UNA EXPERIENCIA CON LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ASOCIADAS EN EL HACER DE LAS CUADRATURAS

AUTOR: DEIVIT SNEYDER SALAMANCA SÁNCHEZ

ASESORES: JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ Y JHON HELVER BELLO CHÁVEZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2019

Contenido

Agradecimientos

Este texto en primera instancia es dedicado a un gran compañero, quien fue parte fundamental para el desarrollo de esta idea, él es mi amigo Fernando Vargas, fue mi compañero en gran parte de esta experiencia, lastimosamente por asuntos ajenos a mi querer no pudo continuar conmigo, es una lástima haber perdido en el camino esta gran persona para este trabajo, sin embargo espero que en un futuro no muy lejano este trabajo le sirva, más allá de ampliar su conocimiento, sino como parte efectiva de su mejora profesional.

En segundo orden es inevitable agradecerle a mi familia por tan arduo acompañamiento incondicional, a mi padre por su paciencia y persistencia en sus labores con el único objetivo de ver a su primer hijo como profesional; el valor de mi madre, mujer de hogar sabia y dada a su familia, sosteniendo no solo económica sino emocionalmente a la estructura de mi familia; a mis hermanos, Harold y Alejandro, esos que eran pequeños cuando inicie mi pregrado, y hoy siguen a su paso una vida en el desarrollo de sus capacidades científicas, viendo la academia como la salida honesta y satisfactoria de una zona conformista en la calidad en nuestra situación de subsistencia; también les agradezco a mis abuelas, tíos y primos, tanto de la familia Sánchez como la familia Salamanca, pues en muchas partes de este proceso lanzaron un neumático a un náufrago.

Los amigos si existen, he tenido el placer de experimentarlo en mi vida, muchos de ellos en el colegio, algunos otros en la universidad, a estos últimos les debo parte de este escrito, me gustaría nombrar a todos, pero solo nombraré a un par, la más importante en esta parte de mi vida, a la mejor persona que he conocido en mi vida, una mujer íntegra e inteligente, una persona incondicional, si el mundo estuviese llenas de personas como

Mabel Sierra, de seguro sería un mundo mejor; a Edwar Bernal un tipo que hacia los días menos tediosos, una persona con grandes ideas, espero que un día comprenda que en su mundo las fronteras quedan un poco más lejos, a Alejandra Muñoz, sin ella este trabajo no sería posible, pues su labor y amabilidad al abrirnos la posibilidad de trabajar en el colegio José Max León, presentándonos al profesor Andrés Blanco y debo nombrar también a Nicolás Buitrago, mi amigo de vida entera, espero que perdure en el tiempo.

Debo agradecer a quienes me mostraron el camino de mi vocación, a mis docentes, por alguna razón me acuerdo de cada uno de ellos, hay dos de ellos me guiaron en el camino de esta idea. El docente John Bello, un hombre brillante y sencillo, a pesar de las diferencias que yo ocasioné siempre lo respetaré, espero algún día reconciliarme con él. Al profesor Jaime Romero que se hizo cargo de este encarte de persona, muy pocas personas sospecharían lo paciente que pudo ser conmigo, gracias por nunca abandonar el barco, la calma y la sabiduría que me compartió. Siempre es complicado pensar en hacer algo diferente, pero cuando se tiene la capacidad solo hace falta la disciplina, asunto aún pendiente para mi vida, pero el tiempo es sabio, espero entender su mensaje.

A mi evaluador Alberto Forero por sus consejos y conocimiento; a mi Universidad Distrital Francisco José de Caldas, siempre estaré orgulloso de haber estado en sus aulas.

Por último pero no menos importante, a la mujer que me ha entregado el regalo más preciado que puede dar a los seres racionales que vivimos en este planeta, a Estefanny Reyes, a ella con quien comparto camino y espero que caminemos juntos hasta el infinito y más allá, gracias por la paciencia y por acompañarme, por querer amar sin límites.

Les estaré agradecidos a todas las personas que hacen posible este escrito, a ellos los llevaré en mis pensamientos tanto como mi existencia lo permita.

Introducción

El estudio del aprendizaje de las matemáticas está en continuo crecimiento, esto hace que existan cantidades importantes de trabajos sobre diversos temas desarrollándose a diario, cada uno con un enfoque, una filosofía y unas maneras de ver la educación matemática. Este trabajo contribuye estableciendo desde bases teóricas que hablan sobre las prácticas matemáticas poniendo la mirada sobre unos autores y apartes de obras específicas, para posteriormente relacionar los tratamientos en la resolución de una situación matemática de un grupo de estudiantes, esto para analizar y desarrollar conexiones perceptibles entre estos (autores y estudiantes) que permitan asociar estos valores sobre un estado de aproximación al conocimiento matemático específico. En este caso algunos asuntos referentes a concepciones de áreas y perímetros de curvas.

El trabajo plantea la necesidad de aproximar a los estudiantes acerca de asuntos que atañen al cálculo. Ve potencialidades en las prácticas matemáticas como una forma para hacer la aproximación, pues asume que el análisis de rupturas en los aprendizajes de los estudiantes implícitos en el currículo de la educación media, tienen relaciones con las rupturas en las prácticas matemáticas en momentos definitivos en el desarrollo histórico de la medida del área bajo la curva trabajados por Wallis y Newton. Lo descrito por este párrafo se verá a profundidad en el apartado *Justificación.*

Se analiza los componentes de la práctica matemática en los métodos usados por los estudiantes, en comparación con las de algunas prácticas que antecedieron a las pretendidas y estandarizadas en el cálculo tal y como es visto hoy; será la finalización de este escrito. Emergerán potencialidades para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para llegar al punto se examina unos fragmentos de obras previamente determinadas de los autores Wallis y Newton, quienes aportan a las matemáticas, en especial en la cuestión de hallar cuadraturas, problemática en la que se enmarca la situación que enfrentarán los estudiantes. Como camino para el análisis y la determinación de las conclusiones se utilizan los componentes de las prácticas matemáticas propuestas por Kitcher.

La metodología establecida para realizar el análisis histórico de este trabajo parte de los componentes de las prácticas matemáticas, es decir no es un mapeo histórico de la construcción de un concepto, sino el estudio de un desarrollo en una parte de obras matemáticas con unos criterios preestablecidos y provenientes del análisis de la práctica matemática en componentes (Kitcher, 1984). Una vez evidenciadas los componentes de las prácticas matemáticas en cada autor, se construye una situación o tarea que, en un ambiente de aprendizaje específico, posibilite actividad de los estudiantes en un grupo de estudiantes de último grado en educación media. Esto permite evidenciar la emergencia de elementos de los componentes en sus prácticas matemáticas. Para este fin, además, se tendrán dos fuentes de información: los escritos producidos por los estudiantes y los vídeos de la actividad realizada por los mismos.

Este trabajo permitirá reconocer que elementos de los componentes, intuitivos de las prácticas intuitivas y empíricas de los estudiantes, se aproximan o por el contrario distan, de aquellos presentes en las de los trabajos seleccionados sobre cuadraturas que antecedieron cronológicamente a los métodos analíticos. Debido a esta forma de comparar, en futuros estudios este documento puede servir de base para crear nuevas experiencias de aula, trabajadas desde la aproximación, consciente o inconsciente, de los estudiantes a los procesos históricos, con la finalidad de llevarlo a refinar sus estructuras conceptuales.

Planteamiento del problema

En el proceso de aprendizaje de la transición álgebra-cálculo existe una ruptura. Ya desde los años noventas en diversas investigaciones se hacen visibles factores que propenden el bajo nivel de éxito en matemáticas de los estudiantes de últimos grados de la educación media y primeros de la educación superior. El orden de los contenidos para la enseñanza del cálculo en las escuelas se desarrolla generalmente sobre la idea de los métodos analíticos, pasando luego por la representación tabular y terminando por la representación gráfica, (Turégano 1995); por otra parte, Griffin (1995) afirma que el reducido grado de éxito en las matemáticas universitarias se debe a la separación cada vez más amplia que tiene lugar entre la comprensión intuitiva de las matemáticas por parte de los estudiantes y los algoritmos que necesitan para aprender en su educación formal.

Con relación a lo expresado anteriormente es posible afirmar que los estudiantes deben asimilar al mismo tiempo fenómenos como el infinito, límites; conceptos y teorías propias del estudio de la variable; es así como los contenidos del cálculo que se intentan llevar al aula en grado once, son presentados mayoritariamente mediante algoritmos, pretendiendo enseñar conceptos avanzados sin dar tiempo a los estudiantes de reflexionar sobre los contenidos (área, límite, función, perímetro,...), convirtiendo la enseñanza preliminar de la derivada e integral en asumir algunos métodos establecidos en los libros del cálculo; esa misma idea la expresan autores como Castelblanco (2012) o la profesora Turégano (1995); esta última describe sobre el aprendizaje institucionalizado del cálculo lo siguiente:

> “Existen dificultades de aprendizaje en los estudiantes con esta parte de las matemáticas (cálculo) dificultades que han sido constatadas por las recientes investigaciones y que han conducido a proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo y justificar la necesidades de secuenciar el currículum atendiendo a la génesis de la historia de los conceptos” pp. 241.

Algunas dificultades al pasar del álgebra al cálculo, se perciben en investigaciones en educación matemática más cercanas a nuestros tiempos; una de ellas es Neira (2013); realizó una investigación de errores y dificultades que presenta el estudiante al enfrentarse al cálculo; toma como fundamento cinco obstáculos que evidencia Sierpinska (1994) que pueden resumirse como tropiezos epistemológicos con los límites, la continuidad y el infinito, además de obstáculos en la representatividad simbólica y geométrica de las funciones.

De las razones que enuncia Neira (2013), para las dificultades del tránsito del álgebra al cálculo, como la separación curricular o el poco rigor matemático que se tiene en la educación media, existe una que para este trabajo es más relevante, la poca exploración que tienen los estudiantes con respecto a los límites y el infinito, sobre todo entre los números reales.

La investigación realizada en diferentes países Suiza, Italia y Colombia, publicada en 2006, muestra en diferentes contextos que la “estimación del infinito” es innata al desarrollo formativo de los grupos poblacionales y su experticia en las matemáticas (D’Amore y otros, 2006); es posible entonces partir desde el sentido del infinito para realizar exploraciones en el aula, con la seguridad de hallar percepciones y disposiciones de los estudiantes sobre el infinito.

El problema de la coyuntura al acercamiento del cálculo se puede examinar desde diferentes puntos de vista y herramientas en la didáctica. Este estudio asume como enfoque la práctica matemática. Por una parte, la definida por Godino y Batanero (2007) como: "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas".

Como ya se ha dicho, hay más formas de estudiar a profundidad el fenómeno didáctico del aprendizaje del cálculo, pero las prácticas matemáticas permiten ver, tanto personal como institucionalmente, aspectos profundos de lo que se entiende en matemáticas, que ligan con las maneras de ver, entender y trabajar las matemáticas. El siguiente diagrama muestra las relaciones que existen entre los significados personales e institucionales y algunos elementos esenciales de las prácticas matemáticas según Godino y otros (2006):

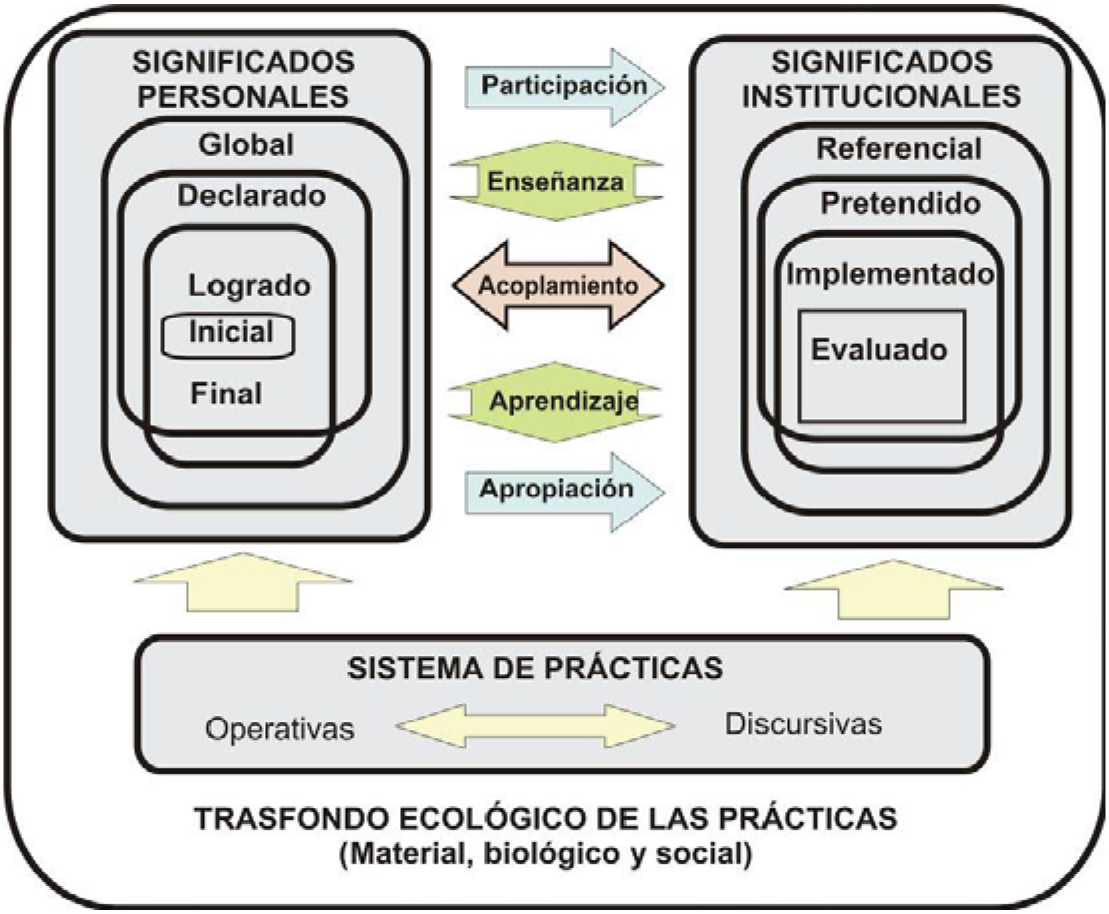


Imagen 1. Tipos y significados personales e institucionales en prácticas matemáticas. Tomada de Godino y otros (2006).

Por otras parte, prácticas matemáticas de los matemáticos profesionales pueden ser la base de elementos transformativos en el conocimiento matemático. Así lo enuncia Kitcher (1984), en su teoría de la naturaleza del conocimiento matemático; establece cinco componentes de la práctica, Lenguaje, Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos, Razonamientos aceptados, Declaraciones aceptadas y Cuestiones aceptadas, el cambio de alguno de los cinco componentes generan nuevas prácticas que se pueden ver implícita o explícitamente en los métodos al solucionar cualquier enunciado por medio de las matemáticas. Las prácticas matemáticas se han transformado y han desarrollado las matemáticas a través de la historia; por ejemplo, el conocimiento de la geometría euclideana no resulta suficiente para dar soluciones a algunos problemas matemáticos y algunas concepciones y prácticas matemáticas debieron transformarse.

Para atacar la coyuntura del proceso formativo en los estudiantes, en cuanto a la asimilación de los asuntos del cálculo, se toma una temática concreta: la cuadratura. En primera instancia debido al constructo, como tal, de los distintos métodos de las cuadraturas, comprende conceptos como límite e infinito, es posible examinar formas de intuir e interpretar el proceso de asimilación de estos asuntos del cálculo por parte de los estudiantes, además de permitir maneras de ver entre las prácticas matemáticas que aparecieron en la historia antes de que existiera el cálculo con los métodos analíticos que se enseñan hoy día en la escuela y las formas y modos de actuar, prácticas matemáticas de los estudiantes que se aproximan al aprendizaje del cálculo.

Ahora bien, al realizar el recorrido histórico de soluciones a problemas asociados a las cuadraturas, se encuentra que durante los siglos XVII y XVIII, se daba solución a dichos problemas utilizando métodos distintos a los analíticos; por ejemplo, algunos lemas en Los Principios Matemáticos de Newton y la aritmética de los infinitos de Wallis, proporcionan elementos que permiten llevar a cabo procedimientos matemáticos susceptibles a la intuición y exploración numérica, procesos que se pretende ver desde el enfoque de las prácticas matemáticas en los estudiantes.

Conforme a lo mencionado anteriormente, esta investigación se plantea un conjunto de acciones y modos que permiten recoger y examinar métodos iniciales utilizados por los estudiantes antes de entrar en contacto con los métodos analíticos, elaborados por Newton y

Wallis en el proceso de enseñanza-aprendizaje; para ello se propone a un grupo de estudiantes, en un aula de educación media, una situación que puede ser enmarcada en el área problémica de las cuadraturas. Se trata de allegar elementos hacia el hallazgo de una respuesta para la pregunta:

¿Qué es posible ver en las prácticas matemáticas de los estudiantes con respecto al tratamiento de cuadraturas, tomando como referencia algunas prácticas matemáticas en métodos de Wallis y Newton para mirar posibles transformaciones del conocimiento matemático en busca de la mejora en el tránsito álgebra-cálculo?

Justificación

Inicialmente se plantea la hipótesis de que algunos elementos de las prácticas matemáticas históricamente establecidas podrían verse reflejadas en los procesos que ejecutan los aprendices sobre algunos contenidos que los aproximan al cálculo; sí es así, los estudiantes tienen maneras de hacer matemáticas semejantes en algunos elementos a los autores que antecedieron los procesos analíticos para las cuadraturas.

El propósito de este trabajo es establecer una manera de relacionar el hacer empírico (Kitcher 1984) de un grupo de estudiantes en sus prácticas matemáticas con las prácticas matemáticas de Wallis y Newton. Los estudiantes de una cohorte de grado 11 del colegio José Max León conformaron el grupo seleccionado; ellos acometen una situación referente a las cuadraturas.

El proceso de construcción histórica de las matemáticas permite evidenciar la existencia de conceptos que evolucionan por medio de las prácticas matemáticas. Algunos de estos conceptos son proximidad e infinito, hoy estrechamente ligados al cálculo.

En los trabajos de Arquímedes se evidencia desarrollo de la cuadratura, según lo muestra Boyer (1986). Una de las maneras que el antiguo griego desarrolló para hacer cuadraturas fue el método de exahución, el ejemplo más replicado es con el problema de hallar el área o el perímetro de círculo; con polígonos regulares inscritos y circunscritos se acota por arriba y por abajo el círculo aproximándose a su área aumentando la cantidad de lados de los polígonos; entre más lados tengan dichos polígonos se puede afirmar que sus áreas son más cercanas al área del círculo.

El método de exahución en su concepción filosófica fue transformado en los siglos siguientes al XV, cuando se aceptó por los matemáticos de la época la posibilidad de descomposición de formas geométricas con una dimensión mayor en otra menor, esto se deja ver en la "Geometría de los indivisibles" de Cavalieri; aunque las maneras de hacer matemáticas por Cavalieri son difíciles de asimilar (Andersen 1982) la idea de los indivisibles (todas las líneas "omnilíneas" ocupan el espacio de cualquier área bidimensional, idea que la lleva también al concebir el volumen como ocupado por todas los planos contenidos en él) fue aprovechada por matemáticos que le sucedieron. Las prácticas matemáticas de Wallis y Newton utilizan la idea de los indivisibles; con ella desarrollaron teoremas y métodos para abordar la cuadratura, antes de que existiesen los métodos analíticos actualmente estandarizados, como se verá a continuación.

Wallis en *Arithmetica infinitorum* (1655) pasa a proporcionar fundamentos matemáticos numéricos de los indivisibles, trabajados principalmente como sucesiones aritméticas. Esas cuadraturas ofrecen una nueva perspectiva de los conceptos clásicos de medida en el área. La elaboración de la cuadratura de Wallis aclara las penumbras de los principios en el pensamiento de Cavalieri, además de aritmetizar los procesos que anclan el concepto del área bajo la curva.

Newton retoma el trabajo de Wallis en el invierno de 1664. Durante dicha época se dedica a analizar el trabajo de los indivisibles, encontrando herramientas suficientes para hallar integrales definidas de gran cantidad de curvas, al generalizar los patrones que le proveían el método de los indivisibles; además en sus lemas II, III y IV de la sección 1 y el lema V de la sección 3 en los *principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), utiliza métodos numéricos para hallar ordenadas de curvas, logrando así completar lo necesario para hallar integrales definidas utilizando geometría y aritmética.

La teoría de la práctica matemática (Kitcher 1984) comprende el actuar sobre cualquier concepto en matemáticas; establece cinco componentes que la conforman; un lenguaje, un conjunto de declaraciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes y un conjunto de puntos de vista metamatemáticos. Los procesos de trasformación en algunos o todos los componentes de la práctica matemática de dos obras histórica seleccionadas importantes en el trabajo de la evolución en cuadraturas y la matemática en sí, estarían sirviendo como herramienta de análisis en la proximidad o distanciamiento entre las prácticas históricas tomadas y las elaboradas por los estudiantes.

Alsina (2009) mira en la *educación matemática realista* (EMR) una teoría básica concentrada en el qué y cómo enseñar matemáticas. Freudenthal fue el precursor de la corriente teórica de la EMR. Aunque para ella se establecen seis principios fundamentales, se rescata para este apartado el principio de realidad. El acercamiento de los estudiantes al aprendizaje se debe realizar en un principio sobre situaciones reales, ya sean en concreto o en la mente de los estudiantes. Sobre el principio de realidad se dice que:

> "El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos" (Alsina 2009).

Este principio permite el uso de la impresora de impacto en la formulación de las tareas para cualquier estudiante de la educación media en Bogotá o sus alrededores, ya que esta hace parte de su cotidianidad. El estudiante tiene la posibilidad de actuar y reflexionar en un campo a la vez perceptual e imaginable para él.

Dicho principio es consistente con la postura socioepistemológica. En cuanto al problema educativo, el aprendizaje acerca de los objetos matemáticos debe recaer sobre la significación compartida mediante el uso culturalmente situado. Cantoral, Reyes y Montiel (2014) afirman que la postura socioepistemológica del aprendizaje de las matemáticas contradice la costumbre de enfocar la evaluación sobre definiciones y deducciones en el aula de matemáticas.

Los artefactos que hoy en día incorporan ideas matemáticas. Una impresora de impacto usa líneas una junto a la otra, que llevan a ocupar espacios en una figura que puede ser limitadas por curvas o rectas, al menos desde nuestra percepción óptica se ve así; esta manera de ocupar espacios fue pensada por Wallis y Newton para hallar las medidas de áreas delimitadas por curvas, ejecutando procesos que parten de las medidas de las "líneas" para determinar las medida de las superficies cuyo borde está dado por curvas; a estos procesos se les llama cuadraturas.

Desde el punto de vista curricular, hay que decir que el tipo de contenidos que se pone en juego desde este trabajo investigativo, hace parte del previsto para el grado 11, dónde se culmina la educación media en Colombia. La mayoría de currículos basados en los estadios de pensamiento Piagetianos, entiende que los conocimientos abstractos complejos son asimilables por la mayoría de los humanos con interacciones sociales y culturales, en edades posteriores a los 14 años. El Ministerio de Educación Nacional parece compartir esa manera de ver el aprendizaje para hacer el currículo. Desde 2006 en los estándares básicos de competencia trata de regular que los estudiantes en la educación media desarrollen habilidades que perfectamente pueden ser alineadas al aprendizaje del cálculo, aunque según estudios y evoluciones una gran cantidad de las instituciones educativas del país no lo asimilan de esa manera ( ).

Objetivos

El presente trabajo da cuenta de los siguientes objetivos:

Objetivo general

Usar y hallar elementos de la práctica matemática escolar actual y hallar elementos de la práctica matemática de Newton y Wallis en relación con la cuadratura para ver el tránsito entre métodos algebraicos y métodos analíticos del cálculo escolar.

Objetivos específicos

- Determinar prácticas matemáticas respecto a las maneras de hallar medida de las cuadraturas, en particular Newton y Wallis.

- Diseñar una tarea en el marco de las cuadraturas, disponiendo en ella elementos que permitan mirar prácticas matemáticas de los estudiantes.
- Disponer elementos del ambiente que permitan aprendizaje y expresión de lo aprendido.
- Identificar, en las maneras de conseguir las medidas de una cuadratura, enfocadas de las prácticas matemáticas preconcebidas por los estudiantes.

Marco de referencia

Para establecer el *Marco de referencia* primero se hizo una revisión de los trabajos que le dieron vida al cálculo tal y como lo conocemos hoy en día, esto se hizo con ayuda del texto de puesto que su trabajo lo que recopila es la información relevante del siglo XVI y XVII en cuanto a los aportes a las matemáticas que permitieron y antecedieron al cálculo y la teoría de conjuntos, mostrándose una secuencia de hechos históricos no presentes en la matemática escolar como se ha identificado en apartados anteriores.

Se considera como posibilidad de trabajo sobre las prácticas matemáticas percibidas entre el siglo XVI y XVII, dos autores, Wallis y Newton, pues existe una relación directa entre sus trabajos (Grattan-Guinness, 1984); por otra parte, cada uno hace aportes que permitieron la construcción conceptual del cálculo y de esta manera llegar a los métodos analíticos que hoy en día se enseñan en las aulas.

La idea de práctica matemática como metodología de análisis histórico hace parte de la estructura de este trabajo, es decir los componentes que propone Kitcher para el estudio de las prácticas van a posar su mirada sobre obras de Wallis y Newton, extractos que van a ser desintegrados posteriormente, actuando en este texto como categorías para estudiar las prácticas.

Este marco de referencia se ordena por aparición cronológica según el año de publicación de las obras sometidas a estudio: el primero *Series y sucesiones de Wallis* y Luego *Cuadraturas de Newton*. Finalmente se pone en contexto las prácticas matemáticas de Kitcher.

Series y sucesiones de Wallis

En cuanto a *Arithmetica infinitorum,* de Wallis (1655), es una obra mucho más legible, puesto que el lenguaje es más cercano a la escritura matemática actual; sin embargo, se estudian sus ideas acudiendo a traducciones. John Wallis estudió lo hecho por Cavalieri, pero con una mirada mucho más numérica; es decir, enfoca las razones entre indivisibles, el cálculo de las áreas a través del análisis de series hechas para cada caso tomado, desde figuras rectilíneas hasta curvilíneas o, incluso, figuras no usuales; cada lema es una caso particular de indivisibles, se busca entonces la serie aritmética que al sumarse corresponda con el área de una figura, como la delimitada por una curva parabólica.

Para probar mediante el método de inducción la suma de las áreas de “todas las líneas”, idea que toma de Cavalieri, Wallis usa proposiciones para cada caso de relaciones, en una dimensión, dos dimensiones y tres dimensiones; además, diferencia entre el tipo de figuras a relacionar. En este apartado se toma las proposiciones para una y dos dimensiones; la tarea propuesta a los estudiantes se limita en esas medidas.

Las proposiciones seleccionadas para este trabajo son las siguientes:

Para $n = 1$, es decir una sola dimensión.

Proposición 2.

“Si se toma una serie o sucesión, de cantidades en proporción aritmética (o como la secuencia de números naturales) continuamente creciente, empezando desde un punto 0, ya sea finita o infinita en número (no habrá ninguna razón para distinguir), habrá una serie o sucesión del mismo número en igualdad de condiciones a la más grande, en relación de 1 a 2.

