ESTUDIO DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES, PERFECTOS, AMIGOS Y FELICES

FRANCIA ESPITIA PEDROZA
LEIDÍS CONTRERAS TOUS

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
SINCELEJO SUCRE
2001

ESTUDIO DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES, PERFECTOS, AMIGOS Y FELICES

FRANCIA ESPITIA PEDROZA
LEIDÍS CONTRERAS TOUS

Trabajo presentado como requisito para optar el título de:
Licenciado en Matemáticas.

Director:
EDUARDO CHAUCANÉS JACOME

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
SINCELEJO SUCRE
2001

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

Presidente del Jurado

____

Jurado

____

Jurado

____

Jurado

Sincelejo, 27 de noviembre de 2001.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por brindarnos la luz que ilumina nuestro sendero.

A nuestros Padres, por brindarnos el amor, el apoyo y la comprensión.

A Jader y Gabriel, por brindarnos su amor y apoyo incondicional.

Al Director del trabajo: Eduardo Chaucanés Jacome.

Al licenciado Helber Medrano.

Al los Licenciados: Iván Núñez, Silver Quintana y Felix Rozo por sus intervenciones valiosas como evaluador.

A la Universidad de Sucre por hacer de nosotras unas excelentes profesionales.

Nuestros más íntimos agradecimientos a todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron para hacer realidad este gran sueño.

A Dios, por haberme dado la seguridad y la fe para seguir en el camino.

A mis padres y hermanos por haberme brindado su apoyo incondicional.

A mi novio Gabriel por haberme brindado su amor y comprensión en estos momentos decisivos de mi vida.

A mi compañera de trabajo por haber luchado conmigo hasta el final sin desmayar.

A todos mis amigos de la SAM.

A todas las personas que de una u otra manera colaboraron con la realización de este trabajo.

Leidis.

A Dios, por haberme brindado la fe y la confianza en mi misma.

A mis padres Ana y Marcelino por brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanas y sobrinos por su comprensión.

A mi novio Jader por su amor, su comprensión y colaboración en los momentos más difíciles de mi vida.

Y a todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para que este sueño se hiciera realidad.

Francia.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Es conocido el oficio calculista y comercial que los fenicios y babilónicos le dieron a los números. Este procedimiento permitió el descubrimiento de nuevos números, el conocimiento de sus propiedades y relaciones entre ellos mismos y con otros grupos de números, como los asignados a la serie de números 1, 3, 6, 10, 15,...., conocidos como números triangulares.

Durante este proceso muchos números fueron estigmatizados y hasta considerados diabólicos, sin embargo se les admitía en soluciones de problemas. Este desarrollo que duró cientos de miles de años termina con los grandes resultados de Diofanto de Alejandría, llamado este periodo como el nacimiento del álgebra.

Los griegos no se quedaron atrás en el descubrimiento y utilización de las propiedades de algunos números. Ellos mediante la relación figura-número establecieron las bases para la utilización de ciertos grupos de números, tales como los figurativos, (triangulares, cuadrados, pentagonales). Todo ello hasta llegar a los grandes resultados que conocemos sobre la teoría de números.

Algunas curiosidades que aparecen en la teoría de números han motivado a este grupo a investigar con mayor profundidad la construcción geométrica de los números figurativos a través del gnomon. Con ello se pone en evidencia la relación estrecha entre lo geométrico y lo aritmético, pues a través de la geometría se sustenta la construcción de cualquiera de los números figurativos en particular la de los números triangulares, como se verá en el capítulo II.

En la teoría de números se estudia no solo las relaciones internas en un grupo especial de números, sino entre varios grupos de números, es así como en el capítulo III se presentan las relaciones entre los números triangulares, perfectos y amigos.

Se terminará presentando otras de las curiosidades de la teoría de número como son los números felices, la cual se evidenciará en el capítulo IV.

Este trabajo de corte monográfico es puesto a consideración de docentes y estudiantes de todos los grados, pues los números no son solo símbolos que ayudan a la resolución de problemas y ejercicios aritméticos, sino que tienen la facultad de desarrollarse en sí mismo y relacionarse con la geometría.

CAPÍTULO I

CONCEPTOS BÁSICOS

Para facilitar la comprensión del presente trabajo mencionamos a continuación los conceptos utilizados tanto en las demostraciones de las proposiciones como en las ideas centrales del mismo.

CONGRUENCIA: Dos o más figuras geométricas, son congruentes si tienen la misma área.

DIAGONAL: Recta que une en un polígono dos vértices no consecutivos.

DIVISORES PROPIOS: Son todos los divisores de un número, exceptuando al mismo.

EQUIVALENCIA: Igualdad de dos áreas en figuras planas distintas.

GNOMON: (Punto de vista aritmético), número que hay que sumar a un figurativo para que de el siguiente.

GNOMON: (Punto de vista geométrico), figura que se ha agregado a otra de tal manera que la figura completa es semejante a la figura original o más pequeña.

NÚMEROS AMIGOS: Pareja de números donde la suma de los divisores propios de uno, da como resultado al otro y viceversa.

NÚMEROS CUADRADOS: Aquellos que se obtienen al efectuar las sumas parciales de las series 1,3,5,7,......2n+1.

NÚMEROS EXCEDENTES: Aquellos donde la suma de sus divisores propios es un número mayor que el mismo.

NÚMEROS FELICES: Aquellos que los podemos obtener sumando los cuadrados de las cifras de un número cualquiera hasta llegar a uno.

NÚMEROS FIGURATIVOS: Aquellos que los podemos representar en forma de figuras.

