PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA POTENCIAR LA COMPRENSIÓN DEL INFINITO ACTUAL EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, UN MEDIO DE APORTE AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO EN LA ESCUELA.

NELSON YAMPIER AGUDELO PEÑUELA
DIEGO FERNANDO ESCOBAR SALAMANCA

JUAN PABLO ALBADAN VARGAS

DIRECTOR

UNIVERSIDAD FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS.
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN.
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C
MAYO 2016

Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de siglas

MEN.	Ministerio de Educación Nacional
RAE	Resumen Analítico Educativo
S F.	Sin fecha

Introducción

El presente documento es una monografía realizada por los autores para optar por el título de *Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas*, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, de Bogotá, Colombia. Consiste en una investigación de tipo exploratorio-descriptivo, centrada en la creación de una secuencia de actividades para estudiantes de grado décimo, aunque con posibilidad de ser aplicado en grados inferiores, con el objetivo de potenciar la comprensión del infinito actual en los estudiantes y que a su vez constituya un aporte al desarrollo del pensamiento crítico. La monografía consta de cinco capítulos seguidos de las conclusiones de la investigación y anexos considerados relevantes por los autores.

En el primer capítulo se podrán encontrar los apartados de justificación, planteamiento del problema, pregunta orientadora, antecedentes y objetivos. Los apartados de este capítulo permiten conocer a fondo los propósitos y la utilidad de esta investigación, además de resaltar su necesidad en el panorama actual de la educación matemática, en lo que respecta al concepto de *infinito.*

En el segundo capítulo, referente teórico, se presenta toda la teoría, considerada necesaria por los autores para el desarrollo de la investigación, en materia matemática, didáctica y pedagógica, para así poder construir la secuencia de actividades de modo que los objetivos planteados sean alcanzados.

En el tercer capítulo se presentan las características de la investigación, incluyendo su naturaleza, las consideraciones metodológicas para su desarrollo, la descripción del pilotaje realizado y las categorías planteadas para realizar su posterior análisis.

En el cuarto capítulo puede encontrarse la secuencia de actividades diseñada en la presente investigación, el modelo determinado para su planeación, la planeación individual de cada actividad y los instrumentos diseñados para ellas.

El quinto capítulo corresponde al análisis de los datos recolectados en el pilotaje de las actividades. Finalmente pueden encontrarse las conclusiones de la investigación y los anexos.

CAPÍTULO 1

Justificación

El 8 de febrero de 1994 el congreso de la república expide por medio de la ley 115, la ley general de educación, y en el artículo 5 se decretan los fines de la educación, el fin 3 es: "La formación para facilitar la participación de todos en las decisiones que los afectan en la vida económica, política, administrativa y cultural de la Nación.". Publicado en la página del Ministerio de Educación Nacional -MEN-(1994, p.2).

De lo que se puede inferir que la educación en Colombia debería posibilitar a las personas tomar una postura crítica frente a su realidad, ya que las vivencias propias de la escuela permiten a las personas conectar con la realidad en sus aspectos cultural, académico y social, sugiriendo implícitamente el desarrollo del pensamiento crítico en movimientos relacionados con dichos aspectos de la realidad, tal como lo afirma Ramírez (2008).

Una vez entendido esto y al revisar los referentes nacionales para el área de matemáticas en Colombia, se llega a la conclusión de que la matemática también debe contribuir a la formación de valores ciudadanos y democráticos, como es mencionado por el Ministerio de Educación Nacional –MEN- (2006) en los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas:

> Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de

decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad.” (p.48).

Con esto se sustenta que para que un estudiante sea crítico, complejo y que aporte a la sociedad necesita entender el sistema del que hace parte, sistema conformado en gran parte por conceptos (matemáticos o no) y sus relaciones. En adición, como lo menciona Waldegg (1996), “Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones locales. Algunos responden muy parecido ante una situación propuesta, pero, cambiando la situación, no reaccionan de manera similar” (p.116). De lo que se deduce que tanto en el sistema del que hace parte el estudiante, como en las clases de matemáticas, las nociones intuitivas representan un obstáculo a superar para que el estudiante comprenda el sistema y los conceptos formales, posibilitando a su vez el desarrollo del pensamiento crítico.

Entonces, como consecuencia del análisis previo, se puede afirmar que mientras que un estudiante se afronte al aprendizaje y/o construcción de algún concepto u objeto matemático que implique razonamiento no intuitivo, este estudiante se encuentra desarrollando su pensamiento lógico-matemático a la vez que su pensamiento crítico. Un objeto matemático que además de requerir determinados preconceptos matemáticos para su comprensión, requiere de razonamiento no intuitivo. Dicho objeto matemático es el *infinito*, pues, como lo afirman Asuman y Roa (2014):

- La comprensión del infinito está ligada a las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre el conjunto de los números naturales
- El objeto trascendente no se desprende de manera directa del proceso iterativo infinito. El paso de la estructura dinámica a una estática está determinado por la capacidad del

individuo para ver el proceso iterativo infinito como un todo, sin que el "último" número natural haya sido transformado. (p.75).

Lo anterior haciendo referencia a que la comprensión del infinito depende de las estructuras e ideas previamente construidas sobre él (nociones intuitivas, infinito potencial) y a que el infinito como objeto trascendente (infinito actual) necesita de un cambio en la estructura cognitiva para ser comprendido.

Es necesario resaltar que a objetos matemáticos como la derivada, el límite, la función, el número real, la recta numérica y la continuidad, se les pueden relacionar con el concepto de *infinito* en su interpretación de *infinito actual*. Éste tuvo un papel protagónico en la fundamentación de la construcción formal de los números reales, del concepto de límite, además en el currículo de matemáticas al infinito se le relaciona también con la continuidad de las funciones en el conjunto de los números reales, y representación geométrica de números racionales periódicos e irracionales en la recta numérica, y también se puede apreciar que en gran medida la construcción del concepto de infinito a través de la historia se fundamenta en el análisis y la controversia generada por la interpretación de argumentos como las paradojas de Zenón, interpretadas como falacias debido a la no aceptación del *infinito actual* (Cajori, 1987; Hernández, Mora y Romero, 2008; Jato, 2012).

En consonancia con lo anterior Jato (2012) concluye; "[es importante] Realizar propuestas pedagógicas dedicadas al estudio y tratamiento del infinito, de tal modo que ayuden a la interiorización del concepto y a aclarar concepciones e intuiciones sobre el mismos" (p.39). Lo que al mismo tiempo podría aportar, como lo hemos mencionado anteriormente, a la construcción del pensamiento crítico en los estudiantes, uno de los objetivos de la educación en Colombia.

Después de realizar un rastreo bibliográfico desde 1980 hasta 2015, en busca de propuestas de aula con o sin intervención en el aula, artículos que tengan fines educativos en relación con el infinito, investigaciones, trabajos de grado y recorridos epistemológicos por el infinito, entre muchas clases de documentos, se encontró que existe una gran tendencia a identificar, analizar y discutir los obstáculos epistemológicos que tienen el profesor en la enseñanza y los estudiantes en el aprendizaje en relación con elementos concernientes al infinito actual, y son muy escasos los trabajos en los que se propongan actividades con el objeto de llevar a los estudiantes a comprender elementos necesarios para la consolidación de un concepto como infinito actual. Como se muestra en la **tabla 1,** que refuerza la idea de que es necesaria la creación de propuestas de aula orientadas a potenciar el entendimiento del infinito actual.

Tabla 1:

Rastreo realizado en búsqueda de investigaciones, artículos y propuestas didácticas para la enseñanza aprendizaje del infinito actual

INSTITUCIÓN	AÑO	NOMBRE DEL TRABAJO	AUTORES	CATEGORÍA	INTERPRETACIÓN DEL INFINITO					
					ESPISTÉMICO	ANÁLISIS DIDÁCTICO	EL INFINITO EN POTENCIA	EL INFINITO EN ACTO	PROPUESTA	
									PARA POTEN-CIAR	PARA DETECTAR ERRORES
Revista Educational Studies in Mathematics	1981	Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.	Tall David, Vinner Shlomo	Artículo						
Universidad Nacional	1986	Algunas consideraciones acerca de la teoría de conjuntos.	Otero María Isabel	Notas de seminario	X		X	X		
	1987	Historia de los Argumentos de Zenón sobre el Movimiento	Florian Cajori.	Libro	X		X	X		

Revista Mexicana de Investigación Educativa	1996	Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual	Guillermina Waldegg	Artículo	X	X	X	X		X
Universidad de Almería y Universidad de granada	1999	Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales.	Rico Luis, Romero Isabel	Artículo		X	X	X	X	
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	2006	Una aproximación a la noción de infinito a través de fractales.	Benzaquen Mónica, Gorrochategui Mónica, Kanashiro Ana, Oviedo Lina.	Artículo		X	X	X		X
Revista Bolema	2006	La Etnomatemática en Colombia. Un Programa en Construcción.	Hilbert Blanco	Artículo						
NRD Bologna - ASP Locarno – MESCUD Bogotá	2006	El sentido del infinito.	Bonilla Martha y otros	Artículo	X	X	X	X		X
Universidad distrital	2008	Aspectos teóricos para construir una propuesta de enseñanza	Mora María, Díaz Virgilio y Pinzón	Tesis de pre-	X	X	X	X		

FJDC		orientada a la comprensión de la noción de infinito actual.	Lily.	grado						
Dialéctica revista de investigación	**2010**	Reflexión sobre la enseñanza de la idea de infinito en los curso de cálculo diferencial	Juan Rangel		X	X	X	X		
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 28004, Madrid.	**2010**	Un paseo por el Infinito	Fernando Bombal		X		X	X		
Instituto Politécnico Nacional (México)	**2011**	El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.	Patricia Lestón.	Tesis doctoral		X	X	X		X
Ministerio de Ciencia e Innovación de España	**2012**	Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función.	Contreras de la Fuente Ángel, García Armenteros Manuel	Artículo		X	X	X		
Universidad distrital	**2012**	Análisis de aspectos	Chaparro Pedro,	Tesis de	X	X	X	X	X	

Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.		epistemológicos en la historia del infinito, fundamentales para la construcción del límite de una función (propuesta de aula)	Muñoz Carlos	pregrado.						
	2012	El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria	Sergio Jato Canales	Trabajo fin de Máster	X	X	X	X		X
Instituto de Profesores ‘Artigas’	**2013**	Infinito, límite de lo ilimitado.	Acosta Sofía, Figares Gabriela, López Victoria, Mesa Victoria, Molfino Verónica, Rivero Florencia	Artículo		X	X	X		
Universidades Asociadas: Universidades del Valle, Distrital y Pedagógica Nacional	**2013**	Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática.	Neira Sanabria Gloria Inés	Artículo		X	X	X		
Corporación Universitaria	**2014**	Sobre el infinito y sus dificultades antes de Georg	Marin Gaviria Isaías David	Ensayo	X		X	X		

Republicana		Cantor y sus obras.								
Universidad Pedagógica Nacional	**2014**	Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos de cálculo	Gloria García O., Celly Serrano, Hernán Díaz.	Artículo	X	X	X	X		X
Red de Revistas Científicas de América Latina	**2014**	El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas.	Asuman Oktaç, Roa Solange	Artículo		X	X	X		
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	**2015**	El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis.	Mena Arturo, Mena Jaime, Montoya Elizabeth, Morales Astrid, Parraguez Marcela	Artículo	X	X	X	X		X
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología		Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática	Cecilia Crespo			X	X			

Avanzada. CICATA– IPN. (México)

Planteamiento del problema

Se ha mencionado en la justificación que en la actualidad, en cuanto a la enseñanza-aprendizaje del infinito actual como nodo transversal del desarrollo de objetos y conceptos matemáticos como la derivada, el límite, la función, el número real, la recta numérica y la continuidad, existe una notoria falta de material relacionado con propuestas orientadas a potenciar la comprensión del infinito actual, aun cuando existen múltiples documentos enfocados en el análisis didáctico del tratamiento de este concepto en las aulas y cómo es visto y entendido tanto por estudiantes como por docentes.

En este sentido y, al presentarse, como se ha mencionado, una necesidad de promover acciones que potencien la criticidad y complejidad propia del pensamiento que requiere un ciudadano actual, como lo menciona Morin (1994), el estado colombiano ha considerado importante incluir acciones que contribuyan a la misma, como se cuenta en lo enunciado por el Ministerio de Educación Nacional –MEN- (1994) al enunciar "La formación para facilitar la participación de todos en las decisiones que los afectan en la vida económica, política, administrativa y cultural de la Nación" (p. 2).

Reconocer la escuela como escenario privilegiado para la activación de acciones encaminadas al aporte de soluciones a la necesidad planteada, nos invita a considerar aspectos como los siguientes:

> La escuela supone vivencias y experiencias diversas que permiten salir del anquilosamiento académico, cultural y facilita la conexión con la realidad social. La escuela sugiere [...] el desarrollo del pensamiento crítico convergente de los

> movimientos educativo, pedagógico, cultural, sociopolítico e histórico (Ramírez, 2008, p.114).

Sin lugar a dudas, este derrotero requiere y se enriquece al contar con materiales, diseños didácticos, actividades y recursos que potencien el trabajo, en particular, en lo que refiere a la noción de infinito actual; no obstante ello, el problema aquí escogido resulta ser la escasez de los mismos, que, además, permitirían potenciar el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes, como herramienta que genere puentes de conexión entre la realidad del estudiante y sus discusiones, construcciones y descubrimientos en busca de significar el mismo (Ramírez, 2008). Atendiendo, con lo anterior, a los requerimientos de los documentos legales educativos del país, tanto en materia de enseñanza-aprendizaje de objetos y conceptos matemáticos, en particular de la noción de infinito para este caso, como en materia de formación de ciudadanos.

Es necesario, entonces, plantear, como posible solución al problema, el diseño de una secuencia de actividades, a partir de los elementos teóricos encontrados a los largo del rastreo bibliográfico, en la que se utilice la comprensión del infinito actual como una excusa para la elaboración de juicios personales frente a situaciones cercanas y reales que les permita a los estudiantes y futuros ciudadanos, ser más competentes socialmente, además de poner en práctica los valores democráticos inculcados en la escuela, añadiendo que, el desarrollo de una propuesta con tal propósito constituirá un aporte a la didáctica de las matemáticas y una herramienta para los docentes, brindando nuevo material para aplicar y a su vez sobre el cual realizar nuevos desarrollos.

Recogiendo todo lo anterior se plantea la pregunta de investigación para orientar esta investigación:

Pregunta de investigación

¿Cómo diseñar, construir y analizar una propuesta de actividades para potenciar la construcción, entendimiento y aceptación del infinito actual, a propósito de la comprensión de objetos matemáticos del cálculo y del desarrollo del pensamiento crítico para estudiantes pertenecientes al ciclo quinto de la educación media colombiana?

Antecedentes

Descripciones del desarrollo epistemológico del concepto de *infinito*, de intervenciones en el aula con fines en conceptos relacionados, intervenciones dirigidas a la detección de obstáculos para la aceptación del *infinito* y análisis didácticos en torno al mismo; fueron algunos de los tipos de documentos encontrados en el rastreo documental realizado en busca de propuestas de enseñanza-aprendizaje, enfocadas en potenciar el entendimiento del *infinito actual*.

En los documentos se encontraron ciertos puntos de convergencia en cuanto a objetos matemáticos se refiere, dichos puntos son: El límite, la teoría de conjuntos, la función, la derivada, el movimiento, sucesiones, series, curvaturas, cuadraturas, continuidad, conjuntos numéricos y construcciones geométricas de números irracionales (Asuman y Roa, 2014; Cajori, 1987; Contreras y García, 2012; Díaz, García y Serrano, 2014; Rico y Romero, 1999), todos estos objetos matemáticos tienen relación con los números reales y su construcción como conjunto. Lo anterior sumado a las descripciones de obstáculos epistemológicos en la enseñanza-aprendizaje de objetos relacionados con el *infinito*, estrategias de aproximación al concepto, perspectivas metodológicas, situaciones (problemas y construcciones geométricas usadas por algunos de los autores para tratar el concepto), y sugerencias realizadas por los mismos autores con base en sus propias conclusiones; será tomado en cuenta para el desarrollo del presente trabajo. Todas las conexiones entre tales aspectos, además de otras teorías que resulten necesarias, son explicitadas en el marco teórico de este documento que constituye la base matemática, didáctica, metodológica y legal para la construcción de la propuesta. En el siguiente esquema se relacionan tales aspectos:

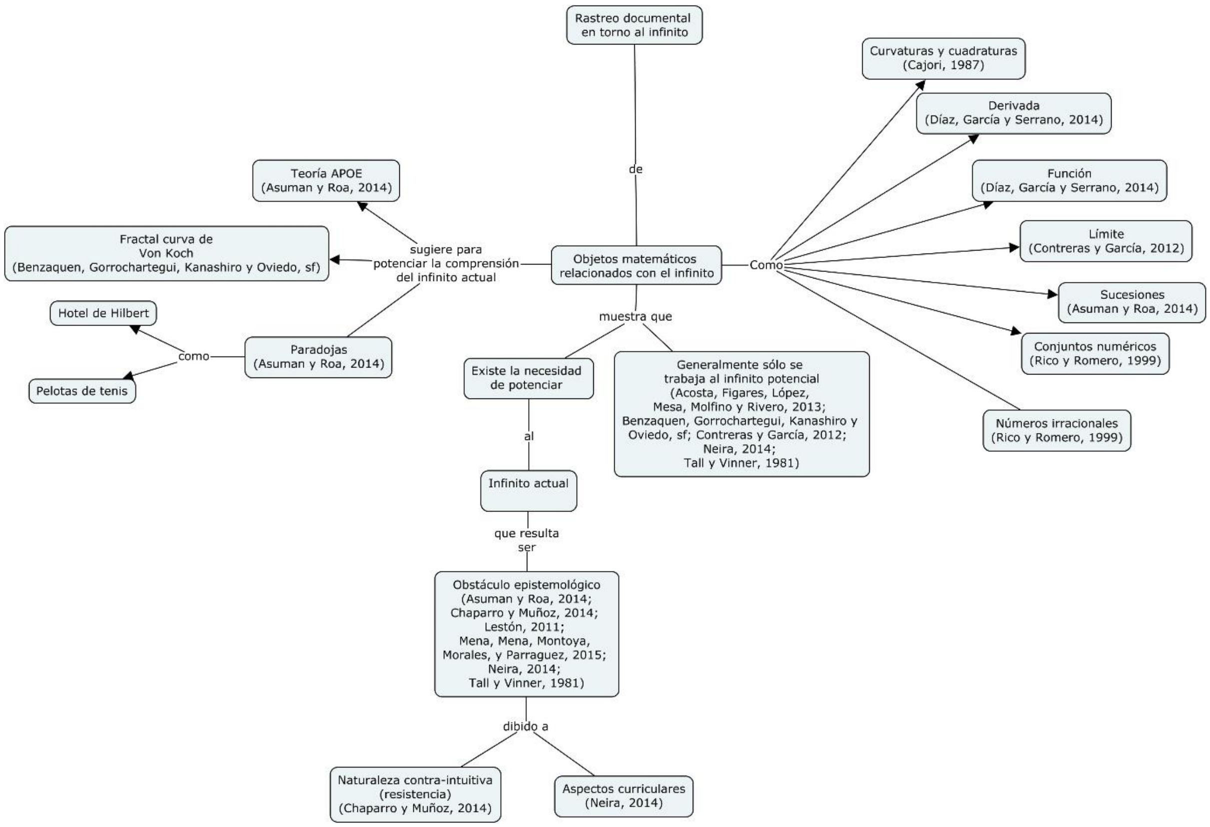


Figura 1: Antecedentes

Este esquema fue desarrollado por los autores exclusivamente para este trabajo.

De manera general, independientemente del objeto matemático tratado en cada documento, se encontró que existe una tendencia en las escuelas a tratar al infinito únicamente de manera potencial, relegando su carácter actual a una sentencia que debe ser “aceptada” con el propósito de realizar procesos algorítmicos (Acosta, Figares, López, Mesa, Molfino y Rivero, 2013; Benzaquen, Gorrochartegui, Kanashiro y Oviedo, sf; Contreras y García, 2012; Neira, 2014; Tall y Vinner, 1981). En suma, se destaca la necesidad de potenciar el entendimiento y aceptación del infinito actual para la comprensión de los diversos objetos matemáticos de interés en cada documento. (Asuman y Roa, 2014; Benzaquen, Gorrochartegui, Kanashiro y Oviedo, sf; Neira, 2014; Mora, Díaz y Pinzón, 2008).

Sin embargo, el infinito actual llega a considerarse un obstáculo epistemológico, que presenta resistencia, dada su naturaleza contra-intuitiva, además de tensiones curriculares referentes a la transición álgebra-cálculo, y que los razonamientos en torno al infinito se dan desde perspectivas que no han necesitado la aceptación del infinito en acto (Asuman y Roa, 2014; Chaparro y Muñoz, 2014; Lestón, 2011; Mena, Mena, Montoya, Morales, y Parraguez, 2015; Neira, 2014; Tall y Vinner, 1981).

Con la intención de tratar directamente al infinito actual y generar reflexión y comprensión en ciertos grupos de estudiantes, se destaca el uso de la teoría APOE para la construcción del infinito como objeto, adquiriendo un carácter actual (Asuman y Roa, 2014). La teoría APOE es una teoría de la comprensión matemática, que postula que el desarrollo de la comprensión, como afirma Asiala (como se citó en Meel, 2003), se da de la siguiente manera:

> Comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (p.243).

Se destaca también el uso de la *paradoja del Hotel de Hilbert* y la *paradoja de las pelotas de tenis*, así como del fractal *curva de Von Koch* (Asuman y Roa, 2014; Benzaquen, Gorrochartegui, Kanashiro y Oviedo, sf), como situaciones que potencian el entendimiento del infinito tanto como proceso como objeto y, por ende, constituyen situaciones que podrían ayudar a la comprensión del infinito actual en estudiantes.

Para información más detallada, acerca de los documentos consultados, se puede consultar la sección de anexos. En dicha sección se encuentran lso Resúmenes Analíticos Educativos (RAEs) de los documentos, realizados por los autores de este trabajo.

Objetivos

Objetivo general

Diseñar una secuencia de actividades orientada a potenciar la comprensión del infinito actual, para estudiantes de grado décimo, por medio de la cual se aporte al fomento de pensamiento crítico en estudiantes.

Objetivos específicos

- Realizar un estado del arte para algunas propuestas orientadas a la comprensión y aceptación del *infinito actual* para estudiantes del ciclo V. Así tener claridad acerca de los precedentes de los que se puede hacer uso y elementos didácticos y matemáticos aún no desarrollados en secuencias enfocadas en la enseñanza del infinito.
- Identificar ciertas características del pensamiento crítico y su posibilidad –sentido- de inclusión dentro de la secuencia de actividades.
- Construir una ruta parcial del desarrollo histórico del concepto de *infinito*, con base en los elementos matemáticos considerados más relevantes para la construcción de una la secuencia de actividades, basados en los elementos en los que coinciden los autores a consultar.
- Identificar algunos obstáculos epistemológicos para la construcción del *infinito actual*, o del infinito mismo para la construcción de otros objetos matemáticos, basados en los elementos en los que coinciden los autores a consultar.

Capítulo 2: Referente teórico

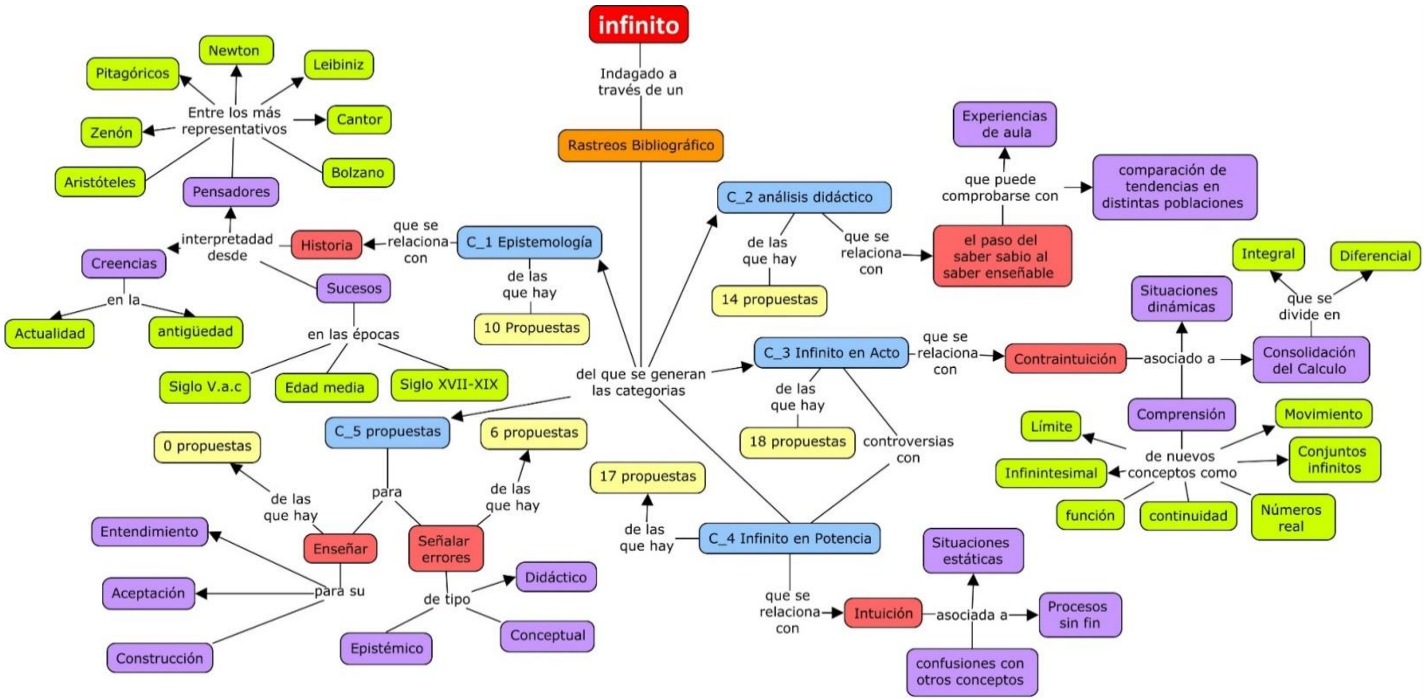


Figura 2: Organización del marco teórico

Este esquema fue realizado por los autores exclusivamente para este trabajo.

Estructura del marco teórico

Dentro del esquema presentado anteriormente se muestra cómo en el rastreo bibliográfico realizado, fue posible categorizar diferentes aspectos desde los cuales cada uno de los documentos puede llegar a contribuir con la presente investigación, es así como emergen las siguientes:

Constructos y categorías

D_1 Epistemología

En esta categoría se encuentra las propuestas que mencionan, principalmente, sucesos, pensadores y creencias y recuentos de la naturaleza del conocimiento que, a través de la historia, desarrolló el concepto infinito.

D_2 Análisis didáctico

En esta categoría entran las propuestas que, a través de su investigación, intentan transponer didácticamente al infinito, bien sea puesto en el aula o con un fin de comparación, en el que se comparan diferentes poblaciones de sujetos, en relación al concepto en mención.

D_3 Infinito en Acto

En esta categoría se encuentran los documentos que mencionan al infinito actual, lo comparan con el infinito potencial, planteando una contradicción-tensión teórica, pues se considera al infinito en acto contrario a éste pero complementario y relacional en cuanto la contra-intuición, principalmente, además de otros conceptos como límite infinitesimal, función continuidad, número real, conjuntos infinitos, y movimiento

D_4 Infinito en potencia

En esta categoría se ubican los documentos que mencionan al infinito potencial y su relación directa con la intuición, como característica eminente del mismo.

D_5 Propuestas

De esta categoría se generan dos subcategorías, la primera en la que se potencia el aprendizaje del infinito dentro del aula y, la segunda en la que se intentan detectar errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con el infinito.

Como es de esperar, hay propuestas que entran dentro de varias categorías y esto permite un mejor desarrollo de la interpretación de cada categoría. Por lo que parte de los constructos a evidenciar pretende establecer las correlaciones de las mismas.

Marco Teórico

En el presente marco teórico se mostrarán algunos elementos que serán definidos a través de las categorías de análisis plateadas en el esquema anterior. En un primer momento y centrados en la categoría de epistemología (C_1), se hablará de personajes, conceptos y demostraciones que permitieron, a través de la historia la construcción del infinito actual como concepto, de tal manera que C_1 se verá complementada por las categorías de infinito en acto (C_3) e infinito en potencia (C_4), es decir, se realizará una descripción parcial del desarrollo histórico del concepto de infinito centrados en los objetos matemáticos y aspectos del infinito considerados pertinentes para la construcción y desarrollo de la secuencia de actividades, encontrados en el rastreo documental y posteriores consultas, atendiendo así a uno de los objetivos específicos. En un segundo momento se hablará de la categoría de propuestas (C_5), unas en las que se detectan errores y otras en las que se habla de la comprensión, aceptación y construcción del infinito, lo cual permitirá relacionar esta categoría con la de análisis didácticos (C_2), pues son estas propuestas las que permitirán que el infinito pase de ser un concepto abstracto a ser un concepto construible en el aula de matemáticas, además se identificaran los elementos didácticos que se consideran los más pertinentes para la construcción de la propuesta de actividades. Finalmente se presentan ciertas características del infinito actual que le permiten ser un potenciador del pensamiento crítico en los estudiantes.

Un corruptor que intrigó la mente del ser humano por cerca de veinte siglos

En aras de describir los aspectos más relevantes del desarrollo histórico del concepto de infinito, se empezará con la cultura griega, pues algunos autores acervan que posiblemente, es ésta una de las primeras culturas que se acerca al cuestionamiento sobre el infinito, entre ellos Bombal (2010) que afirma:

> Los griegos parece que fueron los primeros, como en tantas ocasiones, en abordar rigurosamente el problema del infinito y, como veremos, los resultados no fueron muy satisfactorios que digamos. La palabra que utilizaron para designar los distintos aspectos del infinito fue απειρου (ápeiron), formada por el prefijo negativo α y la raíz πειρο (límite), que literalmente significa ilimitado, pero también indefinido, totalmente desordenado, infinitamente complejo, etc. (p.444).

Luego son los pitagóricos en relación al infinito; quienes se ven enfrentados al problema relacionado con la construcción de los números irracionales y la inconmensurabilidad, como bien lo menciona Crespo (s.f):

> Históricamente, el surgimiento de los números irracionales se vincula con la geometría. En época de los pitagóricos, unido a la aparición de magnitudes inconmensurables, en un escenario en el que se consideraba que todo el universo estaba construido armónicamente y que esa armonía podía expresarse como cociente de números enteros. (p.22).

Un ejemplo claro que puede presentarse; es la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado comparada con el lado del mismo:

Calderón (2014). Hace menciona a la siguiente demostración, que es atribuida a los pitagóricos, demostración que sirve como prueba del carácter infinito que tiene el proceso de buscar la medida común entre un lado de un cuadrado y su diagonal (como se verá posteriormente, de manera geométrica, cuando se haga mención de Euclides):

> Dado el cuadrado de lado l y diagonal d se tendrá por el teorema de Pitágoras que:
>
> $$l^2 + l^2 = d^2$$
> $$2l^2 = d^2$$
>
> Se hace una reducción al absurdo en la que deben existir dos enteros a y b, que son primos relativos, tales que:
>
> $$\frac{l^2}{d^2} = \frac{a^2}{b^2} = 2$$
>
> Entonces:
>
> $$a^2 = 2b^2$$
>
> a^2 es par al igual que a, por lo que se cumple que:
>
> $$(2k)^2 = 2b^2$$
> $$2k^2 = b^2$$
>
> b^2 es par al igual que b, pero esto no es posible porque a y b eran primos relativos.

Algunas décadas después puede encontrarse a Zenón quien presenta unas paradojas frente a la imposibilidad del movimiento, y en algunos documentos como el de Cajori (1987) se le pone en dialogo con Aristóteles, pues éste último intenta demostrar que las paradojas de Zenón son derivadas de un error en el razonamiento lógico, cuando en realidad, según Tannery (como se citó en Cajori, 1987), lo que pretendían no era negar el movimiento ni el continuo, sino mostrar su imposibilidad bajo la perspectiva del espacio como suma de puntos, de los Pitagóricos. Se considera necesario mencionarlas de manera explícita para tener una claridad frente a estas:

> Para mayor claridad vamos a repetir los argumentos de Zenón en una forma más explícita dada por la cual es una paráfrasis libre de los enunciados de Aristóteles. Nos

parece conveniente, para Burnet, referencias futuras, usar los nombres "Dicotomía", "Aquiles", “Flecha” y "Estadio" para los cuatro argumentos contra el movimiento, respectivamente.

"DlCOTOMÍA": No se puede recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Se debe recorrer la mitad de cualquier distancia antes de recorrerla toda, y la mitad de ésa otra vez antes de recorrer el todo, y la mitad de ésa otra vez antes de recorrerla. Esto pasa ad infinitum, de manera que (si el espacio está hecho de puntos)1 hay un número infinito en cualquier espacio dado y recorrerse en un tiempo finito.

"AQUILES": El segundo argumento es la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga. Aquiles primero debe llegar al lugar del que partió la tortuga. Mientras, la tortuga recorrerá una distancia pequeña. Aquiles debe recorrer ésta, y todavía la tortuga estará adelante. Aquiles está cada vez más cerca, pero nunca la alcanza.

"FLECHA": El tercer argumento contra la posibilidad de movimiento a través de un espacio formado por puntos es que, con esta hipótesis, una flecha en cualquier momento de su vuelo debe estar en reposo en un punto particular.

4. "ESTADIO": Supongamos tres filas de puntos en yuxtaposición como en la Fig. 1.

Fig. 1 Fig. 2

[1] Cabe aclarar que en (Cajori) hace una nueva interpretación de las paradojas de Zenón en las que se afirma que el movimiento sería imposible si el espacio estuviese hecho de puntos.

A . . . . . A . . . . .

B . . . . . B .•.•.•.•.•

C . . . . . C . . . . .

> Una de estas (B) no se mueve, mientras que A y C se mueven en direcciones opuestas con la misma velocidad hasta llegar a la posición representada en la Fig. 2. El movimiento de C relativo a A será el doble de su movimiento relativo a B, o, en otras palabras, cualquier punto dado en C ha pasado el doble de puntos en A de los que ha pasado en B. No puede por lo tanto, darse el caso de que un instante de tiempo corresponda al paso de un punto a otro.
>
> Por otro lado, Aristóteles y los posteriores escritores griegos interpretaron los argumentos como falacias y dedicaron su agudeza mental a intentar resaltar la verdadera naturaleza de las falacias. Con excepción de los estudios recientes de Cousin, Grote, y Tannery, la historia de los argumentos de Zenón contra el movimiento ha sido, durante 2000 años la historia de los intentos para explicar las "falacias" de Zenón. Aristóteles reconoció la gran dificultad en exponer su fuente oculta de error lógico. El sexto libro de su Física está dedicado a la exposición de las sutiles nociones de continuidad e infinito. De hecho toda la Física, que abarca alrededor de 225 páginas en impresión moderna, dedica sus 8 libros completos a la discusión de las nociones de movimiento, divisibilidad, continuidad, infinito y vacío. (p.8-9).

Los argumentos de Aristóteles jugaron un papel determinante en la construcción del infinito actual como concepto, pues al parecer muchos personajes como Euclides, deciden no tomar partido en la discusión por respeto a dicha autoridad de Aristóteles;

Sin embargo por medio de algunos argumentos y definiciones, es Euclides es uno de los que se enfrenta indirectamente a problemas relacionados con el infinito, cuando intentan establecer medidas comunes para para dos segmentos dados; "***Definición 1***. *Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, y inconmensurables aquellas de las que no es posible hallar una medida común."* [Df.1-X] (Euclides, p.1.).

En base a la definición anterior un ejemplo claro de magnitudes inconmensurables es la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo. Como se muestra en la siguiente construcción:

Construir un segmento $\overline{AB}$ y sobre éste levantar el cuadrado $ABCD$ (proposición 45 elementos de Euclides), después unir con un segmento los vértices B y D (siendo el segmento $\overline{BD}$ diagonal del cuadrado $ABCD$) y trazar una circunferencia con radio $\overline{BD}$ con centro en B, el corte de ésta circunferencia y la prolongación de $\overline{AB}$ será el punto E, Ahora se traza la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$ creando así el punto H que es intercepción entre ésta circunferencia y el segmento $\overline{BD}$, finalmente se construye el triángulo ΔBHE y resultará el punto F como intercepto de los segmentos $\overline{EH}$ y $\overline{DA}$.

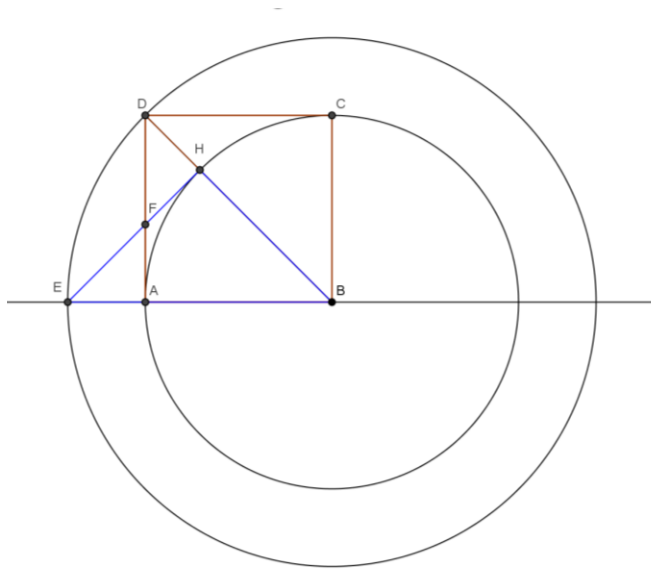


Figura 3: Medida de la diagonal de un cuadrado

Este esquema fue realizado por los autores exclusivamente para este trabajo. Imagen editada en el software Geogebra.

Se puede evidenciar que los triángulos ABD y EHB son congruentes, pues BD y BE son radios de la misma circunferencia, y el ángulo DBE es común para ambos, además los segmentos BH y AB son radios de la misma circunferencia por el criterio LAL demostrado por Euclides (p.65) [V-IX] los triángulos ABD y EHB son congruentes, también son isósceles y los ángulos DAB y EHB son rectos, por lo que los segmentos EH y DA son tangentes a la circunferencia de radio AB por los puntos H y A respectivamente.

Ahora bien los Segmentos AE y DH son congruentes, pues son el resultado de quitar AB a BE y BH a BD, y DE es congruente con BD y AB con BH, también los ángulos EHD y FAE son rectos son suplementos de los ángulos EHB y BAD respectivamente, además BEH es congruente con ADB, por el criterio AAL demostrado por Euclides (p.66) [V-IX]

Teniendo en cuenta que el triángulo AEF es isósceles y rectángulo, dado que el ángulo AEF es la mitad de un ángulo recto y EAF es recto entonces se concluye que AEF es la mitad de un ángulo recto y el triángulo AEF es la mitad de un cuadrado.

De lo anterior se puede afirmar que la construcción realizada sobre el segmento AB puede hacerse nuevamente sobre el segmento EA, también sobre el segmento que resulte de restar EA a EF, y en general para cualquier cuadrado que se levante sobre la diferencia entre la diagonal y el lado de cualquier cuadrado dado, ya que se cumplirán las mismas propiedades mencionadas en los párrafos anteriores. A este proceso se le llamará proceso recurrente o de autosimilaridad o autosemejanza definido por Sabogal y Arenas (2011) como: “el todo está formado por varias copias de sí mismo, solo que reducidas y puestas en diferente posición; o, dicho de otra manera: el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala.”(p.9).

Al ser un proceso de auto-semejanza sucede que al comparar el segmento que representa la diferencia entre los segmentos EB y AB, segmento AE con el lado AB, entra dos veces enteramente dando como residuo el segmento EA y como el proceso es de auto-semejanza el segmento que resulte de restar EA a EF entrará dos veces en la EA, y en general para cualquier cuadrado que se levante sobre la diferencia entre la diagonal y el lado de cualquier cuadrado dado se cumplirá la misma relación, y la expresión simbólica que se utilizará para representar ésta auto-semejanza en la comparación es la siguiente:

$$M = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}$$

Donde M es la medida de la diagonal BE en términos del segmento unidad AB.

En la edad media se mantiene el mismo respeto por los argumentos de Aristóteles por lo que algunos autores como Tomas de Aquino presentan argumentos en contra la existencia de un infinito actual, como se puede evidenciar en la siguiente cita:

> La autoridad de Aristóteles en el pensamiento medieval será determinante, en este como en otros aspectos (Arrigo & D'Amore, 1993). Agustín de Hipona (426/1965) había reservado solo a Dios el conocimiento del infinito actual, pero los escolásticos, en general, seguirán el dictum de Aristóteles (trad. 1985, p. 348), "…el infinito no puede ser una cosa actual…", que recogerán como Infinitum actu non datur (Dauben, 1979, p. 122). Tomás de Aquino (1274/1966, p. 108) explicitará "…Por tanto, no es posible que pueda existir una multiplicidad infinita actual". (Mena, Mena,, Montoya, Morales, y Parraguez, 2015, p.334).

