UNA EXTENSIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL AL ESPACIO R^n CON n MAYOR Ó IGUAL A CUATRO

VICTOR ARROYO R.
ELVER OVIEDO V.

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2003

UNA EXTENSIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL AL ESPACIO R^n CON n MAYOR Ó IGUAL A CUATRO

VICTOR ARROYO R.
ELVER OVIEDO V.

TRABAJO REALIZADO COMO REQUISITO PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR: WALTER BELLO P.

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2003

AGRADECIMIENTOS

A mi Madre por su apoyo global.

A la Universidad de Sucre, especialmente a los docentes de matemática por toda su enseñanza y a los compañeros que de una u otra forma me colaboraron en esta carrera.

Al profesor Walter Bello P. por su colaboración en la realización de este trabajo.

A la Familia Contreras Banquet, especialmente a Teresita quien fuera mi segunda Madre en Sincelejo.

Elver Oviedo V.

DEDICATORIA

A Dios y La Virgen por darme la oportunidad de ser una persona de bien y formarme profesionalmente.

A mi Madre, quien fuera desde mis inicios mi Madre y Padre a la vez.

A toda mi Familia, Especialmente mis hermanos y entre ellos Juan y Emith, en quien tengo la esperanza tomen mis ejemplo y puedan ser mejor que Yo.

A mi compañero de Trabajo de Grado, el profesor Víctor Arroyo quien marcó la diferencia con su experiencia e inspiración.

Elver Oviedo V.

AGRADECIMIENTOS

A mis profesores de la Universidad de Sucre, quienes me enseñaron a razonar pero sobre todo a pensar para saber actuar en la escuela, en la sociedad y en la vida.

A nuestro director de Tesis Walter Bello P. por sus cuidadosos comentarios y su valioso aporte para que nuestro anhelo se hiciera realidad.

Al personal administrativo de la Universidad de Sucre, por proporcionarme los servicios de oficina, laboratorio y biblioteca y en especial por su amistad sincera que me mostraron durantes mis estudios.

Victor Arroyo R.

DEDICATORIA

A Dios nuestro Padre por darme el entendimiento y la constancia, para así poder culminar esta loable carrera.

A mi esposa Miriam y mis hijas Katy y Diana por su paciente ayuda, comprensión y colaboración. Sus almas están entrelazadas con la mía. "Las amo"

A mis padres Miguel y María por el amor y apoyo que me brindaron siempre.

A mis hermanos y en particular a la señora Betty Arroyo, quien me contagió siempre con su optimismo y me enseñó a no desfallecer nunca.

A mi compañero de Trabajo de Grado Elver Oviedo por su gran aporte y esfuerzo, que gracias a ellos nuestros ideales se culminaron.

Victor Arroyo R.

CONTENIDO

INTODUCCIÓN

Es notorio que el manejo del Producto Vectorial o Producto Cruz y todas sus aplicaciones que se presentan en los diferentes textos, se limitan al espacio R^3; La presente obra "UNA EXTENSIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL AL ESPACIO R^n CON n MAYOR Ó IGUAL A CUATRO" nos presenta una teoría generalizada ó extendida del Producto Vectorial en R^4, R^5,... , R^n, definiéndose en cada uno de estos espacios y comprobándose que las propiedades que se cumplen en R^3, también se cumplen en R^n.

Esta teoría puede verse como un aporte significativo a la geometría, al cálculo y a la física, enriqueciendo los conceptos de área y volumen, campo magnético y movimiento planetario en R^n, entre otros.

La mayor dificultad que puede presentar ésta teoría para su comprensión total, como las demás teorías relacionadas con el cálculo y el álgebra vectorial, es la visualización geométrica de aquellos espacios con más de tres (3) dimensiones; no obstante, el presente trabajo manifiesta que es posible desarrollar el Producto Vectorial con dos o más vectores pertenecientes a R^n, y hacernos una idea abstracta de dichos espacios.

En forma indirecta, ésta obra hace una invitación a seguir estudiando y profundizando a cerca del producto cruz y sus aplicaciones, con el fin de que además de enriquecer nuestros conocimientos, y que estos nos permitan relacionar de una mejor manera el mundo exterior, generen cambios en el desarrollo intelectual del hombre y en su formación matemática.

De ésta forma se expresa una extensión del Producto Vectorial, que contiene en su desarrollo una dialéctica constante en la búsqueda de innovaciones en el campo de las matemáticas. En éste sentido se busca que las teorías que se expresan no se midan solamente teniendo en cuenta sus aplicaciones prácticas y directas a las soluciones de problemas reales, como por ejemplo las famosas leyes de Maxwell en electromagnetismo (que son muestra clara del producto escalar y vectorial aplicados a la física como solución de problemas del mundo real) sino que además se mida como un aporte significativo a las ciencias matemáticas, en particular al álgebra lineal y a la física.

Reseña Histórica del Producto Vectorial

A través de la historia, el cálculo y la geometría analítica estuvieron íntimamente relacionadas en su desarrollo, es decir, un nuevo descubrimiento en el uno, dio lugar a un proceso en el otro: El problema de trazar tangentes a las curvas se resuelve con el desarrollo de la derivada; el del área, conduce a la integral, y las derivadas parciales se introdujeron para estudiar superficies curvas en el espacio, también se observa un desarrollo paralelo de la mecánica y la física matemática.

En ésta reseña histórica del desarrollo de las matemáticas es innegable el aporte de Lagrange, con sus métodos analíticos en el estudio de la mecánica; el del matemático William R. Hamilton, con su teoría de los Cuaterniones como nuevos métodos que contribuyeron a la comprensión del Álgebra como de la Física; luego a los esfuerzos de J. W. Gibbes y O. Heaviside que dieron lugar a la llamada álgebra vectorial. Pronto se vio que los vectores eran los instrumentos ideales para la exposición y simplificación de muchas ideas importantes en geometría y física.

Existen tres (3) modos esencialmente distintos para introducir el álgebra vectorial: Geométricamente, Analíticamente y Axiomáticamente.

En la introducción geométrica, los vectores se representan por segmentos orientados o flechas; las operaciones algebraicas con vectores, tales como la adición, sustracción y multiplicación con números reales, se definen y estudian por métodos geométricos.

En la introducción analítica, los vectores y las operaciones se expresan mediante números llamados componentes. Las propiedades de las operaciones con vectores se deducen entonces a partir de las propiedades correspondientes de los números; la descripción analítica de los vectores surge espontáneamente de la representación geométrica, y se introduce en un sistema coordenado.

En el estudio del álgebra vectorial desde el punto de vista axiomático no se intenta describir la naturaleza de un vector o de las operaciones algebraicas con vectores, sino mostrar a los vectores y sus operaciones como concepto no definido que satisfacen ciertos conjuntos axiomáticos, que generan los espacios vectoriales. Descartes utilizó un par de números (a_1, a_2) para situar un punto en el plano y una terna de número (a_1, a_2, a_3)para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX los matemáticos A. Cayley y H. G. Grassmann probaron que no era necesario detenerse en las ternas de números, se puede también considerar una cuaterna de números (a_1, a_2, a_3, a_4) o más general una n–úpla de números $(a_1, a_2, ..., a_n)$, para todo "n" mayor ó igual a uno (1). Una tal n-úpla se llama punto n-dimencional ó vector n-dimencional siendo las $a_1, a_2, ..., a_n$ las coordenadas ó componentes del punto vector n-dimencional. El conjunto de todos los vectores n-dimencional se llama Espacio Vectorial de n-úpla, o simplemente n-espacio.

Como ya se ha observado, el estudio de los vectores se originó con la invención de los Cuaterniones de Hamilton y otros desarrollaron los Cuaterniones como herramienta matemática, para la exploración del espacio físico. Pero los resultados fueron desilucionantes por que vieron que los Cuaterniones eran demasiados complicados para entenderlos con rapidez y explicarlos fácilmente. Los Cuaterniones contienen una parte escalar y otra parte vectorial, y las dificultades surgían cuando éstas partes se manejaban al mismo tiempo. Los científicos se dieron cuenta de que muchos problemas se podían manejar considerando la parte vectorial por separado y así comenzó el análisis vectorial.

