

**PRESENTACIÓN EN EL AULA DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES
CON EL SOFTWARE CABRI GEOMETRE II**

**MADRID CUELLO EDGAR MIGUEL
PÉREZ SOTOMAYOR PAOLA SOFIA**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2002**

**PRESENTACIÓN EN EL AULA DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES
CON EL SOFTWARE CABRI GEOMETRE II**

**MADRID CUELLO EDGAR MIGUEL
PÉREZ SOTOMAYOR PAOLA SOFIA**

Trabajo final para optar el título de Licenciatura en Matemáticas

**Director
MARCOS VINICIO BETIN SEVERICHE
Licenciado y especialista en Educación Matemática**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO**

2002

Nota de aprobación

Director del trabajo

Jurado

Jurado

A DIOS, por todo lo que nos ha brindado.

*A JORGE Y CARMEN, MARCO NEL Y ORLANDA, MARCOS Y JUDITH,
EDUARDO Y BERTILDA, mi familia.*

*A mis hermanos, JESUS, LADIS Y MARIA y a toda la familia Madrid y a la familia
Cuello.*

A ella que sabe que la quiero.

Al queridísimo y recordado CUBA, por haberme suplantado varias veces.

Edgar (o Edgardo)

A DIOS, porque sin él nada se hubiese dado.

A mis padres RITA Y ORLANDO, quienes con sus esfuerzos y dedicación me dieron el aliento para seguir adelante

A todos que compartieron conmigo de una u otra forma la tarea de alcanzar esta meta.

Paola

AGRADECIMIENTOS

Estamos muy agradecidos con todas aquellas personas que contribuyeron a este trabajo y nos prestaron todo su apoyo, entre ellos: José David Gómez, Francia Espitia, Lidis Serrano, Karen Angarita, Mario Ojeda, Paola y Johana Hernández, José Luis Bertel, Eder David Rangel, Daissy, Wilmer Romero, Rosa Pérez, Alex Barbosa, Eliana Ortega, Sandra y Yacaira Saltarin, Naury Caro, Olson Contreras, Sandra Rojas, Viviana Benitez, Tulia Diaz, Kety Diaz, Concepción Rodríguez, Yesid Regino, Yolima de la Espriella, Tulio Buelvas, Guanerge Vergara, Yorgi Franco, Manuel Benavides, Maria Brievas, Ennis Dancurt, Jaider Figueroa, Fernando Falcon, Lucila Marquez, Dario Vergara, Arturo Ortega, al Forra, Liliana Guzmán, Angelica Tovar, Diana Barreto, Gabith Pretel, Daniel Chavez, Carmen Hernández, Felix Roza, Ivan Nuñez, Justino Barraza, Ismael Contreras, Marcos Martinez, Elder Madera, Alfredo España, Amaury Arrieta, Lisbeth Martinez, Erica Betin, Ivan González, Reinaldo Pérez, Carmen Toscazo, Ligia Pérez y todas aquellas personas que se nos escapan ahora.

0. INTRODUCCION

Los pobres desempeños que muestran los estudiantes, en particular en el área de matemáticas, en pruebas tanto a nivel nacional como internacional, se constituyen en motivo de preocupación, que han hecho que los profesores del área se vean en la necesidad de hallar medios y estrategias didactizables que posibiliten a los estudiantes la comprensión significativa de los conceptos matemáticos con el fin de que puedan ser utilizados posteriormente en situaciones que se le presenten en la vida diaria.

Es reconocido en el ámbito nacional la indiferencia que muchos estudiantes tienen por el estudio de las matemáticas debida a muchos factores, entre los que se pueden destacar la falta de entendimiento de las mismas fruto de metodologías inadecuadas utilizadas por los docentes para mediar el aprendizaje de éstas.

Con este trabajo se pretende posibilitar la comprensión de los números irracionales por parte de los estudiantes, a partir del uso del programa CABRI II, buscando con ello contribuir a una mejor comprensión de los sistemas numéricos.

Para tal propósito, el computador y calculadoras como la T.I 92 Plus se presentan como medios ideales, actualmente se reconoce la importancia de su uso para lograr aprendizajes activos en varias asignaturas, entre ellas las matemáticas, pues con ellas el alumno además de motivarse comprende y reflexiona sobre sus propias acciones. En el presente trabajo, serán utilizados como herramientas claves para elevar el interés del alumno por el estudio de los números irracionales. Tomaremos como herramienta el programa CABRI, para hacer representaciones geométricas sobre la recta numérica de algunos números irracionales y aproximaciones de éstos, para que el alumno explore e interactúe directa y dinámicamente con ellos y a través de estrategias aritméticas, haga aproximaciones de los mismos, y así posibilitar la construcción significativa de tales números.

El trabajo se lleva a cabo en tres etapas. En la primera, se discuten y reflexionan teorías para la elaboración del marco teórico que sustenta los talleres que se elaboran en la segunda etapa, los cuales se conciben de tres tipos: de socialización del software, de talleres guiados y de autoaprendizaje, y en la tercera se aplican los talleres y se analiza la información que se extrae de los mismos.

1. PRESENTACIÓN DEL PROYECTO.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

A pesar que la comprensión del concepto de número, de las operaciones con ellos, de las relaciones entre ellos, de la solución de problemas y el cálculo numérico, se constituyen en aspectos fundamentales para el desarrollo del Pensamiento Numérico¹, notamos que son pocos los estudiantes que egresan de los niveles de la básica y media de educación con una comprensión clara de estos temas y que cada vez es mayor el número de alumnos que presentan dificultades para realizar cálculos numéricos con números racionales, y que éstas aumentan cuando se trabaja con números irracionales.

Se espera que al concluir su ciclo de estudios secundarios, los estudiantes dominen los distintos sistemas numéricos (comprenda los elementos de los conjuntos numéricos, comprenda las operaciones y las relaciones entre los elementos de los mismo), pero al indagar, a través de una prueba diagnóstica, sobre el conocimiento que éstos tenían sobre los números irracionales, encontramos que el 30% se limita a decir “son aquellos números que no son racionales”, que el 5% los ve como “los números que tienen muchas cifras decimales”, el 15% “son números que no los podemos dividir” y el 50% no

¹Lineamientos curriculares: Matemáticas. Santa Fe de Bogota. Mayo 1998

encuentran que decir, lo que da muestras del poco conocimiento que tienen sobre el tema. Al solicitarles por la ubicación de éstos en la recta numérica, pudimos constatar que algunos sacan una calculadora para hacer una aproximación del número y ubicarlo en la misma, mientras que otros aducen que tales números no pueden ser representados gráficamente. Todo lo anterior se constituye en manifestaciones de los espacios de dificultad que tienen los alumnos respecto al trabajo con números irracionales, (espacios de dificultad, también observados por docentes con los cuales hemos podido dialogar), y que pueden contribuir con la apatía de los estudiantes para trabajar con éstos, lo que les imposibilita una mejor comprensión de los mismos y que los lleva a cometer errores al trabajar problemas donde se involucren tales números.

Lo anterior, nos lleva a suponer que el tratamiento que se da en el ciclo de la básica secundaria a los números irracionales no posibilita una buena comprensión por parte de los estudiantes de los mismos, quizás debido a que los profesores no cuentan con las herramientas adecuadas para tal fin.

1.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Atendiendo a los aspectos antes señalados, con el presente trabajo se busca posibilitar el acercamiento de los estudiantes al estudio de los números irracionales y dar respuesta, en parte, al problema correspondiente a los espacios

de dificultad que se les presentan a los alumnos al trabajar situaciones problemas que involucran dichos números.

Como consecuencia de todo lo anterior nos surge la siguiente pregunta:

¿Cómo posibilitar la comprensión de los números irracionales a través de actividades de aula que involucren el uso de tecnologías computacionales como el programa cabri géomètre?

1.3 JUSTIFICACIÓN

Como ya señalamos, son muchos los espacios de dificultad asociados al trabajo con números irracionales en la escuela y muy pocas las estrategias que se han presentado para darle solución, a pesar de la importancia que se les ha atribuido para el desarrollo del pensamiento numérico y su aplicación en la solución de problemas de la vida.