A pesar de los sucesos y la discusión, entran en escena autores como Galileo que se Hacen crecer un poco al infinito como concepto, hasta que las especulaciones medievales y renacentistas frente al infinito; que prácticamente presentan algunos argumentos para decir que los infinitos no se pueden comparar porque todos son iguales, un ejemplo de esto es:

> (…) Galileo (1638/2010, p. 34), tras observar en su lenguaje que los números naturales están en correspondencia biunívoca con sus cuadrados, que los conjuntos correspondientes son infinitos y que la cantidad de cuadrados sería menor que la de los números naturales, concluye que "los atributos 'igual', 'mayor' y 'menor' no tienen sentido cuando se habla de infinitos. (Mena, et al, 2015, p.335)

Un nuevo camino hacia el infinito

Es en siglo XVII con la revolución que tuvo la ciencia, es evidente como muchos autores, como John Wallis, Bernhard Bolzano, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, entre los más representativos son los primeros en utilizar al infinito actual dentro de sus demostraciones, e intentan dar una formalización al concepto de dicho concepto.

> El teólogo y matemático checo Bernhard Bolzano fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito actual, en su obra póstuma Paradojas del infinito

> (1851), defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Bolzano aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición del infinito fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind. (Ortiz, 1994)

En el siglo XIX aparecen algunas publicaciones que dan una luz a los matemáticos para resolver el problema de la definición y clasificación del infinito, un ejemplo de éstas puede ser:

> Desde (Corzo, 2001, p. 408) La obra de Bolzano, Paradojas del Infinito, de 1851, es antecedente de la declaración de la existencia de conjuntos infinitos, caracterizándolos como aquellos conjuntos que pueden ponerse en biyección con un subconjunto propio de sí mismos. Presentó también la relación de "estar contenido en" distinguiéndola de la relación "tener menor tamaño que". En esta obra, Bolzano afirma que podían atribuirse a los conjuntos infinitos números (lo que Cantor llama números transfinitos) y que habría más de uno de ellos. Este intento, sin embargo, fue fallido, ya que no era clara la noción que se consideraba de cardinal de un conjunto. Debido a eso, Bolzano encuentra paradojas en el tratamiento de estos números, con lo cual asume que no iban a resultar "necesarios para fundamentar el cálculo y abandonó la tarea". Citado por (Lestón, 2011, p.90).

Los transfinitos de cantor

Cantor junto con Bolzano son al parecer los primeros personajes en la historia de las matemáticas en establecer una relación de orden para diferentes infinitos;

> Actualmente Cantor es reconocido como el creador de un sistema matemático en que el que los números de magnitud infinita definen una jerarquía de infinitos con una aritmética muy precisa, dando un significado matemático a la idea de que hay infinitos más grandes que otros (Núñez, 2003), pero en su época se trató de una tarea sumamente atacada y cuestionada por la comunidad matemática que actuaba en su mismo escenario sociocultural". (Lestón, 2011, p. 92)

Además de poner la relación de orden mencionada anteriormente Cantor hace la distinción entre las dos clases de infinito, el primero de ellos al que llamó impropio; es el utilizado por la comunidad matemática hasta ese momento:

> Primero distingue al infinito impropio como el infinito matemático que hasta ese momento había sido aceptado. Ese infinito tiene como característica el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita (Cantor, 2006, p. 85). Este infinito puede relacionarse con el infinito potencial de los griegos, que había llegado desde la antigüedad hasta el siglo XX, es algo finito variable. (Lestón 2011. p. 95).

El segundo de ellos es el infinito propio que es equiparable con el infinito actual no aceptado por Aristóteles:

> (…) define a un infinito propio que permite justificar un pensamiento que ya estaba siendo usado: la existencia de un punto en el campo que representa la variable compleja ubicado en el infinito, infinitamente distante de los otros pero determinado; sobre el cual se examina el comportamiento de la función del mismo modo que se hace con el resto de los puntos ubicados en la región finita, encontrándose el mismo

tipo de comportamiento. Este tipo de infinito es para Cantor un infinito determinado. (Lestón 2011P.p. 95).

Desde (Cantor, 2006, p. 88) se define la igualdad entre conjuntos infinitos como: *"Conforme a este concepto, a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, de modo que dos conjuntos tienen la misma potencia si se pueden coordinar uno con otro, elemento a elemento, biunívocamente*" (citado por Lestón 2011 p. 96).

La diferenciación entre las dos clases de infinito, le permite a Cantor hacer una propuesta de la construcción de los números irracionales, a partir de familias de intervalos encajados, para lo que se vale de las siguientes definiciones y proposición Calderón (2014):

Definición 3.19. Sea $(K, + *, \leq)$ un cuerpo ordenado. Dados a, b en K con $a \leq b$, se llama intervalo cerrado de extremos ay b y se designa por [a, b] al conjunto conformado por todos los elementos $x \in K$ tales que $a \leq x \leq b$.

Definición 3.20. Se llama una familia de intervalos encajados, al conjunto de intervalos I_1, I_2, I_3 ... $I_k = [a_k, b_k]$, subconjuntos de R, donde,

1. Para todo $k \in N, I_{k+1} \subset I_k$, es decir el intervalo I_k está contenido en el anterior.
2. Si los extremo de cada intervalo I_k son a_k y b_k, y $\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = 0$

Proposición 3.21. Principio de intervalos encajados.

Sea $I_n, n \in N$ una familia de intervalos cerrados, tal que;

1. $I_{n+1} \subset I_n$.
2. Dado $\epsilon > 0$, existe un numero natural n, tal que la longitud de I_n es menor que ϵ

$$\text{Entonces} \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = x$$

(p.39).

Para el caso particular de $\sqrt{2}$ se presenta la siguiente interpretación desde la familia de intervalos encajados:

Obsérvese la siguiente tabla

Tabla 2

Extremos en los intervalos encajados

n	Fracción	Forma de la fracción	Representación con decimales
1	1	1	1
2	3/2	$1+\frac{1}{1+1}$	$1{,}5$
3	7/5	$1+\frac{1}{1+\frac{3}{2}}$	$1{,}4$
4	17/12	$1+\frac{1}{1+\frac{7}{5}}$	$1{,}41\overline{6}$
5	41/29	$1+\frac{1}{1+\frac{17}{12}}$	$1{,}4137931034482758620689655172414$
6	99/70	$1+\frac{1}{1+\frac{41}{29}}$	$1{,}\overline{4142857}$

7	239/169	$1+\cfrac{1}{1+\frac{99}{70}}$	1,4142011834319526627218934911243
8	577/408	$1+\cfrac{1}{1+\frac{239}{169}}$	$1{,}4142\overline{1568627450980392}$
9	1393/985	$1+\cfrac{1}{1+\frac{577}{408}}$	1,4142131979695431472081218274112
10	3363/2378	$1+\cfrac{1}{1+\frac{1393}{985}}$	1,4142136248948696383515559293524

Se puede evidenciar que en la tabla los números para los cuales n toma un valor impar son menores que raíz de dos, y los números para los cuales n toma un valor par son mayores que raíz de dos. Siendo así se pueden construir las siguientes sucesiones:

$$S_1 = 1, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \frac{1393}{985}, \ldots$$

$$S_2 = \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \frac{577}{408}, \frac{3363}{2378}, \ldots$$

Ahora se procederá a demostrar que la sucesión que se presentó anteriormente a partir de la fracción continúa de $\sqrt{2}$ cumple con ser un cuerpo ordenado y que cumple las definiciones citadas anteriormente:

Defínase a los intervalos encajados de número racionales para la construcción de $\sqrt{2}$ de la siguiente manera:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}$$

Para encontrar cada término de la sucesión propuesta en la tabla (1) se tiene que:

$$\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{7}{5},\frac{17}{12}\right],\dots,I_k=[a_{2k-1},a_{2k}]$$

Donde $I_1=\left[1,\frac{3}{2}\right],I_2=\left[\frac{7}{5},\frac{17}{12}\right],\dots,I_k=[a_{2k-1},a_{2k}]$ y a_{2k-1},a_{2k} son los límites superiores e inferior del intervalo I_k respectivamente. La comprobación de que se cumplen la definición 3.19 y la proposición 3.21 se deja en manos del lector.

Para terminar con éste recorrido histórico se hace referencia a Richard Dedekind, el cual demostró que los números reales son continuos, esto por medio de las cortaduras como se define a continuación desde Calderón (2014):

Definición 3.1. Una cortadura es un conjunto C de números racionales tal que

1. C es diferente de vacío, pero no tiene a todos los números racionales.
2. Si $\mathrm{r} \in \mathrm{C}$ y $\mathrm{s} < \mathrm{r}$ (r número racional), entonces $\mathrm{s} \in \mathrm{C}$.
3. No existe en C un racional que sea máximo de C. (p. 22)

Definición 3.2. Un cuerpo K es un anillos conmutativo con unidad, donde se cumple la siguiente condición:

Para cada a≠0 en K existe un elemento $\mathrm{a}^{-1} \in \mathrm{K}$, tal que $(\mathrm{a} \bullet \mathrm{a}^{-1}) = 1$. (p. 23)

Definición 3.3. Sean C_2 y C_2 cortaduras; C_1 < C_2 si existe un racional q tal que q ϵ C_2 y q no esta en C_1, la figura 3.2 muestra esta realción.

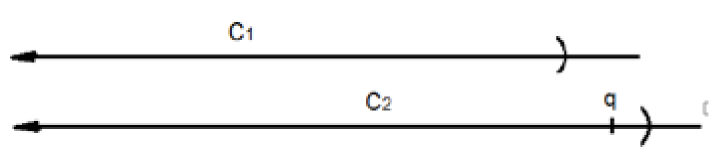


Figura 4: Relación de orden entre cortaduras

Imagen tomada de (Calderón 2014. p. 24).

La prueba de que se cumplen la definición 3.1, 3.2 y 3.3 se deja en manos del lector.

Propuestas de aula relacionadas con el infinito actual

En el ya mencionado rastreo documental, se encontraron documentos que corresponden a propuestas de aula cuyo propósito es señalar errores y dificultades en la enseñanza de conceptos relacionados con el infinito (tanto didácticos como obstáculos epistemológicos), o enseñar conceptos o nociones relacionados con el infinito. Estas propuestas, junto con su teoría relacionada y resultados, conforman la categoría C_5 de los referentes teóricos del presente trabajo.

Respecto a esta categoría, se comienza haciendo mención a las propuestas que de una u otra manera pretenden aportar a la enseñanza del concepto de infinito o conceptos relacionados. En el rastreo documental se encontraron dos documentos de este tipo: *Construcción social del concepto de Número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales* (Rico y Romero, 1999) y *Análisis de aspectos epistemológicos en la historia del infinito, fundamentales para la construcción del límite de una función (propuesta de aula)* (Chaparro y Muñoz, 2012).

El primero de ellos constituye una secuencia de enseñanza en torno a la construcción del número real a partir del supuesto de que existe relevancia por parte de los factores sociales y contextuales, tanto en el progreso cognitivo en el dominio social, como en la construcción de conocimiento matemático y el pensamiento no opera de manera independiente del contexto. Para este caso particular, se observó cómo las interacciones tuvieron un efecto desencadenante de la construcción de conocimiento matemático, que si bien, no cubrió la totalidad del objeto matemático tratado, permitió a los estudiantes realizar avances significativos en su comprensión, evidenciado en múltiples conversaciones sustantivas actitudinales (Rico y Romero, 1999).

El segundo documento, constituye una secuencia de actividades cuyo propósito es contribuir a la superación del obstáculo epistemológico denominado “Horror al infinito” en estudiantes y a su vez facilitar a ellos el aprendizaje del límite. Dicha propuesta fue construida con base en un análisis epistemológico que los autores realizaron sobre el desarrollo histórico del concepto de infinito, En el que pudieron evidenciar cómo a través de la historia, los obstáculos epistemológicos del límite se presentaron y fueron superados (Chaparro y Muñoz, 2012).

Ahora bien, en cuanto a las propuestas de aula que pretenden señalar errores y dificultades en la enseñanza de conceptos relacionados con el infinito, el rastreo documental permitió tener conocimiento de varios documentos de este tipo, en los que enuncian dificultades, errores y obstáculos epistemológicos encontrados en diversas muestras de personas, además de la teoría didáctica que respalda a dichos documentos.

A continuación se describen las relaciones que tienen estos documentos, tanto en resultados como en la teoría en la que se sustentan, además de la descripción de los obstáculos epistemológicos relacionados al infinito, que se tienen en consideración para realizar el diseño de la secuencia de actividades de este trabajo.

Teoría APOE sobre la comprensión matemática

La teoría APOE (sigla de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) propuesta por Dubinsky, fue influenciada por la propuesta de Piaget sobre el proceso de *abstracción reflexiva* como la clave de la construcción de los conceptos lógico-matemáticos (Meel, 2003, p.243). Según esta teoría, la comprensión matemática se da mediante un proceso cuyo fin es configurar esquemas mediante la *abstracción reflexiva* descrita por Piaget.

Según Dubynsky (como se citó en Meel, 2003) existen cinco tipos de construcciones, de acuerdo con Piaget, esenciales para desarrollar conceptos matemáticos abstractos –generalización, interiorización, encapsulamiento coordinación y reversión-. Tales construcciones permiten la transformación de las Acciones en procesos, procesos en objetos y objetos en esquemas. Sin embargo resulta necesario definir cada uno de estos elementos y cómo las construcciones propuestas por Piaget permiten su transformación dentro de esta teoría.

- Acciones: Son en esencia las manipulaciones que se hacen de objetos físicos o mentales. Se equiparan con operaciones mentales o físicas repetibles que transforman de alguna manera un objeto físico o mental.
- Procesos: La interiorización que describe Piaget, permite que las acciones, después de una secuencia de repetición, se conviertan en procesos, que son una construcción interna, dándose que el estudiante es capaz de realizarlo, repetirlo, describirlo y revertirlo.
- Objetos: Los objetos son el resultado del encapsulamiento, que consiste en la transformación de un proceso mediante una acción, cabe mencionar que el estudiante ha de ser capaz de *desenpasular* el objeto en el proceso del que surgió cuando así lo requiera.
- Esquemas: Finalmente, los esquemas son colecciones de procesos y objetos que guardan cierto grado de coherencia entre sí, que es utilizado por el estudiante para organizarse y comprender el sentido de determinado fenómeno. Usualmente los esquemas contienen a otros esquemas y se dan mediante la generalización que

describe Piaget, sobre las relaciones entre acciones, procesos, objetos y otros esquemas (Meel, 2003).

Esta teoría en particular fue utilizada en uno de los documentos presentes en el rastreo documental, llamado *"El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas"*, en éste se realizan, una descomposición genética genérica del concepto de infinito y de su relevancia en dos paradojas, la del hotel de Hilbert y la de las pelotas de tenis. Posteriormente concluyen que la construcción de conceptos matemáticos relacionados con el infinito tiene bases en las ideas generadas en contextos extra-escolares. En dichas ideas se concibe al infinito sólo en potencia y los docentes deben guiar a los estudiantes con dichas nociones intuitivas (Asuman y Roa, 2014).

Es así como, para lograr aprehender el concepto de infinito –o acercarse de cierto modo a esta aprehensión-, se necesita conciliar la dualidad entre el infinito potencial y el infinito actual, dándole fin a un proceso interminable y aceptando a este como una totalidad, como un objeto. Respecto a esto, Mena y otros (2015) afirman:

> Los antecedentes históricos planteados al inicio refuerzan la conclusión de que el infinito es un obstáculo epistemológico: el origen del problema que enfrenta la persona al abordarlo se puede pesquisar en lo que la propia historia nos muestra respecto de las dificultades que los matemáticos tuvieron que sortear ante situaciones de carácter similar, y es bien posible que esa persona enfrente dificultades similares a pesar de la (mayor) información previa de la cual pueda disponer. (Por supuesto, se pueden encontrar en la historia otras situaciones que se

> han resistido al abordaje, eventualmente por siglos –el cero, los números negativos, los irracionales, los imaginarios…–).
>
> Ahora bien, la experiencia que hemos realizado una docena de veces –ya sea como formadores de didactas de la matemática/matemáticos educativos, o bien como divulgadores de la disciplina–, una muestra de las cuales dimos en 2.4, evidencia cómo las personas pueden seguir pensando lo que un enunciado les sugiere, de manera independiente y aun contradictoria a lo que la prueba matemática establece.
>
> Un obstáculo epistemológico se caracteriza generalmente por su persistencia, que le hace reaparecer en diversas situaciones; nosotros hemos mostrado, para este caso, su *resistencia* (p.350).

Lo que estos autores nos plantean en la anterior cita, pone de manifiesto dos puntos a considerar: El infinito como obstáculo epistemológico y el carácter contra intuitivo del infinito.

El infinito como obstáculo epistemológico

Para poder referirnos al infinito como obstáculo epistemológico, es necesario conocer la definición de *obstáculo epistemológico,* del que Bachelard (como se citó en Mena y otros, 2015) señala que son "conocimientos aparentes, que impiden tener acceso a nuevos conocimientos y que, ocasionalmente, al ser movilizados, se develan precisamente como impedimentos" (p. 336), además, un obstáculo epistemológico puede resultar útil, o verse como un conocimiento válido en ciertos contextos, mientras que llega a ser fuente de errores en otros contextos.

El desarrollo histórico del concepto de infinito permite apreciar cómo las consideraciones y entendimiento sobre éste, en determinados momentos históricos, no representaron conflictos con el desarrollo de la matemática, sin embargo en otros momentos fueron aquello que impidió su avance, por ende tuvieron que ser modificadas (Mena y otros, 2005, p. 349). Además de esto, el infinito también presenta cierto carácter *ontogenético* dado que no es posible tratarlo en todas las edades, esto depende de los objetos matemáticos asociados al infinito y la posibilidad de los estudiantes de hacer uso de ellos (Mena y otros, 2005, p. 350), por lo que una posible secuencia de actividades con el objetivo de aportar a la comprensión del infinito actual, puede desarrollarse a partir de diversos objetos matemáticos, con la posibilidad de ser diseñada para distintos rangos de edad.

Para tener claridad respecto a los aspectos del infinito, en términos de su desarrollo epistemológico, que pueden verse reflejados en el aula de clase como obstáculos epistemológicos particulares del infinito, se realizó la lectura de todos aquellos documentos de análisis didáctico y propuestas de aula (ya sea para enseñar o para detectar dificultades) encontrados en el rastreo documental. Se encontró que la mayoría de ellos pueden ser clasificados según el *análisis de aspectos epistemológicos en la historia de infinito* realizado por Chaparro y Muñoz (2012), que consiste en la explicitación, a partir del análisis del desarrollo epistemológico del infinito, de las diferentes interpretaciones, representaciones y contextos en los que se ha presentado. Dicho análisis se describe a continuación.

Aspectos epistemológicos en la historia de infinito

- Noción primitiva del infinito.

Corresponde al carácter de *infinito* que se le atribuye a cantidades *"muy grandes"* aunque contables, ocasionado generalmente por la imposibilidad física o relativa a los sistemas de numeración para obtener cardinales de conjuntos "grandes" (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 26).

- Infinito como proceso.

Corresponde al infinito con un carácter de *proceso*, en el que cierta acción o secuencia de acciones se repite indefinidamente. El proceso puede a su vez tener un carácter aditivo o reductivo cuando se realiza sobre números o magnitudes, siendo el primero cuando el número o la magnitud crece y el segundo cuando decrece.

En este aspecto puede presentarse el infinito como obstáculo epistemológico, dado que resulta insuficiente en situaciones, como la exhaución (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 27), en las que es necesario darle un fin al proceso.

- Indivisibles e infinitesimales.

Corresponde a la problemática de operatividad, respecto a la definición, de cantidades denominadas *indivisibles* e *infinitesimales*, derivadas de procesos infinitos reductivos, pues al no aceptar el fin de los procesos, estas cantidades se consideraban diferentes de cero. Si bien los resultados de las operaciones que se realizan con estas concepciones de infinitesimal e indivisibles, resultaban correctas en la mayoría de los casos, por la misma definición de cantidad "infinitamente pequeña" les era elusiva la formalidad y el rigor (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 31).

- Números irracionales.

Corresponde a la dificultad para definir a los *irracionales* ([Ecuación]), algebraicos y trascendentes, debido a que representan medidas de magnitudes obtenidas mediante procesos infinitos. Dicha dificultad se acentúa si se carece, como sucedió en determinado momento de la historia, de definiciones formal de *continuidad*, completitud de un *conjunto numérico* y *límite* (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 38).

- Continuidad y completitud.

Este aspecto histórico del infinito está relacionado al uso de nociones de *continuidad* y *completitud* para la realización de demostraciones matemáticas, basados en ideas propias de movimiento físico, o afirmaciones que carecen de rigor matemático. Si bien, gracias al uso de estas nociones aún no formalizadas, se lograron importantes desarrollos en la matemática, la aceptación y validez de estos requería definiciones formales y rigurosas para las nociones en cuestión (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 41).

- Formalización de conceptos.

Este aspecto histórico del infinito tiene como característica que los problemas y dificultades relacionados con el infinito en el desarrollo de las matemáticas, son solucionados mediante la creación de definiciones formales, comenzando por la definición de *límite*, que da solución a las problemáticas generadas por los indivisibles e infinitesimales. A su vez, la definición de límite permite definir *continuidad* y *completitud* de un conjunto numérico, gracias a que los números irracionales son ahora definidos mediante el uso de límites, que representan el fin de procesos infinitos, es decir, el infinito como objeto, lo que representa la aceptación del **infinito actual** (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 44).

Carácter contra-intuitivo del infinito y pensamiento crítico

Como lo menciona Waldegg (1996), "Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones locales. Algunos responden muy parecido ante una situación propuesta, pero, cambiando la situación, no reaccionan de manera similar" (p.116). Y, como se ha podido evidenciar a través del tratamiento que se ha realizado a propósito del infinito en el presente trabajo, como también lo afirman Asuman y Roa (2014):

- La comprensión del infinito está ligada a las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre el conjunto de los números naturales.
- El objeto trascendente no se desprende de manera directa del proceso iterativo infinito. El paso de la estructura dinámica a una estática está determinado por la capacidad del individuo para ver el proceso iterativo infinito como un todo, sin que el "último" número natural haya sido transformado. (p.75).

De lo anterior se puede inferir que las nociones intuitivas que son un obstáculo para aceptar al infinito como un concepto formal también terminan por impedir que se dé el paso de la estructura dinámica a la estructura estática que es necesaria para comprender al proceso iterativo infinito como un todo, por lo que se concluye que la comprensión del infinito actual implica la aceptación de hechos que resultan contra-intuitivos.

Como lo afirma Castellano (2007):

> El pensamiento crítico tiene que ser congruente hacia su propio interior, pero además debe resultar coherente en sus explicaciones de la realidad, de otro modo no tendría valor adaptativo para la especie y la conduciría inevitablemente hacia el

desastre. Asimismo, es un pensamiento parsimonioso y voluntario, expresa el deseo sincero de alcanzar una respuesta a problemas específicos, aunque también debe ser capaz de discernir cuando la información disponible es insuficiente o detectar sus límites, y en esos casos postergar la solución hasta que se alcancen mejores condiciones (p. 72).

En suma, Castellano (2007) afirma que "No es posible tener *certezas absolutas* sobre el conocimiento, pero en tanto una teoría pueda ser *falseable*, es científica" (p. 83), haciendo referencia una característica del pensamiento científico, característica compartida por este y el pensamiento crítico.

De lo que también se puede deducir que el pensamiento crítico requiere que la persona sea capaz de dar explicaciones de la realidad de acuerdo con hechos cuyo conocimiento sea disponible, pero al mismo tiempo y dado que no es posible tener certezas absolutas, ha de ser capaz de poner en duda dichas explicaciones de la realidad a la luz de otros hechos que, resulten o no en contra de su intuición, también brinden una explicación de la realidad o sugieran que la información disponible no resulta suficiente para formar una explicación coherente. Esto a su vez permite llega a la conclusión de que pensar críticamente, al igual que construir al concepto de infinito como "objeto", evalúe hechos tanto intuitivos como contra-intuitivos y concilie los elementos que estas dos perspectivas le ofrecen para llegar a una conclusión.

Lo anterior puede apreciarse en la descomposición genética genérica del infinito realizada por Asuman y Roa (2014) haciendo uso de la teoría APOE, esta concluye que para la construcción del infinito como “proceso” se requiere que la persona sea capaz de establecer aplicaciones biyectivas entre los naturales y términos de sucesiones generadas por procesos iterativos (infinito potencial). Posteriormente es necesario que el individuo realice el “mecanismo de encapsulación” que consiste en la aceptación, motivada por las preguntas realizadas en las diversas situaciones de donde surgen los procesos iterativos, de dichos procesos como un todo (infinito actual), abstrayendo al "objeto" (infinito) del proceso, aceptando que todos los números naturales han sido alcanzados y por ende todos los términos del proceso iterativo. Este mecanismo de encapsulación no es generalizable, en el sentido de que estará motivado por el contexto de cada situación (Asuman y Roa, 2014), sin embargo se puede afirmar, independientemente del mecanismo de encapsulación realizado en cada caso, que el hecho de realizarlo implica evaluar el carácter infinito del proceso a la vez que el carácter finito del "objeto" resultado y explicar a este último mediante el *infinito actual*, a su vez habiendo realizado un ejercicio del **pensamiento crítico**.

Como complemento a lo anterior, es posible relacionar elementos de la teoría APOE con algunas de las *habilidades esenciales del pensamiento crítico*, descritas por Facione (2007), por lo que se puede afirmar que una secuencia de actividades enfocada en potenciar la comprensión del infinito actual, resulta también un aporte al desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes a los que está dirigida.

Facione (2007) describe un conjunto de habilidades esenciales que han de ser desarrolladas por una persona si esta hace uso del pensamiento crítico. A continuación se describen brevemente y se enuncia su relación con elementos de la teoría APOE:

- Análisis.

Según Facione "consiste en identificar las relaciones de inferencia reales y supuestas entre enunciados, preguntas, conceptos, descripciones u otras formas de representación que tienen el propósito de expresar creencia, juicio, experiencias, razones, información u opiniones" (p. 5). Se asemeja a la *interiorización* descrita por Piaget, que permite el paso de acciones a objetos en la teoría APOE.

- Evaluación.

Según Facione es la "valoración de la credibilidad de los enunciados o de otras representaciones que recuentan o describen la percepción, experiencia, situación, juicio, creencia u opinión de una persona; y la valoración de la fortaleza lógica de las relaciones de inferencia, reales o supuestas, entre enunciados, descripciones, preguntas u otras formas de representación" (p. 5). Realizar esta evaluación puede corresponderse con realizar un operación mental en la que se determina la veracidad de cierta situación, lo que es una *acción*, dentro de la teoría APOE.

- Inferencia.

Según Facione es "identificar y asegurar los elementos necesarios para sacar conclusiones razonables; formular conjeturas e hipótesis; considerar la información pertinente y sacar las consecuencias que se desprendan de los datos, enunciados, principios, evidencia, juicios, creencias, opiniones, conceptos, descripciones, preguntas u otras formas de representación" (p. 5). Puede relacionarse con la concepción de esquemas en la teoría APOE, dado que la inferencia implica establecer relaciones entre distintos elementos para formar una entidad estructurada.

- Explicación.

Según Facione, al realizar un razonamiento, se hace uso de ella “tanto para enunciar y justificar ese razonamiento en términos de las consideraciones de evidencia, conceptuales, metodológicas, de criterio y contextuales en las que se basaron los resultados obtenidos; como para presentar el razonamiento en forma de argumentos muy sólidos” (p. 6). Se relaciona con el *desencapsulamiento* de Piaget, resultado del paso de proceso a objeto en la teoría APOE.

- Autorregulación.

Según Facione los autores la definen como “monitoreo auto consciente de las actividades cognitivas propias, de los elementos utilizados en esas actividades, y de los resultados obtenidos, aplicando particularmente habilidades de análisis y de evaluación a los juicios inferenciales propios, con la idea de cuestionar, confirmar, validar, o corregir el razonamiento o los resultados propios” (Facione, 2007, p. 6). La posibilidad de realizar autorregulamiento en la teoría APOE está condicionada por la existencia de esquemas, no estáticos que son susceptibles de cuestionar, confirmar, validar, o corregir.

CAPÍTULO 3

Naturaleza de la investigación

Como se ha mencionado en el planteamiento del problema, que dentro de esta investigación se pretende hacer una secuencia de actividades, en la que se pueda evidenciar el proceso reflexivo de los investigadores, como respuesta a la falta de recursos bibliográficos en relación con las intervenciones en el aula que tengan como principal objetivo fomentar la comprensión y aceptación del infinito actual por parte de los estudiantes.

Por lo anterior se escogió una investigación de orden cualitativo:

> Por su enfoque metodológico y su fundamentación epistemológica tiende a ser de orden explicativo, orientado a estructuras teóricas y suele confundirse con la investigación etnográfica dado su origen y su objeto de investigación.
>
> Utiliza preferentemente información cualitativa, descriptiva y no cuantificada. Estos paradigmas cualitativos e interpretativos, son usados en el estudio de pequeños grupos: comunidades, escuelas, salones de clase, etc. (Tamayo 1999, pg. 56).

De lo que deduce que éste tipo de investigación se caracteriza por la utilización de un diseño flexible para enfrentar la realidad y las poblaciones objeto de estudio en cualquiera de sus alternativas. Y se por las características que va a tener éste trabajo se escogió la investigación **"ex post facto" sobre hechos cumplido**, "Este tipo de investigación es apropiada para establecer posibles relaciones de causa-efecto observando que ciertos hechos han ocurrido y buscando en el pasado los factores que los hayan podido ocasionar" (Tamayo 1999, pg. 50).

Con base en (Tamayo 1999), se presentan unas etapas para realizar la investigación "ex post facto" sobre hechos cumplidos; 1) definir el problema, 2) revisar la literatura, 3) enunciar y justificar la hipótesis, 4) seleccionar los sujetos, 5) determinar las técnicas de recolección de datos y la efectividad de las mimas, y 6) definir los procedimientos para recoger, analizar e interpretar los datos, en términos claros y precisos. Se hacen la siguientes claridades; la primera, es que dentro de esta investigación se cumplirá con estas etapas, sin embargo no será en un orden estricto y la segunda es que desde el documento consultado se aconseja usar esta investigación cuando existen problemas de tipo económico y/o temporal. (pg. 50-51)

Consideraciones metodológicas

Para la realización de este trabajo de grado se establecieron cuatro fases en las que se desarrollaron procesos diferentes que resultan necesarios para la consecución de los objetivos, general y específicos. Las fases a saber, en orden secuencial, son: rastreo y análisis, aproximación teórica y construcción de marco teórico, diseño de secuencia de actividades, pilotaje y análisis.

Fase i: rastreo y análisis, del estado de la cuestión

La primera fase, de rastreo y análisis; consiste en la realización de un rastreo de documentos relacionados con el infinito, su enseñanza y aprendizaje, y posibles secuencias de enseñanza relacionadas con éste. El rastreo, ya realizado, dio como resultado que en el periodo comprendido entre 1987 y 2014 no hay propuestas, en español o inglés, enfocadas en la enseñanza de infinito actual. El posterior análisis de los documentos encontrados en el rastreo, resultará en el apartado de antecedentes del trabajo de grado, lo que satisface el primer objetivo específico ya que será un estado del arte para las propuestas del rastreo que en algunos casos están orientadas a la comprensión y aceptación del infinito actual para estudiantes del ciclo 5.

Fase ii: aproximación teórica, elaboración de constructos

La segunda fase, de aproximación teórica y construcción de marco teórico, corresponde a la consulta de material teórico de acuerdo a las necesidades sugeridas por el análisis de los documentos del rastreo. Esta consulta teórica se realiza tanto en materia matemática, didáctica y pedagógica. La consulta matemática se realiza para contar con suficiente sustento teórico y lo relacionado con el objeto matemático sobre el que se desarrolla este trabajo de grado, el infinito actual. La consulta didáctica se realiza para contar con sustentos para realizar el diseño de las actividades y la estructuración de la secuencia. La consulta teórica tiene especial importancia para contar con sustento teórico acerca del pensamiento crítico y la teoría pedagógica desarrollada a su alrededor. Con esto se cumplen el segundo y tercer objetivo porque se habrá construido un precedente histórico de la construcción del infinito actual basado en los elementos en los que concuerdan los autores, además se identificarán algunas características del pensamiento crítico y su posibilidad –sentido- de inclusión dentro de la secuencia de actividades.

Fase iii: diseño de secuencia de actividades, modelo deca

La tercera fase, de diseño de la secuencia de actividades, consiste en hacer uso de la teoría consultada y analizada, para diseñar la secuencia de actividades, con esto se satisface el objetivo general del trabajo de grado. Finalmente, se construirá un cuerpo de actividades en línea con los parámetros fijados por la metodología DECA, sus fases de construcción y sus intencionalidades manifiestas.

Fase iv: pilotaje y validación de las actividades

En la cuarta fase, de pilotaje y análisis, consiste en la aplicación las actividades a una muestra de estudiantes, posteriormente se realiza el correspondiente análisis de los resultados para determinar la efectividad de las mismas, realizar las modificaciones correspondientes, se lleva a cabo el afinamiento de las mismas y se compone la secuencia, fin último de este trabajo. Esto en tanto que el objetivo principal de este trabajo es diseñar una secuencia de actividades orientada a potenciar la comprensión del infinito actual, para estudiantes de grado décimo, por medio de la cual se aporte al fomento de pensamiento crítico en estudiantes colombianos, es necesario considerar la metodología sobre la cual se estructurará la secuencia y sus actividades para atender al objetivo mencionado.

Una vez se ha piloteado y validado las actividades se conforma el apartado de análisis y resultados, con lo que se presenta el producto esperado en este trabajo.

Descripción de la intervención

La intervención con la que se piloteo la secuencia, se realizó en el colegio Rodrigo Lara Bonilla en la jornada de la tarde con el curso 902 al que asistían 30-35 estudiantes por sesión, quienes se encontraban entre los 14 y 15 años de edad, rango correspondiente a las edades que comúnmente se encuentran en el grado décimo.

La intervención contó con 5 sesiones de clase, distribuidas de la siguiente manera:

- En las primeras dos sesiones se desarrolló la actividad 1 contando con un tiempo de 160 minutos,
- La segunda actividad se tardó 80 minutos, distribuidas en una sesión de clase.
- La tercera actividad se realizó en una sesión de clases de 80 minutos.
- La última actividad se realizó en una sesión de clases de 80 minutos

Con base en los resultados obtenidos se modificaron las actividades, e instrumentos que se muestran dentro de éste trabajo, conforme se comprobaron situaciones que podrían ser mejoradas y que fueron mostradas en el camino de la intervención.

Análisis de datos y categorías de análisis

Para analizar datos obtenidos durante el pilotaje de las actividades, ha sido necesario plantear categorías de análisis, para cada una de las actividades, que permitan categorizar y cuantificar los resultados de tal manera que sea posible determinar la efectividad de las situaciones presentes en los instrumentos y/o la necesidad de realizar correcciones y mejoras.

A continuación se presentan, relacionadas en una tabla, las categorías de análisis correspondientes a cada actividad, así como sus subcategorías derivadas de acuerdo a los resultados obtenidos. Las categorías fueron planteadas con base en los *aspectos - epistemológicos en la historia de infinito* (Chamorro y Muñoz, 2012), de modo que resulta posible relacionarlas con posibles dificultades que los estudiantes tengan al responder los instrumentos.

Tabla 3

Categorías de análisis

ACTIVIDAD	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	INDICADORES
De los triángulos a la medida.	E1: Reconocimiento de conmensurabilidad. (Indivisibles e infinitesimales)	C1-1: Comprensión de unidad de medida.	• I1-1-1: Comprende que es posible medir segmentos con unidades de medidas ajenas a las estandarizadas, y que estas pueden medir enteramente a segmentos (Euclides). • I1-1-2: Comprende que es posible medir segmentos como otros segmentos pero necesita referenciarlos según las unidades de medida estandarizadas.
		C1-2: Comparación de diferentes unidades de medida.	• I1-2-1: Compara y establece relaciones de orden entre unidades de medida (Euclides) a partir de un proceso. • I1-2-2: Establece relaciones de orden entre unidades de medida de manera aleatoria según conveniencia.
		C1-3: Divisibilidad entre unidades de medida.	• I1-3-1: Reconoce la diferencia entre realizar particiones a una unidad de medida y a otra diferente, además de sus implicaciones en las relaciones de las partes con el todo, en procesos para encontrar medidas comunes (Euclides). • I1-3-2: No reconoce la posibilidad de medir al todo, con una unidad de medida que mide a una de las partes del todo.
		C1-4: Expresión de	• I1-4-1: Representa, como números racionales, relaciones entre medidas de

		medidas como números racionales.	longitudes encontradas en un proceso para encontrar medidas comunes (crespo). • I1-4-2: Representa, como números racionales, relaciones entre medidas de longitudes encontradas en un proceso para encontrar medidas comunes y las relaciona en una sola expresión (crespo). • I1-4-3: Expresa relaciones entre mediadas como relaciones números racionales en su representación de número con coma, implicando a las unidades de medida estandarizadas.
¿Crece decrece?	E2: Reconocimiento de inconmensurabilidad. (Números irracionales).	C2-1: Establecer relaciones de orden entre números racionales muy cercanos entre sí.	• I2-1-1: Usa como referencia el valor posicional de los números pertenecientes a la expansión decimal de los números racionales parar comparar los términos de la sucesión y así establece la relación de orden. • I2-1-2 Escoge como criterio de comparación únicamente el primer número después de la coma de la expansión decimal.
		C2-2: Realizar operaciones con números racionales para encontrar los términos de la	• I2-2-1 Encuentra los términos de la sucesión usando las operaciones básicas con números racionales. • I2-2-2: Llega a un cociente mayor o menor al término de la sucesión correspondiente.

		sucesión.	
		C2-3: Sucesiones y series.	• I2-3-1: Encuentra distancias tan cercanas a cero cómo se deseen, a medida que se calcula la longitud de cada intervalo encajado. • I2-3-2: Asume que todos los términos de la sucesión son iguales y por los tanto los intervalos encajados tendrán longitud cero.
¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado?	E3: Conmensurabilidad o inconmensurabilidad de un segmento a partir de otro. (Infinito como proceso)	C3-1: Algoritmo de Euclides generalizado a través de relaciones de autosemejanza.	• C3-1-1: No Identifica relaciones de autosemejanza en la aplicación del algoritmo de Euclides. • C3-1-2: Reflexiona sobre el proceso realizado, identificando en éste la presencia de diferentes unidades.

		C3-2: Fracción continua.	• C3-2-1: Expresa la fracción continúa para $\sqrt{2}$ como resultado del proceso potencial, en términos de las diferentes unidades allí presentes. • C3-2-2: Usa un racional para expresar el proceso.
		C3-3: Límite irracional.	• C3-3-1: Realiza el proceso y entiende que el número al que se está acercando no pertenece al conjunto de los números racionales.
		C3-4: √2 como longitud de un segmento finito.	• C3-4-1: Aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor numérico de la diagonal de un cuadrado.
Un par de dados para el fin sin fin.	E4: Fin de un proceso infinito. (Continuidad y completitud)	C4-1: Completitud e incompletitud.	• I4-1-1: Comprende la incompletitud de la recta por los números racionales de la sucesión que genera a $\sqrt{2}$ (Calderón, 2014, p.24). • I4-1-2: Asume que $\sqrt{2}$ será parte de los términos de la sucesión en un número indeterminado, pero finito, de pasos.
		C4-2: Aceptación del infinito en	• I4-2-1: Acepta que el número $\sqrt{2}$ está definido por

	acto.	todos aquellos números, aunque infinitos, que son términos de la sucesión trabajada; por lo tanto existe como punto sobre la recta. • I4-2-2: No acepta la existencia de $\sqrt{2}$ como punto sobre la recta, dado el carácter infinito del proceso que lo genera.

CAPITULO 4

Secuencia de actividades

Justificación de la secuencia

Una secuencia de actividades enfocada en potenciar la comprensión del infinito actual, resulta de utilidad en los procesos educativos de estudiantes dado que objetos matemáticos como la derivada, el límite, la función, el número real, la recta numérica y la continuidad, se les pueden relacionar con el concepto de *infinito* en su interpretación de *infinito actual* (Cajori, 1987; Hernández, Mora y Romero, 2008; Jato, 2012); todos estos objetos matemáticos pueden relacionarse con algunos estándares básicos de competencias planteados por el Ministerio de Educación Nacional (2006), algunos de ellos, para el caso de los números reales –objeto matemático central de la presente secuencia-, son:

- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada (p. 88).

Por lo anterior, la secuencia contribuye directamente a la consecución de dichos estándares, lo que resulta contribuir a la consecución de objetivos de los procesos educativos de las instituciones del país.

Por otro lado, el MEN también propone lo siguiente:

> … hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar

> justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad.” (p.48).

Lo que puede ser interpretado como hacer uso del pensamiento crítico (Ramírez, 2008) y dado que en el marco teórico se concluyó que hacer el tránsito de entender al infinito como un proceso a verlo como un objeto (Asuman y Roa, 2014) –reconocer el infinito actual- implica también poner en práctica habilidades propias del pensamiento crítico (Facione, 2007), la secuencia de actividades también aporta al desarrollo de los estudiantes como ciudadanos, contribuyendo así al complimiento de uno de los fines de la educación planteados por el MEN (1994).

Modelo determinado para la secuencia

El modelo seleccionado para realizar la planeación de la secuencia de actividades fue el propuesto por el grupo DECA. Este modelo presenta una organización que consiste en cuatro tipos de actividades (sin incluir actividades de diagnóstico), cada uno con distintos propósitos respecto a la construcción del conocimiento. Según el grupo DECA (1992):

Las actividades de iniciación e introducción, sirven para que el alumno:

> - Explicite y exteriorice sus ideas previas sobre los contenidos que se van a tratar en la UD. La práctica docente a partir del modelo deca y la teoría…
>
> - Compruebe la necesidad de trabajar esos contenidos.
>
> - Se predisponga favorablemente para afrontar el desarrollo de la UD con una actitud positiva. - Compruebe que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones y que por tanto, deben ser transformados o ampliados.
>
> - Caiga en un conflicto cognitivo interno que le fuerce a un cambio en sus esquemas de conocimiento (Grupo Deca, 1992, (p. 1)

Luego las actividades de desarrollo y reestructuración, sirven para:

> - Tomar contacto, asimilar y practicar los nuevos contenidos.
>
> - Reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones.
>
> - Comparar con los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal.
>
> - Producir el cambio deseado en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo aparecido con las actividades de iniciación (p.2).

