorio 73
Ilustración 44.Explicación del porqué las medidas son iguales para todos los grupos haciendo uso de un registro numérico para sustentar sus respuestas 73
Ilustración 45.Explicación del porqué las medidas son iguales para todos los grupos. Haciendo uso de un registro gráfico y el registro numérico para sustentar sus respuestas. 73
Ilustración 46.Reconocimiento de las piezas del pentominó. 76
Ilustración 47.Un grupo de estudiantes comprobando que todas las unidades cuadradas tuvieran la misma medida. 76
Ilustración 48.Conteo de las unidades de longitud para la identificación del perímetro de las figuras. 77
Ilustración 49. Justificación realizada por un grupo de estudiantes en la primera parte de la situación 4. 77
Ilustración 50.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó PT y ZI en figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro. 78
Ilustración 51.Reconfiguración de las piezas del pentominó LI y UN para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro. 79
Ilustración 52.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó WL y NU en figuras que cumplen la condición de tener igual área e igual perímetro 79
Ilustración 53.Reconfiguración de las piezas del pentominó LI y UN para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro. 80
Ilustración 54.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó NUP y LX en figuras que cumplen la condición de tener igual área e igual perímetro. 80
Ilustración 55. Reconfiguración de las piezas del pentominó PUN y VT para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener diferente área y área perímetro. 81

TABLAS.

Tabla 1. Aspectos curriculares, matemáticos y didácticos considerados en cada una de las situaciones. 42
Tabla 2. Aspectos semióticos cognitivos considerados en las situaciones. 43
Tabla 3. Aprehensión discursiva primera tarea de la situación 1. 52
Tabla 4. Aprehensión discursiva de la segunda tarea de la situación 1. 54
Tabla 5. Aprehensión discursiva de la primera tarea de la situación 2. 63
Tabla 6. Aprehensión discursiva tarea 2 situación 2. 65
Tabla 7. Aprehensión discursiva tarea tres situaciones 2. 67
Tabla 8. Aprehensión discursiva de la tercera tarea de la situación 3. 75
Tabla 9. Aprehensión discursiva tarea dos, situación 4. 83
Tabla 10. Aprehensión discursiva tarea dos, situación 4. 86
Tabla 11. Aprehensión discursiva tarea tres, situación 4. 87

Introducción.

Dadas las dificultades encontradas en algunas investigaciones (Chamorro (2003), D'Amore y Fandiño (2007, 2009), D´Amore, Fandiño y Lori (2013), Marmolejo (2016)). Así como los resultados de las pruebas nacionales sobre el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, es esencial que se reflexione sobre la práctica educativa y que se busquen nuevas estrategias las cuales permitan superarlas. Es por ello, que en este proyecto de investigación se pretende hacer una aproximación al aprendizaje de dichos objetos matemáticos.

Durante esta investigación se realiza una propuesta de aprendizaje teniendo en cuenta la teoría semiótico cognitiva propuesta por Raymond Duval, partiendo del hecho que la actividad matemática se desarrolla necesariamente haciendo uso de representaciones del objeto matemático a trabajar y para tener una mejor comprensión es necesario presentar diversas representaciones del mismo objeto, en este caso se trabajan representaciones en el registro discursivo y registro figural.

Esta trasformación de las representaciones se puede llevar a cabo a través de dos procesos cognitivos conocidos como tratamiento y conversión, donde cada uno de ellos brinda características diferentes que ayudan en la construcción del conocimiento matemático. Lo mencionado anteriormente se articula en un diseño de situaciones, las cuales se aplica en los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnico Ambiental Fernández Guerra.

El desarrollo de este trabajo se lleva a cabo en cuatro capítulos, en el primero se expone la problemática de investigación la cual está relacionada con las dificultades en el aprendizaje de la medida de las magnitudes longitud y superficie, seguido a esto se realiza la formulación de la pregunta que orienta la investigación y, posteriormente, los objetivos. Luego se presenta la justificación en la que se muestra la pertinencia de la investigación desde distintos aspectos y finalmente, se cierra este capítulo con los antecedentes, en los cuales se encuentran los resultados de algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.

En el segundo capítulo se presenta al lector los diferentes referentes que sustentan la investigación, donde se consideran aspectos relacionados con lo curricular, lo matemático y lo semiótico cognitivo. En el tercer capítulo se presenta todo lo relacionado con la metodología utilizada, donde se realiza una caracterización del estudio de casos, el cual es el método seleccionado para desarrollar la investigación. Después de esto, se describe la secuencia de situaciones que se diseñó así como las particularidades que tiene cada una.

En el cuarto capítulo se presentan los análisis de los datos recogidos durante la puesta en acto de la secuencia de actividades, teniendo en cuenta dos aspectos. Por un lado, se analizan los tratamientos realizados dentro del registro figural y, por otro se observa si existe una coordinación entre los distintos sistemas de representación utilizados.
Y finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones, las cuales dan cuenta del cumplimiento de los objetivos del trabajo y las consideraciones que se deben de tener en cuenta en el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.

Capítulo 1. Aspectos Generales del Proyecto.

1.1 Planteamiento del problema.

En la vida y desarrollo del ser humano la Geometría ha sido parte fundamental y es casi imposible no encontrarla de forma directa o indirecta en su contexto cultural y social. La Geometría, es quizá la rama de las matemáticas más cercana a la realidad debido a la naturaleza perceptible de los objetos geométricos y se hace indispensable y necesaria su enseñanza en las primeras etapas de escolaridad. A pesar de ello, durante mucho tiempo su enseñanza estuvo marginada dentro del currículo colombiano y se le dio prioridad a la teoría de conjuntos y a la lógica matemática, centrándose en el aprendizaje memorístico de fórmulas y algoritmos, abandonando casi por completo el razonamiento lógico-matemático que permite a los estudiantes interpretar resultados y aplicarlos a la vida cotidiana (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Vasco (2006) lo describe de la siguiente manera:

> Desde un punto de vista psicológico y pedagógico, es que lo que se pensó como una carrera de obstáculos para filtrar la élite de la matemática francesa, se haya querido convertir en currículo general de matemáticas para todas las escuelas y colegios del globo. El resultado ha sido el abandono de la geometría en casi todas partes del mundo, la pérdida de la más elemental imaginación tridimensional, y el entrenamiento de los jóvenes en la manipulación de sistemas simbólicos formales sin ninguna conceptualización que los sostenga, y sin ninguna posibilidad de aplicación fuera de los contextos triviales o esotéricos de los problemas que aparecen en los libros (p. 29).

Dicho modelo curricular adoptado por Colombia en la década de los 60 y 70 no arrojó los resultados esperados, por ello, el Ministerio de Educación Nacional (1998) (en adelante MEN) considera que “desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se hace necesario volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no solo en lo que se refiere a la geometría” (p. 37). Planteando así una nueva renovación curricular donde se tuvieran en cuenta las distintas ramas que conforman las matemáticas sin dejar de lado sus elementos, operaciones y relaciones.

A pesar de los intentos del MEN por recuperar la enseñanza de la Geometría planteando diferentes reformas, en las Instituciones Educativas se le sigue brindando poco espacio en sus currículos desplazando los temas para el final de los programas o brindando pocas horas para su enseñanza, sin tener en cuenta el aporte de la Geometría en el desarrollo de habilidades como; mayor capacidad visual, verbal, de dibujo y de aplicación, habilidades que son importantes no solo en la matemática misma sino también para afrontar problemas de la vida cotidiana.

> Algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, lo que les implica, en variados casos, la exclusión de estos temas o su atención de manera superficial. La enseñanza de la geometría con este enfoque ha provocado que sea considerada como una disciplina difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes (Abrate, Delgado y Pochulu (2006), citado en Gamboa & Ballesteros. 2010).

Una de las herramientas utilizadas en Colombia para evidenciar las debilidades y fortalezas del conocimiento matemático por parte de los estudiantes son las pruebas SABER. Estas pruebas permiten comprobar el desarrollo de competencias por parte de los estudiantes, brindando información a las instituciones educativas, a los padres de familia y al MEN, que les permita crear nuevas estrategias de mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las competencias y los componentes[1] que son evaluados en estas pruebas, se determinan tomando como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Por tal motivo se considera necesario conocer los resultados de la prueba realizada en el año 2016 de la Institución Técnico Ambiental Fernández Guerra, la cual pertenece al sector oficial. Conviene subrayar que se presentan los resultados de este establecimiento educativo dado que es el lugar en el cual se lleva a cabo la presente investigación.

[1]Las competencias que son evaluadas en las pruebas SABER son: comunicación, razonamiento, resolución de problemas, representación, argumentación y modelación las cuales se reagrupan de la siguiente manera: razonamiento y argumentación; comunicación, representación y modelación; planteamiento y resolución de problemas. Los componentes que se evalúan son: numérico, variacional, geométrico, métrico y aleatorio, los cuales para estructurar la prueba se organizaron en tres grupos el numérico-variacional, geométrico- métrico y aleatorio.

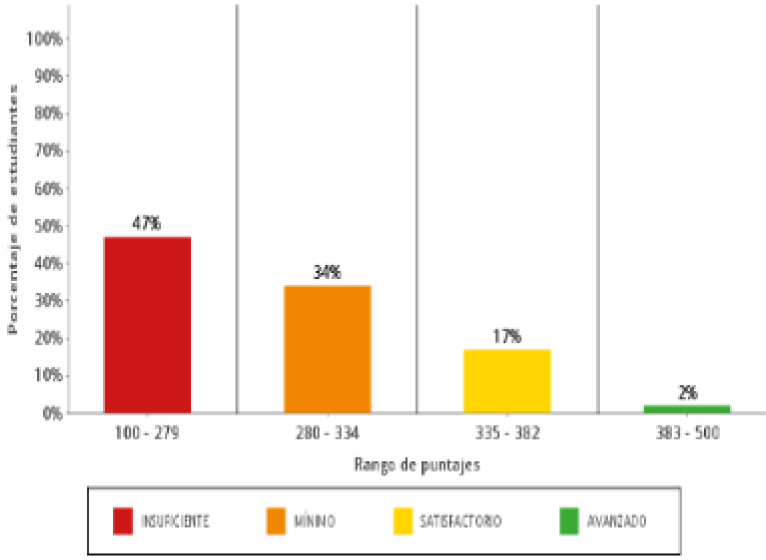


*Ilustración 1.*Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño.

En los resultados se puede evidenciar que el 47% de los estudiantes de grado quinto de este establecimiento educativo se encuentra en el nivel insuficiente, el 34% en el nivel mínimo, el 17% en el nivel satisfactorio y solamente el 2% de los estudiantes en el nivel avanzado. El componente evaluado con más dificultad fue el geométrico- métrico, es decir, que los estudiantes tienen mayores falencias en el proceso de construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio, sus relaciones y sus transformaciones, más específicamente en la comprensión del espacio, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano, el razonamiento geométrico y la resolución de problemas de medición, la estimación de magnitudes, la selección y uso de unidades de medida, de patrones e instrumentos, y también presentaron falencias en los conceptos de área, perímetro y volumen (MEN, 2017).

De acuerdo al bajo rendimiento que presentan los estudiantes en las pruebas nacionales en el componente geométrico métrico y considerando los resultados de algunas investigaciones relacionadas con la medida de magnitudes, es importante delimitar algunas de estas dificultades con el fin de empezar a construir estrategias de aprendizaje que permitan disminuirlas, puesto quesegún Marmolejo (2016), la enseñanza de la medida es uno de los sistemas matemáticos que más complejidad representa para los estudiantes a pesar de que “la medida constituye una de las principales actividades humanas, presente en todas las culturas desde las más antiguas, ya que permite comparar, estimar o calcular con más o menos precisión distintas magnitudes” (Bishop, 1999, citado por Luelmo, 2001). Además, “es el soporte de todos los aprendizajes matemáticos fundamentales de la enseñanza elemental” (Chamorro, 1995, p.5).

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el ciclo de cuarto a quinto, se decide trabajar con el área y perímetro de figuras planas dado que estos se integran de forma directa con el entorno de los estudiantes pero, a pesar de ello, no logran relacionarlos con los objetos tangibles y cercanos que se encuentran a su alrededor, además, su aprendizaje es necesario para el estudio de las magnitudes, las cantidades y las medidas (D´Amore & Fandiño, 2009) como también, de características y propiedades de la figuras geométricas (Aldana & López, 2016). Cabe resaltar que el área y perímetro de figuras planas han sido objeto de estudio durante las últimas décadas, pero, no obstante, la complejidad de su estudio se mantiene latente (Marmolejo & Gonzales, 2015, p. 45).

De ahí que se imponga la necesidad de buscar nuevas alternativas que ayuden a la compresión de estos objetos matemáticos, las cuales no se centren solo en el éxito de los resultados, sino también en los procesos cognitivos los cuales constituyen el criterio más importante en la conceptualización de un objeto matemático (Duval, 2015), es decir, buscar estrategias que permitan potenciar el pensamiento geométrico, donde no solo se tengan en cuenta procesos de memorización y manipulación de algoritmos, sino también que les permita a los estudiantes razonar, observar, argumentar y justificar sobre los conceptos matemáticos.

Una exigencia cognitiva esencial para cualquier estudiante es lograr apropiarse de los objetos matemáticos, y en este sentido las representaciones semióticas juegan un papel importante dado que, como lo menciona Duval (2001) “no hay otro medio de acceso a los objetos matemáticos que las representaciones semióticas” (p. 26). Sin embargo, son las transformaciones de dichas representaciones las que permiten ver, explorar y pensar ya que “la construcción cognitiva de los objetos matemáticos es estrictamente dependiente de la capacidad de utilizar varios registros de representación semiótica” (D´Amore, Fandiño y Lori, 2013, p. 150). Es por esto que se deben formular actividades en las cuales los estudiantes tengan la posibilidad de realizar transformaciones a las representaciones.

Como se ha dicho, hacer uso de las representaciones semióticas es una actividad primordial y característica de la actividad matemática, dado que son estas las que permiten la formación y construcción de los objetos matemáticos. Así, por ejemplo, en el aprendizaje de la geometría se debe recurrir como mínimo a dos registros de representación; uno de ellos es el registro figural en el que se desarrollan unos tratamientos propios de las figuras, y los cuales están basados en la percepción visual (aprehensión perceptiva y operatoria), y el otro es el registro discursivo, el cual sirve para comunicar las ideas así como los procedimientos geométricos que deben ser desarrollados en el aprendizaje de la geometría (Duval, 2004). Conviene subrayar que, ambos registros se tendrán en cuenta en la presente investigación.

En relación con lo anterior y de acuerdo con Duval (2004) cuando afirma que la geometría tiene una exigencia cognitiva más compleja dado que implica desarrollar como mínimo dos registros de representación de forma interactiva y simultánea para lograr los resultados esperados, surge la siguiente pregunta de investigación:

Desde una perspectiva semiótica cognitiva ¿Cómo se favorece el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas en estudiantes del grado 5 de primaria a partir de un diseño de situaciones?

1.2 Objetivos de la investigación.

1.2.1 Objetivo General.

- Favorecer el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas desde una perspectiva semiótico cognitiva en estudiantes de grado 5 de primaria, a partir de un diseño de actividades.

1.2.2 Objetivos Específicos.

- Determinar los criterios curriculares, matemáticos y cognitivos que deben cumplir las actividades para movilizar el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.
- Contextualizar e implementar un diseño de situaciones que posibilite el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.
- Identificar a través de los resultados obtenidos el papel que juegan los criterios semiótico cognitivos seleccionados, en el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.

1.3 Justificación.

A pesar del olvido en el que estuvo la geometría dentro del currículo colombiano durante mucho tiempo, hoy en día es considerada como la rama de las matemáticas que permite tener una "articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano con lo académico" (MEN. 2006, p. 57). Actualmente, se admite que la geometría juega un papel importante en el desarrollo de las matemáticas por su carácter de "herramienta para interpretar, entender, y apreciar un mundo que es enteramente geométrico, y que constituye un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación" (MEN, 1998. p. 17).

La geometría por ser la rama de las matemáticas que modela el espacio, permite que los estudiantes construyan de manera intuitiva una relación entre los modelos geométricos y las figuras o elementos de su entorno. Esta relación les permite construir las bases que dan paso a un nivel de abstracción mayor, donde no solo argumentan sobre un espacio físico, sino que les permite construir nuevas conjeturas sobre un espacio conceptualizado a partir de las propiedades que han identificado en la exploración con el entorno (García y López. 2008).

Uno de los tantos conceptos que se encuentra presente no solo en el desarrollo de la vida cotidiana de todo ser humano, sino en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas, es la medida. Sin embargo, en los resultados de las pruebas nacionales se puede identificar que existen dificultades en el dominio de este objeto matemático por parte de los estudiantes, por lo cual es necesario buscar estrategias que permitan disminuirlas.

Son varias las clases de medidas que se deben estudiar a lo largo de la formación académica según lo establecido por el MEN a través de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, pero para el desarrollo de este proyecto se ha decidido trabajar con el área y perímetro de figuras planas, las cuales se van a abordar teniendo en cuenta el pensamiento espacial y sistemas geométricos, como también el pensamiento métrico y sistemas de medidas.

Dichas nociones empiezan a aparecer desde los primeros grados de escolaridad hasta el final de la educación media, y a medida que se avanza en el nivel escolar, el grado de complejidad en el aprendizaje de estas nociones también se incrementa, por eso es importante que los estudiantes cuenten con una buena formación desde los primeros grados teniendo en cuenta que estas nociones son importantes en la construcción de otros aprendizajes matemáticos.

El conocimiento de la medida, en este caso el área y perímetro es fundamental en la comprensión de fenómenos del entorno Chamorro (2003) y se hacen necesarios nuevos aportes desde diferentes campos de investigación que contribuyan a un aprendizaje significativo, y en la disminución de las dificultades puestas en evidencia no solo en los resultados de las pruebas nacionales, sino también en algunas investigaciones. Esta observación se relaciona con lo planteado por Marmolejo& Gonzales (2015) cuando afirma que "independientemente de la tendencia considerada, la mayoría de los reportes de investigación resaltan la presencia de un problema cognitivo que complejiza el estudio del área, que permea las apuestas de enseñanza consideradas, que afecta los resultados en pruebas externas y cuya caracterización debe ser contemplada" (p.53).

En esta necesidad de buscar nuevas alternativas que contribuyan al aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, se deben replantear las estrategias utilizadas y pensar en nuevos caminos donde se consideren los elementos fundamentales en este proceso, para que así, se puedan abordar desde nuevas perspectivas teóricas o metodológicas. Según Marmolejo& Vega (2012) tener en cuenta los tratamientos que proceden de los registros semióticos de las figuras y de la lengua natural, así como la coordinación entre cada uno de los registros, es un elemento de mucha importancia para comprender algunos de los fenómenos ocultos en el aprendizaje de la geometría.

Es por esta razón que este trabajo se aborda teniendo en cuenta la perspectiva semiótica cognitiva de Raymond Duval, dado que los objetos matemáticos son de naturaleza abstracta y la única manera de acceder a ellos es a través de sus distintas representaciones semióticas, donde cada una de ellas brinda una característica diferente del objeto matemático puesto en juego. En palabras del propio Duval (2001):

> Representaciones diferentes de un mismo objeto, evidentemente, no tienen el mismo contenido. Cada contenido está determinado por el sistema por el cual se produce la representación, de donde surge la consecuencia de que cada representación no presenta las mismas propiedades o las mismas características del objeto. Ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea completo y adecuado al objeto representado (p.38).

Cuando se habla de registros de representaciones semióticas se deben tener en cuenta los procesos de transformación que se pueden realizar a cada uno de ellos, debido a que estos ayudan a formular y sustentar diferentes puntos de vista, ya sea desde el lenguaje cotidiano o el lenguaje propio de las matemáticas (MEN, 2006). Esos procesos de transformación no se logran de manera espontánea, pero aportan herramientas esenciales en el proceso de comprensión y apropiación de los objetos matemáticos.

Es necesario, además, que los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas logren apropiarse no solo de las representaciones semióticas de un objeto matemático, sino también, de las posibles transformaciones que se le pueden realizar a dichas representaciones, "en otras palabras, las posibilidades de transformaciones de las representaciones producidas son tan esenciales como cada una de las representaciones que se puedan producir" (Duval, 2004, p. 44).

En relación con lo anterior, con este proyecto de investigación se pretende aportar elementos que ayuden a los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnico Ambiental Fernández Guerra, en el proceso de comprensión del área y perímetro de figuras planas promoviendo los procesos cognitivos de tratamiento, conversión como también una coordinación entre los diferentes registros, los cuales permiten una mejor apropiación de los objetos matemáticos.

Con esta investigación también se busca resaltar la importancia y ventajas de utilizar la teoría semiótico cognitiva en el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, brindando elementos importantes en el desarrollo de estudios posteriores relacionados con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión y los registros de representación semiótica en el aprendizaje de los objetos matemáticos de interés.

1.4 Antecedentes de la Investigación.

A continuación, se presentan los resultados de algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, los cuales permiten evidenciar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de dichos objetos matemáticos, y que se han tomado como referencia para la elaboración de la presente investigación.

En un primer momento se mencionan a Godino, Batanero & Roa (2002) y Montis, Mallocci & Polo (2003) (citado en D´Amore y Fandiño, 2007) como también a D´Amore & Fandiño (2009), quienes afirman que los estudiantes crean una fuerte relación de tipo biunívoca entre el área y el perímetro, pensando que si una de las dos magnitudes cambia la otra también lo hará en el mismo sentido y proporción, es decir, piensan que si el perímetro de una figura aumenta, de la misma manera lo hará el área o viceversa, o relacionan la figura de mayor área con la de mayor perímetro o con la figura más alta. El crear esta codependencia entre estas dos magnitudes dificulta la adquisición de la conservación de una u otra magnitud, donde al variar la forma de la figura el estudiante no es capaz de aceptar la inmutabilidad del área o del perímetro.

Otro trabajo de gran importancia es el de Chamorro (2003), en esta investigación se hace referencia de manera general al problema de la medida y muestra su complejidad cuando se presentan ejemplos relacionados con el área y perímetro de figuras planas. En esta investigación se resalta que los obstáculos en el aprendizaje de estos objetos matemáticos son de naturaleza didáctica, los cuales se refuerzan con gran frecuencia en obstáculos epistemológicos como el no reconocer que la cantidad de magnitud puede ser la misma en dos figuras de forma distinta. Llegar a reconocer estas características no es un trabajo trivial para el estudiante, es por eso que el conocimiento debe ser construido de una manera laboriosa, donde el reto está en encontrar situaciones que permitan construir conocimiento teniendo en cuenta los significados esenciales de los objetos matemáticos puestos en juego.

D´Amore y Fandiño (2007) al igual que Chamorro (2003) sostienen que los obstáculos que se presentan en el aprendizaje de las nociones de área y perímetro no son solo de naturaleza epistemológica sino también de naturaleza didáctica, debido a que en muchas ocasiones los docentes no hacen las elecciones correctas para llevar a cabo una buena transposición didáctica, por ejemplo, se usan siempre figuras convexas lo que crea la idea de que las figuras cóncavas no pueden ser usadas. Además, casi siempre usan figuras estándar lo que lleva a la idea de que solo existen ese grupo de figuras y que no es posible trabajar con figuras diferentes. Otro error que se comete, es que la mayoría de veces no se presenta de manera explícita la relación entre área y perímetro de la misma figura geométrica, se insiste solo en la diferencia que el perímetro se mide en metros y el área en metros cuadrados pero no en la operaciones recíprocas, no se hacen transformaciones de tal forma que se modifique o se conserve el área y el perímetro de las figuras.

Kouba (1988), de los reyes (1999) y Moyer (2001) (citados en Carrillo. De Patagones. & García. 2006) distinguen dos tipos de dificultades en relación con el proceso de construcción de las nociones de área y perímetro: una es la confusión de nombres y la otra es una confusión conceptual, puesto que los estudiantes no reconocen el carácter unidimensional del perímetro y bidimensional del área.

Hay que mencionar, además, la investigación realizada por D´Amore, Fandiño y Lori (2013), quienes afirman que el origen semiótico de la falsa relación de dependencia entre el área y perímetro de figuras planas, está dada por el hecho de que casi siempre, en los libros de texto, en el tablero y en los apuntes, cuando se habla de un polígono F, se tiende a diseñar un polígono convexo y en la mayoría de los casos bastante regular, por ejemplo un rectángulo. Y cuando se habla de aumentar el perímetro del polígono, se piensa espontáneamente en una homotecia, y, de manera obvia, si se trata de una homotecia, por consecuencia aumenta también el área. Es decir, hacen referencia al uso inadecuado de polígonos estándar cuando se representan los objetos geométricos, al uso de polígonos convexos lo que ocasiona dificultad para luego aceptar los polígonos cóncavos, y también, hacen referencia al uso de terminología confusa para referirse a ellos.

Relacionado con el punto anterior, D´Amore & Fandiño (2009), argumentan que otro factor semiótico relacionado con las dificultades presentadas por los estudiantes en el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, se presenta puesto que no se proponen actividades donde tengan que realizar transformaciones de forma tal que se conserve o se modifique el área o el perímetro, y cuando se hace, los estudiantes interpretan el término “transformación” como un cambio que solo implica la ampliación o la reducción de las figuras, es decir, una homotecia. Esta idea se refuerza con Marmolejo (2016) quien afirma que los estudiantes no están familiarizados con estrategias como descomponer figuras para así, de manera más sencilla, poder realizar el cálculo de áreas. Además, según este autor, los estudiantes también presentan confusiones con la deducción, identificación y aplicación de fórmulas para calcular el área de algunas figuras básicas.

Es por eso que como lo menciona Gagatsis (2015) la forma de observar y construir una figura es un factor cognitivo importante para llegar a la solución de un problema geométrico, por lo que se deben movilizar diferentes tipos de aprehensiones figurales con el fin de mejorar las habilidades de los estudiantes en la forma de observar y de usar las figuras geométricas. Por tanto, en la resolución de tareas se deben movilizar la aprehensión perceptual, aprehensión operatoria y la aprehensión discursiva, donde cada una de estas tiene un papel diferente, pero de gran importancia para la comprensión y solución del problema geométrico.

Capítulo 2. Fundamentación Teórica.

En este apartado se presentan las bases teóricas que fundamentan la elaboración de este trabajo: primero se expone el referente curricular en el que se consideran algunos de los documentos de política pública propuestos por el MEN, luego el referente semiótico cognitivo donde se incluye la teoría de las representaciones semióticas propuesta por Raymond Duval, y finalmente, el referente matemático.

2.1 Referente curricular

Para hacer una propuesta de aprendizaje del área y perímetro de figuras planas es importante considerar las normas que rigen la educación en Colombia, debido a que en estas se encuentran los objetivos generales que sugieren los elementos en los que debe desenvolverse un estudiante para poder responder a las necesidades de la sociedad.

Al realizar la revisión documental de dichas normas, se pudo evidenciar que el MEN (2006) establece que los estudiantes de grado quinto deben estar en la capacidad de "diferenciar y ordenar en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir como longitudes y áreas de superficies; seleccionando unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para las diferentes mediciones" (p. 83).

Desde este punto de vista, es importante trabajar algunas situaciones donde el estudiante se enfrente a problemas que le permitan entender la utilidad de la medida, en los cuales el proceso de medir sea significativo, es decir, donde las situaciones no solo se centren en el empleo de fórmulas haciendo énfasis en su memorización y aplicación, sino que también permita el desarrollo de destrezas y conceptos.

De acuerdo con Corberán (1996) es importante desde el inicio de la enseñanza del concepto de área, introducir a los estudiantes a situaciones en las que se deba estudiar de forma conjunta el área y el perímetro de algunas figuras, dado que uno de los errores más comunes es la falsa relación que se establece entre estos dos objetos matemáticos. Además, el MEN (2006) plantea que los estudiantes deben "describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas" (p. 83).

Dicho lo anterior es importante recalcar que uno de los pensamientos matemáticos que permiten trabajar la construcción de la magnitud así como su medida, es el pensamiento métrico y sistemas de medidas. Sin embargo, es importante que el aprendizaje no solo se trabaje sobre las relaciones métricas sino que también se tengan en cuenta reflexiones de carácter espacial en el que los estudiantes tengan la oportunidad de visualizar y explorar con las figuras considerando su forma, tamaño y orientación. Durante este proceso es de gran importancia el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, razón por la cual durante el desarrollo de la investigación se hace énfasis en estos dos tipos de pensamientos.

2.1.1 Consideraciones alrededor del pensamiento espacial y sistemas geométricos.

El pensamiento espacial se define como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales en el espacio y las relaciones entre ellas, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN, 1998).

El pensamiento espacial es un componente fundamental para el desarrollo de pensamiento matemático. Gardner lo explica como algo "esencial para el desarrollo científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas" (Tomado de MEN, 1998. P. 34).