Por la complejidad lógica del número irracional su utilidad básicamente se encuentra en el campo de las matemáticas. Con los números irracionales se estructura el continuo matemático, y por ende los números reales, hay que tener en cuenta lo que se propone en los estándares curriculares de matemáticas para el grado octavo en lo que se refiere al pensamiento numérico y sistemas numéricos: Reconocer las propiedades de los números irracionales y comprender

el significado y las propiedades de la recta real; a su vez estos son parte esencial para posteriormente comprender el cálculo, sin embargo hay números como el “numero de oro” y la proporción áurea, que se han utilizados en el arte y la arquitectura, además de haber sido utilizados en el estudio de situaciones biológicas como el crecimiento de caracoles y amebas y en ambientes como el diseño de diversas espirales que se dan tanto en la naturaleza como en los ambientes de publicidad.

Cada vez es mayor el auge de los computadores en la educación. En el estudio de las matemáticas, por ejemplo, el computador ha llegado a ser de gran ayuda gracias a su capacidad de procesar información en forma gráfica. Se ha utilizado para graficar funciones, estudiar propiedades de las mismas, analizar tablas y representar figuras en dos y tres dimensiones. Esto lo convierte en un medio didactizable importante para el tratamiento de algunos conceptos y relaciones matemáticas. De las muchas reuniones de investigadores en educación matemática acerca de estos temas, destacamos la Primera Conferencia Iberoamericana de Matemáticas Computacional, de la cual resaltamos las siguientes conclusiones:

“El computador está cambiando la forma como se enseña matemáticas. Su presencia en los procesos de enseñanza tiene entre otras las siguientes ventajas:

- Permite que se centre la atención en el aspecto conceptual más que en el operativo

- Ejerce un efecto psicológico positivo ya que al ver corroborados los resultados en el computador, crea una mayor confianza en el proceso, ofrece pistas que permiten ver más lejos y se establece un ambiente más propicio para el aprendizaje.
- Contribuyen a la ruptura de paradigmas pedagógicos que no corresponden a los adelantos de la época.
- El estudiante puede comprender más fácilmente que obtener respuestas acertadas no es el fin del aprendizaje.”

En el proceso enseñanza – aprendizaje es importante la búsqueda de nuevas estrategias pedagógicas que garanticen un mejor aprendizaje y una mayor participación constructiva de los estudiantes, para que éstos dominen y apliquen por mucho más tiempo los conceptos impartidos en el aula de clases. En nuestro medio se requiere la utilización de nuevas tecnologías para adquisición y mediación de conocimientos. Como futuros licenciados en matemáticas, nuestro deber es estar a la vanguardia y hacer uso de nuevas tecnologías para mediar de mejor manera el proceso de enseñanza-aprendizaje en ésta área.

Por todo lo anterior, se presenta esta propuesta metodológica con un nuevo enfoque para la introducción de los números irracionales, que creemos motivará su estudio gracias en gran parte a la utilización de nuevas tecnologías en su enseñanza, contribuyendo con ello a llenar algunos de los vacíos que

generalmente se presentan en dicho proceso y favoreciendo un aprendizaje significativo y de mayor duración.

Para desarrollar esta propuesta se cuenta con los alumnos del nivel de la básica del colegio “Antonio Lenis” de Sincelejo que poseen un laboratorio de informática y 20 calculadoras algebraicas, quienes han tenido la oportunidad de experimentar con nuevas tecnologías gracias a dicho laboratorio, en donde encontramos varios computadores y calculadoras con programas incorporados para la enseñanza de las matemáticas tales como el Cabri y el Derive.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 GENERAL:

Posibilitar el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de 8º grado del colegio Antonio Lenis

1.4.2 ESPECIFICOS

- ❖ Elaborar una propuesta de aula que posibilite la comprensión de los números irracionales a través del trabajo con el software de geometría dinámica “CABRI GEOMETRE” con fin de promover aprendizajes significativos y más duraderos.
- ❖ Construcción del marco teórico.
- ❖ Construcción y aplicación de talleres.

2. MARCO TEORICO.

El marco teórico del presente trabajo lo dividimos en antecedentes, bases teóricas y marco conceptual.

2.1 ANTECEDENTES:

Se constituyen en referentes para la realización del presente trabajo, aquellos adelantados en torno al uso de nuevas tecnologías para mediar la enseñanza de las matemáticas y los que tratan la problemática existente al rededor de los números irracionales.

1. Trabajos adelantados en torno al uso de nuevas tecnologías para mediar la enseñanza de las matemáticas

Entre los trabajos para mediar el aprendizaje de conceptos matemáticos con ayuda del uso de computadores o calculadoras en nuestro medio, se encuentra la investigación para optar el título de especialista en educación matemática, llevada a cabo por el grupo encabezado por Carmen Toscano et al, en el municipio de Sincelejo. Cuyo título, propósitos y conclusiones se nombran a continuación:

✓ PROPUESTA METODOLOGICA PARA EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LINEAL USANDO EL SOFTWARE DERIVE.

PROPÓSITO:

Facilitar el desarrollo del pensamiento variacional en las funciones lineales mediante el sistema visual – gráfico presentado por el Derive.

CONCLUSIONES:

- El uso del ordenador permitió una mayor motivación y concentración dando lugar a una mejor comprensión de los temas tratados.
- El sistema de representación visual – gráfico posibilita una mejor interpretación de la función lineal.

En dicho trabajo se mencionan, los siguientes trabajos, realizados a nivel nacional y que están relacionados con el tema.

✓ PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN: CALCULADORAS GRAFICAS Y PRECALCULO. PEDRO GOMEZ, VILMA MEZA. UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.

PROPÓSITO:

Explorar los nuevos aspectos del sistema curricular con motivo de la utilización de la calculadora gráfica.

CONCLUSIONES:

Cambio de visión de los docentes acerca de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de recursos en el aula.

✓ PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS: DISEÑO CON HOJAS DE CÁLCULO, CON MANEJADOR DE BASE DE DATOS, MULTIMEDIA Y LOGOWRITER. OCTAVIO HENAO ALVAREZ.

PROPÓSITO:

Establecer y evaluar el impacto de dichos modelos en el nivel de aprendizaje y la motivación de los alumnos.

CONCLUSIONES:

- Los computadores son recursos eficaces para inquietar, sensibilizar e inducir a los alumnos a la investigación.
- Promueven la innovación pedagógica, la experimentación didáctica y la integración de diversas áreas curriculares.

✓ REFLEXION ACERCA DEL USO DEL COMPUTADOR EN EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA. ALVARO GALVIS

PROPÓSITO:

Analizar el potencial que puede tener el uso de apoyos informáticos para enriquecer la educación en los niveles primario y secundario.

CONCLUSIONES:

La educación puede apoyarse en la informática tomando al computador como medio para explorar, reflexionar, simplificar el trabajo y amplificar las capacidades de los alumnos y docentes.

✓ UN EXPERIMENTO SOBRE EL COMPUTADOR Y LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO. HECTOR J. MARTINEZ.

PROPÓSITO:

Comparar ventajas y desventajas al enseñar un primer curso de cálculo utilizando el computador

CONCLUSIONES:

Con el uso del computador se presenta más claridad sobre los conceptos presentados y una mejor habilidad para plantear y resolver problemas.

✓ EXPLORANDO SIMETRÍAS CON CABRI. TOSCANO CARMEN

PROPÓSITO:

Identificar las propiedades fundamentales de la simetría central utilizando la calculadora TI 92 y el programa educativo Cabri.

CONCLUSIONES:

El ambiente proporcionado por Cabri Geometre permitió a los alumnos la identificación de propiedades y la reflexión acerca de las preguntas hechas, es decir, el ambiente actuó como mediador en la formulación de preguntas, a la vez que aportó herramientas para explorar dichas preguntas, situación un tanto difícil de obtener cuando trabajamos con papel y lápiz puesto que el dibujo es una representación estática que no permite percibir si las propiedades se mantienen cuando varía uno de los componentes de la figura.