Posteriormente las actividades de aplicación y profundización sirven para:

- Aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos.
- Reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos.
- Ampliar el conocimiento conseguido, para trabajar nuevas situaciones y contextos.
- Facilitar el trabajo en pequeñas investigaciones relacionadas con los contenidos trabajados.
- Proponer situaciones de carácter opcional, dependiendo del nivel de dificultad y de la situación personal de cada alumno/a. (p.2).

Finalmente las actividades de evaluación permiten concluir y revisar todo el proceso en conjunto, específicamente permiten:

- Conocer el grado de los aprendizajes que los alumnos han adquirido.
- Permitir que los mismos alumnos conozcan la utilidad del trabajo realizado y lo que han aprendido.
- Verbalizar algunos aprendizajes. Detectar errores, inexactitudes, fallos.
- Permitir reforzar aprendizajes (p.2).

Como se podrá apreciar posterior mente, en el apartado correspondiente a la planeación de la secuencia de actividades, los objetivos de cada una pueden relacionarse con las funciones, del tipo de actividad al que corresponden, presentadas anteriormente. En este caso específico, cada tipo de actividad contará con una actividad.

A continuación se presenta una matriz de planeación que relaciona las actividades diseñadas para la secuencia y el tipo de actividad que representan según las orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de enseñanza-aprendizaje, propuestas por el grupo DECA (1992).

Tabla 4

Actividades según el modelo DECA

TIPO DE ACTIVIDAD	ACTIVIDAD	OBJETIVO GENERAL
Iniciación e introducción	De los triángulos a la medida (Actividad 1).	Llevar a los estudiantes a comprender la relación entre la existencia de una medida común para dos segmentos, y la posibilidad de expresar la razón entre sus magnitudes como números racional.
Desarrollo y reestructuración	Cuál es la medida de la ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado? (Actividad 2)	Propiciar que los estudiantes tomen contacto con las nociones de fractal, auto-semejanza y proceso infinito, en los contextos geométrico y numérico, a partir de una situación relacionada con magnitudes inconmensurables.
Aplicación y profundización	¿Crece o decrece? (Actividad 3)	Suscitar una reflexión por parte de los estudiantes sobre las nociones de convergencia y límite de sucesiones, a partir de la

		representación numérica de una situación de inconmensurabilidad.
Evaluación	Un par de dados para el fin sin fin (Actividad 4)	Llegar a que los estudiantes reflexionen acerca de la necesidad de aceptar el fin de procesos infinitos, en contra de la intuición, a partir de la información brindada por las distintas representaciones de una misma situación.

Cabe mencionar que con la actividad de evaluación no se pretende asignar una valoración cuantitativa del proceso de los estudiantes, como podría suponerse por el término “evaluación”. Dado que se está, siguiendo las orientaciones de DECA (1992), cualquier actividad de evaluación bajo esta tiene como propósitos, no solo conocer el grado de aprendizajes que los alumnos han adquirido, también permitir que los alumnos reconozcan la utilidad del trabajo realizado, que es de mayor relevancia en este trabajo dados los planteamientos realizados en los apartados de la justificación y el planteamiento del problema.

Ahora bien, la secuencia de actividades pretende partir de un contexto geométrico o trigonométrico (que resulte familiar y reciente para los estudiantes, dependiendo de los preconceptos en cada caso específico) e ir abordando nociones y conceptos relacionados al infinito actual. En el siguiente esquema (Figura 5) se ilustra la conexión entre las nociones y conceptos matemáticos dentro de la secuencia, al mismo tiempo que la ruta en la que se irán desarrollando, lo que no implica que el infinito actual solamente se pueda trabajar con esta ruta o que los conceptos en ella sólo puedan desarrollarse a través de los otros.

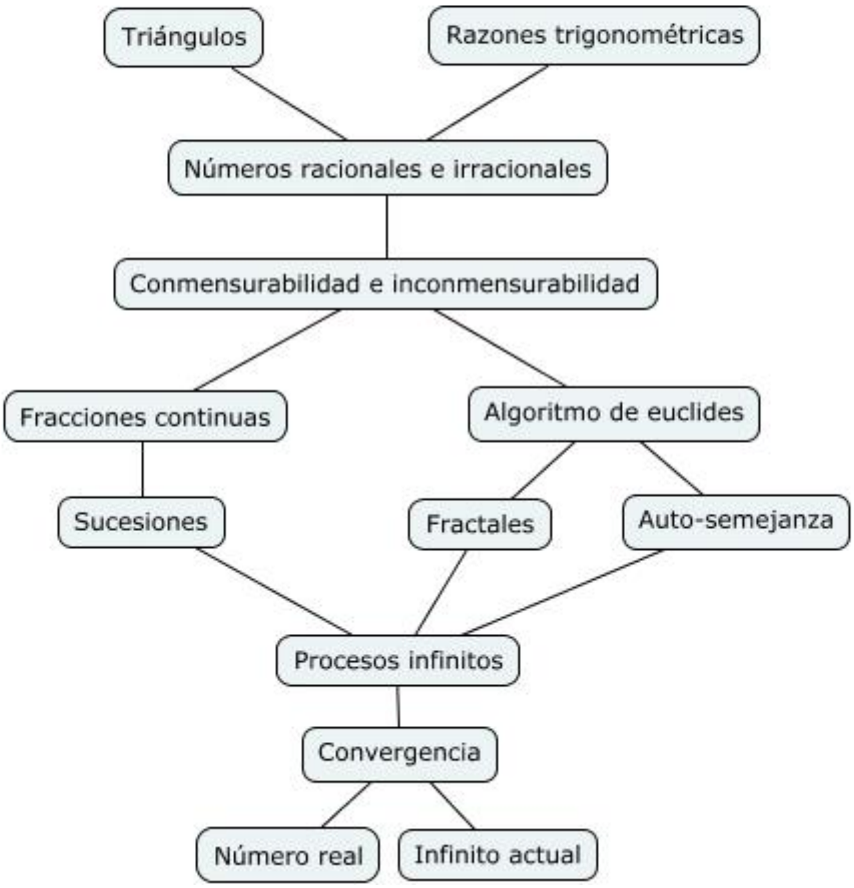


Figura 5: Ruta de la secuencia

Esta imagen fue realizada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Como se puede apreciar en el esquema de la ruta, la secuencia de actividades inicia haciendo uso de los triángulos, que pueden o no ser tratados desde un contexto trigonométrico –según sea el caso de los grupos de estudiantes específicos en los que la secuencia sea aplicada- o desde contextos geométricos ajenos a la trigonometría. Los triángulos permitirán realizar un posterior tratado sobre los números racionales e irracionales a partir de nociones como la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad dado que es posible realizar el llamado "Algoritmo de Euclides" (Método geométrico para encontrar medidas comunes de magnitudes) cuya representación numérica corresponde a las fracciones continuas (Euclides). Estas dos representaciones del mismo proceso permiten establecer relaciones con la auto-semejanza de procesos geométricos y fractales (Sabogal y Arenas, 2011), en contextos geométricos, mientras que con las sucesiones en contextos numéricos, todos ellos objetos matemáticos que permiten hablar de *procesos infinitos* y, si los procesos son convergentes como en el presente caso, permiten hacer un tratamiento directo al infinito actual (Auman y Roa, 2014), a la vez que ampliar en los estudiantes sus nociones sobre el número real y su construcción.

Presentación de la secuencia (actividades y planeación)

En este apartado se presenta la secuencia de actividades, resultado del proceso de investigación realizado por los autores de este trabajo. Las actividades presentes en la secuencia atravesaron por un proceso de diseño preliminar, pilotaje, análisis del pilotaje –presente en el capítulo cinco- y corrección de acuerdo al análisis.

Se recomienda a quien desee aplicar esta secuencia, ya sea en el ciclo cuarto o el ciclo quinto, verificar que los estudiantes hayan tenido acercamientos con los contenidos listados a continuación, de no ser así, propiciar el contacto entre los estudiantes y los contenidos antes de aplicar la secuencia de actividades.

Pre-conceptos sugeridos para la aplicación de la secuencia de actividades:

- Teorema de Pitágoras.
- Congruencia y semejanza de triángulos.
- Operaciones entre números racionales en su representación como fracción.
- Representación de los números racionales como “número con coma”.
- Relaciones de orden entre los números racionales haciendo uso del valor posicional.

A continuación se presenta la secuencia de actividades, después de cada planeación se encuentra el instrumento o instrumentos para entregar a los estudiantes.

De los triángulos a la medida.

Actividad 1. (Iniciación e introducción).

Objetivo General:

Llevar a los estudiantes a comprender la relación entre la existencia de una medida común para dos segmentos, y la posibilidad de expresar la razón entre sus magnitudes como números racional.

Objetivos Específicos:

- Acercar a los estudiantes a la noción de conmensurabilidad.
- Propiciar una discusión sobre la relación entre las longitudes conmensurables y los números racionales.
- Lograr que los estudiantes encuentren medidas comunes de algunas longitudes (conmensurables) y representen los procesos como fracciones continuas.

Descripción de la actividad:

Los estudiantes realizarán el desarrollo de un instrumento en el que tendrán que encontrar medidas comunes de segmentos y realizar la representación de los procesos como fracciones continuas. Al final de la actividad el docente realizará la institucionalización correspondiente.

Recursos necesarios: Regla sin marcas (se pueden usar palos de paleta o tablas de balso), un compás por estudiante (como recomendación, de ser posible, asegurarse de que los compases que usen los estudiantes sean de precisión).

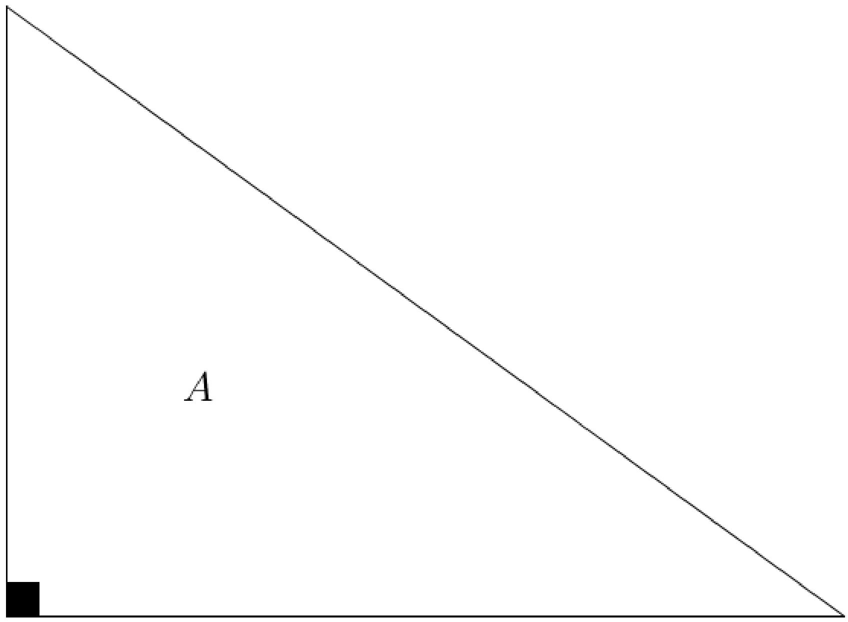
Tabla 5

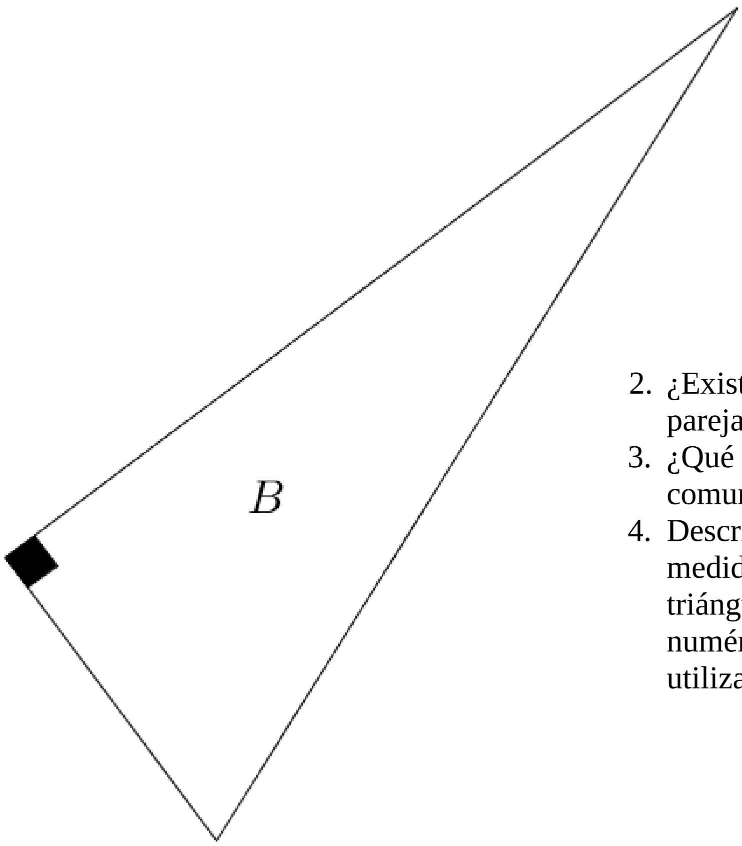
Planeación actividad 1

Momento	**Rol del estudiante**	**Rol del docente**
Medidas comunes de longitudes y su relación con los números racionales.	Encontrar la fracción continua para 2 parejas de segmentos dadas (Instrumento). Responder preguntas (instrumento). Proponer representaciones numéricas para los procesos geométricos realizados.	Entregar a los estudiantes los instrumentos correspondientes (uno para cada estudiante). Dar las indicaciones para el desarrollo de la clase. Guiar a los estudiantes en el desarrollo del instrumento con preguntas orientadoras tales como: • ¿Qué es un segmento? • ¿Qué significa enteramente? • ¿Qué significa medir enteramente? • Si algo cabe por completo una vez en otra cosa, pero esta última es mayor, ¿Significa que cabe enteramente? • Si puedes medir enteramente a una parte, ¿Significa que puedes medir enteramente al todo? Si la secuencia es aplicada en un momento en que los estudiantes ya hayan tenido contacto con las razones trigonométricas, el primer punto puede ser relacionado por el docente con hallar la tangente o cotangente de alguno de los ángulos que no sean los ángulos rectos de los triángulos.
Institucionalización	Realizar aportes y preguntas cuando lo considere necesario. Expresar todos sus argumentos en caso de que sea partícipe de un debate y escuchar con atención todos los puntos de vista de los participantes.	Institucionalizar los desarrollos de los grupos, al curso completo, y resolver inquietudes, dejando como común acuerdo que las fracciones continuas son una forma de representar procesos geométricos para hallar medidas comunes de segmentos.

De los triángulos a la medida (instrumento)

1. Dados los triángulos A y B, halla una medida común para los catetos (segmento que mida enteramente a los dos catetos), usando únicamente la regla sin marcas y/o el compás (pinta de un color diferente el segmento con el que mides en cada paso).





2. ¿Existen medias comunes para cada pareja de segmentos?
3. ¿Qué representan esas medidas comunes?
4. Describe el proceso para hallar la medida común, en uno de los triángulos, y plantea una expresión numérica que represente cada paso utilizando la siguiente tabla:

Paso #	**Descripción**	**Expresión Numérica**

5. ¿Siempre se midió lo mismo? ¿Por qué?

6. ¿Puedes combinar todas esas expresiones numéricas en una sola que describa todo el proceso? ¿Cuál?

¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado?

Actividad 2 (Desarrollo y reestructuración).

Objetivo General:

Propiciar que los estudiantes tomen contacto con las nociones de fractal, auto-semejanza y proceso infinito, en los contextos geométrico y numérico, a partir de una situación relacionada con magnitudes inconmensurables.

Objetivos Específicos:

- Proponer a los estudiantes una construcción cuyo fin es encontrar la medida común entre segmentos de medidas 1 y $\sqrt{2}$.
- Generar una discusión sobre la infinitud del proceso para realizar la construcción previamente propuesta.
- Lograr que los estudiantes representen el anterior proceso geométrico como fracción continua.
- Explicitar la relación entre irracionalidad de un número e inconmensurabilidad de dos magnitudes.

Descripción de la actividad:

Los estudiantes deben deducir que no es posible encontrar una unidad de medida común para la diagonal de un cuadrado y uno de sus lados, para lograrlo deberán utilizar el algoritmo de Euclides, por medio de una construcción en origami propuesta por el instrumento, ésta le permite estudiante tomar datos y reflexionar sobre sus acciones a medida que avanza en el proceso. Y al final se presenta el teorema de Pitágoras para decir que la medida de la diagonal es $\sqrt{2}u$.

Tabla 6

Planeación actividad 2

Momento	Rol del estudiante	Rol del docente
Autosemejanza en el proceso de comparación de medidas.	Leer y seguir las instrucciones de la guía para realizar la construcción y consultar al docente sobre la duda respecto a ésta.	Revisar que los estudiantes tengan los materiales necesarios, y orientarlos con presuntas referentes a la construcción.
Completando la tabla.	Usar los conocimientos adquiridos en relación con las fracciones continuas para expresar numéricamente cada uno de los pasos que se está llevando a cabo.	Motivar a los estudiantes para hacer un proceso auto reflexivo frente a los procesos que se realizan en cada paso, por medio de preguntas orientadoras, como por ejemplo: ¿Qué es un triángulo anterior? ¿Qué es la prolongación de un lado por el ángulo recto? ¿Qué es un triángulo rectángulo isósceles?
Reflexionando sobre el proceso	Analizar la construcción y dar argumentos a favor o en contra de la iteración indefinida del proceso, y responder las preguntas de manera clara y consensuada con sus compañeros.	Apoyar al estudiante en la construcción de la tabla y cuestionar al estudiante sobre la veracidad de los datos colocados en la tabla. Se sugieren las siguientes preguntas (Depende del docente tomarlas o hacer las propias): ¿Qué intentan medir? ¿Con qué? ¿A qué figura le aplican siempre los mismos pasos?.
Aplicando el teorema de Pitágoras.	Aplicar el teorema de Pitágoras a un cuadrado de lado u y por medio de la construcción geométrica entender	Proponer ejemplos solucionados para aclarar las dudas de los estudiantes, y explicar la manera de construir $\sqrt{2}\,u$ para un u aleatorio.

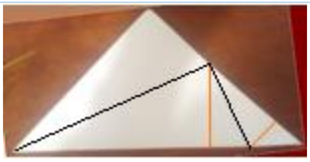
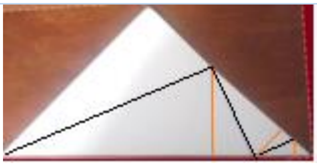
¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado? (instrumento)

Construcción:

Materiales: Un pliego de papel periódico, diferentes colores, una escuadra, tijeras, lápiz, borrador, compás, hoja y esfero.

Paso	**Imagen**	**Descripción**	**Comparación de medidas**
1		Toma la hoja de papel periódico de manera vertical y construye un cuadrado, tomando uno de los vértices y llevándolo sobre el lado más largo y opuesto a éste, de tal manera que uno de los lados más pequeños de la hoja quede sobre uno de los lados más largo de la hoja	No Aplica.
2		Recorta la parte que sobra (debajo del triángulo rectángulo isósceles que se formó con el doblez). Ahora desdobla el triángulo y obtendrás un cuadrado.	No Aplica.

3		Una vez construido el cuadrado recórtalo por la diagonal ya marcada por el doblez.	No Aplica.
4		Lleva el vértice que tiene el ángulo recto sobre la diagonal de tal manera que uno de los catetos quede sobre la hipotenusa del triángulo.	Llena el paso uno de la tabla con la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuántas veces entró el lado del cuadrado enteramente en su diagonal?
5		Marca con un color el segmento en el que se intercepta la hipotenusa del triángulo principal[1] y el lado del lado del triángulo más pequeño y desdobla.	Con el compás comprueba cuántas veces entra el lado del triángulo rectángulo isósceles más pequeño en el lado de su triángulo anterior[2] y regístralo en la hoja. Como el paso 2
6		Haz coincidir la hipotenusa del triángulo isósceles más pequeño con su lado representado con el trazo anterior.	No aplica.

7		Dele la vuelta a la hoja y marca con un color la prolongación del ángulo recto formado por las intercepción entre las dos hipotenusas y desdobla.	Con el compás mire cuántas veces entra el lado del triángulo rectángulo isósceles más pequeño sobre el lado triángulo de su triángulo anterior y regístrelo en la hoja. Como el paso 3
8		Repite los dos pasos anteriores con el triángulo más pequeño. Después de obtener un triángulo más pequeño aún repite nuevamente los últimos dos pasos y así sucesivamente hasta que no sea posible hacer más dobleces.	Con el compás comprueba cuántas veces entra el lado del triángulo rectángulo isósceles más pequeño sobre el lado de su triángulo anterior y regístralo en la hoja. Como el paso 4

[1] Se llamará triángulo principal al que resulta de dividir en dos partes iguales al primer cuadrado por su diagonal.

[2] Se llamará triángulo anterior a aquel que es rectángulo isósceles y además es el más pequeño del paso anterior.

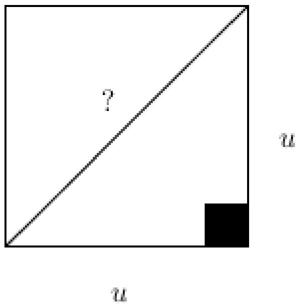
Paso	Número de veces que entra enteramente	Expresión fraccionaria
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Actividad.

Hasta ahora deben tener completa la tabla hasta el paso 4.

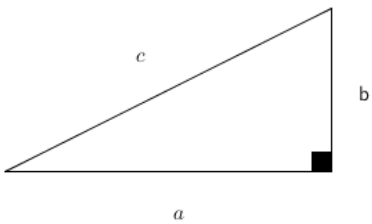
1. ¿Qué encuentran en común cada vez que repites el proceso?
2. ¿Qué diferencias encuentran cada vez que repites el proceso?
3. ¿Se puede decir que estaban buscando la medida común entre un cateto y la hipotenusa del cuadrado más grande? ¿Por qué?
4. Si tuvieran un cuadrado de papel tan grande como quisieran, ¿Podrían encontrar, en algún momento, la medida común entre el lado del cuadrado y su diagonal?, si es así, ¿A qué llegarían?
5. ¿Qué regularidades puedes encontrar en la tabla?
6. Completen los espacios en blanco, pero sin necesidad de remitirte nuevamente al triángulo que doblaron.

Utilicen el teorema de Pitágoras para hallar la medida de la diagonal del cuadrado que Se muestra en la imagen:



Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$,

para todo triángulo rectángulo.



- ¿Qué pasa si $u = 1$?

¿Crece o decrece?

Actividad 3. (Aplicación y profundización)

Objetivo General:

Suscitar una reflexión por parte de los estudiantes sobre las nociones de convergencia y límite de sucesiones, a partir de la representación numérica de una situación de inconmensurabilidad.

Objetivos Específicos:

- Llevar a los estudiantes a expresar las sumas parciales de la fracción continua, que representa a $\sqrt{2}$, como términos de una sucesión.
- Fomentar un análisis del comportamiento de la sucesión mencionada anteriormente.
- Generar una discusión sobre la noción de convergencia y su relación con los procesos infinitos.
- Generar una discusión sobre la continuidad de los números racionales.

Descripción de la actividad:

Se le pedirá a los estudiantes ubicar a $\sqrt{2}\,u$ en la recta numérica, después deberán construir los números que pertenecen a dos sucesiones que convergen al número $\sqrt{2}$, y usando como referencia el valor posicional establecer relaciones de orden entre los números mencionados y discutir por medio de preguntas orientadoras sobre el sentido contra-intuitivo del infinito.

Tabla 7

Planeación actividad 3

Momento	Rol de los estudiantes	Rol del profesor
Ubicando raíz de dos.	Usando regla y compás construir un segmento que tenga como medida asociada $\sqrt{2}$, y hacer preguntas que orienten su proceso.	Aclarar dudas frente al proceso de construcción.
Construyendo los elementos de la sucesión.	Realizar junto con sus compañeros las operaciones solicitadas en el instrumento, haciendo preguntas referentes al procedimiento realizado.	Resolver preguntas con respecto a la manera de realizar operaciones entre números racionales.
Comparando los términos de las sucesiones.	Crear estrategias para comparar los diferentes números racionales, y resolver las preguntas orientados por el docente.	Hacer preguntas que orienten al estudiante a entender que los números se acercan a $\sqrt{2}$ tanto ellos deseen, pero que el proceso es infinito, algunas preguntas pueden ser: ¿Por qué el segmento es finito y el proceso parece ser infinito? ¿En qué se diferencia un número racional de un irracional?

¿Crece o decrece? (instrumento)

Equipo A

1. Deben hallar, por equipos, los resultados de las siguientes expresiones (debe colocar por 10 dígitos después de la coma):

Fracciones

$$1+\frac{1}{2}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}$$

2. Ubiquen en la recta al número $\sqrt{2}$.
3. Ahora ubiquen en la recta numérica el primer número de la hoja A, después el primero número de la hoja B, después hagan lo mismo con los segundos números de las hojas.
4. Reúnanse con un equipo A y discutan:
    - ¿Qué pasa si organizan los resultados, primero uno del equipo A, luego uno del equipo B, luego otro del A, otro del B y así sucesivamente.
    - ¿Cuál es la distancia que hay del primer número de la hoja A al primer número de la hoja B? ¿Qué procedimiento utilizaste?
    - Con el procedimiento que usaron anteriormente, calculen la distancia que hay desde el segundo número de la hoja A hasta el segundo número de la hoja B, hagan lo mismo con los terceros, cuartos y quintos números de cada hoja.

A la distancia que hay entre el primer número de la hoja A y el primer número de la hoja B los vamos a llamar distancia del intervalo 1.

5. ¿Cuál es la distancia más pequeña que se puede encontrar? ¿Cómo la encontrarían?
6. ¿Alguna vez podrán encontrar una distancia de intervalo que sea igual a 0? ¿Por qué?

Equipo B

1. Deben hallar, por equipos, los resultados de las siguientes expresiones (debe colocar por 10 dígitos después de la coma):

Fracciones

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}$$

2. Ubiquen en la recta al número $\sqrt{2}$.
3. Ahora ubiquen en la recta numérica el primer número de la hoja A, después el primero número de la hoja B, después hagan lo mismo con los segundos números de las hojas.
4. Reúnanse con un equipo A y discutan:
    - ¿Qué pasa si organizan los resultados, primero uno del equipo A, luego uno del equipo B, luego otro del A, otro del B y así sucesivamente.
    - ¿Cuál es la distancia que hay del primer número de la hoja A al primer número de la hoja B? ¿Qué procedimiento utilizaste?
    - Con el procedimiento que usaste anteriormente, calcula la distancia que hay desde el segundo número de la hoja A hasta el segundo número de la hoja B, haz lo mismo con los terceros, cuartos y quintos números de cada hoja.

A la distancia que hay entre el primer número de la hoja A y el primer número de la hoja B los vamos a llamar distancia del intervalo 1.

5. ¿Cuál es la distancia más pequeña que se puede encontrar? ¿Cómo la encontrarían?
6. ¿Alguna vez podrán encontrar una distancia de intervalo que sea igual a 0? ¿Por qué?

Un par de dados para el fin sin fin

Actividad 4. (Evaluación).

Objetivo General:

Llegar a que los estudiantes reflexionen acerca de la necesidad de aceptar el fin de procesos infinitos, en contra de la intuición, a partir de la información brindada por las distintas representaciones de una misma situación.

Objetivos Específicos:

- Explicitar el carácter del número $\sqrt{2}$ como límite de la sucesión de las sumas parciales de la fracción continua con la que se ha trabajado en las actividades anteriores.
- Generar una discusión sobre los procesos infinitos y la necesidad de aceptarlos como objetos y no como procesos en diferentes contextos.
- Verbalizar los aprendizajes de los estudiantes propiciados por el desarrollo de las actividades.
- Fomentar una reflexión por parte de los estudiantes acerca del análisis de diferentes situaciones, matemáticas o no, a partir de diferentes perspectivas, la negación de la intuición y cómo esto juega un papel en el desarrollo del pensamiento crítico.

Descripción de la actividad:

Los estudiantes desarrollarán un instrumento que les planteará preguntas que los lleven a entender la necesidad de aceptar el fin de procesos infinitos para poder definir al número

$\sqrt{2}$ y en general todos los irracionales y reales. Posteriormente se realizará una reflexión sobre la existencia de diferentes perspectivas, la negación de la intuición y cómo esto juega un papel en el desarrollo del pensamiento crítico.

Recursos necesarios: Un par de dados para cada grupo**.**

Tabla 8

Planeación actividad 4

Momento	**Rol del estudiante**	**Rol del docente**
Aceptación del fin de un proceso infinito.	Responder el instrumento entregado por el docente, en grupos de 2 o 3 integrantes. Realizar preguntas cuando lo considere necesario.	Motivar a los estudiantes a que en grupos de 2 o 3 integrantes, desarrollen el instrumento correspondiente a esta actividad y finalmente reconocer que es necesario, en esta situación, aceptar el fin de un proceso infinito para poder definir al número $\sqrt{2}$ a partir de otros números y no como una aproximación de su medida. Revisar los avances en los grupos y orientarlos, de ser necesario.
Discusión sobre la existencia de diferentes perspectivas, la negación de la intuición y cómo esto juega un papel en el desarrollo del pensamiento crítico.	Realizar aportes y preguntas cuando lo considere necesario. Expresar todos sus argumentos en caso de que sea partícipe de un debate y escuchar con atención todos los puntos de vista de los participantes.	Generar y dirigir una discusión y reflexión acerca de la posibilidad de aceptar el fin de procesos infinitos en determinados contextos bajo ciertas condiciones, es decir, negar la intuición y cómo esto se relaciona con el pensamiento crítico y la toma de decisiones, no solo como estudiantes sino como personas y ciudadanos parte de una sociedad.

Un par de dados para el fin sin fin (instrumento)

1. Lanza los dados 5 veces y registra los resultados en la tabla:

Lanzamiento	**Resultado dado "a"**	**Resultado dado "b"**	$\boldsymbol{a/b}$
1			
2			
3			
4			
5			

- ¿En qué lanzamiento la operación de $\frac{a}{b}$ es mayor que $\sqrt{2}$? ¿En qué lanzamiento es menor que $\sqrt{2}$? ¿Cómo haces para saberlo?
- Teniendo en cuenta el ítem anterior, ¿Cuántos números hay mayores que $\sqrt{2}$? ¿Cuántos hay menores que $\sqrt{2}$? ¿Por qué?

2. ¿Puedo medir la diagonal de un cuadrado con su lado?

   - Si la diagonal es medida por el lado ¿Cuánto mide? ¿Por qué?
   - Si no se puede medir diagonal de un cuadrado con su lado ¿Cómo haces para saber cuándo un número racional es menor o mayor que la medida de longitud de la diagonal del cuadrado?

CAPITULO 5

Análisis Y Resultados

Análisis actividad 1 (De los triángulos a la medida):

E_1: Para el análisis de esta categoría se utilizaron veintisiete pruebas piloto, que fueron desarrolladas de manera individual (con la posibilidad de interactuar entre compañeros) por los estudiantes. En las que se evaluaron los siguientes subcategorías:

C1-1: Comprensión de unidad de medida: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que los estudiantes tienen dos diferentes maneras de interpretar lo que es una unidad de medida, aun cuando la tendencia registra un acercamiento al reconocer la unidad de medida común como un segmento que cabe un número entero de veces en dos segmentos, como se muestra en la gráfica:

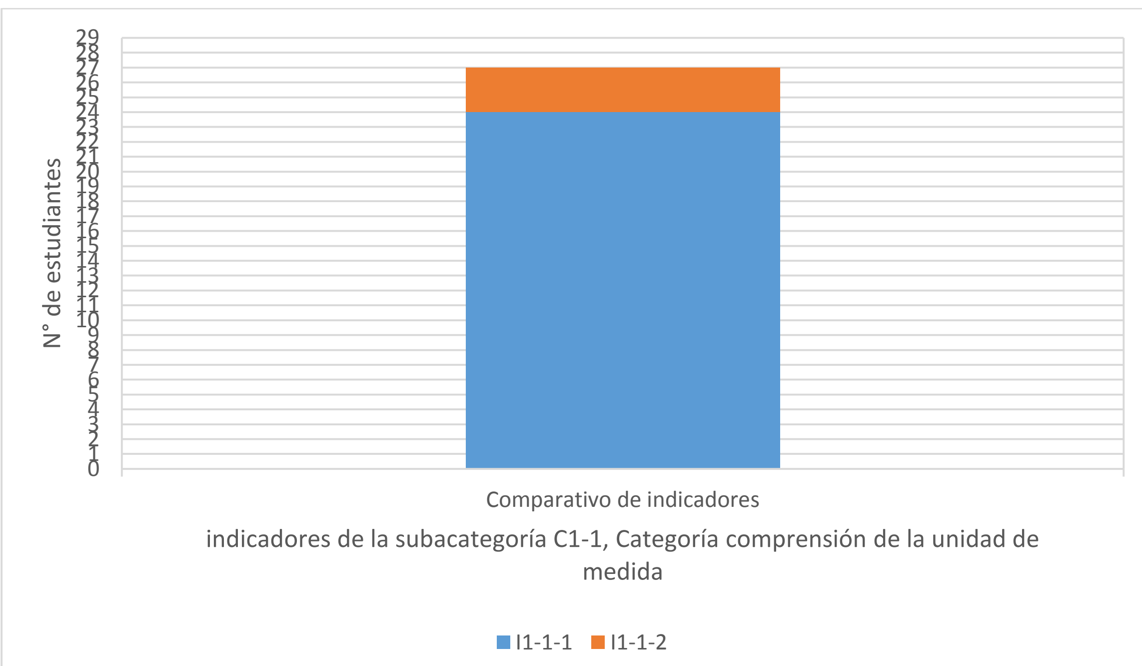


Figura 6: Frecuencia C1-1

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

La primera manera de interpretar lo que es una unidad de medida, corresponde a la esperada según la categoría de evaluación (I1-1-1), pues los estudiantes comprendieron que es posible medir segmentos con unidades de medidas ajenas a las convencionales, y que estas pueden medir enteramente a segmentos (Euclides) (24 estudiantes corresponden a esta manera de interpretar las unidades de medida) (Figuras 7, 8 y 9). La segunda, si bien no dista drásticamente de lo esperado, tiene la particularidad de mostrar una necesidad de los estudiantes por expresar la longitud de las unidades de medida en términos de las unidades de medida que acostumbran a usar (I1-1-2), en este caso centímetros (3 estudiantes corresponden a esta manera de interpretar las unidades de medida) (Figura 10).

Por lo que se puede concluir que las preguntas presentes en el instrumento permitieron que la mayoría de estudiantes comprendiera lo que es una unidad de medida -para la magnitud longitud- y una unidad de medida común para dos segmentos, así es posible, mediante estas preguntas, sentar bases conceptuales para posteriormente determinar, por medio de la auto-semejanza (Arenas y Sabogal, 2011, p. 9), la infinitud de un proceso para hallar la medida común de segmentos en razón de $1:\sqrt{2}$ o viceversa.

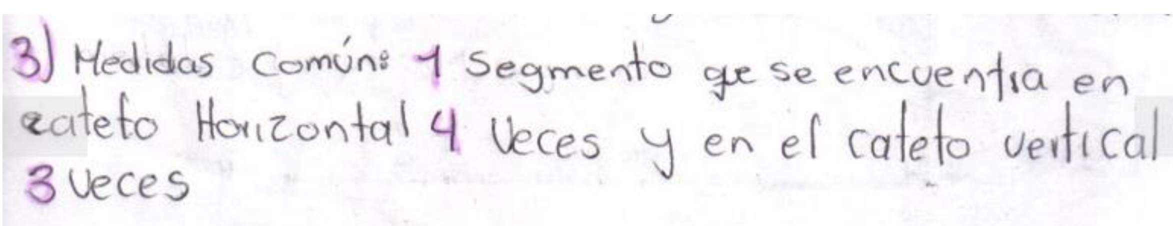


Figura 7: Evidencia

Figura 8: Evidencia

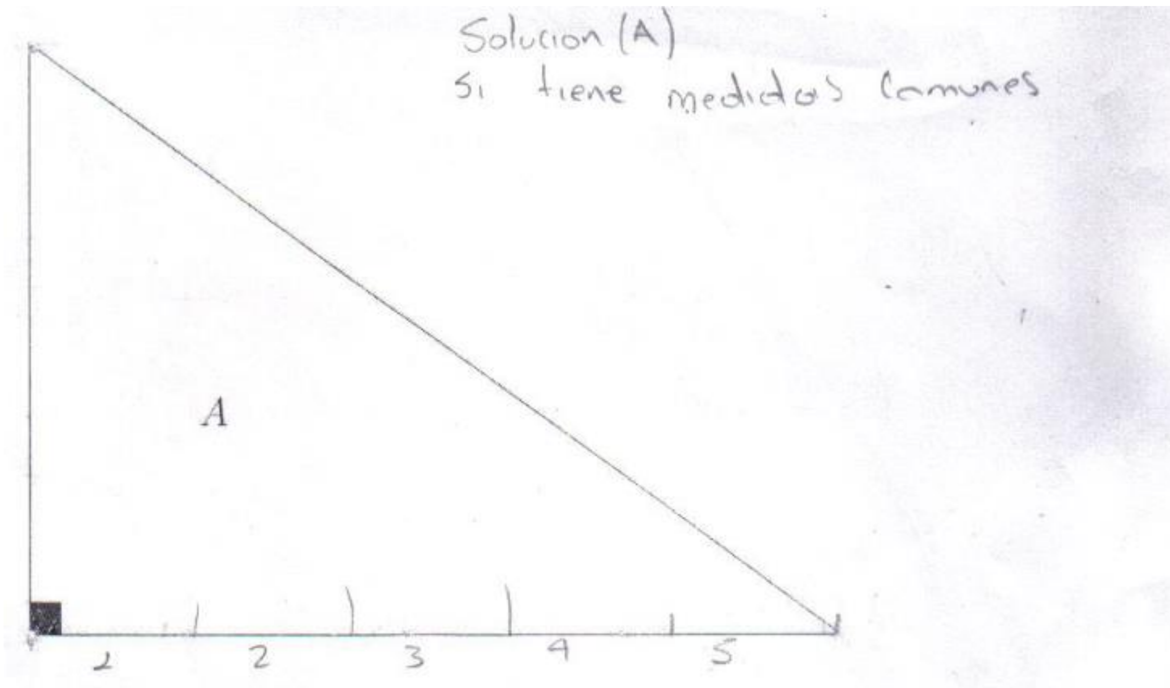


Figura 9: Evidencia

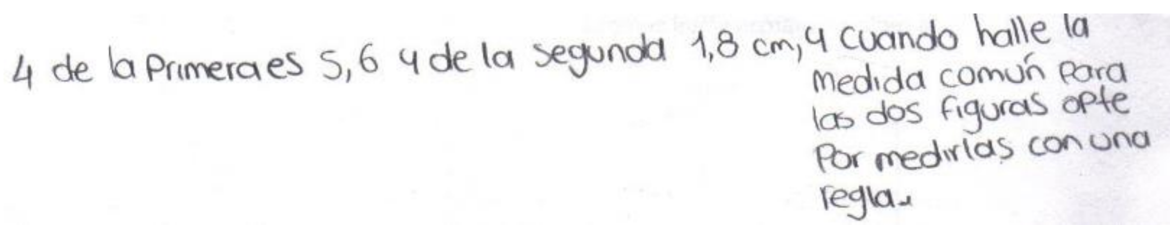


Figura 10: Evidencia

C1-2: Comparación de diferentes unidades de medida: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que los estudiantes logran establecer relaciones de orden entre longitudes de diferentes unidades de medida, unos reconociendo dicha relación mientras se realizaba el algoritmo de Euclides (I1-2-1) (25 estudiantes) (Figura 12 y 13), otros manifestando la necesidad de verificar si una unidad de medida medía enteramente a dos catetos, después de encontrar que otra unidad "mayor" no cumplía con esta condición (I1-2-2), aun cuando la selección de estas unidades se hacía de manera aleatoria (2 estudiantes) (Figura 14).