NÚMEROS INSUFICIENTES: Aquellos donde la suma de sus divisores propios, es un número menor que el mismo.

NÚMEROS OBLONGOS: Aquellos que se obtienen al efectuar las sumas parciales de la serie 2, 4, 6.....2n.

NÚMEROS PERFECTOS: Aquellos donde la suma de sus divisores propios, da como resultado el mismo número.

NÚMEROS TRIANGULARES: Números figurativos cuyas representaciones son triángulos equiláteros.

PARALELOGRAMOS: Cuadrilátero de lados opuestos paralelo.

PARALELOGRAMOS COMPLEMENTARIOS: Si a partir de un punto sobre una de las diagonales de un paralelogramo trazamos dos segmentos paralelos a dos lados consecutivos, de manera que se formen cuatro paralelogramos, los paralelogramos no cruzados por la diagonal se llaman complementarios.

PARIDAD: Condición que cumple una pareja de números de ser pares o impares al relacionarlos.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA: Serie en la cual cada dos términos consecutivos tienen la misma razón.

SEMEJANZA: Características que tienen algunas figuras de tener sus ángulos iguales y sus líneas homogéneas proporcionales.

CAPÍTULO II

En este capítulo demostraremos las proposiciones que dan base geométrica para la interpretación de los números figurativos en general, en particular los triangulares. Así mismo se esboza las relaciones entre los números triangulares con los oblongos y los cuadrados.

NÚMEROS TRIANGULARES

Desde la antigüedad, en los distintos tipos de construcciones (canales, pirámides, palacios, etc) se utilizaron diversos materiales con paredes de forma triangular, cuadrática, circular, etc, figuras con las cuales el hombre se fue familiarizando a través de los años, conociendo poco a poco sus propiedades. Es así como se presentan los primeros vestigios de lo que se llamará más tarde geometría, "ciencias de la figuras", la cual alcanzó gran desarrollo en la antigua Grecia[1] especialmente dentro de la denominada Escuela Pitagórica (Siglo VI V a. C), cuyos seguidores fueron quienes desarrollaron no solamente la geometría sino que además establecieron sus relaciones directas con la aritmética.

Se representaron luego los números en forma de punto, agrupados en diferentes figuras; dicha representación de los números facilitó a los babilonios y pitagóricos estudiar sus propiedades. Los números que se podían representar en forma de

[1] CARL, Boyer. Historia de las Matemáticas Alianza. Ed.

figura geométrica se denominaron **números figurativos**, entre los cuales tenemos: los triangulares, cuadrados, pentagonales, etc: las siguientes figuras nos muestran porque se les da éste nombre.

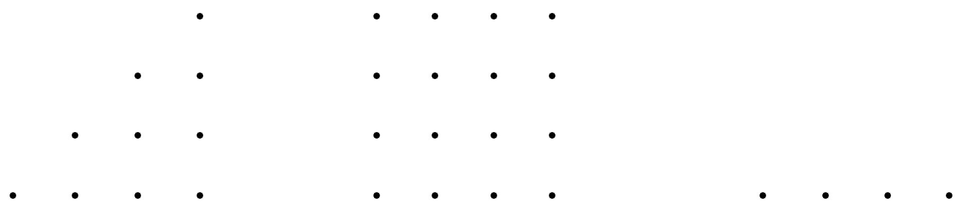


Figura 1. Figuras que denotan algunos números figurativos.

Matemáticos como Erastotenes (Siglo III-II a.C) Nicomedes (S.II-I a.C), Diofanto (S.II) y algunos hindúes realizaron importantes estudios sobre esta clase de números.

Entre los números figurativos más sencillos cabe destacar los números triangulares 1,3,6..., determinados mediante una cierta cantidad de puntos ubicados en los lados de un triángulo equilátero.

Los números triangulares poseen una variedad de propiedades curiosas, algunas de las cuales se pueden deducir de sus configuraciones triangulares, así por ejemplo, los números triangulares se pueden encontrar sencillamente sumando todos los números enteros, comenzando desde el 1 hasta cualquier otro entero, pero resulta dispendiosa esta suma si se quiere encontrar, por ejemplo el millonésimo de ellos, pues significa llevar a cabo una adición de un millón de sumandos, presentada esta dificultad, Gauss ideó una forma más sencilla de encontrar números triangulares muy grandes y convirtió un complicado problema de adición en un sencillo de multiplicación. Para ilustrar este proceso supóngase que se debe sumar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nótese que si se coloca dos veces la suma pedida una debajo de la otra la segunda de ella en orden inverso, los números ordenados verticalmente suman siempre 11.

1+	2+	3+	4+	5+	6+	7+	8+	9+	10
10+	9+	8+	7+	6+	5+	4+	3+	2+	1
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Es decir, como dos veces la suma pedida es igual a 10 x11 entonces solo una vez será igual a: $\frac{10\times 11}{2}=55$

Por medio de éste método Gauss probó que todo número triangular[2] es de la forma: $\frac{n(n+1)}{2}$, que es la suma de los n primeros números naturales.

ó $\frac{n(n-1)}{2}$ Para n $\neq$ 1

[2] CASTILLO, Eugenia. Enciclopedia Ilustrada. Bogotá: 1998. Círculo de Lectores.

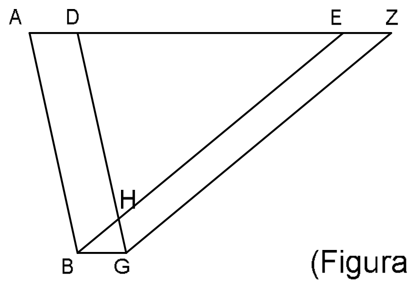
2.1 EL GNOMON COMO CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES

2.2 TEORÍA PROPOSICIONAL

Para demostrar el teorema del gnomon se requieren las proposiciones siguientes:

2.2.1 **Proposición 1**. Dos o más paralelogramos con un lado común y los lados opuestos a la base sobre la misma paralela, son congruentes.