En nuestro programa de licenciatura en matemáticas no se han realizado en el pregrado trabajos donde se involucren las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

2.2 BASES TEORICAS.

Entre las bases teóricas que sustentan el presente trabajo destacamos las que atienden a teorías de construcción del conocimiento, teorías relacionadas con el uso de ayudas computacionales en educación y aspectos relacionados con el papel de la historia de las matemáticas en la construcción de conceptos del área.

En cuanto a las teorías sobre construcción del conocimiento que revisamos para la realización del presente trabajo están la teoría constructivista de Piaget, la teoría social-histórica de Vigotski, en particular la que se refiere a la zona de desarrollo próximo, la teoría del aprendizaje significativo de Ausbel y la teoría

del aprendizaje colaborativo, que consideramos son las que guardan mayor relación con el problema de investigación planteado. Finalmente se hace un breve recorrido histórico de los números irracionales para conocer algunos de los problemas que debió enfrentar el hombre en la construcción de los mismos y poder hacer una presentación en el aula, a través de las actividades planeadas, más acorde con dicha problemática.

1.2.1 TEORÍAS SOBRE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Aprendizaje y Constructivismo

Las modernas teorías del aprendizaje basadas en el procesamiento de la información distinguen entre estrategias de aprendizaje “reproductivas” orientadas a devolver intacta la información presentada al estudiante y que suponen un procesamiento superficial de la información y estrategias de aprendizaje “constructivistas”, enfocadas a relacionar conscientemente el material nuevo con el que ya se conoce. Estas estrategias, de cuyo estudio se ocupa cada vez con mayor interés la psicología educativa, trasciende la pura memorización para buscar la organización lógica de los contenidos e implican, por lo tanto, niveles más profundos en el procesamiento de la información.

De acuerdo con lo expresado por Mario Carretero, constructivismo es una práctica de aprendizaje en donde la persona –tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos - no obtiene un mero producto del

ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la investigación entre estos dos factores. En consecuencia, según esta posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. Esta construcción la realiza el individuo con esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó con relación con el medio que lo rodea. El esquema es básicamente la representación de una situación concreta o de un concepto que permite manejar internamente y enfrentarse a situaciones iguales o parecidas a la realidad.

Aunque el origen del constructivismo es de reciente data, sus orígenes se encuentran en la psicología educativa que quiso salirse de los linderos conductivistas y psicoanalíticos para abordar el estudio de los procesos de aprendizaje. Tiene influencia de la teoría de sistemas, también de la concepción de la ciencia con base en la elaboración de modelos y nutre su análisis cognitivo del conocimiento de ciertas corrientes del pensamiento psicológico como las opciones ofrecidas por Kelly y Ausubel. Pero la esencia formal del constructivismo se genera a partir de la epistemología genética formulada por Jean Piaget, la cual postula que no es posible referirse a la realidad en sí misma, sino a la construcción que a partir de la interacción con el mundo, cada persona pueda rehacer. Dentro del modelo constructivista, está definido que el conocimiento no se adquiere pasivamente, ni por asimilación de aprendizajes

anteriores, ni tampoco es copia de la realidad, sino que es una construcción que cada alumno realiza con sus propias estructuras cognoscitivas.

Al respecto debe recordarse que de lo que investigó y comprobó Piaget, se desprendieron formulaciones teóricas como la que afirma que el desarrollo cognitivo debe comprenderse como la adquisición sucesiva de estructuras lógicas cada vez más complejas que subyacen a las distintas áreas y situaciones, que la persona es capaz de ir resolviendo a medida que crece.

El constructivismo, entendido como la aplicación de la teoría cognoscitiva de Jean Piaget, sostiene que el aprendizaje es el ejercicio productor que realiza la mente en sus estructuras internas, mediante procesos de equilibración y disequilibración conceptual.

Los pioneros del constructivismo parten de un interrogante elemental para comprender la esencia del aprendizaje: ¿EL SABER SE TRANSMITE O SE CONSTRUYE?. J D Novack, un destacado investigador de los procesos cognitivos del hombre, afirma lo último. La transmisión sólo es posible respecto a la información, más no al saber.

Radicalmente se afirma que si la tecnología es un saber, entonces no es transmisible: es construible o reconstruible siempre y cuando el proceso educativo

apunte a la cualificación de los alumnos para la aprobación creativa de dicho saber, problemático por naturaleza.

Pero todo saber implica un nicho conceptual, al decir de Posner, requiere de unos procesos de pensamiento que es necesario desarrollar para que la adopción de dicho saber sea un proceso consciente de cambio de los esquemas conceptuales y metodológicos, de los intereses y actitudes y del trabajo pedagógico y didáctico de apoyo.

Al construir ideas, estas no se legitiman como conceptos aislados, sino que se interrelacionan dinámicamente constituyéndose en saberes que cualifican su forma de vida, es decir lo inducen a superarse cognocitivamente, lo hacen conciente de las realidades del mundo y le permiten actuar mejor en su diario desenvolvimiento.

Constructivismo matemático: una nueva visión.

Los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de las matemáticas en términos de educación y los estudios de sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones de las matemáticas escolares, Paul Ernest ha propuesto una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tenga en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y

la tecnología y el hacer matemático a lo largo de la historia. Por ello la escuela debe promover las condiciones para que se lleve a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados compartidos en donde se tengan en cuenta los intereses y la afectividad del alumno y debe ofrecer respuestas a los intereses que constantemente surgen en el mundo actual. Según la nueva visión de las matemáticas escolares² hay que reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que deben dominar todo ciudadano, hay que privilegiar como contexto del hacer matemático las situaciones problemáticas, hay que redimensionar el papel de la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y hay que reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus amplificaciones.

Respecto a la formación matemática básica, el énfasis está en potenciar el pensamiento matemático mediante la apropiación de contenido que tiene que ver con cierto sistema matemático. Esos contenidos se constituyen en herramientas para desarrollar otros, el pensamiento numérico, el espacial, el métrico,... Dentro del desarrollo del pensamiento numérico encontramos el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema numeración decimal logrando desarrollar estrategias propias en la resolución de problemas. Es de anotar que para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los

² A la luz de los Lineamientos Curriculares ...

numéricos, como el geométrico, el métrico, el de datos; la geometría constituye una importante fuente de modelación para desarrollar el pensamiento espacial debido a su carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo eminentemente geométrico.

En cuanto al impacto de las nuevas tecnologías en los procesos del aprendizaje y de las enseñanzas de las matemáticas, es de anotar que la calculadora y el computador aligeran y superan la capacidad de cálculo de la mente humana, por ello su uso en la escuela conlleva a enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos antes que la mecanización de ciertas rutinas dispendiosas.

La calculadora permite explorar ideas y modelos numéricos, verificar lo razonable de un resultado obtenido previamente con lápiz y papel o mediante el cálculo mental.

El Aprendizaje Significativo

Uno de los autores que ha influido mayormente en la elaboración y divulgación de las ideas modificadoras de las formas de aprender y de suministrar el conocimiento es D. P Ausubel. Su aportación fundamental ha consistido en la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno. Ausubel critica la enseñanza tradicional en que el aprendizaje resulta muy poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos

que el alumno no puede estructurar formando un todo relacionado. Esto sólo será posible si el estudiante utiliza los conocimientos que ya posee, aunque estos no sean totalmente correctos.

Evidentemente, una visión de este tipo no sólo supone una concepción diferente sobre la formación del conocimiento, sino también una formulación distinta de los objetivos de la enseñanza. Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello lo que se *comprenda* será de lo que se *aprenderá* y recordará mejor porque quedará integrado en las estructuras de conocimientos de cada quien.

La teoría del aprendizaje significativo es una introducción a la psicología del aprendizaje en el salón de clases, que se ocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de las estructuras de significados, más particularmente, del surgimiento de nuevos significados en el alumno. El principio básico de esta teoría reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van relacionadas de modo no arbitrario; es decir, de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso la recomendación Ausubeliana se basa en averiguar primero lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia (Ausubel, Norak y Hannesian, 1.976).