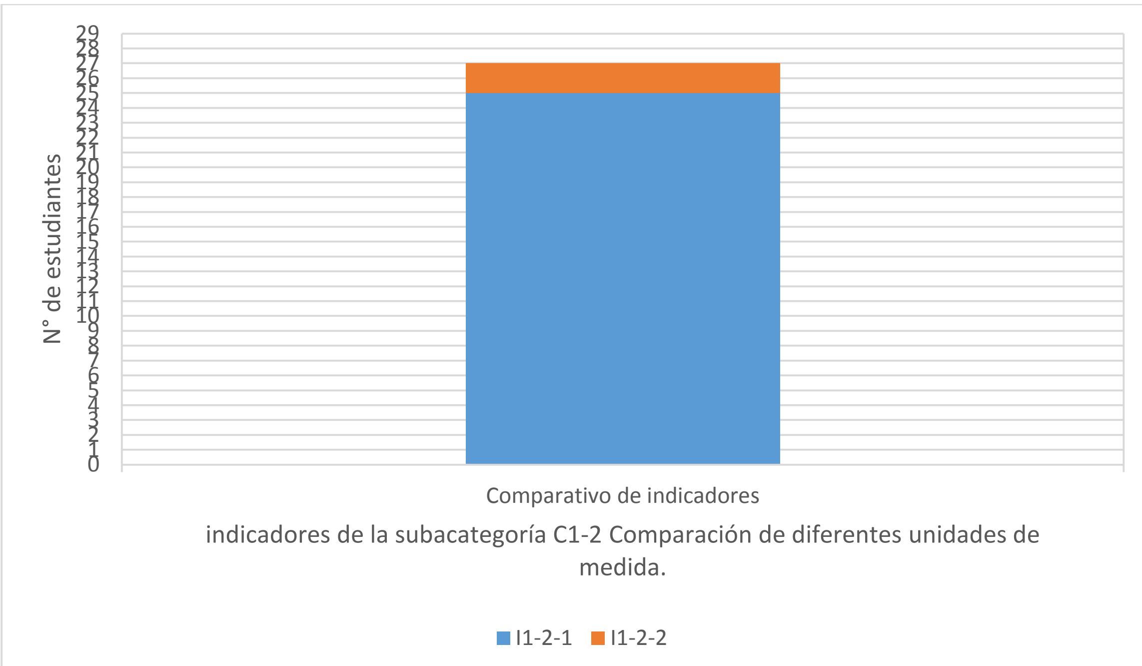


Figura 11: Frecuencia C1-2

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Por lo que se puede concluir que las preguntas presentes en el instrumento permitieron que la mayoría de estudiantes comprendiera que es posible establecer relaciones de orden entre diferentes unidades de medida, unidades surgidas de un proceso para hallar medidas comunes. Por lo tanto, las preguntas permiten sentar bases para un posterior trabajo relacionado a la convergencia de series haciendo uso de las relaciones de orden entre las medidas de diferentes unidades de medidas surgidas de un proceso para hallar la medida común entre segmentos en razón de $1:\sqrt{2}$ o viceversa, dado que el orden permitirá determinar el carácter convergente de una sucesión surgida de la representación numérica del mismo proceso (Calderón, 2014, p. 39).

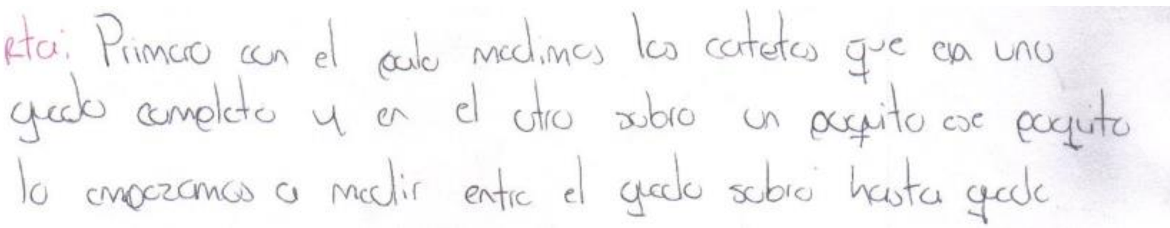

rta: Primero con el palo medimos los catetos que era uno grado completo y en el otro sobro un poquito ese poquito lo empezamos a medir entre el grado sobro hasta grado

Figura 12: Evidencia

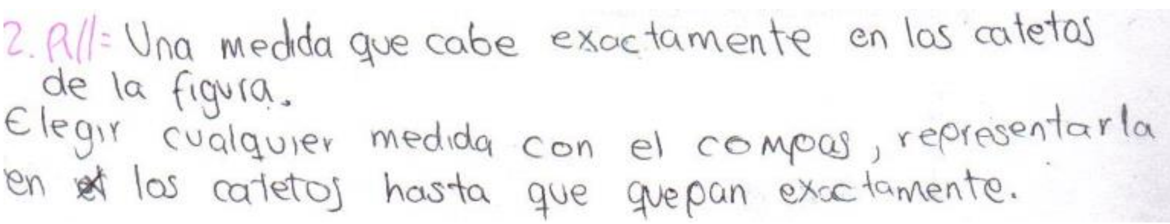

2. R//= Una medida que cabe exactamente en los catetos de la figura.
Elegir cualquier medida con el compas, representarla en ~~el~~ los catetos hasta que quepan exactamente.

Figura 13: Evidencia

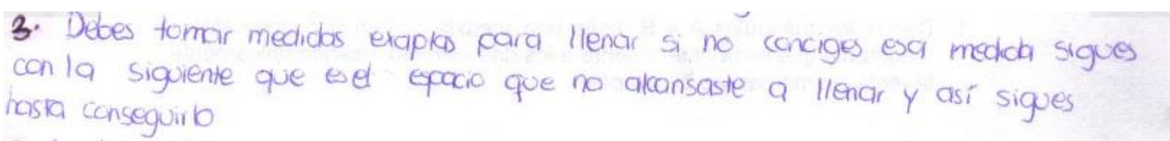

3. Debes tomar medidas exactas para llenar si no consigues esa medida sigues con la siguiente que es el espacio que no alcansaste a llenar y así sigues hasta conseguirlo

Figura 14: Evidencia

C1-3: Divisibilidad entre unidades de medida: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que algunos estudiantes reconocieron las implicaciones, en relación a la medida de dos segmentos, la realización de subdividir segmentos que miden enteramente partes de un todo mayor, estos estudiantes entendieron que si un segmento mide enteramente a otro y este último es, a su vez, parte de otro, el primero medirá también enteramente al último (I1-3-1) (5 estudiantes) (Figura 16). Otros estudiantes no reconocieron la transitividad de la relación “medir a” entre segmentos, por lo tanto los procesos que realizaban, si bien les permitían halar segmentos que miden enteramente a otro, no les permitían asegurar que estos segmentos encontrados medirían también a otros, como se les era solicitado (I1-3-2) (22 estudiantes) (Figura 17).

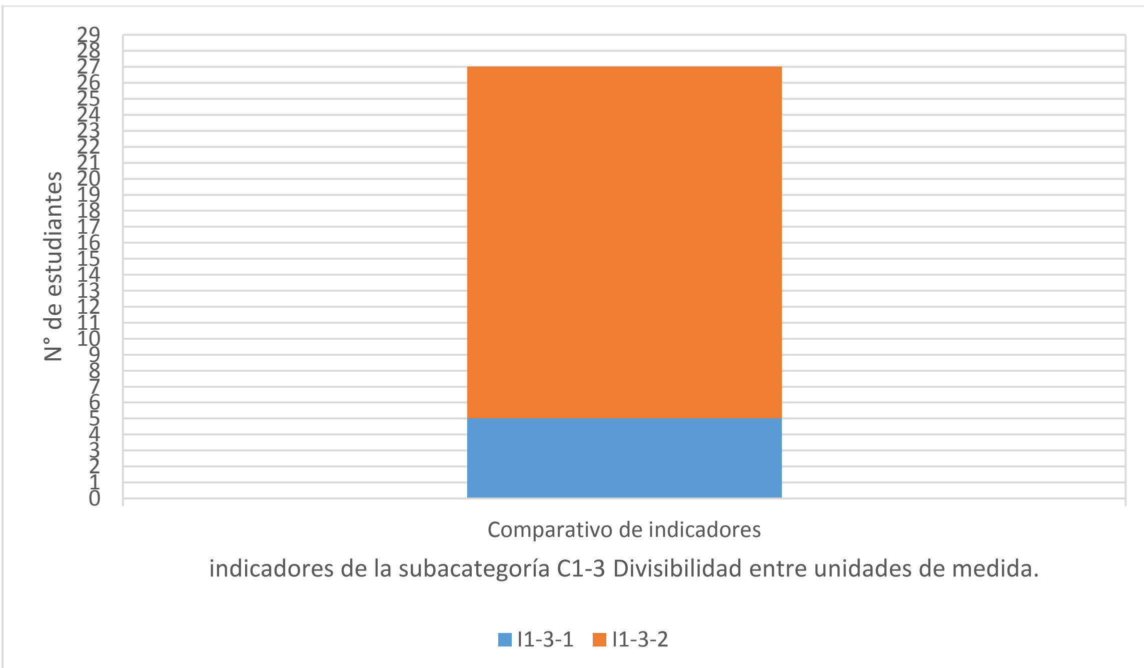


Figura 15: Frecuencia C1-3

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Por lo que se puede concluir que las preguntas presentes en el instrumento no permitieron que la mayoría de estudiantes reconociera la transitividad de la relación “medir a” entre segmentos, por lo tanto en muchas ocasiones no podían encontrar la medida común entre segmentos que eran conmensurables (Euclides), lo que dificulta un posterior trabajo con procesos similares que implican magnitudes inconmensurables, es decir, proceso infinitos. Por lo tanto se consideró necesario realizar modificaciones en el instrumento que permitiera a los estudiantes ver el cambio de unidad y la transitividad que implica. Dichos cambios se encuentran contemplados en la versión final de los instrumentos presente en el capítulo número cuatro.

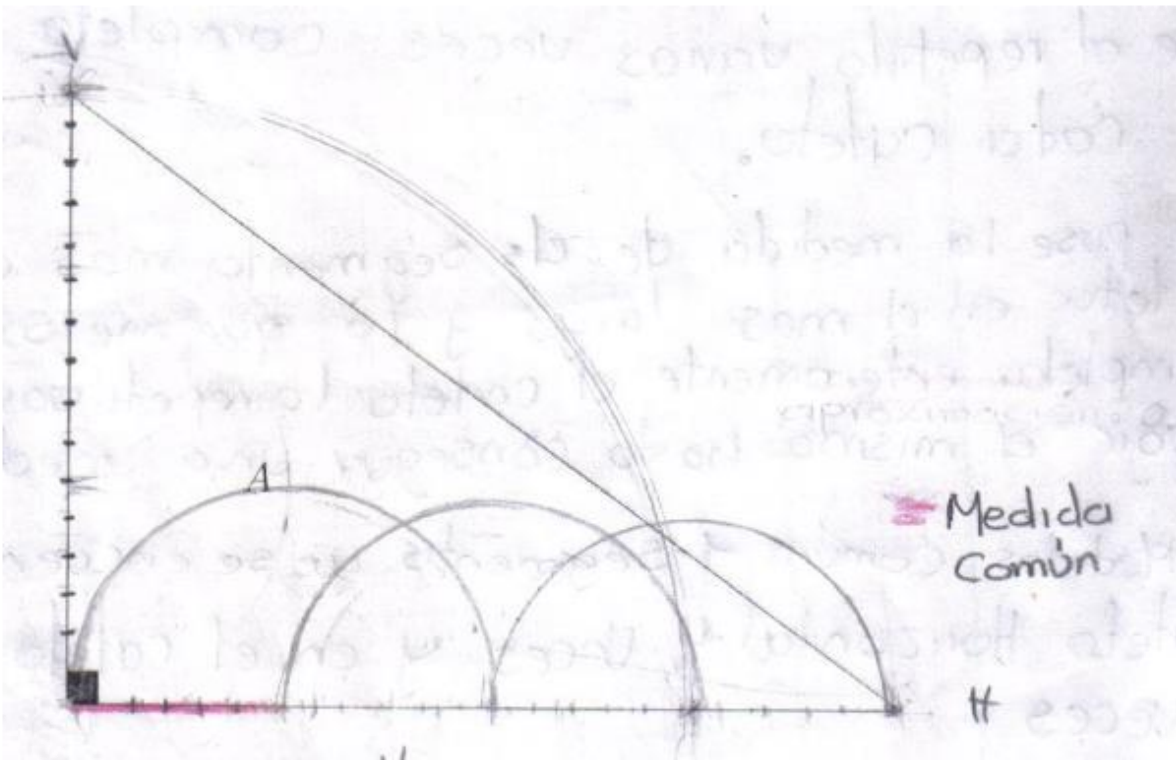


Figura 16: Evidencia

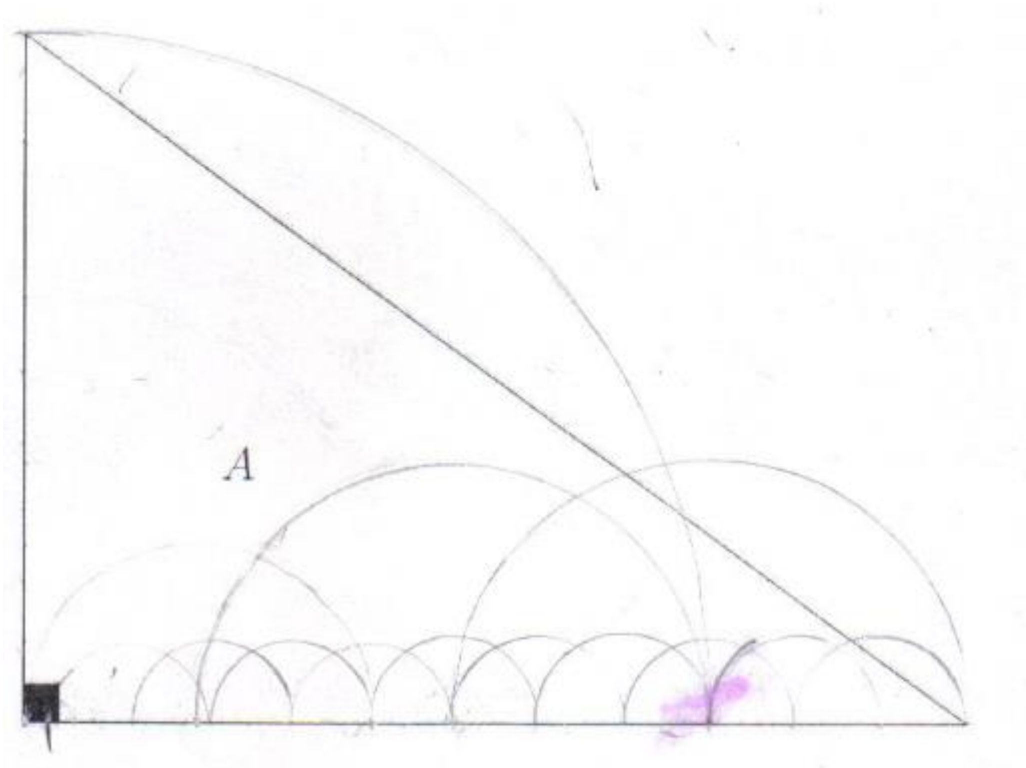


Figura 17: Evidencia

C1-4: Expresión de medidas como números racionales: El pilotaje de esta actividad sugirió la necesidad de contemplar dos indicadores además de los considerados anteriormente:

- I1-4-4: Representa las relaciones entre las medidas de segmentos haciendo uso inapropiado de la recta numérica.
- I1-4-5: No brinda información concluyente.

Se obtuvo como resultado que si bien, ningún estudiante logró expresar el algoritmo de Euclides como fracción continua (I1-4-2), lograron expresar la relación de las medidas de los segmentos como fracciones (I1-4-1) (Crespo) (4 estudiantes) (Figuras 19 y 20), otros además de esto reconocieron la posibilidad de expresar la medida de un segmento con otro como unidad de medida y viceversa (lo que también clasifica dentro del indicador I1-4-1) (3 estudiantes) (Figura 21). Además, en algunos casos particulares hicieron uso de la recta numérica, aparentemente pues su representación les resultaba similar a los catetos –según sus propias explicaciones registradas en los instrumentos-, cuando por medio de marcas se dividían enteramente gracias a las unidades de medida común (I1-4-4) (3 estudiantes) (Figura 21). Otros recurrieron a referir las medidas según las unidades que acostumbran a usar, como los centímetros (I1-4-3) (3 estudiantes) (Figura 22). Otros estudiantes no registraron nada en los instrumentos que permitiera tener información sobre esta subcategoría (I1-4-5) (14 estudiantes).

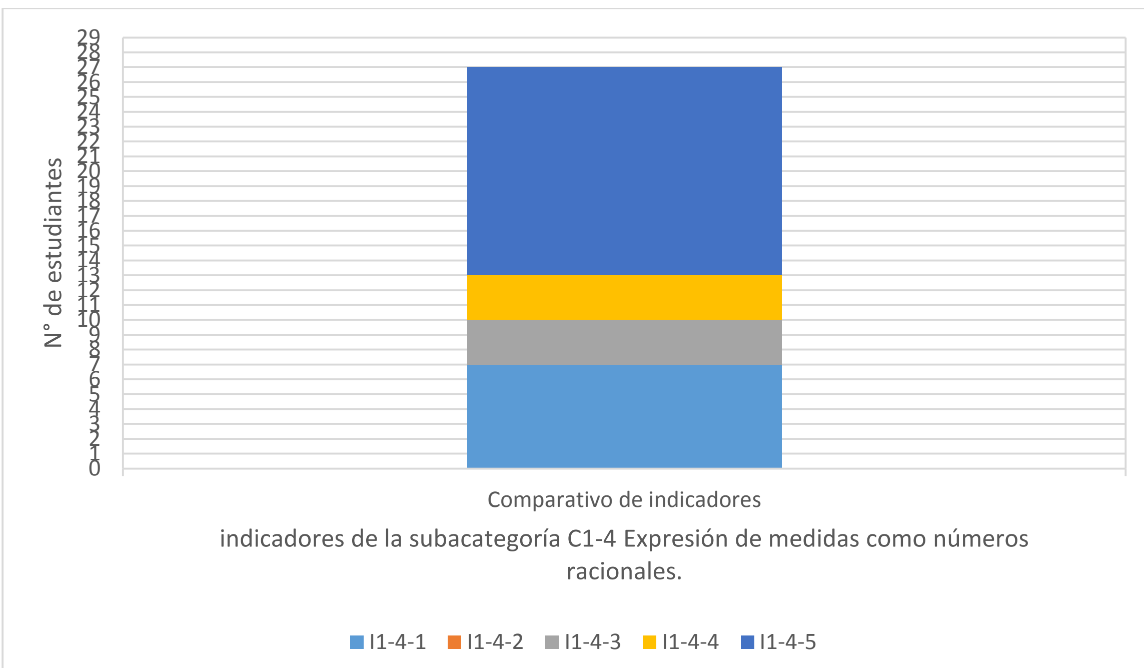


Figura 18: Frecuencia C1-4

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Por lo que se puede concluir que las preguntas presentes en el instrumento no permitieron que los estudiantes llegaran a la representación numérica deseada del proceso, sin embargo se evidencia que permite que los estudiantes expresen relaciones entre medidas como números racionales en su representación de fracción. Por lo tanto se considera necesario realizar modificaciones al instrumento que le sugieran al estudiante combinar todas las expresiones en una sola que represente al proceso total para hallar las medidas comunes, esto permitirá que la fracción continua sea entendida por los estudiantes como representación de tal proceso y, posteriormente, podrá construirse una sucesión convergente al número $\sqrt{2}$ (Calderón, 2014, p. 39) con estas fracciones, surgidas de un proceso infinito. Dichos cambios se encuentran contemplados en la versión final de los instrumentos presente en el capítulo cuatro.

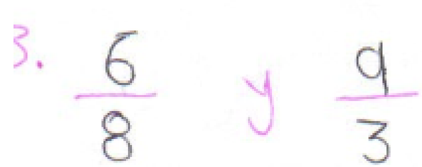


Figura 19: Evidencia

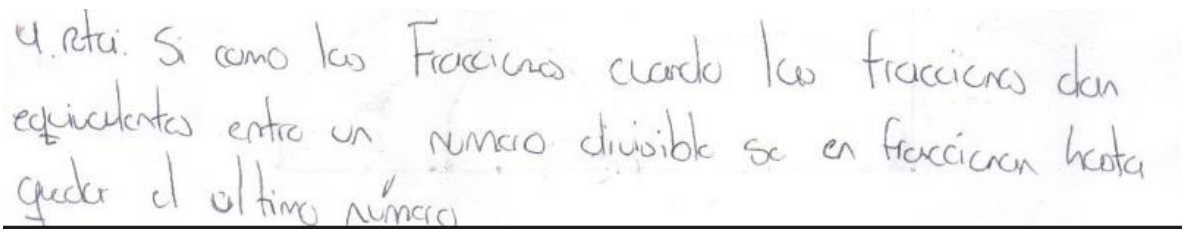
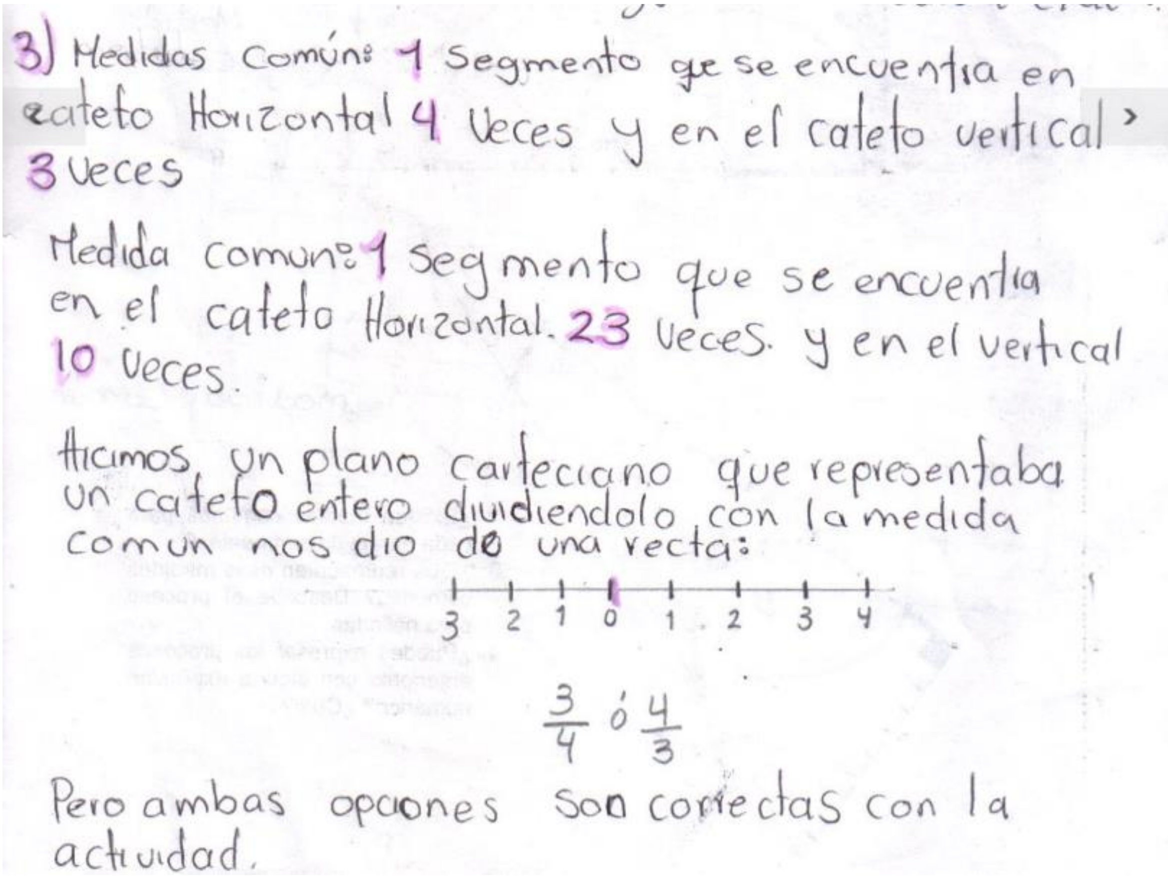


Figura 20: Evidencia



3) Medidas común: 1 Segmento qe se encuentra en cateto Horizontal 4 veces y en el cateto vertical 3 veces

Medida comun: 1 segmento que se encuentra en el cateto Horizontal. 23 veces. y en el vertical 10 veces.

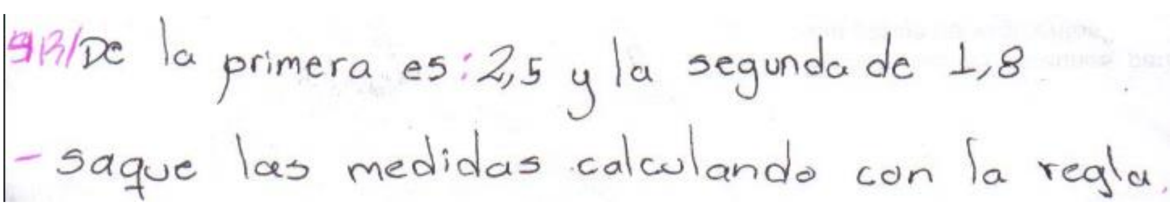
Hicimos un plano carteciano que representaba un cateto entero dividiendolo con la medida comun nos dio de una recta:

3 2 1 0 1 2 3 4

$\frac{3}{4}$ ó $\frac{4}{3}$

Pero ambas opciones son correctas con la actividad.

Figura 21: Evidencia



9B/ De la primera es: 2,5 y la segunda de 1,8

- saque las medidas calculando con la regla.

Figura 22: Evidencia

Análisis actividad 2 (¿Crece o decrece?):

E_2: Para el análisis de esta categoría se utilizaron quince pruebas piloto, que fueron desarrolladas en parejas o tríos de estudiantes y se evaluaron los siguientes subcategorías:

C2-1: Relaciones de orden: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que, un grupo de 15 estudiantes; organizados en 6 parejas y un trío, expresan de manera puntual que al intercalar un resultado de los elementos de la hoja A y uno de los elementos de la B, el conjunto de números cumple con una relación de orden, establecido de la siguiente manera; el primer número es mayor que el segundo, el tercero mayor que el cuarto y así sucesivamente, usando para ello el valor posicional de los números después de la coma (I2-1-1),como lo muestra la figura 24, y un segundo grupo de 8 estudiantes, organizados en 4 parejas, que cometieron el error de pensar que los números que empiezan con 1,4 son iguales entre sí (I2-1-2) tal y como se muestra en las figuras 25 y 26, lo cual nos arroja los siguientes resultados:

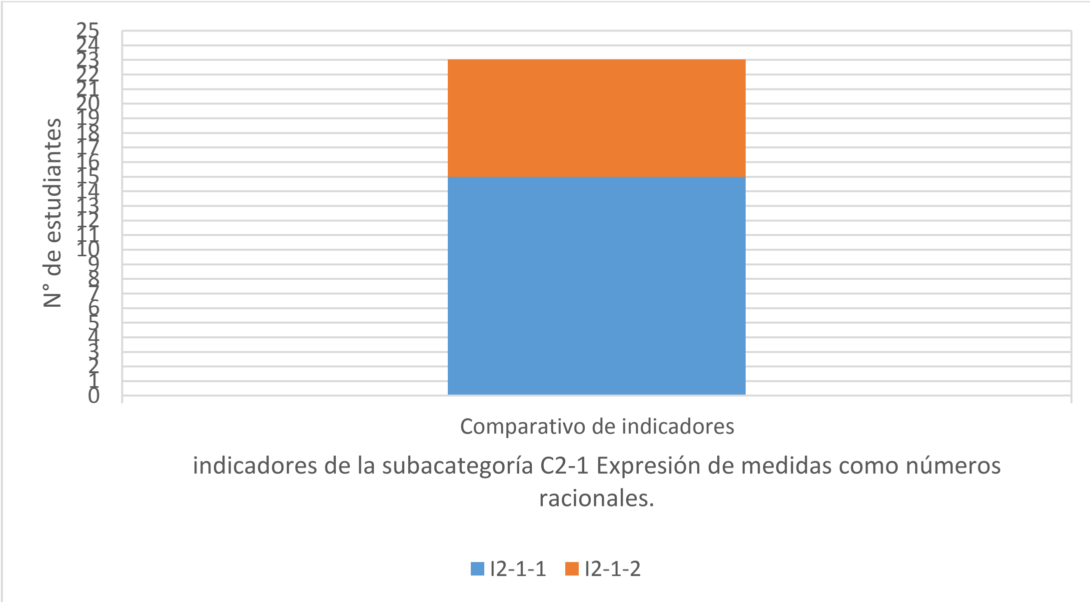
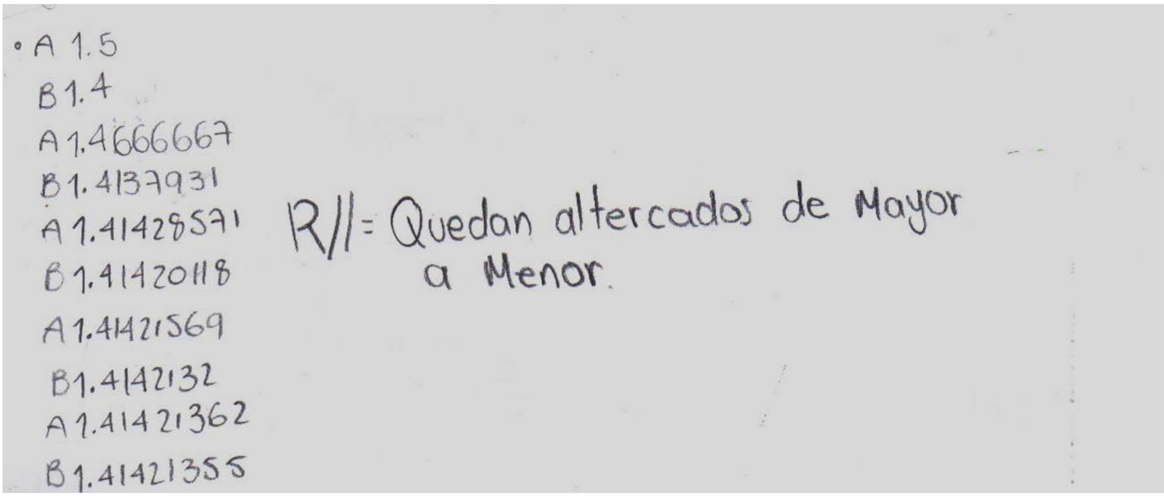


Figura 23: Frecuencia C2-1

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

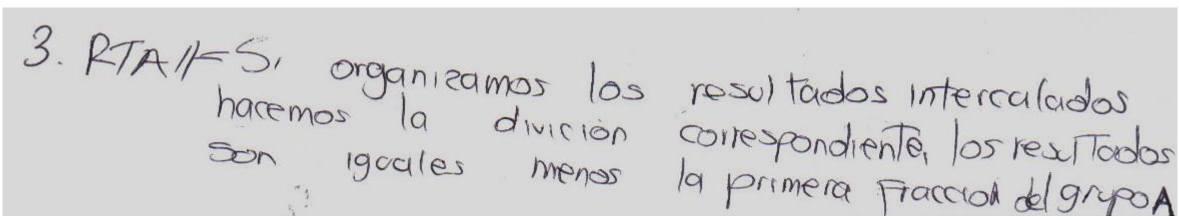
De lo anterior se puede concluir que la actividad permitió cumplir con la subcategoría I2-1-1: porque los estudiantes establecieron la relación de orden a partir de la expansión decimal de los números racionales que iban encontrando a medida que iban encontrando los términos de la sucesión.



• A 1.5
B 1.4
A 1.4666667
B 1.4137931
A 1.41428571
B 1.41420118
A 1.41421569
B 1.4142132
A 1.41421362
B 1.41421355

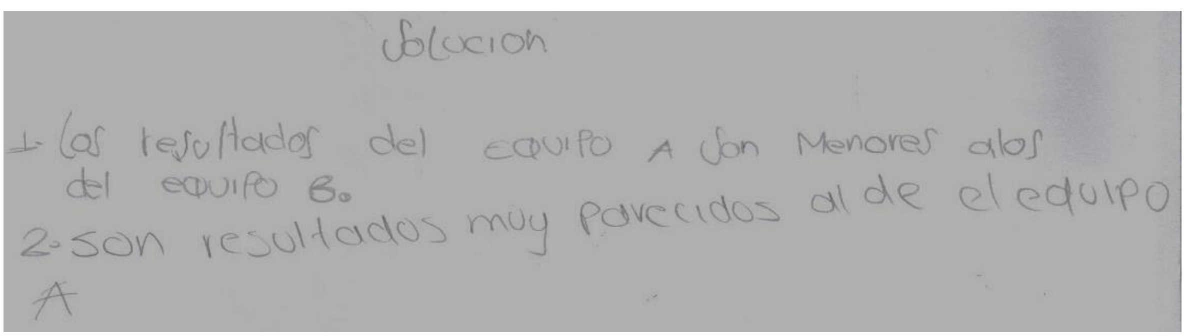
R//= Quedan altercados de Mayor a Menor.

Figura 24: Evidencia



3. RTA//=Si, organizamos los resultados intercalados hacemos la divición correspondiente, los resultados son iguales menos la primera Fraccion del grupo A

Figura 25: Evidencia



Solucion

1. los resultados del equipo A son Menores alos del equipo B.
2. son resultados muy parecidos al de el equipo A

Figura 26: Evidencia

C2-2: Operaciones con números racionales: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que, 30 estudiantes de los estudiantes, acertaban en el algoritmo y colocaban los números racionales que representaban términos de la sucesión (I2-2-1), que son los mismos números que se colocaron en las sucesiones para los intervalos encajados en el marco teórico (Calderón, 2014, p. 36) ,como se muestra en la figura 27, y un segundo grupo de, 2 estudiantes, cometieron algún error de tipo algorítmico al momento de encontrar los término de la sucesión (I2-2-2), como lo muestra la figura 29 y 30.

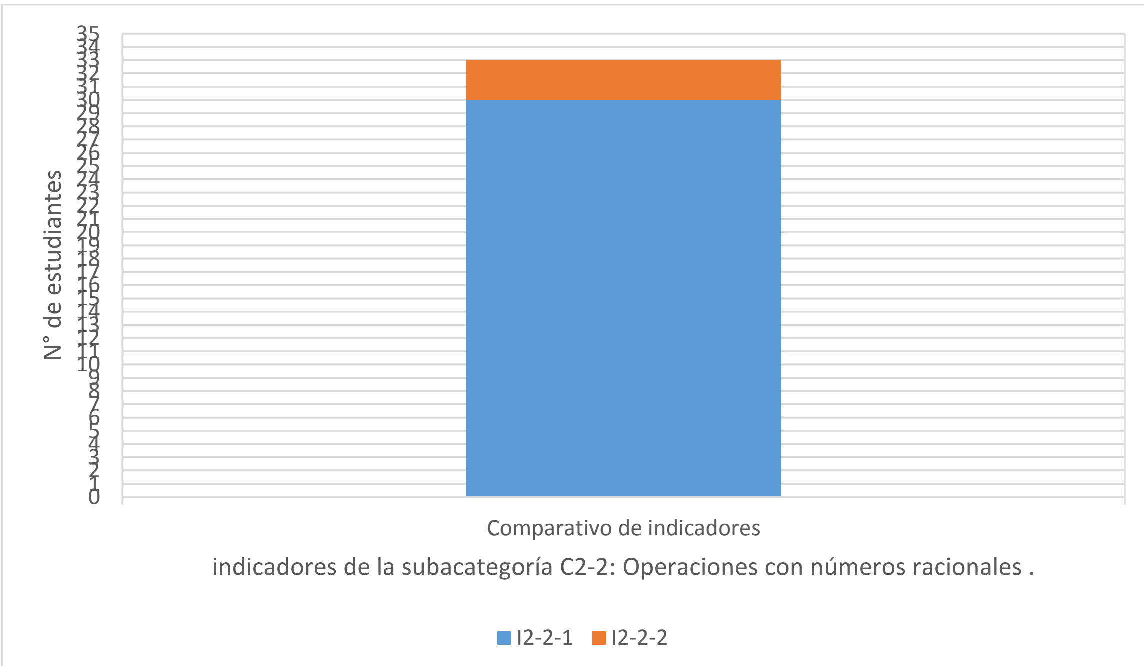


Figura 27: Frecuencia C2-2
Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Como bien se puede observar en la representación anterior, el instrumento permitió a los estudiantes encontrar los términos de la sucesión de manera efectiva por lo que no habrá mayor cambio en el instrumento con respecto a la categoría C2-2.

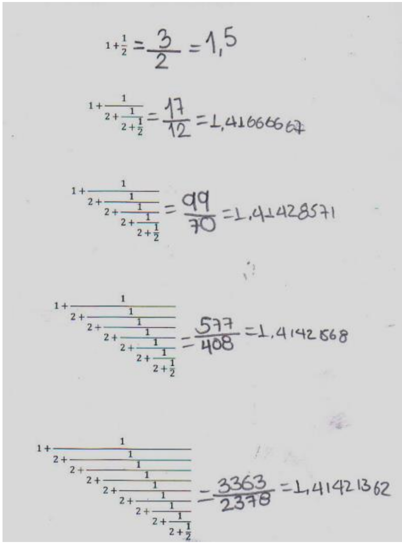


Figura 28: Evidencia

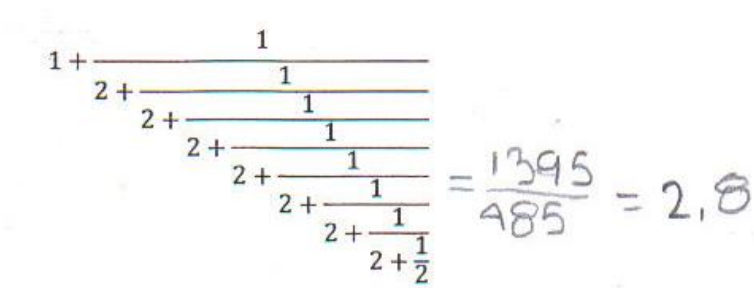


Figura 29: Evidencia

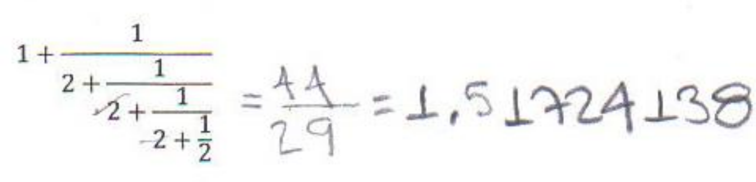


Figura 30: Evidencia

C2-3: Sucesiones y series; El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que, 11 estudiantes, ordenados e 4 parejas y un trío, expresan de manera parcial, como lo muestra la figura 29, que entienden la cercanía entre los elementos a medida que avanza la sucesión, y la expresan diciendo que todos los números a partir de un punto determinado siempre empieza en 1.4 (I2-3-1), en el segundo grupo conformado por, 8 estudiantes, distribuidos en 4 parejas, al parecer presentan un problema frente a los "Indivisibles e infinitesimales" (Chaparro y Muñoz, 2012, p. 38). Citado en el marco teórico, pues como puede observarse en la figura 30, no ven la cercanía de los elementos a medida que avanza la sucesión, en vez de esto como la mayoría de los resultados después de hacer el cociente de las fracciones empiezan por 1,4, ellos asumen que todos los términos de las sucesiones son iguales (I2-3-2), en la siguiente representación se muestra el comparativos de los dos indicadores presentes en la subcategoría:

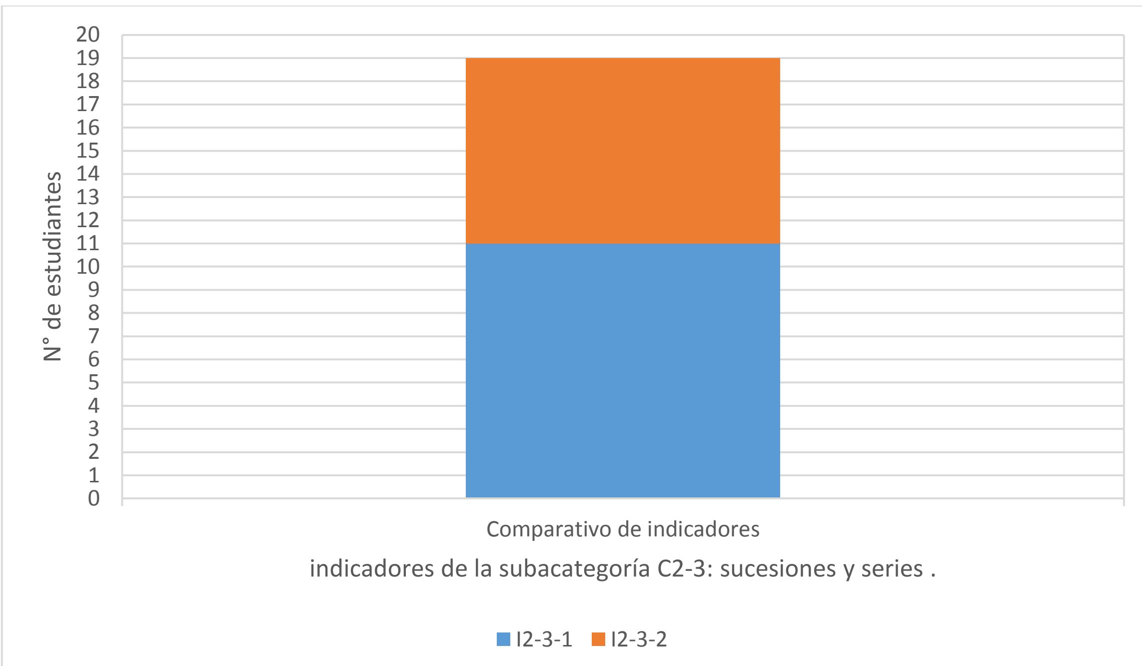


Figura 31: Frecuencia C2-3

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

De éstos resultados se puede inferir que un 57% de los estudiantes realizan una distinción entre los valores numéricos hallados, por medio del establecimiento de la relación de orden, por lo que debe haber un cambio en el instrumento que le sugiera al estudiante esta comparación término a término.