Este trabajo se debe principalmente al físico americano Joseph Willand Gibbes (1839-1903) quien estudió matemáticas y física en la Universidad de Yale y recibió el grado de Doctor en 1863.

En la introducción a la física, un espacio vectorial, se ve como un segmento de recta dirigido o flecha. Gibbes dio definiciones de igualdad, suma y multiplicación de vectores. En particular la parte vectorial de un Cuaternión se escribía como ai + bj + ck y ésta es la forma en que ahora se describen los vectores en R^3.

Gibbes definió el producto escalar, inicialmente sólo para los vectores i, j, k

$$i.i = j.j = k.k = 1$$
$$i.j = j.i = i.k = k.i = k.j = j.k = 0$$

y a esto siguió la definición más general. Gibbes aplicó el Producto Escalar en problemas referentes a la fuerza. Si F es un vector de fuerza de magnitud $|F|$ que actúa en la dirección del segmento $\overrightarrow{OP}$ (ver figura # 1) entonces la efectividad de ésta fuerza al empujar un objeto a lo largo del segmento $\overrightarrow{OP}$ (es decir a lo largo del vector U) está dada por $F\ U$. Si la norma $\|U\| = 1$, entonces $F\ U$ es la componente de F en la dirección de U.

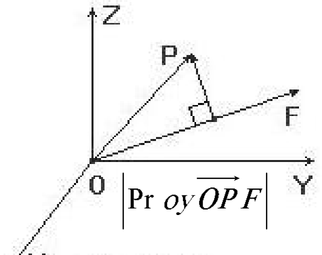


Figura # 1

La efectividad de F en la dirección de $\overrightarrow{OP}$ es la componente de F en la dirección de $\overrightarrow{OP}$ $(= U)$ si $U = 1$.

También el Producto Cruz tiene un significado físico, suponga que el vector de fuerza F actúa en un punto P en el espacio en la dirección de $\overrightarrow{PO}$ si U es el vector representado por $\overrightarrow{OP}$, entonces el momento de fuerza ejercido por F alrededor del origen es el vector UxF (ver figura # 2).

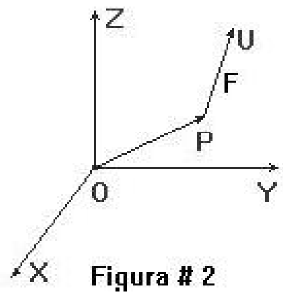


Figura # 2

Tanto el Producto Escalar como el Producto Cruz entre vectores aparecen prominentemente en las aplicaciones física que involucran el cálculo de varias variables. Éstas incluyen las famosas leyes de Maxwell en electromagnetismo. Los vectores fueron desarrollados por Gibbes entre otras para facilitar el análisis de los fenómenos físicos y en ese sentido tuvieron gran éxito.

Como se manifestó, se da inicialmente la definición del Producto Vectorial en R^3 (ya conocida), posteriormente en forma inductiva, en R^4, en R^5,…, en R^n y demostrando en cada caso las propiedades que se cumplen en R^3.

Hasta ahora solo se conoce el producto vectorial y sus propiedades en R^3 como sigue:

El Producto Vectorial en R^3.

Sean $V_1 = (V_{11}, V_{12}, V_{13})$ y $V_2 = (V_{21}, V_{22}, V_{23})$ vectores de R^3, entonces el producto vectorial de V_1 y V_2 denotados por $V_1 x V_2$ está dado de la siguiente manera:

$$V_1 x V_2 = (V_{12}V_{23} - V_{13}V_{22}, V_{13}V_{21} - V_{11}V_{23}, V_{11}V_{22} - V_{12}V_{21}$$

Nota: El Producto Vectorial también se denomina
Producto Cruz o Producto Exterior.

El Producto Vectorial puede escribirse simbólicamente como el cuasideterminante:

ecial

$$V_1 x V_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{vmatrix}$$

La cual es una notación para un determinante de tercer orden, sin embargo observe que el primer renglón contiene vectores y no número reales como se acostumbra en la notación de determinante. Esta notación se utilizará para recordar las fórmulas de los desarrollos del Producto Vectorial en R^3, en R^4, en R^5,…, en R^n, y además se usarán las propiedades que cumplen los determinantes para demostrar las propiedades del Producto Vectorial en los campos mencionados.

El Producto Escalar en R^3

En algunas propiedades del Producto Vectorial se manifiesta la interrelación entre el Producto Vectorial y el Producto Escalar, por lo tanto se hace pertinente definir éste último así:

Sean $V_1 = (V_{11}, V_{12}, V_{13})$, $V_2 = (V_{21}, V_{22}, V_{23})$ vectores de R^3, entonces el producto escalar de V_1 y V_2 denotado por $V_1.V_2$ estará dado de la siguiente manera:

$$V_1.V_2 = V_{11}.V_{21} + V_{12}.V_{22} + V_{13}.V_{33}.$$

El Producto Vectorial en R^3 cumple las siguientes propiedades:

Dados V_1, V_2 y V_3 vectores en R^3 y λ un escalar, entonces

a) $V_1 x\vec{0} = \vec{0}xV = \vec{0}$

b) $V_1 xV_2 = -V_2 xV_1$

c) $(\lambda V_1)xV_2 = \lambda(V_1 xV_2)$

d) $V_1 x(V_2 + V_3) = V_1 xV_2 + V_1 xV_3$

e) $V_1.(V_2 xV_3) = (V_1 xV_2).V_3$

f) $V_1.(V_1 xV_2) = V_2.(V_1 xV_2) = 0$

g) si ni V_1, ni V_2 son el vector cero ($\vec{0}$) entonces V_1 y V_2 son paralelos si y sólo sí $V_1 xV_2 = \vec{0}$

La demostración de estas propiedades se omite debido a que se encuentran en varios textos de cálculo y del álgebra lineal.

El Producto Vectorial en R^4.

Sean $V_1=(V_{11},V_{12},V_{13},V_{14})$, $V_2=(V_{21},V_{22},V_{23},V_{24})$ y $V_3=(V_{31},V_{32},V_{33},V_{34})$ vectores de R^4, entonces el Producto Vectorial de V_1, V_2 y V_3 denotado por $V_1xV_2xV_3$ estaría dado de la siguiente manera:

$$V_1xV_2xV_3=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} V_{11} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{34} \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix} e_4$$

$$\begin{aligned} =(\,& V_{12}V_{23}V_{34}-V_{12}V_{24}V_{33}-V_{13}V_{22}V_{34}+V_{13}V_{24}V_{32}+V_{14}V_{22}V_{33}-V_{14}V_{23}V_{32}\,, \\ & -V_{11}V_{23}V_{34}+V_{11}V_{24}V_{33}+V_{13}V_{21}V_{34}-V_{13}V_{24}V_{31}-V_{14}V_{21}V_{33}+V_{14}V_{23}V_{31}\,, \\ & V_{11}V_{22}V_{34}-V_{11}V_{24}V_{32}-V_{12}V_{21}V_{34}+V_{12}V_{31}V_{24}+V_{14}V_{21}V_{32}-V_{14}V_{31}V_{22}\,, \\ & -V_{11}V_{22}V_{33}+V_{11}V_{23}V_{32}+V_{12}V_{21}V_{33}-V_{12}V_{23}V_{31}-V_{13}V_{21}V_{32}+V_{13}V_{31}V_{22}) \end{aligned}$$

El Producto Vectorial $V_1xV_2xV_3$ puede escribirse como :

$V_1xV_2xV_3=k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3+k_4e_4$ Siendo

$$k_1=V_{12}V_{23}V_{34}-V_{12}V_{24}V_{33}-V_{13}V_{22}V_{34}+V_{13}V_{24}V_{32}+V_{14}V_{22}V_{33}-V_{14}V_{23}V_{32}$$

$$k_2=-V_{11}V_{23}V_{34}+V_{11}V_{24}V_{33}+V_{13}V_{21}V_{34}-V_{13}V_{24}V_{31}-V_{14}V_{21}V_{33}+V_{14}V_{23}V_{31}$$

$$k_3=V_{11}V_{22}V_{34}-V_{11}V_{24}V_{32}-V_{12}V_{21}V_{34}+V_{12}V_{31}V_{24}+V_{14}V_{21}V_{32}-V_{14}V_{31}V_{22}$$

$$k_4=-V_{11}V_{22}V_{33}+V_{11}V_{23}V_{32}+V_{12}V_{21}V_{33}-V_{12}V_{23}V_{31}-V_{13}V_{21}V_{32}+V_{13}V_{31}V_{22}$$