La meta del aprendizaje significativo

En este tipo de aprendizaje, el alumno tiene un método para vincular los aspectos sustanciales de los nuevos conceptos, de la información o de las situaciones con los componentes importantes de la estructura cognoscitiva existente de formas

diversas que hacen posible la incorporación de relaciones derivadas, elaboradas correlativas, confirmativas, calificadoras o representativas. Según la naturaleza de la tarea de aprendizaje, la meta puede ser o bien descubrir o simplemente aprender a incorporar tales relaciones.

El material potencialmente significativo

Una meta o método significativo de aprendizaje da como resultado un proceso y una consecuencia de aprendizaje con sentido, siempre que el material de aprendizaje sea en sí mismo potencialmente significativo. Si el material de aprendizaje fuera simplemente considerado significativo, el proceso de aprendizaje sería por completo superfluo; el objeto del aprendizaje se habría alcanzado ya por definición; antes de que se intentara ningún aprendizaje e independientemente del tipo de método de aprendizaje que se hubiera empleado.

Para que se de un aprendizaje significativo es necesario que se presenten, de manera simultánea, por lo menos las tres siguientes condiciones:

PRIMERA: el contenido del aprendizaje debe ser potencialmente significativo. Es decir, debe permitir ser aprendido de manera significativa.

SEGUNDA: el estudiante debe poseer en su estructura cognitiva los conceptos utilizados previamente formados, de manera que el nuevo conocimiento pueda vincularse con el anterior. En caso contrario no podrá realizarse la asimilación.

TERCERA: el alumno debe manifestar una actitud positiva hacia el aprendizaje significativo; debe mostrar una disposición para relacionar el material de aprendizaje con la estructura cognitiva particular que posee.

Las tres condiciones deben estar presentes de manera simultánea y su ausencia, así fuera de una sola de ellas, impediría que se diera un aprendizaje significativo. Lo anterior significa que un material potencialmente significativo, puede no ser aprendido significativamente, bien por carencia en la estructura cognitiva de los conceptos previos o bien por una actitud no disponible hacia el aprendizaje significativo por parte del estudiante.

Aprendizaje Colaborativo

Se ha demostrado en varias ocasiones que el trabajo en grupo es favorable al aprendizaje, por ejemplo el trabajo en pareja facilita cambios cognitivos, conlleva a discusiones que surgen de los distintos puntos de vista de los compañeros, y además los distintos razonamientos que se exponen conllevan a un aprendizaje y una interacción constructivista [Joiner, Miyake, 1991]

Tendremos en cuenta la siguiente definición de aprendizaje colaborativo:

Aprendizaje colaborativo, Manuel Prieto y Aurora Vizcaíno, Apuntes para el Seminario Internet y Aprendizaje, Universidad de Cartagena, Mayo 2001, Cartagena.

Se define el aprendizaje colaborativo como la adquisición y construcción de conocimientos o destrezas con la ayuda de la interacción con los compañeros, bien sea esta interacción en forma de críticas, comparaciones, discusiones sobre los distintos puntos de vista, etc.

A la luz de los lineamientos curriculares, los avances de la ciencia, la tecnología, se ha iniciado una reconceptualización de la labor docente. Es imposible desconocer el impacto que tiene la introducción del ordenador, la calculadora y sensores, como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

Apoyamos el enfoque constructivista dado hacia las matemáticas en donde el estudiante entra a desarrollar los sistemas de pensamiento (geométrico, numérico, métrico,...) que le permiten plantearse problemas, discutir ideas, elaborar hipótesis y encontrar soluciones propias.

Compartimos que la función del docente, ha de ser la de suministrar material que el alumno este en capacidad de procesar asimilando información nueva, creándola e induciendo sus nuevos descubrimientos y aplicaciones.

Encontramos en la tecnología el medio necesario para que el espacio pedagógico de las matemáticas encuentre la capacidad cualificada para conducir los procesos propios de reflexión, discusión y construcción gracias a la interacción formativa de nuevos saberes y experiencias.

La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos (JANVIER, 1987)

La tecnología se presentará como apoyo en el encuentro entre el sujeto y el medio para que surja conocimiento en la valoración de los procesos constructivos y de interacción en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

2.3 RESEÑA HISTORICA DE LOS INCONMENSURABLES

La noción de número y de contar, así como los nombres de los números más pequeños y más comúnmente empleados, se remontan a épocas prehistóricas. Con la invención de la escritura, se tuvo que dar el paso siguiente, que fue el de escribir los números.

Desde muy temprano en la evolución humana surgió la necesidad de manejar y emplear números teniendo como propósito resolver cuestiones concretas muy inmediatas y próximas al devenir de sociedades agricultoras y ganaderas, en lo cual se originó la utilización de una unidad para contar.

Contar y medir fueron dos de los objetivos primordiales en los pueblos primitivos. China, Mesopotamia, Egipto o Persia, se constituyen en los primeros focos importantes del desarrollo de la aritmética y la geometría. Los primeros grandes

filósofos conocidos en el ámbito del pensamiento matemático (y el de los números), fueron los griegos.

Con los Griegos el mundo pasó de los intentos de resolver problemas prácticos de aritmética y geometría a la construcción de los más audaces y afortunadas estructuras teóricas. De Mesopotamia y Egipto principalmente recibieron los griegos su legado de conocimiento y artes del recuento, la medida y la división. Del trabajo de los griegos y de su contemplación mística de los números (las líneas, las figuras, los sólidos, todo lo que existe en el universo está formado por puntos que son realidades físicas y poseen por tanto magnitud³) aparecen las primeras afirmaciones de índole numérica o geométrica en las matemáticas. Así, con matemáticos como Tales de Mileto, Anaximandro o Pitágoras se sentaron las bases de la geometría, la trigonometría y el cálculo. Tales de Mileto, llamado el primer gran matemático, se le atribuye el establecimiento de las matemáticas como ciencia deductiva, resolvió ciertas cuestiones como la igualdad de los ángulos en la base de un triángulo isósceles; la determinación de distancias inaccesibles; el valor del ángulo inscrito; la demostración de teoremas que llevan su nombre, relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de rectas paralelas y también el haber realizado la medición de las pirámides, mediante las sombras que proyectan. La escuela Pitagórica fue quien introdujo los conceptos matemáticos abstraídos de la

³ Elementos de historia de las matemáticas. Nicolas Bourbaki. Ed. Alianza.

contemplación de la naturaleza, dándole a la naturaleza un carácter abstracto sin olvidar el criterio normativo que sugiere la deducción.

El postulado fundamental de los pitagóricos era que las revoluciones de los astros, así como las armonías musicales y las proporciones en una arquitectura se reducían a relaciones entre números enteros. “Todo es armonía y número”. Todo podía reducirse a relaciones de números enteros positivos.

El desarrollo de esta teoría en los pitagóricos está conectado con la idea de conmensurabilidad. El carácter realista de su matemática es responsable de que solo se puedan aceptar ciertas construcciones que puedan ser interpretadas con independencia del sujeto o como las construcciones con regla y compás.

Se creía que todo es número, que todas las relaciones entre las cosas eran relaciones entre los números, y además, la regla y el compás se tomaron como “Instrumentos divinos”; con lo que concluyeron que todas las longitudes se relacionaban con números enteros y todas las longitudes pueden trazarse con regla y compás.

Para los pitagóricos, con un segmento de recta que se puede tomar como unidad, con la regla y el compás, se puede construir otro segmento de recta que tenga por longitud un número (natural); en esta forma se estaría asociando números a elementos de la geometría y “si todo es número” dados dos segmentos cualesquiera con un proceso

inverso de sustracción, usando regla y compás, se podría construir una unidad común que contuvieran un número exacto de veces, dando así origen a una pareja de números, como resultado de esa comparación lo cual se puede tomar como una razón. Cita.

Para tener una mejor idea de este proceso, en el cual se consideraban magnitudes conmensurables, consideremos un par de segmentos A y B y supongamos que la magnitud de A es menor a la del segmento B . Colocando A sobre B con una regla y un compás trasládalo para obtener dos posibilidades: A cabe un número exacto de veces en B , o existe un segmento U_1 , menor que A , de exceso para que la primera posibilidad no ocurra. Si ocurre la primera posibilidad A sería medida común para A y B . Si ocurre la segunda posibilidad, se toma U_1 para comparar con A como se hizo en primera instancia, y de nuevo se presentan las dos posibilidades: U_1 cabría un número de veces en A y por tanto U_1 sería medida común para A y B , o existiría un segmento U_2 repitiendo el proceso nuevamente.