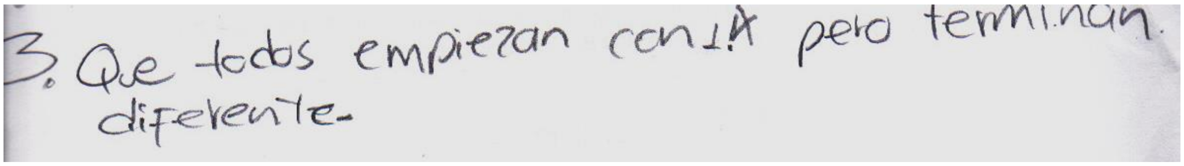

3. Que todos empiezan con 1,4 pero terminan diferente.

Figura 32: Evidencia

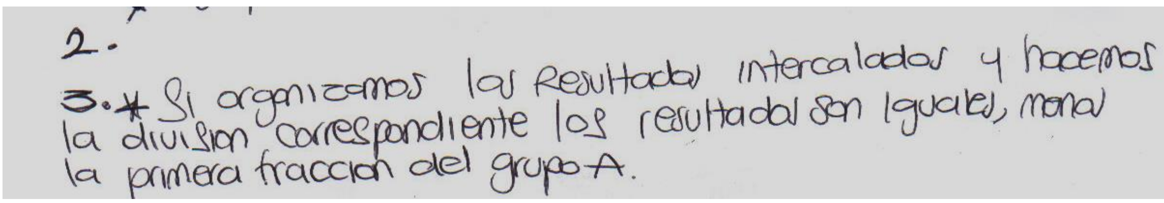

2.
3. * Si organizamos los Resultados intercalados y hacemos la division correspondiente los resultados son iguales, menos la primera fraccion del grupo A.

Figura 33: Evidencia

A modo de conclusión del análisis, es necesario resaltar que el énfasis de ésta situación está en la construcción de los intervalos encajados (Calderón, 2014p. 36) e infortunadamente con el pilotaje de esta actividad no se logró dicha meta, se decide entonces; en primer lugar convertir ésta en la tercera actividad pues se verá muy bien introducida por la actividad; ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado?, y en segundo lugar se decidió agregar algunos puntos que llevaran a estudiante a encontrar el valor absoluto de la diferencia entre los valores de la hoja A y hoja B, para hacer más evidente el hecho de encontrar los intervalos en términos de las longitudes presentes en cada intervalo cerrado.

Análisis actividad 3 (¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado?):

E_3: Para el análisis de esta categoría se utilizaron cinco pruebas piloto, desarrolladas en grupos de máximo 6 personas, se evaluaron los siguientes subcategorías:

C3-1: Algoritmo de Euclides generalizado a través de relaciones de autosemejanza: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que, 16 estudiantes organizados en dos grupos de 5 y dos grupos de 3, identificaron de manera intuitiva la presencia de diferentes unidades de medida a lo largo de la aplicación del algoritmo de Euclides a la diagonal y al lado del cuadrado (C3-1-2), como puede evidenciarse en la figura 35 y 3 estudiantes organizados en un grupo realizaron una medición con reglas e intentaron establecer una razón a partir de las medidas que ésta les dio, por lo que se puede afirmar que no dan indicios de usar el proceso de autosemejanza (C3-1-1) como se han definido para esta investigación desde Sabogal y Arenas (2011), como puede verse en la figura 35, a continuación se presenta la comparación de resultados.

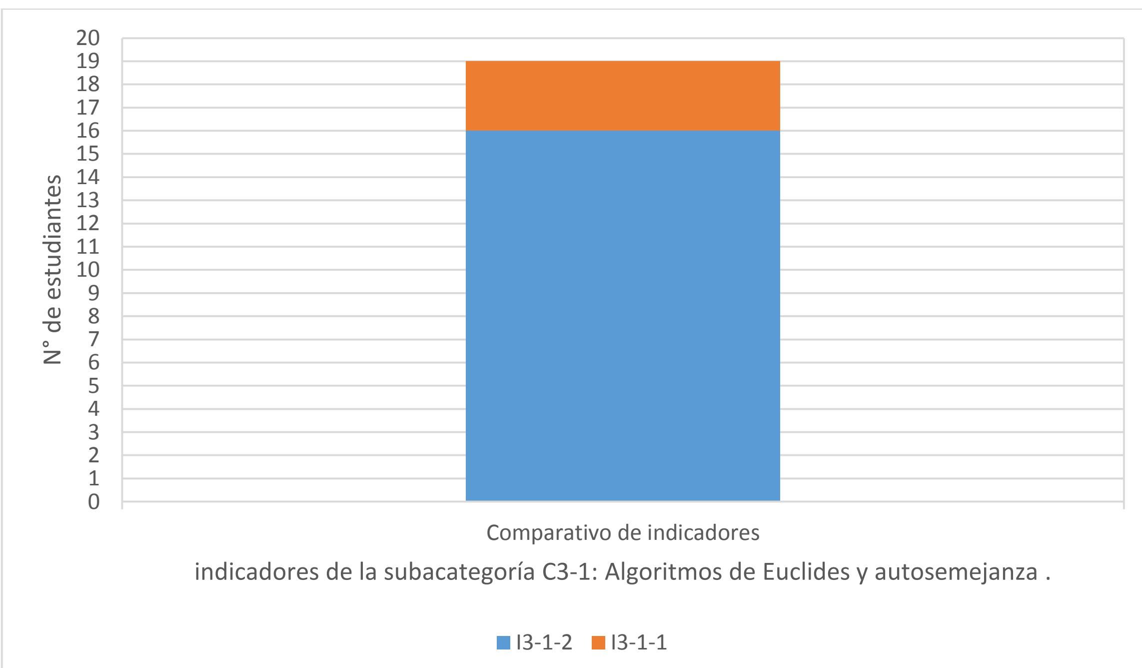


Figura 34: Frecuencia C3-1

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

De lo anterior se puede concluir que el origami como potenciador de la visualización del proceso de autosemejanza, es conveniente para aplicar el algoritmo de Euclides, pues un 84% de la población examinada en esta actividad vieron las diferentes unidades presentes dentro del proceso, en gran medida gracias al recurso utilizado.

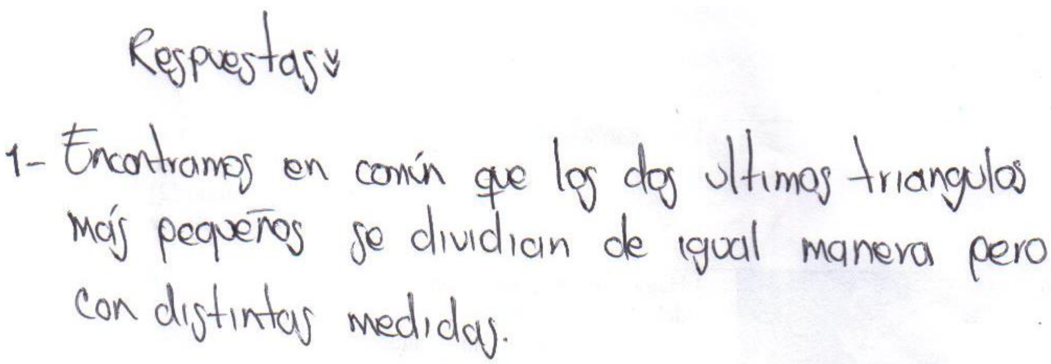

Respuestas:
1- Encontramos en común que los dos ultimos triangulos
más pequeños se dividian de igual manera pero
con distintas medidas.

Figura 35: Evidencia

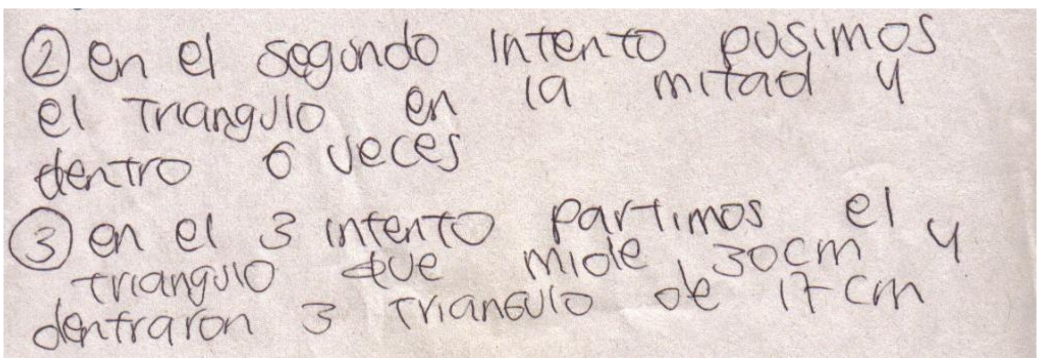

2 en el segundo intento pusimos
el Triangulo en la mitad y
dentro 6 veces
3 en el 3 intento partimos el y
triangulo que mide 30cm
dentraron 3 Triangulo de 17 cm

Figura 36: Evidencia

C3-2: Fracción continua: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que ningún estudiante logró expresar en términos de fracción continua el proceso que estaban realizando (C3-2-1), sin embargo un grupo de 3 estudiantes dio como respuesta una fracción finita (C3-2-2) como lo muestra la respuesta 4 del grupo en la figura 38.

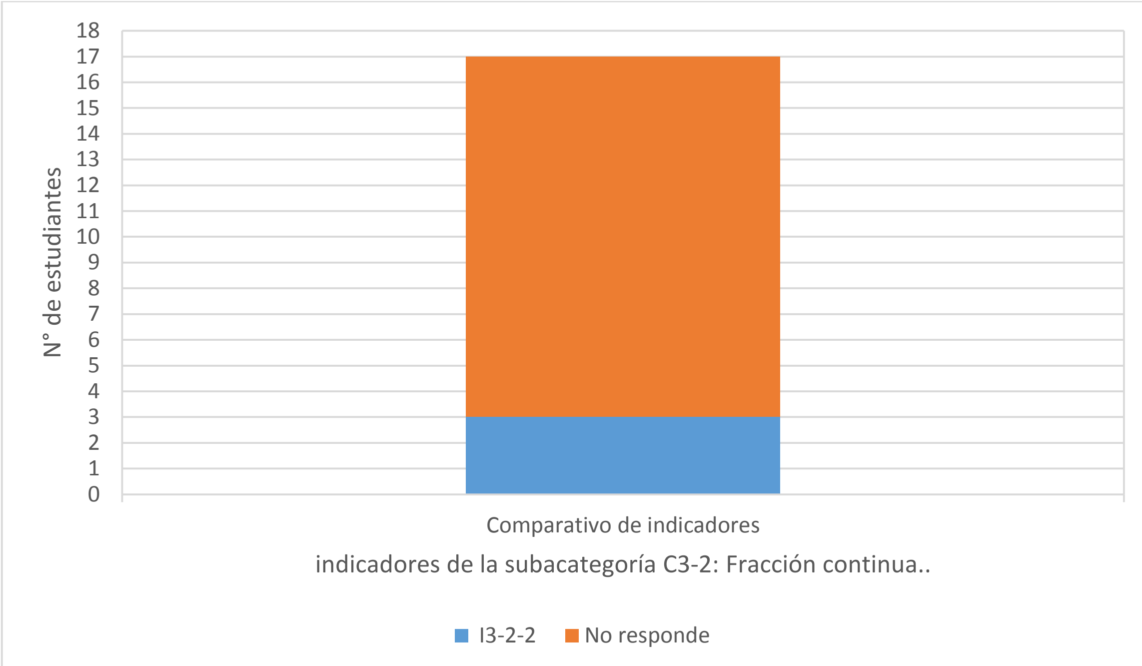


Figura 37: Frecuencia C3-2

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

De los resultados de C3-2 se puede concluir que el instrumento no pone en juego las herramientas necesarias para que el estudiante muestre un proceso de generalización usando como medio de la fracción continua, ya que un 84% de los estudiantes analizados no respondieron y el 16% faltante dio una respuesta muy lejana a lo que se esperaba.

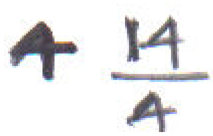


Figura 38: Evidencia

C3-3 Límite irracional: El pilotaje de esta actividad arrojó como resultado que, un grupo de 14 estudiantes, organizados en tres grupos de 3 y uno de 5, identifica que el proceso en el origami es equivalente al algoritmo de Euclides, y que esto permite encontrar en cada paso medidas tan pequeñas como desee (C3-3-1), como lo muestran las respuestas de la figura 40 y 41, un grupo de 5 estudiantes que no respondieron a la pregunta, esto se muestra en la siguiente representación:

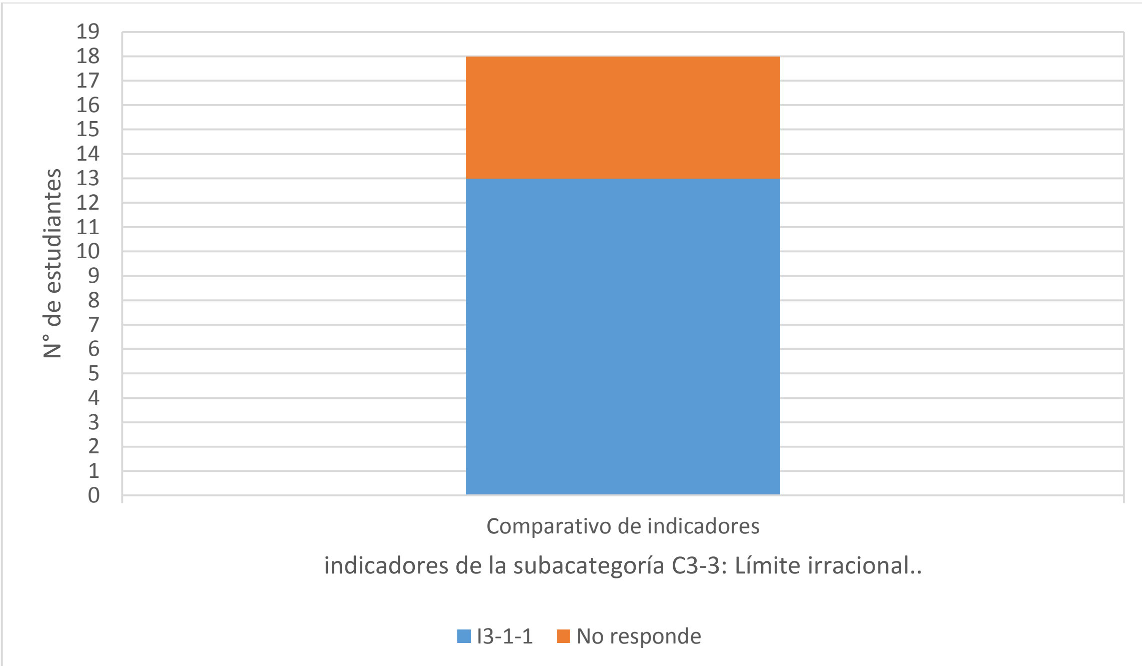
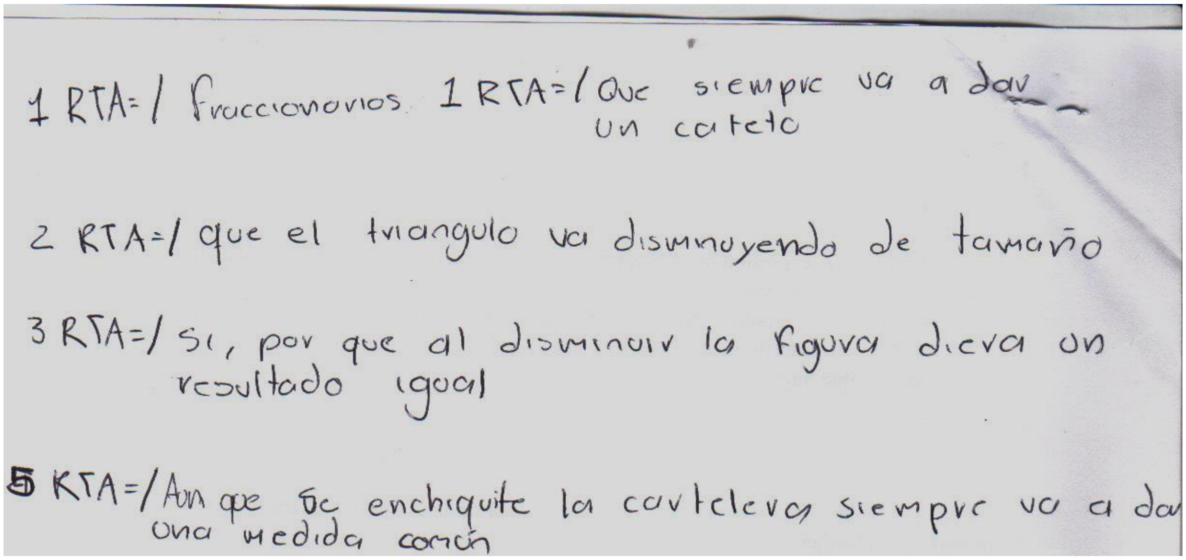


Figura 39: Frecuencia C3-3

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

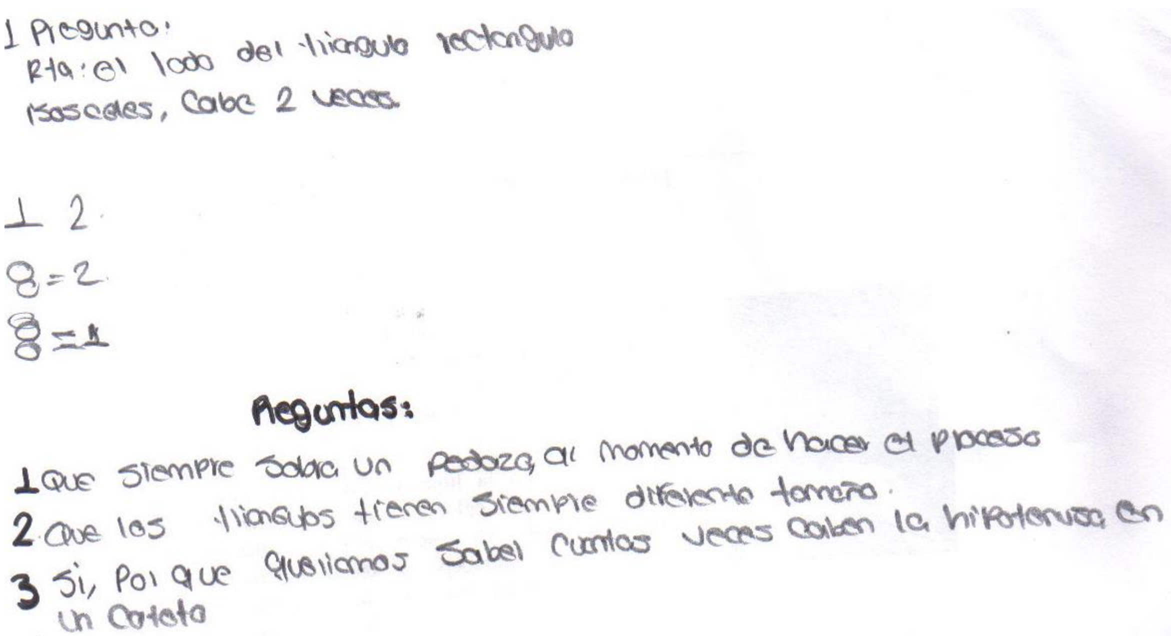

1 RTA=/ fraccionarios 1 RTA=/ Que siempre va a dar un cateto

2 RTA=/ que el triangulo va disminuyendo de tamaño

3 RTA=/ si, por que al disminuir la figura dicra un resultado igual

5 RTA=/ Aun que se enchiquite la cartelera siempre va a dar una medida común

Figura 40: Evidencia


1 Pregunta:
Rta: el lado del triangulo rectangulo isosceles, Cabe 2 veces.

1 2

8 = 2

8 = 1

Pregunta:

1 Que siempre Sobra un pedazo, al momento de hacer el proceso
2 Que los triangulos tienen siempre diferente tamaño.
3 Si, Por que quisiamos Saber cuantas veces caben la hipotenusa en un Cateto

Figura 41: Evidencia

El anterior análisis muestra la necesidad de vincular el proceso de papiroflexico a la fracción continua a medida que avanza el proceso de dobleces, para poder evidenciar la autosemejanza en el contexto geométrico, sino que también en la búsqueda de la unidad de medida común, esto se realzará completando una tabla que el estudiante debe llenar para ir llevando el registro paso a paso de lo que está realizando.

Análisis actividad 4 (Un par de dados para el fin sin fin):

E_4: Para el análisis de esta categoría se utilizaron 10 pruebas piloto, que fueron desarrolladas de manera grupal (grupos de 4 o 5 integrantes), en las que se evaluaron los siguientes subcategorías:

C4-1: Completitud o incompletitud: El pilotaje de esta actividad sugirió la necesidad de contemplar un indicador además de los considerados anteriormente:

- I4-1-3: No brinda información concluyente.

Se tuvo como resultado que algunos estudiantes comprenden que por medio del proceso infinito –del que surgen los números que están ubicando sobre la recta- no es posible llegar al número $\sqrt{2}$ (I4-1-1) a pesar de que la distancia entre éste y los números de la sucesión se reduzca en tanto la sucesión avanza, lo que indica que reconocen a dicho número como límite de un proceso convergente (Calderón, 2014, p. 39) (10 estudiantes) (Figuras 43 y 44).

Algunos estudiantes, al reconocer la imposibilidad de medir a $\sqrt{2}$ con la unidad, afirman que para saber si un número es mayor o menor que éste, se deben comparar las cifras decimales de su medida con las de una aproximación de $\sqrt{2}$, método que si bien resulta efectivo en algunas ocasiones, también puede llevarlos a asumir que dicho número será un término de la sucesión, dependiendo del grado de exactitud de la aproximación utilizada para la comparación (I4-1-2) (7 estudiantes) (Figura 45). Los demás estudiantes no brindaron información concluyente (I4-1-3).

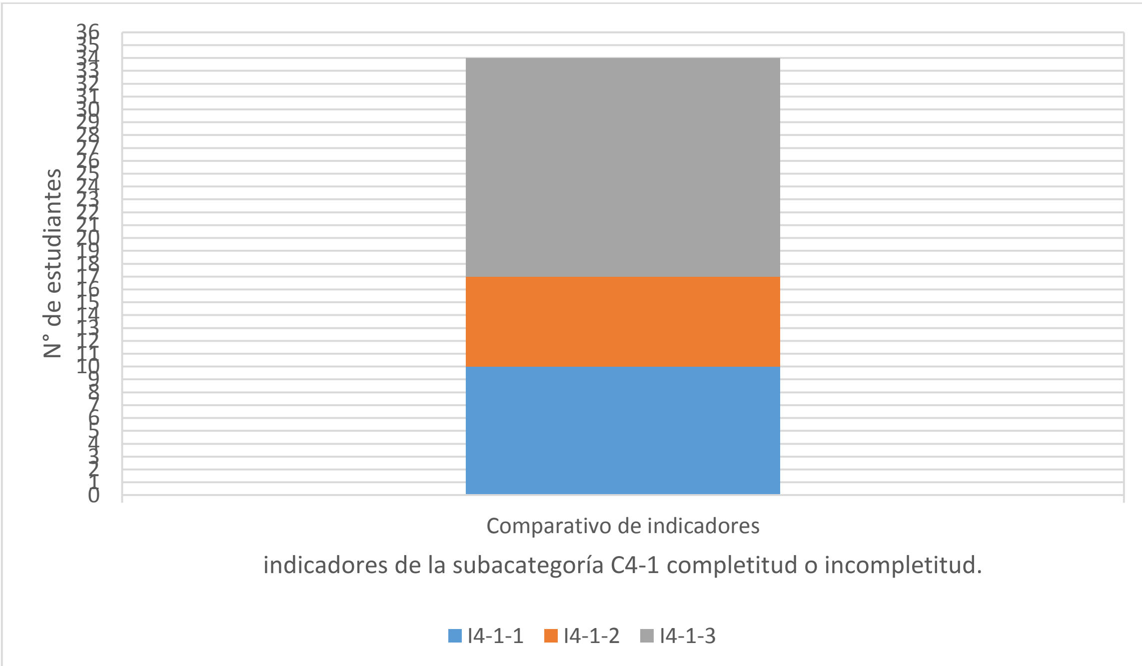


Figura 42: Frecuencia C4-1

Esta imagen fue creada por los autores exclusivamente para este trabajo.

Por lo que se puede concluir que las preguntas presentes en el instrumento permitieron que parte de los estudiantes reconociera la imposibilidad de alcanzar al número $\sqrt{2}$ como término de la sucesión generada a partir de un proceso infinito con características de auto-semejanza (Arenas y Sabogal, 2011, p. 9). En lo que respecta al indicador I4-1-3, si bien de la mitad de estudiantes no se pudo obtener información concluyente, no se puede interpretar como deficiencias en el instrumento dado que estos estudiantes no respondieron a las preguntas, en cambio, de aquellos que respondieron se puede concluir que la mayoría reconoce la incompletitud de la recta a partir de procesos de medición.

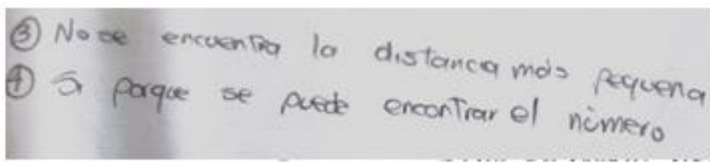


Figura 43: Evidencia

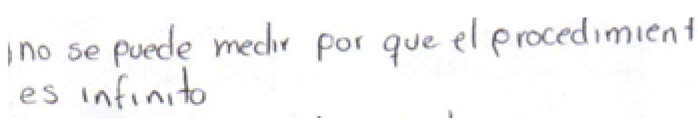


Figura 44: Evidencia

Figura 45: Evidencia

C4-2: Aceptación del infinito en acto: Al igual que en la subcategoría anterior, el pilotaje de esta actividad sugirió la necesidad de contemplar dos indicadores además de los considerados anteriormente:

- I4-2-3: No brinda información concluyente.

- I4-2-4: Acepta la existencia del fin del proceso debido a la existencia del límite del proceso como punto sobre la recta.

Se obtuvo como resultado que la mayoría de los estudiantes no acepta el fin del proceso en el número $\sqrt{2}$ (I4-2-2) (11 estudiantes) (Figuras 47 y 48), sin embargo, existió un grupo cuya respuesta sugiere que entendían la necesidad de encontrar, en algún momento al número **a pesar de que el proceso fuese infinito**, dada su existencia como punto sobre la recta (I4-2-4) (3 estudiantes) (Figura 49). Si bien, esto no implica que se haya realizado el encapsulamiento necesario para entender al infinito como objeto y no como proceso (Asuman y Roa, 2014), sí implica que este grupo de estudiantes está realizando una *acción* –como es entendida dentro de la teoría APOE- que puede eventualmente llevarlos a abstraer el proceso y transformarlo en objeto.

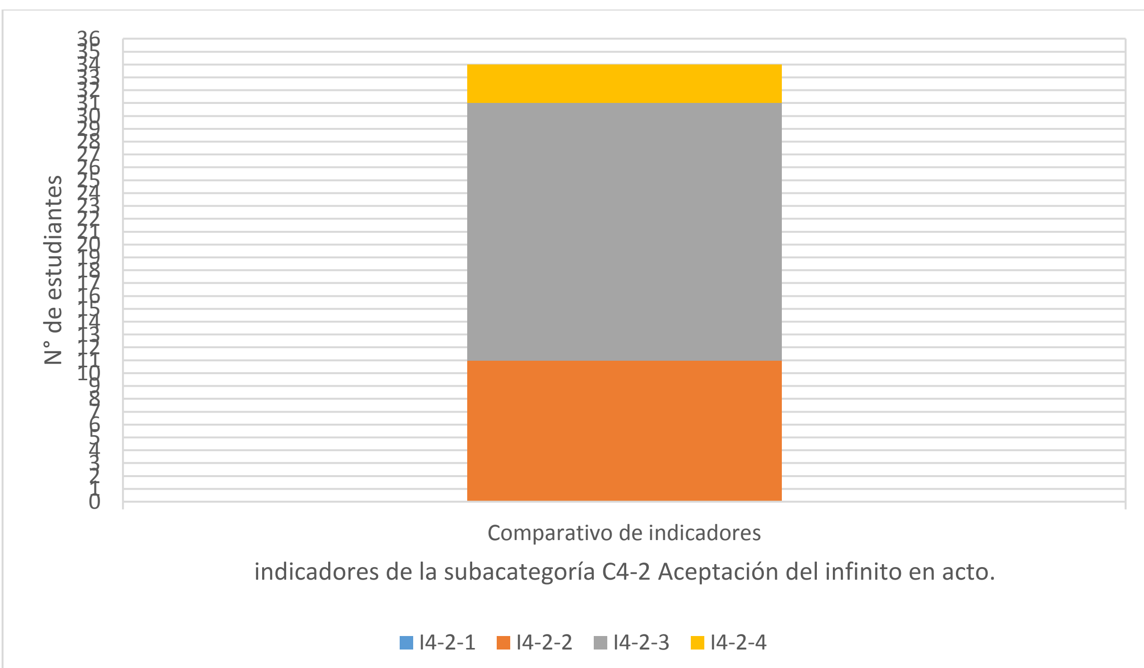


Figura 46: Frecuencia C4-2

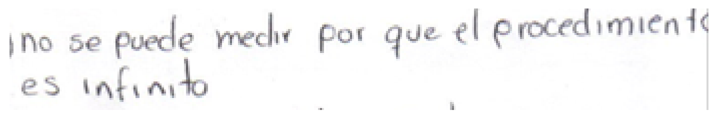


Figura 47: Evidencia

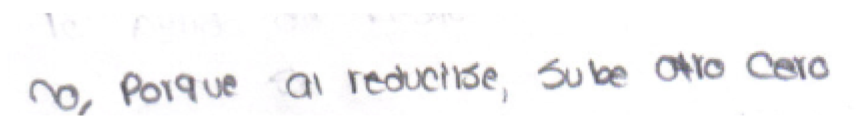


Figura 48: Evidencia

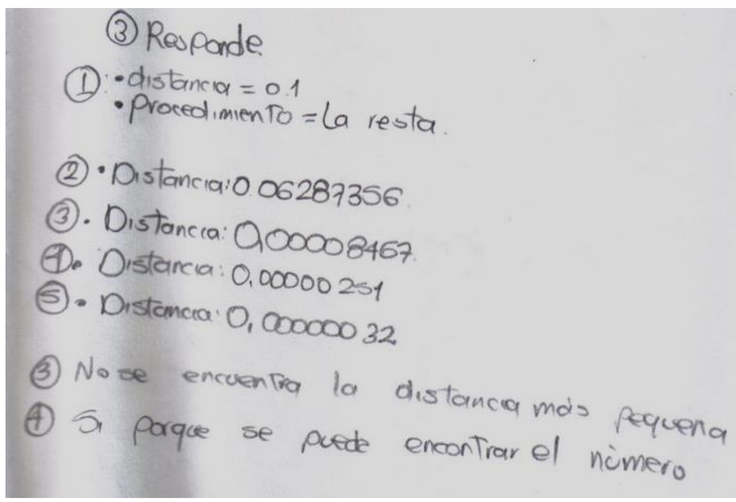


Figura 49: Evidencia

También, es posible afirmar, que durante el desarrollo de las actividades, los estudiantes realizaron acciones que corresponde con las características del pensamiento crítico descritas por Facione (2007).

- Análisis.

Los estudiantes identificaron relaciones de inferencia reales y supuestas entre enunciados, preguntas, conceptos, y diferentes representaciones (Facione, 2007, p. 5) durante las actividades. Esto se pudo ver reflejado, por ejemplo, en la primera actividad, donde relacionaron un proceso geométrico y su representación geométrica (algoritmo de Euclides) con representaciones numéricas, comprendiendo además que tales representaciones implican también relaciones de medición que, según sean expresadas, tienen en cuenta diferentes unidades de medida.

- Evaluación.

Los estudiantes, gracias a las preguntas y situaciones presentes en las actividades, valoraron la credibilidad de enunciados o representaciones que describían las situaciones y relaciones entre representaciones, valorando a su vez la lógica de estas relaciones (Facione, 2007, p. 5), pudiéndose ver, por ejemplo, en la cuarta actividad, donde se dieron discusiones entre estudiantes acerca del fin de un proceso infinito, la posibilidad de encontrar intervalos de menor distancia y la existencia de determinado punto sobre la recta numérica ($\sqrt{2}$).

- Inferencia.

Los estudiantes identificaron y aseguraron los elementos necesarios para obtener conclusiones razonables e hipótesis a partir de enunciados, principios y evidencias (Facione, 2007, p. 5). Esto se pudo ver reflejado, por ejemplo, en la segunda actividad cuando a partir de las condiciones de semejanza entre los diferentes pasos de un proceso geométrico, llegaron a la conclusión de que este proceso sería infinito, por lo tanto no existiría medida común entre segmentos en razón de $1{:}\sqrt{2}$.

- Explicación.

Los estudiantes enunciaron y justificaron sus razonamientos dada la evidencia obtenida a partir de los desarrollos realizados en las actividades para justificar sus razonamientos

(Facione, 2007, p. 6). Esto pudo verse reflejado, por ejemplo, en la tercera actividad cuando argumentaban acerca del comportamiento de las dos diferentes sucesiones obtenidas de un proceso infinito, a partir de las relaciones de orden entre los términos de cada una.

- Autorregulación.

Los estudiantes realizaron evaluaciones de sus propios juicios mediante análisis cuestionándolos y/o validándolos (Facione, 2007, p. 6) durante el desarrollo de las actividades. Lo anterior pudo verse, por ejemplo, en la cuarta actividad, en la que se vieron en la necesidad de validar sus propias conclusiones para argumentar acerca de la existencia del número $\sqrt{2}$ como término de una sucesión surgida de un proceso infinito.

Conclusiones

- Se concluye que la construcción de los números reales, haciendo énfasis en el número irracional $\sqrt{2}$, resulta un foco para la secuencia de actividades que brinda un medio efectivo a los estudiantes para construir el concepto de infinito mientras ejercen el pensamiento crítico. Sin embargo, cabe anotar que existen muchos puntos de partida para secuencias con tales finalidades, como bien lo mencionan los autores consultados; el límite, la función, la integral y la derivada, entre muchos otros. Aun así, el encontrar propuestas que se encaminen en la construcción y aceptación del infinito actual resulta engorroso y complicado, a diferencia de lo que se espera, porque superar al infinito actual como obstáculo epistemológico en sí mismo, requiere de interpretar la realidad desde perspectivas intuitivas y contra-intuitivas y asociar ésta situación a los conceptos mencionados anteriormente, parece ser una tarea muy complicada puesto que dentro de las intervenciones consultadas se puede evidenciar que en su gran mayoría éstas pretenden encontrar errores en la interpretación del infinito actual, sin embargo el presente trabajo constituye una muestra de las posibilidades del infinito para ser usado como generador de pensamiento crítico y como mediador de la construcción de conocimiento matemático. Con esto se pretende alentar a futuros investigadores en educación matemática, a explorar y explotar este concepto.

- Después de realizar un estado del arte de diferentes propuestas orientadas a la comprensión y aceptación del infinito, se puede concluir que son muy pocas las propuestas que estén orientadas a la construcción del infinito actual entendiéndolo como obstáculo epistemológico en sí mismo. No obstante, existe material relacionado a la didáctica de conceptos relacionados al infinito, e investigaciones dedicadas a explicitar las dificultades que profesores y estudiantes enfrentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que puede no sólo resultar de utilidad para potenciar la construcción del concepto de infinito, sino también servir como insumo para la construcción de secuencias de actividades enfocadas en la construcción de objetos matemáticos relacionados con el infinito, que encuentran en éste una dificultad para su desarrollo.

- El hecho de aceptar al infinito en acto, implica movilizar las estructuras mentales de manera análoga a la usada con el pensamiento crítico, como se pudo evidenciar en los referentes teóricos. La secuencia de actividades permite a los estudiantes entrar en contacto con el infinito potencial, a través del algoritmo de Euclides, posteriormente el hecho de la existencia del número $\sqrt{2}$ como punto sobre la recta sugiere la necesidad de *encapsular* el proceso para convertirlo en un objeto. Para realizar lo anterior los estudiantes deben hacer uso de habilidades tales como el análisis, la explicación, la inferencia, la evaluación y la autorregulación, habilidades que resultan ser características fundamentales del pensamiento crítico. Lo anterior implica que el desarrollo de las actividades permite también el desarrollo y ejercicio del pensamiento crítico.
- La secuencia diseñada permite a los estudiantes entrar en contacto con situaciones que potencian la comprensión del infinito actual, si bien la aceptación de este no se da en todos los casos, los estudiantes entran en contacto con nociones relacionadas con el infinito en sus dos interpretaciones, actual y potencial, lo que **potencia** su comprensión, pues permitirá al estudiante contar con más representaciones y

nociones del mismo concepto que podrán interrelacionarse como un objeto, que al no ser estático puede verse modificado con mayor facilidad y eventualmente aceptar al infinito en acto.

- Los instrumentos de medición actuales son precisos hasta cierto punto, puesto que al igual que las calculadoras convierten números irracionales en racionales debido a la cantidad de dígitos que son aceptados por el sistema, así los instrumentos de medición no permiten comparar de manera precisa ciertas parejas de longitudes como por ejemplo el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo, entonces resulta necesario que el estudiante vaya más allá de las limitaciones del contexto geométrico manipulable y encuentre un algoritmo que le indique si la comparación puede ser expresada o no como un numero racional, por lo que el algoritmo de Euclides, expuesto en el referente teórico, siendo usado en un contexto de autosemejanza, permite a los estudiantes tener conciencia del carácter infinito del proceso, además de su regularidad, para luego ser representado de manera numérica mediante una fracción continua.
- La consulta relacionada con el desarrollo histórico del concepto de *infinito*, permitió a los autores de este trabajo tener claridad acerca de posibles rutas coherentes para el desarrollo del mismo en el aula, además de obstáculos que éste presentó para su desarrollo, en consecuencia los autores también entendieron como dichos obstáculos fueron superados. Con base en lo anterior fue posible diseñar la secuencia teniendo en cuenta posibles obstáculos a encontrarse durante la aplicación, construyendo los instrumentos de tal manera que estos surgieran en la menor cantidad posible, del mismo modo los autores fueron capaces de atender al surgimiento de estos obstáculos durante la gestión y realizar sugerencias a los lectores dentro de las

planeaciones para que estos sean capaces de atender a dichas situaciones. Ampliando el espectro de investigación matemática, se concluye que realizar un análisis histórico del desarrollo de conceptos específicos permite a los investigadores en educación matemática tener bases para realizar una transposición didáctica que permita la construcción en el aula de los conceptos, considerando obstáculos epistemológicos y sus posibles soluciones. Si bien, en el presente trabajo no se realizó un análisis epistemológico exhaustivo, se tiene conciencia de que a mayor profundidad de este se pueden obtener mejores y más potentes secuencias de actividades e instrumentos.

- La propuesta de actividades logró promover discusiones en las que se pueden evidenciar elementos latentes del pensamiento crítico en los estudiantes en relación con la aceptación del infinito actual dentro de un contexto de los número reales, sin embargo hubo la necesidad dentro de la aplicación de los instrumentos iniciales de recrear preguntas que permitieran conseguir los objetivos propuestos para cada actividad y perfeccionar los instrumentos finales.
- Los instrumentos de medición actuales son precisos hasta cierto punto, puesto que al igual que las calculadoras (Crespo) "convierten números irracionales en racionales debido a la cantidad de dígitos que son aceptados por el sistema", así los instrumentos de medición no permiten comparar de manera precisa ciertas parejas de longitudes como por ejemplo el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo, entonces resulta necesario que el estudiante vaya más allá de las limitaciones del contexto geométrico manipulable y encuentre un algoritmo que le indique si la comparación puede ser expresada o no como un numero racional, por lo que el algoritmo de Euclides, expuesto en el referente teórico, siendo usado en un contexto

de autosemejanza, permite a los estudiantes tener conciencia del carácter infinito del proceso, además de su regularidad, para luego ser representado de manera numérica mediante una fracción continua.

- El pensamiento crítico tiene que ser congruente hacia su propio interior, pero además debe resultar coherente en sus explicaciones de la realidad, de otro modo no tendría valor adaptativo para la especie y la conduciría inevitablemente hacia el desastre. Asimismo, es un pensamiento parsimonioso y voluntario, expresa el deseo sincero de alcanzar una respuesta a problemas específicos, aunque también debe ser capaz de discernir cuando la información disponible es insuficiente o detectar sus límites, y en esos casos postergar la solución hasta que se alcancen mejores condiciones (Castellano, 2007, p. 72). Motivo por el cual los instrumentos presentados en la propuesta potencian el pensamiento crítico, porque; se presenta un problema al estudiante (la continuidad de los racionales), éste presenta argumentos como; algunas sucesiones infinitas de números racionales convergen a números irracionales, raíz de dos en el caso de esta propuesta, lo cual hace que la sucesión infinita sea completada por un número, sin alcanzar al último término de la sucesión, cosa que le permite explicar coherentemente lo que sucede en realidad usando la información disponible que en este caso son las preguntas orientadoras, construidas con base en la teoría APOE.

Bibliografía

Asuman, O., Roa, S. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática. 26* (1), 73-101.

Benzaquen, M., Gorrochategui, M., Kanashiro, A., Oviedo, L. (2006). Una aproximación a la noción de infinito a través de fractales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (19), 115-120.

Bombal, F. (2010). *Un paseo por el Infinito.* Madrid.

Cajori, F. (1987). Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento. *Revista del semanario de enseñanza y titulación*. [Versión online] Recuperado de http://es.slideshare.net/aracelifernan/zenon-libro

Calderón, N., (2014) .*Diferentes construcciones del número real* (tesis de Maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Castellano, M. (2007), *El pensamiento crítico en la escuela.* Prometeo libros. Buenos Aires, Argentina.