La enseñanza de la geometría se debe relacionar con la capacidad práctica de los estudiantes para actuar en el espacio, manipular los objetos, localizar situaciones en el entorno y efectuar desplazamientos, medidas y cálculos espaciales. Teniendo en cuenta esta perspectiva lo que se propone es trabajar la geometría por medio de aquellas transformaciones y representaciones tanto mentales como de dibujo que permitan una exploración activa del espacio, donde se debe tener en cuenta el proceso de visualización, dado que la geometría es una disciplina eminentemente visual en la cual el primer acercamiento que tienen los estudiantes con los objetos geométricos es a través de este proceso.

Desde este punto de vista, el pensamiento espacial y sistemas de medidas se entenderá como se asume en Marmolejo (2016), es decir, "como todo tipo de acciones que se aplican sobre las figuras bidimensionales y que generan en ellas transformaciones tanto en su contorno global como en su tamaño y la posición que ocupa en el espacio" (p. 36). Haciendo énfasis en la sobre posición, composición y recomposición de los polígonos y la comparación entre las figuras.

2.1.2 Consideraciones Alrededor Del Pensamiento Métrico Y Sistemas de Medidas.

El estudio de la medida es fundamental desde los primeros hasta los últimos grados de escolaridad, o al menos de esa manera se refleja en algunos documentos como los Lineamientos curriculares en Matemáticas, y los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas. Además, según Godino et al. (2002) "el estudio de las magnitudes y su medida es importante en el currículo desde los niveles de educación infantil hasta secundaria debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria" (p. 635).

Asimismo, aprender a medir permite que los estudiantes desarrollen destrezas prácticas en otros contenidos como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos etc, y también, permite establecer conexiones entre las matemáticas y otros campos como la física, las ciencias sociales, las ciencias naturales, el arte e incluso la educación física (Godino et al., 2002).

Debido a la importancia de la medida en diferentes campos sociales y culturales, como su relación con otras ciencias, se hace necesario incluir en el currículo la enseñanza del pensamiento métrico y los sistemas de medidas, donde "los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones" (MEN 2006. p 63). En lo anterior se evidencia que el concepto fundamental para el desarrollo del pensamiento métrico es el de magnitud.

Reconociendo la importancia del concepto de magnitud en el desarrollo del pensamiento métrico, el MEN (1998) específica algunos conceptos y procedimientos que considera necesarios para el desarrollo de este pensamiento:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".

• La apreciación del rango de las magnitudes.

• La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.

• La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.

• La asignación numérica.

• El papel del trasfondo social de la medición.

La construcción de los conceptos de cada magnitud: el proceso de construcción de las magnitudes requiere tiempo; primero los estudiantes empiezan a abstraer de los objetos las magnitudes concretas: el ancho, el alto, el largo, el espesor, etc. para luego, identificar la magnitud abstracta como por ejemplo la longitud y la superficie.

Se debe tener claro que las cualidades susceptibles de ser medidas no se presentan de manera explícita en los objetos, por lo tanto, existe una actividad mental previa para lograr extraerlas.

La Compresión de los procesos de la conservación de magnitud: en el proceso de afianzamiento de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc. se debe reconocer aquello que permanece invariante a pesar de la variación del tiempo y del espacio, por ejemplo, en el caso de la magnitud superficie se puede establecer una igualdad entre las cantidades de superficie de diferentes figuras, donde al transformar una figura inicial en otra, esta nueva figura conserva la cantidad de superficie, es decir, no existe pérdida ni ganancia, el único cambio que sufre la figura con la transformación es el de la forma. En el caso del perímetro de las figuras, la conservación de la magnitud se pone en evidencia cuando se proponen tareas en las que al transformar una figura, la figura obtenida tendrá la misma medida del contorno de la figura inicial. En algunas ocasiones cuando se trabajan de manera conjunta las magnitudes superficie y longitud es posible que al realizar modificaciones a la figura inicial, una de las magnitudes sufra alteraciones en su medida, esto dado que existe una independencia entre las magnitudes.

La Estimación de magnitud y el proceso de capturar lo continuo con lo discreto: Bright 1976 (citado por el MEN, 1998) define la estimación de magnitudes como el proceso en el cual se logra medir algún objeto sin la necesidad de utilizar instrumentos de medición. Se considera como un proceso mental que realizan los individuos, y se relaciona con la capacidad de expresar cantidades de medida sin ver el objeto o sin compararlo con unidades de medición, aunque en ocasiones se relaciona con aspectos visuales y manipulativos.

En el proceso de medición se requieren de por los menos dos tipos de actividades: en el caso de la medición de áreas, por ejemplo, se requiere de actividades que promuevan la noción de recubrimiento por repetición de una unidad, es claro que este punto es fundamental pero es solo una aproximación al concepto de medida puesto que promueve su sentido discreto y exacto, por lo cual, es fundamental promover actividades que permitan reconocer la naturaleza continua y aproximativa de las mismas.

La apreciación del rango de las magnitudes y la selección de unidades: las habilidades de apreciación del rango en el que se encuentra una magnitud concreta y la selección de unidades de medida son poco desarrolladas por los estudiantes. Estas habilidades son indispensables para determinar las magnitudes que intervienen en algunas situaciones y así poder determinar la unidad de medida más apropiada para realizar la medición.

La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición: en las situaciones donde se lleve a cabo un proceso de medición no siempre es necesario seleccionar una unidad de medida, a veces solo basta con seleccionar un objeto que contenga una cantidad de magnitud más pequeña que la que se desea medir con el fin de comparar o establecer cuántas veces la contiene , pero si lo que se desea es presentar un resultado refinado si se debe establecer una unidad de medida apropiada, esta unidad escogida debe poderse combinar con un sistema numérico previamente constituido.

La diferencia entre la unidad y los patrones de medición: existe una diferencia entre el patrón de medida y la unidad de medida. El patrón puede ser establecido de acuerdo a una necesidad que se presenta dentro la sociedad pero este no es estandarizado, solo la diferencia en los resultados de la medida respecto a una magnitud genera la necesidad de establecer una unidad de medida estándar, por ejemplo, al realizar la medición de determinadas magnitudes como el área o el perímetro de una figura con patrones de medida diferentes, puede generar distintos resultados lo que produce la necesidad de establecer una unidad de medida común.

La asignación numérica: en este proceso es importante fijar un proceso de medición antes de hacer una asignación numérica, es decir, el número que representa la cantidad de la magnitud, en este proceso existe una imprecisión que depende del instrumento con el cual se toma la medida.

El papel del trasfondo social de la medición: la interacción social y la referencia a un trasfondo significativo son elementos indispensables en la conceptualización de los procesos de medición por parte de los estudiantes. Estos aspectos son relevantes para los procesos de estimación y apreciación del rango de las magnitudes, como también de la asignación numérica, la cual depende de la selección de las unidades, del proceso de medición, y de todo el trasfondo social que ocurre en el proceso.[2]

Como se puede evidenciar el MEN (1998) está haciendo un llamado a que en la enseñanza de la medida de magnitudes se tenga en cuenta el uso de elementos no estandarizados, dado que en muchas ocasiones la medida de magnitudes no tiene sentido para los estudiantes, pues estos no han tenido la oportunidad de realizar un trabajo previo con las magnitudes el cual les permite identificar ciertas características.

Es por ello que durante el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se trata de abordar así sea de manera general cada uno de estos procesos, con el propósito de que los estudiantes tengan la oportunidad de trabajar e identificar ciertas características propias del área y el perímetro.

2.2 Referente Semiótico.

Dado que los objetos matemáticos no son objetos disponibles de forma concreta y que la única manera de acceder a ellos es a través de las representaciones semióticas, este trabajo se enmarca desde la teoría semiótico cognitiva propuesta por Raymond Duval. No hay otra disciplina como las matemáticas donde las representaciones sean tan importantes considerando que son el único medio por el que se pueden evocar los objetos matemáticos.

El aprendizaje de las matemáticas requiere del uso de sistemas de escritura distintos al lenguaje natural, estos pueden ser simbólicos, algebraicos, geométricos, gráficos, diagramas, esquemas... donde cada uno de ellos representa una forma semiótica distinta y brinda características diferentes del objeto representado. Hay que mencionar, además, que dichas representaciones no son el objeto matemático como tal, es decir, no se debe confundir el objeto matemático (números, funciones, figuras geométricas...), con sus representaciones (escrituras decimal, fraccionaria, gráficos...).

[2] Tomados y adaptados del MEN (1998) y SEDUCA (2006).

Es importante no llegar a confundir las representaciones mentales con las representaciones semióticas. Las primeras se producen sin que existan significantes perceptibles a los sentidos, se pueden ver como el conjunto de imágenes y concepciones asociados a un objeto particular. Mientras que las representaciones semióticas si necesitan de unos signos los cuales sirven para evocar por medio de la percepción el objeto matemático puesto en juego. Las representaciones semióticas en matemáticas no sólo cumplen la función de comunicar sino que también, permiten el tratamiento de la información y ayudan en el proceso de objetivación.

Duval (2004) plantea que en el papel que juegan los registros de representación semiótica aparecen tres fenómenos que están estrechamente ligados con la comprensión de los objetos matemáticos, en este caso el área y perímetro de figuras planas. El primero es la *diversificación de los registros de representación semiótica*, el cual expresa que no existe un único registro para representar el objeto matemático, y que cada uno de ellos brinda características diferentes del objeto que representa. Se plantea, además, que no existe aprendizaje sin recurrir a varios sistemas semióticos de representación. El segundo fenómeno es *la diferenciación entre representante y representado* o dicho de otra manera, entre la forma y contenido de una representación semiótica. Que el estudiante logre esta diferencia le permite un mayor acercamiento a la comprensión del objeto matemático que se está representando, dado que le posibilita entender que el contenido de la representación solo son ciertas características del objeto representado más no el objeto como tal. La tercera es *la coordinación entre los diferentes registros de representación,* el aprendizaje matemático como se mencionó anteriormente requiere del uso de distintos sistemas de representación pero también requiere una coordinación entre ellos. Llevar a cabo este procedimiento de manera adecuada ayuda a la comprensión de los objetos matemáticos, pero esto es algo que no se logra de manera espontánea por parte del estudiante dado que poner en juego varios sistemas de representación en una clase no les resulta evidente, puesto que no logran comprender un mismo objeto a través de sus diversas representaciones semióticas.

Con respecto a los registros de representación semiótica que se movilizan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estos se clasifican en registros discursivos y no discursivos, y en registros plurifuncionales y monofuncionales. “Los registros discursivos son aquellos que permiten describir, inferir, razonar, calcular mientras que los no discursivos permiten visualizar lo que nunca es visto de manera visible” (Duval, 2001, p 51).

Los registros plurifuncionales son aquellos que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social, donde casi todos los tratamientos son irreductibles a algoritmos. Los registros monofuncionales por el contrario, son aquellos en los cuales los tratamientos son principalmente algoritmos, presentando un carácter más técnico o formal por lo cual son considerados más potentes y más seguros que los tratamientos que son efectuados en un registro plurifuncional (Duval, 2001).

Los registros de representación semiótica deben cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. La primera hace referencia a la *Formación*, todo registro semiótico de representación está formado por signos los cuales se organizan dentro de un sistema, estos tienen la función de construir una marca o conjunto de marcas que tienen significado para la persona que los utiliza con el fin de lograr una representación de un objeto matemático. Esta representación debe respetar las reglas propias del sistema empleado. Otra actividad que también debe cumplir toda representación semiótica es el *tratamiento*, el cual permite transformar una representación inicial en una representación final dentro del mismo registro, esta información es posible reescribirse gracias a las reglas de expansión cuya aplicación da una representación en el mismo registro que la representación de partida (Duval, 2004, p.45). Por último, se encuentra la *Conversión*, la cual se reconoce como aquella transformación en la que se puede llegar a utilizar varios registros de representación para el mismo objeto matemático, en otras palabras, dada una representación inicial de un objeto matemático, se puede obtener otra representación del mismo objeto en un registro diferente al inicial.

Duval (2004) plantea que “la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los estudiantes” (p.49). Dentro del proceso de conversión se reconocen dos posibilidades: la congruencia y la no congruencia. En el caso que exista una congruencia entre las representaciones el proceso de transformación de la información se logra casi de manera inmediata, contrario a lo que sucede cuando no existe esta congruencia debido a que se aumenta el tiempo para realizar un tratamiento y, en ocasiones, la conversión no puede ser desarrollada o comprendida sino ha habido un aprendizaje previo de las actividades semióticas de formación y tratamiento (Duval, 2004).

Adquirir la habilidad de realizar un cambio de forma de un registro de representación mediante el cual se ha presentado un conocimiento es esencial en el proceso de aprendizaje, es decir, la construcción cognitiva de los objetos matemáticos es estrictamente dependiente de la capacidad de usar varios registros de representación semiótica de dichos objetos (D`Amore et al., 2013, p 150).

Debido a la gran cantidad de representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, es importante tener en cuenta la congruencia entre los registros de representación, dado que en muchas ocasiones la no congruencia entre las representaciones de un registro de partida y un registro de llegada puede dificultar el proceso de comprensión. Todo registro de representación está constituido por unidades significantes elementales, y cuando las unidades significantes elementales de una representación corresponden a las unidades significantes de otra representación, se dice que los dos registros son congruentes.

Para que exista una congruencia entre al menos dos registros se debe cumplir los siguientes criterios:

- La posibilidad de una *correspondencia semántica* entre los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental, las cuales dependen del léxico de un registro.
- La *univocidad semántica terminal*: a cada unidad significante elemental de la representación de partida, le corresponde una única unidad elemental en el registro de llegada.
- El *orden de organización de las unidades significantes*: las unidades significantes de las representaciones comparadas deben ser aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio es pertinente sólo cuando las representaciones tienen el mismo número de dimensiones.

La dificultad en el proceso de conversión está relacionada con el grado de no congruencia entre representaciones, la cual suele conducir a fracasos cognitivos en la actividad de conversión. Este es el caso de algunos registros de representaciones como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas y las tablas, es decir, representaciones semióticas bidimensionales.

En este caso y por ser objetos de interés el área y perímetro de figuras planas es necesario recurrir al registro de las figuras geométricas, el cual es un registro bidimensional y en donde las unidades significantes elementales no están semióticamente separadas. En otras palabras, en el aprendizaje del lenguaje figural predominan las unidades de dimensión dos sobre las unidades de dimensión inferior, donde, por ejemplo, un triángulo, un cuadrilátero, y toda unidad de dimensión dos son percibidos como un todo único y no como la unión de unidades elementales de dimensión uno (Duval, 2004, p 158). Por esta razón, es indispensable un aprendizaje de los tratamientos propiamente figurales dado que el criterio de univocidad semántica es más difícil de verificar para la actividad cognitiva de conversión.

2.2.1 Registro figural y el discurso matemático.

En el aprendizaje de la geometría es necesario recurrir a dos registros de representación, los cuales deben ser utilizados de manera simultánea e interactiva. Estos registros son el de las figuras y el discursivo. En este proceso debe existir una coordinación entre dichos registros, es decir, entre la figura y el discurso asociado a ella.

Teniendo en cuenta la necesidad de una coordinación entre los registros, así como la naturaleza de los mismos, la cual no es exclusiva de las matemáticas dado que el registro de las figuras se encuentra relacionado con la percepción visual y el discurso proviene de la lengua utilizada para la comunicación, pueden determinar algunos de los problemas en el aprendizaje de la geometría (Duval, 2004).

La importancia de trabajar con un registro figural radica en que estos aportan un gran soporte intuitivo en el desarrollo de cualquier actividad geométrica, puesto que las figuras permiten ver más allá de lo que los enunciados dicen, brindando la posibilidad de explorar, razonar, anticipar… proceso en el cual se presenta cierto predominio de lo visual sobre lo discursivo, dado que hay algunos elementos de las figuras que se reconocen independientemente de lo que el enunciado presenta (Galeano, 2015). Elementos que son fundamentales en la búsqueda de características y propiedades esenciales en la solución de problemas geométricos.

Una condición necesaria para lograr identificar las diferentes cualidades de una figura es realizar un análisis a las unidades elementales constitutivas de ese registro. Para esto se requiere identificar las variaciones visuales de una figura las cuales pueden ser de dos tipos, uno relacionado con el número de dimensiones y otro con la variación respecto al cambio de forma, tamaño y orientación. Según Duval (2004)

> Toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de estos dos tipos, dimensionales y cualitativas. A partir de allí, es fácil

determinar los elementos que van a funcionar como unidades de base representativa, es decir, como unidades figurales elementales (p. 157).

Las unidades figurales son de carácter heterogéneo dado que no todas presentan el mismo número de dimensiones, es decir, se pueden encontrar unidades figurales de dimensión 2, dimensión 1 o dimensión 0 (Ilustración 2). De acuerdo a la ley gestáltica de cierre, las unidades figurales de dimensión 2 tienen mayor predominancia sobre las unidades de dimensión menor, dado que al analizar una figura se suele percibir como un todo único y no por los segmentos o puntos que la conforman.

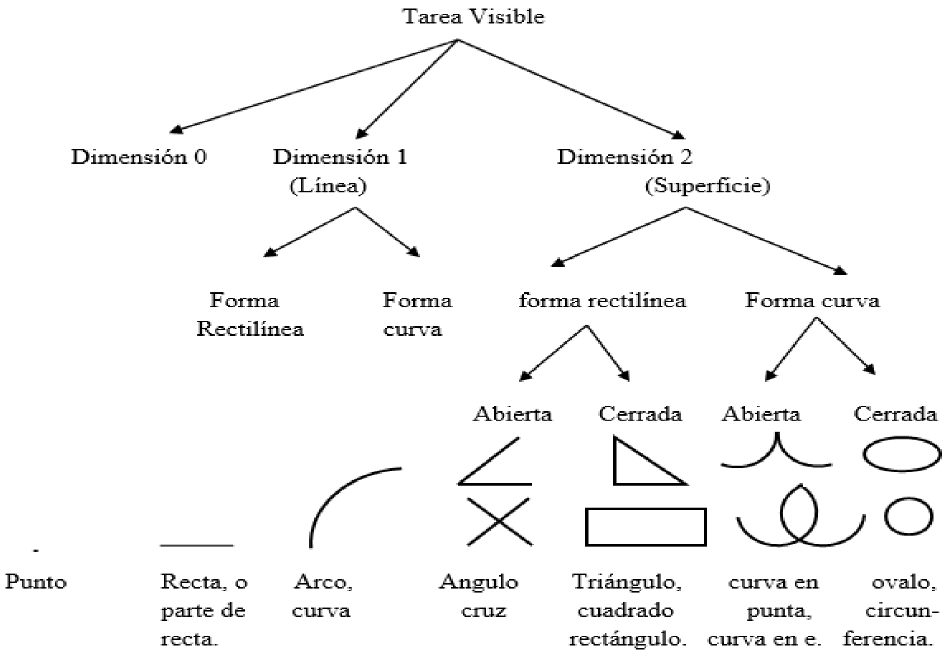


Ilustración 2. Clasificación de las unidades figurales elementales.

Por su parte, las figuras son un componente fundamental para la actividad geométrica, permiten explorar propiedades y relaciones que aportan elementos significativos en la resolución de problemas. Para comprender cómo las figuras juegan un papel heurístico permitiendo desarrollar la conducta de abducción[3], es importante reconocer los tratamientos necesarios en el proceso de aprehensión de una figura geométrica. Estos tratamientos son específicos al registro de las figuras: aprehensión perceptiva y aprehensión operatoria.

[3] La conducta de abducción permite reconocer las relaciones o las propiedades de una figura geométrica, lo cual favorece la solución de un problema planteado.

2.2.2 Aprehensión Perceptiva.

Se puede considerar este nivel como un primer acercamiento con la figura donde se empiezan a reconocer las diferentes unidades figurales. Cuando las unidades figurales de dimensión dos están separadas, su reconocimiento no presenta ninguna dificultad, a diferencia de cuando éstas están integradas como un todo. Esto se debe a dos factores: primero, algunas unidades figurales de dimensión dos predominan sobre otras unidades de la misma dimensión, debido a la ley gestáltica de cierre. Segundo, una figura geométrica, por lo general contiene más unidades figurales elementales que las necesarias para su creación.

Por ejemplo, en la Actividad Dos "Recubriendo La Figura" (ver anexo), se presenta el siguiente polígono como patrón de medida.

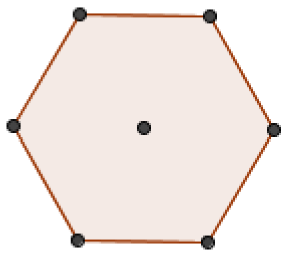


Ilustración 3. Aprehensión perceptiva del hexágono como patrón de medida.

En un primer momento la unidad elemental que se logra identificar como patrón de medida para cubrir la superficie de la figura D, es un hexágono, dado que la ley gestáltica de cierre no permite que a primera vista se logren identificar otras unidades elementales como los seis triángulos que conforman la figura.

Pero considerar solo el hexágono no basta para encontrar el área de la figura D, por lo que se debe recurrir a un proceso de descomposición de dicha unidad elemental, donde la movilización de solo la aprehensión perceptiva no es suficiente y se debe recurrir a la aprehensión operatoria.

2.2.3 Aprehensión Operatoria de las modificaciones posibles de una figura geométricas.

Una de las posibilidades que brindan las figuras geométricas en su proceso de exploración heurística, es que toda figura permite modificarse de diversas maneras. En una figura inicial se pueden separar las unidades elementales de dimensión dos en otras unidades figurales homogéneas o heterogéneas también de dimensión dos, las cuales pueden combinarse modificando o no el contorno global de la figura. Posibilitando también modificaciones en el tamaño, realizar desplazamientos en el plano por medio de traslaciones o rotaciones.

Siguiendo con el ejemplo anterior, en la tarea de cubrir la superficie de la figura D, se pone a prueba la habilidad de modificar una figura geométrica, ya que es necesario realizar una descomposición de la figura inicial, en este caso el hexágono, en los seis triángulos que lo conforman o dicho de otra forma descomponerlo en sub-figuras, para lograr cubrir por completo la superficie de la figura D y así determinar de manera más simple el área.

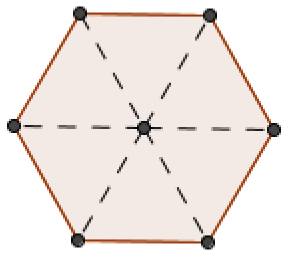


Ilustración 4. Aprehensión operatoria del hexágono como patrón de medida.

Este proceso, también denominado operación de reconfiguración, permite organizar una figura dada en otra figura, permitiendo tratamientos que consisten en la división de la figura inicial en sub-figuras, en su comparación como también en su reagrupamiento. De esta forma, la operación de reconfiguración es fundamental en el proceso de aprehensión matemática, dejando de manifiesto el rol heurístico de las figuras. Y según Marmolejo (2003):

> Podríamos decir que es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen la productividad heurística de las figuras (p. 670).

Ahora bien, el uso de figuras en geometría debe estar acompañado de un discurso con el fin de brindar una descripción verbal que aclare cuales son las propiedades que cumplen estas figuras, dado que un mismo dibujo puede llegar a representar situaciones matemáticas diferentes.

En geometría, no hay dibujo que se represente por sí mismo. No es suficiente el simple reconocimiento perceptivo de las unidades figurales de dimensión dos o las relaciones entre las unidades figurales de dimensión uno para llegar a la comprensión y solución de un problema, es decir, toda figura requiere de un enunciado que presente las condiciones del problema, dado que el solo dibujo puede ser ambiguo y llegar a representar situaciones muy diferentes, desde esta perspectiva y según Duval (2004), "la introducción a una figura geométrica necesariamente es discursiva" (p. 168).

> "Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir que no es a partir de sus trazos y formas que la figura permite su acceso en la resolución de un problema geométrico" (Marmolejo, 2003).

Es por esto que, teniendo en cuenta los objetos matemáticos de interés y que uno de los propósitos principales de esta investigación es promover en los estudiantes los procesos cognitivos de tratamiento y conversión[4] de las representaciones semióticas, en el diseño de las actividades de esta propuesta de aprendizaje se consideraron dos registros de representación semiótico que le permiten al estudiante realizar dichos procesos cognitivos y, además, les posibilita reconocer el mismo objeto matemático desde diversas representaciones: el registro figural y el registro de la lengua natural. El registro figural pertenece a las representaciones multifuncionales no discursivas y el registro de la lengua natural pertenece a las representaciones multifuncionales discursivas.

Es importante resaltar que el registro de las figuras geométricas requiere unos tratamientos específicos de este sistema, que están vinculados con las posibilidades de modificaciones tanto ópticas como posicionales de una figura en un problema geométrico y por tal motivo también se consideraron en el desarrollo de las actividades: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva.

2.3 Referente Matemático.

La complejidad existente en el aprendizaje de la medida de magnitudes obliga a todo aquel que se encuentra interesado en este tema, a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos que se encuentran involucrados. Por tal razón, en este apartado se presentan algunos elementos conceptuales que permiten reconocer características y aspectos relacionados

[4] En este sentido, cabe aclarar, que para desarrollar el proceso cognitivo de conversión se debe considerar también la congruencia entre representaciones.

con el proceso de medición de las magnitudes área y perímetro. En este sentido, se debe reconocer que el proceso de medición de superficies y longitudes se encuentra estrechamente vinculado con algunos elementos, y por tal motivo, se toman en consideración los conceptos más relevantes.

Para comenzar es importante definir el concepto de magnitud, dado que la presente investigación se enfoca en la medida de las magnitudes área y perímetro. De manera frecuente se entiende como Magnitud a las cualidades o atributos que poseen una serie de objetos, los cuales varían de manera cuantitativa y continua o de manera cuantitativa y discreta. Las magnitudes discretas son aquellas que se pueden obtener mediante conteo, algunas de ellas pueden ser, por ejemplo, las colecciones de objetos y las personas, y las magnitudes continuas son las que se obtienen mediante una medición, como la longitud, la superficie, el peso, el tiempo, entre otros.

Algebraicamente se puede definir una magnitud como:

Dado un conjunto cualquiera M no vacío, se constituye una magnitud si en él puede definirse una relación de equivalencia (=) y una operación de suma (+) que cumplen las siguientes propiedades.

1. En la relación de equivalencia los elementos cumplen tres propiedades:
   - **Propiedad Idéntica:** $\forall\ a \in M \rightarrow a = a$
   - **Propiedad Simétrica:** $\forall\ a, b \in M \rightarrow a = b \rightarrow b = a$
   - **Propiedad Transitiva:** $\forall\ a,b,c \in M \rightarrow a = b\ \text{ y }\ b = c \rightarrow a = c$

2. La suma de los elementos posee las mismas propiedades que la suma de números.
   - **Propiedad Clausurativa:** $\forall\ a, b \in M \rightarrow a + b \in M$
   - **Propiedad Uniforme:** $\forall\ a, b \in M$ y $\forall\ c, d \in M$: $a = b$ y $c = d \rightarrow (a + c) = (b + d)$
   - **Propiedad Asociativa:** $\forall\ a, b$ y $c \in M \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
   - **Propiedad Conmutativa:** $\forall\ a, b \in M \rightarrow a + b = b + a$
   - **Propiedad Modulativa:** $\exists\ 0 \in M : \forall\ a \in M \rightarrow a + 0 = 0 + a = a$

De acuerdo con lo anterior se puede concluir que:

> **Definición 1:** Todo conjunto cuyos elementos cumplen las propiedades anteriores de relación de equivalencia y de la operación de la suma “definen una magnitud,

entendiendo por tal la cualidad común que les hace igualables y sumables” (Puig, 1961, p. 98).

Ya definido el concepto de magnitud con sus respectivas propiedades de equivalencia y suma, es importante mencionar algunos aspectos relacionados con este concepto y que son necesarios en el proceso de medición de magnitudes; la cantidad de magnitud, unidad de medida y medida de magnitudes.

Con respecto a la cantidad de magnitud, esta hace referencia al valor que toma la magnitud en un objeto particular. Las cantidades de magnitud se pueden comparar entre sí, es decir, teniendo un conjunto cualquiera M se puede establecer una relación de orden; esto es, que dado los elementos del conjunto se pueden comparar bajo la relación $\leq$ obteniendo que:

$\forall$ a, b $\in$ M $\rightarrow$ a $\leq$ b o b < a se cumplen las siguientes propiedades.

- **Reflexiva:** $\forall a \in M \rightarrow a \leq a$
- **Antisimétrica:** $\forall a, b \in M \rightarrow a \leq b$ y $b \leq a \rightarrow a=b$
- **Transitiva:** $\forall a, b, c \in M \rightarrow a \leq b$ y $b \leq c \rightarrow a \leq c$

Relacionando las propiedades anteriores, estas admiten realizar comparaciones entre magnitudes de la misma naturaleza, permitiendo definir cuál de las magnitudes es mayor, menor o igual que la otra. De esta forma se puede definir la cantidad de magnitud como:

Definición 2: El valor que toma una magnitud en un objeto particular, donde todos los elementos en común tienen la misma cantidad de magnitud (Godino, et.al, 2002).