Ejemplo: sea $V_1=(1,3,5,2)$, $V_2=(2,3,4,1)$ y $V_3=(4,3,2,1)$

Entonces el Producto Vectorial de estos tres vectores en
R^4 es

$$V_1 x V_2 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6e_1 + 12e_2 - 6e_3 + 0e_4 = (-6,12,-6,0)$$

El Producto Escalar en R^4

Sean $V_1=(V_{11},V_{12},V_{13},V_{14})$, $V_2=(V_{21},V_{22},V_{23},V_{24})$ vectores de R^4, entonces el producto escalar de V_1 y V_2 denotado por $V_1.V_2$ estará dado de la siguiente manera:

$$V_1.V_2 = V_{11}.V_{21} + V_{12}.V_{22} + V_{13}.V_{23} + V_{14}.V_{24}.$$

El Producto Vectorial en R^4 cumple las siguientes propiedades:

Dados V_1, V_2, V_3, U_1 y U_2 Vectores en R^4 y λ un escalar, entonces.

a) $\vec{0} x V_1 x V_2 = V_1 x \vec{0} x V_2 = V_1 x V_2 x \vec{0} = \vec{0}$

Ésta es la propiedad anulativa del Producto Vectorial.

Observe que en cualquier orden que se multiplique por el vector cero ($\vec{0}$), el resultado del Producto Vectorial será el mismo vector cero ($\vec{0}$).

Demostración.

$$V_1 x\vec{0} x V_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Haciendo el desarrollo del determinante de cuarto orden por la tercera fila que tiene todas sus componentes ceros, obtendría el vector cero ($\vec{0}$) como resultado.

$$V_1 x\vec{0} x V_2 = 0\begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{22} & V_{23} & V_{24} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{23} & V_{24} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{24} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{vmatrix} = (0,0,0,0)$$

Ejemplo: sean $V_1 = (1,3,5,2)$, $V_2 = (0,0,0,0)$ y $V_3 = (4,3,2,1)$, entonces

$$V_1 x\vec{0} x V_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 = (0,0,0,0) = \vec{0}$$

b) $V_1 x V_2 x V_3 = -V_2 x V_1 x V_3$

Ésta es la propiedad anticonmutativa del Producto vectorial.

Demostración.

Desarrollando por la tercera fila $V_1 x V_2 x V_3$ se tiene:

$$V_1 x V_2 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} = V_{21}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} + V_{22}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{13} & V_{14} \\ V_{31} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix}$$

$$+V_{23}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{14} \\ V_{31} & V_{32} & V_{34} \end{vmatrix} + V_{24}(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix}$$

$$= V_{21}C_{21} - V_{22}C_{22} + V_{23}C_{23} - V_{24}C_{24} \qquad (1)$$

Siendo $C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{kh}\right|$: En donde $\left|M_{kh}\right|$ es el menor de V_{kh}, que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en $V_1 x V_2 x V_3$. k es número del vector, y h la componente de cada vector.

Desarrollando ahora por la segunda fila $V_2 x V_1 x V_3$ se tiene:

$$V_2 x V_1 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} = V_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} + V_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{13} & V_{14} \\ V_{31} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix}$$

$$+V_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{14} \\ V_{31} & V_{32} & V_{34} \end{vmatrix} + V_{24}(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -V_{21}C_{21} + V_{22}C_{22} - V_{23}C_{23} + V_{24}C_{24} \qquad (2)$$

Obsérvese que las expresiones (1) y (2) cumplen (1) = -(2)

Por lo tanto $V_1 x V_2 x V_3 = -V_2 x V_1 x V_3$

Ejemplo: sea $V_1 = (1,3,5,2)$, $V_2 = (5,3,7,8)$ y $V_3 = (2,9,4,3)$, entonces

$$V_1 x V_2 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 180e_1 - 6e_2 + 18e_3 - 126e_4 = (180,-6,18,-126)$$ ahora

$$V_2 x V_1 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -180e_1 + 6e_2 - 18e_3 + 126e_4$$ es decir que

$$V_1 x V_2 x V_3 = -V_2 x V_1 x V_3$$

c) $(\lambda V_1) x V_2 x V_3 = V_1 x (\lambda V_2) x V_3 = V_1 x V_2 x (\lambda V_3) = \lambda (V_1 x V_2 x V_3)$

Al multiplicar cualquiera de los tres vectores por un escalar λ, y luego hallando el producto vectorial, el resultado es el Producto Vectorial de los tres vectores por el escalar λ.

Demostración.

Veamos que $(\lambda V_1) x V_2 x V_3 = \lambda (V_1 x V_2 x V_3)$. Las demás igualdades se proponen como ejercicio.

Desarrollando el siguiente determinante por la segunda fila se tiene:

$$(\lambda V_1) x V_2 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \lambda V_{11} & \lambda V_{12} & \lambda V_{13} & \lambda V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} = \lambda V_{11}|M_{21}| + \lambda V_{12}|M_{22}| + \lambda V_{23}|M_{23}| + \lambda V_{14}|M_{24}|$$

$$= \lambda (V_{11}|M_{21}| + V_{12}|M_{22}| + V_{23}|M_{23}| + V_{14}|M_{24}|)$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left(V_1 x V_2 x V_3\right)$$

Ejemplo: sea $V_1 = (1,3,5,2)$, $V_2 = (5,3,7,8)$, $V_3 = (2,9,4,3)$ y $\lambda = 3$, entonces

$$(\lambda V_1) x V_2 x V_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 3 & 9 & 15 & 6 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 540e_1 - 18e_2 + 54e_3 - 378e_4 = (540,-18,54,-378)$$

$$= 3(180,-6,18,-126)$$

$$= \lambda\left(V_1 x V_2 x V_3\right)$$

d) $V_1 x V_2 x (U_1 + U_2) = V_1 x V_2 x U_1 + V_1 x V_2 x U_2$

Ésta es la propiedad distributiva del Producto Vectorial.

Demostración.

Sea $U_1 = (U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14})$ y $U_2 = (U_{21}, U_{22}, U_{23}, U_{24})$, entonces $(U_1 + U_2) = (U_{11} + U_{21}, U_{12} + U_{22}, U_{13} + U_{23}, U_{14} + U_{24})$ así tenemos que

$$V_1 x V_2 x (U_1 + U_2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ U_{11} + U_{21} & U_{12} + U_{22} & U_{13} + U_{23} & U_{14} + U_{24} \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante por la última fila se tiene:

$$V_1xV_2x(U_1+U_2)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ U_{11}+U_{21} & U_{12}+U_{22} & U_{13}+U_{23} & U_{14}+U_{24} \end{vmatrix}$$

$$=(U_{11}+U_{21})|M_{41}|+(U_{12}+U_{22})|M_{42}|+(U_{13}+U_{23})|M_{43}|+(U_{14}+U_{24})|M_{44}|$$

$$=U_{11}|M_{41}|+U_{21}|M_{41}|+U_{12}|M_{42}|+U_{22}|M_{42}|+U_{13}|M_{43}|+U_{23}|M_{43}|+U_{14}|M_{44}|+U_{24}|M_{44}|$$

$$=U_{11}|M_{41}|+U_{12}|M_{42}|+U_{13}|M_{43}|+U_{14}|M_{44}|+U_{21}|M_{41}|+U_{22}|M_{42}|+U_{23}|M_{43}|+U_{24}|M_{44}|$$

$$=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \end{vmatrix}$$

$$=V_1xV_2xU_1+V_1xV_2xU_2$$

Ejemplo: Sea $V_1=(1,3,5,2)$, $V_2=(5,3,7,8)$, $U_1=(2,3,5,-1)$ y $U_2=(9,4,8,2)$, entonces $(U_1+U_2)=(11,7,13,1)$ así tenemos

$$V_1xV_2x(U_1+U_2)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 11 & 7 & 13 & 1 \end{vmatrix}=-46e_1-294e_2+200e_3-36e_4=(-46,-294,200,-36)$$

$$= V_1 x V_2 x U_1 + V_1 x V_2 x U_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -18e_1 - 80e_2 + 54e_3 - 6e_4 - 28e_1 - 214e_2 + 146e_3 - 30e_4 = -46e_1 - 294e_2 + 200e_3 - 36e_4$$

$$= (-46, -294, 200, -36)$$

e) $V_1.(V_2 x V_3 x U_1) = -(V_1 x V_2 x V_3).U_1$

Ésta propiedad en R^4, se denomina cuádruplo producto escalar.