Chaparro, P., & Muñoz, C. (2012). *Análisis de aspectos epistemológicos en la historia del infinito, fundamentales para la construcción del límite de una función (propuesta de aula)* (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

DECA. (1992). “Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación”. *Revista AULA*, (6).

Euclides, (s.f). Elementos (Puertas María, trad.). Colombia: Gredos. (Obra original publicada 300 a.C).

Facione, P. (2007). Pensamiento crítico: ¿Qué es y por qué es importante?. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/PensamientoCriticoFacione.pdf

Goñi, J. & otros. (2012). *Didáctica de las matemáticas.*

Hernández, L., Mora, M., Romero, V. (2008) *Aspectos teóricos para construir una propuesta de enseñanza orientada a la comprensión de la noción de infinito actual* (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Jato, S. (2012). *El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria*. (trabajo para fin de Máster). Universidad de Cantabria, España.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (2), 53-70.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(3), 221-271.

Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Relime*. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33543068003

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1994). *FINES DE LA EDUCACION EN COLOMBIA*. [versión online] Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* [versión online] Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Neira, G., Rojas P., Romero, J., Lurduy, J., y Guacaneme, E. (2012). *Pensamiento Epistemología y Lenguaje Matemático*, Bogotá, Colombia: Doctorado Interinstitucional en Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ortiz, J., (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*

Ramírez, R. (2008). *La pedagogía crítica Una manera ética de generar procesos educativos*. [Versión online] http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0123-48702008000200009&script=sci_arttext

Rico, L., Romero, I. (1999) Construcción social del concepto de Número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 259-272.

Sabogal, S., y Arenas, G., (2011) *Una introducción a la teoría fractal*. Escuela de Matemáticas Universidad Industrial. Bucaramanga. Colombia.

Sadovsky, P. (2005). *La teoría de situaciones didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*. [Versión online] https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Tall, D. Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* (2), 151-169.

Tamayo, M, y Tamayo, (1999). Aprendiendo a investigar. Bogotá. ARFO EDITORES LTDA.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(1), 107-122.

ANEXOS

RAEs de los documentos

Título del texto	**Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.**
Nombres y Apellidos del Autor	Tall David, Vinner Shlomo
Año de la publicación	**1981**
Resumen del texto: Tall y Vinner inician el documento relacionando y diferenciando lo que ellos llaman *Imagen del concepto* y *definición del concepto*, siendo estas representaciones de un concepto. La imagen del concepto resulta ser una representación interna de éste formada por cada individuo. Es, en otras palabras, la estructura cognitiva del individuo que está asociada al concepto, incluyendo todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados; no constituye una representación total de éste y usualmente varía y se reconstruye mientras el individuo se encuentra con nuevos estímulos y experiencias relacionados al concepto. La imagen del concepto puede presentar incoherencias dado que es construida a partir de los estímulos que recibe el individuo en relación con el objeto y éstos no le proporcionan la totalidad de información, entonces se presenta muchas veces el caso de que ciertos elementos de la imágen del concepto se contradicen	

y el individuo aún no ha recibido un estímulo que le permita mediar entre estas dos aceptándolas como válidas.

La definición del concepto, es entendida por los autores como la manera en la que, por medio de palabras, el concepto es especificado. Lo anterior, tal como sucede con la imagen del concepto, puede darse con ciertos grados de parcialidad e incluso error en relación al concepto (como es formalmente aceptado en la comunidad matemática). Asimismo, la definición del concepto puede variar y reconstruirse a través del tiempo en tanto se mantenga en contacto con el concepto. Para cada individuo se desarrolla una definición de concepto a partir de su imagen de un concepto, lo que los autores llaman *definición de la imagen de concepto*; ésta hace parte también de la imagen del concepto. Al igual que con la imagen de concepto y la definición de concepto, la definición de la imagen puede o no tener coherencia entre sus partes.

Son llamados *factores conflictivos potenciales*, aquellas partes de la imagen del concepto que podrían entrar en conflicto con otras al momento de ser evocadas simultáneamente, si se da este caso, los conflictos pasan a ser llamados *factores conflictivos cognitivos*, estos factores representan una dificultad para el aprendizaje de la teoría formal o la reestructuración de la imagen y definición del concepto para cada individuo, más aún cuando se presenta conflicto entre una parte de la imagen y la definición formal del concepto pues es necesario crearse una imagen de la definición para que entonces el conflicto sea entre partes de la imagen del concepto y no entre la imagen y una representación aún no interiorizada por el individuo.

Posteriormente, Tall y Vinner aseguran que existen varios problemas de carácter

curricular que dificultan la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad; dado que en el currículo inglés están presentes las temáticas de *límites de series*, *límites de funciones* y *continuidad de funciones*, los autores describen para cada una de ellas dichos problemas relacionados a su enseñanza desde el currículo inglés.	
Palabras Claves	Imagen de concepto, definición de concepto, conflicto cognitivo, límite.
Problema que aborda el texto: Varias investigaciones demuestran que las imágenes del concepto individuales que llegan a tener los estudiantes sobre el concepto de límite matemático, difieren de la teoría formal y presentan características que pueden generar conflictos cognitivos.	
Objetivos del texto: Realizar una descripción de las imágenes y definiciones del concepto que tiene una muestra de estudiantes en torno al concepto de límite y continuidad y realizar un análisis de las posibles causas de los conflictos cognitivos que presentan.	
Hipótesis planteada por el autor: Las imágenes del concepto individuales que llegan a tener los estudiantes sobre el concepto de límite matemático, difieren de la teoría formal y presentan características que pueden generar conflictos cognitivos.	
Tesis principal del autor: Existen varios problemas de carácter curricular que dificultan la enseñanza de los	

conceptos de límite y continuidad pues la enseñanza de estos converge en la conclusión de que la enseñanza de estas presenta un patrón que consiste en la ejemplificación del concepto, seguida de su complejización y enunciación del concepto formal.

Argumentos expuestos por el autor:

Los autores presentan el análisis de las respuestas de estudiantes a *tests* aplicados en diferentes momentos en el transcurso de su carrera universitaria. Dichos análisis se estructuran intentando evidenciar la imágen y definición del concepto que tiene estos estudiantes acerca de los conceptos y qué posibles conflictos cognitivos presentan.

Conclusiones del texto:

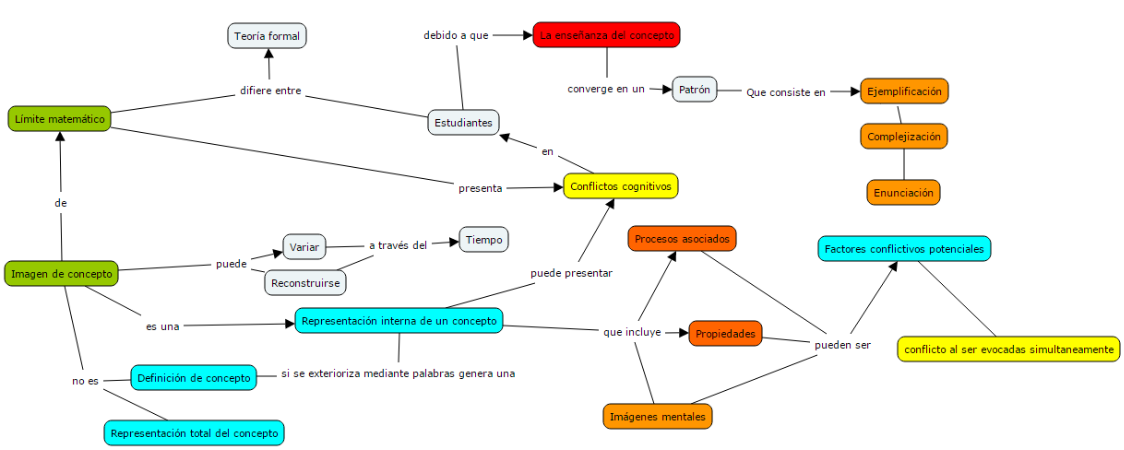
El análisis de los problemas curriculares de las tres temáticas convergen en la conclusión de que la enseñanza de estas presenta un patrón que consiste en la ejemplificación del concepto, seguida de su complejización y enunciación del concepto formal. Lo anterior implica que el estudiante se forme una imagen del concepto suficientemente amplia como para evitar los factores conflictivos cognitivos que pueden restringir el desarrollo de la teoría formal en el individuo.

Bibliografía citada por el autor:

School Mathematics Project: 1967 (revised 1970). Advanced Mathematics (Metric), Books 1–4, Cambridge University Press.

Schwarzenberger, R. L. E. and Tall, D. O.: 1978. Conflict in the learning of real numbers and limits, Mathematics Teaching 82, 44–9.

Tall, D. O.: l977a. Cognitive conflict and the learning of mathematics, paper presented to the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, Holland. Tall, D. O.: 1977b. Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics, Mathematical Education for Teaching, 2 4, 2–18.	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	30/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:	



Comentarios finales: Este documento resulta de importancia para el diseño de la secuencia de actividades en tanto permite conocer cómo ciertos estudiantes se enfrentan al concepto de infinito y las concepciones que se generan de este a partir de sus preconceptos y nuevas interacciones con situaciones relacionadas. Además presenta descripciones de conflictos semióticos a evitar.

Título del texto	**Algunas consideraciones acerca de la teoría de conjuntos.**
Nombres y Apellidos del Autor	Otero María Isabel
Año de la publicación	**1986**

Resumen del texto:

Este documento constituye una reflexión y recuento epistemológico acerca del surgimiento de la teoría de cantor como necesidad en la comunidad matemática y su posterior axiomatización. La autora da inicio haciendo referencia a los prehelénicos y a los griegos, quienes realizaron grandes avances en las matemáticas, fundamentados en los números enteros y racionales.

Sin embargo, es desde la geometría euclídea que se intenta llegar, de cierto modo, a una total formalización de las ideas matemáticas, puesto que los axiomas y postulados de la geometría se sustentaban, en su esencia, en la intuición que los objetos sensibles (representaciones geométricas) brindaban. Un ejemplo claro de lo anterior es el quinto postulado, que suscitó la aparición de nuevas geometrías en varios intentos (fallidos) por desmentirlo.

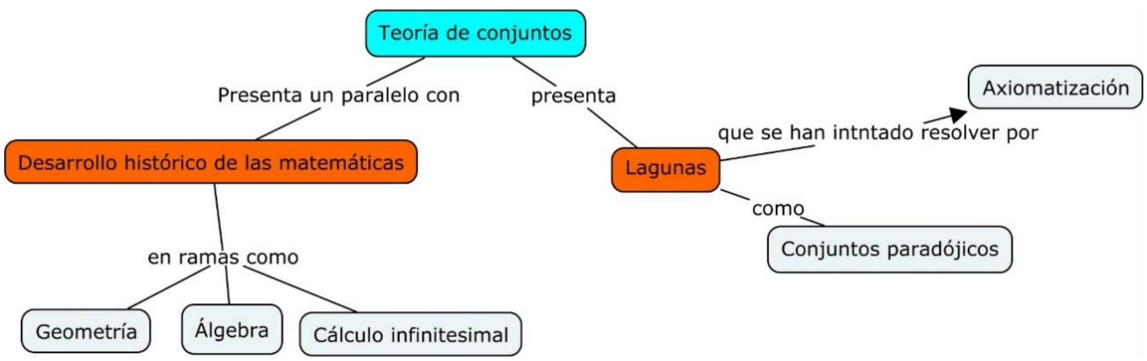
Es entonces cuando la autora nos remonta al siglo XIX en el cual sucedió la aritmetización del análisis que nuevamente se apoyaba en ideas intuitivas, posteriormente se dieron la geometría analítica y la axiomatización de la aritmética. Pero no fue hasta que Cantor formuló la teoría de conjuntos, que fue posible la construcción de los números reales y la aceptación del infinito actual, que permitieron desarrollar el cálculo y

posteriores teorías matemáticas con una mayor solidez son basarse en la intuición, además de permitir una posterior axiomatización de la aritmética dado que desde la teoría de conjuntos se puede llegar al concepto de número natural. Sin embargo, la teoría de conjuntos propuesta por cantor presenta lagunas, como la aparición de conjuntos paradójicos. Dichas lagunas intentaron ser cubiertas mediante la axiomatización de la teoría de conjuntos, sin embargo los múltiples intentos no pudieron conseguirlo sin añadir restricciones a la teoría. No todo ha sido dicho en cuanto a la teoría de conjuntos se refiere, las soluciones a sus lagunas no son definitivas y el tipo de preguntas que aparecen, en la actualidad, en torno a esta son de orden extramatemático, por ejemplo, ¿Hasta qué punto los problemas matemáticos son de índole nominalista? ¿Realmente podemos desterrar los vicios y defectos de los lenguajes naturales con los sistemas formales? ¿Están los problemas realmente en la expresión del pensamiento, o más bien en el pensamiento mismo? ¿Cómo separar el pensar del hablar?.	
Palabras Claves	Georg Cantor, números reales, infinito, teoría de conjuntos.
Problema que aborda el texto: Durante el siglo XIX todas las ramas de la matemática atravesaron por una crisis que desembocó en su consolidación y la teoría desarrollada por Georg Cantor jugó un papel vital en esta consolidación.	
Objetivos del texto: Presentar un recorrido epistemológico del desarrollo de la teoría de conjuntos y los	

desarrollos de Georg Cantor.
Hipótesis planteada por el autor: El desarrollo de la teoría de conjuntos presenta un paralelo con el desarrollo de los fundamentos de las matemáticas.
Tesis principal del autor: El desarrollo de la teoría de Cantor tiene sus bases en múltiples y variados momentos de la historia del desarrollo de las matemáticas, momentos que generaron rupturas en los modos de pensamiento de las épocas pero que solo pudieron encontrar validez una vez cantor construyó su teoría.
Argumentos expuestos por el autor: La autora presenta como argumento al propio recorrido epistemológico que realiza, haciendo análisis y conexiones entre la teoría de Cantor y cómo los diversos momentos en la historia de las matemáticas constituyeron un desencadenante para el desarrollo de esta teoría.
Conclusiones del texto: La teoría de cantor ha sido un elemento indispensable para el avance de las matemáticas y la solución de conflictos intelectuales a lo largo de la historia. Aun así, esta teoría presenta aún muchas lagunas por resolver.
Bibliografía citada por el autor:

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	30/12/2015

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

Título del texto	**Historia de los Argumentos de Zenón sobre el Movimiento**
Nombres y Apellidos del Autor	Florian Cajori.
Año de la publicación	**1987**

Resumen del texto:

Este documento plantea, desde una perspectiva epistemológica, el papel de las paradojas de Zenón sobre el movimiento y el continuo, como detonante de discusiones intelectuales que atañen a la física y la matemática, desde el concepto de *infinito,* que resulta fundamental para la comprensión del movimiento y permitió el desarrollo y formalización del cálculo.

Las Paradojas de Zenón sobre el movimiento y el continuo, plantean situaciones aparentemente lógicas que desafían el sentido común en lo que respecta al movimiento y el continuo. En un principio fueron calificadas como falacias y errores lógicos. Grandes pensadores como Aristóteles defendían esta postura en contra de los argumentos de Zenón, generando discursos y tratados en sentidos matemáticos, físicos e incluso filosóficos, y esta fue la postura aceptada durante siglos. Sin embargo, eventualmente partidarios de Zenón empezaron argumentar a favor de éste haciendo uso de razonamientos que empleaban una interpretación del infinito que resultaba contra intuitiva. Si bien las paradojas de Zenón, aparentemente, tenían como propósito original, no negar el movimiento sino cuestionar las ideas de los pitagóricos sobre éste, sirvieron como instrumento que propició el debate entre las dos interpretaciones del infinito (actual y potencial), ambas válidas, hasta su final aceptación y posterior avance de las

matemáticas gracias a ellas.	
Palabras Claves	Zenón, paradojas, infinito actual, infinito potencial, continuo, epistemología.
Problema que aborda el texto: Las paradojas de Zenón han generado opiniones diversas a lo largo de la historia, respecto a sus implicaciones en el desarrollo de los conceptos de continuidad, infinito e infinitesimal. La falta de claridad respecto a ellas impide conocer a fondo el desarrollo epistemológico de dichos conceptos**.**	
Objetivos del texto: ● Explicar las paradojas de Zenón. ● Analizar las diferentes posturas que se han tenido a través de la historia sobre las paradojas de Zenón. ● Realizar un recorrido epistemológico del desarrollo de los conceptos de continuo, infinito e infinitesimal con base en las paradojas de Zenón.	
Hipótesis planteada por el autor: La historia de las paradojas de Zenón es en gran medida la historia de los conceptos de continuo, infinito e infinitesimal.	
Tesis principal del autor: Las paradojas de Zenón han propiciado discusiones en torno a lo matemático, específicamente sobre el concepto de infinito, que han permitido el desarrollo de la teoría que estudia, refiere y hace uso de dicho concepto. Ya sea con el ánimo de refutarlas o	

validarlas, se han generado producciones matemáticas que eventualmente han conllevado hasta el desarrollo del cálculo mismo.

Argumentos expuestos por el autor:

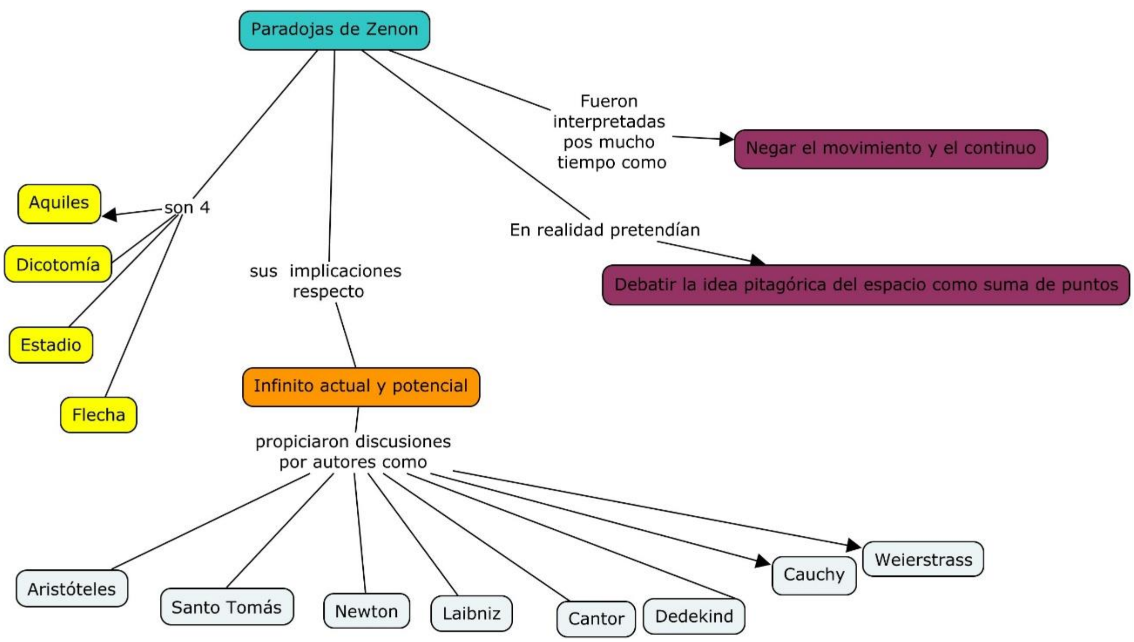
La naturaleza contra intuitiva de las paradojas de Zenón, propició los análisis y discusiones en torno a estas, tanto para refutarlas como para validarlas. El núcleo de estos análisis fue siempre aquello cuyo entendimiento resultaba evasivo a los pensadores dado el carácter finito de la mente humana, el infinito. La aceptación de las paradojas de Zenón implicó siempre la aceptación del infinito en su interpretación actual, ésta tan contra intuitiva y antinatural, permaneció latente a través de las discusiones prolongadas por siglos, a la vez que los nuevos desarrollos en los campos de la matemática y la física sugerían su validez hasta finalmente encontrar su reconocimiento en el trabajo de Cantor, lo que llevó la fundamentación del cálculo a partir del concepto de límite.

Conclusiones del texto:

- Las paradojas de Zenón tenían como propósito original, no negar el movimiento y el continuo sino cuestionar las ideas de los pitagóricos sobre éstos.
- El desarrollo de los conceptos pertenecientes al cálculo fueron suscitados por las discusiones en torno al sentido de las paradojas de Zenón.
- La aceptaciòn del infinito actual permitió quitar la etiqueta de “falacias” a las paradojas de Zenón.
- Ademàs, la aceptación del infinito actual permitió fundamentar y construir la teoría del concepto de límite, base del cálculo.

Bibliografía citada por el autor:	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	20/02/2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales: Este documento presenta un recorrido epistemológico del desarrollo del concepto de infinito, mostrando especial detalle en las dificultades tenidas por los pensadores de diferentes épocas al enfrentarse a este. Resulta de especial utilidad este recorrido pues podría conllevar a una posible ruta que siga la secuencia de actividades en torno al concepto de infinito.

Título del texto	**Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual**
Nombres y Apellidos del Autor	Guillermina Waldegg
Año de la publicación	**1996**

Resumen del texto: En este artículo se muestran los resultados de una investigación con estudiantes mexicanos en la que después de identificar como obstáculo epistemológico el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes, se lleva el problema al aspecto didáctico obteniendo como resultado que el comportamiento de los estudiantes está condicionado por el contexto en que se le presentan preguntas con relación al infinito.

La autora arranca definiendo las dos clases de infinito, el primero entendido como un proceso sin límite o algo no acabado (infinito potencial), aclarando que es el único aceptado por Aristóteles y por la ciencia hasta mediados del siglo XIX, además de que este infinito aparece muy temprano en el desarrollo del individuo, y el segundo es un infinito acabado en el que los límites son alcanzados (después de haber pasado por un proceso potencial) que a pesar de que aparentemente aparece primero en la lógica, en la educación actual aparece en procesos avanzados de cálculo.

Después de este recorrido histórico y reflexivo se muestra un sondeo que se hace para ver en qué nivel están estudiantes y profesores de matemáticas respecto a la aceptación del infinito actual, y se encuentra que un 63% de la muestra de 400 sujetos entre los 15 y 31 años dan argumentos finitistas a un problema en relación a la cantidad de particiones que se pueden hacer a un segmento de recta, y el resto de la muestra da argumentos infinitistas pero en relación al infinito potencial y en ocasiones paradójicas; es decir, tienden a utilizar un mismo enunciado para afirmar y para negar una afirmación, por lo que se concluye de este primer sondeo que no hay una aceptación del infinito actual dentro del grupo de estudiantes.

El texto continúa haciendo una descripción del obstáculo epistemológico, y describe algunos elementos de la obra de Bernard Bolzano *Las paradojas del infinito* (1851), ya que tiene un alto contenido matemático del infinito, esta descripción arranca con dos postulados frente a la construcción del infinito:

1. El infinito es determinable dentro de un conjunto, contrario a la idea que se tenía antes de la publicación de la obra, y esto permite axiomatizar la teoría del infinito.
2. El infinito tiene diferentes tamaños, no es único.

Y termina usando algunas afirmaciones de Bolzano para decir que en un primer intento de ordenar los conjuntos infinitos y de hacer una aritmética del infinito, subyace la idea de establecer una biyección entre los elementos de un conjunto infinito y los elementos de una de sus partes propias, sin embargo esto no sirve como argumento para decir que un conjunto infinito tenga cantidad específica y/o que los dos conjuntos comparados sean iguales, y esto impide a Bolzano desarrollar una aritmética del infinito. La autora deduce un obstáculo didáctico de los errores identificados en el autor anterior en contraste con los avances posteriores referentes al infinito; Las concepciones acerca de la aritmética de conjuntos finitos impiden un avance en la construcción de una aritmética del infinito por medio del establecimiento de una biyección entre un conjunto y una de sus partes.

Acto seguido es mostrar la idea que tienen estudiantes de primer semestre en relación al infinito a partir de la teoría de conjuntos, pues la teoría de conjuntos se estandarizó en la educación matemática mundial a partir de los años setenta y le asocia cuatro conceptos al concepto de conjunto; 1) pertenencia, 2) inclusión, 3) cardinalidad 4) infinito, con los primeros los estudiantes no presentan mayor dificultad porque son intuitivos y pueden ser comprobados de manera empírica con fenómenos de la realidad, sin embargo con los otros dos conceptos hay serios problemas porque la comprensión de la cardinalidad de un conjunto necesita la aceptación del infinito actual y los estudiantes no puede concebir que en la comparación de dos conjuntos infinitos exista la relación de inclusión y que se pueda establecer una biyección entre los elementos de éstos.

Con esta panorámica lo que sigue es hacer una investigación de la que se pueda inferir si las opciones de solución tomadas por los estudiantes frente a cierta clase de problemas en relación con el infinito tienen alguna tendencia estadísticamente hablando, una vez

realizadas las 34 preguntas a 95 personas de bachillerato con edades oscilantes entre 15 y 18 años, se concluye que los estudiantes individualmente aplican las mismas estrategias en situaciones de contenido matemático semejante, sin embargo el grupo de estudiantes tiene diversas opiniones frente a situaciones que involucran al infinito actual y además es evidente que hay una falta de conocimiento frente a esta interpretación del infinito. Finalmente se presenta la definición del obstáculo didáctico, que tiene que ver con el establecimiento de una biyección de un conjunto acotado y otro conjunto potencialmente construido, porque las intuiciones locales impiden que se formalicen elementos conceptuales relacionados con el infinito, además de que al ser un obstáculo que tienen raíces epistemológicas sale a relucir la necesidad de una madurez frente al concepto, que aun teniéndola no necesariamente se ha adquirido la conceptualización necesaria para su comprensión teórica.	
Palabras Claves	Obstáculo epistemológico, biyección, conjunto, infinito, contexto, límite, didáctico, infinito potencial, infinito actual, axiomatizar, cardinalidad, inclusión pertenencia,
Problema que aborda el texto: La falta de comprensión por parte de los estudiantes del infinito actual, a partir de la interpretación conjuntista del cardinal de un conjunto infinito.	

Objetivos del texto: • Mostrar históricamente qué acontecimientos han permitido una construcción y conceptualización del infinito actual. • Analizar las justificaciones de algunas clases de sujetos en relación a situaciones que involucran el infinito. • Identificar obstáculos epistemológicos en el proceso de comprensión del infinito en diferentes niveles de madurez conceptual.
Hipótesis planteada por el autor: El obstáculo epistemológico más evidente en relación a la comprensión del infinito está relacionado con el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes propias.
Tesis principal del autor: No hay una aceptación del infinito actual por parte de los estudiantes y de algunos docentes, ésto impide una buena comprensión del infinito acabado en el que los límites son alcanzados.
Argumentos expuestos por el autor: • A pesar de que aparentemente en la lógica aparece primero el infinito actual, el ser humano entra primero en contacto con procesos infinitamente potenciales y este hecho hace que se tenga una mayor aceptación del infinito potencial.

- En algunos casos como se muestra en el sondeo inicial, a pesar de que hay un esfuerzo por la aceptación de infinito actual, muchos terminan por dar argumentos finitistas a procesos infinitos.
- Hay una prevalencia de los estudiantes de primeros semestres de universidad en pensar bajo procesos intuitivos, por lo que los conceptos de cardinalidad e infinitos son de difícil comprensión ya que esto implicaría ir en contra de la intuición.

Conclusiones del texto:

- Para concebir la existencia del cardinal de un conjunto infinito es necesario tener madurez conceptual frente al infinito actual, sin embargo esto no garantiza la aprehensión del concepto.
- Establecer una biyección entre un conjunto y una de sus partes propias requiere una aceptación del infinito actual, y las justificaciones de los alumnos y profesores muestran que no hay una aceptación del infinito actual.
- Los acontecimientos históricos muestran que para un individuo es más complejo incursionar en un concepto como el infinito porque esto lo llevaría a contemplar procesos que van en contra de su intuición.

Bibliografía citada por el autor:

Benzecri, J.P. (1980). *Pratique de l'analyse de données*, París: Dunod.

Bolzano, Bernard (1851). *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig (publicación póstuma).

Lasparadojas del infinito (trad. L.F. Segura),1991, México: Mathema.

Bourbaki, Nicolas (1969). Éléments d'histoire des mathématiques. *Elementos de la historia de las matemáticas* (trad. J. Hernández), 1976, Madrid: Alianza Universidad.

Duval, Raymond (1983). "L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques", *Educational*

Studies in Mathematics, 14, 358-414.

Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P. (1979). "The Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

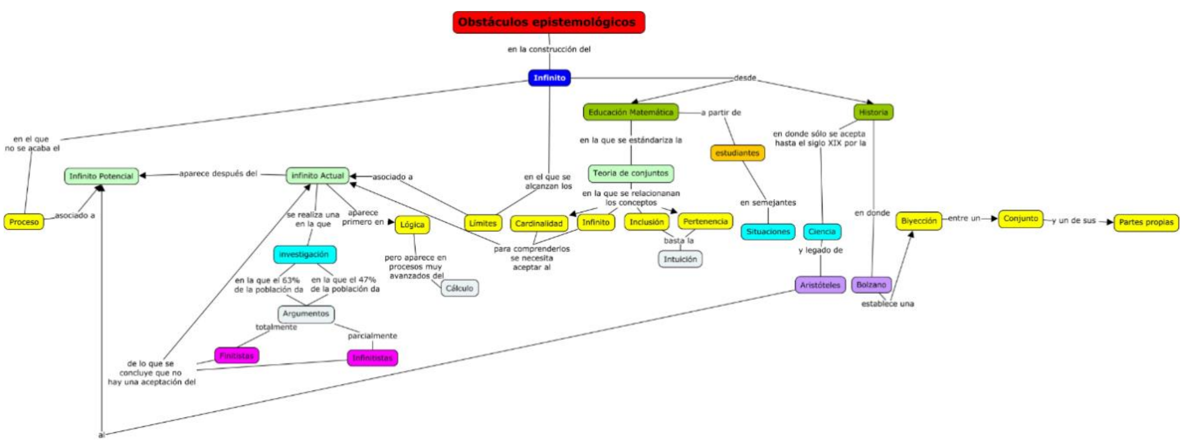
Koyré, Alexandre (1961). "Remarques sur les paradoxes de Zénon" en *Études d'histoire de la pensée philosophique*, pp. 9-35, París: Gallimard.

Moreno, L., Waldegg, G. (1991). "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

Pozo, J. I., Carretero, M. (1987). "Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas:

<table>
<tr><td colspan="2">¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?”, Infancia y Aprendizaje, 38, 50.

Thom, René (1992). “L’antériorité ontologique du continu sur le discrète” en J-M. Salanskis et H. Sinaceur, Le labyrinthe du continu, pp. 137-143, París: Springer-Verlag.</td></tr>
<tr><td>Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE</td><td>Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Salamanca.</td></tr>
<tr><td>Fecha en que se elaboró este RAE</td><td>23/02/2016</td></tr>
<tr><td colspan="2">Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios finales:

• Este documento además de hacer un recorrido histórico muy completo, permite ver cómo a pesar de pertenecer a grupos sociales en los que se construyen matemáticas, algunos sujetos no son capaces de argumentar desde una postura contra-intuitiva en</td></tr>
</table>

situaciones relacionadas con la aceptación del infinito actual.

- Claramente hay una fuerte resistencia por parte del alumnado en aceptar la existencia de una relación de contenencia y de biyección en conjuntos infinitos.

Título del texto	**Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales.**
Nombres y Apellidos del Autor	Rico Luis, Romero Isabel
Año de la publicación	**1999**

Resumen del texto:

Durante el año escolar de 1993-94 en España, los autores realizaron una experiencia de acción-investigación con estudiantes de 14-15 años orientada al estudio de los números reales con el supuesto de que el pensamiento no opera de manera independiente del contexto, por lo tanto, la interacción social tiene efectos sobre la construcción del conocimiento matemático.

La relevancia de los factores sociales y contextuales ha sido considerada en la investigación de acuerdo con dos niveles: El primer nivel se centra en los aspectos actitudinales de los involucrados mientras que el segundo nivel se centra en el aspecto sociocognitivo en la construcción de conocimiento matemático, coordinado respecto a: el conocimiento construido en la comunidad de la educación matemática, las prácticas compartidas en la comunidad de la clase y las concepciones que los estudiantes forman a partir de estas prácticas.

La experiencia fue diseñada teniendo en cuenta que al existir una fase de acción (experiencia práctica en sí) era necesario poder realizar una observación (realizada por la

misma profesora que dirigía la experiencia) mediante diversos instrumentos de recolección de datos, para poder, posteriormente realizar un proceso de reflexión sobre la propia experiencia. Además, dicha reflexión recopila y analiza, cualitativamente la información obtenida de acuerdo a la relación entre estudiante-contenido-maestro. Se realiza especial detalle en el análisis de la relación alumnos-contenido, de acuerdo a tres estándares propuestos por Newmann, Secada y Wehlage (1995) como criterios para evaluar la autenticidad de los procesos de enseñanza dirigidos a promover la comprensión de los estudiantes: ● Pensamiento de nivel avanzado. ● Profundidad de conocimiento. ● Conversación sustantiva. La descripción y análisis de la experiencia de acuerdo a estos estándares da cuenta de cómo los estudiantes adquieren responsabilidad por si propio aprendizaje, luego de lo cual van creando significados comunes gracias a la negociación de significados y poco a poco construyen una red de nociones y conceptos que los acercan a la comprensión del número real.	
Palabras Claves	Construcción social matemática, número real, infinito actual, infinito potencial, número decimal infinito no periódico.
Problema que aborda el texto: El estudio de los aspectos sociales en la construcción de conocimiento se ha convertido en un área creciente de interés en educación matemática. Sin embargo, se observa una	

tendencia trascender este esquema y considerar que en procesos de interacción existen factores (generados y no generadores) relativos al aprendizaje (Rico y Romero, 1999).
Objetivos del texto: ● Describir aspectos relevantes, en cuanto a la construcción social del número real, de una experiencia práctica realizada por los autores. ● Establecer relaciones entre la experiencia práctica y los logros conceptuales de los estudiantes, respecto a sus interacciones. ● Realizar un aporte al estudio del papel de los aspectos sociales en la construcción de conocimiento matemático.
Hipótesis planteada por el autor: Existe relevancia por parte de los factores sociales y contextuales, tanto en el progreso cognitivo en el dominio social, como en la construcción de conocimiento matemático. El pensamiento no opera de manera independiente del contexto.
Tesis principal del autor: Existe relevancia por parte de los factores sociales y contextuales, tanto en el progreso cognitivo en el dominio social, como en la construcción de conocimiento matemático en el grupo de estudiantes con el que se desarrolló para secuencia de actividades. En ellos el pensamiento no opera de manera independiente del contexto puesto que el desarrollo de las actividades mediante la interacción entre los estudiantes propició la construcción de conocimiento compartido entre ellos, llegando a acercarse a la comprensión de los números reales mediante la negociación de significados.

Argumentos expuestos por el autor: Los principales argumentos de los autores se basan en el análisis de la experiencia práctica realizada por los mismos. Dichos análisis dan cuenta de las interacciones entre los estudiantes y la docente investigadora o entre estudiantes, y cómo estas juegan un papel importante en la construcción de conocimiento individual y grupal.
Conclusiones del texto: La labor del docente resulta complicada cuando es necesario confiar en la responsabilidad de los estudiantes con su propio aprendizaje, mientras que existe una presión curricular respecto a los contenidos y el tiempo en que estos han de ser abarcados. Dicha responsabilidad es vital para que se dé el aprendizaje en contextos de interacción social, pues sugiere a tal interacción como solución a las diversas dificultades que los estudiantes puedan encontrar. Para este caso particular, se observó cómo las interacciones tuvieron un efecto desencadenante de la construcción de conocimiento matemático, que si bien, no cubrió la totalidad del objeto matemático tratado, permitió a los estudiantes realizar avances significativos en su comprensión, evidenciado en múltiples conversaciones sustantivas.
Bibliografía citada por el autor: ARSAC, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'epistémologie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 8, pp. 267-312. BALACHEFF, N. (1986). Cognitive versus situational analysis of problem solving

behaviours. For the learning of Mathematics, 6(3), pp. 10-12.

BARTOLINI-BUSSI, M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction, en Biehler, R. et al. (eds.). Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.

BAUERSFELD, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 11, pp. 23-41.

BAUERSFELD, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom, en Biehler, R. et al. (eds.). Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.

BELL, E.T. (1989). Historia de las matemáticas. México: Fondo de Cultura Económica.

BIEHLER, R., SCHOLZ, R., STRASSER, R. y WINKELMANN, B. (eds.) (1994). Didactics of Mathematics as a Scientific

Discipline. Dordrech: Kluwer Academic Publishers. BISHOP, A., GEOFFREE, F. (1986). Classroom organization and dynamics, en Christiansen, A. et al. (eds.). Perspectives

on Mathematics Education.

BROMME, R. y STEINBRING, H. (1994). Interactive development of subject matter in the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 27, pp. 217-248.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1994). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Granada: Comares.

CHRISTIANSEN, B., HOWSEN, A. y OTTE, M. (eds.) (1986). Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel.

COBB, P., YACKEL, E. y WOOD, T. (1991). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 23, pp. 2-33.

DOUADY, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). Recherches en Didactique des Mathématiques, 11, pp. 77-110.

FISCHBEIN, E., JEHIAM, R. y COHEN, D. (1995). The concept of irrational numbers in High-School students and prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, 29, pp. 29-44.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T. (1992). Learning and teaching with understanding, en Grouws, D.A. (ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Nueva York: MacMillan Publishing Company.

LABORDE, C. (1994). Working in small groups: a learning situation?, en Biehler, R., Scholz, R. y otros (eds.). Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

LERMAN, S. (1989). Construtivism, mathematics and mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 20, pp. 211-223.

LO, J. y WHEATLEY (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion.Educational Studies in Mathematics, 27, pp. 145-164.

MCNIFF, J. (1988). Action Research: Principles and practice. Londres: Macmillan Education Ltd.

MONAGHAN, J. (1988). Real mathematics. The Mathematical Gazette, 72, pp. 276-281.

NEWMANN, F., SECADA, W. yWEHLAGE, G. (1995). A Guide to Authentic Instruction and Assessment: Vision, Standards and Scoring. Madison: WCER.

RICHADSON, V. (1994). Conducting research on practice. Educational Researcher, 23, pp. 5-10.

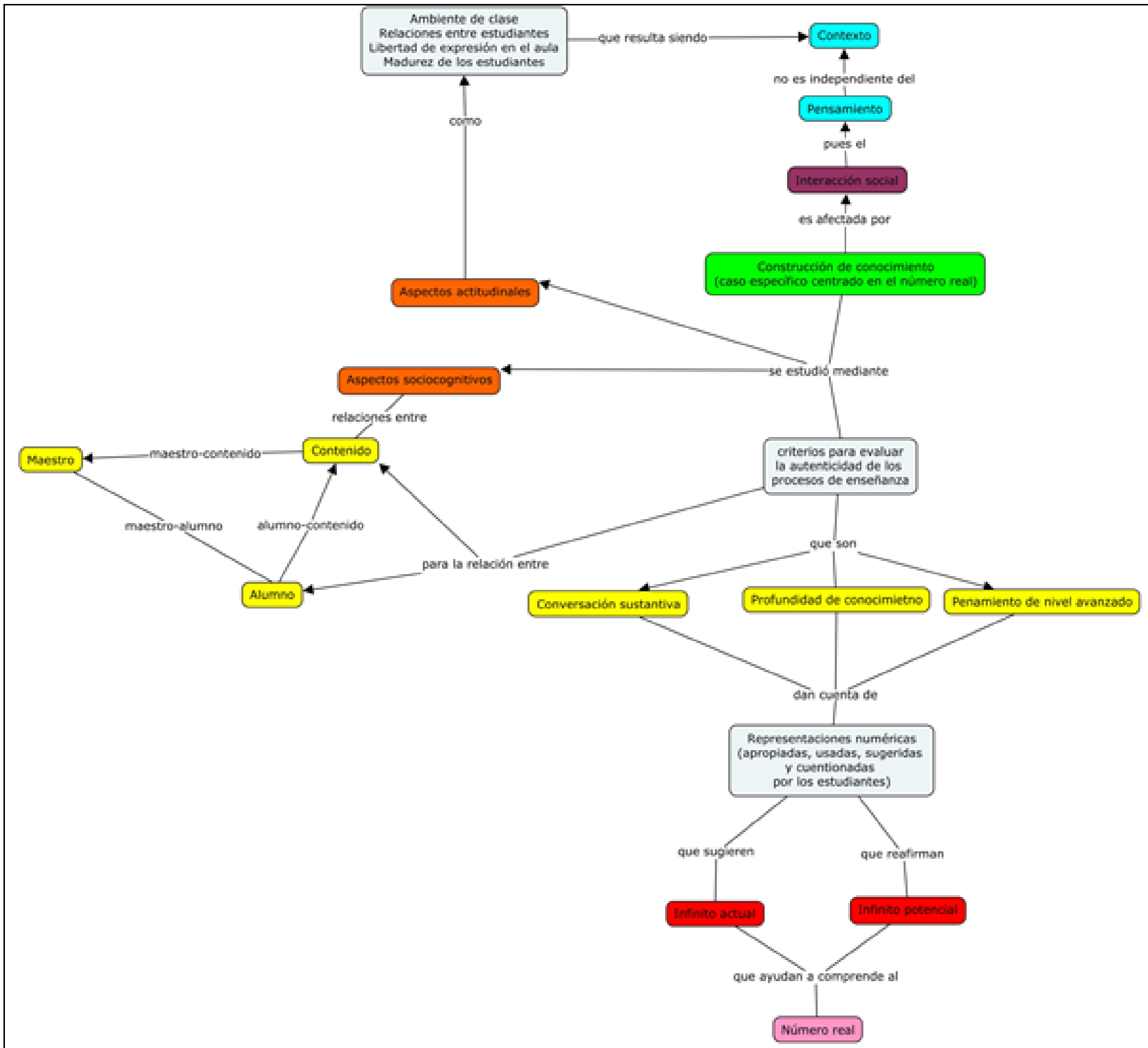
RICO, L. (ed.) (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: Síntesis.