El teorema de Pitágoras tiene como consecuencia la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado respecto de la base. Este es un descubrimiento asombroso en la historia de las matemáticas, sin embargo los Pitagóricos se vieron en la obligación de ocultarlo. No existe ninguna unidad de medida de longitud, por pequeña que sea, que nos permita expresar estas dos longitudes como múltiplos enteros con la misma unidad de medida. El hecho de que el cociente entre la diagonal y el lado no se pueda expresar como un número fraccionario produjo

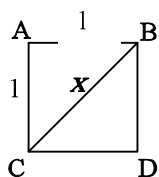
gran impresión en los pensadores griegos. Este cociente superaba el concepto de número que hasta ese momento se tenía.

El concepto de número no fue ampliado por los griegos a las magnitudes inconmensurables. Ellos se preocuparon más por los estudios geométricos. Fueron los matemáticos orientales, tiempo después, quienes llamaron números irracionales a estas magnitudes, llamadas así debido a que no son razones o cocientes de enteros (números ininteligibles para los griegos).

El primer irracional descubierto es el que nosotros escribimos como $\sqrt{2}$ al tomar los pitagóricos un cuadrado de longitud 1 de lado y compararla con la diagonal.

Una demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional es la siguiente:

Tomemos el cuadrado cuyos lados tienen de longitud la unidad.



La diagonal **BC** divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos, por lo tanto es válido el teorema de Pitágoras: $1^2 + 1^2 = x^2$ pero $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ es decir $x^2 = 2$ y escribimos $x = \sqrt{2}$, raíz cuadrada de dos. Supongamos que $\sqrt{2}$ sea un número racional: $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números enteros y además no tienen factor común. Si elevamos al cuadrado los términos de la ecuación

$\sqrt{2} = p/q$, obtenemos $2 = p^2/q^2$, multiplicando ambos términos por q^2 nos queda que: $2q^2 = p^2$, por lo tanto p^2 es un número par. Pero el cuadrado de cualquier número impar es otro impar. Por lo tanto p ha de ser par, y escribimos $p^2 = 2s$, donde s es un entero, sustituyendo el valor de p se tiene que:

$$p^2 = (2s)^2 = 4s^2 = 2q^2$$

dividiendo ambos miembros de esta última igualdad por 2, se obtiene: $q^2 = 2s^2$.

Por lo tanto q^2 es par y se deduce por el mismo argumento utilizado con p que q también es un número par, contradiciendo el hecho de que p y q no tienen factor común, luego podemos concluir que $\sqrt{2}$ no lo podemos expresar como un número racional.

Entre otros irracionales importantes que cabe citar es el número π (pi) que es la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro. Una aproximación con 5.015 dígitos es la siguiente:

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923
078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095
505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303
819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234
603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209
209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415

116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799
627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213
949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676
694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409
012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640
344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328
160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710100
031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311
595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959
092164201989380952572010654858632788659361533818279682303019520353
018529689957736225994138912497217752834791315155748572424541506959
508295331168617278558890750983817546374649393192550604009277016711
390098488240128583616035637076601047101819429555961989467678374494
482553797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521
047521620569660240580381501935112533824300355876402474964732639141
992726042699227967823547816360093417216412199245863150302861829745
557067498385054945885869269956909272107975093029553211653449872027
559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746
72890977727938000816470600161452491921732172147723501414419735685
481613611573525521334757418494684385233239073941433345477624168625
189835694855620992192221842725502542568876717904946016534668049886
272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252
051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220

391949450471237137869609563643719172874677646575739624138908658326
459958133904780275900994657640789512694683983525957098258226205224
894077267194782684826014769909026401363944374553050682034962524517
493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597729
754989301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499
725246808459872736446958486538367362226260991246080512438843904512
441365497627807977156914359977001296160894416948685558484063534220
722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225499546
667278239864565961163548862305774564980355936345681743241125150760
694794510965960940252288797108931456691368672287489405601015033086
179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848
216829989487226588048575640142704775551323796414515237462343645428
584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524
849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784
896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781
911979399520614196634287544406437451237181921799983910159195618146
751426912397489409071864942319615679452080951465502252316038819301
420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215
030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881
907104863317346496514539057962685610055081066587969981635747363840
525714591028970641401109712062804390397595156771577004203378699360
072305587631763594218731251471205329281918261861258673215791984148
488291644706095752706957220917567116722910981690915280173506712748

583222871835209353965725121083579151369882091444210067510334671103
141267111369908658516398315019701651511685171437657618351556508849
099898599823873455283316355076479185358932261854896321329330898570
642046752590709154814165498594616371802709819943099244889575712828
905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428
138830320382490375898524374417029132765618093773444030707469211201
913020330380197621101100449293215160842444859637669838952286847831
235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189
154411010446823252716201052652272111660396665573092547110557853763
466820653109896526918620564769312570586356620185581007293606598764
861179104533488503461136576867532494416680396265797877185560845529
654126654085306143444318586769751456614068007002378776591344017127
494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646458807
972708266830634328587856983052358089330657574067954571637752542021
149557615814002501262285941302164715509792592309907965473761255176
567513575178296664547791745011299614890304639947132962107340437518
957359614589019389713111790429782856475032031986915140287080859904
801094121472213179476477726224142548545403321571853061422881375850
430633217518297986622371721591607716692547487389866549494501146540
628433663937900397692656721463853067360965712091807638327166416274
888800786925602902284721040317211860820419000422966171196377921337
575114959501566049631862947265473642523081770367515906735023507283

540567040386743513622224771589150495309844489333096340878076932599
39780541934144737744184263129860809988868741326047215695162396586⁴

La razón por la cual no aceptaron los griegos los números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ y otros, durante un largo periodo se debió a que estos no tenían un claro sentido físico que le atribuían a los números y a las fracciones. El único sentido intuitivo que se podía dar a los irracionales era el de representar ciertas longitudes geométricas como el de la diagonal expuesta. Los griegos entonces pensaron en ellos como longitudes y no como números, convirtiéndose en un tema de geometría más que de aritmética. Esto necesariamente debido a que por cuestiones de notación, un irracional de cualquier clase podía denotarse solamente por una línea recta o combinación de líneas (EUCLIDES LIBRO X)

Los trabajos de Hipócrates sobre la cuadratura del círculo y la perspectiva Platónica, permiten el reingreso de los inconmensurables a la matemática. La comparación entre dos magnitudes inconmensurables del mismo tipo se establece a través de una nueva formulación de igualdad entre razones dada por Eudoxio de Cnido, y usada en el libro V de los elementos de Euclides. Esto le da una salida al trabajo que tuvieron que realizar los griegos al revisar casi totalmente la teoría de las proporciones que habían desarrollado, buscando métodos que permitieran efectuar las demostraciones aun en casos no conmensurables.

⁴ Calculado con el programa DeriveTM 5

Se trataba de encontrar el método para reconocer que dos pares de segmento “definen el mismo número”; y definir la relación de orden entre estos números, cuya expresión es imposible pero cuya existencia es necesaria.

La definición de Eudoxio es la siguiente:

Sean **AB**, **CD**, **EF** y **GH** segmentos. Entonces:

AB:CD = EF:GH significa que $p \cdot CD < q \cdot AB \Leftrightarrow p \cdot GH < q \cdot EF$, con p y q enteros positivos.

Con esto Eudoxio elimina la definición de número real al omitir la definición de razones, dando solo el concepto de igualdad entre ellas mediante el uso de naturales no nulos. Si no fuesen iguales existiría entre ellas un racional, el cual no cumpliría con la equivalencia de la definición.