Es decir, si el primer término, es 0, el segundo 1 (de otro modo algún tipo de ajuste debe ser aplicado), y el último es l, la suma será de $\frac{l+1}{2}l$ (en este caso el número de términos será $l+1$). O (poniendo *m* para el número de términos, cualquiera que sea él $\frac{1}{2}ml$.” (Wallis, 1656 trad.).

Para esta primera proposición, enuncia una propiedad de las series numéricas, donde su resultado siempre es ½. En la proposición 1, enmarca un ejemplo numérico de la expresión anterior.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$$

Imagen 2. Series de la Proposición 1, aplicables a la Proposición 2. (Wallis 1656)

Proposición 3.

“Por lo tanto, un triángulo sobre un paralelogramo (en una base igual y de la misma altura) está en relación de 1 a 2.

> El triángulo consta, por así decirlo, de un número infinito de líneas paralelas en proporción aritmética, partiendo de un punto, de los que el más largo es la base (como se demostró en las Proposiciones 1 y 2 de nuestro libro en las sección de cónicas); y el paralelogramo formado por el mismo número de líneas iguales a la base (como se desprende). Por lo tanto la primera a la última es como de 1 a 2 (de lo que ha pasado antes)". (Wallis, 1656, trad.).

La proposición 3 de Wallis considera triángulos no usuales. La primera subdivisión de su manera de ver los procesos de las cuadraturas, Wallis determina posible expresar siempre en razón de 1 a 2, sin importar que los bordes del triángulo sean líneas rectas o no.

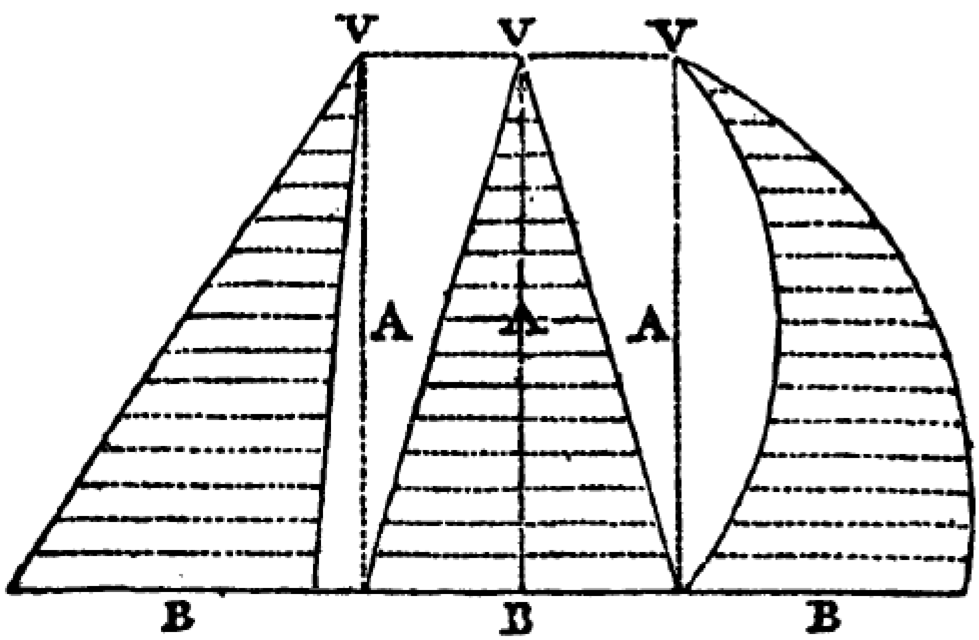


Imagen 3. La vista de posibles triángulos cumpliendo las características de las series de la Proposición 2 (Wallis, 1656).

> **Proposición 4.** De la misma manera, una parábola piramidal o conoide (ya sea derecho o inclinado), a un prisma o cilindro (en una base igual e igual de altura) está en relación 1 a 2. Para una pirámide o una cónica parabólica, por así decirlo, de un número infinito de planos en proporción aritmética, procedentes de un punto, de los

cuales el más grande es base, y el prisma o cilindro del mismo número de plano es igual a la base (como está claro). Por lo tanto, la primera es a la segunda como 1 a 2, por la Proposición 2. (Wallis, 1656, trad.).

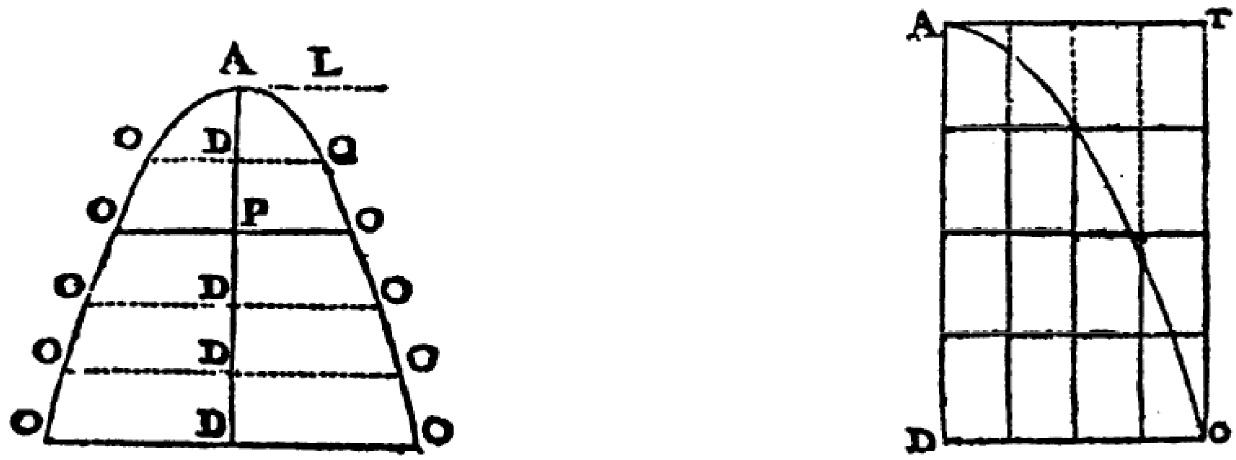


Imagen 4. Representación de una parábola cumpliendo la proposición 4 (Wallis 1656).

En la Proposición 4, en la aplicabilidad de la parábola según las proposiciones anteriores, dado que es posible segmentar la parábola o cónica en pequeños triángulo, sin importar que sea curvado o no.

Para $n = 2$.

Proposición 20. “Si se ha propuesto una serie o sucesión, de las cantidades que son como los cuadrados de proporciones aritméticas (o como una secuencia de números cuadrados) continuamente creciente, comenzando desde un punto 0, su relación a una serie del mismo número en igualdad de condiciones a la mayor será superior a un tercio; y el exceso será la proporción de uno a seis veces el número de términos después de 0; o de la raíz cuadrada del primer término después de 0, a seis veces el cuadrado de la original a la más grande.

Es decir (si por el primer término después de 0 se pone 1, y para el último l),

$$\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2$$

O (que indica el número de términos de m, y el último de l),

$$\frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{6m-6}l^2$$

Desprende de las proposiciones anteriores.

Dado que, por otra parte, como el número de términos aumenta, el exceso de más de un tercio continuamente se reduce, de tal manera que al fin se convierte en menos de cualquier cantidad asignable (como es claro); si uno continúa hasta el infinito, se desvanecerá por completo.” (Wallis, 1656 trad.).

$$\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \qquad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$

Imagen 5. Se muestran las series de la Proposición 19 que se aplican en la Proposición 20.

Legado de Wallis. Un gran aporte de Wallis fue alejarse del método establecido por Cavalieri, y establecer un formalismo para las sumas infinitas a través del método de interpolación, además de incluir en sus prácticas métodos inductivos, que posteriormente fueron llamados inductivos incompletos, dando así una rigurosidad al tratamiento de sus series o sucesiones numéricas.

Cuadratura de Newton

Los principios matemáticos de la filosofía natural, es una de las obras emblemáticas de la construcción del conocimiento matemático, siendo una obra tan importante como extensa. Para la idea que en este apartado se quiere trabajar, se pondrán en estudio solo algunos fragmentos de la obra, que tiene relación directa con la cuadratura de una parábola; esta situación guarda cierta similaridad estructural con la que se plantea en la tarea a los estudiantes.

Newton toma patrones encontrados en las series trabajadas por Wallis y las generaliza, pero le agrega un detalle particular e importante, la posibilidad de encontrar cualquier ordenada de la figura, esto lo hace con el *Lema V y VI* de los principios matemáticos; es decir, es capaz de delimitar, mediante métodos numéricos, la figura en cualquiera de sus líneas y saber su medida para, así, tener certeza de la relación entre las magnitudes. Sin embargo, en la Sección 1 del Libro Primero, Newton plantea un conjunto de lemas en los que fácilmente podemos apreciar nociones cercanas a lo que hoy conocemos como integral definida para una parábola; se observa en el Lema II:

> **Lema 11, Sección 1, Libro Primero.** Si en una figura **AacE** comprendida entre las rectas **Aa**, **AE**, y la curva **acE** se inscriben varios paralelogramos **Ab, Be, Cd, etc**. construidos sobre bases iguales **AB, BC, CD, etc**. y con lados **Bb, Ce, Dd** paralelos al lado **Aa** de la figura; y se completan los paralelogramos **aKbl, bLcm, cMdn, etc**., si se disminuye la anchura de estos paralelogramos y se aumenta infinitamente el número de ellos: digo que las razones últimas que se dan entre la figura inscrita **AKbLcMdD**, la circunscrita **AalbmcndoE** y la curvilínea **AabcdE** son razones de igualdad.

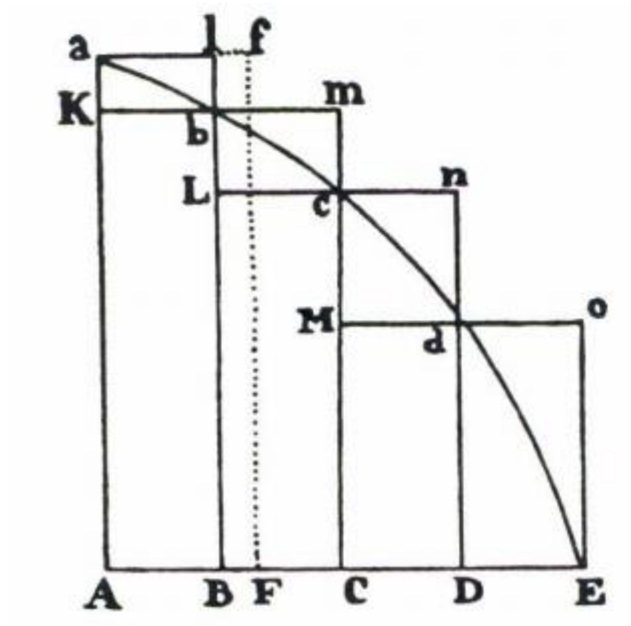


Imagen 6. Representación dada por Newton (1687) para explicar el Lema II de la Sección 1.

Acompañando el anterior Lema II, se encuentran los Lemas I, III y IV, que refuerzan la misma idea de ocupación de espacios en el área bajo una curva, por medio de rectángulos con bases iguales.

El Lema II pone especial énfasis en el trabajo sobre el límite de los rectángulos de la misma base, para ser iguales a la curvatura mostrada. “las razones últimas son también razones iguales, pues de no ser así habría algún tipo de espacios entre ellos, esto haría que no fuesen las razones iguales” (Newton 1687). Esta apreciación indica para cualquiera sea la anchura de los rectángulos habrá una suma de esos rectángulos que es igual a la de la superficie delimitada por una curva. En el Lema III describe Newton el Colorario I “De aquí que la suma última de paralelogramos evanescentes coincide en todo punto con la figura curvilínea”.

Al final de esta sección, en un Escolio, Newton se permitía a sí mismo especular, discute como se debe entender "cantidades evanescentes" y "cantidades nacientes", en el que podemos visualizar un concepto de límite, que es central para todos los desarrollos anteriores. En dicho Escolio se sintetiza la idea de límite de esta forma:

> **Escolio, Sección 1, Libro Primero** ... Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas veces tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones ... Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna ... ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquélla con la que desaparecen ... y semejante en la razón del límite de todas las cantidades nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico... Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo. Ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum*…Newton (1687).

Newton, además, trabaja en otra parte de su obra, un Lema para encontrar cualquier ordenada de una curva a partir de una recta de referencia de dicha curva, el Lema IV del libro III encuentra distancias desde una recta definida dada hasta cualquier punto de una curva cualquiera:

> **Lema V, libro III.** Determine una línea curva de índole parabólica, que pase por cualquier número dado de puntos.
>
> Sea A, B, C, D, F, etc., y abátanse desde ellos sobre cualquier línea HN, de posición dada, otras tantas perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc.
>
> Caso 1. Si HI, IK, KL, etc., intervalos de los puntos H, I, K, L, M, N, etc., son iguales, tómense b, 2b, 3b, 4b, 5b, etc., primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., c, 2c, 3c, 4c, etc., sus segundas diferencias, y d, 2d,3d, etc., las terceras, de forma que AH-BI sea =b, BI-CK=2b, CK-DL=3b, DL-EM=4b, EM-FN=5b, etc.; entonces b-2b=c, 2b-3b=2c, 3b-4b=3c, 4b-5b=4c, etc., así hasta la última diferencia, que aquí es f . Después tras levantar cualquier perpendicular RS, que puede considerarse como ordenada de la curva que se busca, supóngase, con el fin de determinar la longitud de la ordenada, que los intervalos HI, IK, KL, LM etc., son unidades, sean AH=a, -HS=p, ½ p por -IS=q, 1/3q por +SK=r, ¼ r por +SL=s, 1/5s por +SM=t, procediendo de esta forma hasta ME, penúltima perpendicular, y prefijando signos negativos ante los términos HS, IS, etc., Situados en el lado del punto S hacia A, y signos positivos hacia los términos SK, SL, etc., situados al otro lado del punto S hacia A; observando os signos, RS será =a+bp+cq+dr+es+ft+etc. Newton (1687).

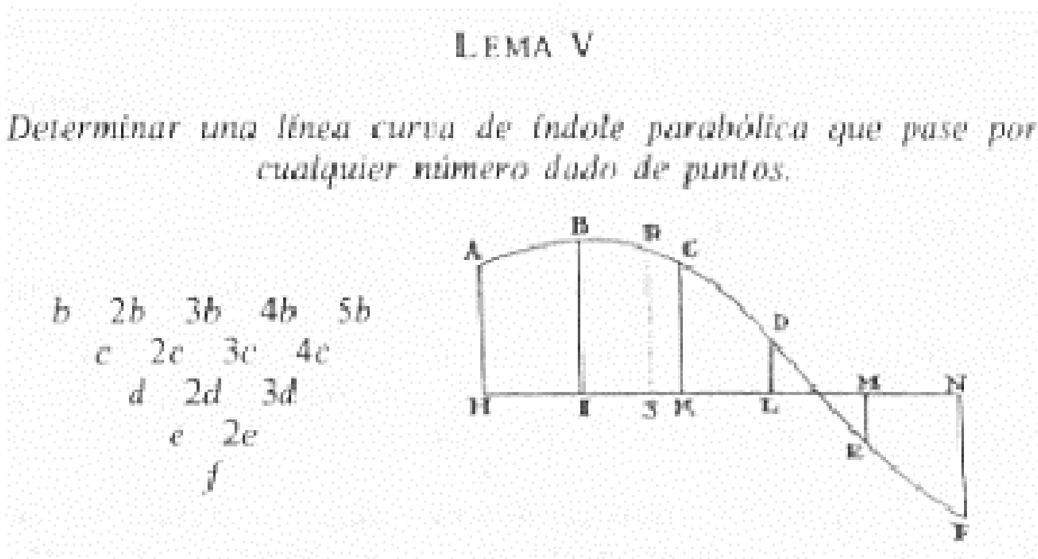


Imagen 7. El enunciado y la imagen que acompaña el Lema V del Libro III de Newton (1687).

Existe un Caso 2 del mismo Lema, la idea sigue siendo la misma, hallar diferencias buscando razones de cambio, para de esta forma, encontrar el punto de la ordenada en cualquier punto de la curva.

Legado de Newton. El trabajo de Newton en los fragmentos seleccionados genera nuevas perspectivas del trabajo que se puede realizar con y acerca de una curva parabólica; no solo conseguir su área, sino también encontrar sus ordenadas a partir de procesos aritméticos. Seguramente, en otros trabajos, Newton profundiza y perfecciona conceptos del cálculo; pero, esta indagación se remitirá a los ya expuestos.

Las prácticas matemáticas de Kitcher

La teoría de las prácticas matemáticas Kitcher (1984) puede jugar el papel de propuesta metodológica para entender las transformaciones del conocimiento matemático. Considera el conocimiento matemático desde la epistemología y la interpretación de las prácticas matemáticas como la herramienta que permite ver procesos racionales de cambio y desarrollo del conocimiento matemático.

En cinco componentes se encuentran consignadas las prácticas matemáticas: Un lenguaje, un conjunto de declaraciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de cuestiones seleccionadas como importantes y un conjunto de puntos de vista metamatemáticas (incluidas las normas para la prueba y la definición y las afirmaciones sobre el alcance y la estructura de las matemáticas). Como una notación conveniente, voy a utilizar la expresión "<L, M, Q, R, S>" como un símbolo para una práctica matemática arbitraria (donde L es el lenguaje de la práctica, M el conjunto de puntos de vista metamatemáticas, Q la conjunto de preguntas aceptadas, R el conjunto de razonamientos aceptados, y S el conjunto de declaraciones aceptadas).

El problema de explicar el crecimiento del conocimiento matemático se convierte en el de la comprensión de lo que hace que una transición de una práctica <L, M, Q, R, S> hacia una práctica inmediatamente posterior <L ', M', Q ', R', S '> sea una transición racional. La modificación en cualquiera de los componentes de la práctica matemática genera una manera diferente de ver el conocimiento matemático.

En relación con una práctica matemática como un quíntuple de este tipo, se selecciona aquellas características de la actividad matemática que parecen sufrir un cambio significativo. Kitcher dice que:

> “Evidentemente, es posible que pueda haber elegido más componentes de lo que necesito o por el contrario, otras características de la actividad matemática necesitan ser incluidas si queremos obtener una comprensión adecuada del cambio

> matemático. Si he cometido un error en la anterior dirección entonces deberíamos encontrarnos con que es posible entender los cambios en algún subconjunto de los componentes sin apelar a los componentes que no pertenecen a este subgrupo.”
> Kitcher (1984) (trad.)

La aceptación de estas componentes se debe reflejar en la posibilidad de reconstruir ciertos tipos de cambios matemáticos. En el apartado de metodología se adopta la teoría de las prácticas matemáticas de Kitcher para identificar las posibles transiciones de conocimiento matemático de dos matemáticos y de un grupo de estudiantes; en todos los casos, ellos realizando actividades sobre las cuadraturas.

Metodología

El eje metodológico del trabajo es el estudio de los componentes de prácticas matemáticas. Kitcher (1984) explica las prácticas matemáticas desde cinco componentes: Lenguaje, Conjunto de declaraciones aceptadas, Conjunto de razonamientos aceptados, Conjunto de preguntas seleccionadas como importantes, y Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos.

La metodología está dispuesta en cinco fases. La primera tratará del estudio de aspectos históricos relacionados con las cuadraturas de Wallis y Newton, mostrado en el apartado del Marco de Referencia; estos cumplen con los cinco componen puestos por Kitcher. La segunda encuentra elementos en la constitución histórica de los tratamientos de la cuadratura, que pueden ser tomados para generar una tarea que permita ver los componentes de la práctica matemática de un grupo de estudiantes seleccionados. La tercera se dedica a la gestión y realización de la actividad realizada para los estudiantes al resolver la situación propuesta en la tarea. En la cuarta se desglosa los elementos de evidencia, fotografías y vídeos que se recopilan en la ejecución en los componentes Kitcher. Finalmente, la última fase da cuenta de la comparación de los resultados en los componentes de las prácticas matemáticas del seleccionado, a saber el grupo de estudiantes de grado 11 del colegio José Max León con los estudiados en los trabajos de Wallis y Newton.

Fase I. Análisis de los componentes de las prácticas matemáticas en los autores:

En esta fase se hace un estudio de los componentes de las prácticas matemáticas de Newton y Wallis cuando abordaron la problemática de las cuadraturas, se examinan, particularmente, los Lemas y Proposiciones de Newton y Wallis; dichas componentes son interpretadas según Kitcher y tal como están descritas en este documento en el apartado Marco de Referencia.

El texto sobre la naturaleza del conocimiento matemático (Kitcher 1984) desarrolla una manera de comprender la evolución de las matemáticas. A partir de lógica inductiva, él comprende las “prácticas matemáticas” mediante un conjunto de componentes que considera razonables para examinar y entender las transformaciones del conocimiento matemático; las define así:

1. **Lenguaje:** Consiste en una fusión de una sintaxis y una semántica que incluye un conjunto de potenciales de referencia. El cambio de un lenguaje hacia otro permite percibir el hilo común que corre a través de nuestras soluciones a problemas viejos; esto aumenta nuestra comprensión de por qué esas soluciones elaboradas.
2. **Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos:** Son afirmaciones acerca de cómo los objetivos finales del matemático se quieren lograr. Estos puntos de vista son típicamente justificados por la reflexión sobre las formas en que las

matemáticas anteriores han tenido éxito. El trabajo previo ha contado algunos de ellos como fundamentales, algunos como independientes entre sí; las demostraciones siempre se han presentado de una manera particular. Implícitamente generalizando en el trabajo previo, una práctica matemática puede adoptar ciertos puntos de vista **meta-matemáticos** que luego entran en conflicto con una propuesta de sistematización, a esto último se le puede denominar como miopía metamatemática.

Se establece que el conjunto de puntos de vista meta-matemáticos debe incluir como mínimo los siguientes aspectos:

I. Las normas para la prueba.

II. El alcance de las matemáticas.

III. El orden de disciplinas matemáticas.

3. **Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes:** El conjunto de preguntas aceptadas en una práctica matemática consiste en preguntas, formuladas en el lenguaje de la práctica, que se consideran adecuadas según las disposiciones dictadas por los puntos de vista metamatemáticos, y que se pueden respondes a partir de unos principios básicos y unos razonamientos establecidos por el realizador de la práctica matemática.

4. **Conjunto de razonamientos aceptados:** Son las secuencias de instrucciones que se cuentan como pruebas. Tales secuencias comenzarán a partir de las declaraciones identificadas como los primeros principios y procederán de acuerdo con los cánones aceptados de la inferencia correcta. Tanto los criterios de los primeros principios y

de inferencia correcta son fijados por el fondo de los puntos de vistas meta matemáticos.

5. **Conjunto de declaraciones aceptadas:** simplemente el conjunto de oraciones, formulado en el lenguaje matemático de la época, a la que un lector omnívoro y alerta de los actuales textos, revistas y documentos de investigación consentiría. Es posible un análisis más detallado de este componente mediante la aplicación de dos distinciones familiares en filosofía de la ciencia. En primer lugar, podríamos discriminar entre las declaraciones aceptadas, como se acaba caracterizado, teniendo en cuenta los grados de credibilidad, que nuestro lector imaginado que daría por ellos. segundo lugar, podríamos permitir varios tipos de asentimiento. Recientes filosofía de la ciencia ha encontrado que es útil para distinguir los casos en que un científico respalda una hipótesis como verdadera de casos en los que la hipótesis se adopta como base de investigaciones. Tal vez una distinción similar puede resultar útil en la comprensión de algunos episodios de la historia de matemáticas. (Kitcher 1984. Trad.)

Análisis de las prácticas tomadas en la historia. Para el análisis se construyen dos tablas en las cuales se categorizan las prácticas matemáticas en los métodos de Newton y Wallis, usando los cinco componentes de la práctica matemática (Kitcher 1984). Primero se presentan los componentes de la práctica de Wallis (Tabla 1.), posteriormente los de Newton (Tabla 2.), teniendo en cuenta que se pone, cada caso, la mirada sólo en los extractos de las obras que se muestran en el apartado Marco de Referencia.

Tabla 1.
Relación entre los componentes de la práctica matemática y "Arithmetica infinitorum"

Cinco componentes de la práctica matemática según Kitcher	Desarrollo de series para las cuadraturas de John Wallis *"Arithmetic infinitorum"*
Lenguaje	● El uso de abreviaciones para las incógnitas es uno de los factores fundamentales en sus obras. ● Simbología del infinito en un espacio limitado ● Hace claridad sobre a qué se refiere con cada letra usa como magnitud.
Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos	● Primero consta de definiciones tomadas como verdades absolutas, nociones que no necesitan un trabajo demostrativo. ● Los corolarios que son aclaraciones o ampliaciones directas de definiciones y proposiciones. ● Las proposiciones que son demostraciones directas a partir de las definiciones o de proposiciones desde la lógica inductiva. *Nota:* En sus trabajos se presenta el infinito como una cantidad o procesos tan próximos como se quiera, desde dicha noción, fundamenta sus demostraciones inductivas.
Conjunto de razonamientos aceptados	● El problema de la cuadratura de una curva se reduce a calcular la razón entre los segmentos de líneas contenidos en la figura delimitada por la curva y los segmentos correspondientes con un rectángulo. ● La obtención de series numéricas a partir de las relaciones le garantizan una manera de obtener un área lo suficiente mente exacta, dependiendo las pretensiones del ejecutante del método. ● Existen figuras idénticas en áreas aunque sus formas no lo sean. ● Existen relaciones previsibles en figuras delimitadas por una parábola a partir de una ecuación general.
Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes	● ¿Cómo establecer la cuadratura del círculo o parábolas a partir de sumas infinitas? ● ¿Qué tipo de ecuaciones pueden representar las generalidades del comportamiento de los segmentos o superficies dentro de una parábola?
Conjunto declaraciones aceptadas	● Asume la infinidad de puntos delimitados con un principio y un fin.

	● Una serie determina puede determinar el comportamiento de una superficie o un segmento dado. ● Las cantidades se pueden escribir como series aritméticas. ● En procesos infinitos las diferencias entre el cálculo y el área real se desvanecen. *Nota:* Wallis sin embargo declara que este procedimiento es altamente heterodoxo para la época, pero puede verificarse mediante el bien conocido métodos de figuras inscritas y circunscritas.

Comprende el trabajo elaborado por Wallis que se asume como relevante, en el desarrollo de series aritméticas para lograr cuadraturas, relacionado con el trabajo de la práctica matemática de Kitcher. (Autoría propia)

Tabla 2.

Relación entre los componentes de la práctica matemática y "Philosophie Natutalis Principia Mathematica"

Cinco componentes de la práctica matemática según Kitcher	**Aportes en las cuadraturas de Isaac Newton "Philosophiae naturalis principia mathematica"**
Lenguaje	● Newton utilizó descripciones de tipo geométrico, aunque Newton ya había efectuado escrituras más algebraicas, no publicó nada con ese tipo de escritura. ● Las explicaciones las realiza en forma retórica, y luego lo relaciona con algún tipo de escritura analítica. ● Todo lo describe a partir de puntos los cuales nombra con letras mayúsculas y minúsculas indiferentemente. ● Nombra las curvas con tres puntos que hacen parte de la curva. ● Los paralelogramos con solo dos o cuatro en el caso que puedan ser confundidos y los segmentos con dos puntos ● Realiza las operaciones usando los puntos que ha determinado para nombrar las magnitudes geométricas involucradas y simbolización operativa.
Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos	● Desde el punto de vista netamente matemático solo le interesa en las secciones describir el movimiento de los cuerpos, así que la matemática que desarrolla va entorno a ello. ● Identifica la verdad desde un razonamiento inductivo, establece Lemas que le permitan ir construyendo nuevos métodos para describir los movimientos de los cuerpos.