Demostración.

Inicialmente se desarrolla el miembro izquierdo, luego el miembro derecho y finalmente se compara.

$$V_1.(V_2 x V_3 x U_1) = V_1. \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \end{vmatrix} = (V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}) . \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = V_1(& V_{22}V_{33}U_{14} - V_{22}V_{34}U_{13} - V_{23}V_{32}U_{14} + V_{23}V_{34}U_{12} + V_{24}V_{32}U_{13} - V_{24}V_{33}U_{12}, \\ & - V_{21}V_{33}U_{14} + V_{21}V_{34}U_{13} + V_{23}V_{31}U_{14} - V_{23}V_{34}U_{11} - V_{24}V_{31}U_{13} + V_{24}V_{33}U_{11}, \\ & V_{21}V_{32}U_{14} - V_{21}V_{34}U_{12} - V_{22}V_{31}U_{14} + V_{22}V_{34}U_{11} + V_{24}V_{31}U_{12} - V_{24}V_{32}U_{12}, \\ & - V_{21}V_{32}U_{13} + V_{21}V_{33}U_{12} + V_{22}V_{31}U_{13} - V_{22}V_{33}U_{11} - V_{23}V_{31}U_{12} + V_{23}V_{32}U_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = (V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14})(& V_{22}V_{33}U_{14} - V_{22}V_{34}U_{13} - V_{23}V_{32}U_{14} + V_{23}V_{34}U_{12} + V_{24}V_{32}U_{13} - V_{24}V_{33}U_{12}, \\ & - V_{21}V_{33}U_{14} + V_{21}V_{34}U_{13} + V_{23}V_{31}U_{14} - V_{23}V_{34}U_{11} - V_{24}V_{31}U_{13} + V_{24}V_{33}U_{11}, \\ & V_{21}V_{32}U_{14} - V_{21}V_{34}U_{12} - V_{22}V_{31}U_{14} + V_{22}V_{34}U_{11} + V_{24}V_{31}U_{12} - V_{24}V_{32}U_{12}, \end{aligned}$$

$$- V_{21}V_{32}U_{13} + V_{21}V_{33}U_{12} + V_{22}V_{31}U_{13} - V_{22}V_{33}U_{11} - V_{23}V_{31}U_{12} + V_{23}V_{32}U_{11})$$

$$\begin{aligned}
= {} & V_{11}V_{22}V_{33}U_{14} - V_{11}V_{22}V_{34}U_{13} - V_{11}V_{23}V_{32}U_{14} + V_{11}V_{23}V_{34}U_{12} + V_{11}V_{24}V_{32}U_{13} - V_{11}V_{24}V_{33}U_{12} \\
& - V_{12}V_{21}V_{33}U_{14} + V_{12}V_{21}V_{34}U_{13} + V_{12}V_{23}V_{31}U_{14} - V_{12}V_{23}V_{34}U_{11} - V_{12}V_{24}V_{31}U_{13} + V_{12}V_{24}V_{33}U_{11} \\
& V_{13}V_{21}V_{32}U_{14} - V_{13}V_{21}V_{34}U_{12} - V_{13}V_{22}V_{31}U_{14} + V_{13}V_{22}V_{24}U_{11} + V_{13}V_{24}V_{31}U_{12} - V_{13}V_{24}V_{32}U_{12} \\
& - V_{14}V_{21}V_{32}U_{13} + V_{14}V_{21}V_{33}U_{12} + V_{14}V_{22}V_{31}U_{13} - V_{14}V_{22}V_{33}U_{11} - V_{14}V_{23}V_{31}U_{12} + V_{14}V_{23}V_{32}U_{11}
\end{aligned}$$

Éste es el producto escalar $V_1.(V_2 x V_3 x U_1)$ desarrollado componente a componente, ahora

$$(V_1 x V_2 x V_3).U_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \end{vmatrix} .U_1$$

$$\begin{aligned}
= (& V_{12}V_{23}V_{34} - V_{12}V_{24}V_{33} - V_{13}V_{22}V_{34} + V_{13}V_{24}V_{32} + V_{14}V_{22}V_{33} - V_{14}V_{23}V_{32}, \\
& - V_{11}V_{23}V_{34} + V_{11}V_{24}V_{33} + V_{13}V_{21}V_{34} - V_{13}V_{24}V_{31} - V_{14}V_{21}V_{33} + V_{14}V_{23}V_{31}, \\
& V_{11}V_{22}V_{34} - V_{11}V_{24}V_{32} - V_{12}V_{21}V_{34} + V_{12}V_{31}V_{24} + V_{14}V_{21}V_{32} - V_{14}V_{31}V_{22}, \\
& - V_{11}V_{22}V_{33} + V_{11}V_{23}V_{32} + V_{12}V_{21}V_{33} - V_{12}V_{23}V_{31} - V_{13}V_{21}V_{32} + V_{13}V_{31}V_{22}).(U_{11}U_{12}U_{13}U_{14})
\end{aligned}$$

Desarrollando éste producto escalar componente a componente se tiene:

$$\begin{aligned}
= {} & V_{12}V_{23}V_{34}U_{11} - V_{12}V_{24}V_{33}U_{11} - V_{13}V_{22}V_{34}U_{11} + V_{13}V_{24}V_{32}U_{11} + V_{14}V_{22}V_{33}U_{11} - V_{14}V_{23}V_{32}U_{11} \\
& - V_{11}V_{23}V_{34}U_{12} + V_{11}V_{24}V_{33}U_{12} + V_{13}V_{21}V_{34}U_{12} - V_{13}V_{24}V_{31}U_{12} - V_{14}V_{21}V_{33}U_{12} + V_{14}V_{23}V_{31}U_{12} \\
& V_{11}V_{22}V_{34}U_{13} - V_{11}V_{24}V_{32}U_{13} - V_{12}V_{21}V_{34}U_{13} + V_{12}V_{31}V_{24}U_{13} + V_{14}V_{21}V_{32}U_{13} - V_{14}V_{31}V_{22}U_{13} \\
& - V_{11}V_{22}V_{33}U_{14} + V_{11}V_{23}V_{32}U_{14} + V_{12}V_{21}V_{33}U_{14} - V_{12}V_{23}V_{31}U_{14} - V_{13}V_{21}V_{32}U_{14} + V_{13}V_{31}V_{22}U_{14}
\end{aligned}$$

Si se compara miembro a miembro el desarrollo de los términos, tanto el de la derecha como el de la izquierda se puede comprobar que $V_1.\left(V_2 x V_3 x U_1\right)=-\left(V_1 x V_2 x V_3\right).U_1$.

Ejemplo: Sea $V_1=(1,3,5,2)$, $V_2=(5,3,7,8)$, $V_3=(2,9,4,3)$, y $U_1=(2,3,5,-1)$

$$V_1.(V_2 x V_3 x U_1)=(1,3,5,2).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}=(1,3,5,2).(333,23,-162,-75)=-558$$

$$\left(V_1 x V_2 x V_3\right).U_1=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}.(2,3,5,-1)=(180,-6,18,-126).(2,3,5,-1)=558$$

f) $V_1.\left(V_1 x V_2 x V_3\right)=V_2.\left(V_1 x V_2 x V_3\right)=V_3.(V_1 x V_2 x V_3)=0$

Ésta propiedad es la denominada ortogonalidad del Producto Vectorial, es decir, que el producto vectorial es ortogonal a cada uno de los vectores.

Demostraremos que $V_1.\left(V_1 x V_2 x V_3\right)=0$, las demás igualdades se proponen como ejercicio.