ROMERO, I. (1997). La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación acción. Granada: Comares.

STRASSER, R. (1994). Interaction in the classroom, en Biehler, R., Scholz, R. et al. (eds.). Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline.

TALL, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

VAN DEN BRINK, J. (1990). Classroom research. For the Learning of Mathematics, 10, pp. 35-38. VOIGHT, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 26, pp. 275-298.	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	31/01/2016
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:	



Comentarios finales:

Título del texto	La etnomatemática en Colombia. un programa en construcción
Nombres y Apellidos del Autor	Hilbert Blanco Alvarez
Año de la publicación	**2006**

Resumen del texto: En este trabajo tienen como objetivo presentar las diferentes instituciones y grupos de investigación que han abordado la etnomatemática, desde sus estudios e investigaciones y se pregunta por el desarrollo de la etnomatemática en Colombia a lo largo de la historia.

Arrancan diciendo que la etnomatemática es una relación entre la antropología cultural y las matemáticas puesto que a pesar de ser disciplinas con objetivos claros no se había relacionado de manera directa, y aclaran que el problema que aborda la etnomatemática está directamente relacionado con la enseñanza de las matemáticas en diversos grupos sociales con alguna característica en común. Después se aborda la etnomatemática desde Colombia cuyos pioneros más reconocidos son; Víctor Samuel Albis, Guillermo Páramo y Germán Mariño, y se hace un recorrido por las diferentes etapas por las que pasó la institucionalización de la etnomatemática en este país que dura cerca de 20 años (1984-2005) empezando con una visita de Ubiratan D'Ambrosio a un evento de Colciencias en 1984 considerado el padre de la etnomatemática y terminado con Luis Carlos Arboleda que dictó la conferencia "La Etnomatemática y sus relaciones con la Historia y la Educación Matemática", en 2005. Después hacen el mismo recorrido por los trabajos internacionales realizados en la época de los 80s.

Finalmente el autor con los pocos trabajos publicados en la época de 1990 y 2005 en

Colombia, realiza una categorización de las clases de trabajo que se llegan a presentar y construye las siguientes categorías:

1) Estudios específicos sobre saberes y técnicas matemáticas de estratos sociales y comunidades “iletradas”
2) Análisis del pensamiento matemático de comunidades indígenas y afrodescendientes ancestrales
3) Utilización de instrumentos autóctonos de las comunidades indígenas o negras como herramientas pedagógicas para la enseñanza de la matemática occidental
4) Estudios sociales, históricos, antropológicos, etc., de formas de pensamiento matemático y científico en civilizaciones y comunidades.
5) Estudios históricos, epistemológicos, filosóficos, educativos, sobre formación de culturas matemáticas y científicas en Colombia.

Después de describir cada una y de hacer la descripción de algunos trabajos publicados en cada categoría, realiza una reflexión final en la que concluye que a pesar de que en Colombia la etnomatemática ha empezado a ser tema de estudio y de interés para muchos profesionales y/o estudiantes, sin embargo hay muy pocas publicaciones en relación a esta nueva tendencia en educación matemática.

Palabras Claves	Etnomatemática, antropología cultural, matemáticas, grupos sociales, enseñanza y filosofía

Problema que aborda el texto:

La falta de publicaciones sobre la Etnomatemática en Colombia, que sustente todo los desarrollos que se han tenido en relación a esta nueva tendencia en educación matemática.

Objetivos del texto:

- Mostrar que a pesar de los avances de la Etnomatemática a nivel mundial en Colombia falta socializar esta tendencia en educación matemática.
- Presentar el desarrollo de la etnomatemática en Colombia y algunas publicaciones recientes.
- Categorizar las diferentes categorías de trabajos de Etnomatemática de los que se tiene un registro.

Hipótesis planteada por el autor:

En Colombia se hace investigación en etnomatemática pero todavía es necesario aumentar en la cantidad de esta clase de investigación.

Tesis principal del autor:

En Colombia se ha hecho mucha investigación en Etnomatemática, sin embargo no existen socializaciones de dichos trabajos.

Argumentos expuestos por el autor:

- Son muchos los trabajos que se han realizado con respecto a la etnomatemática, pero la cantidad de éstos que han sido publicados es casi nula.
- Se han hecho avances significativos en Colombia y en el mundo, sin embargo por

los trabajos publicados, parece no haber mucho interés Local en el tema.

Conclusiones del texto:

- Es muy importante para que nuestro país crezca en términos de educación fomentar una cultura de investigación sobre el infinito.

Bibliografía citada por el autor:

ACOSTA, J. **Compendio histórico del descubrimiento y colonización de la Nueva Granada en el siglo decimosexto**. 2. ed. Bogotá: Librería Colombiana, Camacho Roldan & Tamayo, 1901.

Historia natural y moral de las Indias. México: F.C.E, 1985. ALBIS, V. S. Un programa de investigación en la historia de la matemática en un país latinoamericano. **Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología QUIPU**, México, n. 1, p. 391-400, 1984.

Arte prehispánico y matemáticas. **Revista de la Universidad Nacional**, Bogotá, v. 1, n. 7, p. 29-34, 1986.

Las proporciones del sol de los pastos. **Boletín de Matemáticas**, Bogotá, v. 21, n. 2-3, p. 110-134, 1987b.

La división ritual de la circunferencia: una hipótesis fascinante. **Matemáticas: Enseñanza Universitaria**, Cali, v. 1, n. 1, p. 13-28, mayo, 1990.

ALBIS, V.; PÁRAMO, G. Antropología y matemáticas. **Mathesis**, México, v. 3., n. 2, p.

163-167, mayo, 1987a.

ARBOLEDA, L. C. La Etnomatemática y sus relaciones con la Historia y la Educación Matemática. In: SIMPOSIO NORORIENTAL DE MATEMÁTICAS Y ENCUENTRO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5 y 1., 2005. Bucaragamanga. Não publicado.

ASCHER, M.; ASCHER, R. Ethnomathematics. In: POWELL, A.; FRANKENSTEIN, M. (Eds.) **Ethnomathematics:** challenging eurocentrism in mathematics education. Albany: State University of New York, 1997. cap. 2, p. 25-50.

BACHELARD, G. **La formación del espíritu científico**. Buenos Aires: Siglo XXI, 1972.

BARBOZA, J. J; RAMÍREZ, M. H. **Etnomatemática:** una alternativa pedagógica por explorar. In: TERCER FORO DE EDUCACIÓN DEPARTAMENTAL Y MUNICIPAL DEL VAUPÉS, 1999, Vaupés. Não publicado.

Etnomatemática: una alternativa pedagógica por explorar. In: CONGRESO NACIONAL DE MATEMÁTICAS, 2000, Bogotá. Não publicado.

BALLONOFF, P. Structural models and correspodence problems. **Social Science Information,** London, GB**,** v. 14, n. 3-4, p. 183-199. 1975.

BEDOYA, E. Una experiencia y una propuesta para la enseñanza de las matemáticas. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 83-86.

El conocimiento lógico-geométrico implícito en la cestería de los eperara siapidara: programa de etnoalfabetización: convenio FITMA-BIOTROPICOS-IMEB-IMIPAE. Barcelona: 1995. Não publicado.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática**: La educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Ediciones Paidós, 1999.

BLANCO, H. La Etnomatemática en Colombia**.** In: ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. CONGRESO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, 7. **Memorias**. Bogotá: Grupo editorial GAIA, 2005. p. 57-62.

BOCHENSKI, J. M. **The Logic of religion.** New York: New York University Press, 1965.

BOLAÑOS, L. M. **Sistema numérico y medidas de longitud de los grupos étnicos tucano y cubeo**. sem local, sem editora e data provavel.

BOYER, C, B. **Historia de la matemática.** España: Alianza Editorial, 1987.

BUENAVENTURA, N. Trabajo en alfabetización matemática con bases sindicales y campesinas. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 58-60.

CASTAÑO, J. ¿Hay que indagar más allá de las formas de operar que tienen los adultos iletrados? Experiencia Colegio Champagnat de Bogotá. In: CENTRO LAUBACH DE

EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 90-97.

CASTRILLON, A. Experiencia: Instituto Mayor Campesino – IMCA. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 61-75.

CASTAÑEDA, C. **Las enseñanzas de Don Juan.** México: Fondo de Cultura Económica, 1974.

CAUTY, A. Etnomatemáticas: el laboratorio Kwibi Urraga de la Universidad de la Guajira. In: CONGRESO DE ANTROPOLOGÍA-SIMPOSIO DE ETNOEDUCACIÓN, 7. **Memorias.** Barranquilla: Fondo de Publicaciones de la Universidad del Atlántico, 1999. p. 267 - 365.

CHURCHILL, M. **Contando y midiendo**. México: UTEHA, 1965.

COLLETTE, J. **Historia de las matemáticas.** Madrid: Siglo XXI, 1985.

D’AMBROSIO, U. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In: POWELL, A.; FRANKENSTEIN, M. (Eds.) **Ethnomathematics:** challenging eurocentrism in mathematics education. Albany: State University of New

York, 1997. cap. 1, p. 13-24.

DÍAZ, L.; MOLINA, E. **Los numerales de la familia lingüística macrochibcha.** 1988. 181 f. Trabajo de Grado (Matemáticas) - Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

DURKHEIM, E. **Les formes élémentaire de la vie réligieuse:** le système totemique en Australie. Paris: Alcan, 1912.

ELIADE, M. **El Mito del eterno retorno**: arquetipos y repetición. Madrid: Alianza, 1972.

ELSTER, J. **Logic and society:** contradictions and possible worlds. Londres: John Wiley and Sons, 1978.

EQUIPO PEDAGÓGICO. Experiencia Fundación Pepaso: ¿Para qué la matemática en la educación básica alternativa de jóvenes y adultos del sur-oriente de Bogotá? In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 42-44.

FETTWEIS, E. Die Mathematik des megalithkulturkreises und ihre entwicklung. **Scientia**, Berlin, n. 91, p. 1-15, 1956.

FERREIRO, E.; TOBEROWSKY, A**. Los sistemas de escritura en el desarrollo del Niño**. Buenos Aires: Siglo XXI, 1979.

FLETCHER, T. J. **Didáctica de la matemática moderna en la enseñanza media**.

Barcelona: Teide, 1968.

FORGE, A. Learning to see in New Guinea. In: MEYER, P. (Ed.). **Socialization:** the approach from anthropology. London: Tavistock, 1970.

GELB, I. **Historia de la escritura**. Madrid: Alianza Universidad, 1976.

GERDES, P. **Geometry from Africa**: Mathematical and Educational Explorations. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1999.

Ethnomathematics and mathematics education. In: BISHOP, A. et al. (Ed.). **International handbook of mathematics education**. Netherlands: Kluwer, 1996. cap. 24, p. 909-943.

On the reconstruction of the history of geometrical thinking in Africa. PAN-AFRICAN CONGRESS OF MATHEMATICIANS, 2., **Abstract.** Jos, Nigeria: University of Jos, 1986.

GRANA, N. **Logica paraconsistente**: una introduzione. Napoli: Loffreo Editore, 1983.

HIGUERA, C. Seminario taller capacitación de educación popular básica de jóvenes y adultos: las matemáticas, componente clave en el proceso de alfabetización. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 108-110

La yupana: un ejemplo de lo histórico como elemento pedagógico. **Lecturas**

Matemáticas, Bogotá, v. 15, p. 63-78, 1994.

HOLLOWAY, G. **La concepción del espacio en el niño según Piaget**. Barcelona: Paidós, 1982

JIMÉNEZ, J. La matemática dentro del currículo de educación básica para adultos. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 76-78.

LÉVI-STRAUSS, C. **Antropología estructural**. Buenos Aires: Eudeba, 1968.

LÉVY-BRUHL, L. **La mentalidad primitiva**. Buenos Aires: La Pléyade, 1975.

La mitología primitiva. Barcelona: Península, 1978.

LORRAIN, F. Social structure, social classifications and the logic of analogy. In: BALLONOFF, P. (Ed.). **Mathematical models of social and cognitive structures.** Urbana: University of Illinois Press, 1974. (Illinois Studies in Anthropology, n. 9).

MARIÑO, G. **El dibujo espontáneo y la concepción del espacio en los adultos de los sectores populares**. Bogotá: Dimensión Educativa, 1983.

¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular?: constataciones y propuestas. Bogotá: Dimensión Educativa, 1985.

La resta desde los sectores populares. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN

POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 151-157.

MATEMÁTICAS Y CIUDADANÍA. Producción de Prof. Ubiratan D'Ambrosio. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 1994. 1 videocassete. (55 min). VHS.

MESA, O.; PAREJA, G. Experiencia CLEBA. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 12-25.

La resta o substracción. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 138-150.

OCHOA, R.; PELAEZ, J. **La matemática como elemento de reflexión comunitaria Pueblo Tule**. Antioquia: Asociación de Cabildos Indígenas de Antioquia, Editorial Lealon, 1995.

ORGANIZACIÓN INDÍGENA DE ANTIOQUIA. **Currículo Tule**. Antioquia:

Asociación de Cabildos Indígenas de Antioquia, 2000.

PARRA, A. I. **Acercamiento a la etnomatemática**. 2003. 147 f. Trabajo de Grado (Matemáticas) -Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

PÁRAMO, G. Lógica de los mitos: lógica paraconsistente: una alternativa en la discusión sobre la lógica de los mitos. **Ideas y Valores**, Bogotá, n. 79, p. 27-67, 1989.

Mito, lógica y geometría: algunas razones para la aplicación de métodos formales al estudio del mito. **Colombia Ciencia y Tecnología**, Bogotá. v. 10, n. 4, p. 11-13, marzo, 1993.

PÁRAMO, G. ALBIS, V. Antropología y matemáticas. **Mathesis**, México, v. 3., n. 2, p. 163-167, mayo, 1987.

PEDROSA, A. Proyecto escritura y circulación del papel en contextos marginales e incipientemente iletrados. Tema: prácticas matemáticas en la escritura caligráfica y tipográfica. In: CENTRO LAUBACH DE EDUCACIÓN POPULAR BÁSICA DE ADULTOS; CONSEJO DE EDUCACIÓN DE ADULTOS DE AMÉRICA LATINA; DIMENSION EDUCATIVA. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares:** experiencias e investigaciones. Bogotá: Dimensión Educativa, 1990. p. 35-41.

PIAGET, J; GARCÍA, R. **Psicogénesis e historia de la ciencia**. México: Siglo XXI, 1982.

SEIDENBERG, A. The ritual origin of geometry. **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, DE, n. 1, p.488-527,.1962a.

The ritual origin of counting. **Archive for History of Exact Sciences,** Berlin, DE, n. 2, p. 1-40, 1962b.

The ritual origin of the circle and the square. **Archive for History of Exact Sciences,** Berlin, DE, n. 25, p. 269-327, 1981.

TRIANA, M. **La civilización chibcha**. Bogotá : Talleres Gráficos Banco Popular, 1984

VAN DER WAERDEN, B. L. **Geometry and algebra in ancient civilizations**. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

VASCO, C, E. **El álgebra renacentista.** 2. ed. Bogotá: Empresa Editorial Universidad Nacional, 1985.

VERNANT, J. **Mythe et societé en Grèce ancienne**. París: Francois Maspero, 1981.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus lógico-philosophicus**. Madrid: Alianza, 1973.

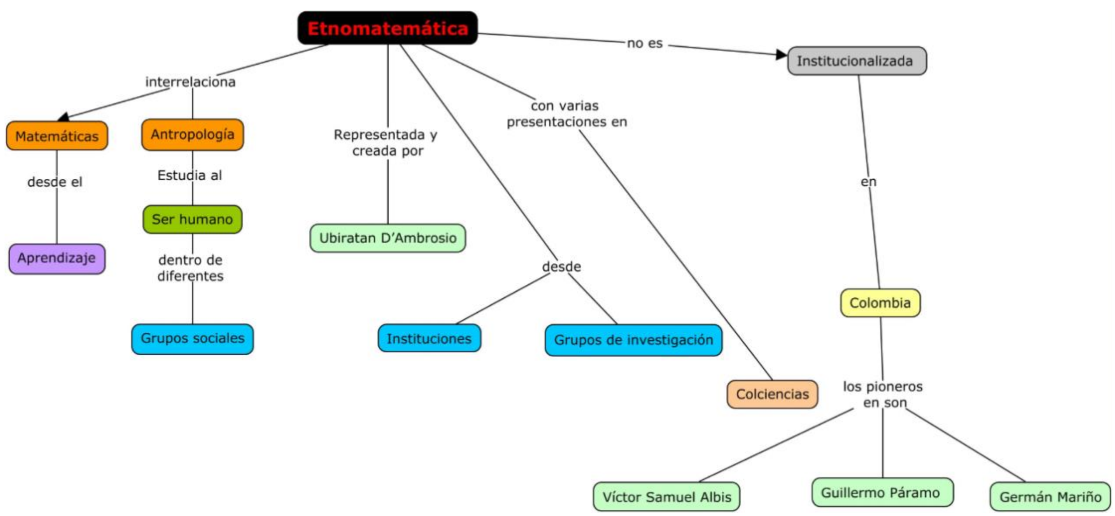
WHORF, B, L. **Language, thought and reality**. Boston: MIT Press, 1956.

ZASLAVSKY, C. **Africa Counts**: Number and Pattern in African Cultures. Chicago: Lawrence Hill Books, 1999.

ZASLOW, B. Pattern dissemination in the prehistoric in the prehistoric Southwest and Mesoamerica**. Antropological Research Papers**, n. 25, Tempe: Arizona State University. 1981.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	15/02/2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

- La etnomatemática va a empezar a jugar un papel importantísimo en el desarrollo de la educación matemática de éste país.

Título del texto	**El Sentido del infinito**
Nombres y Apellidos del Autor	Bruno D'Amore,Gianfranco Arrigo, Martha Bonilla Estévez, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Alberto Piatti, Jorge Rodríguez Bejarano, Pedro Javier Rojas Garzón, Jaime Humberto Romero Cruz, Silvia Sbaragli, NRD Bologna, ASP Locarno, MESCUD Bogotá
Año de la publicación	**2006**
Resumen del texto: Éste artículo es una descripción de la manera en que se llevó a cabo una investigación en tres países, Colombia, Italia y Suiza, con sujetos con características socio-culturales diferenciadas dentro de cada país. Se tiene como objetivo principal responder algunas preguntas como: ¿Existe un "sentido del infinito", así como existe un "sentido del número"? Si existe, ¿cómo se configura? Si no existe, ¿por qué? ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo?, entre muchas otras y arranca definiendo una estimación como un proceso (consciente o inconsciente) en el cual se tiende a determinar una cantidad y/o magnitud, y al parecer esto permitirá a los autores pensar en la posibilidad de contemplar que se puede llegar a una estimación infinita, y a partir de ello solucionar las preguntas planteadas con antelación. Se muestra una serie de 6 episodios en los que se plantean discusiones en diversos ámbitos escolares en los países en donde se llevó a cabo la investigación. Luego los autores aclaran	

su hipótesis de trabajo. Dando paso a dividir el espacio muestral en dos grandes categorías, la primera de ellas (**D1**) en la que están las personas que no tienen un amplio bagaje en matemáticas, como estudiantes de la básica con a los y bajos niveles académicos, profesores de matemáticas de primaria y personas con gran cultura en otras áreas del conocimiento, por lo que esta categoría tiene un carácter básicamente intuitivo y lingüístico, por su parte la segunda (**D2**) tiene mayor técnica y precisión porque en ella están profesionales y cultas en el ámbito de las matemáticas.

Luego los autores describen metodología, basada en dos clases de pruebas entrevistas clínicas y TEs, el primero de ellos aplicable a sujetos seleccionados de los grupos iniciales, mientras los TES fueron aplicados a la población completa. Asumiendo los siguientes componentes

- Preguntas **D1**: 1007 personas de las cuales 130 eran colombianos, 298 eran italianos y 579 eran suizos.
- Preguntas **D2**: 36 personas de las cuales 20 eran colombianos y 16 eran italianos.

Las entrevistas y lo TEPs se realizaron en lugares lo más cómodos y acordes a cada persona, y dos investigadores realizaban las preguntas y los demás tomaban apuntes de lo más relevante.

A las personas de **D1,** como ya se había dicho, se les presentan preguntas en relación a la comparación entre la cantidad de estrellas, la cantidad de granos de arena, cantidad de granos de arroz en todos los supermercados del mundo, con el objetivo de saber si el sujeto diferencia entre y la estimación, además se presentan los TEPs como un estímulo para hacer la entrevista clínica sobre lo escrito, en el caso de **D2** se realizan entrevistas clínicas durante y después de presentárseles la demostración de algunos teoremas clásicos.

Pasando, con ello, a presentar los resultados obtenidos en la investigación:

TEP1

Se plantea el primer TEP en el que se pide comparar la cantidad de puntos que hay en un cuadrado de lado 10cm y la cantidad de puntos en uno de sus lados, y se llega a que en una primera parte de la muestra más de la mitad el efecto del aplastamiento es evidente (si dos cosas son infinitas entonces son iguales), en la segunda parte para un tercio de los entrevistados no puede haber una cantidad de puntos infinito en un segmento y/o figura limitado, cosa que si es posible en una recta o plano, por lo que en el cuadrado y en uno de sus lados hay muchísimos puntos aunque no son infinitos. De esto parece claro que para muchos de los que solucionaron el TEP existe una confusión entre indeterminado e infinito, y que el hecho de ser numerable hace a un conjunto finito.

Después de los resultados escritos se escogen los sujetos para la entrevista clínica (40 suizos, 15 italianos y 8 colombianos) y se construyen tres categorías a partir de los resultados obtenidos:

1. El infinito visto como número, tal vez grande, pero finito (genéricamente como ilimitado): Para esta categoría de personas el infinito es un número muy grande pero que es finito, por lo que se puede afirmar que se niegan rotundamente a aceptar la presencia del infinito actual en la situación y como evidencia de esto

afirman que en un segmento finito nunca podrá haber infinitos puntos.

2. El infinito no se reduce a un número, por grande que sea, pero asume un sentido relativo respecto de otro aspecto: Para ésta pequeña porción de sujetos el infinito es algo que no es posible medir y alguna cosa que sea muy grande pero que se pueda medir de alguna manera es finita.
3. El fenómeno del aplastamiento: Para esta categoría de sujetos no hay problema en decir que la cantidad de puntos en el cuadrado y en el segmento son infinitos, pero al ser infinitos la cantidad de puntos es igual.
4. la divergencia entre el infinito aprendido en la escuela y la propia imagen mental: Estos sujetos a pesar de reconocer que hay infinitos puntos y que teóricamente, por consultas personales, está bien estructurado, se pone en tela de juicio estos razonamiento debido a que se privilegia un pensamiento intuitivo en el que todos los infinitos son iguales.

TEP2

En este se plantea una paradoja parecida a la del "Dicotomía" de Zenón; pero con un caracol que escala un muro y que recorre la mitad del espacio sobre el muro en comparación con el espacio recorrido sobre el muro en la unidad de tiempo anterior. A lo cual más de un tercio responde que el caracol no llega, entre un tercio y un cuarto de la población dice que el caracol si llegará e intentan hacer una estimación en diferentes unidades de tiempo (días, horas semanas, meses, años).

Al igual que en el TEP anterior se escoge una muestra para hacer la entrevista clínica (40 suizos, 15 italianos y 8 colombianos) y se construyen las siguientes categorías:

1. Atención dada al camino recorrido por el caracol: La mayoría de sujetos dice que el caracol llegará en un tiempo finito y que se irán adicionando cantidades infinitesimales pero constantes y uno de éstos dice que llegará en un tiempo infinito.
2. Atención puesta en el camino que el caracol debe recorrer: Los sujetos de esta categoría creen que el caracol no llegará, sin embargo, algunos llegan a pensar en pequeñas cantidades variables y en la posibilidad de que el caracol llegue a la cima (modelo vs realidad).

TEP3

Se pregunta a los sujetos acerca del número más grande con la forma 0,… para que se llegué a pensar en la veracidad de la igualdad $0,\overline{9} = 1$. Con respecto a la situación los estudiantes Suizos e italianos se niegan a aceptar que la igualdad es verídica, en cambio el 15% de los estudiantes colombianos reconocen la veracidad de la igualdad. Al igual que en los TEPs anteriores se escogen 40 suizos, 15 en italianos, 8 en colombianos para la entrevista clínica obteniendo las siguientes categorías:

1. Atención puesta en la suma 0,9+0,99+0,009+ ... ó en la sucesión 0.9, 0,99, 0,999, …:Los sujetos no aceptan el infinito en acto, centran su atención en el proceso potencial de adicionar y de acercarse tanto como se quiera al 1 pero siempre ser menor que éste. Además el énfasis en el 9 después de la coma ($se\ hace\ referencia\ al\ número\ 0,\overline{9}$), es interpretado como la representación del proceso de adición potencial.
2. Atención puesta en las diferencias entre 0, 9 y 1: No se acepta que la veracidad de

la igualdad, y el argumento está dado en relación a la manera en que dado una cantidad de nueves finita después de la coma entonces se colocarían tantos ceros después de la coma como nueves, pero en vez del último cero se colocaría un uno, sin embargo como la sucesión es infinita no es posible saber en dónde colocar el 1, además que a pesar de que matemáticamente la igualdad sea verdad en la realidad eso no es cierto.

Resultado de **D2**: Los sujetos que entraban en esta categoría debían tener dos competencias matemáticas en relación a su conocimiento, la primera de ellas es la aceptación del infinito como cardinal de un conjunto y la segunda es no tener dudas en relación a las diferentes clases de infinito. Para seleccionar a los sujetos se hacen dos preguntas filtro, la primera es en relación entre la cardinalidad de los naturales y la cardinalidad de los múltiplos de algún número natural, y la segunda era en relación a la cantidad de puntos en dos segmentos de recta con longitudes diferentes, se encuentran allí respuestas diversas pero que realmente hacen notar la negación absoluta en aceptar al infinito actual.

En el segundo momento se les presenta las demostraciones a los sujetos, en la entrevista clínica, y se encuentra que muchas de estas personas no cambian su convicción personal después de que se les presenta la demostración, y que un porcentaje muy pequeño demuestran un cambio en el auto-convencimiento y/o haber adquirido conocimiento sobre el infinito en cursos de profundización sobre el infinito, una vez se les presenta la demostración.

A modo de finalización los autores dan respuesta a algunas de las preguntas que se plantearon al principio de este resumen a la luz de los resultados obtenidos en la investigación, en primer lugar hablan de **D1** de los que concluyen que el infinito es confundido con términos como "indeterminado" y "grandísimo", y las personas cultas en otras disciplinas tienden a hacer estimaciones y recurrir a demostraciones aunque de una manera intuitiva e ingenua, entonces el sentido que le da este grupo de personas al infinito es a partir de un proceso (infinito potencial) y no es posible aceptarlo como un objeto (infinito actual), en segundo lugar de **D2** se concluye que las demostraciones formales no son de gran ayuda para cambiar conceptos pre cognitivos, ya que a pesar de que algunos de los entrevistados tenía un trabajo previo con cantidades transfinitas es evidente que la demostración termina siendo un paso más para decir algo que no es verdad (desde la intuición de sujeto) puede llegar a funcionar, y respecto al sentido del infinito es difícil para este grupo trabajar con un infinito actual porque tienen serios problemas en aceptarlo, y en estas condiciones es muy complicado trabajar simbólicamente con él, por lo que se afirma que sí existe "un sentido para el infinito", pero que éste será alcanzado en casos muy particulares y no con el mismo éxito que se puede alcanzar "el sentido del número".

Palabras Claves	Sentido, infinito, actual-potencial, aproximación, estimación.

Problema que aborda el texto: En diversos cursos de investigaciones precedentes sobre aspectos relacionados con cardinales infinitos, nos encontramos de frente a alumnos que hacen "estimaciones" curiosas en las cuales mezclan números finitos e infinitos con cierta naturalidad y sin crearse problemas. Con lo que se pueden generar tensiones en la comprensión del infinito para el desarrollo de cardinales de conjuntos infinitos y su aceptación, relacionado esto con el "efecto de aplastamiento".

En otras palabras se pone en juego como el papel de la intuición no ayuda a un sentido del

infinito, declarado, entre otros, en las definiciones formales de equipotencia como $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}$, con lo que se dificulta la comprensión del infinito, cuando este se supedita a la intuición y no a la estimación.
Objetivos del texto: Identificar la existencia o no de un "sentido del infinito" por parte de un grupo de personas en el rango de (17 años –31 años) y su proceso de configuración, atendiendo a preguntas como: ¿Existe un "sentido del infinito", así como existe un "sentido del número"? Si existe, ¿cómo se configura? Si no existe, ¿por qué? ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo?
Hipótesis planteada por el autor: Existirá un "sentido del infinito", suponiendo una equiparación, guardando sus diferencias, con el "sentido de número". Si este sentido existe entonces puede ser un configurador de apoyo para la conceptualización del infinito como objeto personal.
Tesis principal del autor: Existe un sentido del infinito.
Argumentos expuestos por el autor: • Para demostrar que hay un "sentido del infinito", se realizan TEPs y entrevistas clínicas que son analizadas y clasificadas de manera cualitativa, de tal modo que se hace evidente que las personas de los tres países se ven involucradas a situaciones donde el infinito cobra sentido. • Los sujetos del **D1** confunden infinito con "grandísimo" y/o "ilimitado", por lo que hay un sentido potencial del infinito para este grupo en general.

- En muchas de las entrevistas clínicas en las que a los sujetos de **D2** se les presentaban demostraciones estas no permitieron a los sujetos cuestionarse frente a sus razonamientos, por lo que se afirma que para los sujetos de **D2** una demostración no es motivo para cuestionar razonamientos intuitivos frente al infinito.

Conclusiones del texto: Existe un sentido del infinito pero solo puede ser alcanzado en casos específicos, particularmente cuando se encontró que el "sentido del número" no está ligado al desarrollo de estimaciones aceptables y de un sentido del infinito. Con lo que se concluye que el sentido de número y sentido del infinito no son capacidades intuitivas personales correlacionadas.

Bibliografía citada por el autor:

Arrigo G., D'Amore B. (1992). Infiniti. Milano: Angeli.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. Educación matemática (México DF, México). 11, 1, 5-24.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. La matematica e la sua didattica (Bologna, Italia). 1, 4-57. [Un amplo resumen en idioma español: Arrigo G., D'Amore B. (2004). Otros allazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. Educación Matemática. (México DF, México). 16, 2, 5-20].

D’Amore B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Epsilon. 36, 341-360.

D’Amore B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: dificultades cognitivas y obstáculos. Uno. 15, 63-76.

D’Amore B. (2001). Più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla. Bologna: Pitagora.

D’Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. La matematica e la sua didattica (Bologna, Italia). 2, 2002, 144-189. [Un amplo resumen en idioma español:

D’Amore B., Maier H. (2003). Produccióne s escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas (TEPs). Epsilon (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262].

D’Amore B., Martini B. (1999). El “contexto natural”. Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemática. Suma (Spagna). 30, 1999, 77-87.

Fandiño Pinilla M.I. (ed.) (2001). Riflessione sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale. Bologna: Pitagora.

Hofstadter D.R. (1982). L’insensibilità numerica. Perché l’insensibilità numerica può essere altrettanto pericolosa dell’insensibilità linguistica. Le Scienze (Milano, Italia). 168, 102-107.

Pellegrino C. (1999). Stima e senso del numero. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (1999).

Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica. Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (Aq), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita ed. 145-147.

Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (Paderno, Italia). 26A, 2, 155-186. 26A, 5, 573-588.

Sbaragli S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. Tesis doctoral. Universidad de Bratislava (Eslovaquia); http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

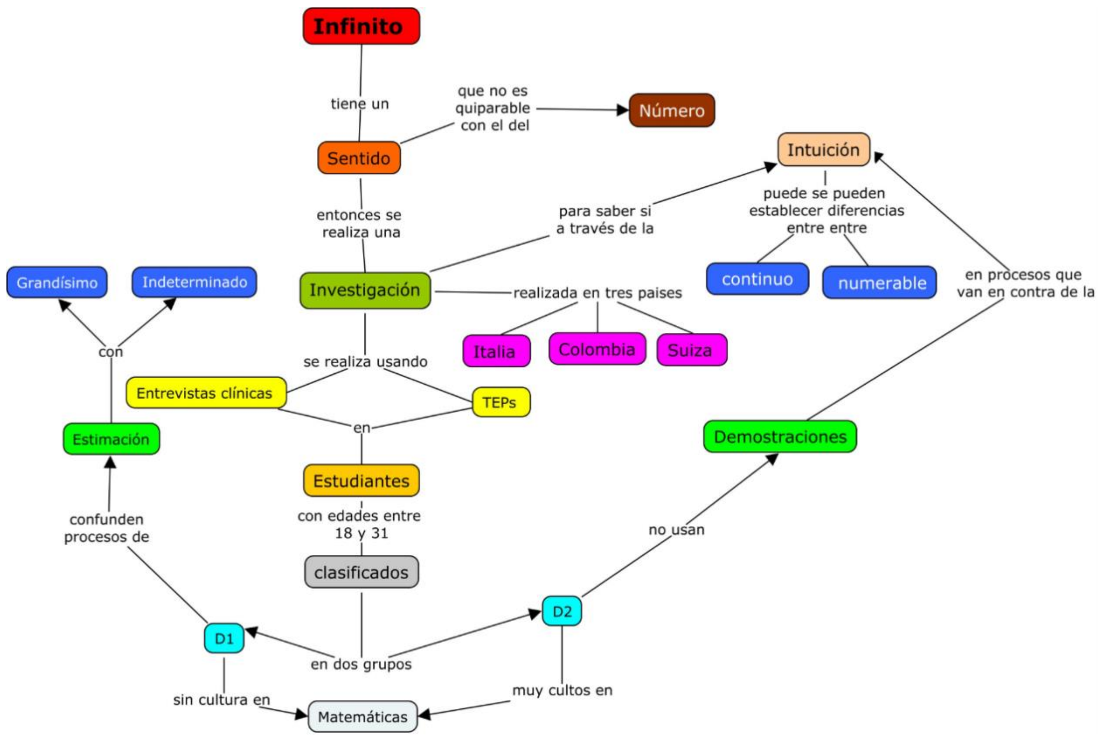
Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus of the Learning Problems in Mathematics*. 11, 271-284.

Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVII PME*. Durham NH. 90-97.

Villani V. (1991). *Matematica per discipline biomediche*. Milano: Mc Graw Hill.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	11/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos	

encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)



Comentarios finales:

- Este texto es bastante claro frente al objetivo que se plantea, logran concluir que realmente existe un "sentido del infinito" usado un símil con el "sentido del número" guardando sus diferencias.
- Los análisis que se presentan a lo largo del texto permiten entender cuál es el motivo por el que se conforman las dos categorías **D1** y **D2** para entender algunos elementos del "sentido del infinito".

Título del texto	**Una Aproximación al infinito a través de Fractales.**
Nombres y Apellidos del Autor	Benzaquen Mónica, Gorrochategui Mónica, Kanashiro Ana, Oviedo Lina
Año de la publicación	**2006**

Resumen del texto:

Con la explicación del proceso de construcción de la curva de Von Koch, los autores dan inicio al documento en el que describen los resultados de la aplicación de una actividad relacionada con dicha curva a cuatro grupos de alumnos de entre 15 y 17 años; lo anterior con el fin de determinar las nociones que poseen estos estudiantes sobre el infinito.

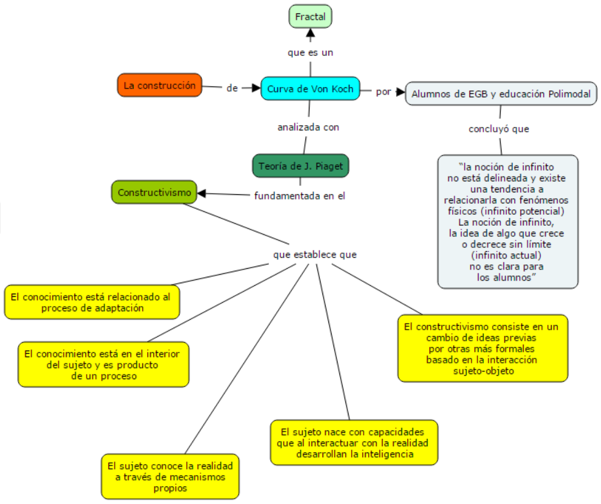
Los autores Utilizan como marco teórico la teoría psicogenética de Jean Piaget, en la que se basa la teoría de las construcciones mentales. En ella se *"concibe el desarrollo evolutivo como un proceso de construcción de estructuras de pensamiento que van desde la lógica concreta a la abstracta, determinando lo que J. Piaget identifica como los distintos estadios por lo que un sujeto atraviesa".*

Los objetivos que se plantean en la hoja de trabajo eran:

1. Construir el fractal de Von Koch siguiendo el algoritmo determinado.
2. Analizar la variación del perímetro en cada etapa de construcción.
3. Generar la sucesión de los perímetros.
4. Encontrar la fórmula de recurrencia para el perímetro.
5. Determinar el comportamiento para n grandes siendo n el número de etapa.

6. Analizar la variación del área. 7. Determinar la convergencia o no de las sucesiones.	
Palabras Claves	Infinito, curva de Von Koch, Infinito actual, infinito potencial.
Problema que aborda el texto: El texto no plantea una problemática, al menos explícita, ni presenta la razón y justificación de la aplicación de las actividades.	
Objetivos del texto: Describir la aplicación y resultados de actividades en torno a la curva de Von Koch con miras a realizar un acercamiento al concepto de infinito**.**	
Hipótesis planteada por el autor: EL trabajo con el fractal de Von Koch posibilita un acercamiento a la noción de infinito pues facilita una aproximación entre las estructuras analíticas y las estructuras gráficas.	
Tesis principal del autor: El trabajo con el fractal de Von Koch es un buen principio para trabajar la noción de infinito asociado con el infinito actual y no sólo con el potencial.	
Argumentos expuestos por el autor: No se detectan argumentos en el texto, más allá de lo que podría validar la descripción de	

los resultados obtenidos de la aplicación de las actividades.	
Conclusiones del texto: Después de la aplicación de la actividad, los autores concluyen que en estos estudiantes *“la noción de infinito no está delineada y existe una tendencia a relacionarla con fenómenos físicos (infinito potencial) [...] La noción de infinito, la idea de algo que crece o decrece sin límite (infinito actual) no es clara para los alumnos”.*	
Bibliografía citada por el autor: No cita bibliografía alguna.	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	28/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:	



Comentarios finales:

Pese a que este documento fue el único encontrado en el rastreo, que presenta actividades en torno al concepto de infinito, este se limita a describir sin realizar análisis significativos de sus resultados. Aun así, se debe tener en cuenta a la curva de Von Koch como posible situación que podría estar presente en la secuencia de actividades.

Título del texto	**Aspectos teóricos para construir una propuesta de enseñanza orientada a la comprensión de la noción de infinito actual**
Nombres y Apellidos del Autor	María Fernanda Mora Ramírez, Virgilio Romero Díaz y Lily Bibiana Hernández Pinzón
Año de la publicación	**2008**
Resumen del texto: En esta tesis de pregrado los autores tienen como objetivo principal indagar acerca de algunos aspectos teóricos que se deben tener en cuenta para la comprensión de la noción de infinito actual en la escuela, para cumplirlo parten la investigación en cinco momentos, en un primer momento hacen una consulta teórica que les permita tener un primer acercamiento al tema; y como producto obtienen un recorrido histórico en donde se habla de algunos autores como Zenón de Elea, Aristóteles, Arquímedes, Newton y Leibniz, entre muchos otros, también de las características propias algunos conjuntos numéricos infinitos y problemas que en la historia necesitaron del infinito actual para ser solucionados, finalmente concluyen que si el infinito es necesario para enfrentar problemas como la construcción del número real y métodos de exahución entre otros, que son abordados en la escuela, el infinito no debería tener exclusión dentro de la matemática escolar, en un segundo momento construyen con base en la información recolectada dos instrumentos para ver cómo era entendida la noción de infinito por estudiantes de grado noveno, y	

muestran un análisis de esto, ara que en el tercer momento se resulten evidentes los conceptos asociados al infinitos actual en la escuela. En el cuarto momento revisan cuáles fueron los obstáculos epistemológicos que se presentaron en la antigüedad, como por ejemplo los métodos de áreas bajo la curva, problemas en el conteo de algunos conjuntos numéricos y problemas con los indivisibles.

Para finaliza el trabajo, hacen un contraste entre los obstáculos encontrados en la historia y en el aula, de lo que concluyen tres aspectos teóricos:

- Importancia del infinito actual en la escuela: Este lo argumentan diciendo que al encontrar relaciones entre el infinito de la escuela y la historia de su construcción, pueden asegurar que el infinito es un puente que es permite entender problemas del cálculo de áreas, curvas y de conjuntos numéricos principalmente.

- Obstáculos inherentes al infinito actual: Allí mencionaron que los estudiantes tienden operar con números infinitos igual que con los infinitos o más conocido como el fenómeno del aplastamiento, y finalizan diciendo que el docente debe generar espacios de debate entre los estudiantes para concretar conceptos como l de la continuidad.

- Concepción de infinito que tienen los estudiantes de grado noveno: en las que hacen una reflexión acerca de cómo se vincula afectivamente al estudiante al infinito por medio de la ruptura de conocimientos adquiridos con anterioridad.

