

TEORÍA DE ALGUNAS FUNCIONES GENERALIZADAS

AUDAZ CONTRERAS SUAREZ
DAVID SANTOS MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2.002

TEORÍA DE ALGUNAS FUNCIONES GENERALIZADAS

AUDAZ CONTRERAS SUAREZ
DAVID SANTOS MARTÍNEZ

Monografía para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
SILVER ANTONIO QUINTANA

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2.002

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

A Dios, a mi esposa Elvira y a mi hija,
quienes permiten la tranquilidad y
armonía en nuestro hogar.

DAVID SANTOS

A Dios, a la memoria de mi madre, a
mi padre por su apoyo incondicional y
a todas aquellas personas que
depositaron su confianza en mí.

AUDAZ CONTRERAS

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a Dios, por permitir culminar con éxito los estudios; a la UNIVERSIDAD DE SUCRE, que abrió sus puertas para brindar una gran formación profesional; al profesor SILVER ANTONIO QUINTANA, de la facultad de Educación y Ciencias y Asesor del trabajo, al profesor ANTONIO PATRON BENÍTEZ, por su colaboración en la transcripción del texto, y a todas aquellas personas que directa e indirectamente brindaron su apoyo incondicional para la realización del presente trabajo.

Únicamente los graduados son responsables
de las ideas expuestas en el presente trabajo

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.	10
1. LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC Y SUCESIONES DELTA.	12
1.1 TERMINOLOGIA PRELIMINAR.	12
1.1.1 Operador Diferenciable.	13
1.1.2 Función Localmente Integrable.	14
1.1.3 Soporte de una Función.	14
1.1.4 Integral de Lebesgue.	15
1.1.5 Definición de Función Medible.	17
1.1.6 Definición de Integral de Lebesgue.	18
1.2 LA FUNCIÓN DE HEAVISIDE.	20
1.3 LAS FUNCIONES DE PRUEBA.	25
1.4 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.	29
1.5 LAS SUCESIONES DELTA.	33
2. TEORÍA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ-SOBOLEV.	40
2.1 FUNCIONALES LINEALES Y LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ-SOBOLEV.	40
2.1.1 Distribuciones Regulares.	41
2.1.2 Espacio D' .	44
2.1.3 Ejemplos.	46

	Pág.
2.2 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON LAS DISTRIBUCIONES.	49
2.2.1 Traslación Lineal de Variables.	49
2.2.2 Producto de una Distribución y una Función.	53
3. DIFERENCIACIÓN DE DISTRIBUCIONES.	56
4. PRIMITIVAS DE DISTRIBUCIONES DEFINIDAS SOBRE $\mathbb{R}$.	64
BIBLIOGRAFÍA.	70

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1. Gráficas de $H(x)$ y $H(x - a)$.	21
FIGURA 2. Gráfica de $F(x) = F_1(x)H(\alpha - x) + F_2(x)H(x - \alpha)$.	23
FIGURA 3. Gráfica de $F(x) = x^2H(x) - H(x - 1)(-3 + x^2) - 3H(x - 2)$	24

INTRODUCCIÓN

El objeto del presente trabajo es hacer una presentación de algunas distribuciones o funciones generalizadas, que fueron descubiertas por el matemático L. Schwartz en los años cuarenta del siglo pasado. En la actualidad, la teoría de las funciones generalizadas se ha extendido ampliamente. Existen varias aplicaciones de las funciones generalizadas y se basan, en general, en el hecho que estas funciones pueden ser expresadas como sucesiones de funciones ordinarias, las cuales convergen de alguna manera en un intervalo finito.

El trabajo se ha dividido en cuatro capítulos, en el primero, se estudia alguna terminología preliminar, las funciones de Heaviside, las funciones de prueba y la función Delta de Dirac, lo mismo que las sucesiones Delta con sus propiedades.

El segundo capítulo contiene los funcionales lineales y la teoría de las distribuciones, definiendo algunas operaciones como adición, producto, la

traslación lineal de variables y el producto de una distribución por una función.

En el tercer capítulo se estudia la diferenciación de las distribuciones, mostrando a partir de su definición que toda distribución es diferenciable.

En el cuarto capítulo, se presenta el concepto de primitiva de una distribución, concluyendo que toda distribución tiene una primitiva, es decir, que es integrable en $\mathbb{R}$.

Se considera, que el presente trabajo está dirigido a las personas que han abordado los conceptos preliminares del análisis matemático y de la topología general, tales como sucesiones de funciones, convergencia de sucesiones de funciones, compacidad, conexidad, continuidad, integrabilidad según Riemann y derivabilidad.

1. LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC Y SUCESIONES DELTA

1.1 TERMINOLOGÍA PRELIMINAR.

Una n-upla K de enteros no negativos, $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ se llamará un multi-índice de dimensión n ; por el orden de k , denotado por $|k|$, se designa $k_1 + k_2 + \dots + k_n$; y por $K! = k_1!k_2!\dots k_n!$.

Si $X \in \mathbb{R}^n$, entonces $X^K = X_1^{K_1} X_2^{K_2} \dots X_n^{K_n}$.

Si se toma $D_j = \frac{\partial}{\partial X_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$D^K = \frac{\partial^{|K|}}{\partial X_1^{K_1} \partial X_2^{K_2} \dots \partial X_n^{K_n}} = \frac{\partial^{K_1+K_2+\dots+K_n}}{\partial X_1^{K_1} \partial X_2^{K_2} \dots \partial X_n^{K_n}} = D_1^{K_1} D_2^{K_2} \dots D_n^{K_n}.$$

Para el caso unidimensional D^K se reduce a d/dx .

Además, si alguna componente de K es cero, la diferenciación con respecto a la correspondiente variable se omite; por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ con $K = (3, 0, 4)$,

$$\text{se tiene } D^K = \frac{D^7}{\partial X_1^3 \partial X_3^4} = D_1^3 D_3^4.$$

Por funciones $C^K(A)$ se define a las funciones que son diferenciables K veces, de tal forma que cada derivada es continua; y por funciones de clase $C^\infty(A)$ las funciones que son infinitamente diferenciables con cada derivada continua, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.1.1 Operador Diferenciable.

Un operador diferenciable L de orden P , es definido como $L = \sum_{|K| \leq P} a_K(x) D^K$,

donde las $a_K(x)$ son funciones dadas y la suma toma todos los multi-índices K de orden n . Por ejemplo, cuando $n = 1$, se tiene el operador diferencial

$$\text{ordinario } L = a_p(x) \frac{d^p}{dx^p} + a_{p-1}(x) \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + \dots + a_0(x).$$

Como un segundo ejemplo, el operador diferencial de segundo orden parcial en $\mathbb{R}^2$, es:

$$L = a_{2,0}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{1,1}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{0,2}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + a_{1,0}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{0,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{0,0}(x)$$

1.1.2 Función Localmente Integrable.

Una función f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, si $\int_R |f(x)| dx$ existe, para cada

región acotada R , en $\mathbb{R}^n$, y $\int_R |f(x)| dx$ denota la integral del valor absoluto de f

en la región R . Una función f es localmente integrable en una superficie S ,

de $\mathbb{R}^n$, si $\int_S |f(x)| dS$ existe, para cada región acotada S de $\mathbb{R}^{n-1}$. Además,

toda función continua es localmente integrable.

1.1.3 Soporte de una Función.

El concepto de soporte de una función es importante en la teoría de distribuciones y es definido así: El soporte de una función f , denotado por $\text{sop } f$, es la clausura del conjunto de todos los puntos x , tales que $f(x) \neq 0$.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \text{Sen } x$, $x \in \mathbb{R}$, el soporte de $f(x)$ es toda recta real, aunque exactamente en $x = n\pi$, $f(x) = \text{Sen } x$ se anula.

Si el $\text{Sop } f$ es acotado, entonces se dice que f tiene soporte compacto. Por ejemplo, el soporte de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < x \leq -1 \\ x+1, & \text{si } -1 < x < 0 \\ x-1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

es compacto, ya que $\overline{(-1,1)} = [-1,1]$

1.1.4 Integral de Lebesgue.

La integral de Lebesgue se consigue sobre conjuntos que no siempre son intervalos, por tal razón, se debe entender previamente el concepto de medida de un conjunto.