De la propiedad e) se tiene: $V_1.\left(V_2 x V_3 x U_1\right)=-\left(V_1 x V_2 x V_3\right).U_1$ así:

$V_1.\left(V_1 x V_2 x V_3\right)=-(V_1 x V_1 x V_2).V_3$ Pero $(V_1 x V_1 x V_2)$ tendrá dos vectores iguales, lo que da un determinante con dos filas iguales, y de ser así el resultado de éste es cero (0) y así $(V_1 x V_1 x V_2)=0$ y $-(V_1 x V_1 x V_2).V_3 = 0$ de manera que:

$V_1.\left(V_1 x V_2 x V_3\right)=0$

Ejemplo: Sea $V_1 = (1,3,5,2)$, $V_2 = (5,3,7,8)$ y $V_3 = (2,9,4,3)$, entonces

$V_1.(V_1 x V_2 x V_3) =$

$$= (1,3,5,2).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1,3,5,2).(180,-6,18,-126) = 180 - 18 + 90 - 252 = 0$$

g) si ni V_1, ni V_2, ni V_3 son el vector $\vec{0}$ entonces por lo menos dos de ellos son paralelos si y sólo sí $(V_1 x V_2 x V_3) = \vec{0}$

Análisis.

Si ninguno de los vectores son cero, $(V_1 x V_2 x V_3) = \vec{0}$ si y sólo sí por lo menos dos de ellos son linealmente dependiente, es decir que el uno es múltiplo escalar del otro y si esto es así el ángulo que forman estos dos vectores es 0 ó π radianes, lo cual dice que los vectores son paralelos entre sí.

EJERCICIOS

Considere los vectores $V_1 = (1,2,3,4)$, $V_2 = (-2,0,3,0)$, $V_3 = (0,-1,4,1)$, $U_1 = (5,2,8,1)$, $U_2 = (-1,3,7,4)$ y $\vec{0} = (0,0,0,0)$ del espacio R^4 y el escalar $\lambda = 5$. Halle el producto vectorial $V_1 x V_2 x V_3$ y utilice las propiedades vista para calcular los siguientes productos:

- a) $\vec{0} x V_1 x V_2$
- b) $V_2 x V_1 x V_3$
- c) $(\lambda V_1) x V_2 x V_3$
- d) $V_1 x V_2 x (U_1 + U_2)$
- e) $V_1 . (V_2 x V_3 x U_1)$
- f) $-(V_1 x V_2 x V_3) . U_1$
- g) $V_1 . (V_1 x V_2 x V_3)$
- h) $V_2 . (V_1 x V_2 x V_3)$
- i) $V_3 . (V_1 x V_2 x V_3)$

El Producto Vectorial en R^n.

Cuando se definió el Producto Vectorial en R^3, se usaron dos (2) vectores de R^3; cuando se definió en R^4, se usaron tres (3) de R^4, por lo tanto, para definir el Producto Vectorial en R^n con (n>3), se usarán (n-1) – vectores de R^n.

Sean $V_k = (V_{k1}, V_{k2}, V_{k3}, ..., V_{kn})$ con $k = 1,2,3,...,n$, vectores de R^n, entonces el Producto Vectorial de los (n-1) - vectores denotado por $V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1}$ se define de la siguiente manera:

$$V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1\})2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

El Producto Escalar en R^n

Sean $V_1 = (V_{11}, V_{12}, ..., V_{1n})$, $V_2 = (V_{21}, V_{22}, ..., V_{2n})$ vectores de R^n, entonces el producto escalar de V_1 y V_2 denotado por $V_1 . V_2$ estará dado de la siguiente manera:

$$V_1 . V_2 = V_{11} . V_{21} + V_{12} . V_{22} + ... + V_{1n} . V_{2n} .$$

El Producto Vectorial en R^n cumple las siguientes propiedades:

Sean $V_1, V_2, ..., V_{n-1}$ y U_k para $k = 1,2,...$, vectores de R^n y λ un escalar, entonces:

a) Si $V_i = \vec{0}$ para algún $i = 1,2,3,...,n-1$, es decir que todas las componentes V_{ij} del vector V_i son cero (0) para todo $j = 1,2,3,...,n$, entonces $V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{(n-1)} = \vec{0}$

Ésta es la propiedad anulativa del Producto Vectorial en R^n.
Observe que si cualquiera de los $V_i = \vec{0}$, el resultado del Producto Vectorial será el mismo vector cero ($\vec{0}$).

Demostración.

Supongamos que el vector $V_i = \vec{0}$ para algún $i = 1,2,3,...,n-1$, así

$$V_1 x V_2 x V_3 x..x V_i x..x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

$$V_1 x V_2 x V_3 x .. x \vec{0} x .. x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Resolviendo éste determinante por el vector V_i, es decir por la fila $i+1$, tenemos

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix} = 0\left|V_{i1}\right| + 0\left|V_{i2}\right| + ... + 0\left|V_{in}\right| = 0e_1 + 0e_2 + ... + 0e_n = \vec{0}$$

Ahora bien, si una columna j tiene todas sus componentes ceros, es decir, si todos los V_i tienen la misma componente $V_{ij} = 0$, ésta expresión también es cero($\vec{0}$)

b) $V_1 x V_2 x..x V_{(i-1)} x V_i x V_{(i+1)} x..x V_{n-1} = -V_1 x V_2 x..x V_i x V_{(i-1)} x V_{(i+1)} x..x V_{(n-1)}$

Ésta propiedad puede interpretarse de la siguiente manera:

El intercambio de dos vectores adyacentes cualesquiera del Producto Vectorial, tiene el efecto de multiplicar el vector resultante por menos uno (-1).

Demostración.

$$V_1 x V_2 x .. x V_i x .. x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ V_{(i+1)1} & V_{(i+1)2} & V_{(i+1)3} & . & . & . & V_{(i+1)n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Resolviendo este determinante por la fila que corresponde al vector V_i tenemos:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ V_{(i+1)1} & V_{(i+1)2} & V_{(i+1)3} & . & . & . & V_{(i+1)n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix} = V_{i1}\left|V_{i1}\right| + V_{i2}\left|V_{i2}\right| + ... + V_{in}\left|V_{in}\right|$$

$\left|V_{ij}\right| = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ donde $\left|M_{ij}\right|$ es el menor de V_{ij}.

Por otro lado

$$V_1 x V_2 x .. x V_{(i+1)} x V_i x .. x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(i+1)1} & V_{(i+1)2} & V_{(i+1)3} & . & . & . & V_{(i+1)n} \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Análogamente resolviendo éste determinante por la fila que corresponde al vector V_i tenemos

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(i+1)1} & V_{(i+1)2} & V_{(i+1)3} & . & . & . & V_{(i+1)n} \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix} = V_{i1}\left|B_{(i+1)1}\right| + V_{i2}\left|B_{(i+1)2}\right| + ... + V_{in}\left|B_{(i+1)n}\right|$$

Observe ahora que si se elimina el renglón $(i+1)$ y la columna j se tiene el mismo $\left|M_{ij}\right|$, entonces

$$\left|B_{(i+1)j}\right| = (-1)^{i+1+j}\left|M_{ij}\right| = -(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right| = -\left|V_{ij}\right|$$

lo que significa que

$$V_1 x V_2 x..x V_{(i-1)} x V_i x V_{(i+1)} x..x V_{n-1} = -V_1 x V_2 x..x V_i x V_{(i-1)} x V_{(i+1)} x..x V_{(n-1)}$$

c) $V_1 x V_2 x...x(\lambda V_i) x...x V_{(n-1)} = \lambda\left(V_1 x V_2 x...x V_i x...x V_{(n-1)}\right)$

Si un vector V_i del Producto Vectorial se multiplica por un escalar λ, entonces el Producto Vectorial en general se multiplica por el escalar λ.