Demostración: Sean ADGB y EZGB paralelogramos sobre la misma base $\overline{BG}$



(Figura 2).

Entonces, $\overline{AD} \cong \overline{BG} \wedge \overline{EZ} \cong \overline{BG}$ (Por ser lados opuestos del Paralelogramo)

de donde $\overline{AD} \cong \overline{EZ}$ (por transitividad)

Y así, $\overline{DZ} \cong \overline{AE}$ (1) (por tener $\overline{DE}$ en común)

Como EZGB es un paralelogramo,

Entonces $\overline{EB} \cong \overline{ZG}$ (2) (por ser lados opuestos del paralelogramo)

Y $< BAE \cong <GDE$ (3) (por correspondientes)

Entonces de (1), (2) y (3) se tiene que:

$\triangle BAE \cong \triangle GDZ$ (Teorema L.A.L)

Y así $(\triangle BAE - \triangle HDE) \cong (\triangle GDZ - \triangle HDE)$ (Ley Monótona)

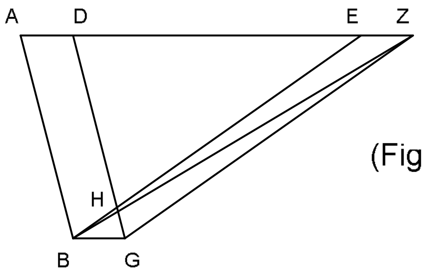
De donde ⏢ ADHB $\cong$ ⏢ EZGH

Luego ⏢ ADHB + $\triangle$BHG $\cong$ ⏢EZGH + $\triangle$BHG

Por tanto se concluye que ▱ADGB $\cong$ ▱ EZGB ¶

2.2.2 **Proposición 2**. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y el vértice del triángulo está sobre la misma recta que el lado opuesto a la base del paralelogramo, entonces el área del paralelogramo es el doble de la del triángulo.

Demostración: como corolario de la proposición 1 podemos considerar la figura 2.



(Figura 3)

Se sabe que ▱ ADGB ≅ ▱ EZGB (Proposición 1)

Trazando la diagonal $\overline{BZ}$ al paralelogramo EZGB,

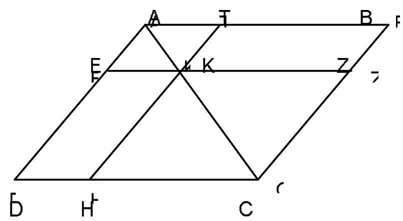
Se tiene que △ EZB ≅ △ ZGB (Los triángulos producidos por la diagonal en un paralelogramo son equivalente)

De donde 2△ EZB ≅ ▱ EZBG

Por tanto ▱ ADGB ≅ 2 △ EZB ¶

2.2.3 **Proposición 3.** En todo paralelogramo, los paralelogramos complementarios son congruentes.

Demostración: Sea el paralelogramo ABCD (Figura 3).



(Figura 4).

Si se elige un punto K sobre la diagonal $\overline{AC}$ y a través de él se trazan paralelas a $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, originándose los paralelogramos ATKE y KZCH que están atravesados por la diagonal $\overline{AC}$.

Los paralelogramos EKHD y TKZB son los llamados complementarios, demostremos que son equivalentes.

Por ser ABCD y ATKE paralelogramos cortados por las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AK}$, respectivamente, que están sobre la misma recta, entonces:

$\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ ABC $\wedge$ $\triangle$AKE $\cong$ $\triangle$ATK $\wedge$ $\triangle$KCH $\cong$ $\triangle$KZC

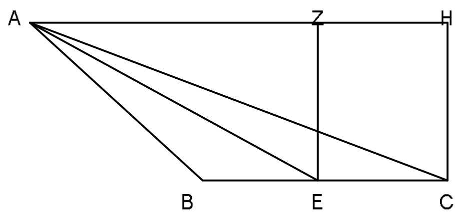
Como $\triangle$ ADC$\cong$ $\triangle$ABC entonces

$\triangle$ADC $-\left[\Delta\mathrm{AKE}+\mathrm{KCH}\right]\cong\Delta\mathrm{BC}-\left[\Delta\mathrm{ATK}+\mathrm{KZC}\right]$, , de donde

EKHD▱ EKHD$\cong$ ▱ TBZK

2.2.4 **Proposición 4.** Dado un triángulo, a partir de un ángulo dado sobre uno de sus lados, se puede construir un paralelogramo equivalente al triángulo dado.

Demostración: Sea el triángulo ACB (Figura 5)



(Figura 5)

Sobre el lado $\overline{BC}$ se determina el punto medio, E de donde:

$\overline{BE}$ $\cong$ $\overline{EC}$ (1)

Se construye el ángulo dado, AEZ, con vértice en el punto E.

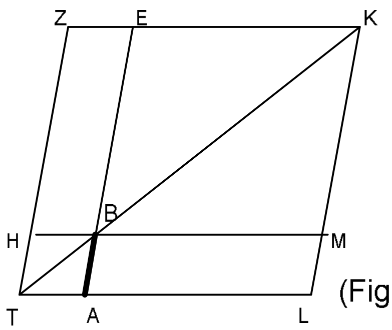
Se traza un segmento $\overline{AH}$ paralelo al lado $\overline{BC}$ y a partir del vértice C se traza un segmento paralelo a $\overline{EZ}$ que intercepte al segmento $\overline{AH}$ en el punto Z.