La medida de un conjunto es una generalización de la longitud de intervalos.

Sean $A_1, A_2, \dots$ conjuntos disyuntos, entonces su medida se escribe

$$m\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K\right) = \sum_{K=1}^{\infty} m(A_K), \quad \text{donde } m(A) \text{ denota la "medida de } A" \text{ y es su}$$

longitud.

Si A es un conjunto en $\mathbb{R}$, $\overline{m}(A)$ y $\underline{m}(A)$ denotan la medida exterior y medida interior de A , respectivamente.

Sea $[a, b] = I_0$, $A \subset I_0$, entonces $\overline{m}(A) + \overline{m}(A^c) = \overline{m}(I_0) = b - a$; dos conjuntos que cumplen esta relación se denominan “conjuntos L” o “medibles”.

Para entender $\overline{m}(A)$, se toma $T = \{I_1, I_2, \dots, I_k, \dots\}$ una colección de intervalos que recubre A , o lo que es lo mismo, $A \subseteq \bigcup I_k$, y la longitud del recubrimiento de T , $L(T) = \sum_{K=1}^{\infty} L(I_K)$, entonces el extremo inferior de $L(T)$ para todos los recubrimientos por intervalos abiertos, se denomina medida exterior de A a la expresión:

$$\overline{m}(A) = \inf_{\text{para todo } T} L(T) = \inf_{\text{para todo } \{I_K\}} \sum_{K=1}^{\infty} L(I_K), \text{ siendo } A \subseteq \bigcup I_K.$$

Por otro lado, $\underline{m}(A) = \overline{m}(I_0) - \overline{m}(A^c)$.

Sea $[a, b] = I_0$, $A \subset I_0$, entonces los conjuntos L tienen las siguientes propiedades:

1. La recta real es un conjunto L.
2. Si A es conjunto L, entonces A^c es conjunto L.
3. Si A y B son conjuntos L, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son conjuntos L.

4. Si $A_1, A_2, \dots$ son conjuntos L , disjuntos, entonces $\bigcup A_i = A$ es un

conjunto L y $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

5. Si $A_1, A_2, \dots$ son conjuntos L entonces $\bigcup A_i = A$ es un conjunto L .

6. Un conjunto abierto o cerrado es conjunto L .

7. Cada una de las propiedades siguientes es una condición necesaria y suficiente para que S sea un conjunto L :

a) Dado $\varepsilon > 0$, existen A (abierto) y F (cerrado) tales que

$$F \subset S \subset A \quad m(A - F) < \varepsilon.$$

b) Dado $\varepsilon > 0$, existe un cerrado F tal que $F \subset S$, $\overline{m}(S - F) < \varepsilon$.

c) Dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto A , tal que $S \subset A$, $\overline{m}(A - S) < \varepsilon$.

1.1.5 Definición de Función Medible.

Sea f una función de valor real, si el conjunto $\{x/ f(x) > a\}$, $x \in R$, es L , entonces f se llama función L . Se define entonces las siguientes funciones:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Si f es una función L , entonces f^+ y f^- son funciones L , las cuales denotan la parte positiva y la parte negativa de f , respectivamente.

Si f y g son funciones L , entonces el conjunto $\{x/ f(x) > g(x)\}$ es un conjunto L . Además, $af(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ son funciones L .

Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones L y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, entonces $f(x)$ es L .

1.1.6 Definición de Integral de Lebesgue.

En un conjunto E , se define la integral de una función f , donde E y f son L , de la siguiente forma:

a) Si $f(x) \geq 0$: sea $D = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una partición general de E , tal que $\bigcup e_k = E$, donde los e_k son L y disjuntos; se define la suma inferior así

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m(e_k) m_k, \text{ donde } \inf_{x \in e_k} f(x) = m_k; \text{ el extremo superior de } L(f, P)$$

para todas las particiones, se llama integral de Lebesgue de f y se nota

$$\int_E f(x) dx = \sup_P L(f, P).$$

Si $L(f, P) = \infty$, entonces $\int_E f(x) dx = \infty$.

b) Si f es cualquiera: en caso que $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$, entonces

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx + \int_E f^-(x) dx.$$

El valor de la integral de f no está determinado si las integrales de la parte positiva y negativa tienen valor infinito; si el valor de la integral de f es finito, entonces se dice que f es integrable en E .

La integral de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

a) Si $E = \bigcup_{K=1}^P E_K$, donde $E_1, E_2, \dots, E_P$ son disjuntos, entonces

$$\int_E f(x) dx = \sum_{K=1}^P \int_{E_K} f(x) dx.$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ en E , entonces $\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx$.

c) Para que $\int_E f(x) dx$ sea finita, es necesario y suficiente que

$$\int_E |f(x)| dx \text{ sea finita.}$$

d) Si $f(x)$ es acotada en E y $g(x)$ es integrable, entonces existe un C , tal

que $m < C < M$, y además $\int_E f(x)g(x) dx = C \int_E |g(x)| dx$, donde

$$\inf_E f(x) = m \quad \text{y} \quad \sup_E f(x) = M.$$

e) Si $m(E) = 0$ entonces $\int_E f(x) dx = 0$.

f) Si $f(x)$ es integrable en E , entonces el conjunto $\{x/ f(x) = \pm\infty\}$ tiene una medida cero.

g) La integral es lineal, es decir:

$$\int_E (a_1 f_1(x) dx + \dots + a_n f_n(x) dx) = a_1 \int_E f_1(x) dx + \dots + a_n \int_E f_n(x) dx.$$

h) Si $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$, donde los E_K son disjuntos, entonces

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_K} f(x) dx, \text{ es decir, la integral es completamente}$$

aditiva.

i) Si $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, es una sucesión creciente de funciones L

positivas y si $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ entonces $\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$.

1.2 LA FUNCIÓN DE HEAVISIDE.

Definición.

$$\text{La función } H(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ C, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

se conoce como función de Heaviside o función escalonada unitaria.

H tiene un salto de discontinuidad en $X = 0$. Usualmente se toma $H(0) = \frac{1}{2}$.

Algunas veces a $H(0)$ se le asigna algún otro valor constante C , en lugar de $\frac{1}{2}$ con $0 < C < 1$; en este caso, la función se simboliza por $H_C(x)$. Si el salto de la función de Heaviside se da en un punto $X = a$, entonces la función se denota por $H(X - a)$.

$$\text{Así, } H(-X) = \begin{cases} 1, & \text{si } X < 0 \\ 0, & \text{si } X > 0, \end{cases} \quad H(X - a) = \begin{cases} 0, & \text{si } X < a \\ 1, & \text{si } X > a. \end{cases}$$

Luego,

$$1 - H(-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde se puede ver que $H(x) = 1 - H(-x)$.

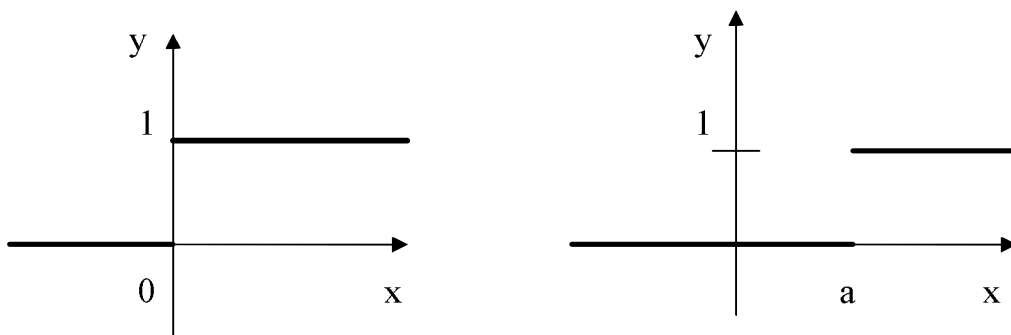


FIGURA 1. Gráficas de $H(x)$ y $H(x - a)$.

Se puede estudiar la función de Heaviside a través de varios argumentos. Por ejemplo, se examinará $H(ax + b)$. Si $a > 0$,

$$H(ax + b) = \begin{cases} 0, & \text{si } ax + b < 0 \\ 1, & \text{si } ax + b > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad H(ax + b) = \begin{cases} 0, & \text{si } x + \frac{b}{a} < 0 \\ 1, & \text{si } x + \frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

luego, $H(ax + b) = H(x + b/a)$.