Demostración:

Sabemos que $\lambda\ V_i = (\lambda V_{i1}, \lambda V_{i2}, \lambda V_{i3}, ..., \lambda V_{in})$

Veamos que

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ \lambda V_{i1} & \lambda V_{i2} & \lambda V_{i3} & . & . & . & \lambda V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante de la izquierda por la fila correspondiente al vector $\lambda\ V_i$ tenemos que

$$V_1 x V_2 x..x(\lambda V_i) x..x V_{(n-1)} = \lambda V_{i1}|V_{i1}| + \lambda V_{i2}|V_{i2}| + ... + \lambda V_{in}|V_{in}|$$

$$= \lambda(V_{i1}|V_{i1}| + V_{i2}|V_{i2}| + ... + V_{in}|V_{in}|)$$

$$= \lambda\left(V_1 x V_2 x..x V_i x..x V_n \right)$$

d) $V_1 x V_2 x..x V_{(n-2)} x(U_1 + U_2 + ... + U_k) = \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_1 \right) + \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_2 \right) +$

$$... + \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_k \right)$$

Ésta es la propiedad distributiva del Producto Vectorial en R^n.

Demostración.

Se restringe la demostración de ésta propiedad para $k = 2$ debido a su extensión, proponemos su demostración por inducción como ejercicio, es decir para todo k=n mayor que dos.

$$V_1 x V_2 x..x V_{(n-2)} x(U_1 + U_2) = \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_1 \right) + \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_2 \right)$$

se tiene que

$$(U_1 + U_2) = (U_{11} + U_{21}, U_{12} + U_{22}, +...+, U_{1n} + U_{2n})$$

por lo tanto

$$V_1 x V_2 x .. x V_{(n-2)} x (U_1 + U_2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-2)1} & V_{(n-2)2} & V_{(n-2)3} & . & . & . & V_{(n-2)n} \\ U_{11} + U_{21} & U_{12} + U_{22} & U_{13} + U_{23} & . & . & . & U_{1n} + U_{2n} \end{vmatrix}$$

Resolviendo por el último renglón correspondiente al vector de la suma de los U_k se tiene

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-2)1} & V_{(n-2)2} & V_{(n-2)3} & . & . & . & V_{(n-2)n} \\ U_{11} + U_{21} & U_{12} + U_{22} & U_{13} + U_{23} & . & . & . & U_{1n} + U_{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= (U_{11} + U_{21}) \left| V_{(n-1)1} \right| + (U_{12} + U_{22}) \left| V_{(n-1)2} \right| + ... + (U_{1n} + U_{2n}) \left| V_{(n-1)n} \right|$$

$$= U_{11} \left| V_{(n-1)1} \right| + U_{12} \left| V_{(n-1)2} \right| + ... + U_{1n} \left| V_{(n-1)n} \right| + U_{21} \left| V_{(n-1)1} \right| + U_{22} \left| V_{(n-1)2} \right| + ... + U_{2n} \left| V_{(n-1)n} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-2)1} & V_{(n-2)2} & V_{(n-2)3} & . & . & . & V_{(n-2)n} \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} & . & . & . & U_{1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-2)1} & V_{(n-2)2} & V_{(n-2)3} & . & . & . & V_{(n-2)n} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & . & . & . & U_{2n} \end{vmatrix}$$

$$= \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_1\right) + \left(V_1 x V_2 x..x V_{n-2} x U_2\right)$$

e) $U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = \left(U_1 x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right).V_{n-1}$ si n es impar y

$U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = -\left(U_1 x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right).V_{n-1}$ si n es par.

Ésta propiedad recibe el nombre de n–ple producto escalar de U_1 y el Producto Vectorial $V_1 x V_2 x..x V_{n-1}$.

Demostración.

$$U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = U_1.\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1\})2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

$$= (U_{11}, U_{12}, ..., U_{1n}).(e_1 V_{e1} + e_2 V_{e2} + ... + e_n V_{en})$$

En donde V_{ei} es el cofactor de e_i, desarrollando este escalar se tiene:

$U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = U_{11} V_{e1} + U_{12} V_{e2} + ... + U_{1n} V_{en}$ (escalar izquierdo)

Se desarrolla ahora el escalar del miembro derecho

$$\left(U_i x V_1 x V_2 x \ldots x V_{n-2}\right).V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} & . & . & . & U_{1n} \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-2)1} & V_{(n-2)2} & V_{(n-2)3} & . & . & . & V_{(n-2)n} \end{vmatrix} .V_{(n-1)}$$

$$= (e_1 U_{e1} + e_2 U_{e2} + \ldots + e_n V_{en}).(V_{(n-1)1}, V_{(n-1)2}, \ldots, V_{(n-1)n})$$

En donde U_{ei} es el cofactor de e_i, desarrollando este escalar se tiene:

$$\left(U_i x V_1 x V_2 x \ldots x V_{n-2}\right).V_{n-1} = U_{e1} V_{(n-1)1} + U_{e2} V_{(n-1)2} + \ldots + U_{en} V_{(n-1)n} \text{ (escalar derecho)}$$

Comparando los escalares de los dos miembros (el derecho con el izquierdo), usted puede comprobar que

$U_{11} V_{e1} + U_{12} V_{e2} + \ldots + U_{1n} V_{en} = U_{e1} V_{(n-1)1} + U_{e2} V_{(n-1)2} + \ldots + U_{en} V_{(n-1)n}$ si n es impar y que $U_{11} V_{e1} + U_{12} V_{e2} + \ldots + U_{1n} V_{en} = -(U_{e1} V_{(n-1)1} + U_{e2} V_{(n-1)2} + \ldots + U_{en} V_{(n-1)n})$ si n es par.

Ilustraremos ésta propiedad con el siguiente ejemplo:
para n = 5 y n = 6.

En R^5, sean $U_1 = (1,3,-2,5,4)$, $V_1 = (3,0,-4,6,1)$, $V_2 = (-2,8,3,0,7)$, $V_3 = (-9,8,4,-2,1)$ y $V_4 = (-4,8,-7,2,0)$, entonces

$$U_1.\left(V_1 x V_2 x V_3 x V_4\right) = (1,3,-2,5,4).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 3 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & 0 & 7 \\ -9 & 8 & 4 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (1,3,-2,5,4).(-2240,-2216,-1296,-152,2448)$

$= -2240 - 6648 + 2592 - 760 + 9792$ = 2736

Ahora

$$(U_i x V_1 x V_2 x V_3).V_4 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_4 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & 0 & 7 \\ -9 & 8 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.(-4,8,-7,2,0)$$

$= (-48,60,-360,-228,72).(-4,8,-7,2,0)$

$= 192 + 480 + 2520 - 456 + 0$ = 2736

En R^6, sean $U_1 = (1,3,-2,5,4,1)$, $V_1 = (3,0,-4,6,1,2)$, $V_2 = (-2,8,3,0,7,3)$, $V_3 = (-9,8,4,-2,1,4)$, $V_4 = (-4,8,-7,2,0,5)$ y $V_5 = (1,2,3,4,5,6)$ entonces

$$U_1.(V_1 x V_2 x V_3 x V_4 x V_5) = (1,3,-2,5,4,1).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 3 & 0 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & 3 & 0 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 8 & -7 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$= (1,3,-2,5,4,1).(-9408,-8664,-5336,-156,9960,-1072)$

$= -9408 - 25992 + 10672 - 780 + 39840 - 1072$ = 13260

Ahora

$$\left(U_i x V_1 x V_2 x V_3 x V_4\right).V_5 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & 3 & 0 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 8 & -7 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.(1,2,3,4,5,6)$$

$$= (3696,5298,2412,1482,-4860,-2736).(1,2,3,4,5,6)$$

$$= 3696 + 10596 + 7236 + 5928 - 24300 - 16416 = -13260$$

f) $V_i.(V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1}) = 0$ para todo $i = 1,2,3,...,(n-1)$

Es decir, el Producto Vectorial es ortogonal a cada uno de los vectores que lo integran.

Demostración.

De la propiedad e) se tiene que

$U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = \left(U_i x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right).V_{n-1}$ si n es impar y

$U_1.\left(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}\right) = -\left(U_i x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right).V_{n-1}$ si n es par.

De cualquier manera $V_i.(V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1}) = \pm\left(V_i x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right).V_{n-1}$ (3)

Pero $\left(V_i x V_1 x V_2 x..x V_{n-2}\right) = \vec{0}$ por que el vector V_i está dos veces.