Al trazar el segmento $\overline{AE}$, se construyen dos triángulos semejantes $\triangle AEB \cong \triangle ACE$, puesto que sus bases son iguales (1), y dado que la base y el vértice están sobre segmentos paralelos, $\overline{BC} \parallel \overline{AH}$ entonces por la proposición 2 tenemos que el paralelogramo ZHCE $\cong$ 2 $\triangle$ ACE y como 2 $\triangle$ ACE $\cong$ ACB
se tiene que $\square$ ZHCE $\cong \triangle$ACB ¶

2.2.5 **Proposición 5**. Teorema del Gnomon.

A partir de un ángulo y de un segmento dado se puede construir un paralelogramo equivalente a un triángulo dado.[3]

Demostración: Consideremos el segmento $\overline{EA}$ (Ver Figura 6), y sobre el punto B construyamos el ángulo dado EBH de modo que el segmento $\overline{BA}$ sea de igual longitud que el segmento dado.



(Figura No.6)

Ahora bien, en virtud de la proposición 4, se puede construir el paralelogramo EBHZ equivalente al triángulo dado.

[3] BRAVO, Juan. Científicos Griegos. Madrid (España): 1970. Ediciones Aguilar S.A.

Se traza un segmento a partir de A y paralelo a $\overline{BH}$, de manera que se intercepten en el punto T, con la prolongación del segmento $\overline{ZH}$, se construye el paralelogramo BATH.

Al trazar la diagonal $\overline{TB}$; del paralelogramo BATH y prolongarla, al igual que el segmento $\overline{ZE}$ se interceptarán en el punto K (porque la suma de los ángulos BTH y TZE mide menos de 180°). A partir de K se traza un segmento paralelo a $\overline{ZT}$ que se interceptará con la prolongación del segmento $\overline{TA}$ en el punto L.

Si se prolonga el segmento $\overline{HB}$ hasta que intercepta el segmento $\overline{KL}$ en el punto M, se tiene que:

-KLTZ es un paralelogramo.

-La diagonal $\overline{TK}$ atraviesa los paralelogramos BATH y KMBE.

De donde, por proposición 3, tenemos que los paralelogramos EBHZ es congruente con el paralelogramo MLAB y como el EBHZ es equivalente al triángulo dado, por transitividad, se tiene que el paralelogramo MLAB es congruente con el triángulo dado y puesto que el ángulo MBA es congruente con el ángulo EBH y este con el ángulo dado, entonces el ángulo MBA también es congruente con el ángulo dado, de donde se puede concluir que el segmento dado

$\overline{BA}$ se ha aplicado en el ángulo MBA, igual al ángulo dado, entonces el paralelogramo MLAB es equivalente al triángulo dado.¶

De acuerdo a la proposición 5 al agregar un gnomon a una figura se obtiene otra figura semejante, a esta nueva figura se le agrega un gnomon semejante al anterior y así sucesivamente de tal manera que todas las figuras obtenidas son semejantes a la inicial, este proceso de formar figuras sucesivas puede aplicarse por todas partes, comenzando por la primera figura formada por un punto y así sucesivamente formando figuras que sean mayor que la anterior, en las figuras posteriores las regiones sombreadas son gnomones para el triangulo, el cuadrado y el pentágono.

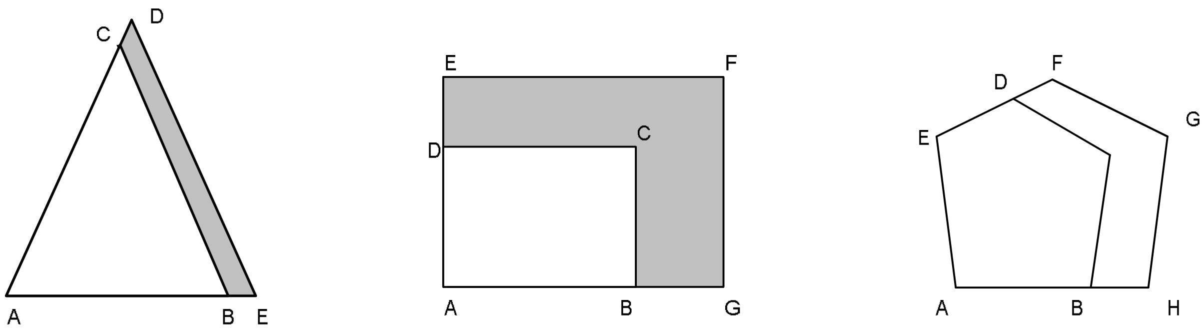


Figura 7. Gnomon para el triángulo cuadrado y pentágono.

En el caso de los números triangulares se puede ver fácilmente que si se tiene un número de puntos (digamos 3) formando un triángulo (figura 8-a) el próximo triángulo mayor que el anterior (en este caso constituido por 6 puntos) puede formarse agregando puntos alrededor del triángulo inicial (figura 8-b).

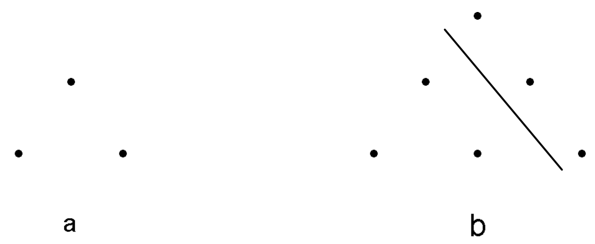


Figura 8a-8b.