La definición de Eudoxio le sirvió en el siglo XIX a Richard Dedekind en su definición de número real, al querer independizar el concepto de número de las magnitudes geométricas y trabajar con un concepto puramente aritmético. Dedekind siente la necesidad de definir todos los números utilizando una palabra genérica que no evocara el número. Encuentra con esto un método de “cortaduras de Dedekind”. Se trata de conformar dos conjuntos en donde los elementos del primero sean inferiores a todos los del segundo, y en los cuales, si tomamos como ejemplo a los naturales, el primero tendría último elemento y el

segundo un primer elemento. Así por ejemplo, si escogemos la cortadura en $\mathbb{Q}$ formada por aquellos números irracionales cuyos cuadrados sean menores o iguales que 5, y aquellos racionales cuyo cuadrado es mayor que 5, nos encontramos con la característica mencionada. Para Dedekind esta cortadura define el número irracional, que denotamos, $\sqrt{5}$. Y cada vez que una cortadura no está producida por un número racional crea un número irracional perfectamente definido por esa cortadura. Así Dedekind construye el conjunto de los números reales como el conjunto de todas las cortaduras de racionales. Este conjunto contiene a los números racionales y se ha complementado con los números irracionales⁵.

Ahora bien, al abordar el estudio de la creación y evolución de los números irracionales, nos hemos encontrado con dos caminos bien distintos: La intuición y el rigor de métodos axiomáticos.

Durante los primeros siglos, la intuición ha sido la guía en la creación de los objetos matemáticos, y los números y sus propiedades fueron tratadas sin una fundamentación rigurosa. Los pitagóricos por ejemplo, utilizando la intuición y elementos con sentidos geométricos más que analíticos, llegaron a descubrir las magnitudes inconmensurable mediante procesos experimentales repetitivos de sustracción de segmentos, para algunos de los cuales se hacia infinita tal sucesión de pasos.

⁵ Números Decimales

La profunda revisión a la cual se vieron expuestas sus teorías, llevaron a la misma escuela pitagórica a establecer por medio de enunciados rigurosos, la existencia de los números irracionales. La cuestión de que: si tiene sentido pensar en tal existencia se resolvió cuando demostraron que $\sqrt{2}$ (el primer irracional descubierto) era un número que no podía representarse mediante la razón entre dos enteros positivos como se vio en la demostración realizada anteriormente.

Si nos preguntamos sobre la aplicabilidad de estos procesos en el aula, nos encontraríamos, por un lado con un sentido apenas intuitivo en lo que se refiere a la obtención de los números irracionales utilizando las magnitudes inconmensurables, y por otro con definiciones y operaciones que no están al alcance de un estudiante de 8º grado de bachillerato.

En el campo numérico pueden darse grandes diferencias entre los estudiantes y más que todo al abordar el estudio de los números irracionales ya sea por su escaso tratamiento o la manera de presentarlos. Es preciso prestar especial atención a este tema, pues la competencia numérica incide directamente en todos los contenidos de esta materia. Por tanto, proponemos en este trabajo algunas actividades mediadas a partir de elementos geométricos estructurados con la tecnología de nuestro tiempo para favorecer el aprendizaje deseado que potencie el pensamiento matemático.

2.4 MARCO CONCEPTUAL.

Atendiendo a la necesidad de apoyar la enseñanza de las matemáticas en didácticas que partan de ver el aprendizaje como un proceso de reinención individual y social, al tenor de lo planteado por Freudenthal, quien además destaca la participación activa de los estudiantes en el proceso de construcción del conocimiento (acorde con lo manifestado con Piaget), y la importancia del contexto en que ésta (la enseñanza) se lleva a cabo, volvemos la mirada hacia resultados de investigaciones realizados en campos como el de la epistemología, la psicología, y la educación matemática, con el fin de realizar esta propuesta de aula, en que además se reconoce la importancia en el desarrollo histórico de los números irracionales, de aspectos como:

- Nociones de inconmensurabilidad.
- La aparición de $\sqrt{2}$.
- La aparición de π .
- El número de oro.
- Los decimales infinitos (periódicos y no periódicos).
- Los procesos iterativos.

A fin de posibilitar la comprensión de los números irracionales en los alumnos de octavo grado del colegio Antonio Lenis.

Motivo por el cual los talleres diseñados para orientar y dinamizar el trabajo en el aula parten de explorar las intuiciones que traen los estudiantes sobre el tema y

las actividades que en ellos se realizan pretenden que los estudiantes puedan llegar a conceptualizaciones y formalizaciones con ayuda del docente que les posibiliten la comprensión de los números irracionales, talleres en donde el contenido matemático antes que mirarse como fin se constituye en una oportunidad para que los estudiantes desarrollen su pensamiento así como de sus capacidades de generalización, de sistematización y de abstracción.

Para la elaboración de cada taller se tiene en cuenta los siguientes aspectos de la teoría constructivista de Piaget:

- La edad cronológica de los estudiantes, de modo tal que las experiencias y actividades les posibilitaran su desarrollo cognitivo.
- El aprendizaje es un proceso constructivo interno, autoestructurante.
- El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo.
- Punto de partida para todo aprendizaje son los conocimientos previos
- El aprendizaje implica un proceso de reorganización interna de esquemas.
- El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debería saber.

De la teoría socio-constructivista de Vigotski que atribuyen a las intervenciones sociales un papel preponderante en el desarrollo cognitivo del niño, se tiene en cuenta:

- La importancia del lenguaje como mediador del aprendizaje y del maestro como potenciador y promotor de las capacidades individuales.
- El aprendizaje es un proceso de (re) construcción de saberes culturales.
- El aprendizaje se facilita gracias a la mediación o iteración con los otros.

La teoría ausbeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, donde se toma al alumno como un procesador activo de la información.

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Enfoque: Esta investigación está orientada por posturas epistemológicas constructivistas y tiene un enfoque cualitativo.

Diseño: el diseño de la investigación es de corte descriptivo en que al final analizamos aspectos como las reacciones de los estudiantes sobre:

- El uso de las nuevas tecnologías.
- El aprendizaje logrado del tema.
- Las formas de comunicación.
- La capacidad de argumentación.
- El papel del docente en el desarrollo de la actividad.

Técnicas: Entre las técnicas que harán posible la recolección de la información contamos con:

- La producción escrita de los estudiantes en talleres.
- La observación directa en el aula.
- Los procesos de comunicación dados en el aula.

Instrumentos o actividades metodológicas: Para esta investigación se trabajará con talleres de tres tipos: De socialización del programa

computacional Cabri Géomètre, Guiados y talleres de auto aprendizaje. Los cuales se describen a continuación:

- 1 **Talleres de socialización del software.** Estos son realizados con el fin de que el alumno se familiarice con el programa Cabri geometre II, en el primer taller se le posibilita al alumno el conocimiento de las barras de menú y herramientas del programa. Después de este primer taller se aplican talleres donde los alumnos además de seguir familiarizándose con el programa comprueban propiedades de algunas figuras, se realizan construcciones que motiven a los estudiantes a aprender por sí mismo; estos talleres pueden ser omitidos si se va a trabajar con un grupo que ya maneje el software Cabri Geometre; seguido de esto se aplican los talleres guiados que describimos a continuación.
- 2 **Talleres Guiados.** Los consideramos de gran importancia en el desarrollo del proyecto, ya que estos posibilitan al estudiante un acercamiento al tema a enseñar, en este caso el de los números irracionales o los inconmensurables, sentamos las bases de la elaboración de estos talleres en el desarrollo histórico de los mismos, empezando con la introducción de $\sqrt{2}$ (ya que este es el primer problema que se presenta acerca de este tema), continuamos con: una aproximación a π mediante la aproximación por polígonos a una circunferencia (taller que se aplicó a estudiantes de octavo grado del colegio Antonio Lenis el cual detallare posteriormente); el número de oro, el rectángulo áureo, y el segmento áureo pasan a ser temas para los talleres elaborados en

el desarrollo de este trabajo, terminando con la ubicación de los números irracionales de la forma $\sqrt[k]{n}$ (donde k y $n \in \mathbb{N}$) en la recta numérica.

En estos talleres se permite la utilización de todos los recursos disponibles, como apuntes, libros, y cualquier material didactizable que permita a los alumnos desarrollar pensamiento numérico.