Luego remplazando en (3) se tiene

$$V_i.(V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1}) = \pm \left(\vec{0}\right) V_{n-1} = 0$$

Se ha demostrado que el Producto Punto de V_i y $(V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1})$ es cero, entonces V_i y $(V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1})$ son ortogonales.

Otra forma de ver la demostración de esta propiedad es basándose en la definición, sea

$$\Delta = V_1 x V_2 x V_3 x..x V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . & e_n \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1\})2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix} = e_1 C_{11} + e_2 C_{12} + ... + e_n C_{1n}$$

$$= (C_{11}, C_{12}, ..., C_{1n}) = \Delta$$

Donde $C_{11}, C_{12}, ..., C_{1n}$ son los cofactores de la primera fila del “determinante”

$$V_i \Delta = (V_{i1}, V_{i2}, ..., V_{in}).\ (C_{11}, C_{12}, ..., C_{1n})$$
$$= V_{i1}.C_{11}, V_{i2}.C_{12}, ..., V_{in}.C_{1n}$$

Este producto equivale al desarrollo del determinante

$$= \begin{vmatrix} V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ V_{11} & V_{12} & V_{13} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & . & . & . & V_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & . & . & . & V_{in} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & V_{(n-1)3} & . & . & . & V_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

y este resultado es cero (0) ya que tiene dos filas iguales.

g) si $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ son vectores de R^n distintos del vector cero ($\vec{0}$) entonces por lo menos dos de ellos son paralelos si y sólo sí $(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}) = \vec{0}$

Análisis.

Si ninguno de los vectores son cero, $(V_1 x V_2 x..x V_{n-1}) = \vec{0}$ si y sólo sí por lo menos dos de ellos son linealmente dependiente, es decir que el uno es múltiplo escalar del otro y si esto es así el ángulo que forman estos dos vectores es 0 ó π radianes, lo cual dice que los vectores son iguale ó son paralelos entre sí.

EJERCICIOS

1. Considere los vectores $V_0=(0,0,0,0,0)$, $V_1=(8,2,-1,0,3)$, $V_2=(1,-1,0,7,-7)$, $V_3=(-2,8,6,3,-5)$, $V_4=(8,-1,4,5,0)$, $U_1=(1,2,3,4,5)$ y $U_2=(5,4,3,2,-1)$ del espacio R^5 y el escalar $\lambda=5$ para determinar el Producto Vectorial $V_1xV_2xV_3xV_4$ y utilice las propiedades vista para calcular los siguientes productos:

   a) $\vec{0}xV_1xV_2xV_3$
   b) $V_2xV_1xV_3xV_4$
   c) $(\lambda V_1)xV_2xV_3xV_4$
   d) $V_1xV_2xV_3x(U_1+U_2)$
   e) $V_1.(V_2xV_3xV_4xU_1)$
   f) $-(V_1xV_2xV_3xV_4).U_1$
   g) $V_1.(V_1xV_2xV_3xV_4)$
   h) $V_2.(V_1xV_2xV_3xV_4)$

2. Considere los vectores $V_0=(0,0,0,0,0,0)$, $V_1=(8,2,-1,0,3,1)$, $V_2=(1,-1,0,7,-7,2)$, $V_3=(-2,8,6,3,-5,3)$, $V_4=(8,-1,4,5,0,4)$, $V_5=(-2,-3,-5,8,7,2)$, $U_1=(1,2,3,4,5,-1)$ y $U_2=(5,4,3,2,-1,-2)$ del espacio R^6, y el escalar $\lambda=2$ para determinar el Producto Vectorial $V_1xV_2xV_3xV_4xV_5$ y utilice las propiedades vista para calcular los siguientes productos:

   a) $\vec{0}xV_1xV_2xV_3xV_4$
   b) $V_2xV_1xV_3xV_4xV_5$
   c) $(\lambda V_1)xV_2xV_3xV_4xV_5$
   d) $V_1xV_2xV_3xV_4(U_1+U_2)$
   e) $V_1.(V_2xV_3xV_4xV_5xU_1)$
   f) $-(V_1xV_2xV_3xV_4xV_5).U_1$
   g) $V_1.(V_1xV_2xV_3xV_4xV_5)$
   h) $V_2.(V_1xV_2xV_3xV_4xV_5)$

Aplicaciones

El lector se preguntará el motivo por el cual estamos interesados en estudiar espacios de dimensión mayor que tres, una respuesta es que muchos problemas que suponen el estudio de sistemas de un número grande de ecuaciones, se analiza con mayor facilidad introduciendo vectores en un n-espacio conveniente y remplazando todas aquellas ecuaciones por una sola ecuación vectorial. Otra ventaja es que podemos tratar de una vez, muchos problemas comunes a las operaciones de una, dos, tres ó más dimensiones, esto es, problemas independientes de la dimensionalidad del espacio. Esto está de acuerdo con el espíritu de la moderna matemática que facilita el desarrollo de métodos de amplias síntesis para atacar distintos problemas de manera simultanea ya que el formalismo matemático ha cedido el paso a una matemática dinámica y práctica, con incidencia en la vida cotidiana y correlacionada con otras ciencias del saber, cuya metodología no está formalizada sino operante.

En los momentos actuales la representación geométrica que son de gran ayuda en la ilustración y visualización de conceptos sobre vectores, cuando $n = 1,2$ y 3, no puede utilizarse cuando $n > 3$; por ello el estudio del álgebra vectorial en espacios de más de tres (3) dimensiones debe hacerse totalmente con medios analíticos cuyo raciocinio axiomático se a simplificado hoy por hoy debido la adaptación y uso de la nuevas tecnología en las matemáticas tales como las calculadoras graficadoras y los computadores y siendo más específicos, usando los software educativos como el Derive. De fácil acceso para el estudiante de hoy.

Dada la estrecha relación entre el Producto Punto ó Escalar y el Producto Cruz ó Vectorial, se presentan algunos ejercicios de aplicación utilizando principalmente el triple producto escalar como una de las propiedades que más expresa la relación entre estos productos.

Ejemplos de n-planos en R^2, R^3 y R^4 determinados por 2, 3, y 4 puntos respectivamente.

Nota: El número de puntos que determina un n-planos es el mismo de la dimensión del campo en que esté.

Observación:

Aunque hasta aquí no se halla hablado del Producto Vectorial en $\mathbf{R^2}$, se ve que es posible definirlo, y como para R^n se necesitan (n-1) vector, para R^2, se necesita un vector.

Sea $V_1 = (V_{11}, V_{12})$ un vector de R^2. Entonces el Producto Vectorial de él, denotado por xV_1 se define así:

$$xV_1 = x(V_{11}, V_{12}) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ V_{11} & V_{12} \end{vmatrix} = V_{12}e_1 - V_{11}e_2 = (V_{12}, -V_{11})$$

Ejemplo 1.

Dados los puntos $P_1 = (2,0)$ y $P_2 = (0,3)$. Halle las ecuaciones vectoriales y cartesiana del 2-plano en R^2.
(Recta)

$$X_1 = (0,3) - (0,2) = (-2,3) = P_2 - P_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3e_1 + 2e_2 = (3,2)$$

$$X_1.\Delta = (-2,3).(3,2) = (-2).(3) + (3).(2) = -6 + 6 = 0$$

Ecuación vectorial de la recta.

$$(X - P_1).\Delta = 0 \qquad X = (x_1, x_2)$$

$$((x_1, x_2) - (2,0)).(3,2) = 0$$

$$(x_1 - 2, x_2).(3,2) = 0$$

$$3x_1 - 6 + 2x_2 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 1$$

Ecuación Simétrica de la recta.

Ejemplo 2.

Dados los puntos $P_1 = (2,0,0)$, $P_2 = (0,3,0)$ y $P_3 = (0,0,4)$. Halle las ecuaciones vectoriales y cartesiana del 3-plano en R^3.
(Plano).