Conjunto de razonamientos aceptados	● La estructura tiene el siguiente orden: las definiciones, leyes, proposiciones (todas las anteriores son dirigidas hacia la física) luego siguen los lemas, los cuales si son propios de la matemática en su mayoría. ● Un enunciado o hipótesis, establece el principio a desarrollar, una afirmación sobre figuras geométricas que puede utilizar para el estudio físico. ● Los corolarios son claridades o pequeños aportes hechos a partir de los lemas, se pone al final del lema, no es necesario describirlos ya que parecen ser muy evidentes ● Los escolios que son ampliaciones o explicaciones más puntuales de los lemas.
Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes	● ¿Qué de las cuadraturas pueden usarse para modelar el movimiento del cuerpo en dos dimensiones? ● ¿Cómo medir áreas bajo las curvas? ● ¿Cómo calcular cualquier punto en una curva?
Conjunto declaraciones aceptadas	● La existencia de series numéricas y geométricas. ● Representaciones geométricas para dar validez a procesos aritméticos previamente definidos con una expresión algebraica. ● El infinito cuando se describe las razones últimas, se pude ver como las infinitas particiones, o con bases que limitan con lo infinitamente pequeño.

Comprende el trabajo elaborado por Newton que se asume como relevante, en el desarrollo de cuadraturas y ordenadas de las curvas, relacionado con el trabajo de la práctica matemática de Kitcher. (Autoría propia)

Lo descrito en las dos anteriores tablas se usará en el espacio comparativo al final de este apartado.

Fase II. Configuración de un Instrumento de diseño de tareas:

En esta fase se genera un instrumento de diseño de tareas orientadas para estimular que los estudiantes participen desde dinámicas que, por una parte les permitan desarrollar actividad matemática y, por otra parte permitan ver sus prácticas empíricas sobre cuadraturas.

Malaspina (2013) Establece dos tipos de problemas matemáticos escolares, por variación de uno ya establecido y por elaboración; de este último es el que se configura en el proceso de esta investigación; tiene las siguientes características:

La información: datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.

El requerimiento: lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.

El contexto: puede ser propiamente matemático o extra matemático.

El entorno matemático: los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema.

El proceso según el cual se construye un nuevo problema, se da a partir de una situación dada, o configurada por el autor, el contexto se origina en tal situación, la información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación; el requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información, especificada o implícita en el enunciado dentro de un cierto entorno matemático y partiendo de un requerimiento específico (matemático o didáctico); la creación debe ser acorde a un contexto e información adecuada. En este párrafo se parafrasea a Malaspina (2015, pág. 13).

Con la premisa de crear un instrumento adecuado para diseñar la tarea que permita recolectar buenos datos para analizar los componentes de las prácticas matemáticas con respecto a las cuadraturas, se propuso para al grupo de estudiantes lo siguiente:

Como resultado de los criterios inmersos en la construcción del instrumento de diseño se configuró una tarea que evoca el desempeño de una impresora de impacto real, el modelo EPSON DFX-9000, desde su ficha técnica se toma las medidas y el grosor de interlineado en 0,059mm, la operatividad de las impresoras de impacto está en unas agujas que cruzan el papel de tal forma que trazan una línea sobre el mismo, y se levanta cuando no es necesario realizar un trazo, la explicación de su funcionamiento es tomada del Instituto Tecnológico Argentino (ITA, 2007); esta evocación contribuye a crear un escenario apropiado para el estudio de la situación problema en cuanto posibilita componer un área bajo la curva a partir de líneas o mejor, de rectángulos *muy* delgados.

La situación, tarea, utiliza un contexto de estudio universitario, por la proximidad de los estudiantes a esta nueva forma de escolaridad. Otros aspectos incluidos en el diseño de la situación se focalizan sobre la utilidad social de las cuadraturas; por ello se escoge una obra arquitectónica real, del *observatorio Oceanográfico de Valencia*, una de las obras de Félix Candela, la cual incluye entre sus figuras parábolas. En total, estas elecciones pretenden focalizar al grupo de estudiantes en la pertinencia e interés tanto de la situación como del estudio de las cuadraturas. Estas ideas para el diseño de la situación son más bellamente expresadas, en sus explicaciones de la Educación Matemática Realista, por Freudenthal:

> "Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo" (1973)

El hecho de la existencia de las agujas que trazan delgadas líneas para ocupar un área debe llevar al estudiante a realizar acciones sobre las mismas, de esta manera el mensaje del contexto es vinculado con lo que se quiere involucrar en las tareas propuestas.

Mediante las cuestiones planteadas en cuatro ítems de la tarea se busca disponer niveles de profundidad que posibiliten un acercamiento a la cuadratura. El item *(a)* que corresponde a la pregunta: *¿Cuántas líneas se necesitan para llenar el rectángulo que se pude imprimir (4cm x 9cm)?* busca que el estudiante interprete los trazos producidos por la impresora (rectángulos muy delgados), como líneas capaces de ocupar la superficie de un rectángulo, de esta manera los estudiantes toman contacto con una idea importante para su acercamiento a la cuadratura; al mismo tiempo, este contacto hace posible interpretar por parte del observador algunas nociones de los estudiantes sobre el recubrimiento de áreas, e interpretar, además, por parte del investigador algunos razonamientos aceptados por los aprendices.

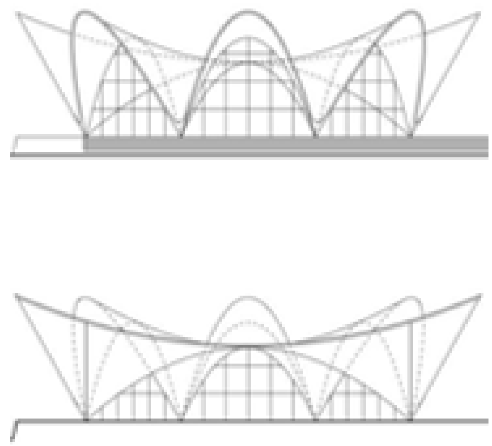
El ítem *(b)*: *La impresora se detuvo cuando ha realizado la impresión hasta la figura delimitada por los puntos KIHJ (Figura 1) ¿Cuántas líneas había usado hasta ese momento?* Compuesto de un pequeño enunciado y una pregunta, se sugiere que los estudiantes, realicen el mismo trabajo que en el anterior punto, diferenciándolo en hallar el área para una parte de una parábola, sin embargo es posible que no se asocie con una parte de la parábola, sino que se tome como un trapecio, esto dependerá de las observaciones que haga el estudiante sobre la misma figura.

El ítem *(c)* está compuesto por dos preguntas: *¿Todas miden lo mismo de largo? ¿Cuánto mide cada línea?* Está relacionado con el ítem anterior; la intención es que el estudiante busque formas de calcular ordenadas, este ítem permitirá generar más información sobre las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando pongan en juego las nociones propias del área bajo la curva, sin conocer un método analítico estándar para dicho fin.

En el ítem *(d)* se dirige a la consolidación del trabajo previo por medio de las nociones mostradas por los estudiantes en los ítems anteriores; la pregunta formulada es: *¿Alcanza la tinta para imprimir todo el vitral (Figura 2)?* Se pretende que el estudiante busque el área bajo una curva determinada, la parábola, para ello el estudiante realiza un proceso más profundo sobre sus prácticas matemáticas, en última instancia lo que se busca es indagar que tan cerca está el estudiante a las prácticas matemáticas de Newton y Wallis.

IMPRESORA DE IMPACTO

A un grupo de estudiantes de arquitectura se les pide estudiar el diseño del observatorio Oceanográfico de Valencia, una de las obras de Félix Candela. Para realizar el estudio uno de los estudiantes decide descomponer la estructura comenzando por los vitrales.



Para analizar lo mejor posible, el estudiante piensa imprimir en alta calidad los vitrales de la estructura. Para esto, cuenta con una impresora de impacto que realiza **líneas horizontales** de **0,00059cm** de grosor sobre el papel, en su mejor calidad. Sí la impresora solo cuenta con la cantidad de tinta para imprimir un **rectángulo de 4cm x 9cm** y falta el último vitral por imprimir.

Teniendo en cuenta la información suministrada respondan:

- **a.** ¿Cuántas líneas se necesitan para llenar el rectángulo que se pude imprimir (4cm x 9cm)?
- **b.** La impresora se detuvo cuando ha realizado la impresión hasta la figura delimitada por los puntos KIHJ (Figura 1) ¿Cuántas líneas había usado hasta ese momento?
- **c.** ¿Todas miden lo mismo de largo? ¿Cuánto mide cada línea?
- **d.** ¿Alcanza la tinta para imprimir todo el vitral (Figura 2)?

Tengan en cuenta las siguientes especificaciones de la gráfica de la Figura 1 y Figura 2.

- La cuadricula mostrada es una representación es de 1cmx1cm.
- Las medidas de los segmentos indicados están aproximados a dos cifras decimales.

Imagen 9. Hoja de enunciación de la situación.

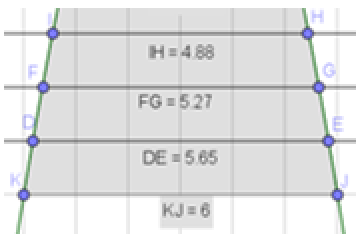


Figura 1.

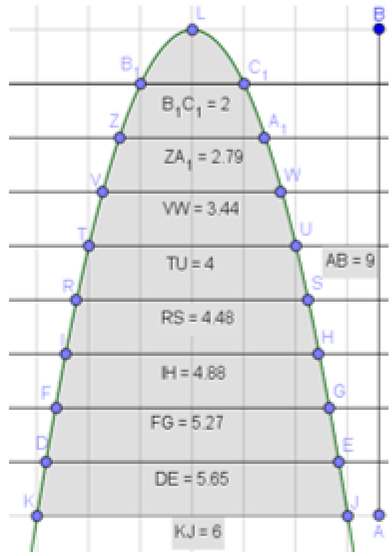


Figura 2.

Imagen 10. Ayuda visual entre los materiales utilizados en la puesta en acción.

Las anteriores *Imagen 9* y *10,* son tomadas del instrumento aplicado al grupo de estudiantes del colegio José Max León, en ella se ponen elementos reales de la tecnología, al utilizar una impresora de impacto como acercamiento a las líneas ocupando el área bajo una parábola, que pueden ser directamente relacionadas con las prácticas matemáticas de Newton y Wallis.

Al final, como parte del diseño de la situación (tarea) aparecen las *Figuras 1* y 2; estas además de servir como representación gráfica de la situación, brinda información relevante y necesaria para solucionar las preguntas; se muestra el tamaño de la imagen a imprimir, esta se encuentra dentro de una cuadricula de 1cmx1cm, además de las medidas de las líneas horizontales espaciadas por un interlineado aparecen redondeadas a centésimas de centímetro.

Fase III. Puesta en acción en el aula:

La tarea diseñada se puso en acción considerando elementos de la teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1986) ya que posee formulaciones pertinentes para este trabajo, buscando que los estudiantes generen un actuar evidenciable y favorable para establecer relaciones entre las prácticas matemáticas de Newton y Wallis con las prácticas de los estudiantes según se evidencie durante su propia actividad..

La teoría de situaciones didácticas ve que la construcción del conocimiento se genera desde dos aspectos posibles, uno que comprende los pre-saberes y otro más ligado a las capacidades adaptativas del estudiante al medio; de esta manera lo describe Brousseau:

> “Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición anterior de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. (1999)

La situación didáctica es construida intencionalmente con el fin de construir conocimientos en los estudiantes. Una situación es definida como un conjunto de relaciones establecidas implícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau 1986).

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central (dentro de la organización de la enseñanza) a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales los alumnos se encuentran solos frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber. El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica). La fase a-didáctica es:

> "El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego." (Brousseau 1986)

En relación con las implicaciones de la obra realizada por Brousseau en este trabajo de investigación, muestra a la fase de situación a-didáctica como el momento del investigador para poner la mirada.

La puesta en acción de la tarea requirió los estudiantes de los grados 11-A y 11-B, con edades entre los 15 y los 18 años, todos ellos con un estatus socio-cultural del nivel mayor o igual a 4; tuvo lugar en el Colegio Campestre José Max León, una institución educativa de calendario B, ubicado en el sector rural de Cota Cundinamarca. Fue realizada el día viernes 16 de diciembre del 2016, en bloques de dos horas para cada grupo de trabajo. La clase se organizó en grupos de 3 o 4 personas, conformados de forma autónoma por parte de los estudiantes. Durante la gestión de la evolución de la acción se consideraron tres momentos:

Momento 1: Conformación de grupos de trabajo y entrega de material, en esta fase se entrega la hoja de enunciación de la situación, se realiza lectura rápida de la situación y de las preguntas, se hacen aclaraciones sobre el mismo solo si es necesario.

Momento 2: Actividad de los estudiantes en relación con la situación y registro de la información, en formato fotográfico y audiovisual, del proceso; también el profesor hace preguntas a los estudiantes, en busca de enfocar la situación hacía el problema de las cuadraturas.

Momento 3: Se recogen elementos producidos por los grupos de estudiantes mediante su actividad y se pide a los estudiantes que realicen alguna apreciación extra sobre el desarrollo de su actividad; así se da por terminada la sesión.

Fase IV. Selección de información:

La selección de la información recae sobre la recolectada desde dos fuentes el material escrito por los estudiantes así como las fotografías y grabaciones en video. Esta última posibilita tener en cuenta la comunicación verbal y gestual de los estudiantes.

Las técnicas de investigación cualitativa deben proveer garantía de objetividad así lo afirma Munarriz (1992), para ello se toma en cuenta más de una fuente de información a estudiar. Para esta investigación se tienen vídeos, fotografías y los materiales escritos producidos por los grupos de estudiantes. Por otra parte, el investigador debe buscar herramientas de análisis que garanticen menos influencia de sus propias pretensiones pero también poder mirar más allá de lo que para él es evidente.

Una técnica que se usa para corroborar la objetividad es el análisis es la frecuencia de sucesos, Munarriz dice sobre esto lo siguiente:

> “Un suceso ocurrido en el aula, por considerarlo contrario a nuestras presuposiciones, puede llevarnos a afirmaciones que no se corresponden con los datos. El examen sobre la frecuencia y momentos en que tienen lugar los hechos o las conductas analizadas puede ayudarnos en la evidencia o no de las afirmaciones” (1992).

Para el análisis de la frecuencia de sucesos se usa el programa ELAN 5.4, programa de descarga libre, en el software se examinan los vídeos recolectados, este estudio se evidencia en la deconstrucción de las prácticas matemáticas en el grupo de estudiantes.

Fase V Comparación y análisis de los componentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes:

La última fase usa la información recolectada para dar paso al análisis comparativo de las prácticas matemáticas de Wallis y Newton ya descritas en el apartado de *Marco de referencia*, con lo elaborado por los estudiantes.

Deconstrucción de las “prácticas matemáticas” de los estudiantes del José Max León

El trabajo sobre el análisis comparativo va más allá de los resultados de los estudiantes, ya que se está mirando a partir de los componentes de las prácticas matemáticas, del tipo de elementos que han logrado establecer respecto a las tareas que pueden ser resueltas a partir de métodos no necesariamente analíticos. El análisis recae sobre las prácticas matemáticas y no sobre los errores o dificultades de los estudiantes y se intenta generalizar el tipo de prácticas matemáticas de los estudiantes; es decir, se intenta establecer grupos de prácticas similares.

Para la comparación entre las prácticas de los estudiantes con prácticas de Wallis y Newton, se analiza las evidencias fotográficas y audiovisuales así como los materiales producidos en el desarrollo de la situación por parte de los estudiantes; una vez establecidos los elementos de los componentes se genera unas tablas de para cada grupo de estudiantes. Entonces se agrupa a los estudiantes según el tipo de respuestas dadas a la situación.

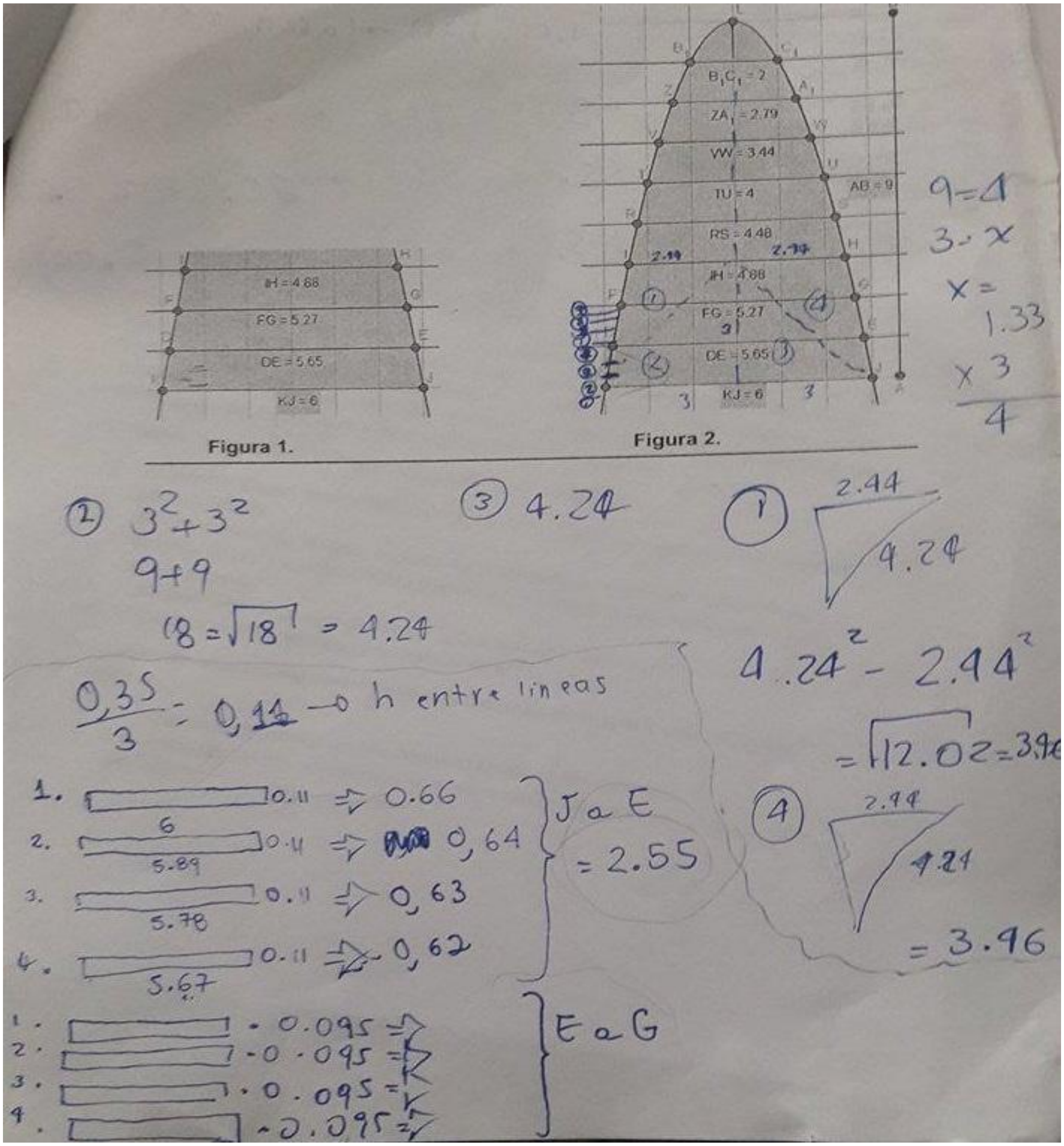
Los grupos de estudiantes se componen para el análisis de este trabajo en tres grupos más grandes, por sus características comunes a resaltar con respecto a la solución dada en el planteamiento. En el *Grupo 1* se encuentran los estudiantes que realizan un especial énfasis en la longitud de las líneas, esto desde la posibilidad de la ocupación de espacios, o la refinación de procesos que determinen las longitudes. El *Grupo 2* se ubica los trabajos que tienen como principal método para la ocupación de espacios la utilización de figuras como rectángulos, trapecios, triángulos y semicírculos. En el *Grupo 3* se clasifica a los métodos que incluyen en la solución de la situación a las funciones.

Grupo 1:

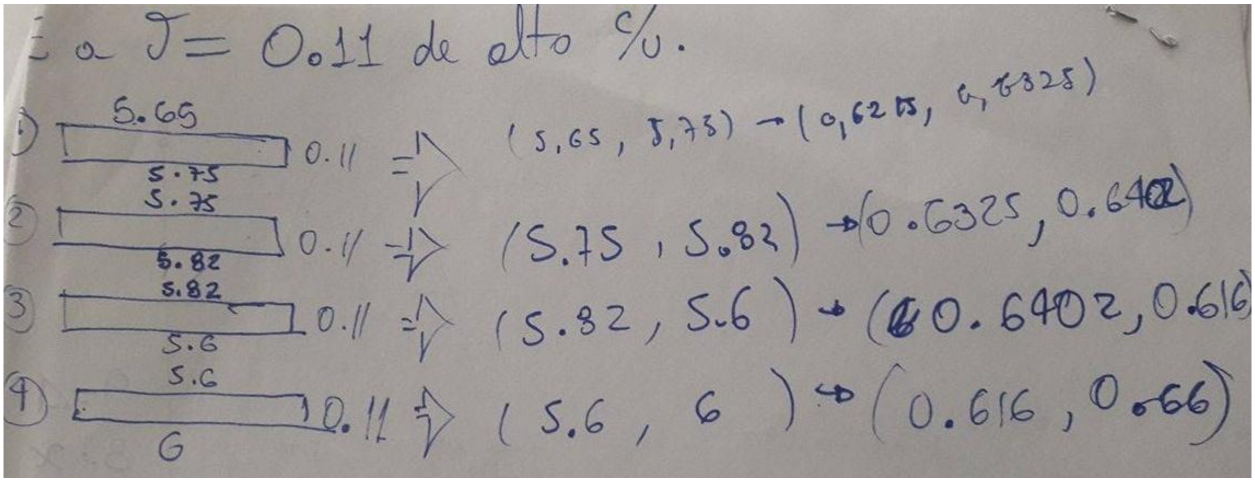
Este es el grupo mayoritario de estudiantes; usó métodos de recubrimiento de áreas a partir de pequeños trapecios, o que potencialmente irían en camino hacia esa idea de reducir el tamaño de los trapecios o rectángulos hasta asemejarlos a las líneas. En este grupo se ubican los subgrupos 1-1, 1-2 y 1-3.

Iniciando se analiza el grupo que se nombrará como *Grupo 1-1*, en este caso se toma como evidencia del trabajo fotografías y los vídeos mientras se realiza la sustentación oral de la solución que dan los estudiantes, dicho proceso ocurrirán con todos los grupos analizados. Los vídeos se podrán ver en el apartado de anexos, por medio de los enlaces.

Para la frecuencia de sucesos, los tiempos de los sucesos y el hallazgo de evidencias de los componentes de las prácticas los datos se procesaron con el programa ELAN 5.4. Parte de los resultados se presentan mediante imágenes provenientes directamente del software aludido. .



Fotografía 1. Parte del material escrito generado por estudiantes del Grupo 1-1 sobre la hoja de enunciación durante la fase de puesta en marcha.

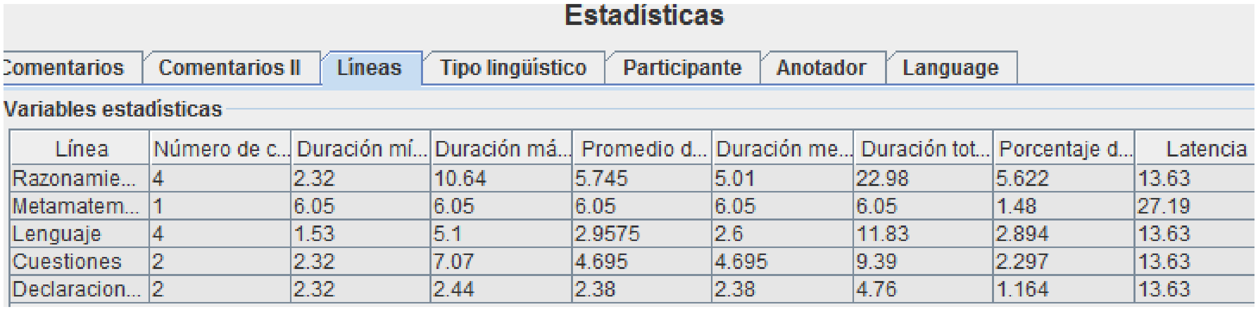


Fotografía 2. Segunda parte del desarrollo del Grupo 1-1.

Lo que se ve en las *Fotografías 1 y 2*, y en las grabaciones de video, es la búsqueda del Grupo 1-1 de hacer lo que llaman ellos, “fragmentos más pequeños” para buscar la altura de cada uno de los trapecios, mientras que el ancho fue determinado por “promedios de los rangos” de las líneas horizontales, comparando el lado mayor con el lado menor para sacar un promedio, en su práctica no afirman tácitamente poder hacer trapecios más pequeños, pero potencialmente se dirigen a ese tipo de interpretación, pues en sus representaciones muestran trapecios cada vez más pequeños en la búsqueda de rangos cada vez más pequeños en las longitudes de las líneas.

El análisis se centra en los ítems c. y d, pues en estas preguntas el problema de las cuadraturas se hace explícito; sobre todo en la pregunta *¿cómo hallar el área de la parábola de la Figura 2?*

Los resultados encontrados mediante el ELAN para el Grupo 1-1 se muestran de la siguiente forma:



Estadísticas

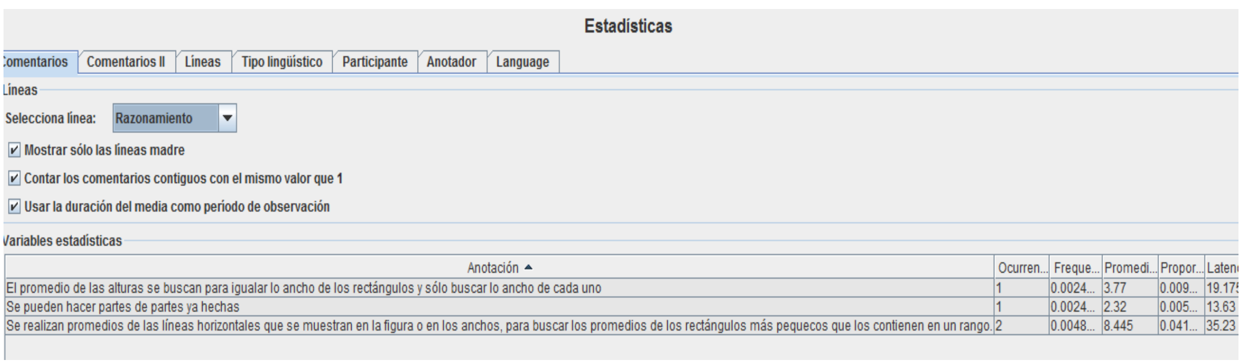
Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Variables estadísticas

Línea	Número de c...	Duración mí...	Duración má...	Promedio d...	Duración me...	Duración tot...	Porcentaje d...	Latencia
Razonamie...	4	2.32	10.64	5.745	5.01	22.98	5.622	13.63
Metamatem...	1	6.05	6.05	6.05	6.05	6.05	1.48	27.19
Lenguaje	4	1.53	5.1	2.9575	2.6	11.83	2.894	13.63
Cuestiones	2	2.32	7.07	4.695	4.695	9.39	2.297	13.63
Declaracion...	2	2.32	2.44	2.38	2.38	4.76	1.164	13.63

Imagen 11. Estadísticas generales del Grupo 1-1.