- 3 **Talleres de Autoaprendizaje.** Son guías de auto instrucción que tienen como objetivo estimular al alumno a un aprendizaje de los números irracionales por sí mismo.

Para la elaboración del presente trabajo, se desarrollaran las siguientes acciones:
Además de los talleres descritos se realizó una Evaluación exploratoria con el fin de indagar los conocimientos (preconceptos), de los estudiantes acerca de los números irracionales. Esta prueba fue respondida en forma individual por cada uno de los estudiantes.

PAPEL DEL ALUMNO

Para la realización efectiva de las actividades se espera que el estudiante en el área de las matemáticas, este equipado con una serie de explicaciones y operaciones provenientes de sus experiencias cognitivas previas y de los distintos conceptos en los que estas han sido desarrolladas, se trata de enfrentar de manera global las nuevas experiencias que se le presentan con la aplicación de

las actividades metodológicas, descritas anteriormente, incorporadas en su visión y apoyadas por el docente.

Otro aspecto fundamental en el desarrollo de los talleres lo constituye el del lenguaje, ya que es a través de este que el estudiante interactuando con el docente y otros estudiantes, puede dar sentido a lo que esta haciendo.

PAPEL DEL DOCENTE

En este proyecto, el docente es visto como mediador de aprendizajes por lo cual es el encargado de propiciar a los educandos las situaciones significativas que le permitan utilizar sus preconceptos y experiencias previas.

El docente esta dispuesto a:

- Brindar una situación interesante en circunstancias que se presenten, enmarcándolas dentro del programa de estudio correspondiente y que atiendan a los preconceptos de los alumnos.
- Presentar una serie de contextos diferentes que muestran la misma temática y que permitan ampliar el campo de significados del concepto en cuestión.
- Aclarar las ideas, afirmar los conceptos, proporcionar terminología y presentar la formación requerida por el conocimiento matemático establecido.

- Partir de preguntas, comentarios y sugerencias, guiar las discusiones de sus alumnos, para que éstos logren alcanzar las metas cognitivas definidas por el currículo.
- Animar las discusiones para que los estudiantes se involucren en la resolución de situaciones de aprendizaje.

El maestro posee una responsabilidad grande en el aprendizaje de sus alumnos, debe respetar el ritmo natural de la actividad cognitiva de éstos y crear una micro sociedad científica que le permiten al estudiante dar respuestas a los problemas que se le presentan.

- Adiestrar a los estudiantes de octavo grado en el uso del software educativo Cabri Géomètre.
- Diseñar una estrategia apoyada por el uso del software educativo Cabri Géomètre, que permita a los alumnos de octavo grado enriquecer su pensamiento numérico a través de la concepción de número irracional.

Procedimiento Metodológico del trabajo de aula.

El trabajo de aula desarrollado parte de tener en cuenta los referentes teóricos que sustentan el proceso de investigación y atiende, entre otros, los siguientes preceptos:

El trabajo de aula se asume como un acto de comunicación y significación, donde el lenguaje surge como una práctica natural dentro del ambiente de clase, en la

cual la discusión argumentada sea la base del proceso; es en la discusión donde los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista, a escuchar los argumentos de los otros, a construir significados, en fin donde construyen socialmente el conocimiento.

La comunicación en la escuela se considera una actividad social, que posibilita que el estudiante construya conocimientos en interacción con los demás.

Las buenas preguntas dinamizan el trabajo en el aula, permitiendo la interacción entre Estudiantes – Conocimiento – Profesor; además por su carácter de desestabilizador y promotor de conflictos en las concepciones de los estudiantes, permite la multiplicidad de caminos que conllevan a múltiples respuestas y también múltiples cuestionamientos, por tanto, encontrar buenas preguntas es esencial en los procesos de construcción de significados.

El aprendizaje es un proceso constructivo, ocurrido en el proceso de uso del conocimiento; mediante el cual se adquieren y construyen nuevos conocimientos, de tal manera, que se ponen en juego las estructuras presentes en el individuo con la nueva información que le llega, posibilitándole dar sentido y significado al conocimiento que usa y al mundo que lo rodea.

Por tanto, el aprendizaje se construye en la interacción entre el uso del conocimiento y el conocimiento.

La evaluación no solo es asumida como instrumento de control y medición, sino como un instrumento de reflexión, entorno a las acciones que los estudiantes generan en todos los procesos ocurridos en el trabajo de aula, por tanto, se considera como un juicio donde se comparan los propósitos y deseos con la realidad que ofrecen los procesos, permitiendo reorientar continuamente el trabajo en el aula.

ANÁLISIS DE TALLERES.

A continuación presentamos el análisis de los talleres en particular el taller # 9 desarrollado por los estudiantes de octavo grado del colegio Antonio Lenis del municipio de Sincelejo.

DESCRIPCION DEL GRUPO.

El curso en el que se aplica el taller esta conformado por jóvenes de edades entre los 12 y 14 años de edad, la mayoría de estos vienen trabajando juntos desde sexto grado, orientados en la parte matemática por la licenciada y especialista en educación matemática Carmen Toscano, y han venido trabajando con la calculadora TI 92, la cual tiene incorporada el software Cabri Geometre.

DESARROLLO DE TALLERES.

Para la realización del taller se procedió de la siguiente manera: se les pidió a los alumnos que formaran grupos de dos, y se les procedió a entregar la guía y el

cuestionario que constituían el taller, también se hace entrega de la calculadora a cada grupo, seguidamente se les pide a los alumnos que lean detenidamente el taller antes de proceder a cualquier acción, y en caso de cualquier duda consultar al profesor, nadie puso objeción en el contenido y empezaron a trabajar; se presentaron los siguientes problemas: al comenzar a trabajar con las calculadoras algunas se encontraban formateadas en idioma inglés y no en español, y durante el desarrollo del taller a algunos grupos la calculadora se les apagaba y se les perdían algunos datos con los que estaban trabajando; por otra parte la primera pregunta de los alumnos acerca del desarrollo del taller fue: “Profesor ¿cómo construyo el polígono regular de 30 lados?” En respuesta a esta cuestión se les hacía caer en cuenta que el polígono regular de mayor lado que podían construir en la calculadora era el de 17 lados, y que para calcular el perímetro de un polígono de $2n$ lados podríamos partir del perímetro del polígono de n lados utilizando la siguiente fórmula: $P_{2n} = 2 * n * (d / 2 * (d - ((d^2 - (p/n)^2)^{(1/2)})))^{(1/2)}$. que introducida en la calculadora tiene el siguiente aspecto: (obsérvese el número de paréntesis utilizados), varios alumnos desistieron de seguir hallando el perímetro de los polígonos que tenían números de lados mayores de 17 ya que pensaban que con lo hecho hasta el momento sabían a lo que iban a llegar y sin ningún problema podrían contestar las preguntas presentadas.

SOCIALIZACION EN EL AULA

Al momento de la socialización del taller fueron muchos los estudiantes que querían pasar frente al grupo para socializar mediante el Vio Screen lo hecho por

ellos, así que decidimos que pasaran varios estudiantes, haciendo el primero la construcción hasta el polígono regular de tres lados, hallando su perímetro y la razón entre este y el diámetro en el cual estaba inscrito el polígono, otro trabajo con el hexágono y así hasta llegar a aplicar la formula descrita anteriormente para hallar el perímetro del polígono regular de 30 – lados.

A continuación damos el análisis de las respuestas dadas en el taller No 9.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL TALLER.