$X_1 = (0,3,0) - (2,0,0) = (-2,3,0) = P_2 - P_1$ y $X_2 = (0,0,4) - (2,0,0) = (-2,0,4) = P_3 - P_1$

$$\Delta = X_1 x X_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = e_1(12) - e_2(-8) + e_3(6)$$

$\Delta = (12,8,6)$

$X_1.\Delta = (-2,3,0).(12,8,6) = -24 + 24 + 0 = 0$

Ecuación vectorial del plano.

$$(X - P_1).\Delta = 0 \qquad X = (x_1, x_2.x_3)$$

$$X.\Delta = P_1.\Delta$$

$$(x_1, x_2 . x_3).\ (12,8,6) = (2,0,0).\ (12,8,6)$$

$$12x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 24$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$$

Ecuación Simétrica del plano.

Ejemplo 3.

Dados los puntos $P_1 = (2,0,0,0)$, $P_2 = (0,3,0,0)$, $P_3 = (0,0,4,0)$ y $P_4 = (0,0,0,5)$. Halle las ecuaciones vectoriales y cartesiana del 4-plano en R^4.

$$X_1 = (0,3,0,0) - (2,0,0,0) = (-2,3,0,0) = P_2 - P_1$$

$$X_2 = (0,0,4,0) - (2,0,0,0) = (-2,0,4,0) = P_3 - P_1$$

$$X_3 = (0,0,0,5) - (2,0,0,0) = (-2,0,0,5) = P_4 - P_1$$

$$\Delta = X_1 x X_2 x X_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 60e_1 + 40e_2 + 30e_3 + 24e_4 = (60,40,30,24)$$

$$X_1.\Delta = (-2,3,0,0).\ (60,40,30,24) = -120 + 120 + 0 + 0 = 0$$

$$X_2.\Delta = (-2,0,4,0).\ (60,40,30,24) = -120 + 0 + 120 + 0 = 0$$

$X_3.\Delta = (-2,0,0,5).\,(60,40,30,24) = -120 + 0 + 0 + 120 = 0$

Ecuación vectorial del 4-plano en R^4.

$(X - P_1).\Delta = 0 \qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$X.\Delta = P_1.\Delta$

$(x_1, x_2, x_3, x_4).\,(60,40,30,24) = (2,0,0,0).\,(60,40,30,24) = 120$

$60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 24x_4 = 120$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{5} = 1$$

Ecuación Simétrica del 4-plano en R^4.

Análogamente y en forma general podemos deducir la ecuación vectorial y simétrica del n-plano en R^n determinados por los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ y los n-1 vector que se obtienen.

Dado

$X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \in \mathrm{R}^n \qquad X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathrm{R}^n \qquad i = 1,2,\dots,(n-1)$

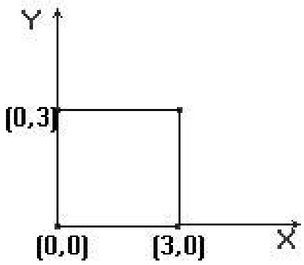
$(X - P).\Delta = 0 \qquad \Delta = X_1 x X_2 x \dots x X_{(n-1)}$

$$(X - P).\,(X_1 x X_2 x \dots x X_{(n-1)}) = \begin{vmatrix} x_{11} - p_{11} & x_{22} - p_{22} & x_{33} - p_{33} & . & . & . & x_{nn} - p_{nn} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & x_{(n-1)3} & . & . & . & x_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

A continuación presentamos ejemplos sencillos de aplicación en cálculos de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

Ejemplo 4.

Hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores que van del origen a los puntos (3,0) y (0,3) en R^2.



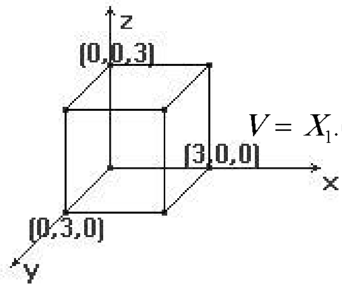
$X_1 = (3,0) \qquad X_2 = (0,3)$

$$S = X_1.(xX_2) = (3,0).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (3,0).(0,3) = 9$$

Ejemplo 5.

Hallar el volumen del cubo formado por los vectores que van del origen a los puntos (3,0,0), (0,3,0), y (0,0,3) en R^3.

$X_1 = (3,0,0) \qquad X_2 = (0,3,0) \qquad X_3 = (0,0,3)$



$$V = X_1.(X_2 x X_3) = (3,0,0).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3,0,0).(9,0,0) = 27$$

Ejemplo 6.

Hallar el volumen del 4-plano en R^4 que está formado por los vectores que van del origen a los puntos (2,0,0,0), (0,2,0,0), (0,0,2,0) y (0,0,0,2).

$$V = X_1.(X_2xX_3xX_4) = (2,0,0,0).\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,0,0).(8,0,0,0) = 16$$

La aplicación del Producto Vectorial en el campo de la física se presenta como sigue:

A nivel atómico, el movimiento de cargas está determinado por la fuerza electromagnética. Si en una región del espacio existen a la vez un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza combinada $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula con carga q y velocidad $\vec{V}$ es $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V}x\vec{B}$
Ésta fuerza se conoce como fuerza de Lorentez, en honor a H. A. Lorentez (1853-1928) quien realizó numerosas contribuciones al conocimiento de los fenómenos electromagnéticos.

Se observa que en el segundo sumando se tiene el Producto vectorial de la velocidad $\vec{V}$ por el campo magnético $\vec{B}$, multiplicado por el escalar q.

Nuestra inquietud es ahora como podríamos definir la fuerza en éstas condiciones en el espacio R^4.

Hasta el momento no es posible calcular la fuerza magnética en un campo magnético definido en R^4, puesto que para calcular dicha fuerza en R^4, además de $\vec{V}$ y $\vec{B}$ requeriríamos de un tercer vector que estaría por conseguirse.

Consecuencialmente en el espacio R^n, además de $\vec{V}$ y $\vec{B}$ necesitaríamos (n-3)-vectores para hallar la fuerza magnética.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS

Las matemáticas son más interesantes, si se conoce algo sobre su desarrollo histórico, y para estimular el interés en éste sentido se incluye en el presente trabajo una nota histórica sobre el "Producto Vectorial" de Joseph Willand Gibbes, uno de los matemáticos que mayor aporte ha hecho al análisis vectorial.

Cada una de las propiedades del Producto Vectorial en R^n ($n \geq 4$) que aparecen en el texto contienen una demostración sencilla al igual que ejemplos y ejercicios cuya lectura y solución llevarán al lector a mostrar el grado de aprehensión del tema, además es importante que éste haga de la presente obra un proyecto que lo invite a investigar y a realizar trabajos complementarios que enriquezcan el conocimiento adquirido.

Algunas propiedades dejan sugerencias útiles al lector, que él manejará cuidadosamente para comprobar por sí mismo su veracidad y no conformarse con resultados dados con antelación y así ejercitar su juicio y demostrar que asimiló los conceptos.

Es indispensable la interpretación correcta de las aplicaciones del Producto Vectorial en problemas de áreas y de volúmenes de figuras y cuerpos geométricos al igual que en los de la física y del álgebra lineal que muestran su relación con el mundo real. En algunos ejemplos se incluyen gráficos que ayudan a visualizar y a entender su geometría e interpretar mejor dichos problemas. Cabe anotar que por el contenido del trabajo también hay problemas que contienen el estudio relacionado con espacios vectoriales abstractos.

Finalmente el presente trabajo incluye un acervo de ejercicios que se pueden resolver para comprobar la asimilación parcial o total del tema; es claro lo laborioso que resulta el desarrollo del Producto Vectorial en un espacio de dimensión mayor ó igual a cuatro, para tal efecto y para la verificación de las propiedades tratadas se recomienda el uso del software educativo Derive quien puede resolver o simplificar un determinante de cualquier orden incluso siendo la primera fila un vector o conformada por variables como es el caso del Producto Vectorial.

CONCLUSIONES

- La definición del Producto Vectorial en R^3, es extensible a R^n.

- Las propiedades que cumple el Producto Vectorial en R^3, también se cumplen en R^n.

- El Producto Vectorial en R^n es de gran utilidad en la solución de problemas reales del álgebra lineal y la física.

- Los determinantes y sus propiedades son de vital importancia en el desarrollo del Producto Vectorial en R^n.

- El software educativo Derive es importante ya que facilita los cálculos del Producto Vectorial en R^n.