En las estadísticas generales que muestra ELAN se determina una existencia mayoritaria de comentarios pertenecientes a los componentes de conjunto de razonamientos aceptados (CRA) y a lenguaje, cada uno presenta 4; el componente con mayor duración es el CRA con 5.6% de la duración del vídeo. Los comentarios específicos para cada componente son:



Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Líneas

Selecciona línea: Razonamiento

☑ Mostrar sólo las líneas madre

☑ Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

☑ Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurren...	Freque...	Promedi...	Propor...	Laten
El promedio de las alturas se buscan para igualar lo ancho de los rectángulos y sólo buscar lo ancho de cada uno	1	0.0024...	3.77	0.009...	19.175
Se pueden hacer partes de partes ya hechas	1	0.0024...	2.32	0.005...	13.63
Se realizan promedios de las líneas horizontales que se muestran en la figura o en los anchos, para buscar los promedios de los rectángulos más pequecos que los contienen en un rango.	2	0.0048...	8.445	0.041...	35.23

Imagen 12. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo1-1.

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 12* son:

1. Se pueden hacer partes de partes ya hechas.
2. El promedio de las alturas se buscan para igualar lo ancho de los rectángulos y sólo buscar lo ancho de cada uno.

3. Se realizan promedios de las líneas horizontales que se muestran en la figura o en los anchos, para buscar los promedios de los rectángulos más pequeños que los contienen en un rango. (2 veces)

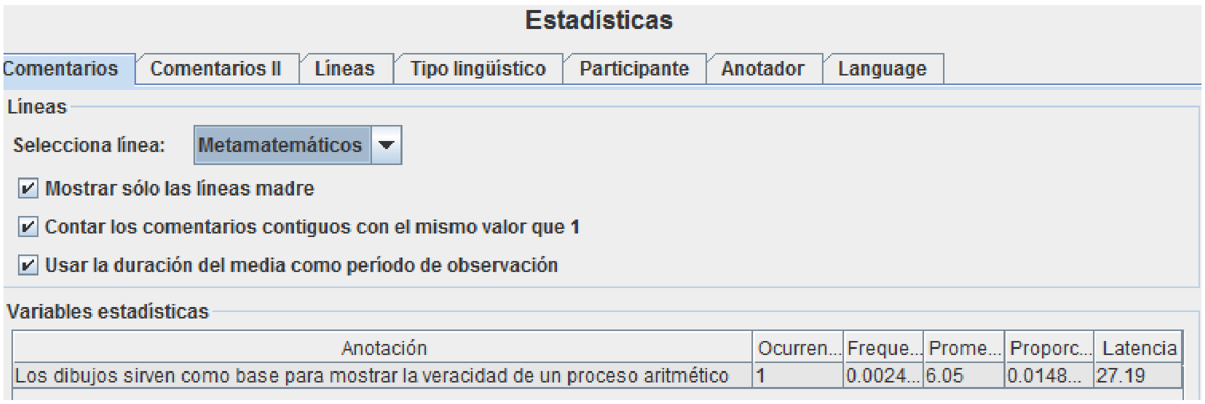


Imagen 13. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo1-1.

El comentario de Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos, *Imagen 13* es: Los dibujos sirven como base para mostrar la veracidad de un proceso aritmético.

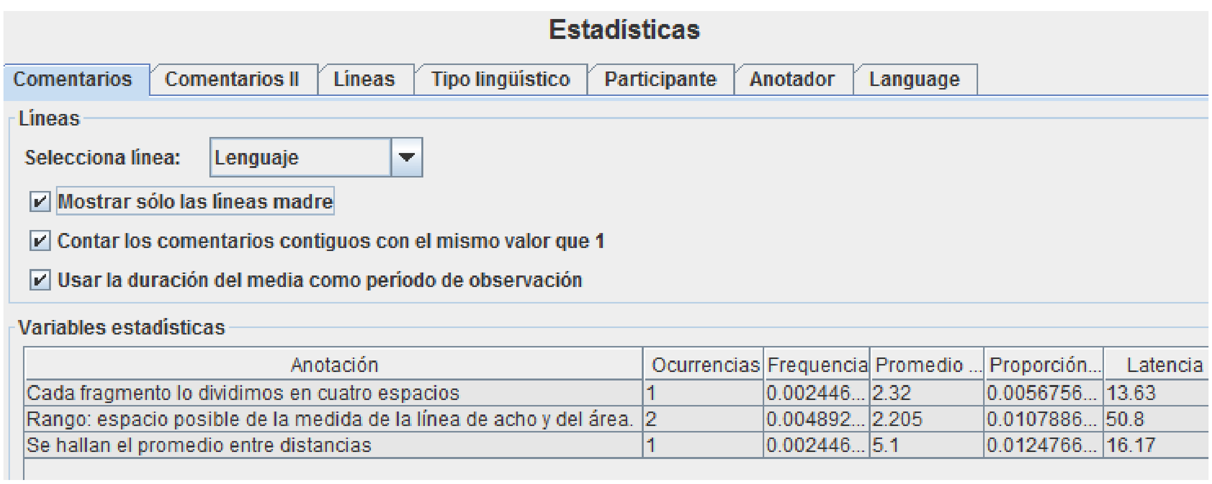
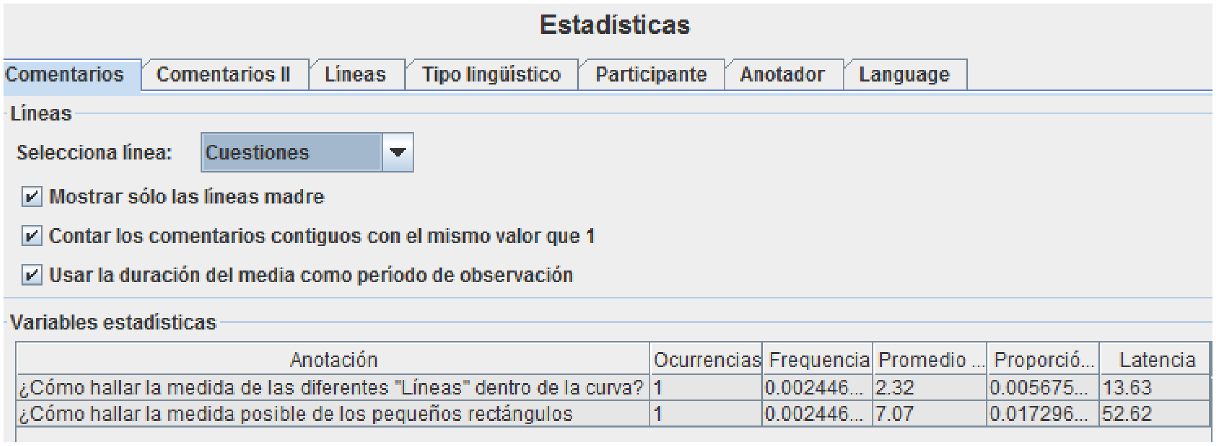


Imagen 14. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo1-1.

Los comentarios de Lenguaje, en el mismo orden de la *Imagen 14* son:

1. Cada fragmento lo dividimos en 4 espacios.
2. Rango: espacio posible de la medida de la línea de ancho y del área.

3. Se hallan promedios de distancias.



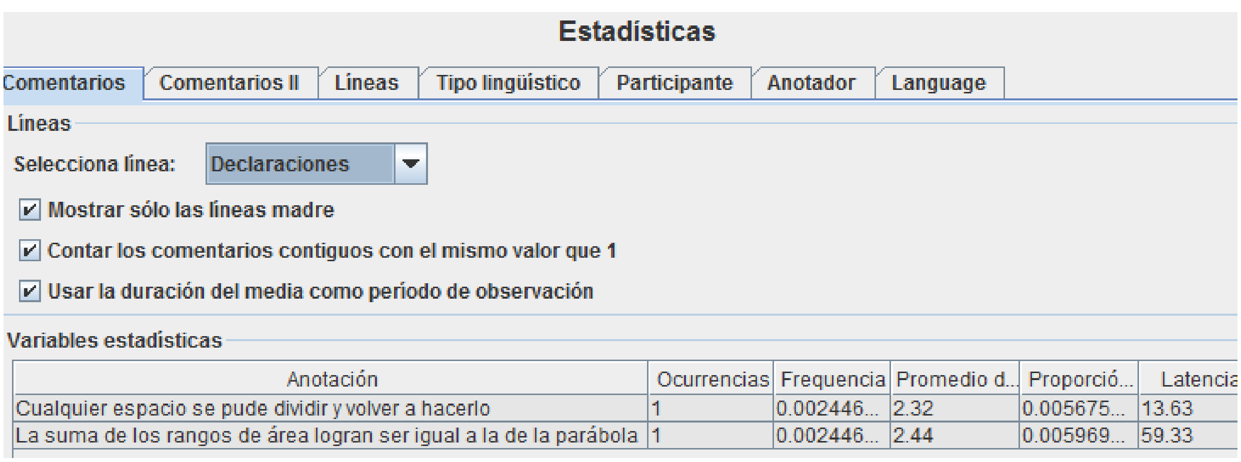
Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio ...	Proporció...	Latencia
¿Cómo hallar la medida de las diferentes "Líneas" dentro de la curva?	1	0.002446...	2.32	0.005675...	13.63
¿Cómo hallar la medida posible de los pequeños rectángulos	1	0.002446...	7.07	0.017296...	52.62

Imagen 15. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes.

Los comentarios de Conjunto de cuestiones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 15* son:

1. ¿Cómo hallar las medidas de las diferentes "líneas" dentro de la curva?
2. ¿Cómo hallar la medida posible de los pequeños rectángulos?

Grupo 1-1.



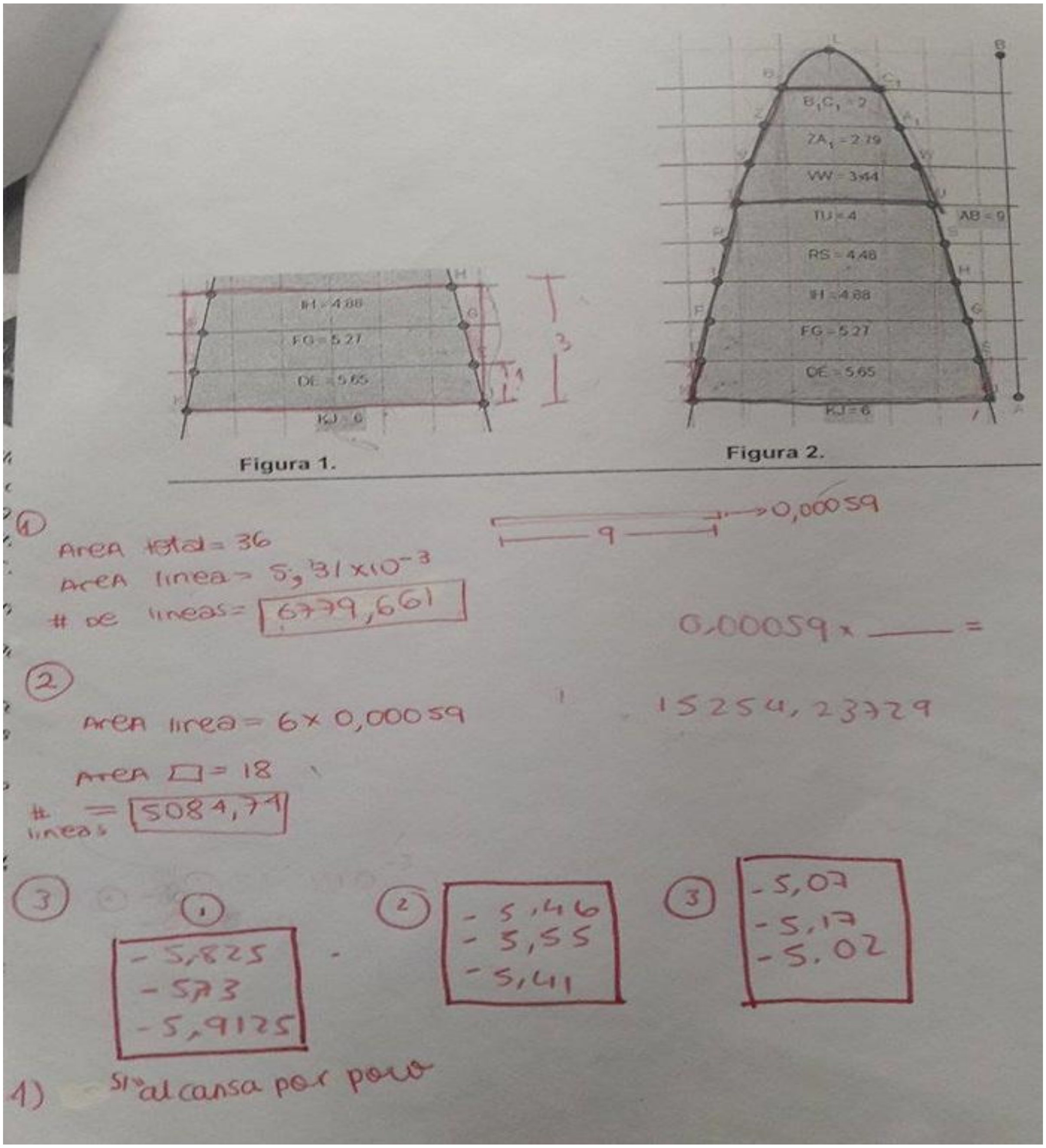
Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio d...	Proporció...	Latencia
Cualquier espacio se pude dividir y volver a hacerlo	1	0.002446...	2.32	0.005675...	13.63
La suma de los rangos de área logran ser igual a la de la parábola	1	0.002446...	2.44	0.005969...	59.33

Imagen 16. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 1-1.

Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 16* son:

1. Cualquier espacio se pude dividir y volver a hacerlo.
2. La suma de los rangos de área logran ser igual a la parábola.

En el Grupo 1-2 se encuentran métodos o ideas parecidas a las del Grupo 1-1 en su aproximación a la situación propuesta, es por ello que se ubican asociados en una misma práctica; sin embargo, este grupo tiene una explicación oral más fluida sobre las ideas empleadas en cada ítem, aunque confunden algunos términos. El enlace del video correspondiente está en el Anexo como Grupo 1-2.



Fotografía 3. Parte del material escrito generado por estudiantes del Grupo 1-2 sobre la hoja de enunciación durante la fase de puesta en marcha.

Sobre las respuestas dadas por este grupo es bueno resaltar lo hecho en los ítems a. y b.; ven en las líneas de la impresora la posibilidad de hallar áreas, ya que tienen un grosor así este sea mínimo, por otra parte en él ítem c. ponen como punto de partida hallar promedios entre una línea mayor y una menor dadas en las figuras de la tarea; toman como ejemplo la línea de 6cm y la de 5,65cm, dicen que todas las líneas tienen una anchura diferente, sin embargo solo dicen hallar unas cuantas, bajo el método de promedios.

En el ítem d. se alejan un poco la idea expuesta en el ítem c., deciden hallar el área de la figura por medio de trapecios y un semicírculo “en la punta”, este proceder lo haría perteneciente al Grupo 2, pero por sus aportes en los ítems anteriores se les ha ubicado en el Grupo 1.

En el estudio realizado desde el ELAN se encuentran las siguientes estadísticas generales:

Estadísticas

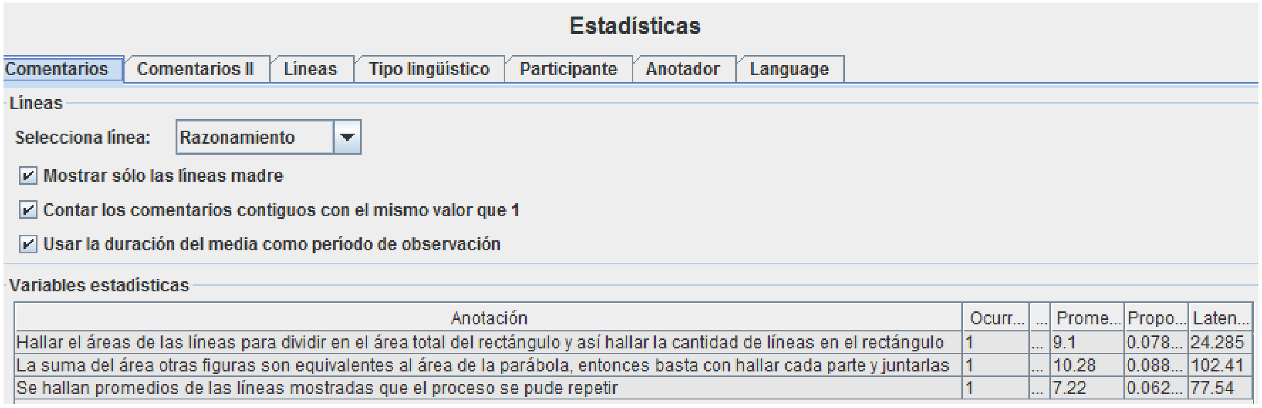
Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Variables estadísticas

Línea	Número de co...	Duración mínima	Duración máxi...	Promedio de d...	Duración media	Duración total ...	Porcentaje de d...	Laten
Razonamiento	3	7.22	10.28	8.866667	9.1	26.6	23.009	24.285
Metamatemátic...	1	10.28	10.28	10.28	10.28	10.28	8.892	102.41
Cuestiones	1	3.43	3.43	3.43	3.43	3.43	2.967	47.515
Declaraciones	3	3.96	10.28	6.086667	4.02	18.26	15.795	16.19
Lenguaje	2	2.19	7.22	4.705	4.705	9.41	8.14	17.945

Imagen 17. Estadísticas generales del Grupo 1-2.

Las estadísticas muestran que CRA y Conjunto de declaraciones aceptadas (CDA) son los componentes que más se repiten con 3 comentarios cada uno; el de mayor duración es CRA, con un 23% del tiempo de los comentarios.



Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Lineas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Lineas

Selecciona línea: Razonamiento

Mostrar sólo las líneas madre

Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurr...	...	Prome...	Propo...	Laten...
Hallar el áreas de las líneas para dividir en el área total del rectángulo y así hallar la cantidad de líneas en el rectángulo	1	...	9.1	0.078...	24.285
La suma del área otras figuras son equivalentes al área de la parábola, entonces basta con hallar cada parte y juntarlas	1	...	10.28	0.088...	102.41
Se hallan promedios de las líneas mostradas que el proceso se pude repetir	1	...	7.22	0.062...	77.54

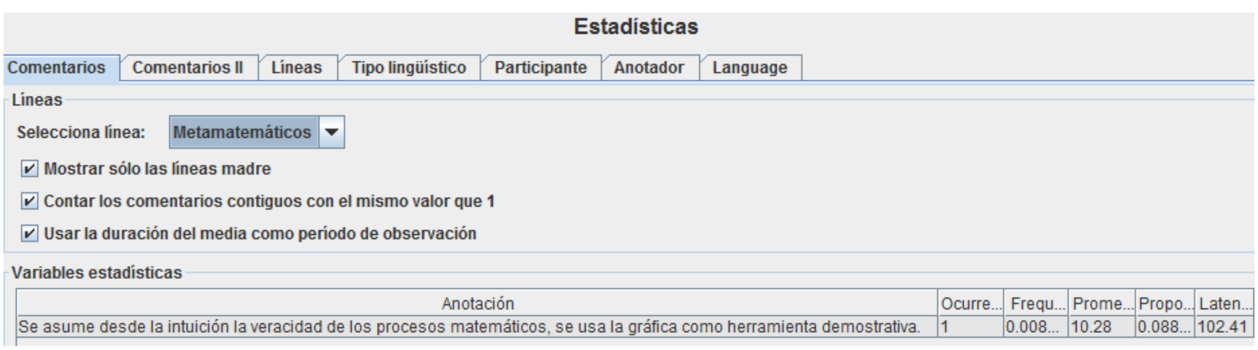
Imagen 18. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo1-2

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 18* son:

1. Hallar el área de las líneas para dividir el área del rectángulo y así hallar la cantidad de líneas en el rectángulo.

2. La suma de áreas de otras figuras son equivalentes al área de la parábola, entonces basta con hallar cada parte y juntarlas.

3. Se hallan promedios de las líneas mostradas que se pueden repetir [los promedios de las longitudes obtenidas].



Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Lineas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Lineas

Selecciona línea: Metamatemáticos

Mostrar sólo las líneas madre

Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

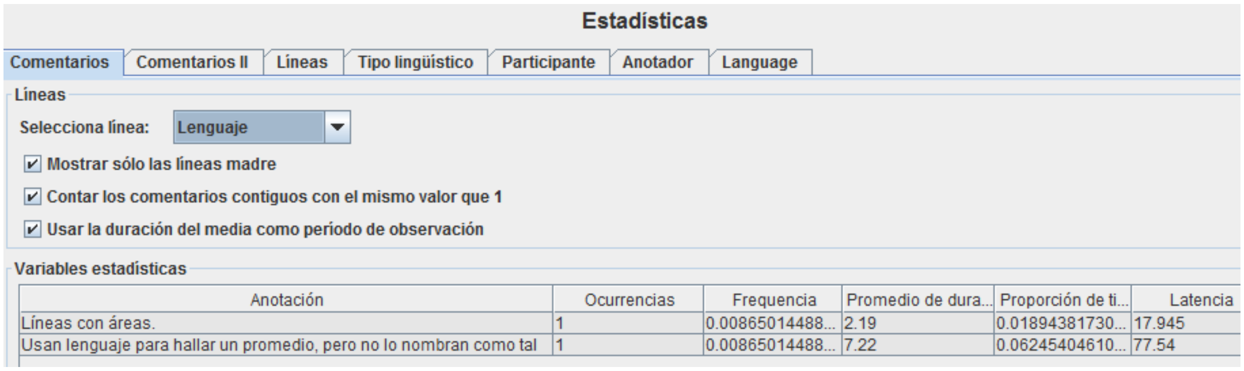
Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurre...	Frequ...	Prome...	Propo...	Laten...
Se asume desde la intuición la veracidad de los procesos matemáticos, se usa la gráfica como herramienta demostrativa.	1	0.008...	10.28	0.088...	102.41

Imagen 19. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo1-2.

El comentario de Puntos de vista meta-matemáticos, en la *Imagen 19* es: Se asume desde la institución la verdad de los procesos matemáticos, se usa la gráfica como herramienta demostrativa.

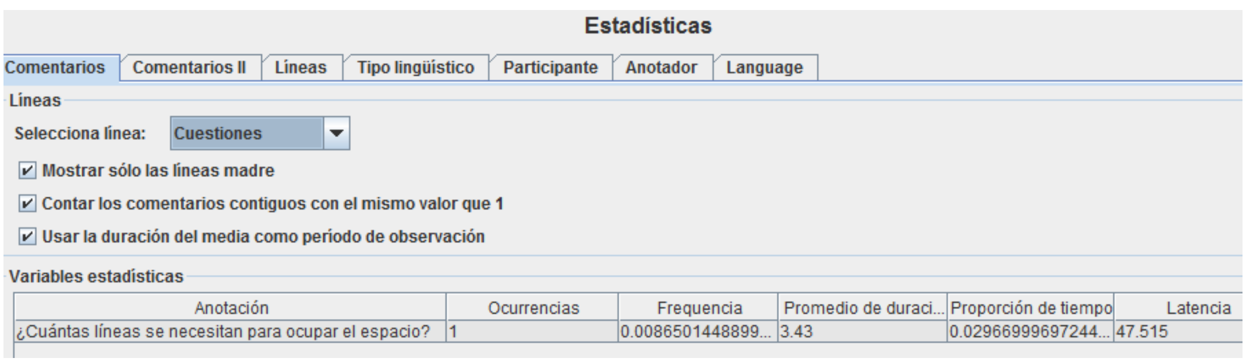


Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de dura...	Proporción de ti...	Latencia
Líneas con áreas.	1	0.00865014488...	2.19	0.01894381730...	17.945
Usan lenguaje para hallar un promedio, pero no lo nombran como tal	1	0.00865014488...	7.22	0.06245404610...	77.54

Imagen 20. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo1-2.

Los comentarios de Lenguaje, en el mismo orden de la *Imagen 20* son:

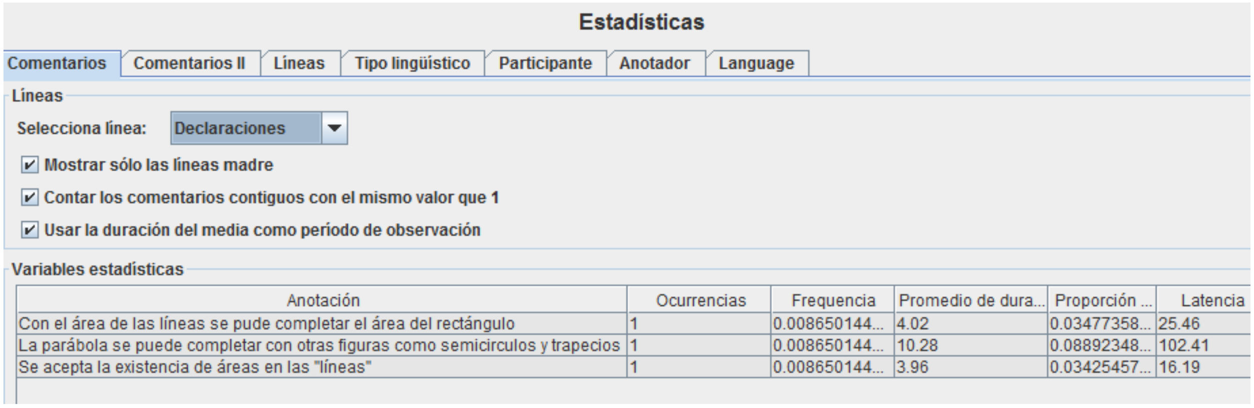
1. Líneas con áreas.
2. Usan lenguaje para hallar promedio pero no lo nombran como tal.



Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de duraci...	Proporción de tiempo	Latencia
¿Cuántas líneas se necesitan para ocupar el espacio?	1	0.0086501448899...	3.43	0.02966999697244...	47.515

Imagen 21. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. Grupo 1-2.

El comentario de Conjunto de declaraciones aceptadas, en la *Imagen 21* es: ¿Cuántas líneas se necesitan para ocupar el espacio?



Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de dura...	Proporción ...	Latencia
Con el área de las líneas se pude completar el área del rectángulo	1	0.008650144...	4.02	0.03477358...	25.46
La parábola se puede completar con otras figuras como semicirculos y trapecios	1	0.008650144...	10.28	0.08892348...	102.41
Se acepta la existencia de áreas en las "líneas"	1	0.008650144...	3.96	0.03425457...	16.19

Imagen 22. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 1-2.