Por otro lado se tiene que, $H(x + b/a)H(a) + H(-x - b/a)H(-a) =$
 $= H(x + b/a)(1) + H(-x - b/a)(0) = H(x + b/a) = H(ax + b)$.

Luego, $H(ax + b) = H(x + b/a)H(a) + H(-x - b/a)H(-a)$, siempre que $a > 0$,
 $a \in \mathbb{R}$.

Similarmente, se puede mostrar que el mismo resultado se tiene si $a < 0$.

La función H es muy útil en el estudio de las funciones generalizadas, especialmente en la discusión de funciones discontinuas con salto. Por ejemplo, sea la función F una función que es continua en todos sus puntos, excepto en $x = \alpha$, en cuyo punto ésta tiene un salto:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x < \alpha \\ F_2(x), & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

entonces $F(x)$ se puede escribir como

$$F(x) = F_1(x)H(\alpha - x) + F_2(x)H(x - \alpha).$$

En efecto:

a) Si $x < \alpha$, $F_1(x)H(\alpha - x) + F_2(x)H(x - \alpha) = F_1(x)(1) + F_2(x)(0) = F_1(x)$.

b) Si $x > \alpha$, $F_1(x)H(\alpha - x) + F_2(x)H(x - \alpha) = F_1(x)(0) + F_2(x)(1) = F_2(x)$.

Un ejemplo de esta función se ilustra en la Figura 2.

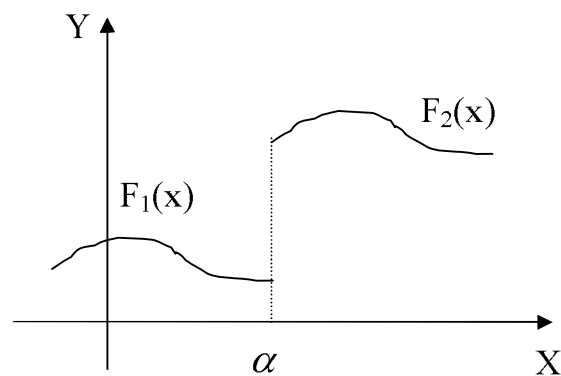


FIGURA 2. Gráfica de $F(x) = F_1(x)H(\alpha - x) + F_2(x)H(x - \alpha)$.

Este concepto puede extenderse a funciones que sean discontinuas en varios puntos, por ejemplo, se considera la siguiente función:

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

$F(x)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$F(x) = x^2H(x) - [H(x-1)][(-3+x^2)] - (3)H(x-2)$, su gráfica es:

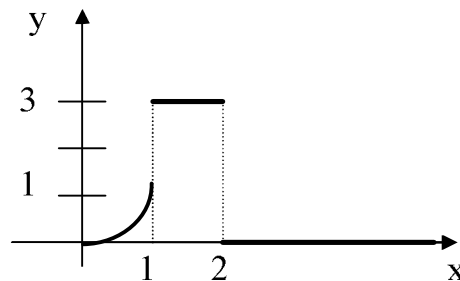


FIGURA 3. Gráfica de $F(x) = x^2H(x) - H(x-1)(-3+x^2) - 3H(x-2)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \text{a) Si } 0 < x < 1, \quad & x^2H(x) - [H(x-1)][(-3+x^2)] - (3)H(x-2) = \\ & = x^2(1) - (0)(-3+x^2) - 3(0) = x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Si } 1 < x < 2, \quad & x^2H(x) - [H(x-1)][(-3+x^2)] - 3H(x-2) = \\ & = x^2(1) - (1)(-3+x^2) - 3(0) = x^2 + 3 - x^2 = 3. \end{aligned}$$

c) Si $x > 2$, $x^2 H(x) - [H(x-1)][H(-3+x^2)] - 3H(x-2) =$
 $= x^2(1) - (1)(-3+x^2) - 3(1) = x^2 + 3 - x^2 - 3 = 0.$

1.3 LAS FUNCIONES DE PRUEBA.

Sea D el espacio, que consiste de las funciones de valor real

$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tales que cumplen lo siguiente:

(i) $\phi(x)$ es una función infinitamente diferenciable definida en cada punto de $\mathbb{R}^n$. Esto quiere decir, que $D^k \phi$ existe, para todo multi-índice k . Tales funciones también se denominan funciones de clase C^∞ .

(ii) Existe en D un número A , tal que $\phi(x)$ se anula para $\|x\| > A$. Esto quiere decir, que $\phi(x)$ tiene soporte compacto. Entonces, tal $\phi(x)$ es una función de prueba. Los elementos de D se denominan funciones de prueba.

El prototipo de una función de prueba en el espacio D , es

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-a^2}{a^2 + r^2}\right), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1)$$

Su soporte es claramente $|r| \leq a$. Tomando $a = 1$ y multiplicando

$\phi(x) = \phi(x)$ por un factor normalizado conveniente, se puede construir la función

$$\phi(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right), & r < 1 \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad (2)$$

que satisface las condiciones

(i) $\phi \in D$.

(ii) $\int_{R^n} \phi_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in R^n.$

(iii) $c^{-1} = \int_{|r| \leq 1} \exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right) dx.$

Esta función por intervalos nos da la función de prueba,

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - r^2}\right), & \text{si } r < \varepsilon \\ 0, & \text{si } r \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

con las propiedades:

(i) $\int_{R^n} \phi_\varepsilon(x) = 1.$

(ii) $\text{Sop } \phi_\varepsilon = A(\equiv |r| \leq \varepsilon).$

(iii) $c_\varepsilon^{-1} = \int_{|r| \leq \varepsilon} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - r^2}\right) dx.$

Las funciones de prueba, en general, cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Si ϕ_1 y ϕ_2 están en D , entonces también está $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, donde c_1 y c_2 son números reales.
- (ii) Si $\phi \in D$, entonces también $D^k\phi \in D$.
- (iii) Si $f \in C^\infty$ y $\phi \in D$, entonces $f\phi \in D$.
- (iv) Si $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ es una función de prueba m -dimensional y $\psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ es una función de prueba $(n-m)$ -dimensional, entonces $\phi\psi$ es una función de prueba n -dimensional en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La definición de D no demanda que todos sus elementos tengan el mismo soporte. Si se toma en $\mathbb{R}$, por ejemplo, la función $\phi(x)$, definida como en (1), entonces $\phi(x)$ y $\phi(x-3)$ son miembros de D , aunque sus soportes son, respectivamente $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

Para introducir el producto interior en estos espacios es conveniente trabajar con las nociones básicas de la convergencia, las cuales se expresan en la siguiente definición.

Definición.

Una sucesión $\{\phi_m\}$, de elementos de D , converge a ϕ_0 , si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Todo ϕ_m y ϕ_0 se anulan fuera de una región común.
- (ii) $D^k \phi_m \rightarrow D^k \phi_0$ uniformemente en R^n , cuando $m \rightarrow \infty$, para todo multi-índice k .

$\phi_0 \in D$, y por lo tanto, D es cerrado (completo), con respecto a esta definición de convergencia.

Para el caso especial en que $\phi_0 = 0$, la sucesión $\{\phi_m\}$ es llamada una sucesión nula.

La sucesión $\left\{\left(\frac{1}{m}\right)\phi(x, a)\right\}$, donde $\phi(x, a)$ es definida por (1), es una sucesión

nula. Sin embargo, la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{m}\right)\phi\left(\frac{x}{m}, a\right)\right\}$ no es una sucesión

convergente, porque el soporte de la función $\phi\left(\frac{x}{m}, a\right)$ es la esfera con radio

ma , el cual varía, para diferentes valores de m .

Además, en el espacio D de funciones de prueba, se usarán ciertos subespacios de D . Para una región R de $\mathbb{R}^n$, el espacio $D_R = \{\phi \in D: \text{sop}\phi \subseteq R\}$ contiene aquellas funciones de prueba cuyo soporte está en R .

Este es claramente un subespacio lineal de D .