Lo mismo sucede en el caso de los números cuadrados, pentagonales, etc... los números triangulares desde el punto de vista aritmético pueden encontrarse sencillamente sumando todos los enteros, empezando desde el 1 hasta cualquier otro entero, donde cada número constituye un gnomon correspondiente para cada figura, así: **1**,**3** = 1+2, **6**=1+2+3, **10**=1+2+3+4. Son números triangulares; las figuras que ellos representan.

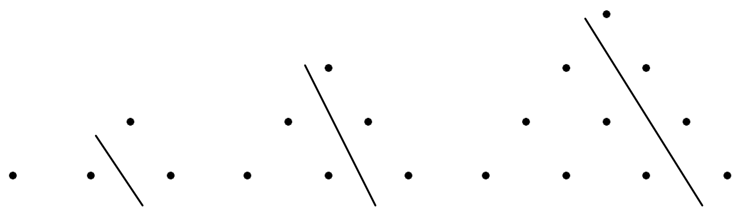


Figura 9. Puntos que representan números triangulares.

Son triángulos equiláteros, de aquí el apelativo de números triangulares. Por otra parte las sumas parciales de las sucesiones 1,2,3,4 y 1,3,5,7... generan los números triangulares y cuadrados respectivamente, ahora al efectuar las sumas parciales de la serie 2,4,6,8..2n se generan los llamados números “oblongos”, los cuales tienen como fórmula n(n+1), que es parecida a la de los números triangulares, por esta razón los pitagóricos establecieron algunas relaciones entre estos números.

2.3 ALGUNAS RELACIONES DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES CON OTROS NÚMEROS

2.3.1 RELACIONES ENTRE NÚMEROS TRIANGULARES Y OBLONGOS

La suma de dos números triangulares iguales es un número oblongo. Esto se puede observar en el siguiente esquema.

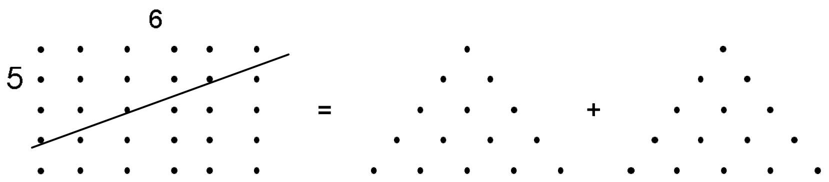


Figura 10.

Demostremos que la suma de dos números triangulares produce un número oblongo.

Si se tiene $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + n$

Entonces, $n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 ... + n)$

De donde $n(n+1) = (1+2+3+...+n) + (1+2+3+....+n)$ ¶

2.3.2 RELACIONES ENTRE NÚMEROS TRIANGULARES Y CUADRADOS

La suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado.

Esto se puede observar en el siguiente esquema:

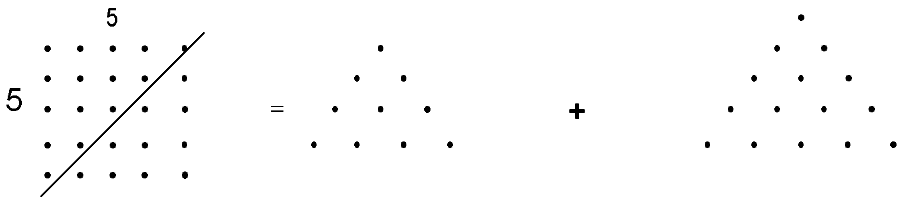


Figura 11.

La demostración es obvia, pues si los números triangulares son: $\frac{1}{2}n(n-1)$ y $\frac{1}{2}n(n+1)$

(consecutivos), entonces

$$\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n-1) + n(n+1)}{2} = \frac{n^2 \cancel{-n} + n^2 \cancel{+n}}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \quad ¶$$

Otro resultado relacionado con los números triangulares y cuadrados es el Teorema que dice que 8 veces un número triangular más 1, forma un número cuadrado. (Este teorema es debido a los Pitagóricos citados por Plutarco y asumido luego por Diofanto).

$$8 \bullet \frac{1}{2}(n+1)n + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2$$

Como se evidencia en la figura 12.

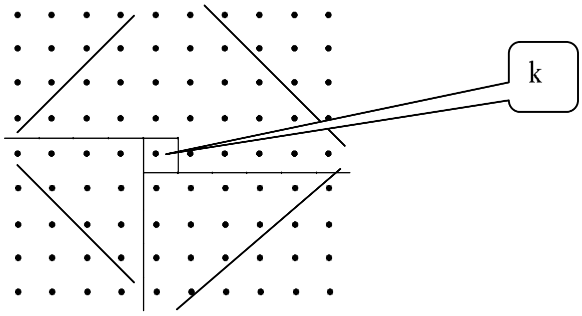


Figura 12.

Aquí se muestra un cuadrado de lado 9, dividido en sus cuatro números oblongos iguales y un punto único en el medio k, además puede verse que cada número oblongo determina dos números triangulares iguales, y que los números triangulares son apenas una de las tantas familias que hay entre los números que se usan para contar.

CAPÍTULO III

NÚMEROS PERFECTOS Y AMIGOS

Siguiendo el esquema que parte de lo geométrico como fundamento para la construcción de los números triangulares, se presentarán algunas relaciones de estos con los números perfectos y de estos con lo amigos, también se presentarán algunas propiedades y formas básicas para hallar algunos de ellos.

En la Escuela de Pitágoras, la aritmética estaba íntimamente ligada a la música, de aquí los pitagóricos sacaron la conclusión de que la armonía dependía de los números; por esta razón, ellos consideraban que los números amigos eran aquellos que existían para defender y servir al otro, como la dada por la pareja del 220 y 284, denominada desde la antigüedad, pareja de números amigos.