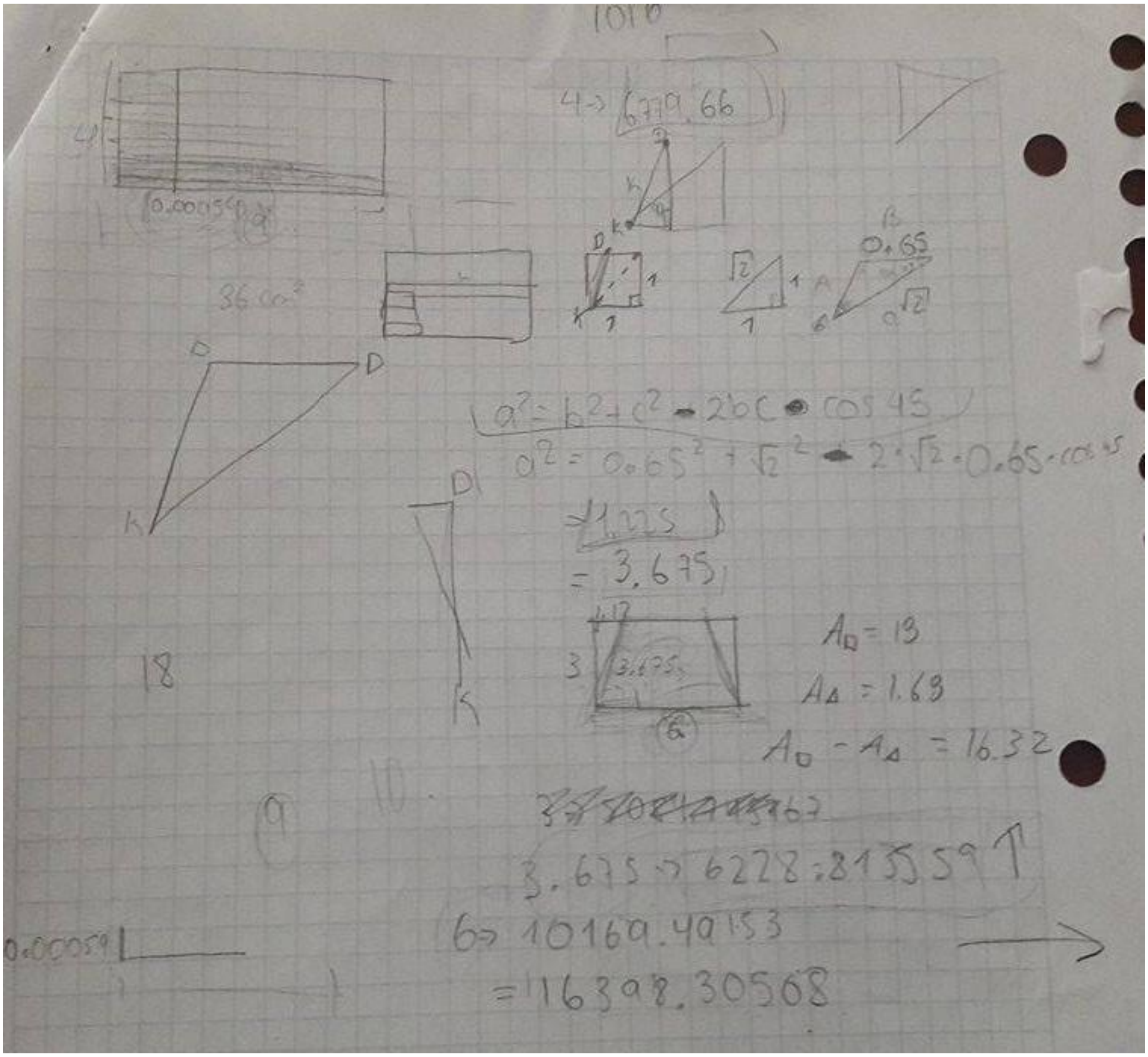
Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 22* son:

1. Con el área de las líneas se puede completar el área de los rectángulos.
2. Las parábolas se pueden completar con otras figuras como semicírculos y trapecios.
3. Se acepta la existencia del área en las líneas.

En el caso del caso del Grupo 1-2 hubo un especial enfoque en la cantidad de líneas que se precisan para completar los espacios que se les pedían, las estudiantes hicieron un gran esfuerzo en especificar el proceso de la cantidad de líneas en el rectángulo o la parábola.

En el siguiente grupo, se evidenciará el uso de algunos principios trigonométricos, para hallar algunas medidas, que en son ineficientes hacia el problema, dado a que no lo conectan con el resto de las ideas que quieren llevar a cabo, sin embargo hay algunos apartes por rescatar, este fue denominado como Grupo 1-3.

Como primera medida para hallar la cantidad de líneas que se necesitaban no usaron la línea como área, en este caso tomó el rumbo de ser solo un espacio unidimensional, sin embardo en el ítem c. hacen un aporte muy valioso, al igual que los anteriores grupos dicen encontrar la longitud de la línea por promedios, que para hallar el largo van "a ir dividiendo, ir dividiendo…y así para encontrar todas las líneas", esta afirmación le da a este grupo una aproximación más cercana a los límites con respecto a los grupos anteriores, el hecho relevante acá es visión de la repetición de una acción dicho tácitamente para encontrar todos los valores de las longitudes.



Fotografía 4. Desarrollos del Grupo 1-3, para conseguir resolver las situaciones.

En el estudio realizado desde el ELAN se encuentran las siguientes estadísticas generales:

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

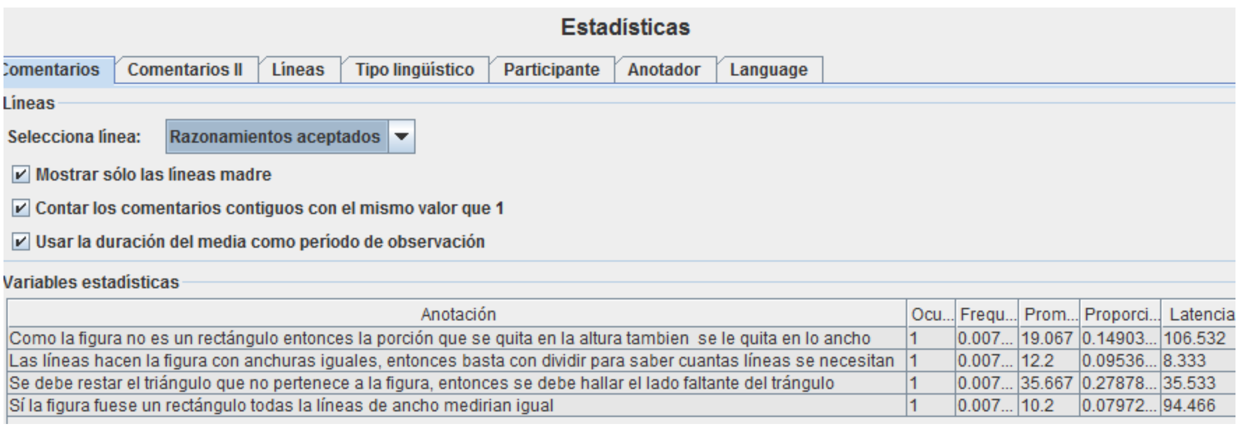
Variables estadísticas

Línea	Número de c...	Duración mín...	Duración má...	Promedio de ...	Duración me...	Duración tota...	Porcentaje d...	Latencia
Meta-matem...	4	8.401	49.603	22.584	16.166	90.336	70.61	6.466
Lenguaje	6	2.667	6.733	4.188834	3.5	25.133	19.645	8.4
Razonamient...	4	10.2	35.667	19.283501	15.633	77.134	60.291	8.333
Cuestiones	3	11.401	19.801	15.156333	14.267	45.469	35.54	6.999
Declaraciones	4	5.201	12.4	8.65025	8.5	34.601	27.046	6.133

Imagen 23. Estadísticas generales del Grupo 1-3.

Los datos que arroja ELAN muestran que hay 6 comentarios a destacar en el componente la categoría de lenguaje, los porcentajes de tiempo en los que se puede evidenciar alguna de los componentes resalta a puntos de vista meta-matemáticos y al CRA, en el que los porcentajes del tiempo de la grabación dedicados a estos fueron de 70,6% y 60,3% respectivamente. Este fue un grupo que alcanzó a desarrollar con cierta profundidad la tarea.

Las estadísticas por componente fueron:



Anotación	Ocu...	Frequ...	Prom...	Proporci...	Latencia
Como la figura no es un rectángulo entonces la porción que se quita en la altura tambien se le quita en lo ancho	1	0.007...	19.067	0.14903...	106.532
Las líneas hacen la figura con anchuras iguales, entonces basta con dividir para saber cuantas líneas se necesitan	1	0.007...	12.2	0.09536...	8.333
Se debe restar el triángulo que no pertenece a la figura, entonces se debe hallar el lado faltante del trángulo	1	0.007...	35.667	0.27878...	35.533
Sí la figura fuese un rectángulo todas la líneas de ancho medirian igual	1	0.007...	10.2	0.07972...	94.466

Imagen 24. Comentarios pertenecientes a Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo1-3.

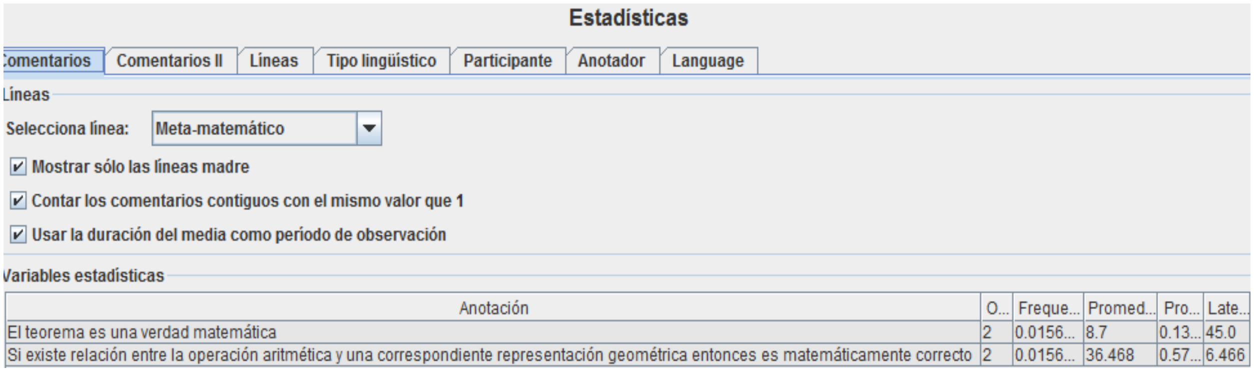
Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 12* son:

1. Como la figura no es un rectángulo entonces la porción que se quita también se le quita a lo ancho.

2. Las líneas hacen la figura con anchuras iguales, entonces basta con dividir para saber cuántas líneas se necesitan.

3. Se debe restar el triángulo que no pertenece a la figura, entonces se debe hallar el lado faltante del triángulo.

4. Si la figura fuese un rectángulo todas las líneas de ancho medirían igual.



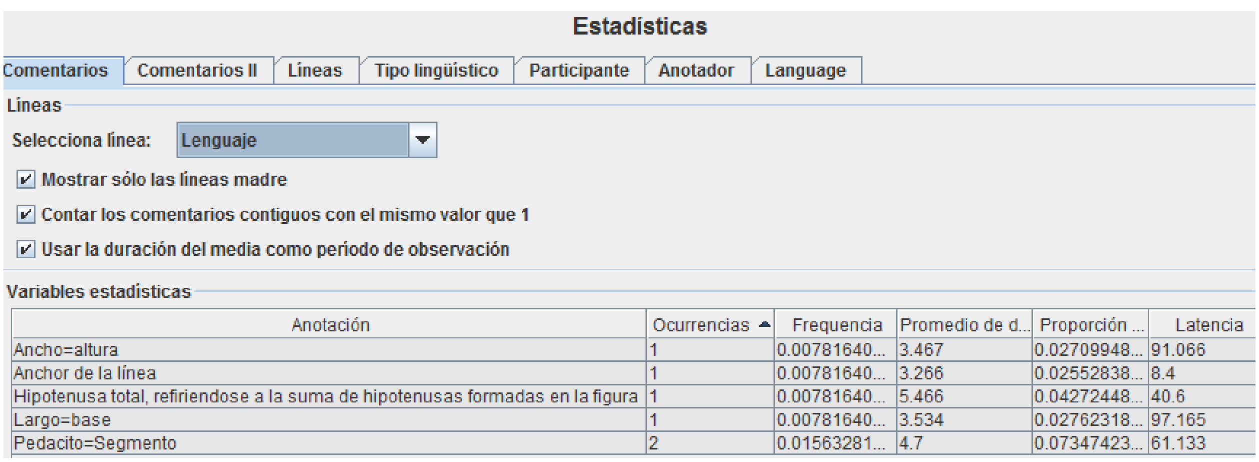
Anotación	O...	Freque...	Promed...	Pro...	Late...
El teorema es una verdad matemática	2	0.0156...	8.7	0.13...	45.0
Si existe relación entre la operación aritmética y una correspondiente representación geométrica entonces es matemáticamente correcto	2	0.0156...	36.468	0.57...	6.466

Imagen 25. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo1-3.

Los comentarios de Puntos de vista meta-matemáticos, en el mismo orden de la *Imagen 25* son:

1. El teorema es una verdad matemática (2 veces).

2. Si existe relación entre la operación y una correspondiente representación geométrica entonces es matemáticamente correcto (2 veces).



Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de d...	Proporción ...	Latencia
Ancho=altura	1	0.00781640...	3.467	0.02709948...	91.066
Anchor de la línea	1	0.00781640...	3.266	0.02552838...	8.4
Hipotenusa total, refiriendose a la suma de hipotenusas formadas en la figura	1	0.00781640...	5.466	0.04272448...	40.6
Largo=base	1	0.00781640...	3.534	0.02762318...	97.165
Pedacito=Segmento	2	0.01563281...	4.7	0.07347423...	61.133

Imagen 26. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo1-3.

Los comentarios de Lenguaje, en el mismo orden de la *Imagen 26* son:

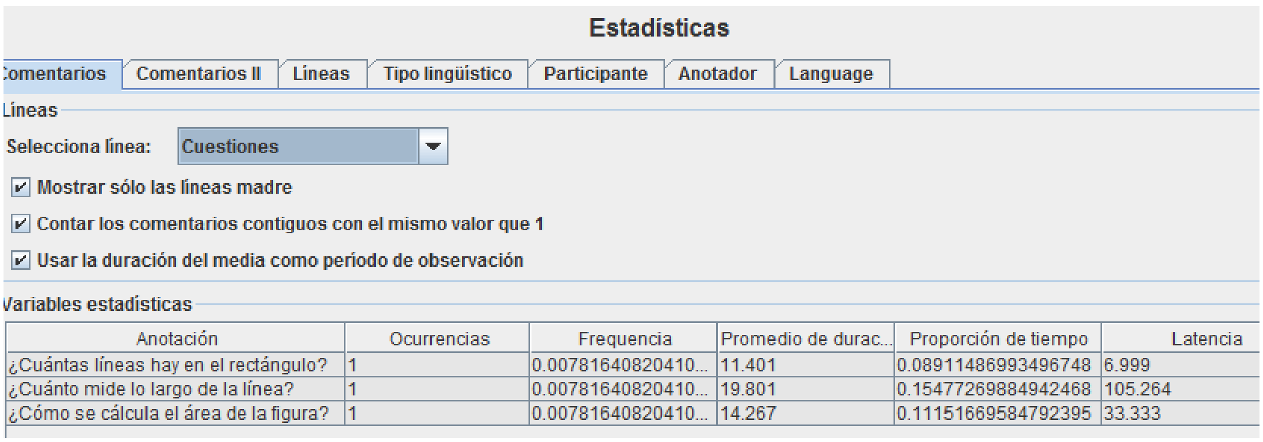
1. Ancho=altura.

2. Ancho de la línea.

3. Hipotenusa total, refiriéndose a la suma de hipotenusas formadas en la figura.

4. Largo=base.

5. Pedacito=segmento (2 veces).



Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Líneas

Selecciona línea: Cuestiones

☑ Mostrar sólo las líneas madre

☑ Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

☑ Usar la duración del media como periodo de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de durac...	Proporción de tiempo	Latencia
¿Cuántas líneas hay en el rectángulo?	1	0.00781640820410...	11.401	0.08911486993496748	6.999
¿Cuánto mide lo largo de la línea?	1	0.00781640820410...	19.801	0.15477269884942468	105.264
¿Cómo se cálcula el área de la figura?	1	0.00781640820410...	14.267	0.11151669584792395	33.333

Imagen 27. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. Grupo 1-3.

Los comentarios de Conjunto de cuestiones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 27* son:

1. ¿Cuántas líneas hay en el rectángulo?

2. ¿Cuánto mide lo largo de la línea?

3. ¿Cómo se calcula el área de una figura?

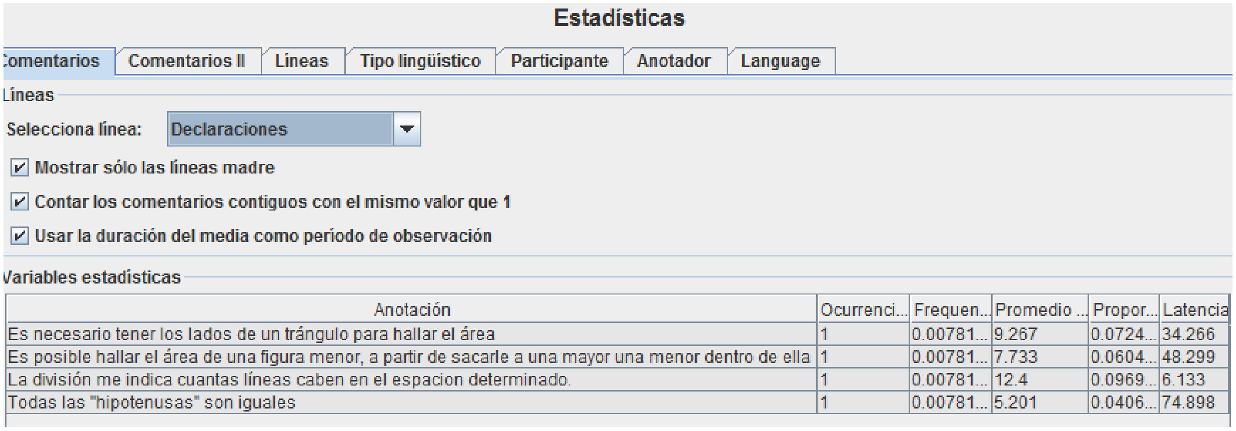


Imagen 28. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 1-3.

Los comentarios de Conjunto de aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 28* son:

1. Es necesario tener el lado de un triángulo para hallar el área.
2. Es posible hallar el área de una figura menor, a partir de sacarle a una mayor una menor dentro de ella.
3. La división me indica cuantas líneas caben en un espacio determinado.
4. Todas las "hipotenusas" son iguales.

Una de las formas interesantes que usó el Grupo 1-3 fue la aproximación a medidas por medio de teoremas trigonométricos, en ello se puede decir que de alguna manera existe una visión de tangente a la parábola, mostrando un método distinto para alcanzar la medida de la curva.

La tabla condensa los resultados del análisis realizado para los tres subgrupos anteriormente presentados, permitiendo una visión de los componentes de las prácticas matemáticas de manera análoga a como se hizo con las prácticas de Wallis y Newton.

Tabla 3.
Relación entre los componentes de la práctica matemática y el trabajo analizado por el determinado Grupo 1

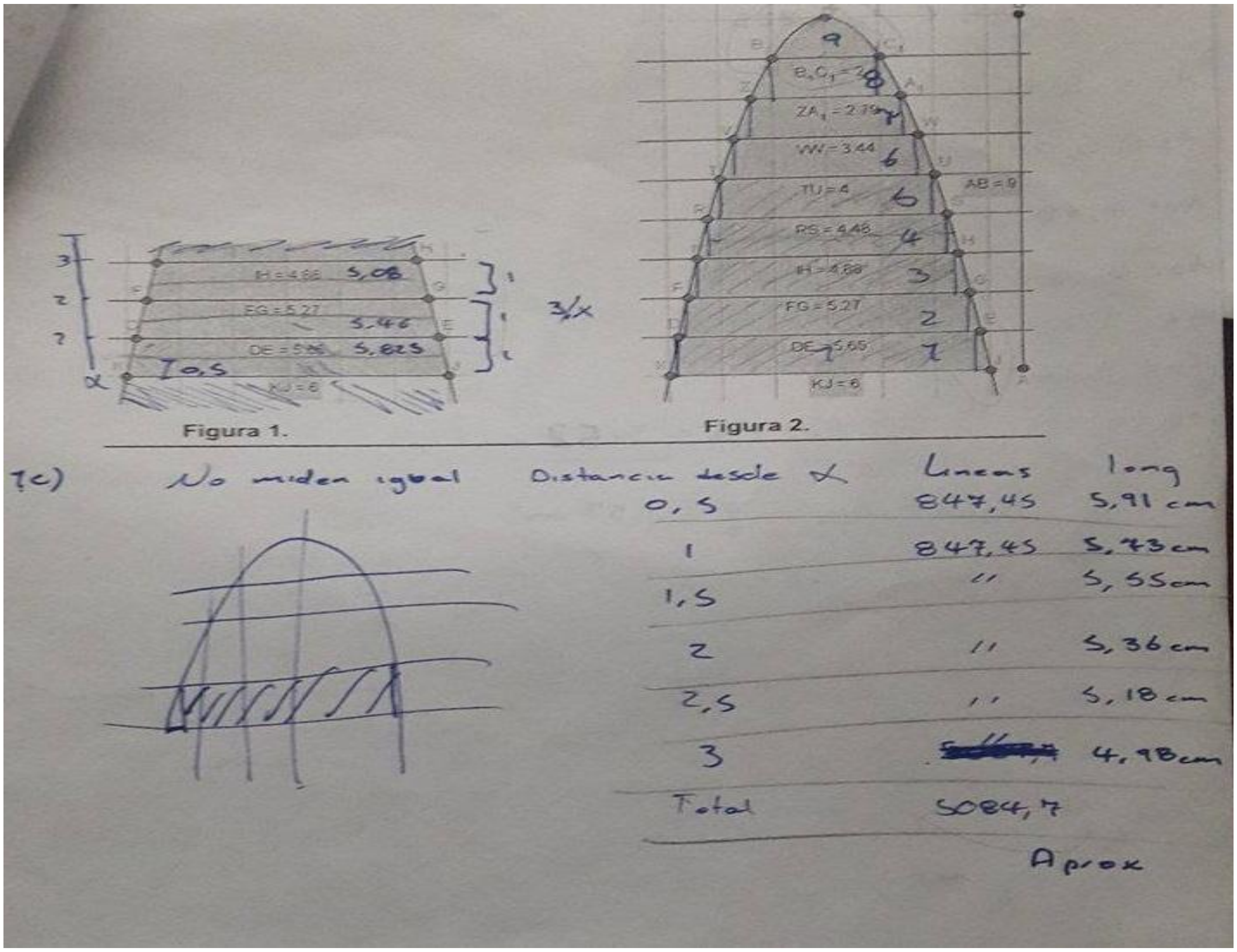
Cinco componentes de la práctica matemática según Kitcher	Aportes en las cuadraturas del "Grupo 1"
Lenguaje	● El nombrar los segmentos fue diversificado, se usaron términos cómo "pedacito" para este fin. ● "Rango" fue una palabra usada para decir un intervalo posible de medida tanto de área como de longitud del ancho. ● El término promedio como la suma de dos términos al dividirlo entre 2. ● Al momento de la sustentación oral, el lenguaje matemático se hace mucho más lejano, sin embargo la mayoría tienen especial cuidado con diferenciar el ancho y el alto, utilizan con regularidad una expresión de partes. ● De diferentes maneras los estudiantes dicen tener la posibilidad de repetir un mismos proceso "muchas veces" ● Las representaciones gráficas sirven como apoyo para determinar un proceso.
Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos	● Para argumentar la idea de sus desarrollos, los estudiantes se sustentan primero en la acción que van a realizar, para posteriormente realizar operaciones, por ejemplo, en primera instancia ven la figura como un elemento proporcional en su decrecimiento de la figura de abajo hacia arriba, así que utilizan promedios para hallar la longitud de una línea que se encuentra en la mitad de otros dos. ● No se utiliza elementos de validación en cuanto la confirmación de esta primera intuición. ● Los teoremas son verdades matemáticas que pueden servir de método intermedio para una finalidad distinta al original.
Conjunto de razonamientos aceptados	● Sí las líneas marcan un espacio sobre la figura dada, entonces es posible completar la figura con líneas adentro. ● El proceso de división o promedios de las longitudes se puede repetir, entonces entre más repeticiones se hagan más próximo es al resultado real
Conjunto de preguntas seleccionadas como importantes	● ¿Cómo puedo ocupar el espacio de una parábola? ● ¿Cómo se puede determinar áreas rectangulares más pequeñas? ● ¿Cómo calcular cualquier punto en una curva?