Ahora bien, con respecto a la unidad de medida es importante aclarar que esta es una cantidad que puede o no ser una unidad estandarizada. Una unidad de medida se utiliza para comparar y expresar el tamaño de una magnitud en relación con la unidad seleccionada.

En el proceso de medición de magnitudes, al comparar varias cantidades de una misma magnitud se elige arbitrariamente una de ellas para comparar a las demás, a esta se le denomina unidad de medida y algebraicamente se expresa de la siguiente manera:

Dado $r, s \in R+$, $\forall u \in M \rightarrow \exists a \in M$: $r. u=a$

Lo cual indica que cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada como el producto de un número real positivo por una cantidad fija llamada unidad de medida. Se define como:

> **Definición 3**: La unidad de medida "u" es el elemento que pertenece al conjunto M, que al ser multiplicado por un r ∈ R+, puede expresar cualquier cantidad de magnitud (Luengo, 1990, p.58, como se citó en SEDUCA, 2006).

Una vez definida la unidad de medida se puede establecer cuál es la medida de una magnitud. Medir es establecer una correspondencia entre un número real y una determinada cantidad de magnitud y, se le llama medida al número de veces que la cantidad de magnitud contiene a la unidad que se toma como referencia para realizar la medición.

Dicho lo anterior, es importante resaltar que en el trabajo con magnitudes es necesario realizar comparaciones entre distintas cantidades. Esta comparación se facilita cuando se utiliza una cantidad "u" como referente y así, se logra determinar cuántas veces se encuentra dicha cantidad en una magnitud mayor "a".

Con respecto a lo anterior, la medida de una magnitud se puede definir como:

> **Definición 4**: Sea *a* una cantidad de magnitud y *u* la unidad de medida, se puede establecer un número *r* tal que éste es la medida de *a* con respecto a *u,* el cual se escribe así m(u)a=r.

De acuerdo a la definición 4, al afirmar que a cada cantidad le corresponde un número real sería lo mismo que afirmar:

1. A elementos iguales corresponden medidas iguales.
2. A elementos ordenados corresponden medidas ordenadas.
3. Si un elemento es la suma de dos tiene por medida la suma de la medida de estos dos.

Puig (1961) reconoce la importancia de estas tres propiedades y las adopta como definición indirecta de la medida.

> **Definición 5:** medir los elementos de un conjunto homogéneo es establecer una correspondencia entre ellos y los números reales llamados sus medidas, de modo que a entes iguales correspondan medidas iguales, que a entes ordenados correspondan medidas ordenadas y que la medida de la suma de entes es igual a la suma de las medidas de ellos. (p. 107).

Definido lo que se entiende por magnitud, cantidad de magnitud, unidad de medida y medida de magnitud de forma general, es pertinente teniendo en cuenta los propósitos de la investigación, enfatizar en las propiedades, así como en las características matemáticas del área y perímetro de figuras planas que se consideraron durante la planeación de las situaciones.

Antes de hablar sobre el perímetro y área de una figura plana es importante definir en un primero momento qué es una línea poligonal dado que es la que delimita el contorno de una figura.

Una línea poligonal está formada por una sucesión finita de segmentos donde cada uno de ellos tiene un extremo en común con el anterior. Cuando el primer extremo del primer segmento coincide con el segundo extremo del último segmento se conoce como *línea poligonal cerrada*, de lo contrario se denomina *línea poligonal abierta*

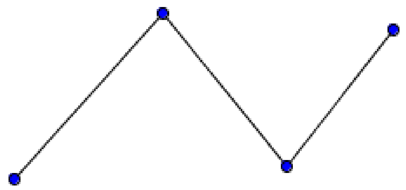


Ilustración 5. Línea poligonal abierta

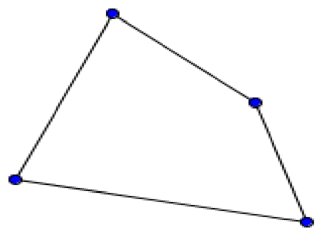


Ilustración 6 Línea poligonal cerrada

Cuando en la línea "cerrada" cada uno de los segmentos tienen en común con el otro sólo el primer o el último punto, se denomina *línea poligonal cerrada simple*; de lo contrario se conoce como *línea poligonal compleja* (Puig, 1961). Por el interés de este trabajo se tienen en cuenta solamente las líneas poligonales cerradas simples, donde cada uno de los segmentos que conforman la línea poligonal se denominan *lados* y los puntos en común entre los mismos son los *vértices* de la poligonal.

Una línea poligonal cerrada simple divide al plano en dos superficies: una interna y otra externa. En este trabajo se conocerá a la superficie interna junto con la línea poligonal como Polígono, donde la línea poligonal será la frontera o contorno del polígono y la superficie interna es la superficie poligonal (Ilustración 7), a cada una de estas se le puede establecer una medida.

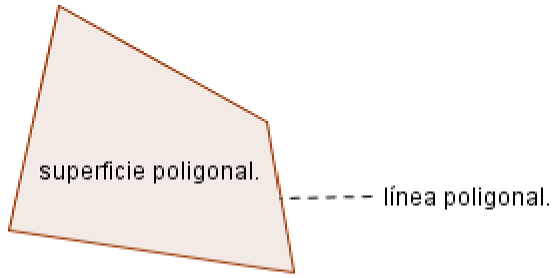


Ilustración 7. Línea poligonal cerrada simple

Dado que la línea poligonal o contorno del polígono es una longitud, entonces se puede establecer una medida a los lados que componen el polígono, cabe aclarar que en este caso la medida se obtiene mediante un proceso aditivo, en el cual se cuenta el número de veces que la cantidad a medir contiene a la unidad.

> **Definición 6:** A la suma de la medida de las longitudes de cada uno de los lados que componen la línea poligonal o contorno del polígono se le conoce como perímetro (D´Amore & Fandiño, 2009, p. 22).

Ahora bien, para encontrar el área de un polígono se puede contar el número de veces que se utiliza una unidad de medida para cubrir el total de la superficie, de este modo en algunas ocasiones es posible llevar a cabo un proceso de reconfiguración y descomposición de la unidad medida, en un número finito de partes para poder realizar la comparación entra la unidad y la figura que se pretende medir.

Muchas veces utilizar este método no es una tarea sencilla por lo que se recurre a métodos indirectos, los cuales consisten en encontrar el área de una figura en función de sus longitudes, es decir, obtener el número de veces que se contiene a la unidad por medio de una operación entre las longitudes de los segmentos del polígono. Por ejemplo, para encontrar el área de un rectángulo, se multiplica la medida de la longitud del lado más largo por la medida de la longitud del lado más corto (de ahí el nombre de bidimensional).

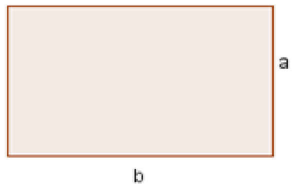


Ilustración 8. Representación gráfica del área del rectángulo.

Esta estrategia aritmética se le conoce con el nombre de fórmula, es conveniente no abusar del uso de estas expresiones sin haber construido un significado previamente. En resumen, se puede decir que si una medida se encuentra de manera directa se hace uso de una estructura aditiva, si por el contrario se utiliza el método indirecto entonces se requiere de una estructura multiplicativa (Marmolejo, 2016). De esta forma el énfasis del trabajo estuvo sobre los métodos directos con el fin que los estudiantes se familiaricen con esta práctica y que al momento de llegar a utilizar formulas estas tenga un verdadero significado para ellos.

Al realizar cualquiera de los procedimientos mencionados anteriormente se debe de tener en cuenta lo siguiente:

> Dados varios polígonos equivalentes, diremos que tienen la misma extensión. Si un polígono es suma de dos, diremos que su extensión es la suma de las extensiones de éstos.
>
> Definida la suma de extensiones, es fácil la medida adoptando a un polígono como unidad; este suele ser un cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud, y la medida de la extensión de cualquier polígono se llama área del mismo (Rey, 1963, p. 200).
>
> **Definición 6:** El área se entiende como la medida del espacio ocupado por algo. Para hallar esta magnitud normalmente se suele adoptar el cuadrado como unidad, aunque también puede ser cualquier otro polígono con el que se pueda cubrir sin solapamientos ni agujeros el total de la superficie.

En conclusión, los aspectos anteriormente mencionados se toman en consideración puesto que, como se pudo evidenciar, son fundamentales en el proceso de construcción de la medida de magnitudes, específicamente en los objetos matemáticos área y perímetro de figuras planas, y por tal razón se encuentran necesariamente incluidos en la construcción de las situaciones con las cuales se busca favorecer el proceso de aprendizaje. Cabe resaltar que, cada una de las cuatro actividades que conforman el diseño, no incluye todos los puntos definidos anteriormente, solo se utilizan los pertinentes de acuerdo al objetivo que se desarrolla en cada una de ellas[5].

[5] Para una mejor comprensión de lo que se explica en este punto, es importante remitir al lector la página 45 donde se encuentra la caracterización de cada una de las actividades, en la cual se presentan cuáles de los aspectos anteriormente mencionados están incluidos en cada una de ellas.

Capítulo 3. Fundamentos Metodológicos Del Proyecto.

3.1 Estudio de Casos Como Método de Investigación

El presente trabajo se desarrolla dentro de la línea de Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y corresponde a un trabajo de carácter cualitativo, considerando que este enfoque permite realizar el análisis del conocimiento que movilizan los estudiantes en el proceso de aprendizaje. A su vez, como método de investigación se aborda el estudio de casos, puesto que posibilita un estudio en profundidad que permite identificar y describir detalladamente algunos fenómenos que se presentan en un caso particular. Cabe resaltar que se llaman casos aquellas situaciones o grupos sociales que merecen la atención en la investigación, estos pueden ser algo simple o complejo, un individuo o una institución, un alumno o un docente (Stake, citado en L.A.C.E 1999).

Desde esta perspectiva, la utilización de esta metodología tuvo como finalidad analizar y describir cómo desde una perspectiva semiótico cognitiva se favorece el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas en un grupo de estudiantes del grado quinto de primaria; lo que se refiere, principalmente, al análisis de los tratamientos y conversiones que realizan este grupo de estudiantes cuando se enfrentan a un diseño de actividades, considerando los criterios de congruencia y los tratamientos propios de los registros utilizados en dicho diseño.

Se debe agregar que, por lo general, se estudian cuatro tipos de casos: Caso típico, casos diferentes, casos teóricos y casos atípicos (Stake, citado en L.A.C.E 1999). Para fines del presente proyecto se utiliza un estudio de casos típico. En este tipo de casos pueden estudiarse varias personas que tienen algún aspecto en común, por lo que se espera cierta homogeneidad o coherencia en sus respuestas. Se debe aclarar que la selección de este caso no pretende mantener ningún tipo de representatividad con respecto a otros casos, lo que se busca, es obtener datos concretos que permitan una reflexión sobre esta situación en particular.

3.1.1 Fases de la investigación.

A continuación, se presentan las 4 fases que guiaron la elaboración del presente trabajo.

Fase 1: Planeación.

En esta primera fase se indaga sobre una problemática en Educación Matemática, lo cual permite, en un primer momento, delimitar el objeto matemático a abordar, en este caso, el área y perímetro de figuras planas. A partir de esto surge la siguiente pregunta que guía y permite estructurar la investigación: desde una perspectiva semiótico cognitiva ¿Cómo se favorece el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas?

Después de estructurada la investigación y construido el referente matemático, curricular y semiótico cognitivo, se seleccionan los aspectos que se deben incluir en una serie de situaciones para movilizar el proceso de aprendizaje del área y perímetro de figuras planas.

Fase 2: Diseño y aplicación de la prueba.

En esta fase, en un primer momento, se realiza el diseño de un conjunto de situaciones teniendo en cuenta los aspectos curriculares, semiótico cognitivos y matemáticos seleccionados en la fase anterior, y los cuales se consideran fundamentales en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos de interés. En un segundo momento, se presentan las situaciones ya seleccionadas y debidamente estructuradas a un grupo de estudiantes de grado quinto de primaria, con la finalidad de aportarles elementos necesarios en la construcción de conocimiento matemático.

Fase 3: Análisis de los resultados presentados por los estudiantes a partir de la Teoría de Representaciones Semióticas

En esta fase, teniendo en cuenta la información recogida durante la observación e implementación del diseño de situaciones, se realiza el análisis a cada una de ellas donde se consideran los elementos propuestos desde el enfoque semiótico cognitivo. En dicho análisis se tienen en cuenta aspectos como: los tratamientos figurales realizados por cada uno de los grupos relacionado con la aprehensión perceptiva y operatoria, y también, los procesos de conversión que realizan los estudiantes en algunas de las tareas desde el lenguaje figural al lenguaje natural.

Fase 4: Conclusiones y recomendaciones.

En esta última fase, se presentan una serie de conclusiones y recomendaciones basadas en los resultados del análisis realizado en la fase anterior. Esto con el fin de dar a conocer los elementos más relevantes sobre cómo se favorece el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas desde una perspectiva semiótico cognitiva en un grupo de estudiantes de grado quinto de primaria.

3.1.2 Instrumentos y técnicas de recolección de la Información.

De la considerable variedad de estrategias que pueden ser empleadas en una investigación de estudio de casos no cuantitativo para la recolección de la información, en esta en particular, se utilizan técnicas como: entrevistas, grabación de audio y video, observación a los participantes. Y como instrumento de análisis, se utilizó un diseño de actividades relacionadas con los objetos matemáticos área y perímetro de figuras planas.

Dichas técnicas fueron seleccionadas dado que poseen un valor de complementariedad fundamental. La entrevista, la grabación de audio y video permitieron conocer y captar la manera en que los estudiantes interpretan y comprenden lo que se les presenta en el instrumento de análisis. La observación, por su parte, permite acceder al contenido, es decir, a las estrategias y acciones que realiza cada uno de ellos al momento de resolver las actividades planteadas.

3.1.3 Instrumento de análisis.

Como instrumento de análisis se utilizó un cuestionario escrito en donde se tienen en cuenta dos registros de representación semiótica de los objetos matemáticos de interés, con el fin de promover en los estudiantes las actividades cognitivas de tratamiento y conversión para su posterior análisis.

Este instrumento cuenta con cuatro situaciones. Cada una posee una serie de tareas que se abordan teniendo en cuenta una situación problema propia a los objetos matemáticos seleccionados, que remite a los estudiantes a realizar las transformaciones necesarias que les permitan resolverlas. Las situaciones que se tuvieron en cuenta en el instrumento de análisis son:

- Celebrando el día de la familia.
- Recubriendo la figura.
- Midiendo mí entorno.
- Construyendo figuras.

Para llevar a cabo la puesta en acto de las situaciones, se formaron cinco grupos de dos estudiantes, considerando que el trabajo en equipo fomenta el desarrollo de habilidades sociales y comunicativas, además, al momento de los estudiantes expresar los resultados del contenido tratado van recibiendo una retroalimentación necesaria por parte de su compañero, que le permite completar o refutar su punto de vista

Hay que mencionar, además, que cada una de las situaciones se realizó haciendo uso de material concreto, con el fin de que los estudiantes en un primer momento logren manipular algunas representaciones físicas de los objetos matemáticos, que les permitan encontrar algunas relaciones y diferencias entre ellos. Es importante resaltar que el uso de este tipo de materiales en el aprendizaje de la geometría es fundamental, dado que permite procesos de comparación, sobreposición, reconfiguración, visualización, entre otros.

En cuanto a la prueba escrita, esta se presentó a los estudiantes en el mes de noviembre del 2017. El tiempo requerido fue de tres sesiones y el tiempo brindado en cada una de ellas fue de tres horas. Al momento de la puesta en acto del instrumento, se les explica a los estudiantes los objetivos del trabajo y se les pide responder de forma clara y consciente cada uno de los puntos justificando cada uno de ellos. La mayoría de los estudiantes mostró una actitud positiva al momento de la realización de la prueba, generando un espacio agradable tanto para ellos como para las autoras.

3.1.4 Aproximación contextual.

Para el desarrollo de esta investigación se seleccionó un grupo de estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Técnico Ambiental Fernández Guerra (I.E.T.A.). Esta es una institución de carácter oficial en la que se brinda educación Preescolar, Básica Primaria, Básica secundaria y tiene Programas de Educación Para Jóvenes en Extraedad y Adultos. La I.E.T.A cuenta con nueve sedes educativas en las cuales brinda educación de preescolar y básica primaria.

La sede en la que se llevó a cabo el presente trabajo es la Sede Nariño Unido, la cual brinda educación a estudiantes de bajos recursos de estratos 0 y 1 que viven en algunas zonas vulnerables del municipio. El grado seleccionado estaba conformado 17 estudiantes que oscilan en edades entre los 10 y 12 años y, en su gran mayoría, pertenecen a la población indígena del norte del cauca, aunque también se encontraron algunos estudiantes afro descendientes y mestizos. En un principio se pensó llevar a cabo la investigación con todos los 17 estudiantes, pero dado que se presentaron algunos inconvenientes como la inasistencia a clase por 3 de ellos, y una letra poco legible de2 grupos que presentaron la actividad, las autoras deciden analizar solo lo presentado por los otros 10 estudiantes los cuales se organizaron en 5 parejas de trabajo.

Se decidió trabajaron estudiantes de esta institución puesto que una de las autoras realizó sus prácticas profesionales en dicha sede educativa, y llevaba un proceso de aproximadamente un año en el área de matemáticas con dichos estudiantes, lo cual facilitaba los espacios y los materiales necesarios para el desarrollo de las actividades. En este proceso tuvo la oportunidad de observar que las clases de matemáticas se realizaban de una manera muy teórica, donde los estudiantes pocas veces tenían la oportunidad de trabajar con material manipulativo, y además, se basan únicamente en la aplicación de métodos numéricos para hallar el área y el perímetro de las figuras planas, dejando de lado la comparación entre figuras y los tratamientos figúrales. Además, pocas veces los conceptos aprendidos eran relacionados con el contexto de los estudiantes, razón por la cual se decide incluir en la propuesta de aprendizaje el material manipulativo y los tratamientos cualitativos y cuantitativos de los mencionados objetos matemáticos.

3.1.5 Diseño de las actividades.

En el diseño de las situaciones se busca que los estudiantes tengan la posibilidad de realizar un proceso tanto cualitativo como cuantitativo de las magnitudes involucradas. En la primera situación los estudiantes empiezan a tener un acercamiento con las magnitudes superficie y longitud. El objetivo es que los grupos de trabajo realicen tratamientos de tipo geométrico como la comparación, descomposición, reconfiguración y sobreposición, que les permita identificar la figura con mayor área y la figura con mayor perímetro. En esta situación se propone el uso de material manipulativo dado que brinda la posibilidad de realizar las modificaciones necesarias a las representaciones, favoreciendo el reconocimiento de algunas características y relaciones entre el área y perímetro de distintas figuras planas, como, por ejemplo, que la figura de mayor área no necesariamente es la de mayor perímetro. Además, en esta situación se busca que inicien con el reconocimiento de la unidimensionalidad del perímetro y bidimensional de área, siendo esta una situación de tipo cualitativo donde se favorece la comprensión de dichas características sin el uso de procedimientos numéricos.

En la segunda situación se inicia con el proceso de cuantificación de las magnitudes. En este caso se trabaja la magnitud superficie, en la cual se involucran como patrón de medida figuras geométricas conocidas, como el triángulo, el cuadrilátero y el hexágono, con la intención de que los estudiantes identifiquen que la cantidad de magnitud puede cambiar dependiendo del patrón de medida que se utilice. Durante la puesta en acto de esta situación los estudiantes se ven obligados a realizar descomposiciones y composiciones del patrón de medida utilizado, con el fin de lograr cubrir el total de la superficie de la figura, sin que se produzca solapamiento ni agujeros.

En la tercera situación la magnitud que se trabaja es la longitud, donde se hace uso de medidas no estándar con el fin de que los estudiantes a través de la comparación de los resultados en los cuales existe una variación del número que representa la medida del perímetro de la misma figura, logren comprender la importancia de fijar convencionalmente un patrón de medida.

Finalmente, en la situación cuatro se presentan como material de apoyo el pentominó, el cual está conformado por doce fichas. Cada una está compuesta por cinco cuadrados unidos por sus lados. Cada uno de estos cuadrados tiene la función de representar la unidad de medida bidimensional y cada uno de sus lados la unidad de medida unidimensional. En esta situación se busca promover la construcción de figuras, en la que los estudiantes deben representar figuras que tengan igual área y diferente perímetro, igual área e igual perímetro y diferente área e igual perímetro donde, estas tareas les ayuden a comprender que, existe una independencia entre estas dos magnitudes, pues dos figuras con igual área no necesariamente tienen perímetros iguales, que dos figuras con igual área pueden tener perímetros iguales y que, dos figuras de igual perímetro también pueden tener diferentes áreas. En esta situación se promueve el proceso de visualización y algunos tratamientos figurales como la percepción y la reconfiguración, aspectos necesarios para la creación de las figuras que cumplan las condiciones establecidas.

Durante el desarrollo de la primera situación "Celebrando el Día de la Familia" (ver anexo 1) se cree que los estudiantes en el apartado A, en un primer momento realicen una comparación directa entre las figuras A y B. Este procedimiento les permite reconocer que es necesario modificar las figuras para lograr determinar cuál de las dos tiene mayor cantidad de superficie. En las modificaciones que realicen los estudiantes se espera que reconozcan que la figura A tiene mayor cantidad de superficie que la figura B. Posteriormente, se espera que los estudiantes con la cinta dorada realicen una comparación entre los contornos de las figuras, es decir, que midan el contorno de cada figura y luego realicen una comparación de orden entre las dos cantidades de longitud resultantes, pudiendo de este modo identificar cuál de las dos es mayor o menor.

Con respecto a la segunda situación "Recubriendo la Figura" (ver anexo 2), se espera que los estudiantes en un primer momento seleccionen la cantidad de Triángulos, Cuadriláteros y Hexágonos (patrones de medida) necesarios para el recubrimiento de la Figura**.** Posteriormente, por sobreposición, los estudiantes recubren el total de la superficie de dicha figura con las figuras de forma y área igual a la de los patrones de medida, y, por último, se espera que realicen la asignación numérica a la superficie de la figura con respecto a cada uno de los patrones utilizados.

En la tercera situación "Midiendo Mi Entorno" (ver anexo 3) se desea que los estudiantes encuentren diferentes elementos los cuales les permitan establecer la medida del contorno del escritorio (perímetro), con el fin de que tengan la oportunidad de discutir y reflexionar con sus compañeros sobre la variación de la medida según el instrumento utilizado, así como la importancia de establecer una medida estándar a la hora de realizar la medida, no solo de la magnitud longitud sino de cualquier otra magnitud.

En el caso de la situación cuatro "Construyendo figuras" (ver anexo 4), en un primer momento, se espera que los estudiantes realicen un proceso de exploración con el material manipulativo que les permita identificar las relaciones y diferencias entre cada una de las fichas, logrando reconocer que todas las fichas tienen igual área y no todas poseen el mismo perímetro. Una vez identificada esta relación se plantean una serie de afirmaciones en las cuales los estudiantes deben estar en la capacidad de argumentar teniendo en cuenta las relaciones encontradas en el primer momento. Luego, deben iniciar con el proceso de construcción de las nuevas figuras cumpliendo con las condiciones dadas.

Desde el punto de vista cognitivo, con estas situaciones se espera que los estudiantes puedan ver, explorar razonar y utilizar los registros de representación necesarios para promover de manera adecuada el aprendizaje de la geometría; lenguaje natural y lenguaje figural. También se busca favorecer el rol heurístico de las figuras, promoviendo tratamientos figurales basados en modificaciones ópticas o posicionales dado que estas operaciones son fundamentales para una aprehensión matemática.

Ahora bien, para la selección del diseño de situaciones, se utilizan dos tablas. En una se encuentra los aspectos curriculares y matemáticos considerados en cada actividad y en la otra, los aspectos semiótico cognitivos. A continuación, se especifican cada uno de los aspectos considerados en la primera tabla. En esta tabla se tuvieron en cuenta aspectos como: objetivos desarrollados, estándares del pensamiento métrico y sistemas de medidas para grado quinto, contenido matemático y los aspectos importantes de los pensamientos métrico y espacial:

Objetivos a Desarrollar.

OBI: Realizar procedimientos de tipo cualitativo del área y/o perímetro de figuras planas.
OBII: Reconocer el área como la cantidad de unidades que recubren la superficie.
OBIII: Identificar relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
OBIV: Comparar el área y perímetro de figuras planas a través de la sobreposición de figuras.
OBV: Establecer relaciones entre el área y perímetro de diferentes figuras planas.
OBVI: Calcular el área y perímetro de figuras planas a través de un patrón de medida.

Estándares Matemáticos Del Pensamiento Métrico y Sistemas De Medidas.

Es.a: Diferenciar y ordenar en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir como longitudes y superficies.
Es.b: Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para las diferentes mediciones.
Es.c: Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes cuando se fija una de estas medidas.

Contenido Matemático:

co1: Relación de orden entre dos figuras a través de la comparación de sus cantidades de superficie y/o longitud.
co2: Operación entre cantidades de superficie y/o longitud: adición de áreas y perímetros.
co3: Uso de patrones de medida para determinar la cantidad de magnitud: área y/o perímetro.

Pensamiento Métrico:

m.1: Construcción de la magnitud superficie y/o longitud.
m.2: Comprensión del proceso de conservación de la superficie.

m.3: Elección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
m.4: Asignación numérica con patrón de medida.

Pensamiento Espacial:

e.1: Sobreposición de figuras:
e.2: Descripción de las transformaciones realizadas sobre las figuras.
e.3: Comparación de figuras a partir de las cantidades de superficie y/o longitud.
e.4: Construir figuras a partir de una serie de condiciones.
e.5: Identificar y justificar relaciones entre algunas figuras.

		CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES			
		Actividad 1.	Actividad 2.	Actividad 3.	Actividad 4.
Objetivos de la actividad.		OBI OBII OBV	OBI OBIII	OBI OBVI	OBV OBVI
Estándares a desarrollar.		Es.a Es.c	Es.a Es.b	Es.a Es.b	Es. a Es.b Es.c
Contenido matemático.		co1 co2	co1 co2	co2 co3	co1 co2 co3
Pensamientos	Métrico	m1, m2, m3.	m1, m2, m3, m4.	m1, m2, m3, m4.	m1, m2, m3, m4.
	Espacial	e1, e2, e3.	e1, e2, e3.	e1, e2.	e2, e3, e4, e5.

Tabla 1. Aspectos curriculares, matemáticos y didácticos considerados en cada una de las situaciones.

En la segunda tabla se tuvieron en cuenta dos registros de representación semiótica que le permiten a los estudiantes realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión; el registro figural, registro de la lengua natural. Cabe recordar que al hacer uso de un registro figural se hace necesario tener en cuenta las diferentes aprehensiones que se pueden movilizar en el mismo: aprehensión perceptiva y aprehensión operatoria.

Se obtiene de esta forma la siguiente, en la cual se presenta la caracterización semiótica de cada una de las actividades seleccionadas en el diseño de situaciones. En la Tabla 2 se presentan las diversas representaciones movilizadas en cada una de las actividades, los tratamientos posibles en cada una de ellas, el tipo de representación en la cual se presentan. Algunas de las siglas que se utilizaron en esta tabla son: AP para referirse a la aprehensión perceptiva, la AO para la aprehensión operatoria y finalmente la AD cuando se va a referir a la aprehensión discursiva.

	Aspectos Semiótico Cognitivos		Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
Registros de representación	Registros Multifuncio - les	Discursivos	Lenguaje Natural	Lenguaje Natural	Lenguaje Natural	Lenguaje Natural
		No discursivos	Registro Figural	Registro Figural	Registro Figural	Registro Figural
	Unidades Significant es		Figura A Figura B Área figura A Área figura B Perímetro figura A Perímetro figura B	Triángulo (T) Cuadrilátero(C) Hexágono (H) Figura D Área T Área C Área H Área Figura D	Escritorio . Perímetro del escritorio.	12 fichas pentominó . Área de cada pieza. Perímetro de cada pieza
	Procesos cognitivos.	Tratamiento	AP AO AD	AP AO AD	AP AO AD	AP AO AD
		Conversión	Figural-discursivo	Figural-discursivo	Figural-discursivo	Figural-discursivo

Tabla 2. Aspectos semióticos cognitivos considerados en las situaciones.

Capítulo 4. Análisis, Resultados y Consideraciones Finales De Las Situaciones Propuestas En El Aula.