En el Siglo XVIII Leonardo Euler[4] halló 65 parejas de números amigos, una de ellas es la del 17296 y el 18416, pero cabe aclarar que esta pareja ya había sido hallado por Fermat; parece que hasta hoy no ha sido posible encontrar la fórmula general para obtener parejas de números amigos.

Ahora bien, el número 220 es menor que la suma de sus divisores propios, que es 284; a esta clase de números se les llamó insuficientes; por el contrario, 284 es

[4] MORA, Telmo. Conferencia Teoría de Números 14-15.p.

mayor que la suma de sus divisores propios, que es 220; a esta clase de números se les llamó excedentes, sin embargo, hay números que son exactamente iguales a la suma de sus divisores propios, por ejemplo, 6=1 + 2 + 3, que son los números denominados perfectos. Los pitagóricos lograron determinar 3 de estos números a saber: 6,28 y 496.

En la “aritmética” de Nicomedes (S.I d. C) aparece ya un cuarto número perfecto, el 8128.

A medida que nos desplazamos sobre la recta numérica en la cual se ubican los números naturales, los números perfectos van siendo cada vez menos frecuentes. Entre el 1 y el 10.000 hay solamente 4 números perfectos, que son: 6,28,496 y 8128.

Al matemático y filósofo de la antigua Grecia, Pitágoras de Samos[5] (Siglo VI A.C) y a sus alumnos se les debe el descubrimiento de importantes propiedades de números enteros y de las propiedades entre ellos.

Además de los números figurativos los pitagóricos introdujeron el concepto de números perfectos y amigos.

Los pitagóricos clasificaron a cada número considerando sus divisores pero exceptuando al mismo (es lo que se llama sus partes alícuotas) y sumándolos,

[5] Ibíd., 16-28.p.

esta suma es, en general, mayor o menor que el mismo número que es llamado, en consecuencia, abundante o deficiente. Por ejemplo, 12 es abundante porque la suma de sus partes alícuotas o divisores es: 1+2+3+4+6=16, en cambio el ocho es deficiente, pues 1+2+4=7.

La búsqueda de los números perfectos es uno de los más antiguos problemas de la teoría de números, para tal caso Euclides en los elementos de geometría menciona un teorema, relacionado con esta clase de números como el siguiente.

Teorema: Si la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica 2^n nos da un número primo, entonces esta suma por el término n-esimo es un número perfecto.

Es decir: $n \in N$ y $\sum_{K=0}^{n} 2^k$ es primo entonces.

$\left(\sum_{K=0}^{n} 2^K\right) 2^n$ es un número perfecto.

Demostración: Sea $r=2^n-1$ un número primo y $S=2^{n-1}r$, la suma de los divisores de $2^{n-1}(2^n-1)$. Entonces:

$S=(1+2+4+.....+2^{n-1})+r(1+2+4+....+2^{n-2})$

$=1(1+2+4+......2^{n-2})+2^{n-1}+r(1+2+4+....+2^{n-2})$

$=(1+r)\ (1+2+4+....+2^{n-2})+2^{n-1},$

y como es

$1+2+4+....+2^{n-2} = 2^{n-1}-1$

$1+r=2^n=2x2^{n-1}$

Resulta

$S = 2x2^{n-1}(2^{n-1}-1)+2^{n-1}$

$= 2^{n-1}[2(2^{n-1} - 1)+1]$

$= 2^{n-1} \cdot r$

Ejemplo

Tomemos la suma de los dos primeros términos de la progresión geométrica 2^n esto es 1+2=3.

Como esta suma nos dio un número primo, éste por el último de ellos nos da un número perfecto, es decir:

$2 \times 3 = 6$ que es el primer número perfecto.

Los números perfectos más conocidos son los siguientes:

	Fórmula	Número	Número de cifras
1	$2^1.(2^2-1)$	6	1
2	$2^2(2^3-1)$	28	1
3	$2^4.(2^5-1)$	498	3
4	$2^6.(2^7-1)$	8128	4
5	$2^{12}.(2^{13}-1)$	33.550.336	8
6	$2^{16}.(2^{17}-1)$	8.589.869.056	10
7	$2^{18}.(2^{19}-1)$	137.438.691.328	12
8	$2^{30}.(2^{31}-1)$	2.305.843.008.139.952.128	19
9	$2^{60}.(2^{61}-1)$	2.658.455.991.569.831.744.654.962.615.953.842.176	37
10	$2^{88}.(2^{89}-1)$		
11	$2^{126}.(2^{127}-1)$		
12	$2^{520}.(2^{521}-1)$		
13	$2^{606}.(2^{607}-1)$		
14	$2^{1278}.(2^{1279}-1)$		
15	$2^{2202}.(2^{2203}-1)$		
16	$2^{2280}.(2^{2281}-1)$		1372

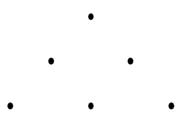
Tabla 1. los 16 números perfectos conocidos.

La fórmula de Euler da números perfectos pares y todos terminan en 6 o en 8, como se muestra en la tabla anterior, pero no se sabe todavía si existen números perfectos impares ni se ha demostrado la inexistencia de los mismos y lo único que se ha conseguido establecer, en 1949, es que sí existe un número perfecto impar, tiene que ser de la forma 12n + 1, ó 38 n + 9 y será mayor que 10 billones.