Por ejemplo, D_X y D_Y están contenidos en D_{XY} , el cual es el espacio de funciones de prueba $\phi(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

La convergencia de D_R es definida del mismo modo como en el espacio D .

1.4 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.

En problemas físicos con frecuencia se encuentran conceptos idealizados, tales como fuerza concentrada en un punto α o una fuerza impulsiva que actúa instantáneamente. Estas fuerzas son descritas por la función Delta de Dirac $\delta(x - \alpha)$.

La función δ se define como $\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0 \\ \infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$\delta(x-\alpha)$ tiene propiedades importantes:

$$\text{para cualquier } \alpha \in R, \quad \delta(x-\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq \alpha \\ \infty, & \text{si } x = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Además, } \int_a^b \delta(x-\alpha) dx = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{También, } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha) dx = 1 \quad (3)$$

Sea ϕ una función de prueba, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x+x_0) dx = \phi(x_0).$$

En efecto, sea $z = x - x_0$, entonces $x = x_0 + z$ y $dx = dz$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) \phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \phi(x_0 + z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x+x_0) dx = \phi(x+x_0) \Big|_{x=0} = \phi(x_0). \end{aligned}$$

Se mostrara que $\int_a^b \delta(x-x_0)dx = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

En efecto, sea $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Entonces $\int_a^b \delta(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(0) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Por lo tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha) = 1.$

La ecuación (3) es un caso especial de la fórmula general

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha) f(x) dx = f(\alpha), \quad (4)$$

donde $f(x)$ es una función suficientemente suave.

La ecuación (4) es conocida como la propiedad de reproducción de la función Delta.

Algunas sucesiones de funciones cumplen la relación (4), como por ejemplo, la fórmula conocida como de Dirichlet:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin(mx)}{\pi x} dx = f(0).$$

Se puede mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x + x_0) dx = f(x_0).$$

En efecto, sea $w = x - x_0$, entonces $x = w + x_0$ y $dx = dw$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(w + x_0) dw = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x + x_0) dx.$$

Pero, para $\alpha = 0$, se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$, de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x + x_0) dx = f(x + x_0)|_{x=0} = f(x_0).$$

También se puede mostrar que si g es continua en cero, entonces

$$g(x) \delta(x) = g(0) \delta(x).$$

En efecto, sea f una función arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) \delta(x)] f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) [g(x) f(x)] dx = g(0) f(0) = g(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(0) \delta(x)] f(x) dx \end{aligned}$$

Como $f(x)$ es arbitraria, se concluye que $g(x) \delta(x) = g(0) \delta(x)$.

$\delta(x)$ no es localmente integrable, ya que, si se toma $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos encajados, es decir, cada intervalo es incluido en uno precedente, cuya longitud tiende a cero, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f(x) dx = 0$, pero $\delta(x)$ da un valor finito.

1.5 LAS SUCESIONES DELTA.

Aquí se consideran varias sucesiones cuyo límite es la función Delta. Se discutirán en detalle algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

Sea $S_m(x) = \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, es claro que, para m fijo, cuando $|x|$ sea grande, el valor de S_m se hace pequeño.

Recordando que $\int_0^\infty \frac{\text{Sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ y cambiando x por $-x$, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sen}(-x)}{-x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{-\text{Sen} x}{-x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Luego, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. De donde, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}x}{\pi x} dx = 1$.

Al cambiar x por mx en la fórmula anterior, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}(mx)}{m\pi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x} m dx = 1.$$

Ahora, se mostrará que la propiedad de reproducción se cumple:

se considera la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x} f(x) dx$, donde f es diferenciable y f' es continua y acotada.

Se observa que para todo $b > a > 0$,

$$\int_a^b S_m(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\text{Sen}(mx)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{Sen}y}{y} dy \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{Sen}y}{y} dy \rightarrow 0.$$

Similarmente, para $a < b < 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{Sen}y}{y} dy \rightarrow 0$.

Luego,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(x) f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x} f(x) dx = f(0) \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x} dx \right] =$$

$$= f(0) \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen}(mx)}{\pi x} dx \right] = f(0),$$

donde $\varepsilon > 0$, sin importar que tan pequeño sea.

Ejemplo 2.

Sea $S_m(x) = \frac{m}{\pi(1+m^2 x^2)}$. $S_m(x)$ se puede interpretar como la distribución de

carga continua en una línea.

Es claro que, para $m \gg 1$, $S_m(x) \ll 1$, excepto para un valor máximo de $\frac{m}{\pi}$,

que se obtiene en $x = 0$.

Se verificará esta última afirmación:

$$S'_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{-2m^3 x}{(1+m^2 x^2)^2}. \quad S'_m(x) = 0, \text{ si y sólo si } -2m^3 x = 0,$$

si y sólo si $x = 0$.

El valor total de $r_m(x)$ a la izquierda del punto x , es

$$r_m(x) = \int_{-\infty}^x S_m(u) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(mx), \text{ la cual es la distribución acumulativa}$$

de carga.

Puesto que $\int_{-\infty}^{\infty} S_m(u) du = 1$, para cada m , se sigue que la carga total sobre la línea es siempre igual a 1.

$$\text{Además, } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{También, } \lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1/2, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Cuando m se incrementa, la carga es impulsada hacia el origen.

Así, $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x)$ describe la densidad de carga debido a una carga positiva unitaria localizada en $x = 0$.

Para ver que la sucesión $S_m(x)$ caracteriza la función Delta, falta probar que satisface la propiedad de reproducción; es decir,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = f(0), \text{ para cualquier función } f \text{ acotada, integrable y}$$

continua en $x = 0$.

En efecto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) S_m(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx,$$

donde $g(x) = f(x) - f(0)$, pero como $\int_{-\infty}^{\infty} S_m(u) du = 1$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx$$

Se debe probar que $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx = 0$.

En efecto, se tiene que para algún $\varepsilon > 0$, existe un N , tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx \right| < \varepsilon, \quad m > N.$$

Sea A un número positivo que divide el intervalo $(-\infty, \infty)$ en tres partes, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx = \int_{-\infty}^{-A} g(x) S_m(x) dx + \int_{-A}^A g(x) S_m(x) dx + \int_A^{\infty} g(x) S_m(x) dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

En la integral de I_3 , sea $M(A)$ el máximo de $|g(x)|$ en $-A < x < A$.

Entonces,

$$|I_3| \leq \int_{-A}^A |g(x)| S_m(x) dx \leq M(A) \int_{-A}^A \frac{m}{\pi(1+m^2 x^2)} dx = M(A) \left[\frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mx) \right] \leq M(A).$$

Como $g(0) = 0$ y $g(x)$ es continua en $x = 0$, entonces $\lim_{A \rightarrow 0} M(A) = 0$. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número real A , lo suficientemente pequeño, tal que $|I_3| < \varepsilon/2$, y este es independiente de M .

Falta probar que $|I_1 + I_2|$ es suficientemente pequeño, para un m grande.

En efecto, puesto que f es acotada y $|g(x)| < |f(x)| + |f(0)|$, se sigue que $|g(x)|$ es acotada en $-\infty < x < \infty$, es decir $|g(x)| < b$.

Entonces $|I_1 + I_2| \leq b \left[\int_{-\infty}^{-A} S_m(x) + \int_A^{\infty} S_m(x) dx \right] = b \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mA) \right)$, para un

número A fijo, $\lim_{m \rightarrow \infty} (2/\pi) \tan^{-1}(mA) = 1$. De esta manera se puede

encontrar N , tal que $b \left(1 - (2/\pi) \tan^{-1}(mA) \right) < \varepsilon/2$, $m > N$.

Con esta elección de N , se tiene

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx \right| \leq |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1 + I_2| + |I_3| < \varepsilon.$$

Con este resultado se complementa la prueba.

Definición.