4.1 Análisis y Resultados De Las Situaciones Propuestas En El Aula.

Para los análisis el equipo investigador clasificó la información obtenida después de aplicar cada una de las actividades entre aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva y, posteriormente, observó cada uno de los tratamientos que realizan los estudiantes dentro de los tratamiento figúrales posibles así como la segmentación de cada una de las unidades significantes, con el fin de establecer si existe coordinación entre los registros de representación utilizados en cada una de las actividades. Además, se explican cuáles fueron las estrategias y las dificultades que se presentan durante el desarrollo de la secuencia de actividades.

Es importante aclarar que durante el análisis, en algunas tareas de las situaciones no se realiza un análisis de congruencia entre los registros utilizados, dado que se tiene como finalidad que los estudiantes adquieran habilidades argumentativas tanto de forma oral como escrita considerando que, según Marmolejo (2016) "describir un procedimiento, explicarlo y justificarlo deben ser consideradas como acciones idóneas en cualquier área del conocimiento, incluso en el lenguaje simbólico de las matemáticas" (p.32).

Ahora bien, en los análisis relacionados con el proceso de conversión se tienen en cuenta los criterios expuestos por Duval (2004) para que dos representaciones sean semióticamente congruentes: correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden de aprehensión de las unidades significantes (ver página 21). Este aspecto es fundamental en el proceso de aprehensión matemática puesto que permite la asociación de la configuración hallada mediante los tratamientos figurales con afirmaciones matemáticas.

En este punto, es importante considerar que al utilizar el registro de representación de las figuras, no es suficiente solamente el reconocimiento de las unidades figurales, es decir, que el registro de las figuras no dice nada por sí sólo por lo cual es necesario que esté acompañado de un discurso, y según Duval (2004) "debe haber una interacción entre los tratamientos figurales que por abducción guían la démarche heurística, y los tratamientos discursivos que por deducción constituyen la démarche basada en los objetos representados en las figuras" (p. 168). Es por ello que cada una de las tareas que han sido consideradas en el proceso de análisis de conversiones, poseen una indicación verbal que ancla la figura como representación de un objeto particular. Por ejemplo, en la Situación 1 cuando se les pregunta a los estudiantes ¿cuál de las dos figuras utiliza más papel? se está buscando centrar la atención solo sobre aquellos caminos posibles para conducir a una conclusión.

A continuación, se presenta el análisis realizado a cada una de las actividades propuestas:

4. 1.1 Situación 1: Celebrando El Día De La Familia.

Análisis de Tratamientos.

La primera y segunda tarea de la Situación 1 (ver anexo 1) permitió observar que la mayoría de los estudiantes intentó realizar, como primera estrategia, tratamientos numéricos en el proceso de comparación de áreas y perímetros de algunas figuras planas, lo cual no era el propósito de la situación teniendo en cuenta que se buscaba promover un manejo cualitativo de dichos objetos matemáticos donde los estudiantes hicieran uso de estrategias como la descomposición, sobreposición y reconfiguración de figuras. Pero tal y como lo afirma Duval (2004), estas operaciones relativas a las modificaciones posibles de una figura, son operaciones que están lejos de ser espontáneas o evidentes.

Relacionado con lo anterior, dos grupos intentaron efectuar un proceso de medición del área de las figuras A y B haciendo uso de herramientas convencionales como reglas para medir el largo y el ancho y, de esta forma poder recurrir a las fórmulas que utilizan generalmente (*Ilustración 9*), estrategia que no tuvo éxito teniendo en cuenta su forma irregular. Al ver que no era posible calcular el área de las figuras de esta forma, decidieron al igual que los otros tres grupos, recurrir a una comparación directa de las mismas, es decir, a un proceso de sobreposición (I*lustración 10*), pero nuevamente su forma irregular no les permitió identificar cuál de las dos figuras tenía mayor cantidad de superficie, motivo por el cual, los estudiantes tuvieron que buscar nuevos caminos que les permitiera resolver de forma satisfactoria el problema inicial.

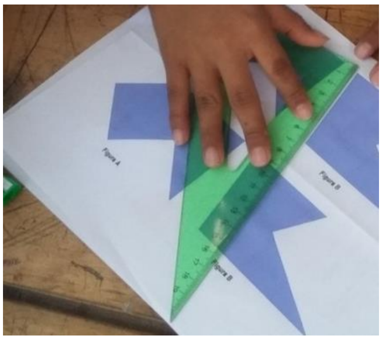


Ilustración 9 Estrategia de medida usando elementos convencionales.

Ilustración 10. Estrategia de medida por superposición.

De esta forma, a pesar de la poca familiaridad que tienen los estudiantes con los tratamientos figurales se ven obligados a realizar un proceso de visualización, donde efectúan un reconocimiento de las figuras A y B analizando su forma, tamaño, posición y orientación. Brindando la posibilidad de encontrar relaciones y características entre ellas, que les ayude a establecer algunas estrategias para lograr iniciar un proceso de comparación entre las mismas.

Luego de realizar el primer acercamiento con las figuras, proceso denominado por Duval (2004) como aprehensión perceptiva, los estudiantes recurren a la aprehensión operatoria y empiezan a efectuar las estrategias encontradas en el punto anterior. Entre los diferentes procedimientos llevados a cabo para encontrar la figura con mayor cantidad de área se pudo identificar que, dos grupos de estudiantes se inclinaron por el recorte de la figura B en sub- figuras (*ilustración 11*), para posteriormente realizar un proceso de reconfiguración sobreponiendo los pequeños trozos sobre la figura A (*ilustración 12*). Otros dos grupos, transformaron la figura A en un cuadrado *(ilustración 13)*, para luego, igual que en la estrategia anterior, recortar la figura B en sub-figuras e intentar cubrir el total de su superficie *(Ilustración 14*). Estos procesos utilizados les permitió identificar que la figura con mayor cantidad de área es la A puesto que quedaba con algunos espacios sin cubrir.

Ilustración 11.Recorte de la figura B en subfiguras.

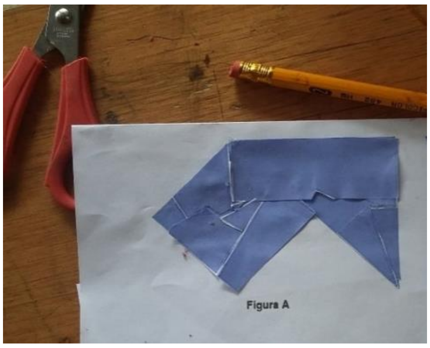


Ilustración 12.Reconfiguración de la figura B sobre la figura A.

Ilustración 13. Transformación de la figura A en un cuadrado.

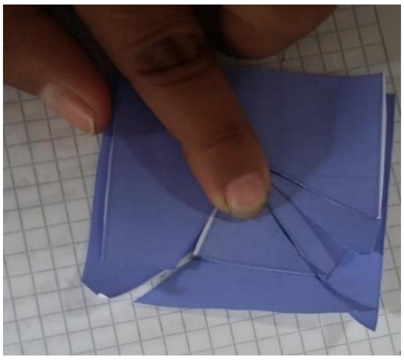


Ilustración 14. Reconfiguración de la figura B.

Se debe agregar que estos eran los tratamientos que se esperaba que los estudiantes desarrollaran para verificar cuál de las dos figuras tenía mayor cantidad de superficie. Sin embargo, un grupo tuvo una iniciativa diferente, la cual consistió en calcar las figuras sobre una hoja cuadriculada con el fin de realizar un conteo de las unidades cuadradas que las componían (*ilustración 15*), llegando a la conclusión que la que tenía mayor cantidad de cuadrados era la figura A, razón por la cual su área mayor.

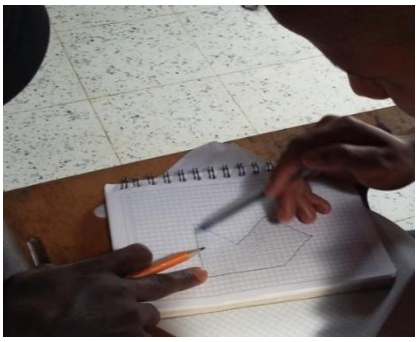


Ilustración 15. Estrategia de conteo de las unidades cuadradas para la identificación de la figura con mayor cantidad de área.

En cuanto a las estrategias utilizadas para encontrar la figura con mayor cantidad de longitud, los estudiantes utilizaron dos formas. La primera consistió en medir el contorno de la figura A con la cinta dorada *(Ilustración 16)*, recortar la cinta necesaria para cubrir el total del contorno de dicha figura, y con ese mismo trozo de cinta medir el contorno de la figura B (*ilustración 17*), identificando que este era insuficiente para su total recubrimiento, logrando de esta forma determinar que la figura que tenía mayor cantidad de longitud era precisamente la figura B. En la segunda estrategia utilizada, los estudiantes recortaron la cantidad de cinta dorada que se necesitaba para cubrir el contorno de cada una de las figuras y, posteriormente, realizaron un proceso de comparación de los tamaños de ambos trozos para establecer cuál de los dos era más largo (I*lustración 18*), logrando de esta forma identificar que la figura B necesitaba más cinta dorada para cubrir el total de su contorno.

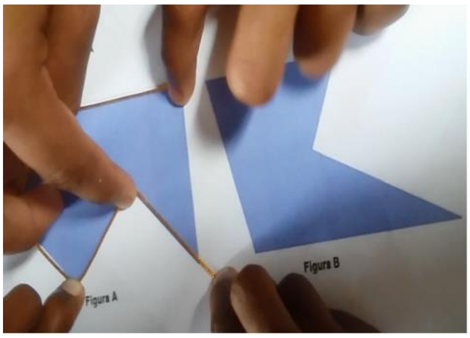


Ilustración 16. Medida del contorno de la figura A.

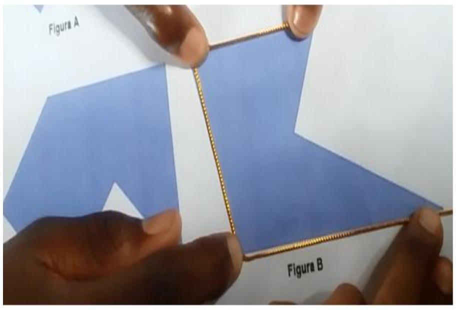


Ilustración 17. Medida del contorno de la figura B.

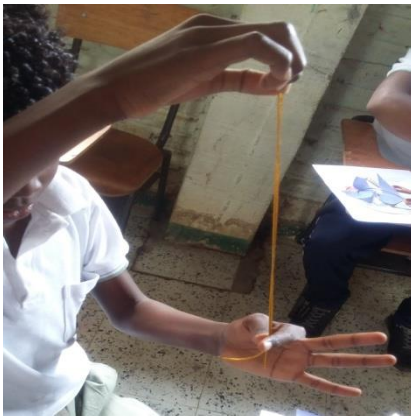


Ilustración 18. Comparación de las cintas para establecer la figura con mayor cantidad de longitud

Relacionado con lo anterior, se pudo evidenciar que los grupos de trabajo no tuvieron mayores inconvenientes cuando realizaron los tratamientos figurales necesarios para dar solución a las primeras tareas propuestas en la actividad, considerando que, aunque los grupos utilizaron distintas estrategias, lograron realizar los tratamientos pertinentes para responder de manera correcta a cada una de ellas.

En la tercera tarea (ver anexo 1), los estudiantes deben presentar algunas conclusiones después de realizar la comparación entre las áreas y los perímetros de las dos figuras, es decir, deben razonar con respecto a las relaciones existentes encontradas en las preguntas uno y dos (*ilustraciones 19 y 20*).

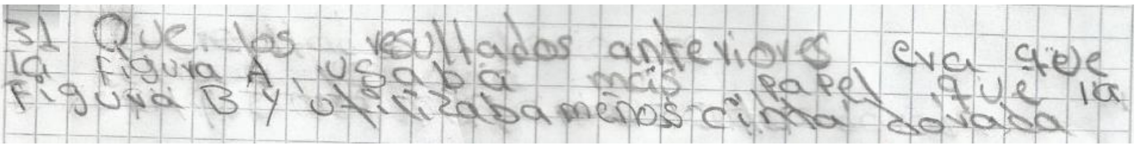


Ilustración 19.Razonamiento presentado por un grupo de estudiantes relacionado con el reconocimiento de la independencia entre las magnitudes área y perímetro.

Transcripción: Que los resultados anteriores era que la figura A usa más papel que la figura B y utilizaba menos cinta dorada

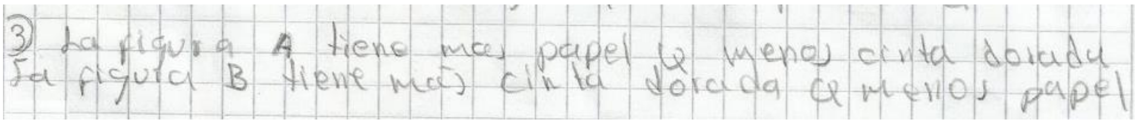


Ilustración 20. Razonamiento presentado por un grupo de estudiantes relacionado con el reconocimiento de la independencia de las magnitudes área y perímetro.

Transcripción: La figura A tiene más papel y menos cinta dorada, la figura B tiene más cinta dorada y menos papel.

En la cuarta tarea (ver anexo 1) los estudiantes realizaron un proceso de comunicación de las estrategias utilizadas a la hora de realizar los tratamientos figurales que les permitió identificar cuál de las dos figuras tiene mayor cantidad de superficie y cuál de las dos figuras tiene mayor cantidad de longitud. Dichos procesos ya fueron descritos por las investigadoras en la explicación de los procesos realizados por los estudiantes al momento de resolver la primera y segunda tarea. De igual modo, a continuación, se presenta lo descrito por un grupo de estudiantes como justificación de lo expuesto anteriormente (ilustración 21).

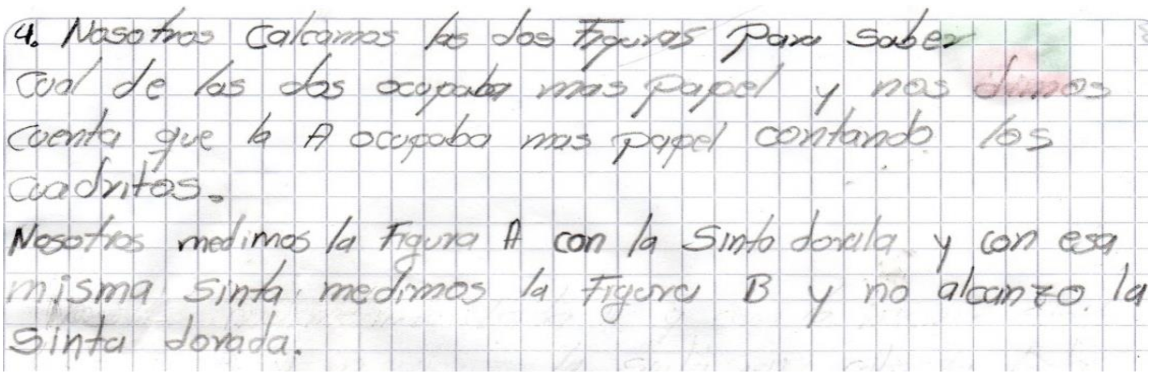


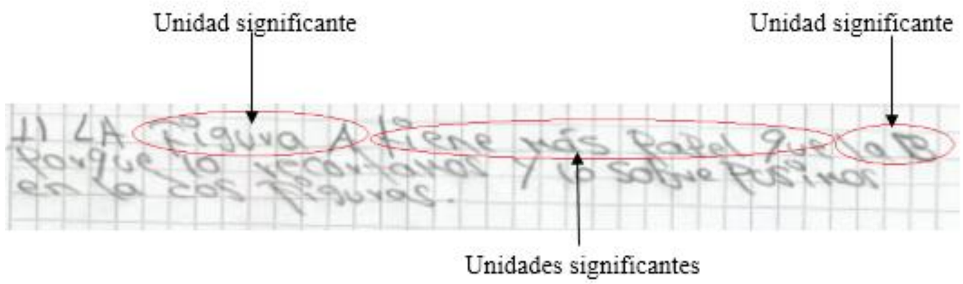
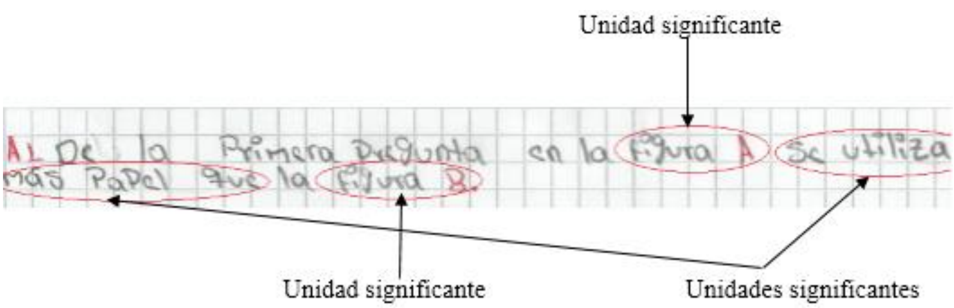
Ilustración 21.Explicación de un grupo de estudiantes sobre los tratamientos figurales realizados para responder a las tareas uno y dos.

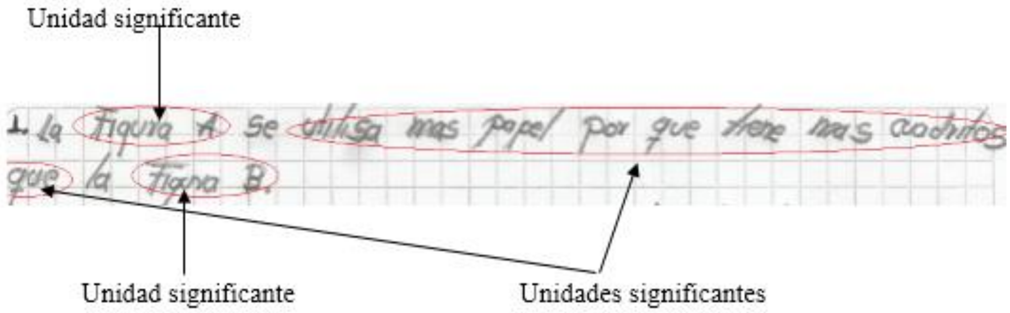
Transcripción: Nosotros colocamos las dos figuras para saber cuál de las dos ocupaba más papel y nos dimos cuenta que la A ocupaba más papel contando los cuadritos.
Nosotros medimos la figura A con la cinta dorada y con esa misma cinta medimos la figura B y no alcanzó la cinta dorada.

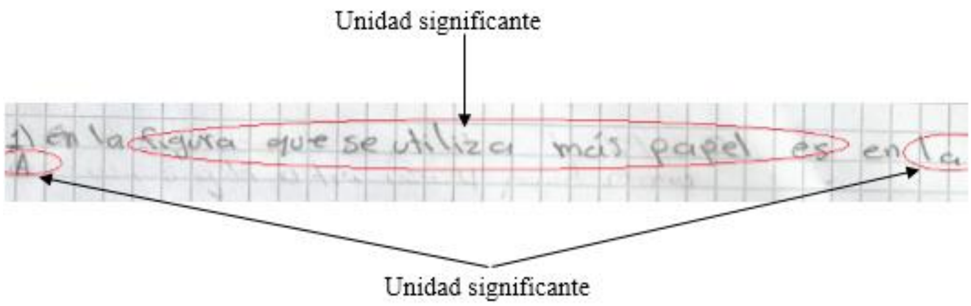
Las tareas tres y cuatro se proponen considerando que, según el MEN (1998) uno de los aspectos fundamentales en el proceso de adquisición de conocimiento matemático es que los estudiantes “den cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones” además, es importante que “utilicen argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar” (p. 54). De esta forma los estudiantes avanzan en la comprensión de los procesos de medida de las magnitudes superficie y longitud, así como en su independencia.

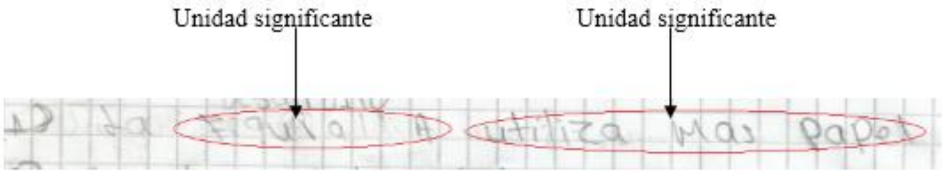
Análisis de Congruencia.

En la primera tarea de la Situación 1 (ver anexo 1), en el lenguaje figural presentado a los estudiantes se evidencian cuatro unidades significantes: la figura A, la figura B, el área de la figura A y el área de la figura B. A continuación, se presenta el discurso que expuso cada uno de los grupos en la solución de la situación, con su respectiva fragmentación de las unidades significantes, para posteriormente realizar un análisis de congruencia de forma general con el fin de identificar si se cumplen los criterios expuestos por Duval (2004).

Grupo 1	 *La figura A tiene más papel que la B porque lo recortamos y lo sobre pusimos en las dos figuras.*
Grupo 2	 *De la primera pregunta en la figura A se utiliza más papel que en la figura B.*

<table>
<tr><td>Grupo 3</td><td>

En la figura A se utiliza más papel porque tiene más cuadritos que la figura B.</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>

En la figura que se utiliza más papel es en la A.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>

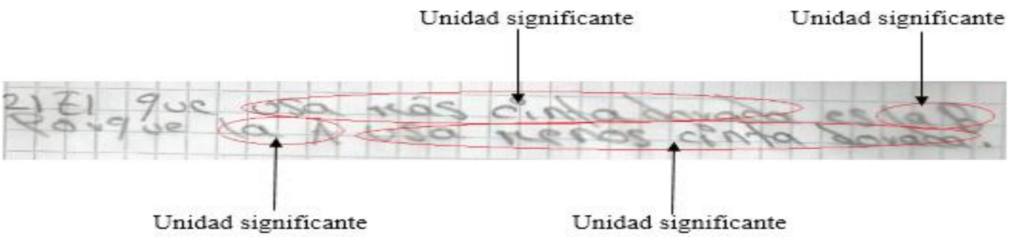
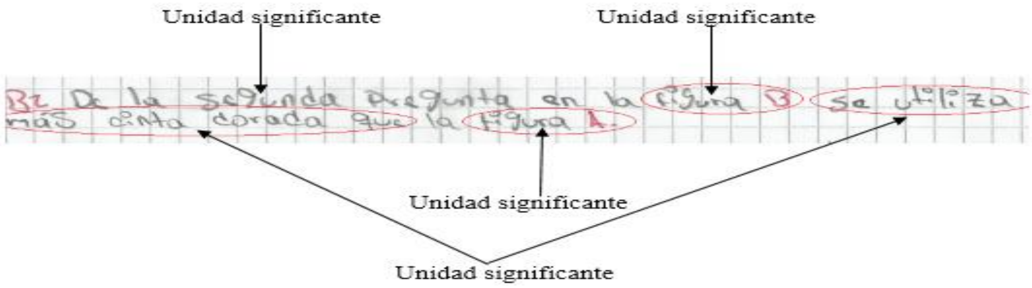
La figura A utiliza más papel.</td></tr>
</table>

Tabla 3. Aprehensión discursiva primera tarea de la situación 1.

De acuerdo con lo expresado por cada uno de los grupos en las respuestas presentadas (ver tabla 3) y teniendo en cuenta los criterios de coordinación entre las representaciones mencionados anteriormente, se puede afirmar que los grupos 1, 2, 3 cumplen el primer criterio de congruencia, puesto que los tres grupos logran identificar todas las unidades significantes del registro de partida (figural) y las ponen en correspondencia en el registro de llegada (discursivo). En este punto, conviene subrayar que, aunque estos grupos no presentan de manera explícita las áreas de las figuras A y B, están se asumen cuando el grupo 1 expresa la frase *tiene más papel que,* y los del grupo 2 y 3 expresan *se utiliza más papel que,* pues se considera que están indicando de manera implícita que el área de la figura A es mayor que el área de la figura B.

Con respecto al segundo criterio, se puede identificar que a cada unidad significante de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Además, en este proceso de conversión se puede observar que existe igual orden de aprehensión de las unidades, cumpliéndose de esta manera el tercer criterio. Por lo tanto, los grupos 1, 2 y 3 cumplen los tres criterios, siendo las representaciones semióticamente congruentes. Por el contrario, en los grupos 4 y 5 se evidencia solo el reconocimiento de dos de las cuatro unidades significantes, es decir, que se incumple el primer criterio de congruencia teniendo en cuenta que cada una de las unidades significantes del registro de partida no está asociada con una unidad en el registro de llegada. Tampoco se cumple el segundo criterio, pues a cada unidad del registro de partida no se le asocia con una única unidad en el registro de llegada dado que no se reflejan las unidades relacionadas con la figura B. En cuanto al último criterio tampoco se cumple, dado que no hay igual orden de aprehensión de las unidades en los dos registros. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que las dos representaciones son semióticamente incongruentes.

En la segunda pregunta las unidades significantes que se deben identificar tanto en el registro de partida como en el registro de llegada son la figura A, la figura B, el perímetro de la figura A y el perímetro de la figura B. Se debe de aclarar que el orden de aprehensión de las unidades figurales se realiza teniendo en cuenta la pregunta, la cual tiene la función de guiar los procedimientos que realizan los estudiantes con el fin de solucionar el problema, razón por la cual en las respuestas presentadas se hace énfasis primero a la figura B.

Grupo 1	 *El que usa más cinta dorada es la B porque la A usa menos cinta dorada.*
Grupo 2	 *De la segunda pregunta en la figura B se utiliza más cinta dorada dorada que la figura A.*

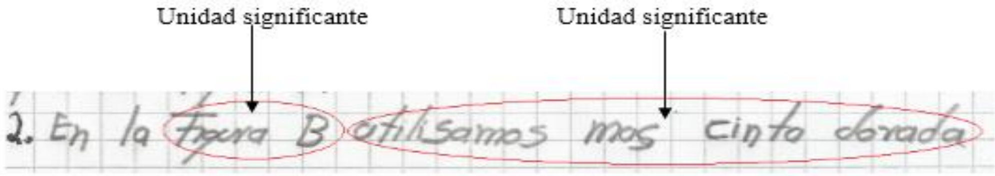
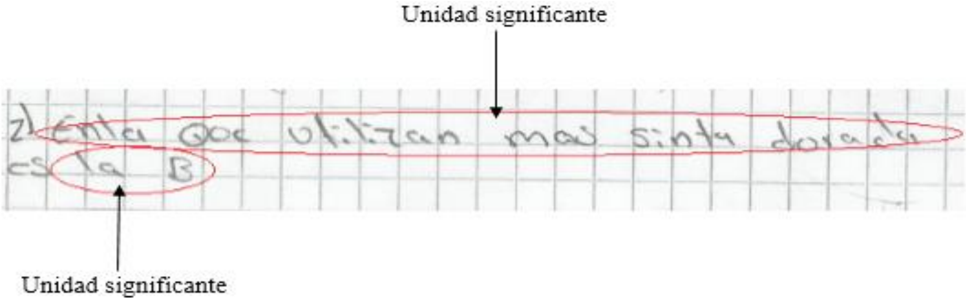
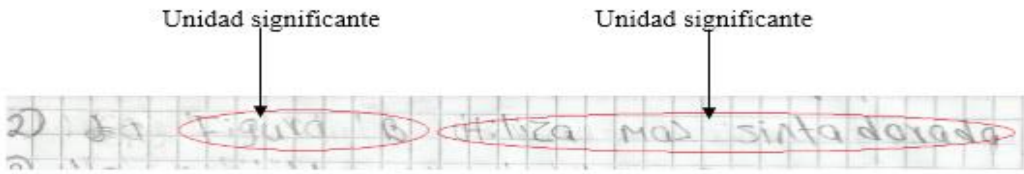
Grupo 3	 *En la figura B utilizamos más cinta dorada.*
Grupo 4	 *En la que se utiliza más cinta dorada es en la B*
Grupo 5	 *La figura B utiliza más cinta dorada*.

Tabla 4. Aprehensión discursiva de la segunda tarea de la situación 1.

Considerando el discurso presentado por cada uno de los 5 grupos analizados en la solución del segundo punto de la Situación 1 (ver tabla 4) se puede evidenciar que algunas unidades significantes como el perímetro de las figuras A y B aparecen de manera implícita en el registro discursivo, como por ejemplo, en el grupo 2 los estudiantes expresan que *en la figura B se utiliza más cinta dorada que en la figura A*, lo cual se asume como que, la medida del contorno de la figura B es mayor que la medida del contorno de la figura A, o dicho de otra manera, que el perímetro de la figura B es mayor que el perímetro de la figura A.