Conjunto declaraciones aceptadas	● Reconocen que la anchura de la parábola decrece de forma proporcional. ● Las áreas más pequeñas pueden ocupar áreas más grandes, es la generalidad de las declaraciones aceptadas. ● A una colección de líneas aunque sean diferentes todas, se es posible asignar un valor dentro de un “rango”. ● Aceptan que la parábola decrece de forma proporcional. ● Las líneas tangentes a la parábola se aproximas cuanto se quiera en su longitud

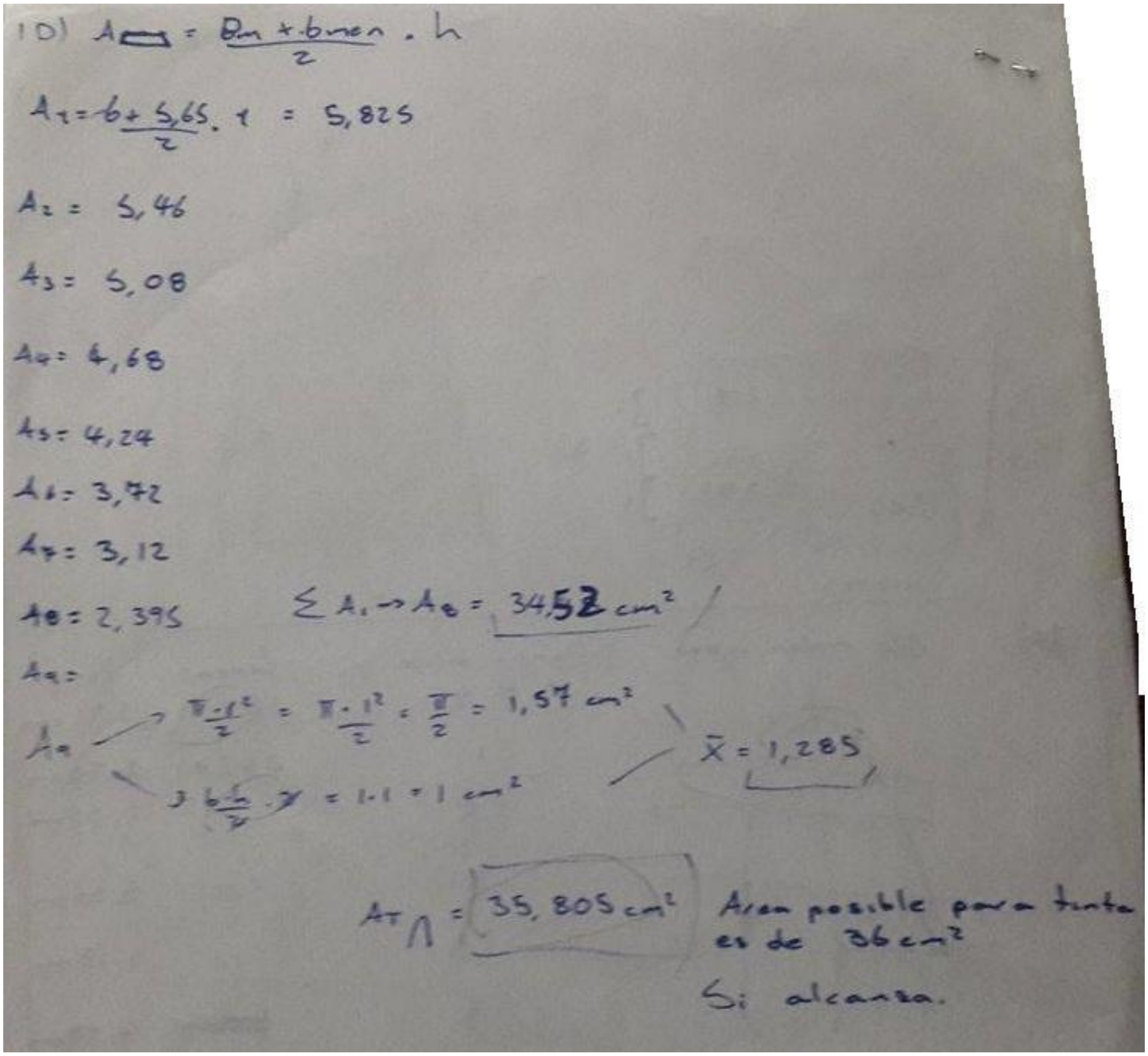
Comprende el trabajo desarrollado por el Grupo 1. Evidencia de la relevancia, del análisis del trabajo matemático para este grupo de estudiantes mediante los componentes de la práctica matemática de Kitcher.

Grupo 2:

En este grupo los estudiantes decidieron tomar la vía de rellenar áreas a partir de otras que ya conocen como lo son trapecios, semicircunferencias, rectángulos y triángulos, algunos con métodos más refinados que otros.



Fotografía 5. Primera parte del desarrollo elaborado por el grupo Grupo 2-1.



Fotografía 6. Segunda parte del trabajo elaborado por el Grupo 2-1.

En el Grupo 2-1, se evidencia su trabajo en las *Fotografías 5* y *6,* en la primera se muestra el desarrollo del ítem c. principalmente, en este se muestran desarrollos muy parecidos a los establecidos por el Grupo 1, en general se realizan particiones buscando la longitud intermedia tomando “rangos” de líneas, entre los lugares no delimitados de la guía.

Por otra parte la razón principal por la que este trabajo aparece en el Grupo 2 es por el detalle que se establece en el ítem d. Pues además de ocupar espacios por medio de trapecios con notación de sumatoria, sin embargo hay una contrariedad en la parte superior de la parábola, entonces decidieron tomar un último trapecio y una semicircunferencia, la primera fue tomada como interna y la segunda como externa, al terminar tomaron el promedio de las dos y lo sumaron al resto de trapecios, esa información esta consignada en la *Fotografía 6*; además utiliza términos como área bajo la curva y completar el área de la parábola.

En el estudio realizado desde el ELAN se para el Grupo 2-1 se encuentran las siguientes estadísticas generales:

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

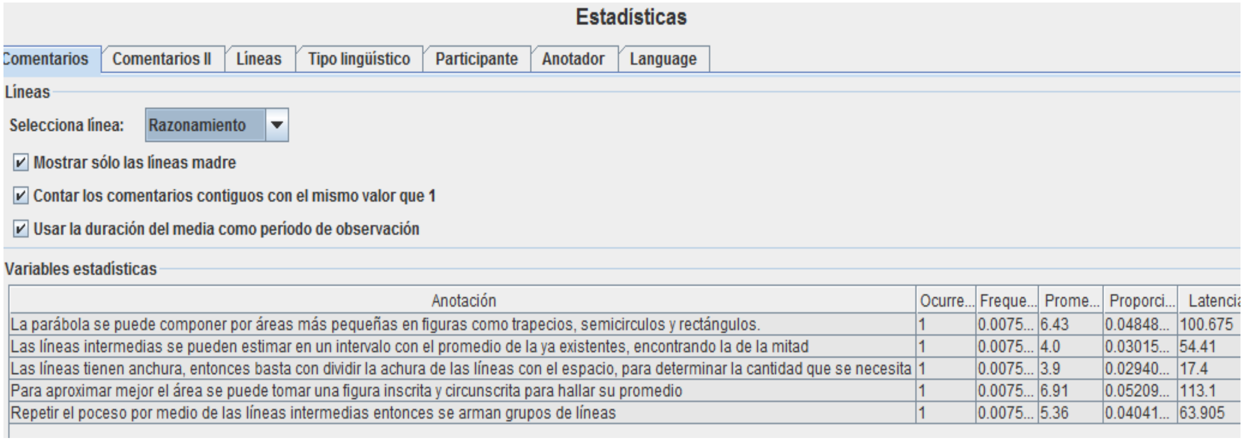
Variables estadísticas

Línea	Número de c...	Duración mín...	Duración máx...	Promedio de ...	Duración me...	Duración total...	Porcentaje de...	Latencia
Meamatemáti...	1	6.58	6.58	6.58	6.58	6.58	4.961	12.38
Lenguaje	4	2.79	4.63	3.6	3.49	14.4	10.857	12.94
Razonamiento	5	3.9	6.91	5.32	5.36	26.6	20.055	17.4
Cuestiones	3	2.77	5.82	4.613334	5.25	13.84	10.435	11.79
Declaraciones	4	3.01	4.99	3.82	3.64	15.28	11.521	15.375

Imagen 29. Estadísticas generales del Grupo 2-1.

Los datos que arroja ELAN muestran que hay 5 comentarios a destacar en la categoría de CRA, asimismo 4 en conjunto de declaraciones aceptadas y lenguaje, los porcentajes de tiempo en los que se puede evidenciar algunas de los componentes sobresale el CRA, en el que los porcentajes en el tiempo de la grabación fue de 20%, este fue un grupo que alcanzó a desarrollar con cierta profundidad la tarea, alcanzando a explicar algunos procesos con precisión.

Las estadísticas por componente fueron:



Anotación	Ocurre...	Freque...	Prome...	Proporci...	Latencia
La parábola se puede componer por áreas más pequeñas en figuras como trapecios, semicirculos y rectángulos.	1	0.0075...	6.43	0.04848...	100.675
Las líneas intermedias se pueden estimar en un intervalo con el promedio de la ya existentes, encontrando la de la mitad	1	0.0075...	4.0	0.03015...	54.41
Las líneas tienen anchura, entonces basta con dividir la achura de las líneas con el espacio, para determinar la cantidad que se necesita	1	0.0075...	3.9	0.02940...	17.4
Para aproximar mejor el área se puede tomar una figura inscrita y circunscrita para hallar su promedio	1	0.0075...	6.91	0.05209...	113.1
Repetir el poceso por medio de las líneas intermedias entonces se arman grupos de líneas	1	0.0075...	5.36	0.04041...	63.905

Imagen 30. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo 2-1.

Los comentarios de la *Imagen 30* son:

1. La parábola se pueden componer por áreas más pequeñas en figuras como trapecios, semicírculos y rectángulos.
2. Las líneas intermedias se pueden estimar en un intervalo con el promedio de la ya existente, encontrando la mitad.
3. Las líneas tienen anchura, entonces basta con dividir la anchura de las líneas con espacio, para determinar la cantidad necesaria.
4. Para aproximar mejor el área se puede tomar una figura inscrita y circunscrita para hallar el promedio.
5. Repetir el proceso por medio de las líneas intermedias entonces se arman grupos de líneas.

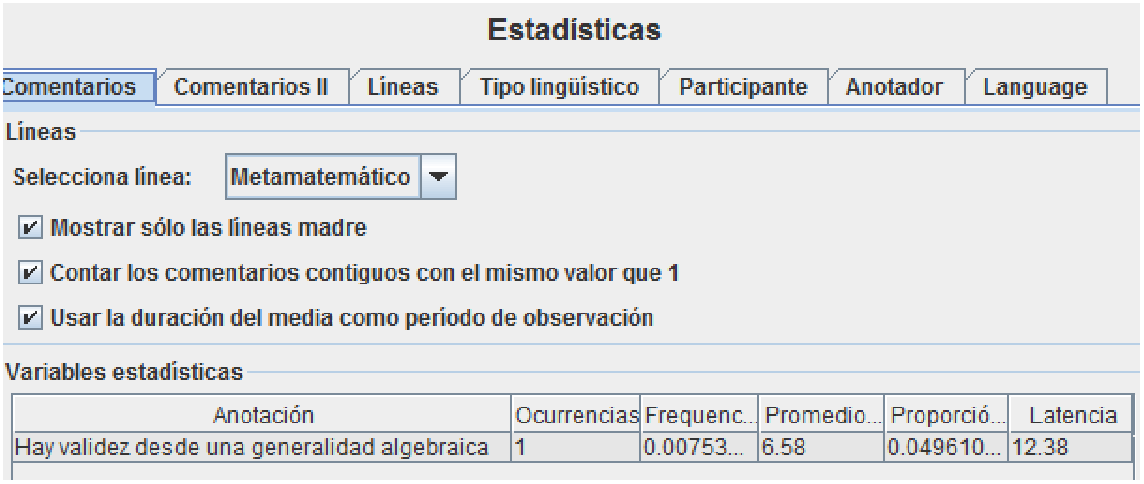


Imagen 31. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo 2-1.

El comentario de Puntos de vista meta-matemáticos, en la *Imagen 31* es: Hay validez desde la generalidad algebraica.

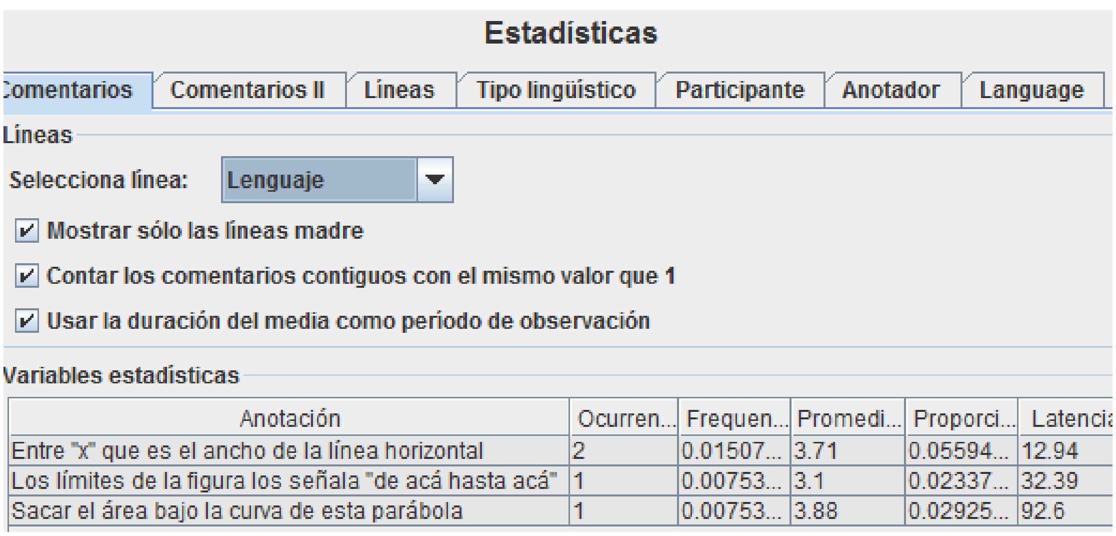


Imagen 32. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo2-1.

Los comentarios de Lenguaje, en el mismo orden de la *Imagen 32* son:

1. Entre “x” que es el ancho de la línea horizontal.
2. Los límites de la figura los señala “de acá hasta acá”

3. Sacar el área bajo la curva de esta parábola.

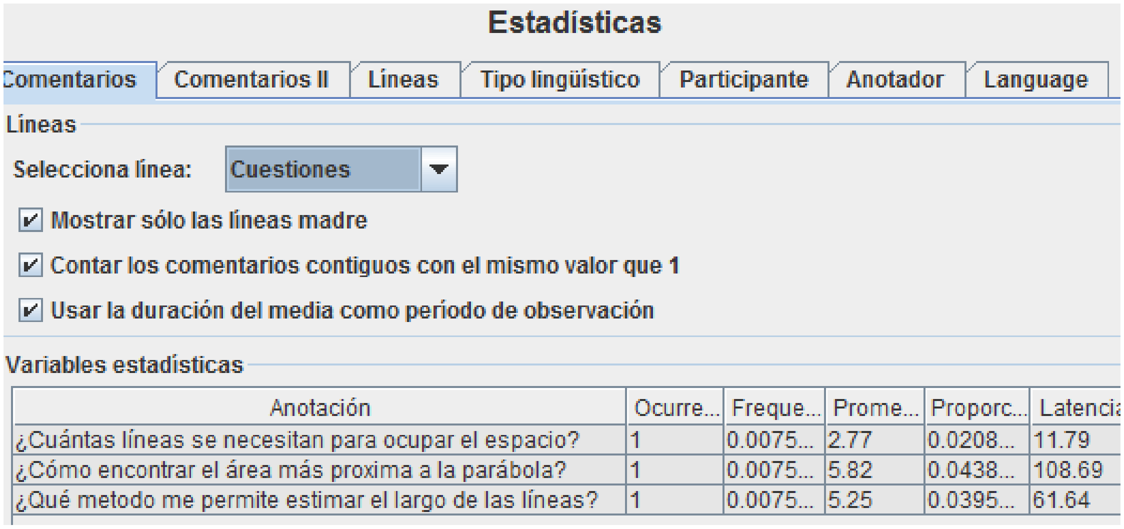


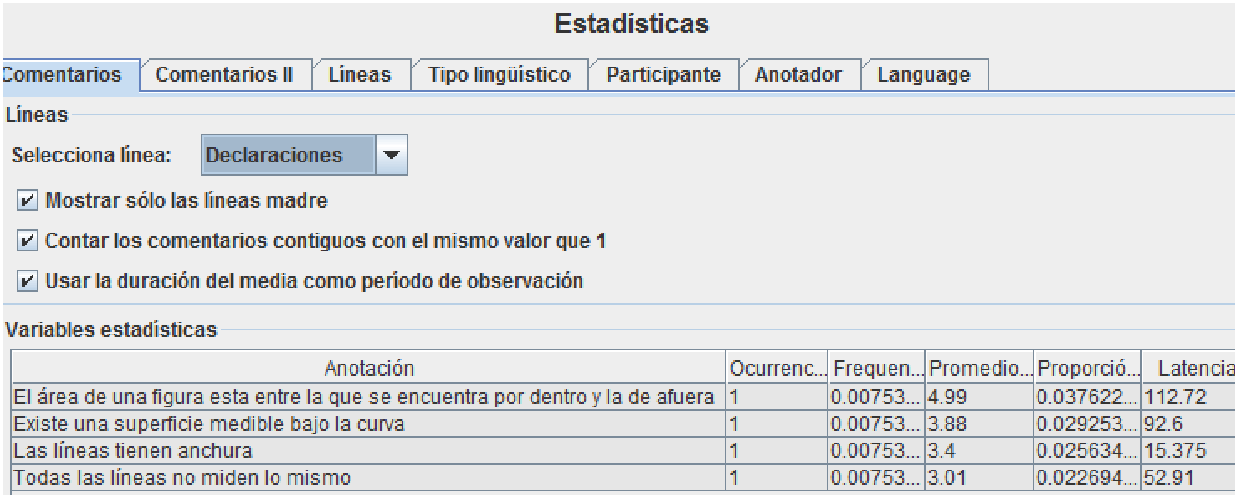
Imagen 33. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. Grupo 2-1.

Los comentarios de Conjunto de cuestiones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 33* son:

1. ¿Cuántas líneas se necesitan para ocupar un espacio?

2. ¿Cómo encontrar el área más próxima a la parábola?

3. ¿Que método me permite estimar el largo de las líneas?



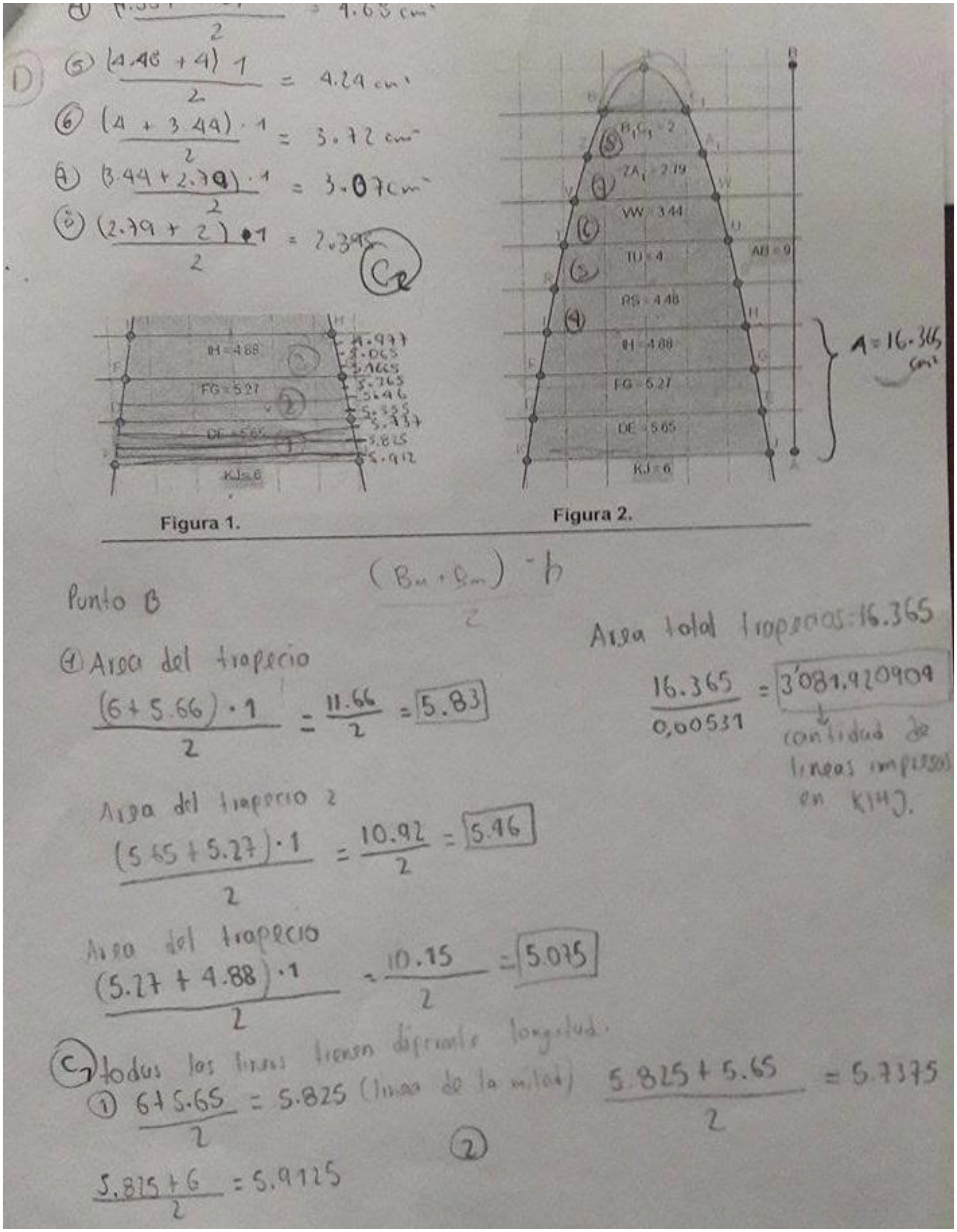
Anotación	Ocurrenc...	Frequen...	Promedio...	Proporció...	Latencia
El área de una figura esta entre la que se encuentra por dentro y la de afuera	1	0.00753...	4.99	0.037622...	112.72
Existe una superficie medible bajo la curva	1	0.00753...	3.88	0.029253...	92.6
Las líneas tienen anchura	1	0.00753...	3.4	0.025634...	15.375
Todas las líneas no miden lo mismo	1	0.00753...	3.01	0.022694...	52.91

Imagen 34. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 2-1.

El Grupo 2-1 destaca por unos nuevos elementos en el lenguaje, utiliza una escritura más algebraica, se usan términos como “x” y símbolos como la sumatoria.

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 34* son:

1. El área de una figura está entre la que se encuentra por dentro y la que se encuentra por fuera.
2. Existe una superficie medible bajo la curva.
3. Las líneas tienen anchura.
4. Todas las líneas no miden lo mismo.

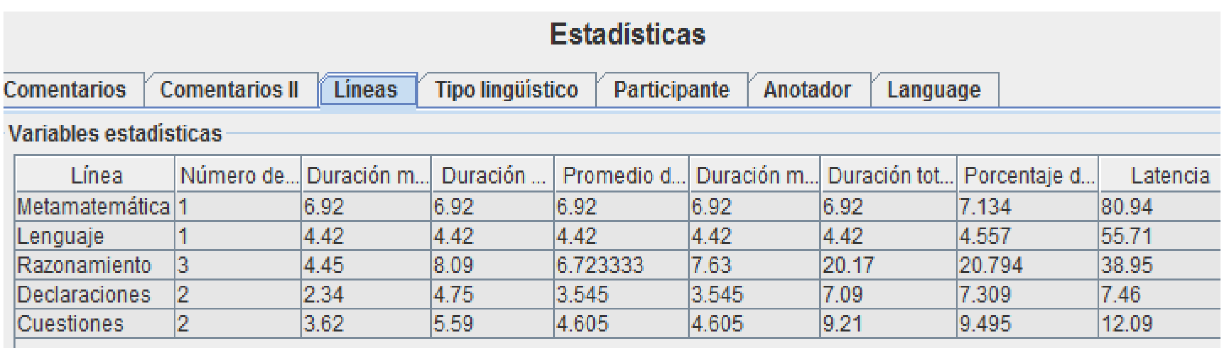


Fotografía 7. Orden de los trapecios que ocupan la parábola por el Grupo 2-2.

La *Fotografía 7* se muestra elaboraciones del Grupo 2-2. Aparecen desarrollos parecidos a los del Grupo 2-1. En una primera instancia en el ítem c. dicen implementar “rangos de líneas”; es decir, agrupan líneas de anchuras semejantes. Dentro de las representaciones hechas, asumen una cantidad importante de líneas horizontales, tienden a simular la interpretación de la existencia de muchas más líneas que las que demarcan como “rangos de líneas”.

En el ítem d. los estudiantes hacen suma de trapecios, con el aporte que nombran cada uno de los trapecios en orden ascendente con respecto la orientación de la hoja, evidenciándolos entre la *Figura 2*, este le brinda una mejora de orden con respecto al Grupo 2-1, sin embargo no consideran el margen de error que hay entre las figuras, sino la asumen como una figura que debe ser lo suficiente cercana como para obtener una aproximación válida.

Al examinar el ELAN para el Grupo 2-2 se encuentran las siguientes estadísticas generales:



Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

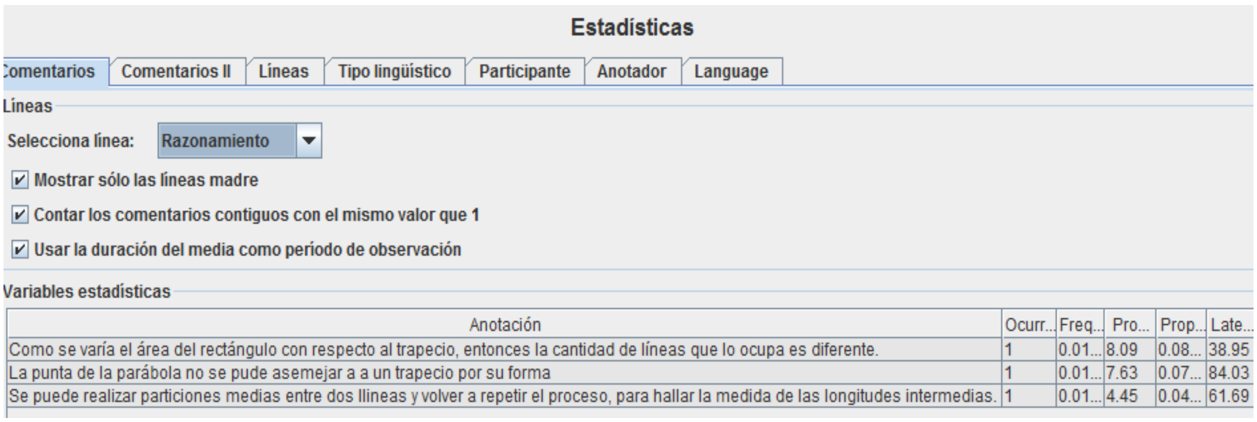
Variables estadísticas

Línea	Número de...	Duración m...	Duración ...	Promedio d...	Duración m...	Duración tot...	Porcentaje d...	Latencia
Metamatemática	1	6.92	6.92	6.92	6.92	6.92	7.134	80.94
Lenguaje	1	4.42	4.42	4.42	4.42	4.42	4.557	55.71
Razonamiento	3	4.45	8.09	6.723333	7.63	20.17	20.794	38.95
Declaraciones	2	2.34	4.75	3.545	3.545	7.09	7.309	7.46
Cuestiones	2	3.62	5.59	4.605	4.605	9.21	9.495	12.09

Imagen 35. Estadísticas generales del Grupo 2-2.

Los datos que se obtienen en el ELAN muestran que hay 3 comentarios a destacar en la categoría de CRA, asimismo 2 en conjunto de declaraciones aceptadas y conjunto de cuestiones aceptadas como importantes, los porcentajes de tiempo en los que se puede evidenciar algunas de los componentes sobresale el CRA, en el que los porcentajes en el tiempo de la grabación fue de 20%, este grupo escribe de manera abreviada las iteraciones de los procesos que dan intervalos más pequeños.

Las estadísticas por componente fueron:



Anotación	Ocurr...	Freq...	Pro...	Prop...	Late...
Como se varía el área del rectángulo con respecto al trapecio, entonces la cantidad de líneas que lo ocupa es diferente.	1	0.01...	8.09	0.08...	38.95
La punta de la parábola no se pude asemejar a a un trapecio por su forma	1	0.01...	7.63	0.07...	84.03
Se puede realizar particiones medias entre dos llineas y volver a repetir el proceso, para hallar la medida de las longitudes intermedias.	1	0.01...	4.45	0.04...	61.69

Imagen 36. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo 2-2.

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 36* son:

1. Cómo se varía el área del rectángulo con respecto al trapecio, entonces la cantidad de líneas que lo ocupa es diferente.

2. La punta de la parábola no se puede asemejar a un trapecio por su forma.
3. Se puede realizar particiones medias entre dos líneas y volver a repetir el proceso, para hallar la medida de las longitudes intermedias.