Una sucesión $S_m(x)$ es llamada Delta-convergente, si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(x) f(x) dx = f(0), \text{ para toda función } f \text{ de clase } C^\infty \text{ en}$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Así, se puede decir que para una sucesión Delta-convergente,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \delta(x).$$

En la fórmula anterior se ha tomado la carga unitaria localizada en $x = 0$. Si se localiza en $x = \alpha$, entonces se llega a la fórmula

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(x - \alpha) f(x) dx = f(\alpha) \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x - \alpha) = \delta(x - \alpha).$$

Por ejemplo,
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\pi(1 + m^2(x - \alpha)^2)} = \delta(x - \alpha).$$

La propiedad de reproducción $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \alpha) dx = f(\alpha)$ es interpretada como la acción de la función generalizada $\delta(x - \alpha)$ en f ; esa $\delta(x - \alpha)$ es entonces la que actúa sobre una función f suficientemente suave, si se investiga el valor de $f(x)$ en $x = \alpha$.

2. TEORIA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ-SOBOLEV.

2.1 FUNCIONALES LINEALES Y LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ-SOBOLEV.

Una funcional lineal t en el espacio D es una operación (o regla) por la cual se le asigna a cada función de prueba ϕ un número real denotado por $\langle t, \phi \rangle$,

$$\text{tal que } \langle t, c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \rangle = c_1\langle t, \phi_1 \rangle + c_2\langle t, \phi_2 \rangle, \quad (1)$$

para funciones de prueba ϕ_1 y ϕ_2 arbitrarias y c_1, c_2 números reales.

$$\text{De la definición se tiene } \langle t, 0 \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\text{y } \left\langle t, \sum_{j=1}^m c_j \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle t, \phi_j \rangle, \quad (3)$$

donde los c_j son números reales.

Definición.

Un funcional lineal en el espacio D es continuo si y solo si la sucesión de números $\langle t, \phi_m \rangle$ converge a $\langle t, \phi \rangle$, cuando la sucesión $\{\phi_m\}$ de funciones de

prueba converge a la función de prueba ϕ (en el sentido de convergencia definido previamente).

$$\text{Así, } \lim_{m \rightarrow \infty} \langle t, \phi_n \rangle = \langle t, \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m \rangle. \quad (4)$$

Ahora se tienen las herramientas para definir las distribuciones.

Definición.

Una funcional lineal continuo en el espacio D de funciones de prueba es llamado una distribución.

2.1.1 Distribuciones Regulares.

El conjunto de distribuciones que son más usadas son aquellas generadas por funciones localmente integrables. Claro, cada función f localmente integrable genera una distribución por medio de la fórmula

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx, \quad (5)$$

para probar la linealidad de este funcional, se tiene

$$\langle f, C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) [C_1 \phi_1(x) + C_2 \phi_2(x)] dx = C_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi_1(x) dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi_2(x) dx.$$

Para probar su continuidad, se observa que

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq \max_{\text{sop } \phi} |f(X)| \int |f(X)| dX < \infty.$$

Así, la sucesión $\{\phi_m\}$ converge a cero, entonces también $\langle f, \phi_m \rangle$ converge a cero. Por tanto, ésta es continua.

Las distribuciones definidas por (5) son llamadas regulares. Todas las demás distribuciones son llamadas singulares. Sin embargo, también se puede usar simbólicamente la fórmula (5) para una distribución singular.

Las distribuciones también pueden ser definidas por operadores diferenciales parciales. Si f es una función localmente integrable, se puede definir una distribución como $\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) D^k \phi(X) dX$, $\phi \in D$. (6)

Observación 1.

La constante C tiene tres significados en el presente trabajo:

- a) C es un número.
- b) C es un punto constante de la función.

c) Como una función constante; C es localmente integrable y genera la

$$\text{distribución } \langle C, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} C \phi(x) dx = C \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx. \quad (7)$$

Se debe aclarar que C se usará como una constante siempre que ocurra una de las formas aquí descritas.

La distribución cero en D tiene la propiedad $\langle 0, \phi \rangle = 0$, $\phi \in D$.

Observación 2.

La definición de distribución puede extenderse para funciones con valor complejo de una variable real. Las constantes C_1 y C_2 usadas en la siguiente definición son números complejos. El espacio de funciones de prueba es entonces llamado $D^{(C)}$. De acuerdo a esto se tiene:

Definición.

Una distribución t es una funcional de valor complejo en $D^{(C)}$, tal que

$$(i) \quad \langle t, C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \rangle = C_1 \langle t, \phi_1 \rangle + C_2 \langle t, \phi_2 \rangle.$$

$$(ii) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \langle t, \phi_m \rangle = \langle t, \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m \rangle,$$

donde los $\phi_m(x)$ son elementos de $D^{(C)}$.

Observación 3.

La distribución $\langle f, \phi \rangle$ será denotada también por f .

2.1.2 Espacio D' .

El espacio de todas las distribuciones de D es denotado por D' . Las distribuciones t_1 y t_2 originan una nueva distribución $t = C_1 t_1 + C_2 t_2$, tal que $\langle t, \phi \rangle = \langle C_1 t_1 + C_2 t_2, \phi \rangle = C_1 \langle t_1, \phi \rangle + C_2 \langle t_2, \phi \rangle$.

Así D' es un espacio lineal propio. Este es llamado el espacio dual de D y es más grande que D . Este forma una generalización de la clase de funciones localmente integrables porque contiene funciones tales como $\delta(x)$ que no son localmente integrables.

Por esta razón, las distribuciones son también llamadas funciones generalizadas.

Otra idea básica en la teoría de distribuciones es dada por el siguiente teorema.

Teorema.

Dos funciones continuas que producen las mismas distribuciones, son idénticas.

Demostración.

Se sabe que $\langle f, \phi \rangle = \int_{R^n} f(x) \phi(x) dx$ y como la única función continua f para

la cual $\langle f, \phi \rangle = 0$, para todo $\phi \in D$ es $f \equiv 0$ y $x \in R^n$, ya que, si existe $x_0 \in R^n$, tal que $f(x_0) > 0$, por la continuidad existe una bola de radio ε , que contiene a x_0 , en la cual $f(x) \neq 0$, para todo x en esa bola.

Ahora, la función de prueba $\langle f, \phi \rangle$ es mayor que cero, lo cual contradice la hipótesis. Lo mismo se tiene si se supone $f(x_0) < 0$.

Para funciones localmente integrables, este teorema no se cumple, porque se pueden alterar los valores de f en el conjunto de medida cero, si se altera la distribución regular. Por lo tanto, si f y g son localmente integrables y son casi iguales en su totalidad, entonces ellas generan la misma distribución, y se tiene que $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$, $\phi \in D$.

2.1.3 Ejemplos.

Ejemplo 1.

La distribución de Heaviside en $\mathbb{R}^n$ es

$$\langle H_R, \phi \rangle = \int_R \phi(x) dx, \quad \text{donde} \quad H_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in R \\ 0, & x \notin R \end{cases} \quad (1)$$

Para $\mathbb{R}$, la ecuación (1) queda $\langle H, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(x) dx. \quad (2)$

Puesto que $H(x)$ es una función continua a trozos, es una distribución regular.

Ejemplo 2.

La distribución Delta de Dirac en $\mathbb{R}^n$ es $\langle \delta(x-\alpha), \phi(X) \rangle = \phi(\alpha), \quad (3)$

para un punto fijo $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

La linealidad de esta función se sigue de la relación

$$\langle \delta, C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \rangle = C_1 \phi_1(\alpha) + C_2 \phi_2(\alpha) = C_1 \langle \delta, \phi_1 \rangle + C_2 \langle \delta, \phi_2 \rangle, \text{ donde } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para probar la continuidad, se observa que $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \delta, \phi_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(\alpha).$

Por lo tanto, si $\phi_m(x) \rightarrow 0$, entonces $\phi_m(\alpha) \rightarrow 0$ y se tiene la continuidad.

Así, la función Delta es una distribución y no es localmente integrable, razón por la cual es una distribución singular.

Ejemplo 3.

Funciones generalizadas relacionadas con la función Delta.

Varias funciones generalizadas relacionadas con la función Delta son útiles en electricidad y problemas de Ingeniería electrónica.

Por ejemplo, una sucesión infinita de impulsos, es decir, una cadena infinita de funciones Delta, es descrita por la combinación de Dirac

$$III(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n). \quad (4)$$

Esta es llamada también la función réplica o muestreo, porque ésta da la información acerca de una función f en $x = n$:

$$III(x) f(x) = \langle III(x), f(x) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(x-n).$$

Otras expresiones de interés son las funciones pares de impulsos, las cuales son definidas como:

$$II(x) = \frac{1}{2}\delta(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\delta(x - \frac{1}{2}), \quad (5)$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2}\delta(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\delta(x - \frac{1}{2}). \quad (6)$$

Ejemplo 4.