Pregunta	Interpretación	Porcentaje %
¿Cómo son los datos de la segunda columna?	- Son concientes de que los números van creciendo pero no pueden sobrepasar cierto límite.	63.33
	- Miran solo la parte entera del decimal obtenido	9.09
	- No responden	18.18
	- Explican como se obtienen	9.09
Observa la tercera columna. Los datos de esta columna ¿tienden a algún valor?	- Guiados por los valores de la tabla, la forma del 17 – gono y los comentarios hechos en la socialización responden que tienden al valor de π .	53.84

	- Son números crecientes pero cada vez más cerca.	38.46
	- No responden	7.7
Compartamos con los demás grupos y miremos ¿se escogió igual D para todos?	Coinciden en que D (diámetro) es diferente en cada grupo	100
¿Hay coincidencia entre los resultados de tu tabla y la de tus compañeros?	- Si en varios números se asemejan.	69.23
	- No. Afirmando que los datos dependen del segmento inicial.	30.77
Si pudieras construir en la calculadora un polígono regular de 540 lados ¿A que figura geométrica se asemejaría?	- Afirman que de seguro se asemejaría a un círculo.	100
¿Qué conclusiones obtienes?	- Los números de la razón P/D van aumentando con una aproximación a π .	30.77

	- A medida que va aumentando el número de lados del polígono va tomando forma circular.	30.77
	- A medida que va aumentando el número de lados del polígono regular se parecerá a un círculo, lo cual hace que la división entre el perímetro y el diámetro se acercará al número π .	38.46

Al igual que en los demás talleres pudimos observar el desarrollo de los estudiantes en los siguientes aspectos:

- Lo que se refiere al uso de las nuevas tecnologías: la mayoría de los estudiantes presentan una gran motivación al trabajar con ellas, y muestran ser ágiles en su utilización y aplicación.
- El aprendizaje logrado del tema lo reflejan en las respuestas dadas y su participación activa dentro del aula cuando se esta desarrollando el taller y en el desarrollo de los talleres de autoaprendizaje.
- Entre las formas de comunicación encontramos que fallan en la utilización de algunos términos al tratar de dar una explicación de una determinada acción, por ejemplo al introducir el término “consecutivo” al exponer sus ideas acerca del orden de números racionales y más que todo cuando utilizan el medio oral

introducen una serie de muletillas, tales como “o sea”, “eh”, “mmm”, entre otras que dan muestra de su falta de seguridad al expresarse.

- Al momento de argumentar se expresan con propiedad cuando se trata de un hecho realizado en el software e igualmente hacen conjeturas según la forma de la figura que han realizado y la relacionan con una que ya conocen.

4. CONCLUSIONES

Durante el proceso de construcción y aplicación de esta propuesta de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- La utilización de nuevas tecnologías en el aula de clases contribuye a reducir el nivel mecánico con que se trata a menudo la presentación de los números irracionales en esta, dándole mayor importancia a las propiedades y conceptos en que se fundamentan.
- Mediante la aplicación de los procedimientos los estudiantes han desarrollado estrategias útiles para representar números irracionales y formular situaciones de inconmensurabilidad
- Se despierta el interés por parte del estudiante hacia el estudio del sistema de los números irracionales.
- Se logra mayor participación de los estudiantes en el proceso de construcción de conocimiento.
- La aplicación de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje se hace necesaria y útil acompañada con una adecuada didáctica.

5. RECOMENDACIONES

Para el desarrollo y puesta en práctica de propuestas similares a esta recomendamos a las instituciones:

- Poseer o adecuar salas de informática exclusivamente para la enseñanza del área de las matemáticas.
- Cualificar a docentes del área de matemáticas en el uso de nuevas tecnologías.

En lo referente a los docentes les recomendamos:

- No sentirse relegados por las máquinas
- Diseñar estrategias donde se tomen como herramienta nuevas tecnologías.
- Proponer problemas que involucren números irracionales.

6. BIBLIOGRAFÍA.

- Boyer, C. (1.968): A History of Mathematics. John Wiley & Sons. Traducción española en Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial Textos (1.987).
- DIAZ BARRIGA F y HERNANDEZ ROJAS G. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. MC Graw Hill, México, Enero 1999. p. 14-17
- EDUCACIÓN EN TECNOLOGÍA. Propuesta para la educación básica, equipo de tecnología. MEN, Santa Fe de Bogotá. Marzo de 1996
- FIGUEROA, D. Didácticas De Las Matemáticas. Santa Fe de Bogotá, ASED LTDA, Diciembre de 1997, p. 179,...
- HENAO, O. Tecnología informática. Estrategias didácticas en ciencias naturales y matemáticas. En: Revista Educación y Cultura. No 44, p.32. Santa Fe de Bogotá, julio de 1997
- MARTINEZ, J. Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. Santa Fe de Bogotá, ASED LTDA, Octubre de 1995, p. 29,...
- MARTINEZ, J. Teorías de l Aprendizaje. Santa Fe de Bogotá, ASED LTDA, Febrero de 1996, p. 138,...
- MATEMATICAS. LINEAMIENTOS CURRICULARES. Santa Fe de Bogotá. MEN, Julio de 1998
- RODRÍGUEZ, E. Práctica docente reflexiva. Barranquilla, Editorial Mejoras, 1993, p. 28,...

- RUIZ AYALA, N. Escuela del tercer milenio. Reflexiones. Santa Fe de Bogotá. 1994, p 202.
- TOSCANO, Carmen. Propuesta Metodológica para el estudio de la función lineal usando Derive. Sincelejo, Junio de 1.999

Internet.

- <http://cedar.evansville.edu/~ck6/tcenters/class/isodyn.html>
- www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman.html

ANEXOS

TABLA DE CONTENIDO

0.	INTRODUCCION.....	8
1.	PRESENTACIÓN DEL PROYECTO.....	10
1.1	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	10
1.2	FORMULACION DEL PROBLEMA.....	11
1.3	JUSTIFICACIÓN.....	12
1.4	OBJETIVOS.....	15
1.4.1	GENERAL:.....	15
1.4.2	ESPECIFICOS.....	15
2.	MARCO TEORICO.....	16
2.1	ANTECEDENTES:.....	16
2.2	BASES TEORICAS.....	20
1.2.1	TEORÍAS SOBRE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO.....	21
	Aprendizaje y Constructivismo.....	21
	Constructivismo matemático: una nueva visión.....	24
	El Aprendizaje Significativo.....	26
	La meta del aprendizaje significativo.....	27
	El material potencialmente significativo.....	28
	Aprendizaje Colaborativo.....	29
2.3	RESEÑA HISTORICA DE LOS INCONMENSURABLES.....	31
2.4	MARCO CONCEPTUAL.....	44
3.	METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	47
4.	CONCLUSIONES.....	59
5.	RECOMENDACIONES.....	60
6.	BIBLIOGRAFÍA.....	61
	ANEXOS.....	63

Sincelejo Julio 19 del 2001

Señores:
COMITÉ DE INVESTIGACIÓN
CONCEJO DE FACULTAD
UNIVERSIDAD DE SUCRE
CIUDAD

Ref: Entrega de Proyecto

Cordial saludo.

Con la presente hago entrega del proyecto, cuyo titulo es “**PRESENTACIÓN EN EL AULA DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES CON EL SOFTWARE CABRI GEOMETRE II**”, entregada por los alumnos de licenciatura en matemática: EDGAR MADRID CUELLO Y PAOLA PÉREZ SOTOMAYOR, con códigos 113 78 09 0230440 y 113 77 04 0712073 respectivamente y cuyo asesor es el profesor MARCOS VINICIO BETIN SEVERICHE.

Atentamente:

EDGAR MIGUEL MADRID CUELLO

PAOLA SOFIA PÉREZ SOTOMAYOR

MARCOS VINICIO BETIN SEVERICHE
Director

ASPECTOS A TENER EN CUENTA PARA EL DESARROLLO DE LA METODOLOGIA:

- ¿cómo se construyen las actividades?
- A que apuntan los ITEMES
- Secuencia de las actividades
- Papel del estudiante
- Papel del maestro
- ¿cómo se reflejan las teorías en su construcción?
- ¿Cómo se analizara la información?
- Se tomara una sola actividad y se tendrá en cuenta:
 - ❖ El uso de las nuevas tecnologías.
 - ❖ El aprendizaje logrado del tema.
 - ❖ Las formas de comunicación.
 - ❖ La capacidad de argumentación.
- Revisión de teorías sobre construcción de conocimientos matemáticos.
- Revisión de métodos geométricos para la construcción de números irracionales.
 - Aproximación de números irracionales mediante el uso de algoritmos de tipo iterativo.