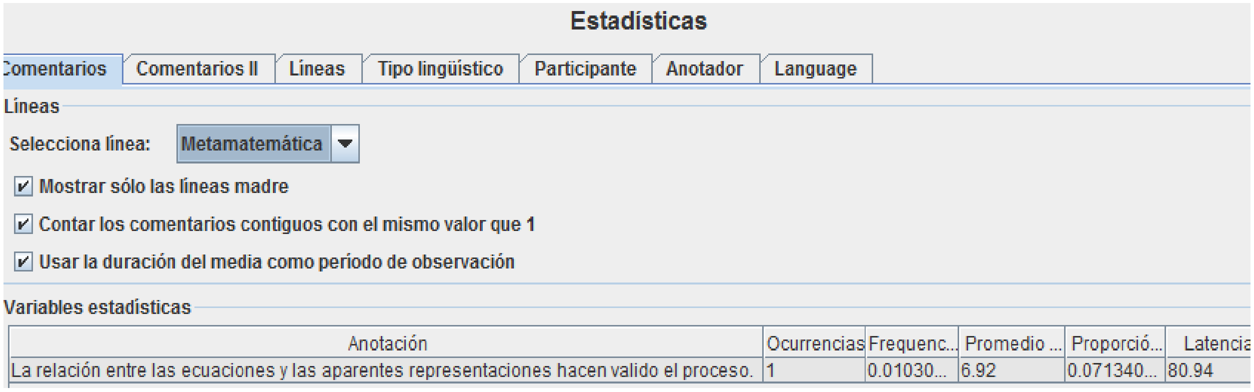


Imagen 37. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo 2-2.

El comentario de Puntos de vista meta-matemáticos, en la Imagen 37 es: La relación entre las ecuaciones y las aparentes representaciones hacen válido el proceso.

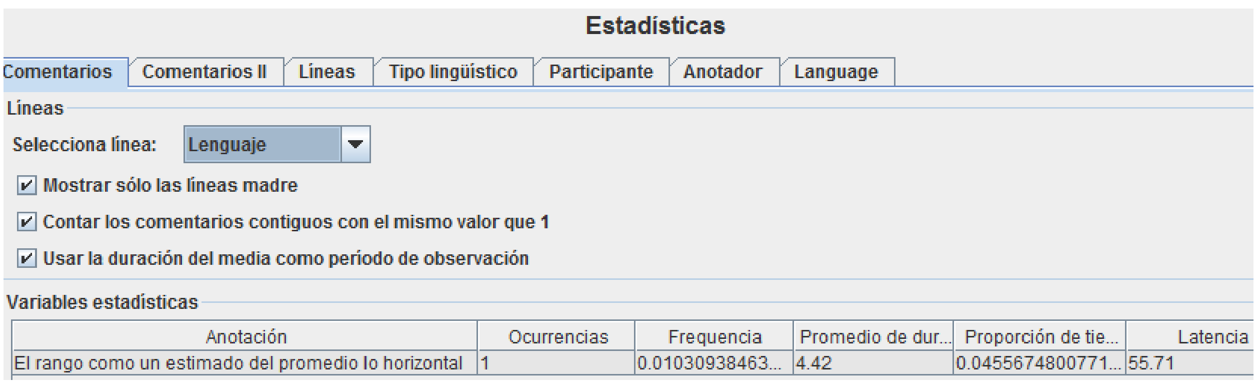
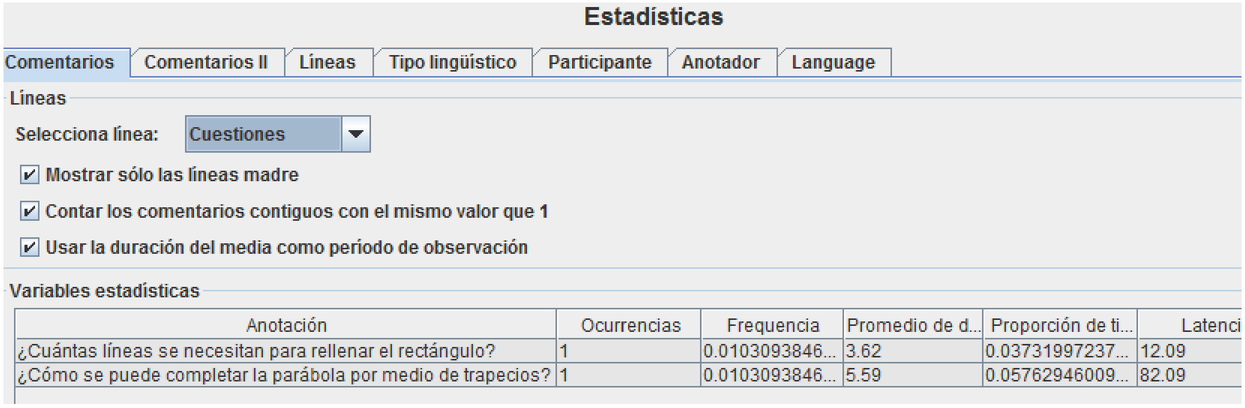


Imagen 38. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo2-2.

El comentario de Lenguaje, en el mismo orden de la *Imagen 38* es:

1. El rango como un estimado promedio lo horizontal.

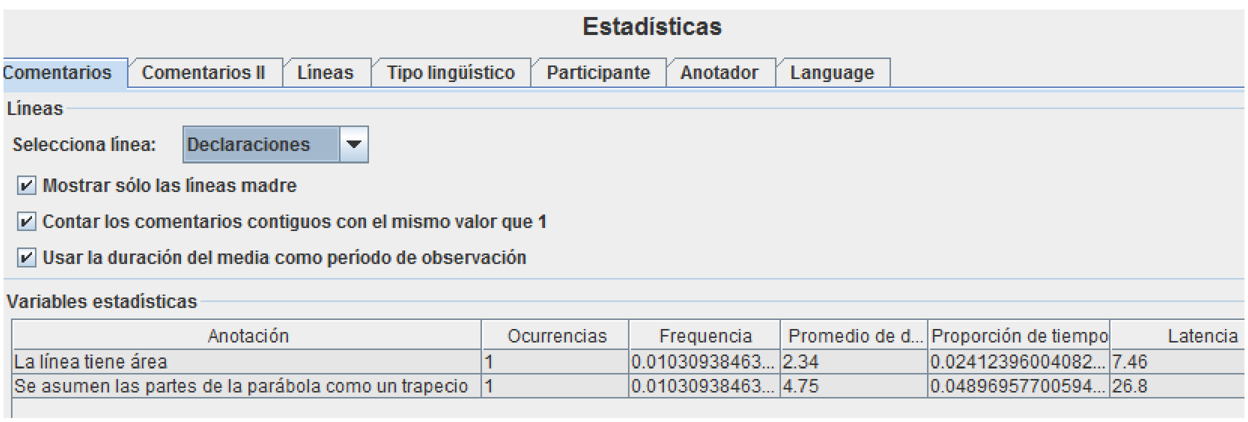


Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de d...	Proporción de ti...	Latenci
¿Cuántas líneas se necesitan para rellenar el rectángulo?	1	0.0103093846...	3.62	0.03731997237...	12.09
¿Cómo se puede completar la parábola por medio de trapecios?	1	0.0103093846...	5.59	0.05762946009...	82.09

Imagen 39. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. Grupo 2-2.

Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en la *Imagen 39* son:

1. ¿Cuántas líneas se necesitan para rellenar el rectángulo?
2. ¿Cómo se puede complementar la parábola por medio de trapecios?



Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de d...	Proporción de tiempo	Latencia
La línea tiene área	1	0.01030938463...	2.34	0.02412396004082...	7.46
Se asumen las partes de la parábola como un trapecio	1	0.01030938463...	4.75	0.04896957700594...	26.8

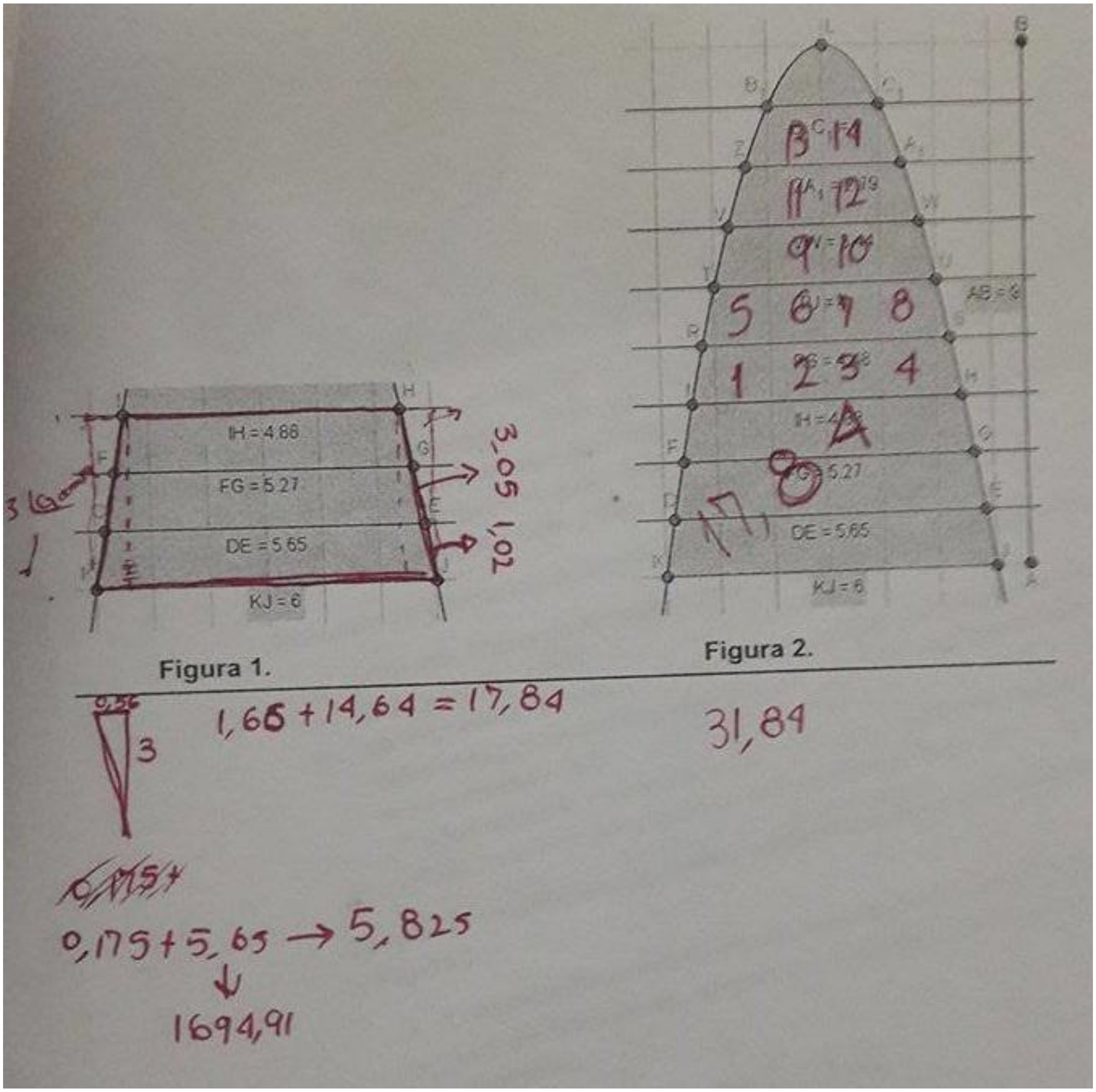
Imagen 40. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 2-2.

Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en el mismo orden de la Imagen 40 son:

1. La línea tiene área.
2. Se asumen las partes de la parábola como un trapecio.

El Grupo 2-2, utiliza una base procedimental de los trapecios, en cuanto las áreas que se puede estimar en el desarrollo del recubrimiento del área, sin embargo existe un reconocimiento a figuras que pueden ser mejor para completar la parábola, sobre todo cuando llegan a la parte superior de la parábola.

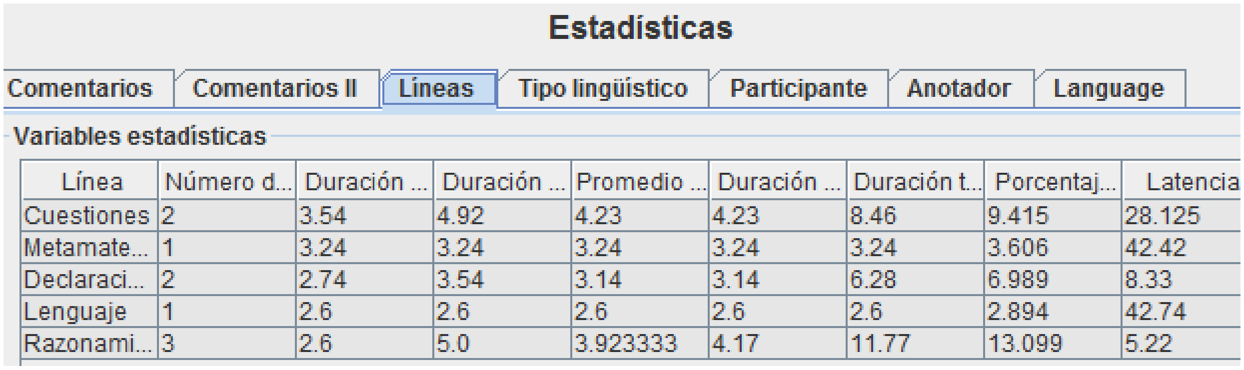
El último de esta parte Grupo 2-3 parece tener el desarrollo incompleto en cuanto a completar la parábola con cuadrados y triángulos.



Fotografía 9. Grupo 2-3, realiza un recubrimiento de áreas por cuadrados y triángulos.

En la *Fotografía 9*, el grupo muestra una nueva faceta de recubrimiento, En la explicación de su trabajo, se muestra en el ítem a. reconocen la línea como forma de llenar un área, mientras que en el ítem d. aprovechan la cuadrícula para encontrar de forma más rápida a un número aproximado del área.

Al estudiar el ELAN para el Grupo 2-3 se encuentran las siguientes estadísticas generales:

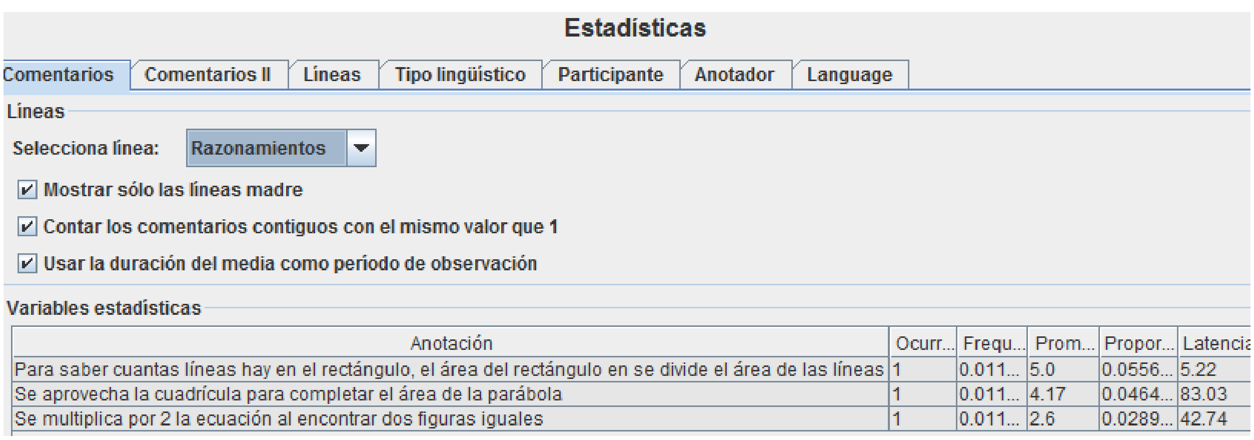


Línea	Número d...	Duración ...	Duración ...	Promedio ...	Duración ...	Duración t...	Porcentaj...	Latencia
Cuestiones	2	3.54	4.92	4.23	4.23	8.46	9.415	28.125
Metamate...	1	3.24	3.24	3.24	3.24	3.24	3.606	42.42
Declaraci...	2	2.74	3.54	3.14	3.14	6.28	6.989	8.33
Lenguaje	1	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.894	42.74
Razonami...	3	2.6	5.0	3.923333	4.17	11.77	13.099	5.22

Imagen 41. Estadísticas generales del Grupo 2-3.

Los datos que se obtienen en el ELAN muestran que hay 3 comentarios a destacar en la categoría de CRA, asimismo 2 en conjunto de declaraciones aceptadas y conjunto de cuestiones aceptadas como importantes, los porcentajes de tiempo en los que se puede evidenciar algunas de los componentes sobresale el CRA, en el que los porcentajes en el tiempo de la grabación fue de 13%.

Las estadísticas por componente fueron:



Anotación	Ocurr...	Frequ...	Prom...	Propor...	Latencia
Para saber cuantas líneas hay en el rectángulo, el área del rectángulo en se divide el área de las líneas	1	0.011...	5.0	0.0556...	5.22
Se aprovecha la cuadrícula para completar el área de la parábola	1	0.011...	4.17	0.0464...	83.03
Se multiplica por 2 la ecuación al encontrar dos figuras iguales	1	0.011...	2.6	0.0289...	42.74

Imagen 42. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo 2-3.

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 42* son:

1. Para saber cuántas líneas hay en el rectángulo, el área del rectángulo se divide el área de las líneas.

2. Se aprovecha la cuadrícula para completar el área de la parábola.

3. Se multiplica por 2 la ecuación al encontrar dos figuras iguales.

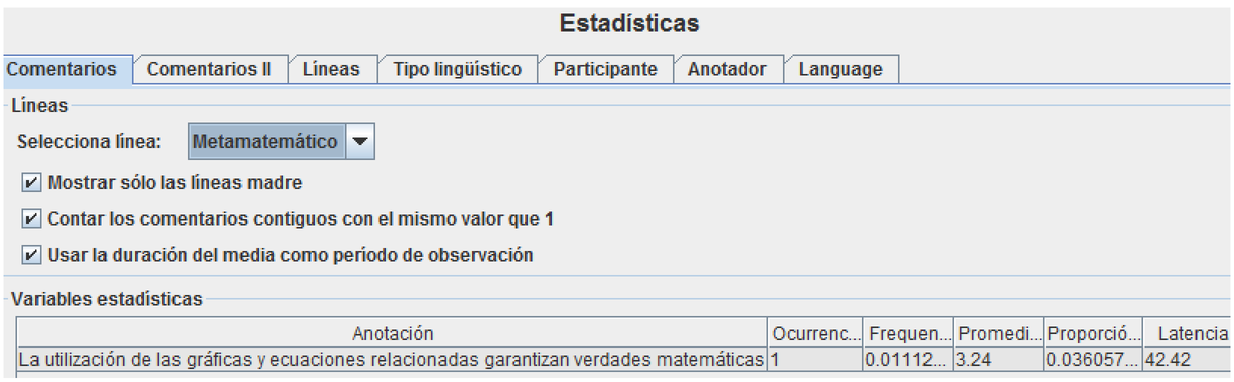


Imagen 43. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo 2-3.

El comentario de Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos, *Imagen 43* es: La utilización de las gráficas y ecuaciones relacionadas garantizan verdades matemáticas.

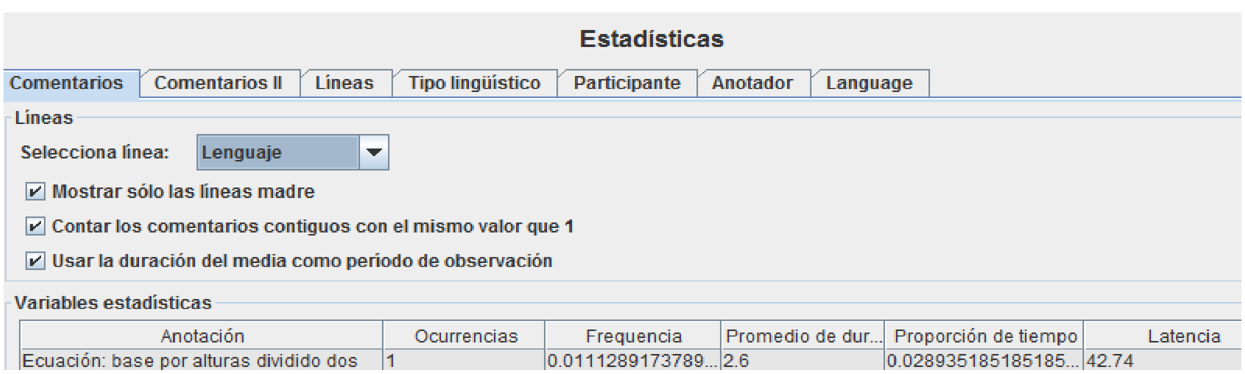


Imagen 44. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo 2-3.

El comentario de Conjunto de puntos de vista del lenguaje, *Imagen 44* es: Ecuación: base por altura dividido dos.

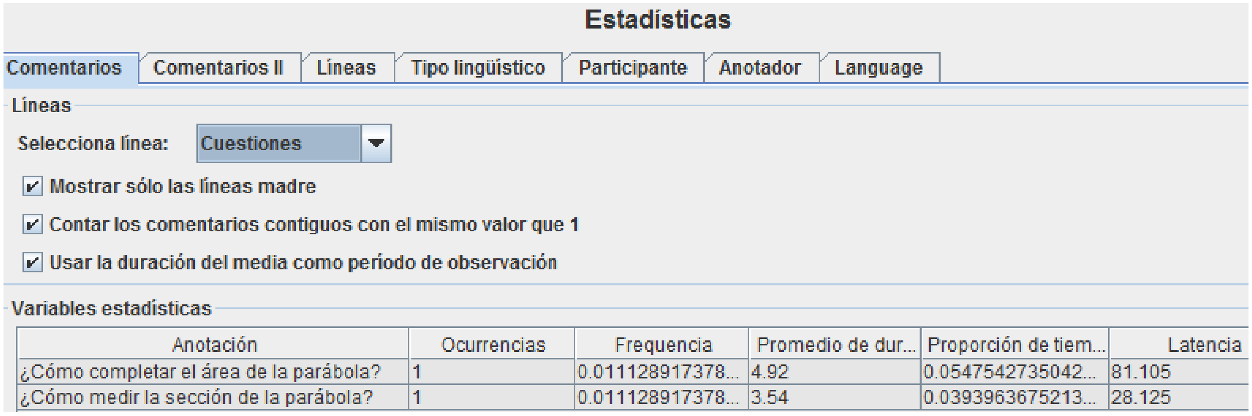


Imagen 45. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. Grupo 2-3.

Los comentarios de Conjunto de cuestiones aceptadas, en el mismo orden de la Imagen 45 son:

1. ¿Cómo completar el área de la parábola?
2. ¿Cómo medir la sección de la parábola?

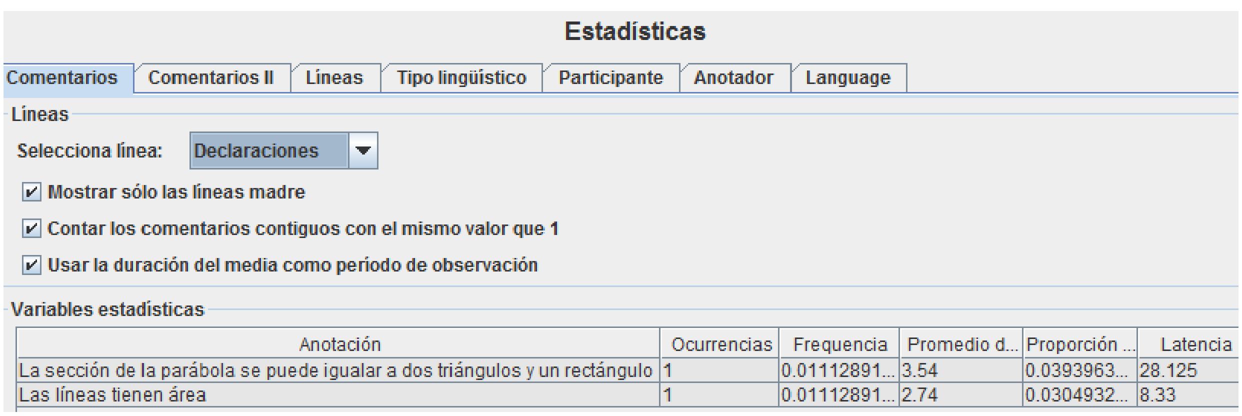


Imagen 46. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 2-3.

Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 46* son:

1. La sección de la parábola se puede igualar a dos triángulos y un rectángulo.
2. Las líneas tiene área.

La tabla 4 condensa las generalidades del Grupo 2 sobre los componentes de las prácticas matemáticas.

Tabla 4.
Relación entre los componentes de la práctica matemática y el trabajo estudiado del Grupo 2 de estudiantes.

Cinco componentes de la práctica matemática según Kitcher	**Grupo 2**
Lenguaje	● Usan ecuaciones para generalizar procesos de áreas con triángulos, rectángulos y trapecios. ● La sumatoria aparece en la escritura del Grupo 2-2 ● La escritura de la "x" como representación de las diferentes anchuras, esto en el Grupo 2-2. ● Al momento de la sustentación oral, el lenguaje matemático se ve un en términos como intervalos, áreas bajo las curvas y la unión de todas las áreas.
Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos	● Para argumentar la idea de sus desarrollos, los estudiantes se sustentan primero en la acción que van a realizar, para posteriormente realizar operaciones, por ejemplo, lo primero que realizan los grupos es definir que el método para conseguir el área suministrada será conformado por cuadriláteros y triángulos, luego de eso hallan el área de cada parte. ● Se utiliza la aproximación por menor y mayor, entendiendo que el valor pretendido se encuentra entre estos valores mayores y menores.
Conjunto de razonamientos aceptados	● Admiten las líneas como áreas, por tanto es posible ser comparado con otras áreas.

	● Reconocen que la anchura de la parábola decrece sí se mira de abajo hacia arriba y pude ser aproximado partiéndolo en trapecios principalmente. ● Conciben los trapecios, rectángulos y semicírculos como maneras de ocupar espacios en la superficie de la parábola.
Conjunto de preguntas seleccionadas como importantes	● ¿Cómo puedo ocupar el espacio de una parábola? ● ¿Cómo acomodar triángulos, semicírculos y cuadriláteros para ocupar el espacio de una parábola? ● ¿Cómo calcular cualquier punto en una curva?
Conjunto declaraciones aceptadas	● Las áreas de figuras geométricas sin curvas pueden ocupar el área bajo la curva de una parábola ● No aceptan el infinito actual como concepto dentro del problema. ● Admiten un rango de longitud de línea como representante de muchas otras líneas.