Desde este punto de vista, se puede afirmar que solamente los grupos 1 y 2 lograron identificar todas las unidades significantes que conforman la representación, cumpliendo de esta manera el criterio de correspondencia semántica, donde a cada unidad de partida se le asocia una unidad de en el registro de llegada. También se puede evidenciar que se cumple el criterio de univocidad semántica, puesto que a cada una de las unidades significantes en el registro de partida se le asocia solo una única unidad en el registro de llegada, y por último, solamente el grupo 2 cumple el criterio de igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros, dado que los estudiantes discriminan primero las unidades haciendo énfasis en la figura B, luego en lo relacionado con la comparación entre los perímetros y posteriormente en la figura A, tal como lo requiere la pregunta que guía el procedimiento. Por tanto, existe una articulación entre los dos registros utilizados ya que se cumplen los tres criterios de congruencia.

En los grupos 3, 4 y 5 los estudiantes no logran mostrar en el registro discursivo todas las unidades significantes dado que en sus respuestas solo se refieren a la figura B y a su respectivo perímetro, dejando de lado las unidades significantes relacionadas con la figura A, por lo cual no se cumple el criterio de correspondencia semántica dado que cada unidad significante del registro de partido no se asocia con una unidad del registro de llegada. Se incumple del mismo modo el criterio de univocidad semántica, puesto que no se puede asociar cada unidad del registro figural con una única unidad en el registro discursivo. Respecto al último criterio, los estudiantes de los grupos 3 y 5 si logran establecer un orden de aprehensión entre las unidades significantes reconocidas, pero esto no es suficiente para que exista una congruencia entre los registros utilizados teniendo en cuenta que se deben cumplir los tres criterios.

4.1.2 Situación 2: Recubriendo La Figura.

Análisis de Tratamientos.

En esta Situación al igual que en la anterior se buscó promover en los estudiantes los tratamientos de aprehensión perceptiva y aprehensión operatoria en el proceso de cálculo de áreas por recubrimiento con diferentes patrones de medida. Se debe aclarar que, en un primer momento los estudiantes debían realizar los tratamientos figurales para posteriormente poder asignar un valor numérico a la superficie de la figura D. En este punto y considerado la primera tarea (ver anexo 2), los estudiantes realizaron el reconocimiento de las unidades que conforman la figura D, identificando cuáles son los tratamientos a los que deben recurrir para lograr resolver la actividad.

En lo relacionado con los procedimientos efectuados por los estudiantes, es importante resaltar que 1 de los 5 grupos en el proceso de la aprehensión perceptiva logró identificar el número de unidades necesarias para el total recubrimiento de la superficie de la figura D sin necesidad de recurrir a la manipulación directa de los triángulos como patrón de medida, es decir, los estudiantes no tuvieron la necesidad de recurrir a la aprehensión operatoria para lograr asignarle un valor numérico a la superficie de la figura, algo que sí tuvieron que realizar los otros grupos de estudiantes, pues estos en el primer acercamiento lograron identificar la posición en la que debían colocar el patrón de medida para que no hubieran ni solapamiento ni agujeros, y así posteriormente pasar a recubrir por completo la superficie de la figura D recurriendo al proceso de sobreposición de los triángulos (*Ilustración 22*). Cualquiera de las 2 estrategias utilizadas les permitió a los estudiantes llegar a la conclusión que, para recubrir el total de la superficie se requieren 29 triángulos.

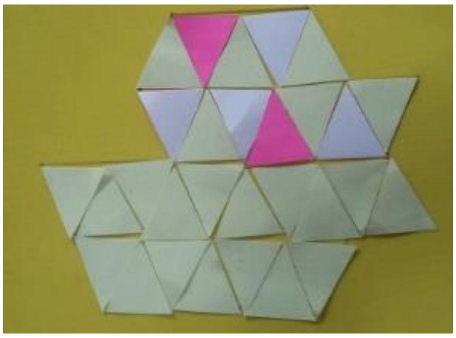


Ilustración 22. Proceso de sobreposición realizada por un grupo de estudiantes.

A continuación, se presenta un fragmento de la explicación realizada por el grupo de estudiantes que no tuvo la necesidad de recurrir al proceso de sobreposición para asignarle un valor numérico a la superficie de la figura D, donde argumentan cuál fue la estrategia que les permitió realizar dicho razonamiento. Se utiliza la letra E y D para las intervenciones de los estudiantes y del docente respectivamente:

E: *Profe, yo ya tengo la fórmula.*
D: *¿Cuál fórmula?*
E: *La de saber cuántos triángulos caben en la figura.*
D: *Y ¿cuántos triángulos caben en la figura?*
E: *A ver, 1, 2, 3, 4, 5 aquí hay 5 mire. (Continúa contando los triángulos que se forman en la figura).*
E: *Hay 29.*
D: *¿Cómo hiciste para darte cuenta?*
E: *Porque ahí mismo en los puntos dice, los puntos dan triángulos.*
D: *¿Será que si colocamos los triángulos sobre la figura da 29?*
E: *Claro, si seguimos esta fórmula sí.*
D: *Bueno, explícame como lo harías.*
E: *Pues profe mire, este va con punta para bajo y este otro con la punta para arriba. y así se va. (Mostrando cómo deben ir ubicados los triángulos en la parte inferior de la figura).*
E:*Acá abajo caben 7 triángulos. Si ve profe que si sirve mi fórmula.*

En la segunda tarea (ver anexo 2) los estudiantes realizan en un primer momento un reconocimiento de los patrones de medida para determinar cuál es la figura que corresponde a un cuadrilátero, posterior a esto, guiados solo por la aprehensión perceptiva intentan determinar cuál es la posición en la que deben ir los cuadriláteros para poder cumplir con el objetivo de recubrir la superficie de la figura D.

Una vez identificada cual es la posición en la que debe estar ubicado el patrón de medida, recurren a la aprehensión operatoria y empiezan a realizar el recubrimiento de la superficie de la figura D, dándose cuenta que no es posible cumplir con la tarea haciendo uso solamente de los cuadriláteros (*Ilustración 23*), por lo que deben buscar otras estrategias que les permitan cubrir de manera correcta la superficie de la figura.

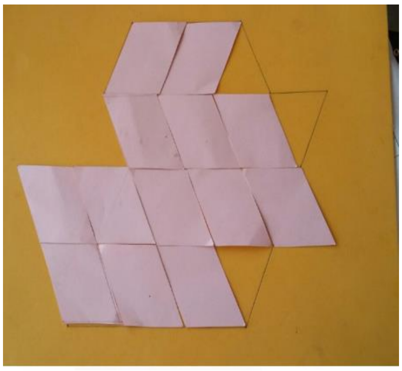


Ilustración 23. Superficie de la figura D que queda sin cubrir haciendo uso solo de cuadriláteros.

Lo que hicieron los estudiantes para cumplir con su tarea fue buscar entre las figuras que tenían como patrón de medida cuál conservaba la misma forma y superficie de los espacios que quedaban sin cubrir, reconociendo que la figura que cumple con esas condiciones es el triángulo, por lo que no dudaron en utilizarlo.

En este momento, la docente hace una intervención donde explica que la respuesta debe ser dada en función de los cuadriláteros, es decir, que no es válida la respuesta de que se utilizan 13 cuadriláteros y 3 triángulos. Esto con el fin de llevar a los estudiantes a procesos de descomposición o de reconfiguración de los patrones de medida.

De acuerdo a esto, al tener el total de la superficie de la figura D cubierta tanto por cuadriláteros como con triángulos (*Ilustración 24*), los estudiantes iniciaron a buscar relaciones entre ellos, donde por medio de la sobreposición y la visualización logra identificar que un cuadrilátero está conformado por dos triángulos. Otro grupo de estudiantes no utilizó los triángulos de forma directa, sino que intenta introducir el cuadrilátero sobre el espacio que falta por cubrir, organizándolo de tal la forma que éste no quede sobre las otras figuras, por lo que se recurre al recorte de la cantidad de cartulina que no utilizan (*Ilustraciones 25 y 26*). Después de realizar este proceso logran evidenciar que tanto la cantidad de cartulina utilizada como la que sobra tiene forma de triángulo, lo que les permite inferir que el cuadrilátero está formado por dos de ellos. Con lo anterior, los estudiantes logran inferir que al unir dos triángulos estos forman un cuadrilátero lo que les permite responder que se necesitan 14 y $\frac{1}{2}$ cuadriláteros para cubrir de manera correcta la superficie de la figura D.

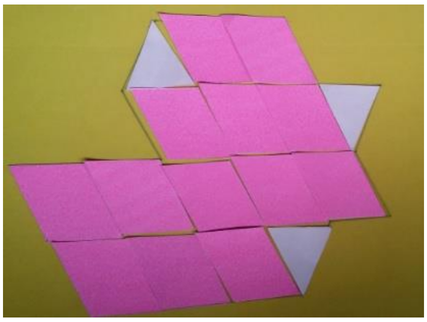


Ilustración 24. Proceso de recubrimiento con cuadriláteros y triángulos.

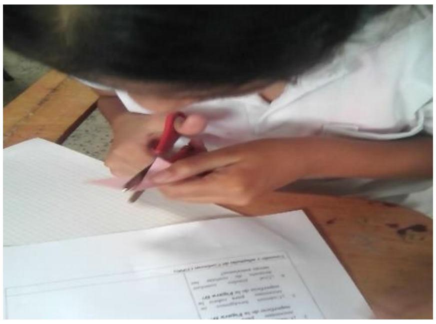


Ilustración 25. Recorte del cuadrilátero en triángulos.

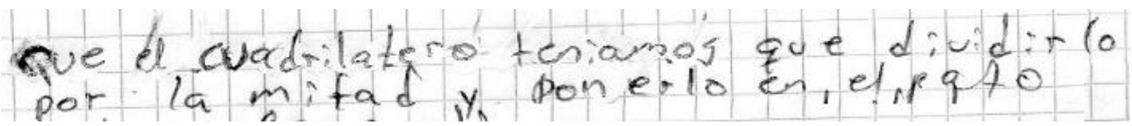


Ilustración 26. Explicación de un grupo de estudiantes del proceso que desarrollaron para cumplir con su tarea.

Transcripción: *Que el cuadrilátero tenemos que dividirlo por la mitad y ponerlo en el pato.*

De acuerdo a lo anterior, 4 grupos realizaron un proceso de reagrupamiento de dos triángulos identificando que estos conforman un cuadrilátero, y el grupo restante realizó un proceso de descomposición de un cuadrilátero estableciendo que este está conformado por dos triángulos. Como se evidencia, los grupos realizaron tratamientos figurales diferentes, pero lograron llegar a la misma conclusión, identificando las relaciones existentes entre los dos patrones de medidas.

Relacionado con la tercera tarea (ver anexo 2), los estudiantes en un primer momento deben hacer uso de la aprehensión perceptiva con el fin de reconocer cada una de las unidades de medida, diferenciando el hexágono de las otras dos unidades para luego analizar la posición en la que deben estar ubicadas. Una vez realizado esto, los estudiantes intentan cubrir la superficie de la figura D con el hexágono, es decir, se hace uso de la aprehensión operatoria recurriendo al proceso de sobreposición de figuras. Al darse cuenta que no es posible cubrir la superficie haciendo uso solamente de los hexágonos, empiezan a considerar el uso de otros patrones de medida como el triángulo y el cuadrilátero (*Ilustración 27*) con la finalidad de cubrir por completo la superficie de la figura D.

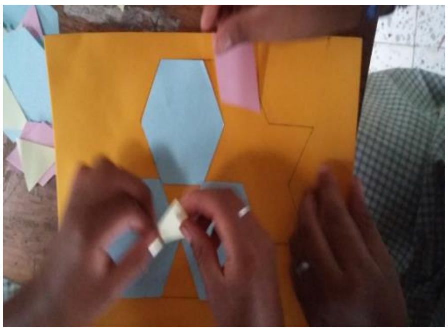


Ilustración 27. Recubriendo la superficie de la figura D con diferentes patrones de medida.

Luego de cubrir la superficie de la figura D haciendo uso de los 3 patrones de medida (*Ilustración 28*) teniendo en cuenta que no era posible hacerlo solo con los hexágonos, los estudiantes recurren a procesos de reconfiguración y visualización donde reagrupan algunas unidades figurales como el triángulo y los cuadriláteros para formar de esta manera una nueva figura correspondiente al hexágono. Los 5 grupos de estudiantes, reagrupan 2 cuadriláteros y 2 triángulos para formar la nueva figura *(Ilustración 29*), identificando que el hexágono estaba conformado por 3 cuadriláteros puesto que ya habían logrado reconocer en el punto anterior que un cuadrilátero estaba formado por 2 triángulos. Luego, iniciaron de nuevo con un proceso de reagrupamiento donde utilizaron el cuadrilátero y los 3 triángulos restantes, identificando que no era posible cubrir por completo el hexágono dado que solamente se tenían 5 triángulos justificando nuevamente, la relación existente entre los cuadriláteros y los triángulos.

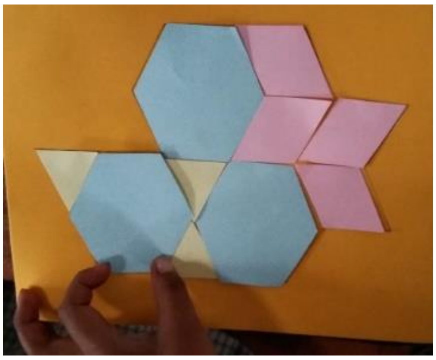


Ilustración 28. Proceso de recubrimiento de la superficie de la figura D.

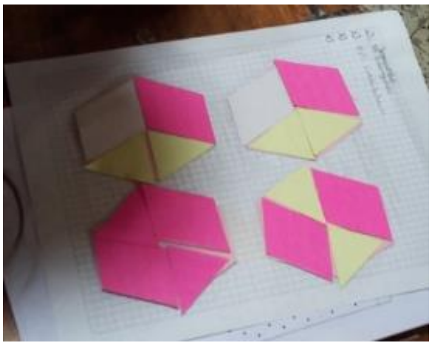


Ilustración 29. Proceso de reagrupamiento de los cuadriláteros y triángulos en hexágonos.

Resumiendo lo anterior, una vez los estudiantes han reagrupado las unidades sobre el hexágono, tienen la facilidad de visualizar y analizar el número de figuras necesarias para cubrirlo, deduciendo que se necesitan 6 triángulos o si la observación se hace en función de los cuadriláteros se deben de utilizar 3. De este modo, los estudiantes logran concluir que, para el recubrimiento total de la superficie de la figura D se requiere de $4\frac{5}{6}$ hexágonos, aunque en algunos casos no logran expresarlo de dicha manera como es el caso de 2 grupos.

En relación con la tarea 4 (ver anexo 2) los estudiantes deben explicar de forma escrita las relaciones encontradas después de realizar los tratamientos figurales y las observaciones requeridas para darle solución a las tareas 1, 2 y 3. En estas respuestas (*Ilustraciones 30 y 31*) se puede evidenciar que los estudiantes gracias al material manipulativo y a los procesos de descomposición y reagrupamiento, empiezan a comprender que al recubrir la superficie de la figura D con cada una de las fichas que se tienen como patrón de medida se obtienen medidas diferentes, las cuales varían dependiendo del tamaño del patrón de medida seleccionado.

Dada la similitud de las respuestas en los 5 grupos, a continuación, solo se presentan dos de ellas como muestra representativa de las conclusiones a las que llegaron los estudiantes.

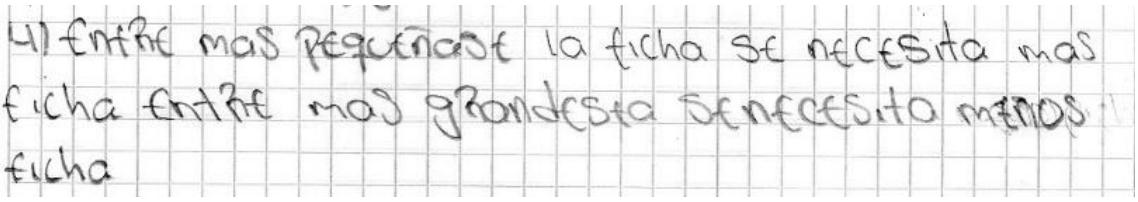


Ilustración 30. Respuesta de un grupo de estudiantes a la tarea 4.

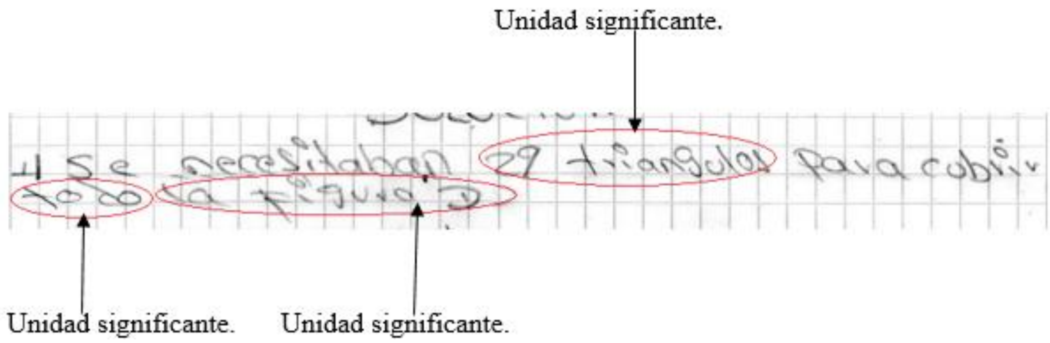
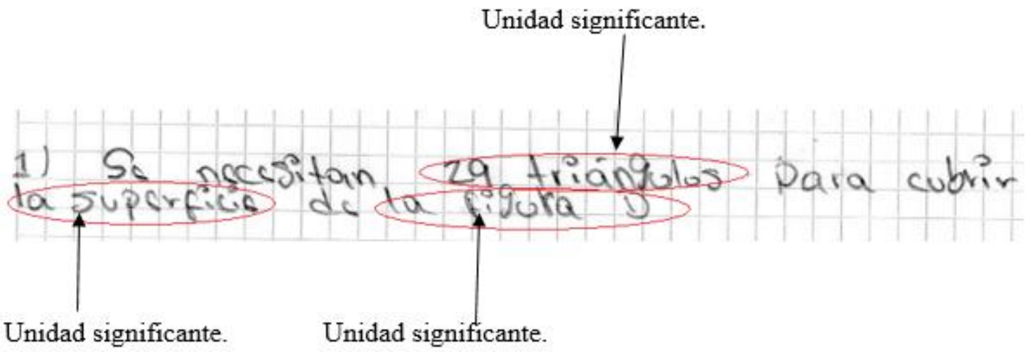
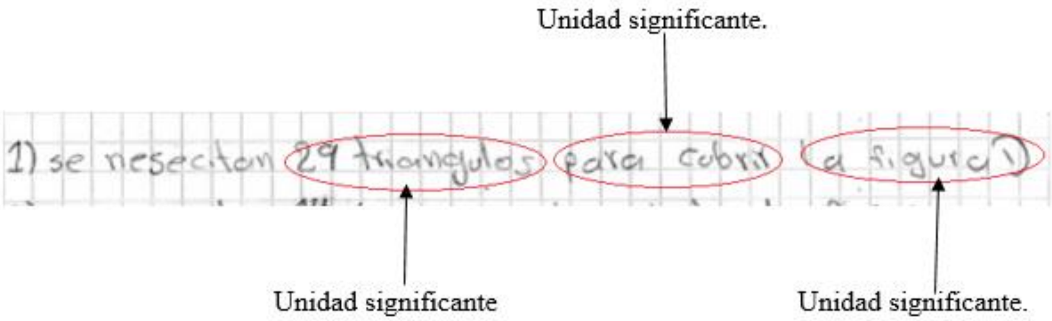
Trascripción: Entre más pequeña la ficha se necesitan más fichas entre más grande se necesita menos fichas.

Ilustración 31. Respuesta de un grupo de estudiantes respuesta 4.
Trascripción: concluimos que entre más grande sea la figura se necesita menos cantidad y entre más pequeñas en número de figuras aumenta.

Análisis de Congruencia.

Considerando que en las respuestas de los estudiantes se incluyen dos registros de representación, uno para desarrollar los tratamientos propios de las figuras y otro para efectuar tareas de tipo descriptivo y argumentativo las cuales hacen un llamado a la espontaneidad del sujeto, se considera pertinente llevar a cabo una segmentación de cada una de las unidades significantes de los registro utilizados con el fin de establecer si existe una congruencia entre estos registros: el lenguaje figural y el lenguaje discursivo.

En la primera tarea de la Situación 2 (ver anexo 2), las unidades significantes que los estudiantes deben considerar en el desarrollo de la aprehensión discursiva son: cantidad de triángulos necesarios para recubrir el total de la superficie de la figura D, superficie de la figura D y la figura D.

Grupo 1	 *se necesitan 29 triángulos para cubrir toda la figura D.*
Grupo 2	 *Se necesitan 29 triángulos para cubrir la superficie de la figura D.*
Grupo 3	 *Se necesitan 29 triángulos para cubrir toda la figura D.*
Grupo 4	 *se necesitan 29 triángulos para cubrir la figura D.*

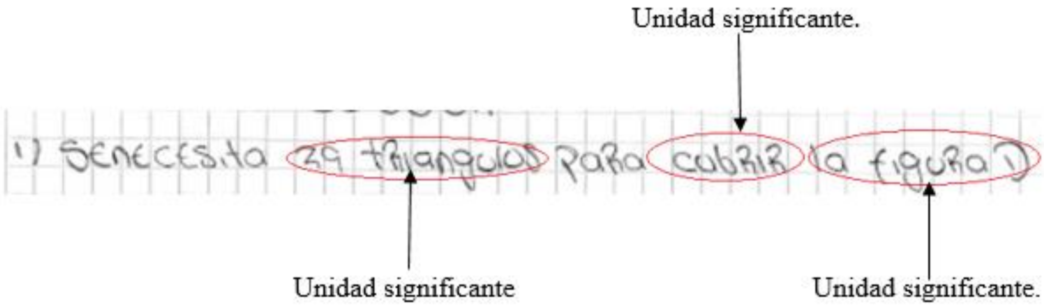
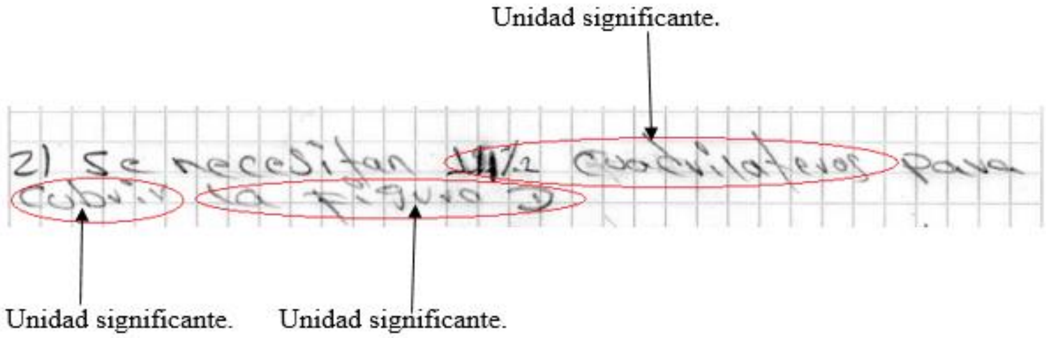
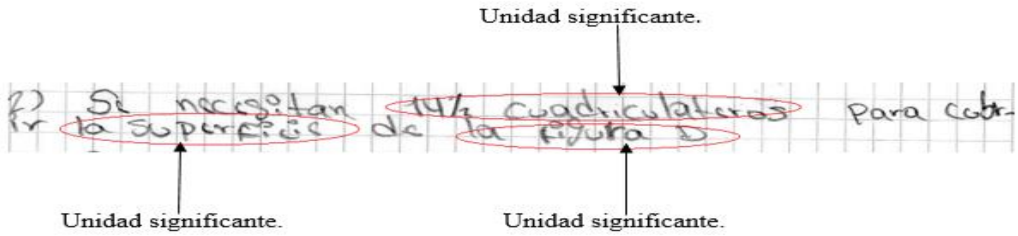
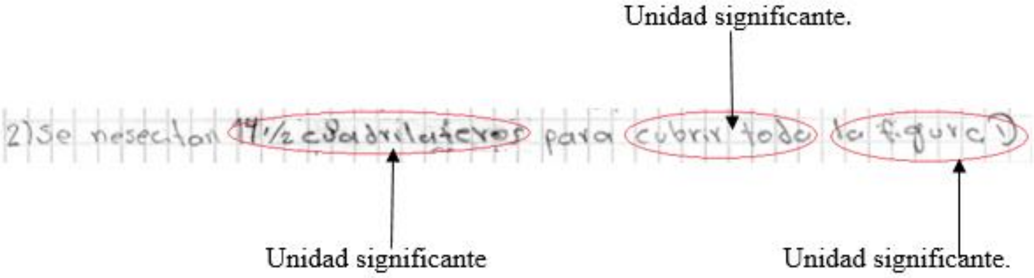
Grupo 5	 *Se necesitan 29 triángulos para cubrir la figura D.*

Tabla 5. Aprehensión discursiva de la primera tarea de la situación 2.

En la respuesta presentada por cada uno de los grupos de estudiantes (ver tabla 5), se puede evidenciar que logran poner en correspondencia las unidades significantes de cada uno de los registros. Es de aclarar que, aunque los grupos 1, 3, 4 y 5 no hacen referencia de forma directa a la unidad significante *superficie de la figura D,* esta se asume cuando ellos utilizan el término *para cubrir,* pues se considera que de forma implícita están indicando que *se necesitan 29 triángulos para cubrir la superficie de la figura D.*

En cuanto al segundo criterio de congruencia, se puede afirmar que los estudiantes no solo logran poner en correspondencia cada una de las unidades significantes en los dos registros, sino que, además, consiguen que a cada una de las unidades significantes de partida les corresponda únicamente una unidad significante en el registro de llegada, cumpliéndose de esta manera el criterio de univocidad semántica. Por último, todos los grupos cumplen con el criterio de igual orden de aprehensión dado que la comparación de las unidades significantes en los dos registros conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones. De este modo y considerando que los 5 grupos cumplieron con los 3 criterios de congruencia, se concluye que las representaciones son semióticamente congruentes.

En la segunda pregunta las unidades significantes que debían considerar los estudiantes tanto en el registro de partida como en el registro de llegada son: cantidad de cuadriláteros necesarios para cubrir por completo la superficie de la figura D, la superficie de la figura D y la figura D.