Euclides y Theón de Esmirna solo conocían los dos primeros números perfectos y Nicomaco, los cuatro primeros, este decía que ellos se encontraban en forma organizada existiendo, uno entre las unidades que es el 6, otro entre las decenas que es el 28, otro entre las centenas que es el 496 y otro entre las unidades de mil que es el 8128, el quinto fue calculado por Jámblico; los tres siguiente se encontraron en el Siglo XVI, el noveno se debe a P. Seelhoff, el décimo se debe a R.E, Powers, y los 5 últimos han sido calculados desde 1950 hasta hoy con la máquina electrónica S.W.A.C, del Brureau of standard institute for Numerical Análisis.

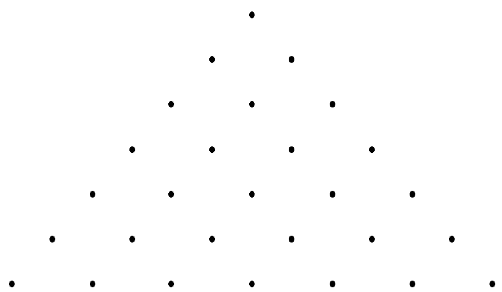
3.3.2 RELACIÓN DE LOS NÚMEROS PERFECTOS CON LOS TRIANGULARES

Para establecer esta relación se debe tener en cuenta que los números triangulares tienen como representación gráfica una cierta cantidad de puntos formando un triángulo, de esta manera también podemos representar a los números perfectos, agrupando puntos de tal manera que formen un triángulo equilátero que es la representación gráfica de un número triangular, así como se puede observar en las siguientes figuras:



=6

Fig. a



=28

Fig. b

Y así sucesivamente, podemos representar cualquier número perfecto, utilizando la representación gráfica de un número triangular.

Similarmente, a lo números perfectos están los números amigos, a éstos números se les llama los números amigos porque cada uno de ellos existe para servir o defender al otro.

Dos números enteros se dice que son números amigos si la suma de los divisores del primero (excluyendo el mismo número) es igual al segundo y viceversa. La pareja más pequeña de números amigos descubierta por los pitagóricos es el 220 y el 284, en efecto, los divisores de 220, excluido 220 son:1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, 44, 55 y 110, cuya suma es 284, mientras que la suma de los divisores de 284, excluido 284 son: 1, 2, 4, 71 y 142 es decir la suma es 220. La siguiente pareja de números, 1184 y 1210 fue: descubierta por el italiano Nicoló Paganini en 1866; en efecto, los divisores de 1184, excluido 1184 son: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 74, 148, 296, 592, cuya suma es 1210, mientras que la suma de los divisores de 1210, excluido 1210 son: 1, 2, 5, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, es decir su suma es 1184. Parece que los pitagóricos conocían una sola pareja de números amigos. En el Siglo XV Leonardo Euler halló 65 parejas de números amigos, una de ellas es el 17296 y el 18416; en efecto, los divisores de 17296, excluido el 17296 son: 1, , 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 396, 72, 1081, 2162, 4324 y 8648, cuya suma es 18416, mientras que los divisores de 18416, excluido el mismo él mismo, son: 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604 y 9208, cuya suma es 17296.

Se conocen actualmente más de 1000 parejas de números amigos, entre las cuales tenemos:

1	220	284
2	1.184	1.210
3	2.620	2.924
4	5.020	5.564
5	6.232	6.368
6	10.744	10.856
7	12.285	14.595
8	17.296	18.416
9	63.020	76.084
10	66.928	66.992
11	67.095	71.145
12	69.615	87.633
13	79.750	88.370

Tabla No. 2. Las parejas de números de amigos más conocidas.

Todas las parejas de números amigos tienen paridad. Ambos son pares o (menos frecuentes) ambos son impares, no se ha demostrado todavía que exista alguna pareja de números amigos sin paridad. Todas las parejas de números amigos impares descubiertos son múltiplos de 3, se ha conjeturado que así sucede con todos los amigos impares.

Parece que hasta hoy no ha sido posible encontrar la fórmula general para los números amigos, a raíz de esto, nadie sabe si hay un número infinito de ellos.

CAPÍTULO IV

LOS NÚMEROS FELICES

Para culminar este trabajo de grado, se tratarán a los números felices y algunas de sus propiedades como curiosidades de la teoría de números.

Denominados así porque los números felices se puede identificar con la unidad, es decir, que de alguna manera son como el 1[6], se puede verificar que si al tomar las cifras de cada uno de estos números se eleva al cuadrado y se suman los resultados, se obtiene otro nuevo número y repitiendo el mismo proceso en el nuevo número, entonces finalmente se llega al 1.

En la lista de las diferentes clases de números podemos destacar los números felices llamados números afortunados o vertiginosos por poseer la propiedad de ser como el "1".

Pero antes de que se pueda explicar lo que es un número feliz o afortunado, aclararemos el concepto de funcionamiento recurrente de la siguiente forma:

---

[6] PAREDES, Julio. Temática del Conocimiento. Santa Fe de Bogotá:1997. Editorial S.A.p.274.

4.1 FUNCIONAMIENTO RECURRENTE

Es un procedimiento matemático que se repite. Un ejemplo muy simple es agregarle 5 al resultado, entonces si comenzamos con el número “0” se tienen la sucesión 5, 10, 15, 20... que es la famosa lista de los múltiplos de 5 que es obtenida por el procedimiento recurrente.

Existen otros tipos de reglas de funcionamiento recurrente como es la de multiplicar cada resultado por 2. aquí se toma 1 como primer número, produce la sucesión 1, 2, 4, 8, 16... que es la lista de las potencias de 2; así se conduce a reglas donde se repite el procedimiento recurrente cada vez con más frecuencia.