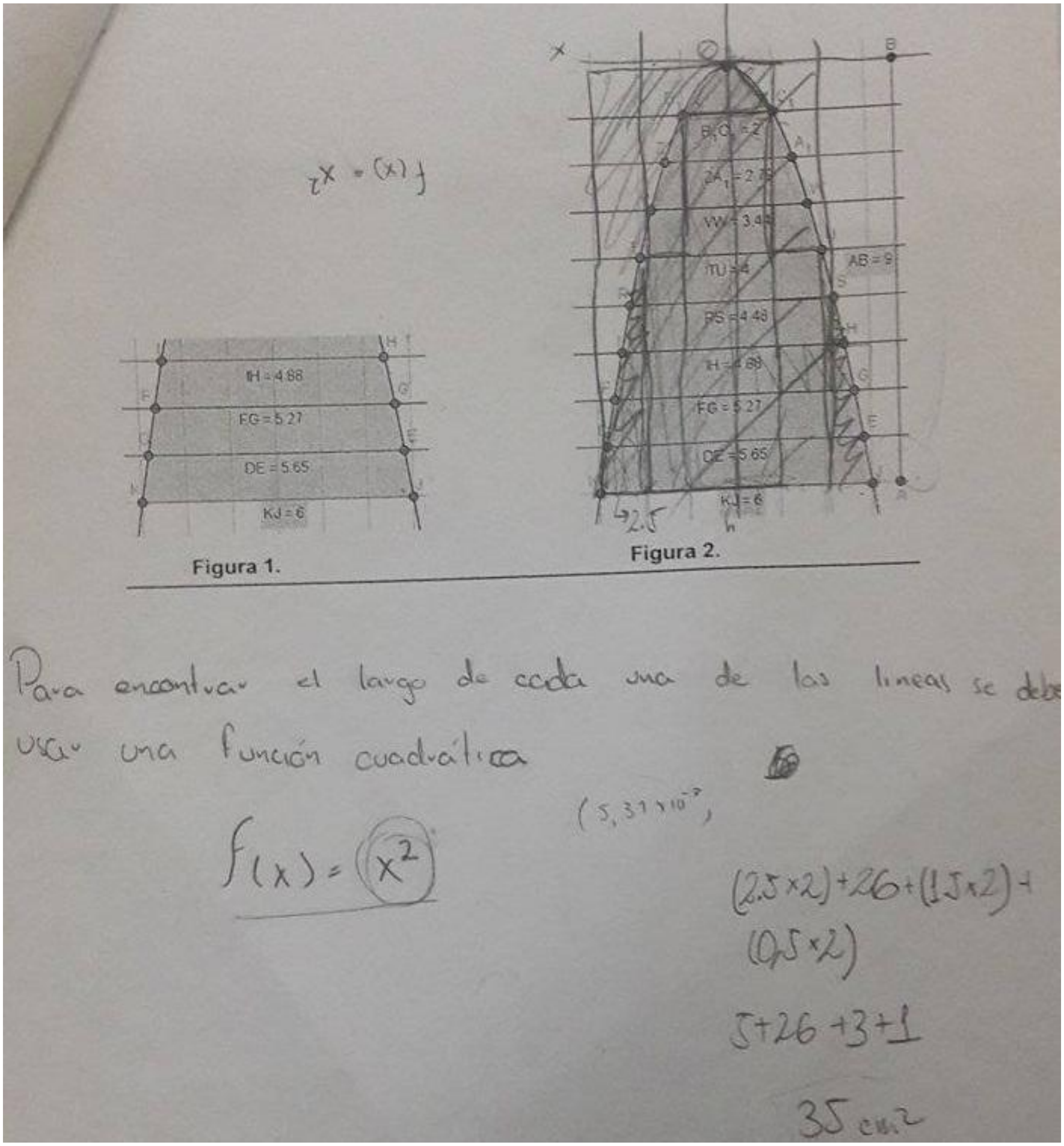
Comprende el trabajo elaborado por el Grupo 2. Evidencia de la relevancia, del análisis del trabajo matemático para este grupo de estudiantes mediante los componentes de la práctica matemática de Kitcher.

Grupo 3:

Este está conformado por una muestra, este grupo utiliza la función como marco de análisis en la situación, cuando se les pregunta que si todas las líneas miden los mismo, se respondió a la pregunta con la afirmación "depende de cada punto de la función", ya que ellos determinaron darle vuelta a la hoja y tomar como punto de origen en un plano cartesiano la punta de la parábola, este proceso se puede ver más claramente en el vídeo del desarrollo del grupo. Con el proceso anterior el grupo determina que la figura del vitral equivale a la función $f(x)=x^2$, relacionando lo largo de cada línea con los puntos de una función.

Para lograr determinar la función $f(x)=x^2$ los estudiantes decidieron tomar la guía que les ofrecía la hoja en su parte entera, o como ellos lo denominan con "números exactos", y al comprobar estos puntos con la de la función efectivamente se relaciona con valores de la función ya mencionada, mientras que los valores de longitud de cada línea depende del comportamiento de la pareja ordenada *"x"* y *"y"* en cada punto. Por otra parte se afirma también que los valores de la curva son aproximados de llegarse a relacionar con triángulos.

En el ítem d. para hallar el área de una curva toman rectángulos y triángulos dentro de la parábola, para posteriormente unirlos, dejando de lado el trabajo hecho en términos de funciones.



Fotografía 12. Evidencia de la escritura de función. Grupo 3.

Al examinar los datos obtenidos con el ELAN para el Grupo 3, se encuentran las siguientes estadísticas generales:

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Variables estadísticas

Línea	Número de ...	Duración mí...	Duración m...	Promedio d...	Duración me...	Duración tot...	Porcentaje d...	Latencia
Razonamie...	5	0.02	6.01	3.58	4.04	17.9	7.998	74.49
Metamatem...	1	3.04	3.04	3.04	3.04	3.04	1.358	116.155
Declaracion...	3	3.04	4.04	3.43	3.21	10.29	4.598	74.49
Lenguaje	6	0.99	3.04	1.655	1.54	9.93	4.437	28.21
Cuestiones	1	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15	2.301	57.14

Imagen 47. Estadísticas generales del Grupo 3.

Los datos que se obtienen en el ELAN muestra la mayor cantidad de datos relevantes recolectados con respeto a los otros grupos, hay 6 comentarios en la categoría Lenguaje y 5 de CRA, asimismo 3 en Conjunto de declaraciones aceptadas. Los porcentajes de tiempo en los que se puede evidenciar algunas de los componentes sobresale el dedicado al CRA, el porcentaje de tiempo de la grabación fue de 8%.

Las estadísticas por componente fueron:

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Líneas

Selecciona línea: Razonamiento

Mostrar sólo las líneas madre

Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Oc...	Frequen...	Pro...	Propo...	Laten...
	1	0.00446...	0.02	8.936...	102.5...
El área a imprimir incluye la cuadrícula, entonces no alcanza la tinta	1	0.00446...	4.97	0.022...	155.16
La parábola se puede expresar en forma de función, entonces se puede determinar la longitud de cada línea	1	0.00446...	4.04	0.018...	74.49
Para hallar la medida de la línea hay que doblar el valor de y para cada punto de la función	1	0.00446...	2.86	0.012...	108.41
Sí se le da vuelta a la parábola se forma una función cuadrática, con punto de origen del plano cartesiano en el vertice	1	0.00446...	6.01	0.026...	96.515

Imagen 48. Comentarios pertenecientes al Conjunto de razonamientos aceptados. Grupo 3.

Los comentarios de Conjunto de razonamientos aceptados, en el mismo orden de la *Imagen 48* son:

1. El área incluye la cuadrícula, entonces no alcanza la tinta.

2. La parábola se puede expresar en forma de función, entonces se puede determinar la longitud de cada línea.

3. Para hallar la medida de la línea hay que doblar el valor de y para cada punto de la función.

4. Si se le da la vuelta a la parábola se forma una función cuadrática, con punto de origen del plano cartesiano del vértice.

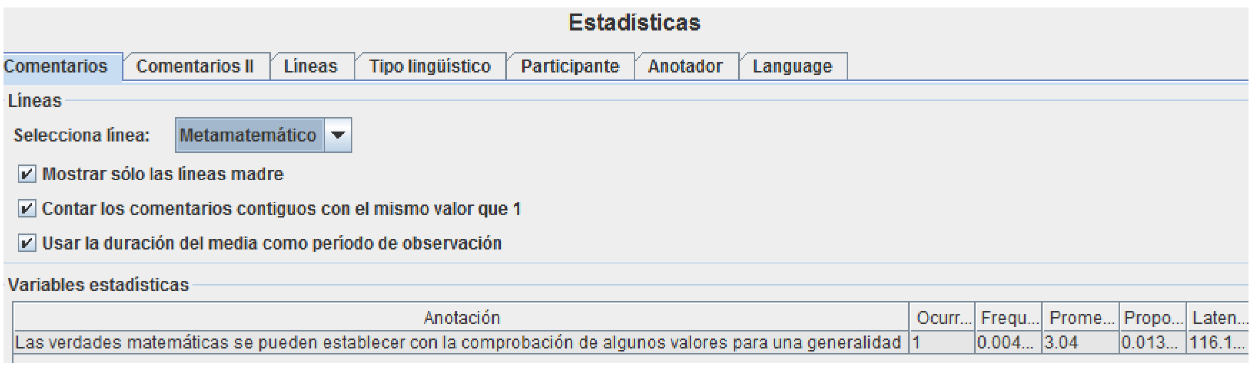


Imagen 49. Comentarios pertenecientes a Puntos de vista meta-matemáticos. Grupo 3.

El comentario de Puntos de vista meta-matemáticos, en la *Imagen 49* es: Las verdades matemáticas se pueden establecer con la comprobación de algunos valores para una generalidad.

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Líneas

Selecciona línea: Lenguaje

☑ Mostrar sólo las líneas madre

☑ Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

☑ Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de dur...	Proporción de tiempo	Latencia
Como y=1	1	0.004468175420...	0.99	0.00442349366636...	108.81
Escritura de notación científica	1	0.004468175420...	1.77	0.00790867049440...	28.21
Esto es una función	1	0.004468175420...	1.57	0.00701503541029...	75.78
Números exactos refiriendose a los números enteros	1	0.004468175420...	3.04	0.01358325327852...	116.155
Reflejo sobre el eje y	1	0.004468175420...	1.05	0.00469158419159...	109.96
f(x)=x^2	1	0.004468175420...	1.51	0.00674694488505...	101.035

Imagen 50. Comentarios pertenecientes a Lenguaje. Grupo 3.

Los comentarios de Lenguaje, en el mismo orden de la Imagen 50 son:

1. Como y=1.
2. Escritura de notación científica.
3. Esto es una función.
4. Números exactos refiriéndose a los números enteros.
5. Reflejo sobre el eje y.
6. f(x)=x^2

Estadísticas

Comentarios | Comentarios II | Líneas | Tipo lingüístico | Participante | Anotador | Language

Líneas

Selecciona línea: Cuestiones

☑ Mostrar sólo las líneas madre

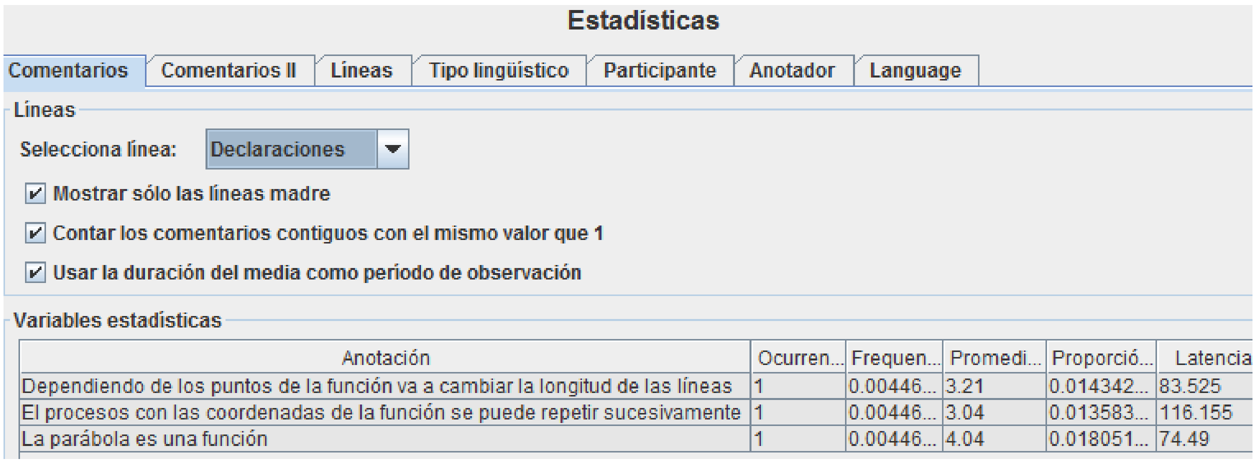
☑ Contar los comentarios contiguos con el mismo valor que 1

☑ Usar la duración del media como período de observación

Variables estadísticas

Anotación	Ocurrencias	Frequencia	Promedio de duración	Proporción de tiempo	Latencia
¿Cuánto mide cada línea de largo?	1	0.0044681...	5.15	0.023011103415920...	57.14

Imagen 51. Comentarios pertenecientes al Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. El comentario de Conjunto de declaraciones aceptadas, en la Imagen 51 es: ¿Cuánto mide cada línea de largo?



Anotación	Ocurren...	Frequen...	Promedi...	Proporció...	Latencia
Dependiendo de los puntos de la función va a cambiar la longitud de las líneas	1	0.00446...	3.21	0.014342...	83.525
El procesos con las coordenadas de la función se puede repetir sucesivamente	1	0.00446...	3.04	0.013583...	116.155
La parábola es una función	1	0.00446...	4.04	0.018051...	74.49

Imagen 52. Comentarios pertenecientes al Conjunto de declaraciones aceptadas. Grupo 3.

Los comentarios de Conjunto de declaraciones aceptadas, en el mismo orden de la *Imagen 52* son:

1. Dependiendo de los puntos de la función va a cambiar la longitud de las líneas.
2. El proceso con las coordenadas de función se puede repetir sucesivamente.
3. La parábola es una función.

Tabla 5.
Relación entre los componentes de la práctica matemática y el trabajo desarrollado por el Grupo 3.

Cinco componentes de la práctica matemática según Kitcher	**Grupo 3**
Lenguaje	● La función $f(x)=x^2$. ● Parejas ordenadas *"x, y"*. ● Términos como "cada punto" reconociendo la existencia de múltiples posibilidades de coordenadas.

	● Utilizan operaciones aritméticas, a pesar que ya tienen ecuaciones algebraicas.
Conjunto de puntos de vista meta-matemáticos	● Buscan formas de expresar generalidades antes de mostrar particularidades, es por ello que se entiende la búsqueda primera de la función y luego los valores de este. ● Comprueban su hipótesis inicial, es decir realizan la comprobación numérica para querer demostrar la veracidad de su razonamiento
Conjunto de razonamientos aceptados	● La parábola se pude poner en un plano cartesiano, entonces se puede expresar en forma de función ● Lo largo de cada línea dependerá de los puntos de la función, esto quiere decir que depende de la relación entre x y y, entonces se pueden determinar puntos diferentes, y a partir de allí establecer las medidas de cada línea. ● Aceptan que las figuras rectangulares y triangulares pueden formar el área de una curva de una manera aproximada. ● La parábola es simétrica, por lo tanto tiene un lugar donde se refleja.
Conjunto de preguntas seleccionadas como importantes	● ¿Cómo se puede determinar el valor de cada punto? ● ¿Cómo se relacionan los puntos de la función con la longitud de la línea?
Conjunto declaraciones aceptadas	● Se acepta la función como modelador de una curva. ● Cada valor de la función es diferente y las líneas contenidas en la función también lo son. ● Los rectángulos y triángulos pueden ocupar un área aproximada a una figura delimitada por una curva.

Comprende el trabajo elaborado por Grupo 3. Evidencia de la relevancia, del análisis del trabajo matemático para este grupo de estudiantes mediante los componentes de la práctica matemática de Kitcher.

Conclusiones

En del desarrollo realizado en los anteriores apartados, encontramos en el análisis de la práctica matemática junto a sus componentes como metodología de estudio en las maneras de proceder en un grupo de estudiante con relación a las prácticas de Wallis y Newton respecto a las formas de medida de la cuadratura, se puede concluir lo siguiente:

Los componentes de las prácticas matemáticas como modo de análisis del actuar de un grupo de estudiantes de educación media se han revelado fructíferos; sobre todo los componentes Lenguaje, Conjunto de razonamientos aceptados y Conjunto de declaraciones aceptadas. La reflexión sobre la utilidad de los componentes no se hace sobre las prácticas de Wallis y Newton, pues Kitcher las propuso para entender la transformación del conocimiento matemático en los autores que han contribuido a la evolución de las matemáticas.

El lenguaje es un componente de las prácticas matemáticas que permite ver relaciones entre las prácticas de Wallis y Newton con respecto a la de los estudiantes del José Max León. Wallis tiene un lenguaje en sus series que busca primero un desarrollo aritmético, luego muestra una expresión que generaliza ese trabajo aritmético, se podría decir que usa una escritura algebraica; Newton, por su parte, explica primero los razonamientos que hace, muy al estilo de los antiguos griegos y la retórica, posteriormente escribe una expresión algebraica que le permite condensar lo expuesto. Los estudiantes no muestran en general una estructura definida, donde separen el tratamiento de la escritura aritmética con la algebraica, posiblemente se deba a dos factores al tiempo posible de ejecución del proceso y a no definir pautas para la escritura de los desarrollos en sus métodos.

Es común que en el lenguaje que usan los estudiantes para referir los objetos matemáticos halla expresiones similares relacionadas tanto con expresiones del lenguaje cotidiano como provenientes del lenguaje matemático escolar; con frecuencia en los vídeos se oyen términos como "rango" para referirse a un intervalo o "pedacito" equivalente al ancho de la línea.

En los vídeos no aparece el infinito explícitamente; sin embargo, los estudiantes sí realizan afirmaciones como "este procesos se repite sucesivamente", "esto se puede hacer muchas veces" o "aquí se pude seguir haciendo esto otra vez" coincidiendo con los hallazgos de D'Amore et al. (2005); en los fragmentos de las obras que se toman, Wallis asume que sus series pueden ser finitas o infinitas y llegar al mismo valor; aunque Newton, sin embargo, no lo hace de manera explícita en los apartes seleccionados. Wallis habla de infinito y Newton llama "razones últimas" a objetos matemáticos que podríamos concebir como provenientes del uso del infinito actual, pues se refiere a que el cociente entre dos magnitudes se puede hacer tan pequeño como se quiera, o como a lo que él se refiere a cantidades evanescentes.

En el conjunto de razonamientos aceptados existe una diferencia importante entre los autores (Wallis y Newton) y los estudiantes en cuanto al problema de las cuadraturas. La técnica que usaron los estudiantes siempre fue el recubrimiento de la parábola con otras figuras (semicírculos, trapecios, rectángulos, cuadrados o triángulos), no se pensó en las líneas y su relación con la figura delimitada por una curva como lo muestran Wallis y Newton. El hallar la longitud de las líneas está sesgado en términos de crecimiento y decrecimiento, ya que sólo se percibe una forma de encontrar las longitudes por parte de los estudiantes en general, para ellos es familiar el uso de las relaciones proporcionales y no se tiene en cuenta en casi todos los casos otras relaciones; hay dos grupos que no hallaban las longitudes de la líneas usando proporciones, fueron el Grupo 1-3 que usa elementos trigonométricos y el Grupo 3 que define una función cuadrática.

Para el Conjunto de declaraciones aceptadas es importante evaluar la situación aplicada, pues es desde allí donde los estudiantes asimilan o no la información. En el contexto de la situación que se presenta en el aula, la línea de la impresora tiene un grosor, esto hacia que los estudiantes no valoren las líneas como semirrectas de una dimensión, por tanto no es posible verificar si los estudiantes aceptan que por medio de solo líneas sin anchura se pueda hallar el área bajo la curva de la parábola o como se pueda relacionar, además no se enfatiza en la precisión, así que los métodos de aproximación con otras figuras se hace más viable.

En el aspecto favorable de la situación aplicada con respecto a al declaraciones aceptadas está el hecho del grosor de las líneas, ya que al ser tan delgadas y tener que buscar longitud de cada una los lleva a pensar en estrategias con pensamiento de continuidad para encontrarlas, cabe resaltar que solo hubo un grupo que escogió una función para tatar el problema de las longitudes, y uno con una aproximación tangente, los demás se fueron por la vía de la proporcionalidad, sin embargo estos últimos aclaran que establecer un espacio de posibilidades, no la longitud exacta, se entiende que aceptan la existencia de mecanismos más precisos.

En los componentes de las prácticas matemáticas Conjunto de puntos de vista metamatemáticos y Conjunto de cuestiones aceptadas no resultan muy útiles en términos comparativos entre autores que hacen matemáticas y estudiantes. El propósito de Wallis y Newton es la aceptación de una comunidad científica que avalen sus trabajos sobre preguntas que ellos mismos se han hecho, para ello establecen una estructura lo suficientemente sólida para evitar ser refutados en sus razonamientos; las pretensiones de los estudiantes van en términos del trabajo matemático a justificar sus acciones con herramientas que se le han brindado, sobre preguntas que se le inducen, al menos es el caso de este trabajo. Sin embargo, los estudiantes son capaces de hacerse preguntas sobre lo que se está poniendo en juego; por ejemplo, la pregunta de cómo medir la parábola no se muestra explícita en la situación de este tipo de preguntas se podría hacer otro trabajo de investigación, teniendo en cuenta las prácticas matemáticas para la transformación del conocimiento matemático hacia el entendimiento del cálculo.

Kitcher dijo que sus prácticas matemáticas podrían cambiar de componentes, es viable considerar que para el propósito educativo y en especial el que refiere a la transición algebra-cálculo los componentes que podrían mantenerse son Lenguaje, Conjunto de razonamientos aceptados, Conjunto de declaraciones aceptadas y Conjunto de cuestiones aceptadas como importantes. El aventurarse a agregar una nueva componente y validarla deberá ser una investigación futura, pero dado los aportes de Freudenthal no parece descabellado pensar en una componente de representación que difiera al lenguaje.

En cuanto a la situación, es pensada por el hecho puntual de inferir la necesidad de ocupar el área bajo una curva, al usar la ventana de la obra de Félix Candela se asegura mantener un contexto realista; por otra parte la impresora además de otorgar un elemento como las líneas delimita un poco las posibilidades de acción tomada por los estudiantes.

El reconocimiento de las posibilidades en la situación de parte de los estudiantes en un inicio se toma en cuenta, ya que utilizan la línea horizontales para el primer rectángulo, en la primer tarea, pero en la mayoría se deja de lado al desarrollar las otras tareas, pues la manera de ocupar el área bajo la curva es siempre por medio de rectángulos, trapecios, semicírculos o triángulos. El ambiente de aprendizaje en el cual el docente no intervenía en la ejecución, permitió que entre los estudiantes indagaran en sus conocimientos empíricos, en este escenario el uso de las líneas no prevaleció.

Anexos

En este apartado se presentan los enlaces de los videos puestos en estudio, con la participación de los estudiantes de grado 11 del colegio José Max León, los cuales están separados por los grupos descritos en el apartado de metodología. Sólo se accede a los vídeos desde sus enlaces sin ningún contenido de edición.

Tabla 6.

Enlaces de los vídeos abordados en este trabajo.

Grupos	Enlace de los videos por sub-grupos
Grupo 1	Grupo 1-1: https://www.dropbox.com/s/jkpmqt5rz0u6nny/Grupo%201-1.mp4?dl=0 Grupo 1-2: https://drive.google.com/open?id=0B5PbCgID9mzlTThfR0l1MVZmN3M Grupo 1-3: https://drive.google.com/open?id=0B5PbCgID9mzlYUxTU0dNcE1ETkU
Grupo 2	Grupo 2-1: https://www.dropbox.com/s/barcnu36etqodz7/GRUPO%202-1.AVI?dl=0 Grupo 2-2: https://www.dropbox.com/s/mo3hmvq5gz9st0w/Grupo%202-2.AVI?dl=0 Grupo 2-3: https://drive.google.com/open?id=0B5PbCgID9mzlWm02UXBwVV8yV0k
Grupo 3	Grupo 3: https://www.dropbox.com/s/1mbv8f3r69zluh8/GRUPO%203.AVI?dl=0

Bibliografía

Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.* En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119- 127). Santander: SEIEM.

Andersen. Kirsti (1982). *Las técnicas del cálculo moderno, 1630-1660. En: Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910*. (L. C. Recalde, Trad.) Una introducción histórica. Recopilación de Grattan-Guinness I. Alianza Editorial, Madrid, pp. 22-68.

Andersen, k. (1985). *Cavalieri's method of indivisibles.* (L. C. Recalde, Trad.) Denmark: History Exact Science.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (M. M. Perez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 91-116.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rodríguez Bejarano J., Rojas Garzón P.J., Romero Cruz J.H., Sbaragli S. (2006). El sentido del infinito. *Epsilon, 22*(65), 187-216.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.

ITA, I. T. (Dirección). (2007). *ITA: Como funciona las impresoras de impacto* [Película]. Recuperado el 2016 de 10 de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=wHFmLgdbQMg

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York: Oxford University Press.

Malaspina, U. (07 de Mayo de 2015). *http://irem.pucp.edu.pe.* Obtenido de http://irem.pucp.edu.pe: http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2015/07/Conferencia-en-CIAEM_2015-U.-Malaspina.pdf

Milevicich, L. (2008). La enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral en el contexto del primer año de universidad. *Categoría 1: Análisis del currículum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas* (págs. 339-349). Mexico D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame).

Munarriz, B. (1992). Técnicas y métodos en Investigación cualitativa. *Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea*, 101-116.

Neira, S. I. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Infancias Imágenes*, 44 - 50.

Wallis, J. (1656). *The Arithemetic of infinitesimals.* (J. A. Stedall, Trad.) New York: Springer.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: MEN.
Malaspina, U. (07 de Mayo de 2015). *http://irem.pucp.edu.pe.* Obtenido de http://irem.pucp.edu.pe: http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2015/07/Conferencia-en-CIAEM_2015-U.-Malaspina.pdf

Milevicich, L. (2008). La enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral en el contexto del primer año de universidad. *Categoría 1: Análisis del currículum y propuestas para*

la enseñanza de las matemáticas (págs. 339-349). Mexico D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame).

Neira, G. (2012). *Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/capitulos_libro/del_algebra_calculo_transicion_o_ruptura_notas_para_una_reflexion

Newton, I., y Escohotado, A. T. (1994). *Principios matemáticos*. Barcelona: Altaya

Prabhu, V. y Czarnocha, B. (2008). *Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. Educación matemática*, *20*(1), 53-88. Recuperado en 16 de agosto de 2016, de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000100004&lng=es&tlng=es.

Serrano, J. (2011). *El desarrollo del concepto matemático*., Barranquilla:.Universidad Simón Bolívar.

Skiba, Y. (2005). *Métodos Y Esquemas Numéricos: Un Análisis Computacional.* México*:* Universidad Nacional Autónoma de México.

Socas, M. y Camacho (2003). *Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones,* (págs. 151-171) Tenerife, Universidad de La Laguna.

Turégano, P. (1995). El currículum y las dificultades del cálculo infinitesimal. *Revista de la facultad de la educación de Abasete*, 229-245.

Wallis, J. (2000). *Arithmetic Infinitorum. [The Arithmetic of Infinitesimals]* (Stedall, J. A, trad.) (Salamanca, D, trad.). New York, Oxford University press. Springer Science. (Obra original publicada en 1656).

Wallis, J. (1656). *The Arithemetic of infinitesimals.* (J. A. Stedall, Trad.) New York: Springer.