Grupo 1	 *Se necesitan $14\frac{1}{2}$ cuadrilateros para cubrir la figura D.*
Grupo 2	 *Se necesita $14\frac{1}{2}$ cuadrilateros para cubrir la superficie de la figura D.*
Grupo 3	 *Se necesita catorce y medio cuadriláteros para cubrir la figura D.*
Grupo 4	 *Se necesitan $14\frac{1}{2}$cuadrilateros para cubrir toda la figura D*

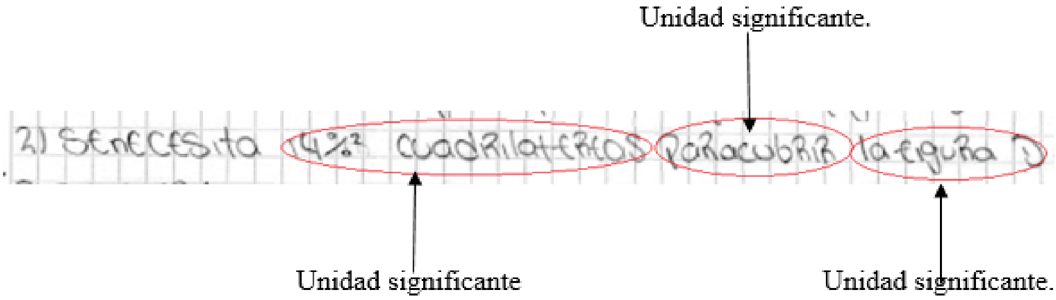
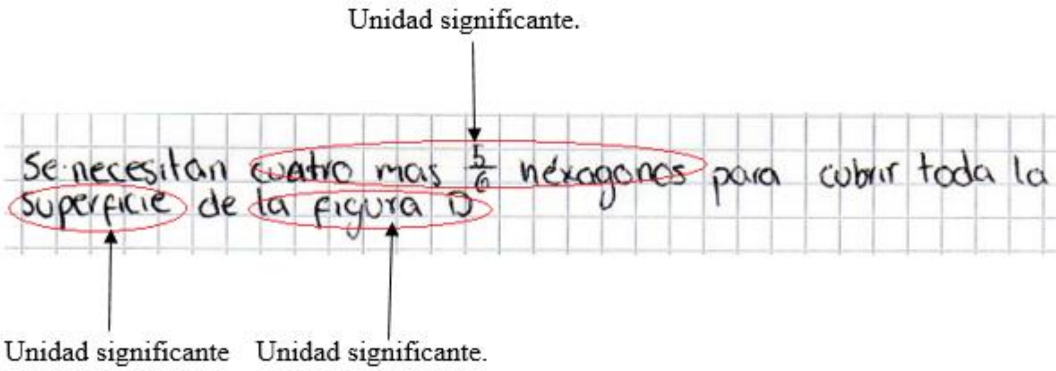
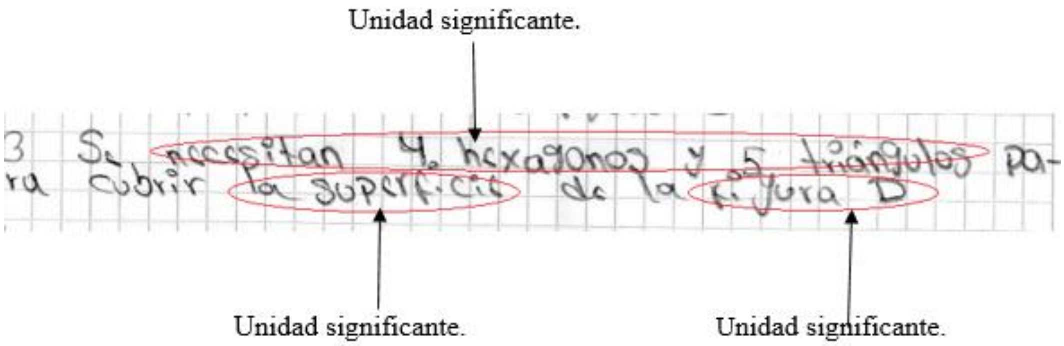
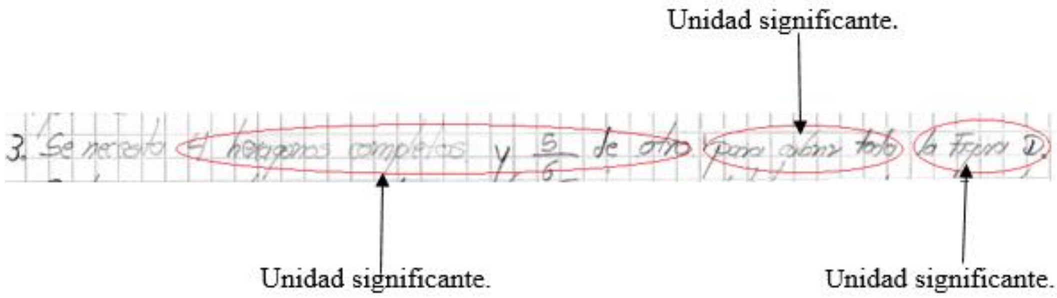
Grupo 5	 *Se necesitan 14$\frac{1}{2}$cuadriláteros para cubrir la figura D.*

Tabla 6. Aprehensión discursiva tarea 2 situación 2.

Considerando la aprehensión discursiva de cada uno de los grupos en la solución de la tarea 2 (ver tabla 6), se puede afirmar que los 5 grupos cumplen con el criterio de correspondencia semántica de las unidades significantes en los dos registros, puesto que se puede determinar que cada unidad en el registro de llegada se encuentra asociada con una unidad en el registro de partida. Nuevamente, se debe aclarar que en las respuestas presentadas por los grupos 1, 3, 4 y 5 no se hace alusión de forma directa a la unidad significante que representa a la *superficie de la figura D,* sin embargo, esta se asume cuando los estudiantes utilizan la frase *para cubrir,* considerando que se refieren a que *se necesitan 14 $\frac{1}{2}$cuadrilateros para cubrir la superficie de la figura D.*

En esta tarea los estudiantes no presentaron mayores inconvenientes al momento de asociar las unidades significantes en ambos registros, pues como se pudo determinar, todos los grupos lograron relacionar las unidades significantes de la representación de partida con una única unidad significante en el registro de llegada. Además, los estudiantes también logran establecer un mismo orden de aprehensión entre las unidades significantes en ambos registros. De acuerdo a esto, todos los estudiantes logran cumplir con los 3 criterios que hacen a las representaciones semióticamente congruentes.

En la tercera pregunta las unidades significantes que debían considerar los estudiantes tanto en el registro de partida como en el registro de llegada son: cantidad de hexágonos necesarios para cubrir por completo la superficie de la figura D, la superficie de la figura D y la figura D.

Grupo 1	 *Se necesitan cuatro más $\frac{5}{6}$ hexágonos para cubrir toda la superficie de la figura D.*
Grupo 2	 *Se necesitan 4 hexágonos y 5 triángulos para cubrir la superficie de la figura D.*
Grupo 3	 Se necesitan 4 hexágonos completos y $\frac{5}{6}$ de otro para cubrir toda la figura D.

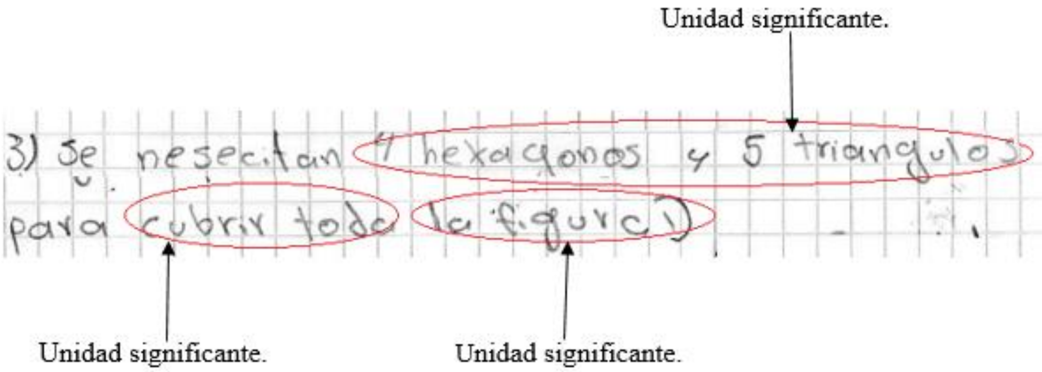
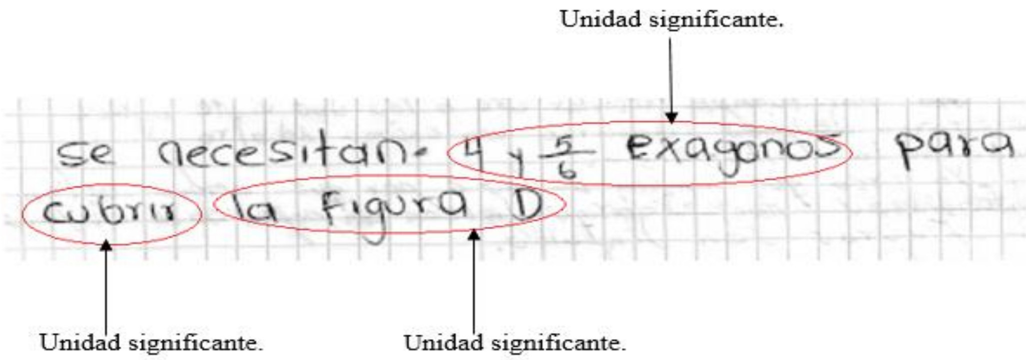
Grupo 4	 Se necesitan 4 hexágonos y 5 triángulos para cubrir toda la figura D.
Grupo 5	 Se necesitan 4 y $\frac{5}{6}$ de hexágonos para cubrir la figura D.

Tabla 7. Aprehensión discursiva tarea tres situaciones 2.

De acuerdo a las respuestas presentadas por los estudiantes (ver tabla 7), se puede indicar que los grupos 1, 3 y 5 no tuvieron ninguna dificultad al momento de poner en correspondencia las unidades significantes en ambos registros, cumpliendo de esta manera con el primer criterio de congruencia. Es importante aclarar que, al momento en que los 3 grupos expresan que *se necesitan 4 y $\frac{5}{6}$ de hexágonos,* estos están haciendo referencia a la unidad significante que representa la cantidad de hexágonos necesarios para el recubrimiento de la superficie de la figura D. En cuanto a los grupos 2 y 4 estos no logran establecer dicha correspondencia, puesto que expresan que *se necesitan 4 hexágonos y 5 triángulo*s, es decir, están asumiendo una nueva unidad significante en el registro discursivo que corresponde a los 5 triángulos y considerando la pregunta que guía el procedimiento, las respuestas presentadas deben estar dadas en función de los hexágonos.

Relacionado con el criterio de univocidad semántica entre los dos registros de representación, se puede decir que los 5 grupos no tuvieron inconveniente con este criterio de congruencia, puesto que en las respuestas presentadas se puede evidenciar que cada unidad significante del registro de partida se asocia con una única unidad significante en el registro de llegada. En lo que tiene que ver con el tercer criterio los grupos no presentaron dificultades y todos consiguieron poner en igual orden de aprehensión las unidades significantes en los dos registros utilizados, pero a pesar de que todos cumplieron con estos 2 últimos criterios, solo los grupos 1, 3 y 5 presentaron representaciones semióticamente congruentes.

4.1.3 Actividad 3: Midiendo Mi Entorno.

Análisis de Tratamientos.

En el desarrollo de la primera parte de la Situación 3 (ver anexo 3), se moviliza el aprendizaje del perímetro haciendo uso de unidades de medidas no estandarizadas. Para esto es fundamental el desarrollo de la percepción haciendo uso de elementos que pertenecen al mundo físico, considerando que permite a los estudiantes iniciar el reconocimiento de características que les aportan en el proceso de conceptualización de los objetos matemáticos, partiendo del principio de lo concreto a lo abstracto, donde “este principio es fundamental en los primeros periodos de enseñanza por el periodo de desarrollo cognitivo que se supone en los niños de esas edades” (Vecino, 2004, p.16).

Ahora bien, con relación a la primera tarea de la parte A (ver anexo 3), los estudiantes deben explicar el proceso que realizan para encontrar las medidas del contorno del objeto físico utilizado, es decir, describir los tratamientos y el patrón de medida empleado para encontrar la medida de las longitudes del escritorio (*Ilustración 32*). En las respuestas presentadas se puede evidenciar que dos grupos intentaron medir el escritorio haciendo uso de un lazo (*Ilustración 33*) pero este instrumento no permitió que se pudiera llevar a cabo una asignación numérica a la medida del contorno, por lo que recurrieron a usar las cuartas de sus manos para medir no el escritorio directamente, sino la cantidad de lazo requerida para el recubrimiento total de las longitudes de sus lados (*Ilustración 34*).

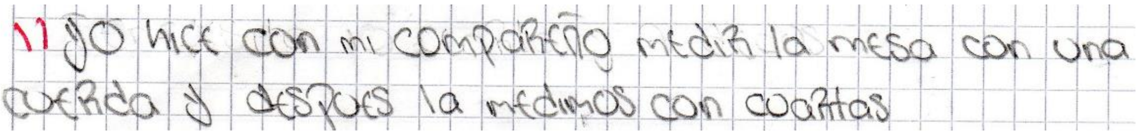


Ilustración 32. Explicación sobre los tratamientos y el patrón de medida empleado para medir el contorno del escritorio.

Transcripción: *Yo hice con mi compañero medir la mesa con una cuerda y después la medimos (la cuerda) con cuartas*

Ilustración 33. Medida del contorno del escritorio con patrón arbitrario.

Ilustración 34. Medida con patrón arbitrario de la cantidad de cuerda necesaria para cubrir el contorno del escritorio

Por otro lado, los tres grupos restantes también emplearon las cuartas de sus manos como unidad de medida para lograr establecer la cantidad de longitud del escritorio (*Ilustración 35*), pero a diferencia de los otros dos grupos, estos si realizaron un proceso de medición directamente sobre él (*Ilustración 36*).

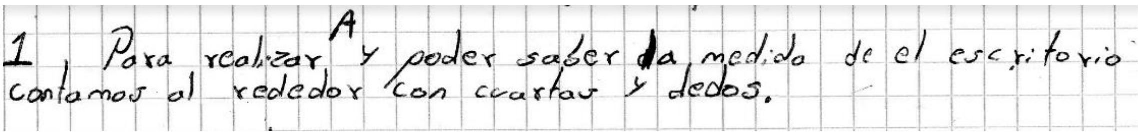


Ilustración 35. Explicación sobre los tratamientos y el patrón de medida empleado para medir el contorno del escritorio.

Transcripción: *Para realizar y poder saber la medida del escritorio contamos alrededor con cuartas y dedos.*

Ilustración 36. Medida de longitudes con patrones arbitrarios.

En la segunda tarea los estudiantes ponen en práctica el desarrollo de otra actividad que se considera fundamental en la geometría (MEN, 1998). Esta consiste en reproducir las figuras geométricas ubicadas en el espacio haciendo uso de algunos instrumentos intermediarios como el papel y el lápiz, es decir, los estudiantes no solo tienen una exploración activa con objetos del entorno, sino que intentan comunicar y expresar la información espacial percibida por medio de representaciones planas de las formas y relaciones identificadas. En este caso, los estudiantes producen una representación gráfica del escritorio del cual han dispuesto para realizar la actividad, donde tienen en cuenta las dimensiones del contorno de dicho objeto con relación al patrón de medida utilizado y los tratamientos realizados (*Ilustraciones 37 y 38*)

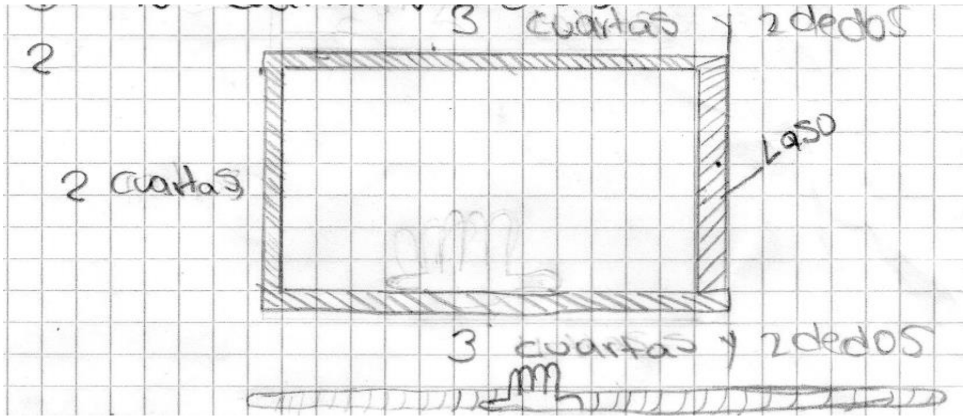


Ilustración 37. Representación gráfica del escritorio, teniendo en cuenta los tratamientos realizados y el patrón de medida.

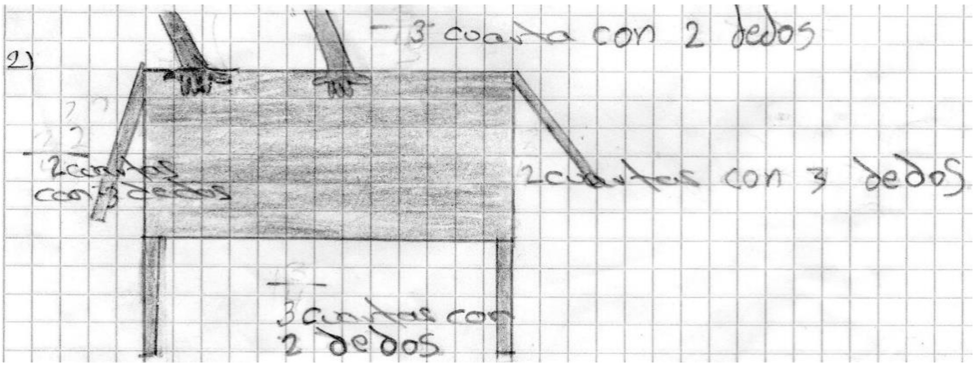


Ilustración 38. Representación gráfica del escritorio donde se describe la cantidad de longitud de cada uno de sus lados teniendo en cuenta el patrón de medida utilizado.

Una vez los estudiantes han realizado los tratamientos pertinentes para hallar la medida del contorno del escritorio, dan paso a la solución de la tercera tarea, donde deben hacer uso de un registro discursivo para expresar cuál es la medida asignada con relación al patrón de medida que utilizaron (*Ilustración 39*). Es importante resaltar que, un grupo no solo presentó su respuesta en el registro discursivo, sino que también puso en evidencia el registro numérico para referirse al perímetro. En dicho registro muestran la suma de la cantidad de cuartas que utilizan para medir cada uno de los lados, así como también, la cantidad de dedos necesarios para no dejar espacios sin cubrir en cada uno de ellos (ilustración 40).

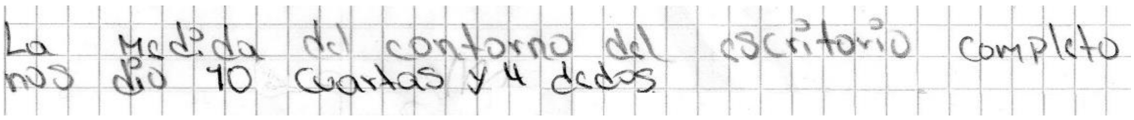


Ilustración 39.Medida del escritorio por un grupo de estudiantes.
Transcripción: *La medida del contorno del escritorio completo nos dio 10 cuartas y 4 dedos.*

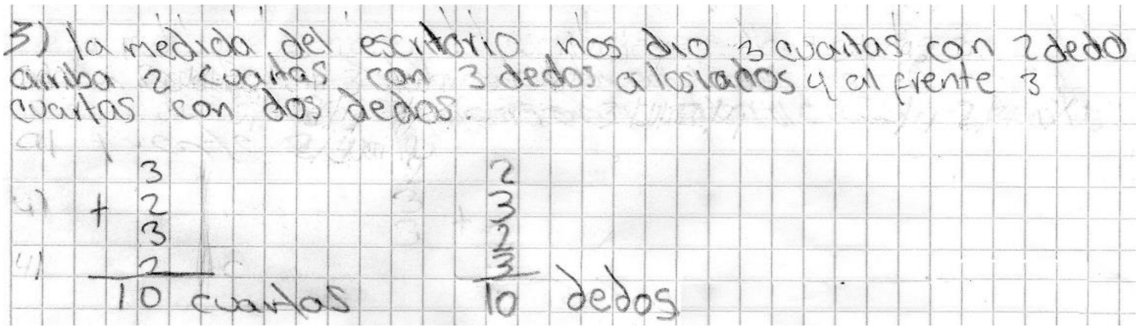


Ilustración 40. Medida del escritorio por un grupo de estudiantes, donde se utiliza un registro numérico para sustentar su respuesta.
Transcripción: la medida del contorno del escritorio nos dio 10 cuartas con 10 dedos.

En relación con la cuarta tarea (Anexo 3), los estudiantes deben realizar un proceso de comparación de los resultados obtenidos con un grupo de compañeros, en donde logran evidenciar, según lo expresado, que la medida de la cantidad de longitud del escritorio no es la misma en todos los casos, y que esto se debe a que no se utiliza el mismo patrón de medida.

Cabe recordar que este es uno de los propósitos principales de esta primera parte de la situación (ilustraciones 41 y 42).


41 A nosotros nos dio 10 cuartas con diez dedos y al compañeros les dio 10 cuartas con 22 dedos porque ellos tenia los dedos chiquitos.

Ilustración 41.Explicación sobre el porqué la medida del contorno del escritorio no es igual para todos los grupos.

Transcripción: *A nosotros nos dio 10 cuartas con diez dedos y al compañero les dio 10 cuartas con 22 dedos porque ellos tienen los dedos chiquitos.*

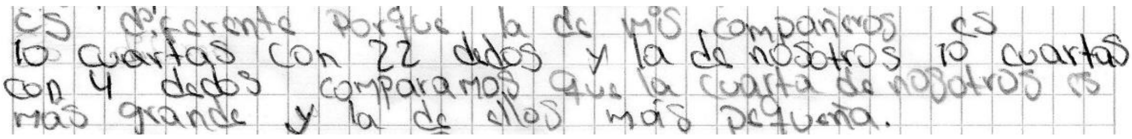

es diferente porque la de mis compañeros es 10 cuartas con 22 dedos y la de nosotros 10 cuartas con 4 dedos comparamos que la cuarta de nosotros es más grande y la de ellos más pequeña.

Ilustración 42.Explicación sobre el porqué la medida del contorno del escritorio no es igual para todos los grupos.
Transcripción: Es diferente porque la de mis compañeros es 10 cuartas con 22 dedos y la de nosotros 10 cuartas 4 dedos comparamos que la cuarta de nosotros es más grande y la de ellos más pequeña.

Ya en la segunda parte de la situación, después de los estudiantes haber realizado algunos tratamientos sobre el escritorio con el fin de encontrar la medida del mismo con instrumentos no estandarizados, realizan los mismos tratamientos pero esta vez con una unidad de medida estándar, es decir, los estudiantes utilizan reglas para encontrar la medida de dicho objeto (*Ilustración 43*) en el cual logran llegar a la conclusión de que todos obtienen la misma medida puesto que todos hicieron uso de la misma unidad para realizar la medición. En esta situación, una vez se puede observar que los grupos utilizan un registro numérico para efectuar la suma de las longitudes de los lados (*Ilustración 44*), además, un grupo realiza la representación del escritorio teniendo en cuenta las longitudes de cada uno de sus lados respecto a la unidad de medida estándar utilizada (*Ilustración 45*).

Ilustración 43.Uso de una medida estándar para hallar el perímetro del escritorio

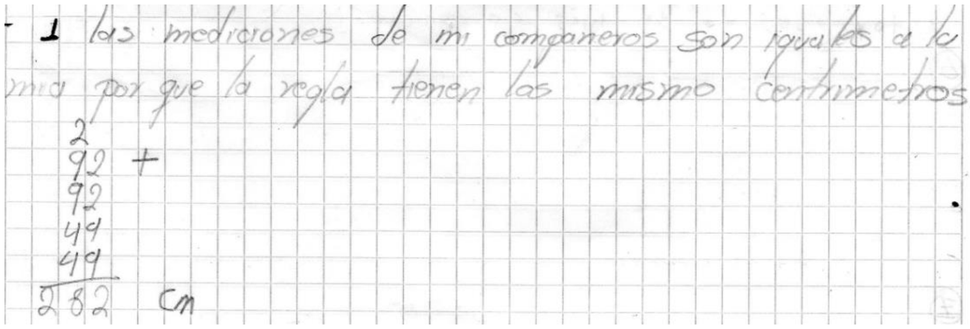


Ilustración 44.Explicación del porqué las medidas son iguales para todos los grupos haciendo uso de un registro numérico para sustentar sus respuestas

Transcripción: *Las mediciones de mis compañeros son iguales a las mías porque la regla tiene los mismos centímetros.*

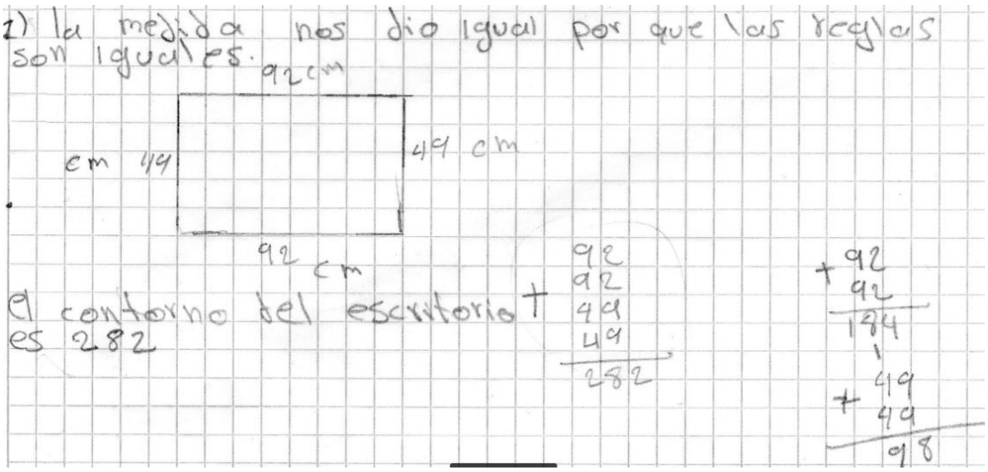


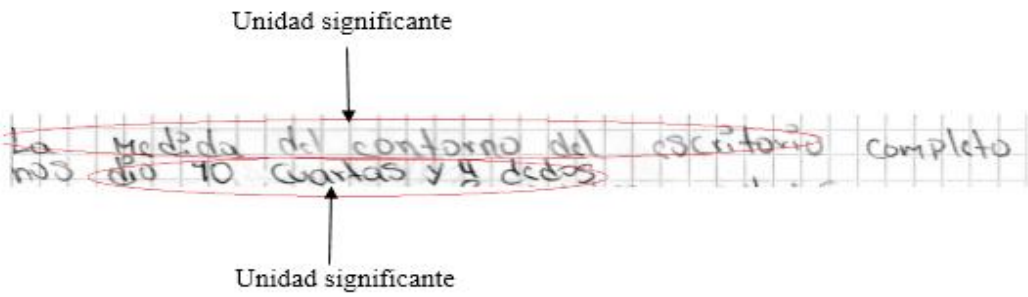
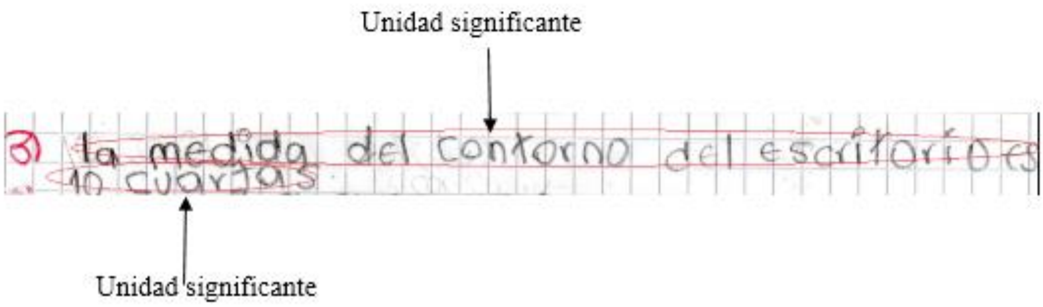
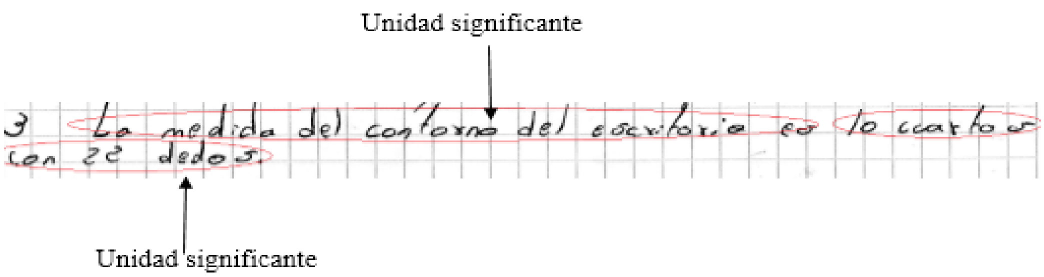
Ilustración 45.Explicación del porqué las medidas son iguales para todos los grupos. Haciendo uso de un registro gráfico y el registro numérico para sustentar sus respuestas.

Transcripción: *La medida nos dio igual porque las reglas son iguales.*

Análisis de Congruencia.

Luego de los estudiantes haber realizado los tratamientos necesarios para hallar la medida del escritorio, deben realizar un proceso discursivo en el cual exponen cuál es la medida del mismo. Para tal fin, los estudiantes deben tener en cuenta las unidades significantes que se encuentran presentes en el registro de partida: el escritorio y la medida del contorno del escritorio.

A continuación, se presenta el discurso expresado por los estudiantes en la solución de la tarea número tres, donde se les realiza la respectiva fragmentación de las unidades significantes para posteriormente presentar el análisis de congruencia entre los dos registros utilizados.

GRUPO 1	 *La medida del contorno del escritorio completo nos dio 10 cuartas y 4 dedos.*
Grupo 2	 *la medida del contorno del escritorio es 10 cuartas.*
Grupo 3	 *La medida del contorno del escritorio es de 10 con 22 dedos.*

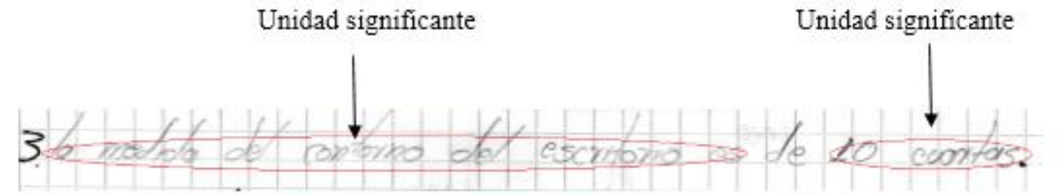
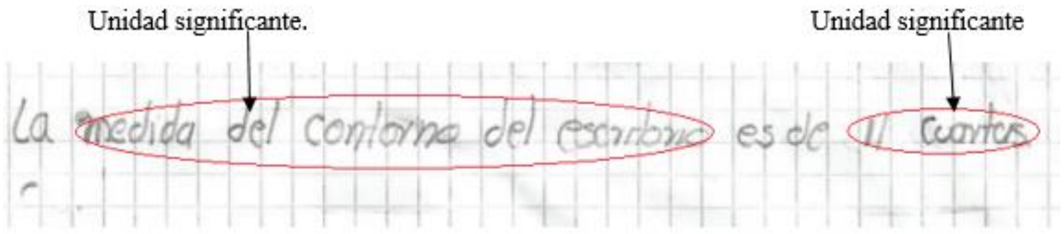
Grupo 4	 *La medida del contorno del escritorio es de 10 cuartas.*
Grupo 5	 *La medida del contorno del escritorio es de 11 cuartas.*

Tabla 8. Aprehensión discursiva de la tercera tarea de la situación 3.