La función $\frac{1}{x}$ no define una distribución regular, porque $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\phi(X)}{x} \right] dx$ no es convergente, para toda la función de prueba (e.g., $\phi(X) = C$), por lo tanto, se puede emplear la noción del valor principal de Cauchy y definir

$$\left\langle P\left(\frac{1}{X}\right), \phi \right\rangle = * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(X)}{X} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(X)}{X} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\phi(X)}{X} dx, \quad \phi \in D, \quad (7)$$

donde el asterisco (*) a la izquierda del signo integral, indica el valor principal. Este limite existe porque, como $\phi(\vec{X})$ es diferenciable en $x = 0$, existe una función $\psi(x)$, continua en $X = 0$, tal que

$$\phi(X) = \phi(0) + x\psi(x). \quad (8)$$

Sea $[-A, A]$ el soporte de la función de prueba $\phi(\vec{X})$, de modo que,

para

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{A \geq |x|>\varepsilon} \left(\frac{\phi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx = \int_{A \geq |x|>\varepsilon} \psi(x) dx \rightarrow \int_{-A}^A \psi(x) dx,$$

para $\varepsilon > 0$. (9)

$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle$ es una distribución y es llamada una pseudofunción; se denota como Pf(1/x).

2.2 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON LAS DISTRIBUCIONES.

Se ha definido la suma de dos distribuciones y multiplicación de una distribución por una constante. Ahora, se definirán otras operaciones algebraicas, tales como el cambio lineal de variables y el producto de una distribución con una función.

2.2.1 Traslación Lineal de Variables.

Sea $\langle f, \phi \rangle$ una distribución regular generada por una función f , que es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $x = Ay - \mathbf{a}$, donde A es una matriz $n \times n$,

con $\det A \neq 0$ y $\mathbf{a}$ es un vector constante, será una transformación lineal no singular del espacio R^n en sí mismo. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f(Ay - a), \phi(y) \rangle &= \int_{R^n} f(Ay - a) \phi(y) dy = \frac{1}{|\det A|} \int_{R^n} f(x) \phi[A^{-1}(x + a)] dx = \\ &= \frac{1}{|\det A|} \langle f(x), \phi[A^{-1}(x + a)] \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

donde A^{-1} es la inversa de la matriz A .

Afortunadamente, la misma definición se aplica a una distribución singular, porque $[A^{-1}(x + a)]$ es una operación válida en $\phi(X)$.

$$\text{Por lo tanto, se tiene } \langle t(Ay - a), \phi(y) \rangle = \left\langle t(x), \frac{\phi[A^{-1}(x + a)]}{|\det A|} \right\rangle. \quad (2)$$

Observación 1

Para la traslación simple, cuando $A = I$, la matriz unitaria, la ecuación (2)

$$\text{queda: } \langle t(y - a), \phi(y) \rangle = \langle \delta(x), \phi(x + a) \rangle. \quad (3)$$

$$\text{Por ejemplo, } \langle \delta(y - a), \phi(y) \rangle = \langle \delta(x), \phi(x + a) \rangle = \phi(a). \quad (4)$$

La distribución t se dice que es invariante con respecto a la traslación en una distancia a , o periódica con respecto a a , si

$$\langle t(y-a), \phi(y) \rangle = \langle t(x), \phi(x+a) \rangle = \langle t, \phi \rangle. \quad (5)$$

Por ejemplo, la distribución regular (en D^C),

$$\langle e^{iwx}, \phi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \phi(x) dx,$$

la cual es generada por la función localmente integrable e^{iwx} , es invariante con respecto a la traslación en la distancia $2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, es decir,

$$\langle e^{iwx(x \pm 2n\pi)}, \phi(x) \rangle = \langle e^{iwx}, \phi(x) \rangle.$$

Observación 2.

Para una traslación simple, donde $A = CI$, $a = 0$, la ecuación (2) queda:

$$\langle t(Cy), \phi(y) \rangle = \frac{1}{|C^n|} \left\langle t, \phi\left(\frac{x}{C}\right) \right\rangle. \quad (6)$$

Una distribución es llamada homogénea, de grado λ , si $t(Cx) = C^\lambda t(x)$, para $C > 0$, esto significa que la relación

$$\langle t(Cy), \phi(y) \rangle = C^{-n} \left\langle t(x), \phi\left(\frac{x}{C}\right) \right\rangle = C^{\lambda} \langle t, \phi \rangle,$$

$$\text{o } \left\langle t(x), \phi\left(\frac{x}{C}\right) \right\rangle = C^{\lambda+n} \langle t, \phi \rangle,$$

se acomoda a este tipo de distribución.

Para el caso especial de la función Delta, la ecuación (6) queda:

$$\langle \delta(Cy), \phi(y) \rangle = \frac{1}{|C^n|} \left\langle \delta(x), \phi\left(\frac{x}{C}\right) \right\rangle = \frac{1}{|C^n|} \langle \delta(x), \phi(x) \rangle \quad \text{o} \quad \delta(Cx) = \frac{1}{|C^n|} \delta(x).$$

Así, $\delta(X) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una distribución homogénea de grado $-n$.

Si se toma $x = -y$, se tiene la reflexión de una distribución en el origen y la ecuación (2) se convierte en:

$$\langle t(-y), \phi(y) \rangle = \langle t(x), \phi(-x) \rangle. \quad (7)$$

Para la función Delta, la ecuación (7) queda:

$$\langle \delta(-y), \phi(y) \rangle = \langle \delta(x), \phi(-x) \rangle = \phi(0) = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle, \quad \text{o} \quad \delta(-x) = \delta(x), \quad \text{es decir, la}$$

función Delta es una función par. Este resultado también puede obtenerse con la ayuda de la propiedad de reproducción de la función Delta.

En efecto, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)dx = \delta(a-b) = \delta(b-a)$, $a \neq b$, lo cual prueba que $\delta(a-b)$ es par. Esta fórmula integral da la propiedad ortonormal de la función Delta, que origina la siguiente definición.

Definición.

Una distribución que es invariante bajo reflexión en el origen, de tal modo que $\langle t(-y), \phi(y) \rangle = \langle t(x), \phi(-x) \rangle = \langle t, \phi \rangle$, es llamada una distribución par o centralmente simétrica. Similarmente, una distribución con la propiedad $\langle t(-x), \phi(x) \rangle = \langle t(x), \phi(-x) \rangle = -\langle t, \phi \rangle$ es llamada una distribución impar.

Observación.

Para una rotación simple, $a = 0$ y $A' = A^{-1}$, donde A' y A^{-1} son respectivamente, la traspuesta y la inversa de A , entonces se tiene

$$\langle t(Ay), \phi(y) \rangle = \left\langle t(x), \frac{\phi(Ax)}{|\det A|} \right\rangle.$$

2.2.2 Producto de una Distribución y una Función.

En general, se dificulta definir el producto de dos funciones generalizadas, no puede ser posible que sean uniformes, si ellas son localmente integrables,

como es claro, para el ejemplo $f(x) = g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$, por lo tanto, siempre es posible asignar un significado al producto de una función generalizada $t(x)$ y una función $\psi(x)$ infinitamente diferenciable; por definición $\langle \psi t, \phi \rangle = \langle t, \psi \phi \rangle$, porque $\psi \phi$ es un elemento de D .

Ejemplo 1.

Para una constante C , se conoce que $\langle Ct, \phi \rangle = C \langle t, \phi \rangle$, porque de la última relación se tiene $\langle Ct, \phi \rangle = \langle t, C\phi \rangle = C \langle t, \phi \rangle$, para una función C . Así, ambos resultados son consistentes.

Ejemplo 2.

$$\langle \psi \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \psi \phi \rangle = \psi(0)\phi(0) = \psi(0)\langle \delta, \phi \rangle = \langle \psi(0)\delta, \phi \rangle \quad \text{o} \quad \psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x).$$

Por consiguiente, en este caso especial, es suficiente para la función $\psi(x)$ que sea continua en el origen.