Para producir los números felices utilizamos un funcionamiento recurrente un poco más complejo, determinado por los dos casos siguientes:

1. Hallar los cuadrados de las cifras que conforman el número.
2. Sumar los cuadrados de las cifras del número obteniendo un nuevo número, el cual si no llega a 1, se devuelve a sumar sus cuadrados; este proceso continúa hasta que la suma diverja o converja a 1. En el primer caso el número no es feliz, y en el otro será el esperado o sea un número feliz, por ejemplo:

Si se toma el número 23 y aplicamos los dos pasos tenemos:

$$23 \to 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \to 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \to 1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

Luego 23 es número feliz.

De esta manera podemos conseguir los números felices o afortunados que queramos, de aquí que números como 31, 32, 7, 1, sean números felices.

No todos los números son felices, tómense el caso del número 2, efectivamente, aplicando el funcionamiento recurrente para números felices tenemos:

$$2 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 =$$

$$25 + 64 = 89 \rightarrow 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145 \rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \rightarrow 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$\rightarrow 2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4 \rightarrow 4^2 = 16$$

En este caso el proceso lleva el número original al 4 y a un ciclo de otros siete números que se repiten indefinidamente sin pasar por 1, por ello 2 no es un número feliz, tampoco los son los números 41 o 56 en los que sucede algo parecido, así:

$$41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4\text{Etc.}$$

$$56 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$$

En ambos casos se llega al 4 y como ya se vio, del 4 se vuelve al 4, estos números no se identifican con el 1, pero si con el 4. Haciendo algunos cálculos con la suma de cuadrados de números dígitos se puede verificar que los siguientes números son felices:

$$1, 7, 10, 13, 31, 19, 91, 23, 32, 28, 82, 44, 68, 86, 79, 97, 100, 103, 130, 301, 310.$$

4.2 PROPIEDADES DE LOS NUMEROS FELICES

1. Todos los números de la forma 10^n son números felices.

Por ejemplo Siendo $n = 3$; $10^3=1000 \longrightarrow 1^2+0^2+0^2+0^2=1$

2. Si N es feliz $Nx10^n$ también es feliz.

Por ejemplo: Siendo N = 31, números felices, y n = 2, $31 \times 10^2 = 3.100$

$\longrightarrow 3^2+1^2+0^2+0^2=10 \longrightarrow 1^2+0^2=1$

3. Si un número de más de una cifra es feliz, el número que resulta de la permutación de su cifra es feliz, por ejemplo: como 32 es un número feliz, al permutar sus cifras tenemos el número

$23 \longrightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \longrightarrow 1^2 + 3^2 =10 \longrightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

4. Si en la búsqueda de un número feliz se encuentra que la suma de los cuadrados en una parte del procedimiento da un número feliz, se puede asegurar que el número es feliz.

Por ejemplo, Como 10 es un número feliz, $13=1^2+3^2=10$, por lo tanto 13 es feliz.

EJEMPLO 1

El número de saludos que ocurre en un grupo determinado de personas es un número triangular.

Veamos primeramente que si el grupo de personas es de 6 y dado que los saludos se dan en parejas, entonces se tiene. Uno saludó a los 5 restantes, con lo que se obtienen cinco saludos. El siguiente saluda a los cuatro restantes obteniendo 4 saludos y así sucesivamente se conforma la secuencia de saludos siguientes:

$5+4+3+2+1=15$ que es el total de saludos y cuyo número 15 es número triangular.

En general se puede encontrar la cantidad de saludos de un grupo cualquiera de personas, sumando en forma sucesiva los números naturales que es de hecho un número triangular.

EJEMPLO 2

Algunos coeficientes de productos notables.

Como inicio al estudio del teorema del Binomio se consideran los productos denominados notables tales como:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b) = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

En el desarrollo de estos productos notables, sus coeficientes pueden ordenarse en forma de triángulos, denominado triángulo de Pascal, así:

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Este triángulo brinda una herramienta para obtener coeficientes de productos notables de sus primeras potencias. Además en el triángulo existen números que son triangulares que pueden ser fácilmente, identificados, como se muestra en la figura anterior.

Es fácil identificar en el triángulo de pascal los números triangulares, de tal manera que al enseñar como se hallan los coeficientes que conforman el triángulo de pascal, podemos dar a conocer los números triangulares.

BIBLIOGRAFÍA

BRAVO, Juan. Científicos Griegos. Madrid (España) 1970. Ediciones Aguilar S.A.

CARL, Boyer. Historia de las Matemáticas. P.733. Alianza Editorial.

CASTILLO, Eugenia. Enciclopedia Ilustrada. Bogotá: 1998. Círculo de Lectores.

ESCANDÓN, Rafael. Curiosidades Matemáticas. México. P. 206. Editorial Diana

FRABETTI, Carlos. El Genio de las Matemáticas. Santa Fe de Bogotá. p.205. Ediciones Martínez Roca. S.A.

FRANCO, Ramón. Didáctica de las Matemáticas. Bogotá: 1952, Editorial Bedout.

GARDNER, Martín. Miscelánea Matemática. Valle: 1986. Salvat Editores. S.A.

HANS, Magnus Enzensberger. El Diablo de los Números. Círculo de Lectores. P.258.

MORA, Telmo. Conferencia de teoría de números.

PAREDES, Julio. Temática del Conocimiento Universal. Santa Fe de Bogotá. 1997.p.274. Editorial Norma. S.A.

TAHAN, Malba. El Hombre que Calculaba. Santa Fe de Bogotá. D.C. Colombia. P.274. Editorial panamericana