Considerando lo presentado por cada uno de los grupos (ver tabla 8) se puede afirmar que logran poner en correspondencia las unidades significantes en ambos registros. Puede verse, además, que todos los grupos hacen referencia al escritorio y a su respectivo perímetro teniendo en cuenta la unidad de medida que utilizan para realizar la medición. En cuanto al segundo criterio, se puede evidenciar que todos los grupos no solo logran poner en correspondencia cada una de las unidades en ambos registros, sino que también, a cada unidad significante del registro de partida le corresponde una única unidad en el registro de llegada y por último, todos los grupos cumplen el criterio de igual orden de aprehensión de la unidades significantes en ambos registro. De esta forma, y considerando que todos los grupos cumplieron los tres criterios de congruencia expuestos por Duval (2004) se puede concluir que ambos registros son semióticamente congruentes.

4.1.4 Situación 4: Construyendo Figuras.

Análisis de Tratamientos.

En la Situación 4, en un primer momento, los estudiantes realizan un reconocimiento de cada una de las fichas que conforman el pentominó, buscando reconocer cuáles son las similitudes y las diferencias entre cada una de ellas, para posteriormente, realizar un proceso de reconfiguración con el propósito de construir las nuevas figuras que deben cumplir las condiciones establecidas para realizar de manera correcta cada una de las tareas propuestas en esta actividad (*Ilustración 46*).

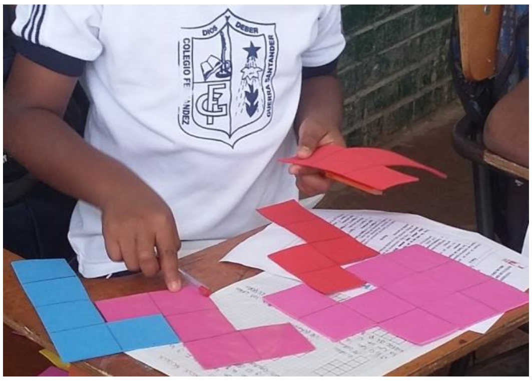


Ilustración 46.Reconocimiento de las piezas del pentominó.

Algunos grupos gracias a la aprehensión perceptiva y a los procesos de visualización lograron identificar rápidamente que la superficie de cada una de las piezas del pentominó estaba compuesta por cinco unidades cuadradas. Otros grupos, por el contrario, en este primer acercamiento con el material manipulativo recurrieron a tratamientos con instrumentos convencionales, es decir, hicieron uso de reglas para comprobar que todos los cuadrados que conforman las piezas del pentominó tengan la misma medida (*Ilustración 47*).

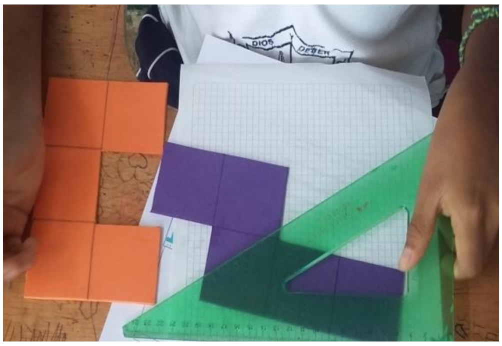


Ilustración 47.Un grupo de estudiantes comprobando que todas las unidades cuadradas tuvieran la misma medida.

En lo relacionado con el perímetro de las piezas, se pudo observar que para ninguno de los grupos fue una actividad evidente puesto que, tuvieron que realizar un proceso de conteo de las unidades de longitud que conforman cada una de las fichas para lograr establecer la medida de su contorno (*Ilustración 48*).

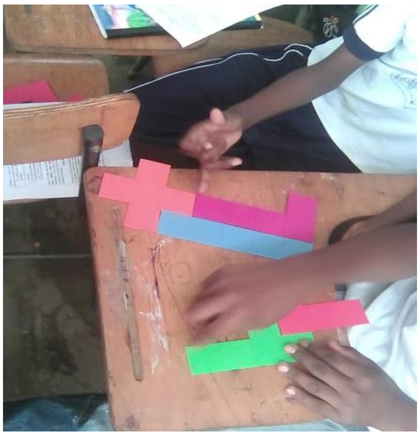
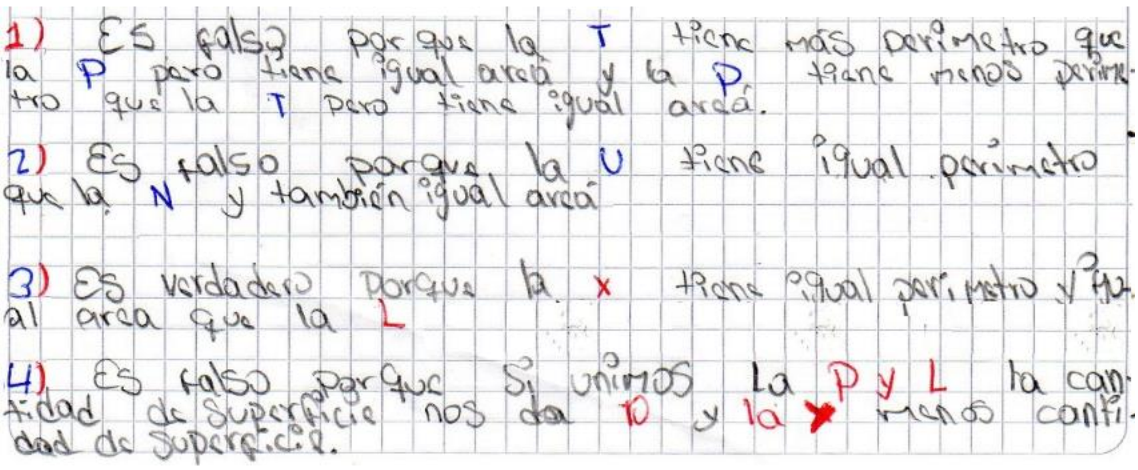


Ilustración 48.Conteo de las unidades de longitud para la identificación del perímetro de las figuras.

Los estudiantes después de realizar la etapa de reconocimiento del material manipulativo, dan paso a la solución de cada una de las tareas que se encuentran incluidas en la situación. Es importante aclarar que, esta situación se divide en dos partes (ver anexo 4), la primera consiste en un proceso de comparación del perímetro y del área de algunas de las piezas que conforman el pentominó, en la cual se lleva a cabo una actividad de argumentación sobre la relación existente entre ellas, y que les permite continuar con la identificación de la independencia entre estas dos magnitudes.

Conviene subrayar que los tratamientos que realizaron los estudiantes para argumentar sobre la veracidad o la falsedad de las afirmaciones que se les presentaron en la primera parte de la situación, consistieron en el conteo de las unidades cuadradas y de las unidades de longitud de cada una de las piezas consideradas en las tareas, para su posterior comparación. Es importante resaltar que ningún grupo de estudiantes presentó algún tipo de inconveniente en la realización de dichos tratamientos puesto que todos lograron justificar de manera adecuada sobre la veracidad o la falsedad (*Ilustración 49*).



1) Es falso por que la T tiene más perímetro que la P pero tiene igual área y la P tiene menos perímetro que la T pero tiene igual área.
2) Es falso porque la U tiene igual perímetro que la N y también igual área
3) Es verdadero porque la x tiene igual perímetro y igual area que la L
4) Es falso porque si unimos la P y L la cantidad de superficie nos da 10 y la X menos cantidad de superficie.

Ilustración 49. Justificación realizada por un grupo de estudiantes en la primera parte de la situación 4.

Transcripción: *1) Es falso porque la T tiene más perímetro que la P pero tiene igual área y la P tiene menos perímetro que la T pero tiene igual área. 2) Es falso porque la U tiene igual perímetro que la N y también igual área. 3) Es verdadero porque la X tiene igual perímetro e igual área que la L. 4) es falso porque si unimos la P y L la cantidad de superficie nos da 10 y la Y menos cantidad de superficie.*

En la segunda parte de la situación los estudiantes siguen trabajando la independencia entre el área y perímetro de algunas figuras planas, pero esta vez, ya deben construir nuevas figuras que cumplan una serie de condiciones utilizando como mínimo dos piezas del pentominó, donde deben recurrir a un proceso de reconfiguración y de visualización. En este punto al igual que en el anterior, los estudiantes tuvieron la oportunidad de establecer comparaciones entre las diferentes figuras a través del conteo de cada una de las unidades cuadradas que la conforman, así como el conteo de cada unidad de longitud que la delimita. También utilizaron procedimientos complementarios como replicar las figuras construidas sobre papel cuadriculado con el fin de tener una representación a lápiz y papel que les permitiera justificar cada una de sus respuestas.

A continuación, se presenta el análisis de los procedimientos que realizaron los estudiantes en cada tarea propuesta en la primera parte de la situación y un ejemplo de las representaciones realizadas después de las construcciones de las nuevas figuras. En cuanto a la primera tarea (ver anexo 4), los estudiantes no presentaron ningún inconveniente considerando que, al unir dos piezas cualesquiera del pentominó iban a cumplir la primera condición de tener igual área y, en la mayoría de los casos, era posible construir las figuras de tal forma que tuvieran perímetros diferentes (*Ilustraciones 50 y 51*).

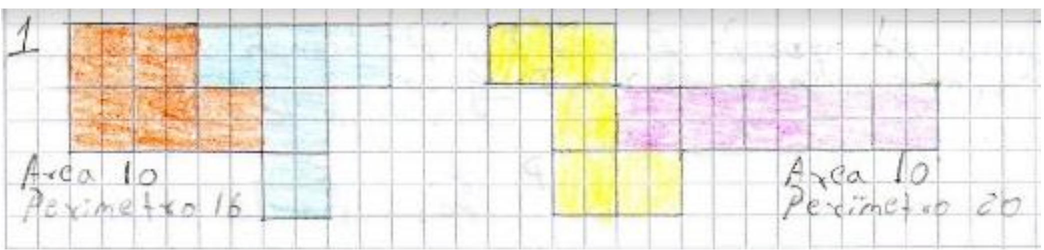


Ilustración 50.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó PT y ZI en figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro.

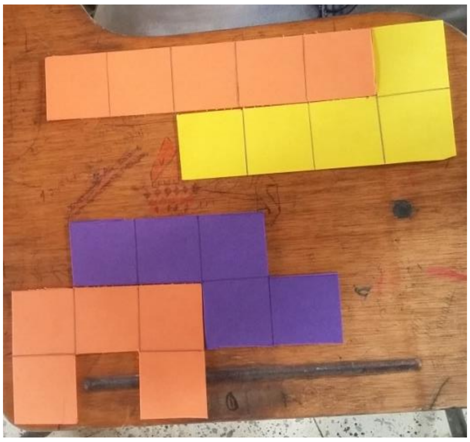


Ilustración 51.Reconfiguración de las piezas del pentominó LI y UN para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro.

Relacionado con la segunda tarea (ver anexo 4) los estudiantes formaron dos figuras al azar, donde cada una de ellas fue construida con dos piezas del pentominó. En este punto, los estudiantes tardaron mucho más tiempo para construir las figuras que cumplen la condición de tener igual área e igual perímetro, debido a que la segunda condición no era tan evidente como en la tarea anterior, pues en este caso, era necesario que explorarán con muchas más piezas y que realizaran diferentes transformaciones a las figuras.

Para lograr realizar las construcciones que cumplieran con dichas condiciones, los estudiantes utilizaron como estrategia construir la primera figura identificando cuál era su área y su perímetro, para posteriormente, iniciar un proceso de exploración con diferentes piezas del pentominó hasta lograr encontrar la figura que tuviera el mismo perímetro de la creada inicialmente. De esta forma, logran realizar algunas construcciones como la que se presentan a continuación (*Ilustraciones 52 y 53*)

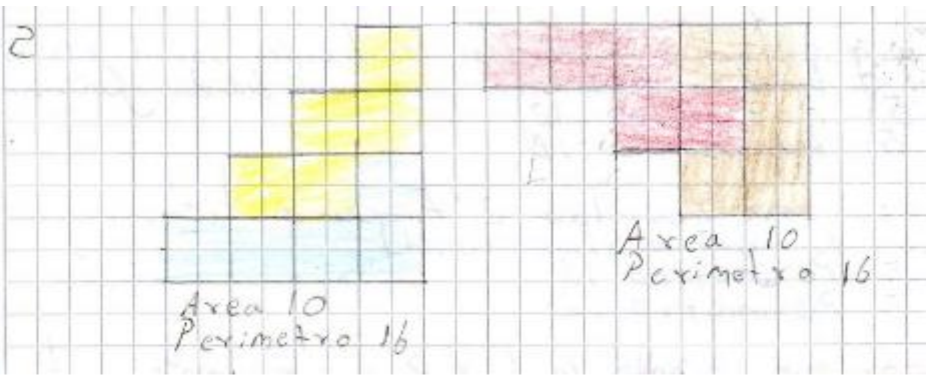


Ilustración 52.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó WL y NU en figuras que cumplen la condición de tener igual área e igual perímetro

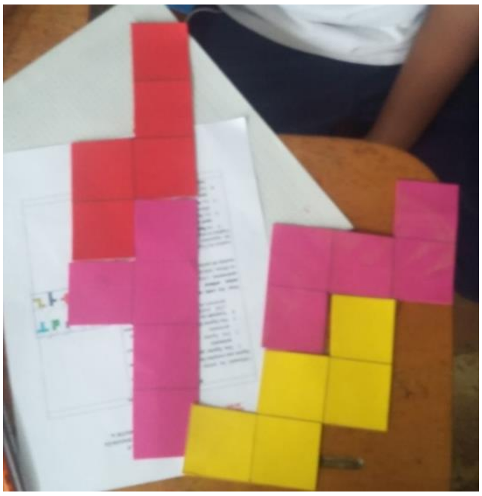


Ilustración 53.Reconfiguración de las piezas del pentominó LI y UN para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener igual área y diferente perímetro.

Sobre la tarea tres, los estudiantes intentan utilizar la misma cantidad de piezas del pentominó para formar las dos figuras que cumplan con la condición de tener diferente área e igual perímetro, pero después de algunos intentos, comprendieron que esto no era posible puesto que al emplear la misma cantidad de piezas las figuras iban a tener igual área, por lo tanto, optaron por utilizar cantidades de piezas diferentes para formar cada una de las figuras, cumpliendo de esta manera con la primera condición. Para cumplir con la segunda condición, los estudiantes utilizan la misma estrategia de la tarea anterior, donde fue necesaria la construcción y modificación de diferentes figuras, hasta lograr encontrar las que cumplieran con las condiciones establecidas (*Ilustraciones 54 y 55*)

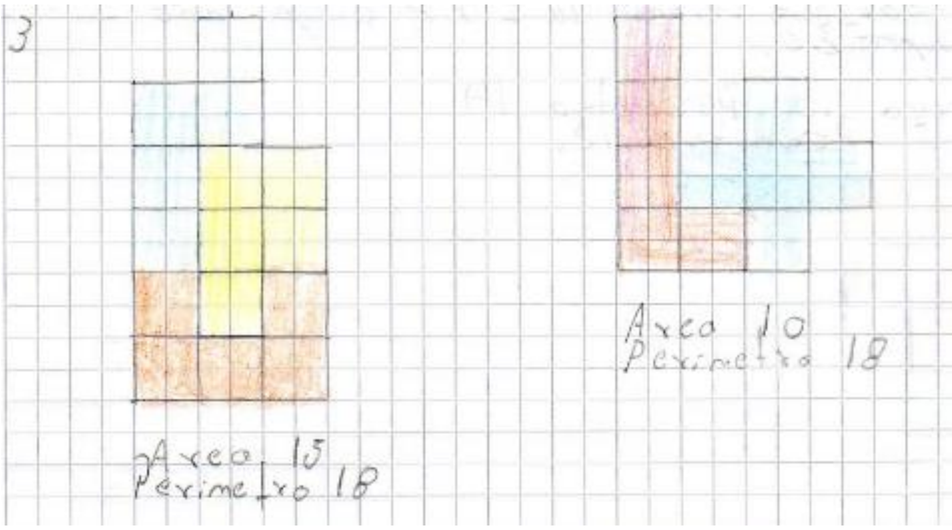


Ilustración 54.Replica en papel cuadriculado de la reconfiguración de las piezas del pentominó NUP y LX en figuras que cumplen la condición de tener igual área e igual perímetro.

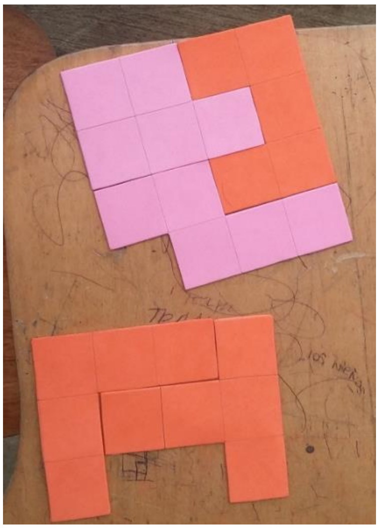


Ilustración 55. Reconfiguración de las piezas del pentominó PUN y VT para la construcción de las dos figuras que cumplen la condición de tener diferente área y área perímetro.

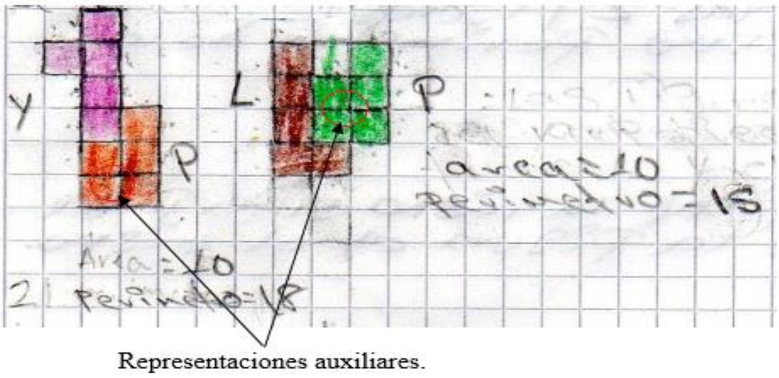
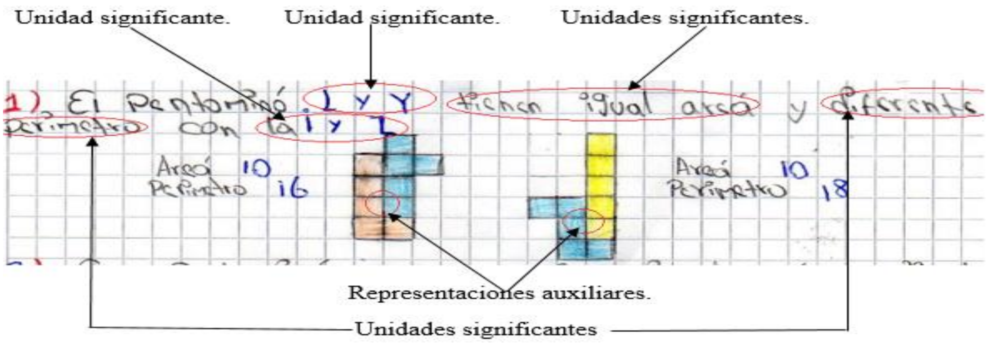
Análisis de Congruencia.

Continuando con el análisis, el siguiente aspecto está relacionado con las actividades cognitivas de conversión que realizaron los estudiantes en cada una de las tareas que se encuentran incluidas en la segunda parte de la situación 4 (ver anexo 4). En la primera parte no se realiza un análisis de congruencia porque el propósito de las tareas es que los estudiantes identifiquen ciertas características que tienen las fichas del material manipulativo.

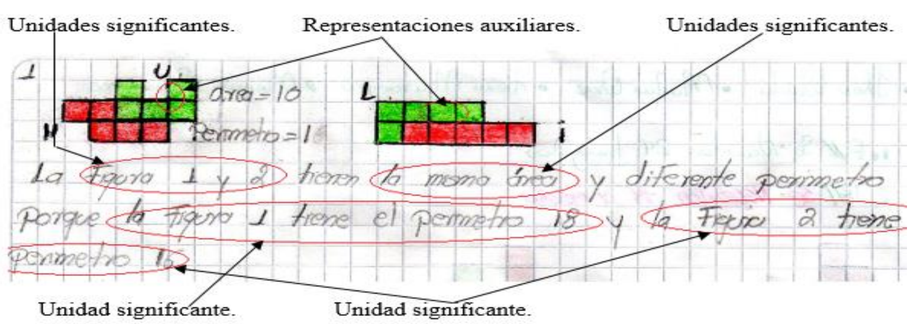
Ya durante el desarrollo de las tareas de las partes B de esta situación, se hace uso de dos registros de representación uno para el tratamiento de las figuras y otro para expresar el discurso de los estudiantes, razón por la cual el análisis de congruencia se realiza entre el registro figural como registro de partida y el registro de llegada será el registro discursivo. Es importante destacar que cuando los estudiantes emplean el registro discursivo para expresar sus razonamientos también hicieron uso de lo que Duval (2001) denomina representaciones auxiliares, las cuales se utilizan con el propósito de facilitar la interpretación de las respuestas (tabla 10).

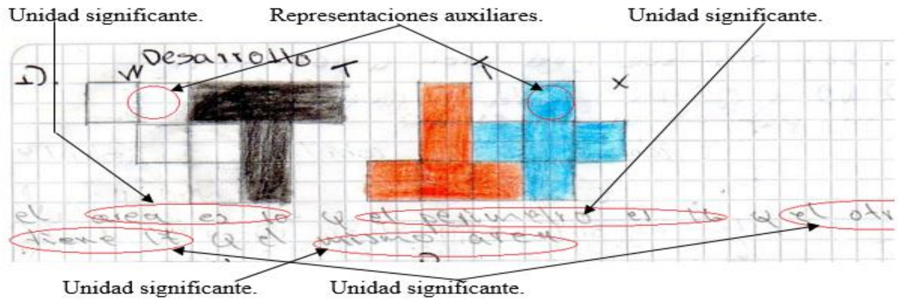
Una vez identificado los registros de representación se procede a hacer la segmentación de cada una de las unidades significantes en las tres primeras tareas que conforman la parte B de la actividad. De esta manera en la tarea 1 (ver anexo 4) se encuentran las siguientes unidades significantes: las dos figuras formadas por las fichas del pentominó, área y perímetro de cada figura formada con las fichas del pentaminó, en algunos grupos dichas unidades no aparecen de manera explícita sino que se infieren a partir de los términos que manejan los estudiantes en sus respuestas, por ejemplo en los grupos 2, 3 y 5 (ver tabla 9) se asume que se están refiriendo al área de cada una de las figuras cuando utilizan la expresión *tienen igual área o misma área* igual sucede con el perímetro de cada una de las figuras, solo que en este caso se refieren a que las figuras tienen diferente perímetro.

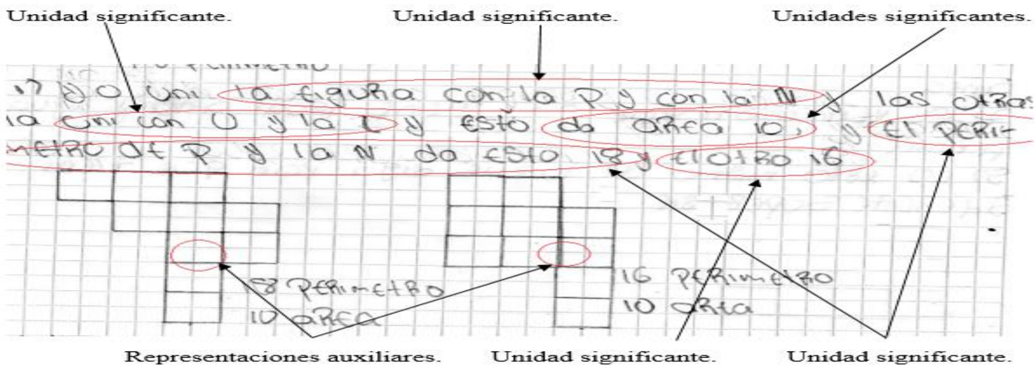
Lo dicho anteriormente se puede visualizar y entender mejor gracias a las representaciones auxiliares utilizadas por los estudiantes donde claramente se logra identificar el área y perímetro de cada figura.

<table>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>

El pentominó L y Y tienen igual área y diferente perímetro con la I y Z.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Grupo 3</td>
<td>


La figura 1 y 2 tienen la misma área y diferente perímetro porque la figura 1 tiene perímetro 18 y la figura 2 tiene perímetro 16.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 4</td>
<td>


El área es 10 y el perímetro es 16 y el otro tiene 17 y la misma área.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 5</td>
<td>


Yo uní la figura con la P y la N y la otra la uní con la U y la L esto da área 10 y el perímetro de P y N da 18 y el otro 16
</td>
</tr>
</table>

Tabla 9. Aprehensión discursiva tarea dos, situación 4.

De acuerdo a las respuestas presentadas por los cinco grupos de estudiantes se puede decir que solo los grupos 2, 3 y 5 lograron cumplir con el primer criterio de congruencia, el grupo 4 no cumplió con este criterio dado que existe una ausencia de las unidades significantes que identifican las figuras formadas con cada una de las fichas del pentominó en el registro discursivo y el grupo 1 ni siquiera utiliza un lenguaje escrito para explicar sus razonamientos tan solo se queda en el uso de las representaciones figurales.

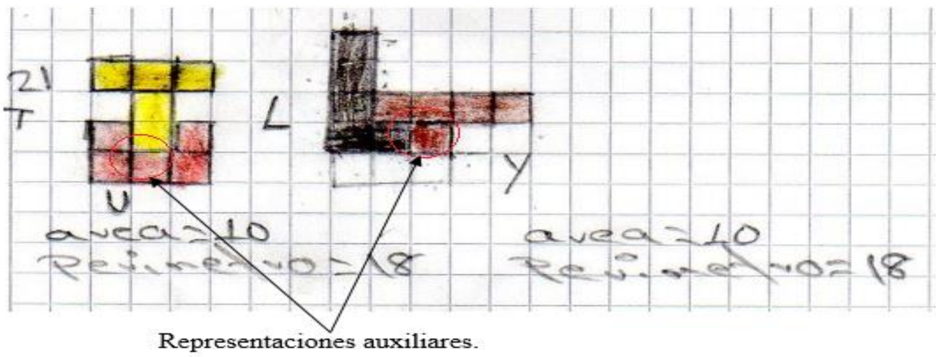
En lo que tienen que ver con el segundo criterio de congruencia se puede decir que los grupos 2, 3 y 5 consiguen asociar cada unidad del registro de partida con una única unidad en el registro de llegada, cosa que no se puede decir de los grupos 1 y 4 dado que hay unidades significantes en el registro de partida que no tienen una representación en el registro de llegada.

En cuanto al tercer criterio de congruencia, se puede decir que los grupos 2, 3, 4 y 5 cumplieron con este criterio. Es de destacar que el grupo 4 a pesar de no haber cumplido con los otros dos criterios si cumple con este porque existe un orden de aprehensión entre las unidades que identifica en cada registro, sin embargo, no es suficiente para que exista una congruencia entre las representaciones.

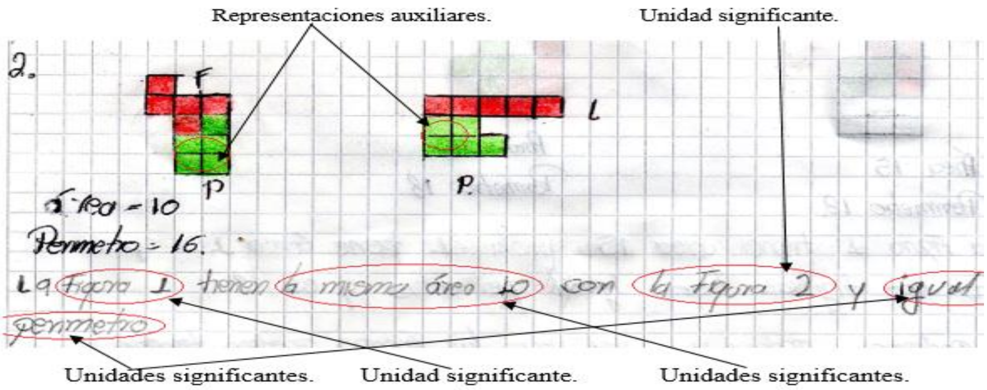
De este modo se puede decir entonces que solo los grupos 2, 3 y 5 cumplen con los tres criterios de congruencia por lo tanto los dos registros de representación utilizados por los grupos son semióticamente congruentes.