Más general, $\psi(x)\delta(x-\alpha) = \psi(\alpha)\delta(x-\alpha)$.

Ejemplo 3.

Se demostrará que $x^n Pf\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

En efecto, $\left\langle x^n Pf\left(\frac{1}{x}\right), \phi(x) \right\rangle = * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n \phi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} \phi(x) dx = \left\langle x^{n-1}, \phi \right\rangle.$

3. DIFERENCIACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Es posible que una función sea localmente integrable y no sea diferenciable en cierto punto. Por ejemplo, sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in Q \\ 1, & \text{si } x \in I. \end{cases}$$

f es integrable pero no es diferenciable, porque no es continua. De hecho, pueden existir funciones continuas (por tanto, integrables), que no sean diferenciables en algún punto.

Las distribuciones, por el contrario, siempre poseen derivadas y estas derivadas son nuevas distribuciones. Para explicar esta afirmación, es necesario determinar primero que se entiende por derivada de una distribución. El trabajo se limitará inicialmente a variables de una dimensión, considerando una distribución regular generada por una función que es derivable en todas partes y cuyas derivadas son continuas. La derivada nuevamente generará una distribución regular.

Definición.

Sea $f(t)$ una distribución regular y $\phi \in D$ una función diferenciable en todas partes, cuyas derivadas son continuas, entonces se define la derivada de la distribución, notada $\langle f^{(1)}, \phi \rangle$, así:

$$\langle f^{(1)}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi^{(1)}(t)dt = \langle f, -\phi^{(1)} \rangle, \quad (1)$$

se nota que $\phi^{(1)} \in D$, cuando $\phi \in D$.

De esta manera, un conocimiento de f determina que se conozca $\langle f^{(1)}, \phi \rangle$.

Así, se ha definido $f^{(1)}$ como una funcional. Este último resultado se generalizará en la siguiente definición.

Definición.

La primera derivada $f^{(1)}(t)$ de una distribución $f(t)$, donde t es unidimensional, es la funcional en D dada por $\langle f^{(1)}(t), \phi(t) \rangle = \langle f(t), -\phi^{(1)}(t) \rangle$, donde $\phi \in D$.

A manera de ejemplo, la derivada de la funcional Delta, notada $\delta^{(1)}$, está definida así: $\langle \delta^{(1)}, \phi \rangle = \langle \delta, -\phi^{(1)} \rangle = \phi^{(1)}(0)$.

Otro ejemplo está dado por la función salto unitario, notado así $1_+(t)$:

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1/2, & \text{para } t = 0 \\ 1, & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

La primera derivada está dada por

$$\langle 1_+^{(1)}(t), \phi(t) \rangle = \langle 1_+(t), -\phi^{(1)}(t) \rangle = -\int_0^\infty \phi^{(1)}(t) dt = \phi(0) = \langle \delta(t), \phi(t) \rangle,$$

para $\phi \in D$.

Se puede observar que la derivada ordinaria de la función $1_+(t)$ es la función que es cero en todo punto, excepto en $t = 0$, en donde no existe.

Cuando la variable independiente t es de n dimensiones, la derivada que se acaba de definir es la derivada parcial. Las primeras derivadas parciales ordinarias $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ de una distribución f definida sobre R^n son

las funcionales en D dadas por $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\phi \in D$. (*)

Teorema.

La derivada parcial de primer orden de una distribución es también una distribución.

Demostración.

La derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ definida en (*) es realmente una funcional en D .

Se mostrará que $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ es continua.

En efecto, sea $\{\phi_V\}_{V=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones pruebas en D , que

convergen a cero, entonces $\left\{ \frac{\partial \phi_V}{\partial t_i} \right\}_{V=1}^{\infty}$ también converge a cero en D .

Puesto que f es continua, se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi_V \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi_V}{\partial t_i} \right\rangle \rightarrow 0, \text{ cuando } V \rightarrow \infty.$$

Así, $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ es continua.

Si una función ordinaria es diferenciable en todo punto y su derivada es acotada, entonces esta derivada corresponde a la derivada de la distribución, pero en general, esas dos derivadas no son iguales, como se vio en el ejemplo de la función $1^+(t)$.

En lo sucesivo, cuando se hable de derivada se estará hablando a la derivada de una distribución (derivada distribucional), a menos que expresamente se diga otra cosa.

La operación diferenciación se puede repetir infinitamente y así, una distribución tiene derivadas de todos los órdenes, las cuales son a su vez, distribuciones.

Teorema.

El orden de diferenciación de las derivadas parciales de orden superior de una distribución, definida en $\mathbb{R}^n$, pueden ser alteradas al azar. En algunas

ocasiones $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_i}$. Este hecho no siempre se tiene en la derivación ordinaria.

Demostración.

Cuando $\phi \in D$, tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes y por

lo tanto $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial t_i}$, en el sentido ordinario.

$$\text{Así, } \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_k}, \phi \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial f}{\partial t_k}, \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_i \partial t_k} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial \phi}{\partial t_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_i}, \phi \right\rangle,$$

como se ha mostrado que se cumple para dos dimensiones, se puede afirmar que se cumple para n dimensiones.

Cuando un operador diferencial D^k actúa sobre una distribución, se tiene que

$$D^k = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{k_i},$$

donde el orden de la diferenciación de las derivadas parciales no es necesario especificarlo.

Si se hace $\hat{K} = \sum_{i=1}^n k_i$, se tiene que $\langle D^k f, \phi \rangle = \langle f, (-1)^{\hat{K}} D^k \phi \rangle$.

El funcional Delta sirve como una ilustración de lo anterior:

$$\langle D^k \delta, \phi \rangle = \langle \delta, (-1)^{\hat{K}} D^k \phi \rangle = (-1)^{\hat{K}} D^k \phi(t) \big|_{t=0}.$$

Definición.

La regla para diferenciar el producto de una distribución f y una función ψ , la cual es infinitamente suave, es la misma que para el producto de dos funciones diferenciables, esto se precisa así:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t_i}(\psi f), \phi \right\rangle &= \left\langle \psi f, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, -\psi \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial}{\partial t_i}(\psi \phi) \right\rangle + \left\langle f, \phi \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \psi \phi \right\rangle + \left\langle f, \phi \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle \psi \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \right\rangle + \left\langle f \frac{\partial \psi}{\partial t_i}, \phi \right\rangle, \text{ para } \phi \in D. \end{aligned}$$

Dos propiedades importantes de la diferenciación de distribuciones se establecen en el siguiente teorema.

Teorema.

Linealidad: la diferenciación es una operación lineal en siguiente sentido: para dos distribuciones f y g , y para todo número α ,

$$D^k(f + g) = D^k f + D^k g \quad \text{y} \quad D^k(\alpha f) = \alpha D^k f.$$

Continuidad: para toda sucesión de distribuciones $\{f_V\}_{V=1}^{\infty}$, que convergen en D' a la distribución f , la correspondiente sucesión de derivadas parciales $\{D^k f_V\}_{V=1}^{\infty}$ también converge en D' a $D^k f$.

Demostración.

a) Linealidad:

$$\begin{aligned} D^k(f+g) &= \langle D^k(f+g), \phi \rangle = \langle f+g, (-1)^k D^k \phi \rangle = \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle + \langle g, (-1)^k D^k \phi \rangle = \\ &= D^k f + D^k g. \end{aligned}$$

b) Continuidad:

Para la continuidad, sea $\phi \in D$, entonces $D^k \phi$ está también en D , y como

$$V \rightarrow \infty, \text{ se tiene } \langle D^k f_V, \phi \rangle = \langle f_V, (-1)^k D^k \phi \rangle \rightarrow \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle = \langle D^k f, \phi \rangle, \text{ lo cual}$$

demuestra que la diferenciación es una operación lineal continua en D' .

Si se hace $f = \sum_{V=1}^{\infty} f_V$ una serie de distribuciones que convergen en D' , tal

serie puede ser diferenciada término a término, para obtener $D^k f = \sum_{V=1}^{\infty} D^k f_V$,

donde la serie diferenciada converge nuevamente en D' .

Este último resultado constituye una ventaja, con respecto al análisis clásico, en el cual la derivación término a término de una serie infinita puede ser hecha sólo si se cumplen ciertas condiciones adicionales a la convergencia.