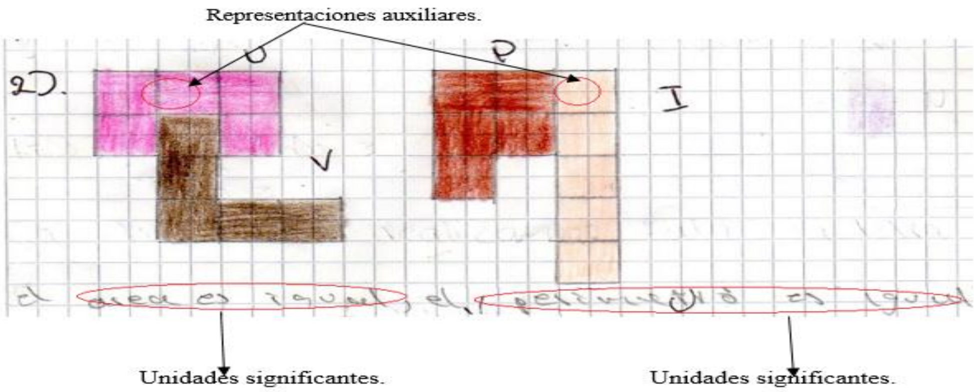
En esta tarea 2 las unidades significantes que deben de identificar los estudiantes en los dos registros de representación son: las dos figuras formadas con las fichas del pentominó, y el área y perímetro de cada una de las figuras.

A continuación, se presenta la segmentación de cada una de las unidades significantes de los registros utilizados por los estudiantes, esto con el propósito de analizar la coordinación entre estos.

Grupo 1	

<table>
<tr>
<td>Grupo 2</td>
<td>


El pentominó W y U tienen igual área e igual perímetro con la T y la F.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 3</td>
<td>


La figura 1 tiene la misma área 10 con la figura 2 e igual perímetro.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 4</td>
<td>


El área es igual, el perímetro es igual.
</td>
</tr>
</table>

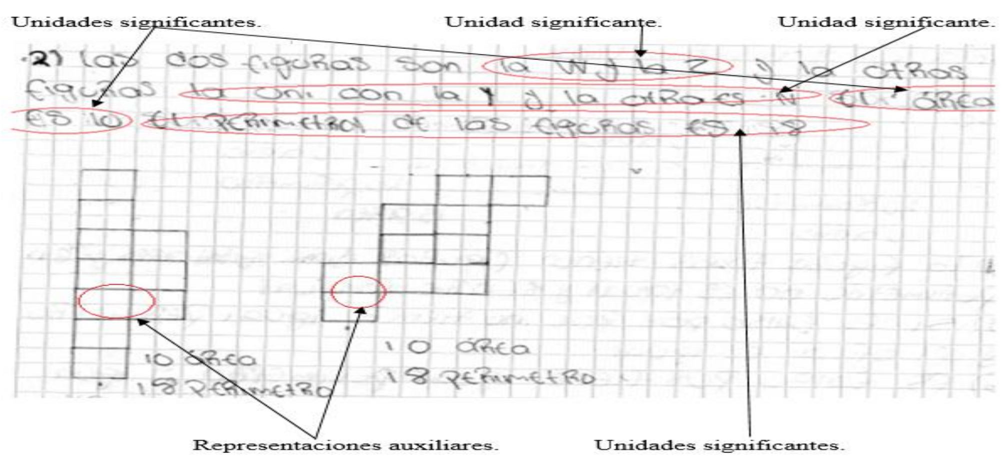
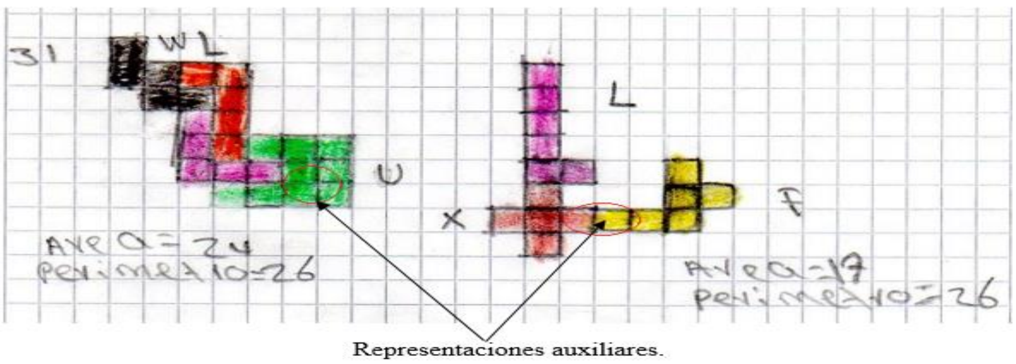
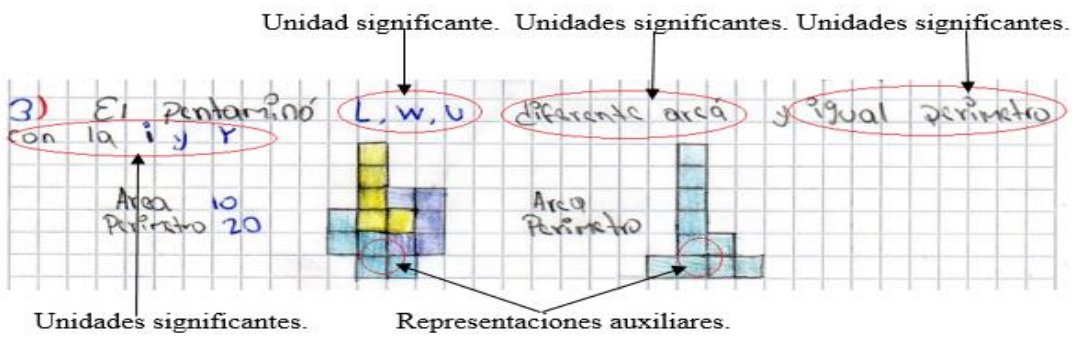
Grupo 5	 *Las dos figuras son la W y la Z y las otras figuras la uní con la Y y la N, el área es 10 y el perímetro de las figuras es 18.*

Tabla 10. Aprehensión discursiva tarea dos, situación 4.

En lo que tiene que ver con la tarea tres, los estudiantes deben de encontrar seis unidades significantes las cuales son: las dos figuras formadas con las fichas del pentominó, área y perímetro de cada una de las figuras. La segmentación que se realizó para establecer si existe una coordinación entre los registros usados por los estudiantes se presenta en la siguiente tabla.

Grupo 1	
Grupo 2	 *El perímetro L,W,U tienen diferente área e igual perímetro con la I y Y.*

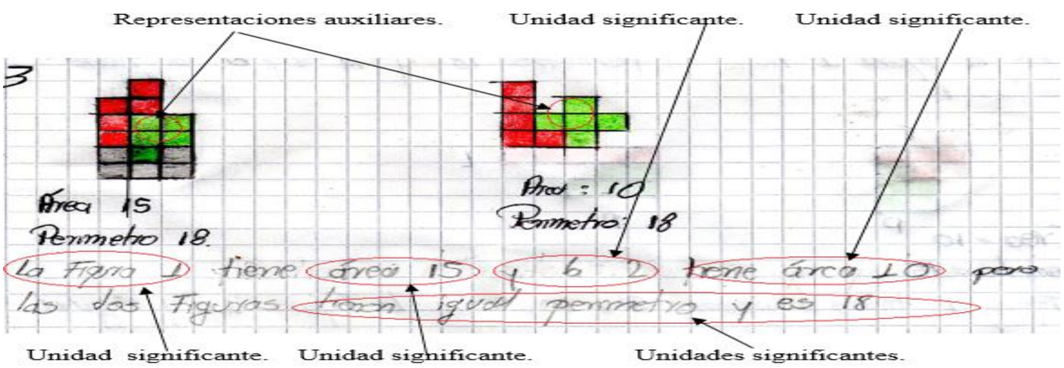
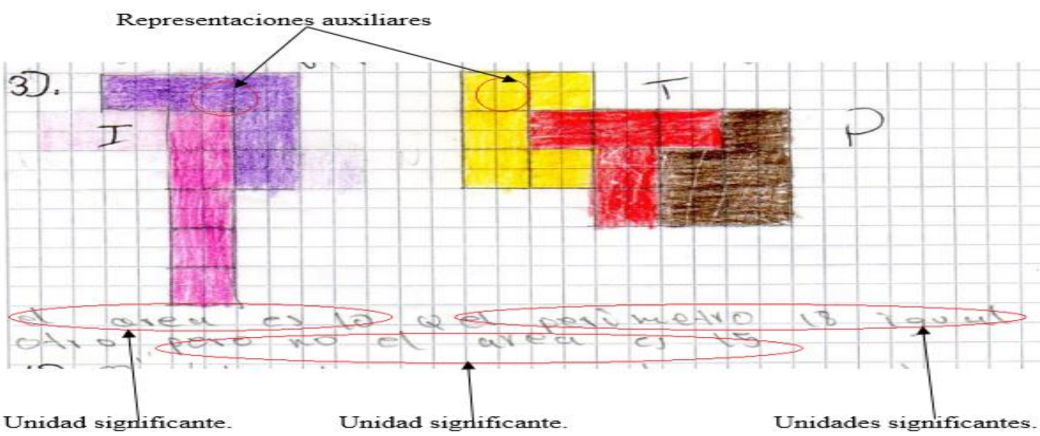
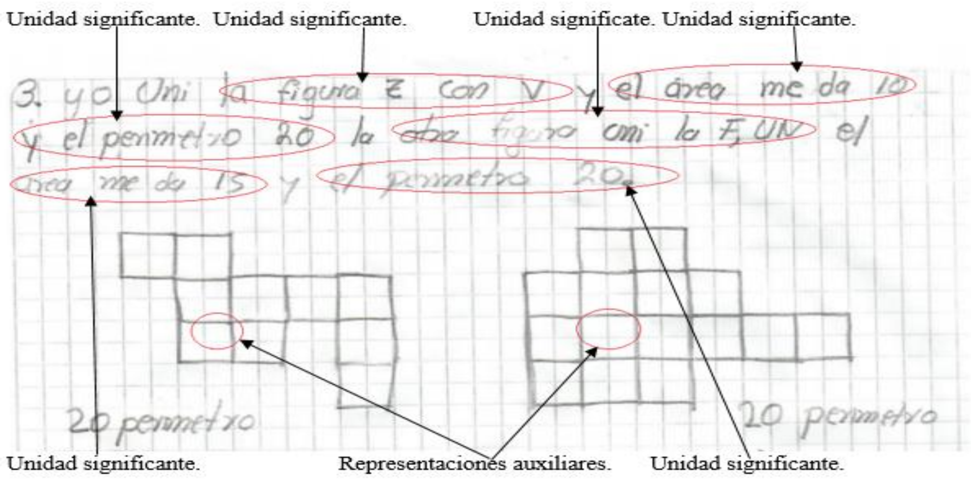
Grupo 3	 *La figura 1 tienen área 15 y la 2 tiene área 10 pero las dos figuras tienen igual perímetro y es 18.*
Grupo 4	 *El área es 10 y el perímetro 18 igual en la otro pero no el área es 15.*
Grupo 5	 *Yo uní la figura z con la v y el área me da 10 y el perímetro 20, la otra figura uní la F, U, N el área me da 15 y el perímetro 20.*

Tabla 11. Aprehensión discursiva tarea tres, situación 4.

En esta apartado se decide llevar a cabo un análisis en simultáneo tanto de la tarea dos como de la tarea tres, dado que los grupos de estudiantes son muy reiterativos con los procedimientos efectuados para llegar a la solución de las tareas, así como, en la forma en la que emplean los dos registros de representación, donde el grupo uno se caracteriza por no usar un registro discursivo, aunque si hace uso de las representaciones auxiliares para ilustrar la forma de las figuras. También el grupo cuatro se caracteriza por no identificar todas las unidades significantes en el registro de llegada, las cuales son las dos figuras formadas con las fichas del pentominó, el resto de grupos logra hacer un uso de los dos sistemas de representación y utilizar todas las unidades significantes.

Esta ausencia de unidades significantes en el registro de llegada hace que no se cumpla el primer criterio de congruencia, puesto que hay unidades del registro partida que no se logran poner en correspondencia en dicho registro, algo similar sucede con el grupo uno quien no hace uso de un registro discursivo para expresar sus razonamientos y conclusiones, por lo tanto, no es posible establecer una correspondencia entre los dos registros. Estos dos grupos tampoco cumplen el segundo criterio de congruencia puesto que hay unidades del registro de partida que no logran asociarlas con una única unidad en el registro de llegada.

En lo que tiene que ver con el tercer criterio de congruencia se puede decir que cuatro de los cinco grupos lograron establecer un igual orden de aprehensión entre las unidades significantes de los diferentes registros, el grupo que no logra cumplir con este criterio es porque no usa los dos registros de representación.

4.2 Consideraciones Finales.

4.2.1 Conclusiones.

En este apartado se presentan algunas conclusiones relacionadas con el trabajo realizado, el cual ha estado centrado en aportar elementos que ayuden a los estudiantes de grado 5 de una institución pública, a mitigar las dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje del área y perímetro de figuras planas, teniendo en cuenta la teoría semiótico cognitiva propuesta por Raymond Duval (2004).

El análisis permite evidenciar que existe un avance significativo en la comprensión de la independencia del área y perímetro de figuras planas, donde el estudio tanto cualitativo como cuantitativo de estos objetos matemáticos propició en los estudiantes un uso de los tratamientos geométricos: aprehensión perceptiva y aprehensión operatoria y en el cambio de registro relacionado con el paso del lenguaje figural al discursivo. Es preciso mencionar que al momento de implementar el diseño de situaciones los estudiantes no presentan mayores inconvenientes con las aprehensiones preceptiva y operatoria y se contempló un gran progreso en el uso de la aprehensión discursiva.

En este proceso se pudo observar que los estudiantes se familiarizan rápidamente con los procedimientos geométricos basados tanto en la comparación directa como indirecta de las superficies y las longitudes, donde logran utilizar procedimientos centrados en la descomposición, sobreposición y reconfiguración de las figuras de manera correcta, aunque cabe reconocer, que al iniciar con la solución de las actividades intentan resolverlas por medio de números suponiendo que es el proceso que el docente espera de ellos, pues se ha insistido tanto sobre la medida indirecta de estos objetos matemáticos a través de las fórmulas, que se piensa que su medida directa no es posible (D´Amore & Fandiño. 2009. p 121).

También se logró identificar que los estudiantes no mayores presentan mayores dificultades en la asignación de la medida de una superficie y la medida de una longitud utilizando unidades de medida diferentes. Puesto que consiguieron reconocer que a cualquiera de estas dos magnitudes se les puede asignar números distintos según la unidad de medida empleada en el proceso de medición, logrando el reconocimiento de estas dos magnitudes como magnitudes autónomas.

En lo relacionado con la independencia de estos dos objetos matemáticos, la situación planteada junto con el material seleccionado fueron fundamentales, puesto que los estudiantes tuvieron la oportunidad de transformar y construir figuras teniendo en cuenta una serie de condiciones que les ayuda a potenciar el aprendizaje sobre la independencia del área y perímetro de figuras planas, dado que los procedimientos geométricos estudiados les permite visualizar más a fondo este tipo de relaciones o características

Ahora bien, en este proceso de razonamiento matemático sobre los objetos de interés, se buscó promover un proceso de conversión entre el registro figural y el discursivo. Es importante reconocer que para algunos grupos esto no fue un trabajo sencillo y a pesar de utilizar los dos registros de representación algunos no lograron ponerlos en correspondencia, es decir, se logra constatar lo expuesto por Duval (2001) cuando afirma que “el pasaje de un registro plurifuncional discursivo (la lengua natural) a un registro plurifuncional no discursivo (las figuras geométricas) o viceversa, no constituye un pasaje simple o evidente como con mucha frecuencia se cree" (p. 53). Durante este proceso se pudo evidenciar que la dificultad que más se presentó en los estudiantes fue el no lograr identificar ni poner en correspondencia todas las unidades significantes en ambos registros.

Sin embargo, haber trabajado estos dos registros de representación ayudo a que los estudiantes empiecen a identificar algunas características del área y el perímetro, por ejemplo, que el área corresponde a la medida de la superficie y el perímetro a la medida del contorno donde existe una independencia entre estas dos magnitudes. Esto se pudo notar en las respuestas y explicaciones que realizan los estudiantes sobre los procesos que llevaron a cabo.

De este modo, se puede culminar diciendo que en el proceso de aprendizaje es fundamental que los objetos matemáticos área y perímetro de figura planas no se limiten única y exclusivamente a la aplicación de fórmulas o de tratamientos únicamente numéricos, puesto que este tipo de actividades en la mayoría de los casos no significan nada para los estudiantes, y además, no permite reconocer ni explorar características fundamentales como la unidimensionalidad o bidimensionalidad del perímetro y el área respectivamente, ni tampoco, reconocer la independencia que existe entre ellos y que ha sido una actividad tan problemática en la enseñanza de las matemáticas.

Por tal motivo se resalta el aporte que posee la teoría semiótico cognitiva tomada para la presente investigación, puesto que favorece tratamientos cualitativos de estos objetos matemáticos, dando prioridad a la visualización, la exploración y la comunicación de características que desde el campo meramente numérico serían prácticamente imposibles de observar.

4.2.2 Recomendaciones.

1. Es importante que los docentes incluyan en el proceso de aprendizaje de la geometría los procesos de modificaciones tanto ópticas como posicionales de una figura, considerando que éstas son las que constituyen la riqueza heurística de las figuras geométricas, permitiendo a los estudiantes procesos de visualización, comparación, agrupamiento y descomposición. Además, este tipo de actividades aportan elementos

en el proceso de comunicación y argumentación de procesos o configuraciones, aspecto considerado fundamental en la construcción de conocimiento matemático.

2. Que los docentes logren ver en los registros de representación semiótica y en las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, una herramienta imprescindible y valiosa en el proceso de construcción de conocimiento matemático, donde es necesario que reflexionen en lo relacionado con estos procesos, puesto que se debe reconocer que es un campo poco explorado y es posible que muchas de las dificultades que actualmente se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, se relacionen con el desconocimiento que tienen en dicho tema.

3. Es importante promover el aprendizaje del área y perímetro de figuras planas en un primer momento desde un enfoque cualitativo, puesto que, como se pudo observar, les brinda herramientas importantes a los estudiantes para que exista un aprendizaje significativo de dichos conceptos. Además, los estudiantes tienen la concepción de que deben, necesariamente, expresar todo por medio de fórmulas matemáticas sin recurrir a otros aspectos fundamentales como la actividad discursiva, la cual permite justificar la manera en la que está comprendiendo los procesos matemáticos que realizan.

4. Dar prioridad en el proceso de aprendizaje del área y perímetro de figuras planas a la independencia entre estos objetos matemáticos, considerando que ayuda a los estudiantes a no caer en errores ni confusiones al respecto. En este punto, es importante presentar de manera explícita las relaciones existentes entre estos dos objetos matemáticos, proponiendo a los estudiantes transformaciones figurales donde se conserve o se modifique el área y el perímetro permitiéndoles reconocer sus relaciones y diferencias.

5. Aunque con el diseño de situaciones se logró que los estudiantes empezaran a construir algunas características de las magnitudes involucradas donde el registro figural y el registro discursivo fueron de gran ayuda, aún queda pendiente el desarrollo de tareas en las cuales se incluyan otra clase de registros como el numérico y el algebraico, puesto que es importante que los estudiantes también reconozcan las características que tienen dichos objetos en estos registros.

Bibliografía.

Aldana, E., & López, J. (2016). *Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área*. Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7(1), 77-92

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. Tesis para obtener el título de doctora. Universidad de Valencia. Valencia España.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. España: Pearson Educación.

Carrillo, J., de Patagones, C., & García, G. (2006). *Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones*. Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 185-194. Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Chamorro, M. (1995). *Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria*. Uno revista de didáctica de las matemáticas. P. 31-53

Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Trad. M. Vega Restrepo. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de educación matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Trad. M. Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.

Duval, R (2015). *Cuestionamiento sobre la elección y utilización de teorías en mathematics Education.* En B. D` Amore & M, Fandiño. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas una mirada internacional, empírica y teórica* (p. 159-183). Bogotá, Colombia: universidad de la sabana.

D´Amore, B., Fandiño, M. (2007). *Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y estudiantes*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, *10* (1), pp. 44-45.

D´Amore, B., Fandiño, M. (2009). *Área y perímetro: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial magisterio.

D` Amore, B. Fandiño, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de las matemáticas*. Bogotá: Editorial magisterio.

D` Amore, B. Fandiño, M. (2015). *Didáctica de las matemáticas una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231-248). Bogotá, Colombia: universidad de la sabana.

Galeano, J. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gamboa, R. Ballesteros, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista electrónica Educare. XIV (2), pp. 125-142.

Garcia, S. López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría. Instituto Nacional para la evaluación de la educación.* México, D.F. Recuperado http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Gagatsis, A. (2015).Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. En B. D` Amore & M, Fandiño. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas una mirada internacional, empírica y teórica*(pp. 231-249). Bogotá, Colombia: universidad de la sabana.

Godino, J., Batanero, M., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Grupo, L.A.C.E. (1999). Introducción al estudio de caso en educación. *Cádiz: Universidad de Cádiz. Recuperado de: http://www2.uca.es/lace/documentos/EC.pdf*.

Luelmo, M. J. (2001). *Medir en secundaria: algo más que fórmulas.* X JAEM Ponencia P83, 727-737. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_462/a_6243/6243.pdf

Marmolejo, G. (2003). *Construcción del área desde una perspectiva semiótica: factores de visibilidad y procesos de visualización* (Tesis de maestría). Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Marmolejo, G., Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad en su aprendizaje. *Educación matemática, 24(3),pp.7-32.*

Marmolejo, G., Gonzales, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *REIEC.10 (10), pp. 45-57.*

Marmolejo, G. (2016). *Situaciones problemáticas para la enseñanza del área de regiones poligonales en los primeros ciclos de la educación básica. Introducción a la magnitud área y su medida. En G,* Marmolejo. H. Blanco. E, Fernández. (Ed.), *Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria.* (pp. 27-64). San Juan de Pasto: Fundación Save the children Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de educación Nacional. (2017). *Resultados pruebas saber 3, 5° y 9. Recuperado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx*

Puig, P. (1961). Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos. España: Nuevas gráficas.

Rey, J., Puig, P. (1963). *Elementos de geometría racional. Tomo I. Geometría plana.* Madrid, España: Nuevas gráficas.

Seduca. (2006). *Pensamiento métrico y sistemas de medidas*. Módulo 3. Medellín: Universidad de Antioquía.

Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vecino, F. (2004). *La consideración de distintas representaciones geométricas y su influencia en la proposición de una didáctica coherente en la geometría.* En Chamorro, M. del C. (Ed.). Numero formas y volúmenes en el entorno del niño. Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Información y Publicaciones. España.

Anexos.

Anexo 1.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTÍTUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMATICA.
ACTIVIDAD 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Celebrando El Día De La Familia.</th></tr>
<tr><td>
Sofía debe realizar para su clase de artística dos tarjetas (como se muestran en la figura 1) para la celebración del día de la familia.
Ella necesita comprar la cantidad de papel suficiente para realizar cada una de las figuras, además, debe decorarles el contorno con cinta dorada. Ayúdale a Sofía a resolver las siguientes preguntas para poder realizar las tarjetas.

¿En cuál de las dos figuras utilizará más papel?
¿En cuál de las dos figuras utilizará más cinta dorada?
¿Qué puedes concluir de los resultados anteriores?
Explica los procesos que realizaste para averiguar cuál de las dos figuras requiere más papel y cuál de las dos figuras requiere más cinta dorada.

</td><td>


Figura 1
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tomado y adaptado de Garcia&Zuñiga (2014)</td></tr>
</table>

Anexo 2.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTÍTUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMATICA.
ACTIVIDAD 2.

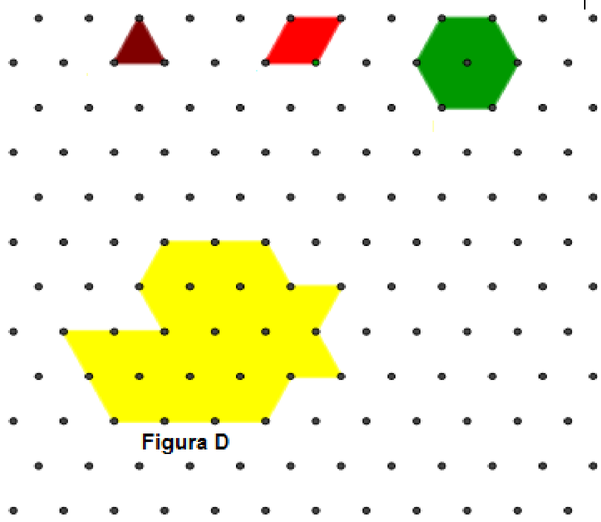
<table>
<tr><td colspan="2">Recubriendo La Figura.</td></tr>
<tr><td>
Tareas a desarrollar:

Sofía quiere saber cuántos triángulos, cuadriláteros y hexágonos debe utilizar para recubrir por completo la superficie de la Figura D. Ayúdale a realizar los cálculos y a responder las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos triángulos se necesitan para cubrir la superficie de la Figura D?

2. ¿Cuántos cuadriláteros se necesitan para cubrir la superficie de la Figura D?

3. ¿Cuántos hexágonos se necesitan para cubrir la superficie de la Figura D?

4. ¿Qué puedes concluir después de realizar las tareas anteriores?
</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tomado y adaptado de Corberan (1996)</td></tr>
</table>

Anexo 3.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMATICA.
ACTIVIDAD 3.

Midiendo Mí Entorno.

Parte A

Sofía quiere saber cuál es la medida del contorno del escritorio de su salón de clase, pero no cuenta con un metro o regla para realizar la medición. Sorpréndela encontrando la medida del contorno escritorio y responde las siguientes preguntas.

1. Explica el proceso que realizaste para encontrar la medida.
2. Representa a través de un dibujo las dimensiones que tiene el contorno del escritorio de acuerdo a la unidad de medida que utilizaste.
3. ¿Cuál es la medida del contorno del escritorio
4. Compara el resultado con el de tus compañeros y analiza si son iguales o cambian ¿Por qué crees que sucede esto?

Parte B

Toma de nuevo la medida del contorno del escritorio, pero esta vez utilizando el metro o la regla como unidad de medida. Luego compara el resultado con el de tus compañeros.

5. ¿El resultado de tus compañeros y el tuyo son iguales o cambian? ¿Por qué crees que sucede esto?

Tomado y adaptado del laboratorio de matemáticas.

Anexo 4.

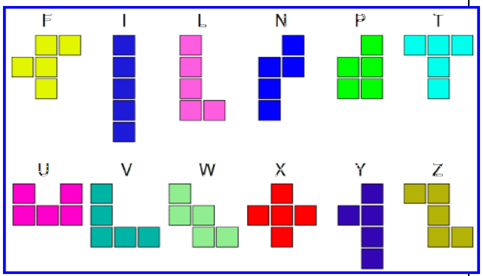
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTÍTUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMATICA.
ACTIVIDAD 4.

Construyendo Figuras.

Parte A:

Analiza las Figuras del pentominó y responde cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explica tu respuesta de forma clara.

1. La **figura T** y la **figura P** tienen diferente área e igual perímetro.
2. La **figura U** y la **figura N** tienen igual área y diferente perímetro.
3. La **figura X** y la **figura L** tienen igual área e igual perímetro.
4. La **figura Y** ocupa la misma cantidad de superficie que la unión de las **figuras L y P.**



Parte B:

Utilizando las piezas del pentominó construye las figuras que cumplan las siguientes condiciones.

5. Dos figuras que tengan igual área y diferente perímetro.
6. Dos figuras que tengan igual área e igual perímetro.
7. Dos figuras de diferente área e igual perímetro
8. Teniendo en cuenta las construcciones anteriores ¿Qué puedes concluir acerca del área y perímetro de las figuras?

Nota: **En cada una de las figuras que construyas debes utilizar como mínimo DOS fichas del pentominó.**

Tomado y adaptado de MEN (2016)