4. PRIMITIVAS DE DISTRIBUCIONES DEFINIDAS SOBRE $\mathbb{R}$.

Una primitiva de una función continua es una función cuya derivada es igual a la original. El concepto de primitiva puede ser extendido a las distribuciones. Se afirma que toda distribución definida en $\mathbb{R}$, tiene una primitiva. Como en el caso del análisis clásico, existen infinitas primitivas y dos de esas primitivas difieren en una distribución constante. Se probarán las anteriores afirmaciones, restringiendo el estudio a variables independientes de una dimensión.

Como la primitiva es en cierto modo, la inversa de la derivada, se espera que la derivada de una distribución, que se ha definido por

$$\langle g^{(1)}, \phi \rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle g, \phi^{(1)} \rangle, \quad \phi \in D, \text{ podría ser usada para definir la primitiva } f^{(-1)} \stackrel{\Delta}{=} g$$

de la distribución $f \stackrel{\Delta}{=} g^{(1)}$.

Sin embargo, la expresión $\langle f^{(-1)}, \phi^{(1)} \rangle = \langle f, -\phi \rangle, \quad \phi \in D, \quad (1)$

no es una definición adecuada para la primitiva $f^{(-1)}$, puesto que (1) define a $f^{(-1)}$ como un funcional en un subespacio H de D , donde los elementos $\phi^{(1)}$ son derivadas de funciones de prueba ϕ en D .

Para conseguir una definición apropiada de $f^{(-1)}$ de un espacio H , en un espacio D realmente no existe una única manera de hacerlo, ya que son muchas las primitivas para una distribución. Se considerarán previamente unos resultados útiles para la definición.

Lema.

Sea ϕ_0 una función de prueba fija en D , que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 1$.

Entonces, toda función de prueba ϕ en D , puede ser expresada como

$\phi = k\phi_0 + \psi$, donde $\psi \in D$ y k es una constante dada por $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt$.

En efecto, si se conoce ϕ y ϕ_0 en $\phi = k\phi_0 + \psi$, donde ψ es especificado y está en D . Se establecerá que ψ está en H , y se hace mostrando que la integral definida $\psi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t) dt$ está en D . Se observa que ψ es infinitamente suave y es idénticamente cero a la izquierda del soporte de ϕ

y de ϕ_0 . También es igual a una constante a la derecha de los soportes de ϕ

y ϕ_0 , y esta constante es cero, ya que $\psi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x) - k\phi_0] dx = k - k = 0$.

Así, la primitiva $f^{(-1)}$ es definida como un funcional en H , a través de

$$\langle f^{(-1)}, \psi \rangle = \langle f, -\psi \rangle, \quad \psi \in H.$$

Si $f^{(-1)}$ está bien especificada por una función de prueba simple ϕ_0 , que

satisface $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 1$, se tiene que está definida en todo D . Es decir, dada

otra ϕ en D , se puede asumir el valor para $\langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle$ y se puede usar la

descomposición $\phi = k\phi_0 + \psi$, para definir $f^{(-1)}$ como una funcional en D ,

dada por:

$$\langle f^{(-1)}, \phi \rangle \stackrel{\Delta}{=} k \langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle + \langle f^{(-1)}, \psi \rangle = k \langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle - \langle f, \psi \rangle.$$

Si $\phi \in H$, $k = 0$ y se tiene que $\langle f^{(-1)}, \psi \rangle = \langle f^{(-1)}, \phi \rangle$, como $f^{(-1)}$ es una

funcional lineal en H , es también un funciona lineal en D , porque, si

ϕ_1 y ϕ_2 son dos funciones de prueba en D , con la descomposición

$\phi_j = k_j \phi_0 + \psi_j$, siendo $k_j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) dt$, $j=1,2,\dots$, y si α y β son

dos números reales, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle f^{(-1)}, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle &= \langle f^{(-1)}, (\alpha k_1 + \beta k_2)\phi_0 + \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \\
&= (\alpha k_1 + \beta k_2) \langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle + \alpha \langle f^{(-1)}, \psi_1 \rangle + \beta \langle f^{(-1)}, \psi_2 \rangle = \\
&= \alpha \langle f^{(-1)}, \phi_1 \rangle + \beta \langle f^{(-1)}, \phi_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Además, se puede mostrar que $f^{(-1)}$ es continua en D .

En efecto, sea $\{\phi_V\}_{V=1}^\infty = \{k_V\phi_0 + \psi_V\}_{V=1}^\infty$ una sucesión convergente a cero, entonces, el número $k_V = \int_{-\infty}^\infty \phi_V(t) dt$ converge a cero y se sigue que ψ_V converge a cero en D . Puesto que todo ψ_V tiene soporte contenido en un intervalo finito, se sigue que $\psi_V(t)$, la cual está dada por $\psi_V(t) = \int_{-\infty}^t \phi_V(t) dt$ también converge a cero en D .

Como f es continua en D , el número $\langle f^{(-1)}, \phi_V \rangle = k_V \langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle - \langle f, \psi_V \rangle$ converge a cero, cuando $V \rightarrow +\infty$. De donde, $f^{(-1)}$ es continua en D .

La linealidad y continuidad de $f^{(-1)}$, muestra que toda primitiva de una distribución, es también una distribución.

Se mostrará que la derivada de una primitiva de una distribución, es igual a la distribución.

En efecto, sea ϕ una función de prueba arbitraria en D , y

$$\langle (f^{(-1)})^{(1)}, \phi \rangle = \langle f^{(-1)}, -\phi^{(1)} \rangle.$$

Puesto que $\phi^{(1)}$ está en H , se puede usar el hecho que $\langle f^{(-1)}, \psi \rangle = \langle f, -\psi \rangle$,

$$\psi \in H, \text{ para obtener } \langle (f^{(-1)})^{(1)}, \phi \rangle = \left\langle f, \int_{-\infty}^t \phi^{(1)}(t) dt \right\rangle = \langle f, \phi \rangle.$$

Una primitiva particular se obtiene escogiendo un valor numérico de $\langle f^{(-1)}, \phi \rangle$. Dos primitivas de f difieren por la distribución constante C , donde todo número C es la diferencia de dos escogencias de $\langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle$.

Para mostrar lo anterior, sean $\langle f_1^{(-1)}, \phi_0 \rangle$ y $\langle f_2^{(-1)}, \phi_0 \rangle$ dos valores numéricos diferentes, los cuales generan dos primitivas diferentes $f_1^{(-1)}$ y $f_2^{(-1)}$, para una misma distribución f . Entonces, para ϕ en D , se tiene

$$\begin{aligned} \langle f_1^{(-1)}, \phi \rangle - \langle f_2^{(-1)}, \phi \rangle &= k \langle f_1^{(-1)}, \phi_0 \rangle - \langle f, \psi \rangle - k \langle f_2^{(-1)}, \phi_0 \rangle + \langle f, \psi \rangle = \\ &= Ck = C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \langle C, \phi \rangle, \text{ donde } C = \langle f_1^{(-1)}, \phi_0 \rangle - \langle f_2^{(-1)}, \phi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Todo lo anterior se puede expresar en el siguiente teorema.

Teorema.

Toda distribución en $\mathcal{R}$, tiene infinitas primitivas definidas por:

$\langle f^{(-1)}, \phi \rangle = k \langle f^{(-1)}, \phi_0 \rangle - \langle f, \psi \rangle$ y una descomposición $\phi = k\phi_0 + \psi$. Cada

primitiva es también una distribución. La diferencia entre dos primitivas es

una distribución constante, dada por $C = \langle f_1^{(-1)}, \phi_1 \rangle - \langle f_2^{(-1)}, \phi_0 \rangle$.

BIBLIOGRAFÍA

COSSIO, B. Teoría de distribuciones. Centro de Publicaciones U.N. Medellín. 1983.

HSU. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano. Hwei P. Hsu. 1970.

KOLMOGOROV, A., FORMIN, S. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial MIR. Moscú. 1972.

RAMBAL, R. Generalized Functions. Birkhauser. Boston. 1998.

ZEMANIAN, A. Distribution theory and transformation analysis. Dover Publications Inc. New York. 1965.