Finalmente hablan del por qué es necesario tener los aspectos anteriores en cuenta, y lo resumen en que no hay mejor manera de enseñar algo que remitiéndose directamente a sus orígenes y desarrollos anteriores.	
Palabras Claves	Infinito, obstáculos epistemológicos, teoría, investigación, fomento
Problema que aborda el texto: En la escuela para la enseñanza de algunos conceptos se hace necesario la comprensión por parte del estudiante de nociones relacionadas con el infinito actual, sin embargo no existe dentro de los planes de estudio no se incluye esta éste concepto y se le da una interpretación potencial.	
Objetivos del texto: • Evidenciar la importancia de la comprensión de la noción de infinito actual en la matemática escolar. • Analizar obstáculos que se presentaron en la historia de la aceptación del infinito actual. • Analizar obstáculos que se presentan para la aceptación del infinito actual en el ámbito escolar. • Establecer relaciones entre los obstáculos presentados en la historia con los presentados en el ámbito escolar para la aceptación del infinito actual.	

• Estudiar la noción de infinito que tienen estudiantes de grado noveno.
Hipótesis planteada por el autor: En la escuela actual no se hace un esfuerzo muy grande por hacer que los estudiantes comprendan el infinito actual, se le da prioridad al infinito potencial.
Tesis principal del autor: Es necesario hacer propuestas que fomenten la comprensión del infinito actual en la escuela.
Argumentos expuestos por el autor: • En la escuela se presentan problemas en la interpretación del infinito actual muy similares a los que se presentaron en la historia que permitió construir éste concepto. • Los resultados de la intervención en el aula demuestran que los aspectos concluidos son realmente necesarios para construir cualquier propuesta que tenga como objetivo el fomento del infinito actual.
Conclusiones del texto: • Se analizó de manera detallada cómo se desarrolló epistemológicamente el concepto de infinito. • Se estudió por medio de la aplicación de dos pruebas qué concepción tenían los estudiantes de grado noveno del infinito. • Se presentaron unos aspectos teóricos a tener en cuenta para la construcción de propuestas enfocadas a la enseñanza algunas nociones de infinito actual, como resultado del contraste entre los resultados obtenidos en el aula y los vistos a lo largo de toda s historia

Bibliografía citada por el autor:

Aristóteles. (1995). *Física*. Madrid, España: Gredos

Arquímedes. (1986). *El método*. (Luís Vega, Trad.). Madrid, España: Alianza.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*. 11. 1. 5- 24.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (2002). Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*. 16. 2. 5-20.

Asimov, I. (2000). *De los números y su historia*. Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico*. Argos

Barrios, J. (1992). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri. *Encuentros: De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico.* Realizado para el seminario «Orotova» de historia de la ciencia. 305-326.

Bell, E. (1937). *Los grandes matemáticos*. Losada S.A.

Bell, E. (1995). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de cultura económica.

Berge, A. & Sessa C. (2003). Completitud y continuidad a través de 23 siglos. Aportes a una investigación educativa. *Relime*. 6. 3. 163-197.

Blay, M. (2001). La ciencia del movimiento en el siglo XVII. *Temas Investigación y Ciencia***.** 23**.** 18-22.

Borges, J. (1984). *El jardín de senderos que se bifurcan*. Buenos Aires, Argentina: La oveja Negra Ltda.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Ed. Alianza**.**

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7. 2. 33-115. (J. Centeno, B. Melendo y J. Murillo Trads.).

Brousseau, G. (2001). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Recuperado el 6 de enero de 2006 desde http: ///C/WEBSHARE/Wwwroot/Papers/Brousseau/ObstáculosBrousseau.htm.

Burbage, F. & Chouchan, N. (2002). Leibniz y el infinito. pp. 1-96

Cajori, F. (1987). Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento: Fases en el desarrollo de la teoría de límites. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*. Año IV. E8. 1-86.

Carrera, J. (2001). El infinito y la lógica de primer orden. *Temas Investigación y Ciencia*. 23. 23-27.

Castro, I. & Pérez, J. (2003). Las paradojas en matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana*. 8. 1. 25-37.

Castro, I. & Pérez, J. (2004). Primeros antecedentes sobre lo infinitamente pequeño. *Revista de la Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana*. 9. 1. 13-22.

Centeno, J. (1990). *Número decimales ¿por qué?, ¿para qué?* Madrid, España: Síntesis.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición Didáctica*. *Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Cid, E. s.f. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Artículo publicado. Universidad de Zaragoza.

Coriat, M. & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias*, 18 (1), 25-34

Coronado, L. s.f. El atomismo de Leucipo y Democrito como intento de solución a la crisis eleática. Artículo publicado. Universidad de Costa Rica.

Courant, R. & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura económica.

Cruz, A. (2003). *Sobre la construcción del concepto de continuidad: una consideración histórica*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de duda. *Epsilon*. 36, 341-360.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Dauben, J. (1983). Georg Cantor y la teoría de los números transfinitos. *Investigación y ciencia*. 83. 82-93.

Delahaye, J. (2001). El carácter paradójico del infinito. *Temas Investigación y Ciencia***.** 23**.** 36-44.

Díaz, P. s.f. Reflexiones sobre el concepto de infinito. Publicado en Revista virtual, matemática, *educación e internet (Mundo de las matemáticas)*. Universidad de Costa

Rica.

Edwards, C. (1982). *The historical development of the calculus*. New York, Estados Unidos. Ed. Springer-Verlag.

Festa, E. (1995). La disputa del atomismo: Galileo, Cavalieri y los jesuitas. *Mundo Científico*. X. 107.

Garbin, S. & Azcarate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias*. 20 (1). 87-113.

Godino, J., Batanero, C. & Cid, E. (2003). Sistemas Numéricos y su didáctica para maestros. Recuperado el 31 de marzo de 2003 desde www.urg.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gómez, V. (1990). *El Infinito*. Temas de hoy. Madrid, España: Nueva ciencia.

Guthrie, W. (1991). *Historia de la filosofía griega II*. Madrid, España: Gredos.

Hahn, H. (1997). El infinito. *Sigma el mundo de las matemáticas*. 4. 384-401.

Imaz, J. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? *Avance y perspectiva*. 20. 305-311.

Lanford, P. (1990). *El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria*. Barcelona, España: Paidós.

Lévy, T. (2001). Thabit ibn Qurra y el infinito numérico. *Temas Investigación y Ciencia***.** 23**.** 14-17.

Massa, M. (2001). Sobre los métodos de cuadraturas de Pietro Mengoli (1625-1686)**.** XXI International Congress of History of Science. pp. 8-14.

Medina, A. s.f. *Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas*. Artículo publicado. Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje*. Bogotá, Colombia.

Montoro, V. & Scheuer, N. (1995). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. Recuperado el 16 de septiembre de 2005 desde http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/Montoro_mejorado.doc

Moore, A. W. (1995). Breve historia del infinito. *Investigación y Ciencia*. 225**.** 54-59.

NRD, ASP, MESCUD. (2004). "Senso dell'infinito". *La matemática e la sua didattica*. 4. 46-83.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*. 1. 2. 59-81.

Parrondo, J. (2003). Zenón y los camellos. *Investigación y ciencia*. 326. 86-87.

Recalde, L. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Matemáticas: enseñanza universitaria*. 12. 1. 51-72.

Recaman, B. (2002). *Los números una historia para contar*. Taurus.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada, España: COMARES.

Romero, I. & Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias*. 17. 2. 259-272.

Sacristán, A. (1991). Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación Matemática*. 3. 1. 5-18.

Sinaceur, H. (1994). El infinito. *Mundo científico*. 151. 942-948.

Smullyan, R. (1995). *Satán, Cantor y el infinito*. Barcelona, España. Gedisa.

Stewart, I. (1998). *De aquí al infinito*. Barcelona, España: Critica.

Stone, M. (1999). *Enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*. 16 (2). 233-249.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*. 10. 2, 3. 133-170.

Waldegg, G. (1993). El infinito en la obra aristotélica. *Educación matemática.* 5. 3. 20-38.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 1. 1. 107-122.

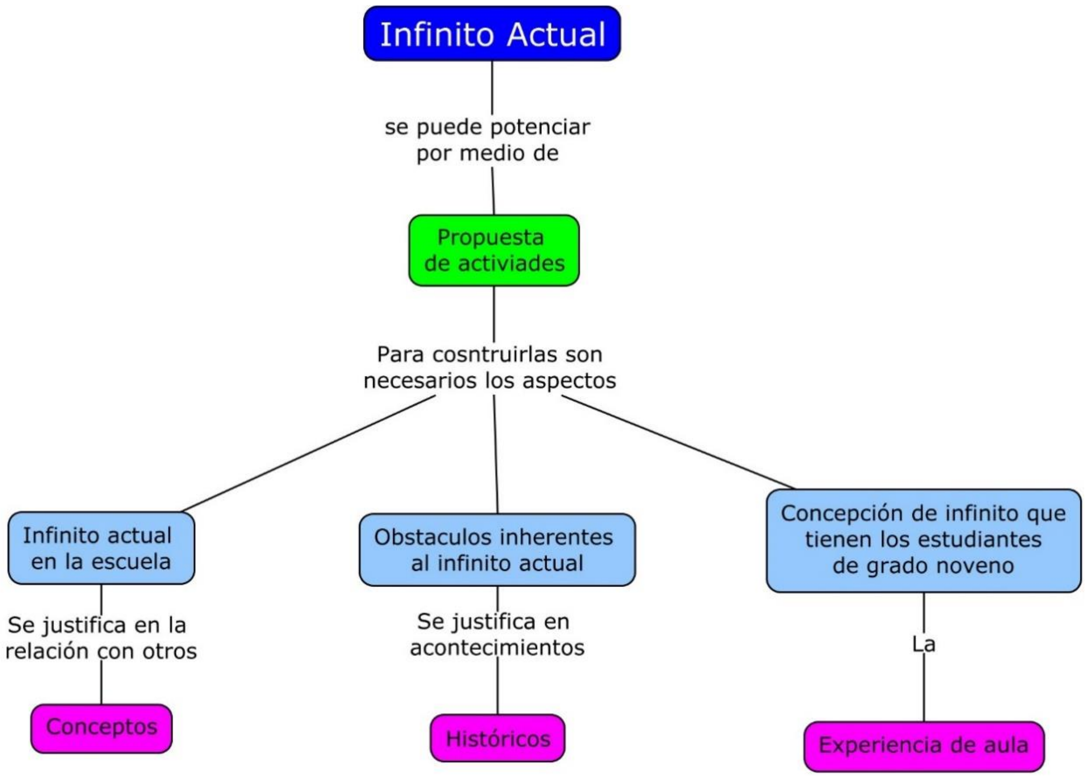
Wellon, W. 1945. Cantor: el conquistador del infinito. *Revista trimestral de cultura moderna, Universidad Nacional*. 2. 3. 353-373.

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito*. Madrid, España: Siruela.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Diego Escobar y Yampier Agudelo

Fecha en que se elaboró este RAE	23 de febrero 2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

- Estos aspectos fueron tenidos en cuenta para la construcción de la propuesta de actividades del presente trabajo.
- Se hacen claridades que permiten la construcción de los objetos mencionados y esto facilita la lectura.

Título del texto	**Reflexión sobre la enseñanza de la idea de infinito en los cursos de cálculo diferencial**
Nombres y Apellidos del Autor	Juan Samuel Rangel Luengas
Año de la publicación	**2010**

Resumen del texto: Este Autor abre su texto hablando acerca de la divinidad del infinito, y del por qué a este concepto se le asociaba con Dios, para entender ésto se hace alusión a la historia que empieza con los presocráticos los cuales definen al mundo a partir de los cuatro elementos (agua, aire, fuego y tierra), algunos siglos después los Pitagóricos dicen que el universo puede ser entendido a partir de relaciones entre números e intentaban explicar el movimiento de los planetas en base a la armonía que estos emiten, esto le asociaba al infinito un sentido de divinidad que se mantuvo hasta la época de Cantor quien define al infinito absoluto como inalcanzable y lo identifica con Dios.

Después al autor le surge la inquietud acerca de un mundo sin infinito, y apoyado en algunos referentes bibliográficos llega a que el infinito es el puente conector entre diferentes ramas de la matemática y que en la enseñanza debe hacerse un esfuerzo por reflexionar sobre la idea del infinito en acto sin desalentar al estudiante en relación a la comprensión de tal noción.

Ya se ha tocado sutilmente el tema de la enseñanza, entonces en aras de profundizar se

habla de la importancia que tiene en la enseñanza un apropiamiento de la historia que permite dar un sustento a la existencia del infinito actual, a pesar de que este concepto sea imperceptible en la realidad o carente de una experiencia a la cual se pueda asociar, se puede sugerir pasar primero por las ideas de Aristóteles y culminar con las ideas de Cantor porque en relación a la historia, el infinito le permite avanzar al cálculo integral y diferencial, también ayuda al entendimiento de las decisiones que tomaron los antiguos pensadores frente a situaciones que también se le puede presentar al alumnado en su vida circundante, permitiendo así la dinamización, la contextualización y la motivación del alumnado en el proceso de enseñanza y aprendizaje del infinito.	
Palabras Claves	Universo, movimiento, preocráticos, infinito, Dios, enseñanza, historia.
Problema que aborda el texto: • En los programas de enseñanza del calculo no se tiene en cuenta a la historia. • El infinito actual no tiene un sustento para el estudiante porque no se le ve como un conector entre las diferentes ramas de las matemáticas.	
Objetivos del texto: Mostrar que la historia del infinito actual termina por ser mediadora entre el estudiante y la aprenhensión del calculo diferencial en situaciones reales.	
Hipótesis planteada por el autor: • El mundo desde sus orígenes se ha preguntado por situaciones en las que está inmerso el infinito , la escuela necesita también que sus estudiantes se enfrenten a situaciones semejante para que realmente se aprenda calculo diferencial.	

Tesis principal del autor:

La historia es un puente mediador entre las matemáticas y el aprendizaje del estudiante, lo que permite que el estudiante pueda asociar al infinito con situaciones de su vida circundante.

Argumentos expuestos por el autor:

- Desde la antigüedad el infinito a sido un concepto tan complejo que se asociaba con la divinidad de un ser supremo (Dios).
- En la enseñanza debe hacerse reflexiones sobre el infinito en acto, porque éstas conducen al estudiante a interconectar diferentes ramas de as matemáticas poir medio del infinito, así como lo muestra la experiencia (estudio bibliográfico del autor).

Conclusiones del texto:

- El infinito actual no puede asociarse a una experiencia, lo que implica que la mejor opción es remitirse a la historia y tomar elementos de ésta para la comprensión del infinito actual como concepto.
- En los cursos actuales de calculo diferencial no hay una preocupación por parte del docente en que sus estudiantes se acerquen al concepto de infinito porque no hay esperanza de que el estudiante desarrolle esas nociones a temprana edad.
- Los fractales son un muy buen acercamiento a la comprensión de la diferencia entre las do clases de infinito.

Bibliografía citada por el autor:

Caldeiro, Graciela Paula (2006) Filósofos Presocráticos. Hrrp://

filosofía.idoneos.com/index.php/280933. Fecha de consulta: 6 de junio 19:28

Castrop Chadid y Pérez Alcázar (2007). Un paseo finito pñor lo infinito: El infinito en matemáticas Bogotá ed.,Pontificia Universidad Javeriana, pp. 1-124

Díaz Navarro, Pedro. Reflexiones didáticas sobre el concepto de infinito. Escuela de matemáticas universidad la costa

http//cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/node7.htmlsituacion fecha de consulta 3 abril de 2010 20:00pm

Fundacion Gabriel Piedrahita Uribe,(2005).Discusión sobre el infinitoy la iteración Copyright. Traducción al Español http:// www.eudeka.oreg/MI/master/interactive/discussions/infinity.html. Fecha de consulta, 15 abril 22:15pm

Fundacion Gabriel Piedrahita Uribe,(2005) Introaducción a los fractales: infinito, auto-similaridad y recursión Copyright. Traducción al Español http:// www.eudeka.oreg/MI/master/interactive/lesson/frac 1. html. Fecha de consulta, 15 abril 22:45pm

Fundacion Gabriel Piedrahita Uribe,(2005) fractales de figuras planas. Copyright. Traducción al Español http:// www.eudeka.oreg/MI/master/interactive/ discussions /geom. html. Fecha de consulta, 5 de junio 22:45pm

Martínez Eduardo (2004) Jueves 30 de Diciembre. Un satélite de la Nasa confirma la”música de las esferas”. http//: tendencias21.net/ Un-satelite-de-la-Nasa-confirma-la-música-de-las-esferas_a494. Html, fecha de consulta, 8 de junio 2010 4:30 pm

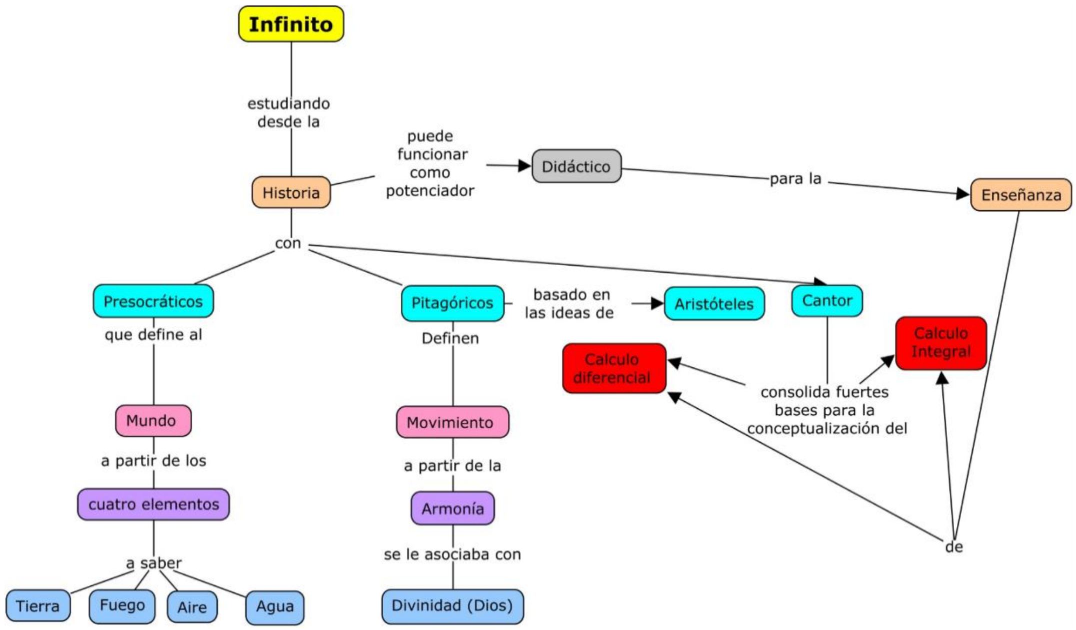
Números figurados. j. Ma. Fernandez, J.M. Barragán y A.Molina (2010) http:// www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrollo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones / patornes.html fecha de consulta,6 mayo 22:35 pm

Reflexiones sobre el concepto de Infinito. Oedro díaz Navarro. Escuela de Matemáticas Universidad de Costa Rica http//cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index .html fecha de consulta 7 junio 2010 :22:00 pm

Revista Latinoamnericana de Investigación en Matemática Educativa (2001) vol.4 n3 noviembre. Pág 262

Nombre y apellidos de quien elaboró	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego

<table>
<tr><td>este RAE</td><td>Fernando Escobar Slamanca.</td></tr>
<tr><td>Fecha en que se elaboró este RAE</td><td>21/02/2016</td></tr>
<tr><td colspan="2">Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios finales:

Evidentemente el infinito actual está inmerso en situaciones de la vida real en la que estudiante diariamente se ve inmerso, sin embargo son los profesores los que en gran medida piensan al infinito como una serie de formulas que tienen por objeto ser aplicadas.</td></tr>
</table>

Título del texto	**Un paseo por el infinito**
Nombres y Apellidos del Autor	Fernando Bombal
Año de la publicación	**2010**

Resumen del texto: El autor introduce al lector en el artículo afirmando que el infinito es un concepto corruptor y fascinador, el infinito, del que han hablado muchos pero él sólo se centra en dos, el primero de ellos Aristóteles que se niega a aceptar el infinito actual debido a las paradojas con las que se encontraría en caso de aceptarlo y D. Hilbert quien por medio de un ejemplo muestra cómo el cardinal del conjunto de los números pares es igual al del conjunto de los naturales y que a un conjunto numerable e infinito es posible agregarle siempre un elemento nuevo.

Se continúa con la explicación de los infinitos físicos, los primeros son los temporales y espaciales; en relación al tiempo se hace un símil entre las creencias griegas de un cosmos cíclico (en cada ciclo se vuelven a repetir las mismas acciones y el número de ciclos es infinitamente potencial), encabezadas por Aristóteles y las creencias cristianas de la creación del mundo ya que en estas últimas si existe el infinito actual para el tiempo (Dios subsiste eternamente por fuera del tiempo) encabezadas por San Agustín, en relación con el espacio aún no se ha encontrado una respuesta, sin embargo el debate frente a la finitud e infinitud del universo es bastante interesante; ésta nuevamente arranca con Aristóteles para el que el universo es finito y las esferas celestes tienen como centro la tierra, como se ha mencionado en algunos textos no hubo discusión a esto durante varios siglos, pero durante el periodo de inquisición del siglo XVII hubo algunos que daban argumentos a favor de la infinitud del universo con postulados bastante convincentes, entre estos Giordano Bruno y Galileo Galilei quienes recibieron el castigo de la muerte y la casa por cárcel respectivamente, con los avances del microscopio y de la teoría del Bing Bang se han dado argumentos frente a este tema pero como se dijo antes no hay una conclusión actual científicamente aceptada. El segundo infinito en lo físico es lo infinitamente pequeño; si se piensa en la división infinita del espacio y del tiempo se lograría probar que el espacio y el tiempo son continuos, pero esto no ha sido nada sencillo, primero se hace referencia a la materia y a la creencia de que está formada por átomos, pero después aparecen los electrones, protones y neutrones, y así sucesivamente aparecen unidades de medida más y más pequeñas, indicando que el espacio parece ser continuo aunque no se tenga una demostración que permita decir esto, con respecto al tiempo se intentó crear una teoría en la que una hora tiene 22.560 instantes, pero la inclinación es a no aprobar dicha teoría y pensar en un tiempo continuo.

Ahora se dilucida el infinito en la historia de las matemáticas, y la historia empieza nuevamente con los griegos con una primera referencia en los pitagóricos para los que siempre era posible comparar magnitudes homogéneas por medio de razones entre números naturales, el problema fue cuando algunos intentaron comparar la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados por medio de razones, porque según cuenta la historia los Pitagóricos al darse cuenta de las implicaciones que esto tenía en sus desarrollos anteriores echaron al mar a los que descubrieron la paradoja de la inconmensurabilidad, Después se habla de las paradojas de Zenón de Élea, que en la actualidad muchos han reducido a procedimientos algorítmicos series convergentes y el cálculo diferencial, concluyendo que para los griegos después de Aristóteles era imposible concebir un infinito actual. La continuación de la historia da lugar a especulaciones medievales y renacentistas frente al infinito; que prácticamente presentan algunos argumentos para decir que los infinitos no se pueden comparar porque todos son iguales, y aparece por primera vez el término infinitésimo relacionado directamente con la revolución del siglo XVII que permitió el desarrollo del cálculo por Newton y Leibniz.

En contraste con lo visto anteriormente se presenta la percepción que se tiene del infinito actual, en muchos casos de la historia del siglo XVII, los matemáticos decidían omitir al infinito de sus demostraciones por la complejidad que esto implicaba, fue hasta que C. Bolzano acepto la existencia de varios infinitos actuales, pero su intervención se ve frustrada porque uno de los axiomas que postuló dice que la parte es menor que el todo y estableciendo una biyección entre una de las partes y un conjunto infinito se contrariaba este axioma, y no había forma de que este axioma fueses mentira para Bolzano, después es cantor quien introduce el concepto de cardinal y le asigna uno al conjunto de los naturales y plantea la hipótesis del continuo, y descubre muchas propiedades de los conjuntos transfinitos junto con sus operaciones además junto a Dedekind construyen los números reales, pero él lo hace a partir de sucesiones de Cauchy y Dedekind a parir de cortaduras de los números racionales.

Finalmente se presenta una serie de paradojas que se les presentaron a Cantor y a B. Russell principalmente, cuando intentan contemplar en primer lugar la colección de las partes de un conjunto, y en segundo lugar la colección de conjuntos que no pertenecen a sí mismo, y en un intento de solucionar esta problemática E. Zermelo y A. Fraenkel intentan axiomatizar la teoría de conjuntos en relación al infinito, pero a pesar de que ésta sea la que se utiliza actualmente parece no ser tan convincente para algunos matemáticos llamados formalistas porque no ha podido demostrarse que la axiomática esté libre de contradicción.	
Palabras Claves	Infinito actual, infinito potencial, conjuntos, tiempo, espacio, universo, finitud, continuidad, demostración, historia, matemáticas, inconmensurabilidad, serie, convergencia, infinintésimo, biyección, cardinal, trasfinito, cortaduras, paradoja.
Problema que aborda el texto: La construcción del concepto infinito y las diferentes fases por la que ésta pasó a través de la historia de las matemáticas.	
Objetivos del texto: • Mostrar un recorrido histórico del infinito y los diferentes personajes que intervinieron para construirlo y desarrollarlo. • Analizar diferentes acontecimientos y su papel dentro de la construcción del concepto	

del infinito.
Hipótesis planteada por el autor: A pesar de los sesgos en la historia marcados por las circunstancias particulares de cada época, actualmente hay un conjunto de axiomas que permiten interpretar y aritmetizar al infinito, a través de la teoría de conjuntos desarrollada por varios autores durante el trascurso del siglo pasado.
Tesis principal del autor: Actualmente existen algunos matemáticos que se hacen llamar formalista que debido a la duda de que exista contradicción en la axiomática que permite aritmetizar al infinito, prefieren no usar dentro de las demostraciones al infinito.
Argumentos expuestos por el autor: • La historia muestra que los diferentes matemáticos han logrado construir una aritmética para el infinito, que han intentado liberar de contradicción pero a pesar de no conseguirlo totalmente al parecer soluciona muchos problemas de la matemática moderna. • En la historia los que defendían una postura diferente a la aceptada por la comunidad matemática era tíldada y rechazada, por lo que durante más de 20 siglo no se pudo avanzar en relación a conceptos tan complejos como el infinito.
Conclusiones del texto: • Actualmente existen una aritmética para el infinito a través de la teoría de conjuntos, sin embargo no se a podido demostrar que dicha aritmética esté libre de contradicciones.

- Se mostró un recorrido por la historia en el que se resaltó el pael que jugarón diversos matemáticos a lo largo de a historia.
- Se describieron diferentes escenarios en los que se desarrollo la historia del infinito, y como éstos contribuyeron a su construcción y desarrollo actual.

Bibliografía citada por el autor:

[Ar] Aristóteles, *Física*. Biblioteca Clásica Gredos Nº 203, Madrid, 1995

[Bo] F. Bombal, *Paradojas y Rigor: la historia interminable.* Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Ma-drid, 2006.

[Bol] B. Bolzano, *Las paradojas del Infinito*, Mathema, UNAM, México, 1991.

[Bg] J. L. Borges, *Obras completas I.* RBA-Instituto Cervantes, 2005.

[B1] C. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover

[Du] A. J. Durán, *Pasiones, piojos, dioses… y matemáticas.* Ediciones Destino, Barcelona, 2009.

[Fe] S. Feferman, *Infinity in Mathematifcs: Is Cantor Necessary?*, en «L'infinito nella scienza. Infinity in Science», 151-209. Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987.

[Ha] S. W. Hawking, *Historia del Tiempo.* Ed. Crítica, Barcelona, 1988.

[Hi] D. Hilbert, *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, **95** (1926), 161-190. Hay traducción española: *Acerca del infinito*, incluida en la recopilación *Fundamentos de las Matemáticas*, Mathema, UNAM, México, 1993.

[Ja] M. Jammer, *Zeno's paradoxes today,* en «L'infinito nella scienza. Infinity in Science», 81-96. Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987.

[Ma] E. Maor, *To infinity and beyond.* Birkhäuser, Boston, 1987.

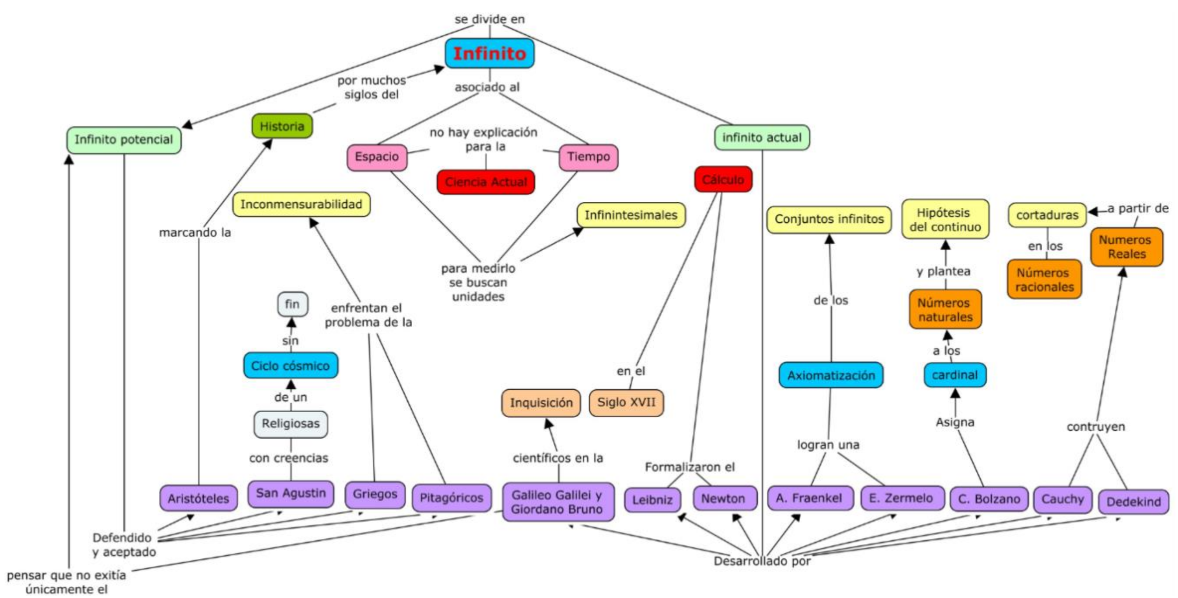
[Mo] R. Morris, *La historia definitiva del Infinito.* Ediciones B, Barcelona, 2000.

[Pa] B. Pascal, *Pensées et Opuscules.* Classiques Hachette, Paris, 1961.

[Ru] R. Rucker, *Infinite and the mind. The Science and Philosophy of the Infinite.* Birkhäuser, 1982.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	21/02/2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)



Comentarios finales:

- Este es un artículo muy completo que permite ver al infinito de manera global, pasando por algunas visiones religiosas, filosóficas y matemáticas a través de la historia para así comprender la complejidad que significa la aprehensión de un concepto como el infinito.

Título del texto	**El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.**
Nombres y Apellidos del Autor	Patricia Lestón
Año de la publicación	**2011**

Resumen del texto: Está es una investigación con un enfoque socioepistemológico, en el que se pretende demostrar que en la educación media en Argentina, no hay un tratamiento del infinito para la construcción del concepto de función, lo que reduce a esta construcción a un tratamiento algorítmico de la misma. Sin embargo en la educación superior para profesores de matemáticas si es necesario el tratamiento del infinito a partir de la aritmetización de los conjuntos infinitos de Cantor.

Por lo anterior es que la investigación se enfoca en las preguntas; ¿Qué noción de infinito es necesaria para los estudiantes de la media, y en qué momento son trabajados los conjuntos infinitos de Cantor por los futuros profesores de matemáticas? Y ¿Cómo acercar a los estudiantes de la media a un infinito funcional a ellos sin ir en contra del infinito construido a partir de la intuición en escenarios no escolares?

Para llevar a cabo la investigación se utiliza como referencia un trabajo realizado por la misma autora en 2008, en el que concluye que en las aulas de la media si hay una construcción de infinito pero que ésta no es funcional para las construcciones que los estudiantes necesitan. Por lo que en esta nueva investigación el foco está en los futuros profesores puesto que estos son los que dentro de sus metodologías cometen errores en el trabajo con el infinito.

El texto se desarrolla así; en primer lugar se hace una explicación del método socioepistemológico, con sus partes y la manera en que lo utilizaran, en segundo lugar se presentan los antecedentes, en tercer lugar se hace una revisión histórico-epistemológica del infinito, en cuarto lugar se hace una revisión de dos experiencias que realizaron con estudiantes y docentes en las que se busca una relación entre las concepciones de infinito e infinito matemático y cómo ésas se ven influenciadas por las prácticas sociales inmersas en la experiencias, en quinto lugar se hace una revisión histórico-epistemológica de las funciones, pues por experiencias anteriores y lo concluido en el capítulo anterior es en este concepto en donde es evidenciable la necesidad del trabajo con el infinito.

Finalmente concluye que en respuesta a la primera pregunta que se para fraseó al principio de este resumen; el infinito más conveniente para ser enseñado a los estudiantes de la media es el infinito actual por que se presenta en situaciones dinámicas más próximas al estudiantes a diferencia de la construcción de cualquier otro infinito a partir de la intuición, el profesorado reconoce la necesidad de la enseñanza del infinito en acto, sin embargo no es éste el que está presente en el currículo de la media, pues el infinito de Cantor aprendido en los cursos de la universidad, parece ser estático ya que se pregunta por la cardinalidad

de conjuntos infinitos y no conduce al concepto de continuidad necesario para el tratamiento de funciones (se aclara que es una confusión del profesorado en general), a diferencia del infinito dinámico en acto que permite entender el sentido de la variación en diversas situaciones. En relación a la segunda pregunta; en primer lugar la presentación de conceptos como función debe presentarse de diferente manera a la habitual desde la reconstrucción local del currículo, y que el contexto más adecuado en el que se puede usar el infinito es en contextos no escolares.	
Palabras Claves	Currículo, infinito, sentido, variación, educación funciones, dinámica, situaciones, problemas contextos, continuidad, socioepistemologia.
Problema que aborda el texto: En el currículo diseñado para la educación media no hay un esfuerzo por fomentar el aprendizaje del infinito actual.	
Objetivos del texto: • Mostrar que el infinito está atado a muchos conceptos de la educación media y que gracias a éste lazo, se hace necesario enseñar el infinito actual en la educación media. • Hacer los puentes necesarios para mostrar que por medio de la socioespistemología se construya e concepto de infinito.	
Hipótesis planteada por el autor: En el currículo actual se privilegia al infinito potencial, y no se menciona al infinito actual.	

Tesis principal del autor: La socioespistemología es uno de tantos caminos que permite construir en los estudiantes de la media algunas aproximaciones al infinito actual.
Argumentos expuestos por el autor: • Los estudios epistemológicos muestran que es necesario hablar de infinito potencial y actual en la escuela. • En situaciones extraescolares el estudiante experimenta el movimiento y la variación, y esto es posible usarlo a propósito de la enseñanza.
Conclusiones del texto: • Los alumnos que respondieron al cuestionario han construido un discurso conjuntista para las funciones, pueden explicar los procesos de cálculo de límites y velocidad de cambio. Sin embargo, no pueden darle sentido a lo que significa lo que hacen o los resultados a los cuales llegan. • Aún cuando los alumnos pueden ver los problemas de la educación secundaria, no tienen forma de enfrentarlos. En toda su formación no hay espacios en que se les enseñe a cuestionar lo que se hace en la escuela. Y la realidad es que cuando son puestos en evidencia, la sensación de vacío que sufren es mayor que lo que pueden manejar.
Bibliografía citada por el autor: Abric, J. (2001). Las representaciones sociales: aspectos teóricos. En J. Abric (Ed.),

Prácticas sociales y representaciones. (pp. 11-32). México: Ediciones Coyoacán.

Albert, J., Cazáres, M. y Castañeda, A. (1999). Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 12 (1),* 1-6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrigo, G. y D´Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática 16, (2)*, 5-19.

Ávila Storer, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma de las matemáticas. *Perfiles educativos 23 (93),* 59-86.

Biedma, J. (2004). *La madre de las ideas: a vueltas con el infinito*. Recuperado el 17 de mayo de 2007 de http://www.aafi.filosofia.net/NOCTUA/index.html

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. México: Mathema.189

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(1)*, 7-28.

Burbage, F. y Chouchan, N. (2002). *Leibniz y el infinito*. Paris: Presses Universitaires de France

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite finito. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4 (3)*, 237-265.

Camacho, A. (2005). Sistemas sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza. Revista *Cinta de Moebio*, Universidad de Chile. Marzo, núm. 022.

Camacho, A (2010). Geometrización del espacio real. Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Monterrey, México.

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2007). La Relme a sus veinte años. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 325-331. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2007). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 1043-1053. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.190

Cantoral, R., Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Education.

Castañeda, A., Sánchez, M. y Molina, J. G. (2006). Estudio del pensamiento del profesor en un curso de formación docente a distancia. *Memorias del 22 Simposio Internacional de Computación en la Educación*. SOMECE: México.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Díaz de Santos

Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (2)*, 187-214

Corzo, M. (2001). Georg Cantor y el infinito. *Memorias XII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones*, 401-415. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (1)*, 529-534. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. (2006). Un paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y reflexiones sobre el infinito. En G. Martínez Sierra, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática*

Educativa 19, 28-34. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.191

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003). El concepto de función: su comprensión y análisis. En R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16 (1), 235-241. Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

De Mora Charles, M. (2009). Finito o infinito: una cuestión de gusto. *Ontology studies 9,* 43-54

Díaz Moreno, L. (2003). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. En J. R. Delgado Rubí (Ed.) *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa 16 (1)*, 10-20. México: Comité Latinoamericano de Matemática

Educativa.

Díaz Navarro, P. (2007). Reflexiones sobre el concepto de infinito. *Revista Digital Matemática Educación e Internet 8 (1).* Recuperado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index.html

Dreyfus, T. y Tsamir, P. (2002). Comparing infinite sets – a process of abstraction – The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 21 (1),* 1-23.

Dreyfus, T. y Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structure about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior, 23 (3),* 271-300.

Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza.192

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Ferreirós, J. (2003): Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura. En J. Montesinos, J. Ordóñez y S. Toledo (Eds.), *Ciencia y Romanticismo.* Tenerife: Fundación Orotava de Historia de la Ciencia

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the learning of Mathematics 9 (2),* 9 – 14

Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En J. Delgado Rubí, (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (2),* 406-414. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 8 (2),* 169-193.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de los alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias 20 (1),* 87-113.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemáticas en el aula y las decisiones didácticas*. Tesis de maestría no publicada. CICATA del IPN, México

Imaz Jahnke, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? *Avance y Perspectiva 20,* 305-311.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal And Ordinal Infinities: An Epistemological And Didactic View. *Educational Studies in Mathematics. 48,* 175-197193

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics 48,* 137-174

Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Lestón, P. y Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17 (1)*, 404-410. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lomelí Plascencia, M. (2009). Como intervienen las estructuras del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos escritos verbalmente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 327-335. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational studies in Mathematics 48*, 239-257.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales 20 (3)*, 435-447.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. En G. Martínez (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 156-161. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.194

Mora, H. (2006). *Concepción proceso-objeto de función en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo*. Tesis de maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Nuñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. En B. Baaquie y P. Pang (Eds.) *Metaphor and Contemporary Science*, (pp. 49-72). Singapur: National University of Singapore.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana. Boletín volumen 1 (2)*, 59-81.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav del IPN. México

Sánchez Luján, B. (2009). *El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Solaeche, M. (1995). La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del infinito. *Divulgaciones matemáticas 3 (1/2)*, 115-120.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav del IPN. México

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics 38*, 209- 234.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education 30 (2)*, 213-219.195

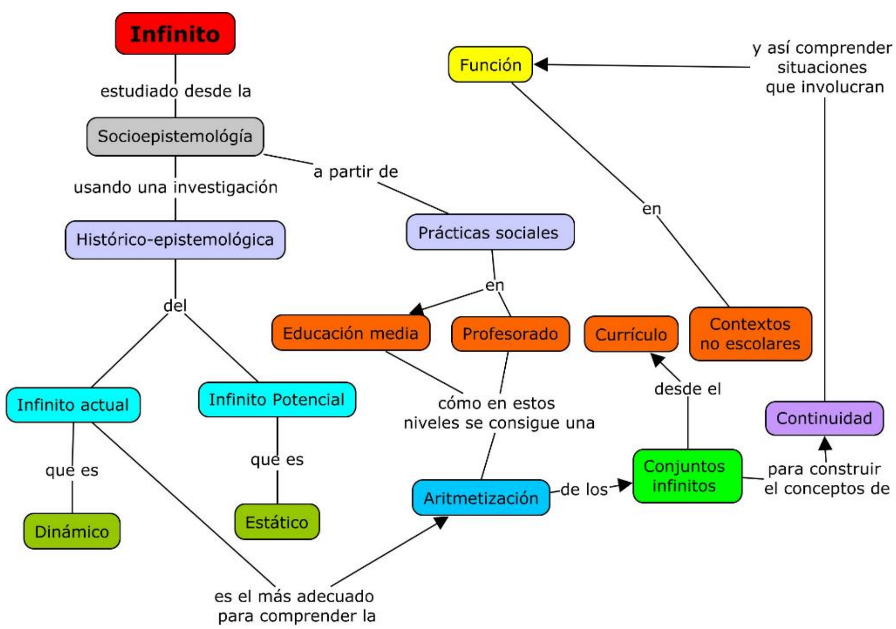
Valdivé Fernández, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: “el paso del infinito potencial al infinito ‘como un todo’ para comprender la construcción de los conjuntos infinitos”. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 19*, 544-550. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergara Quinterno, M. (2008). La naturaleza de las representaciones sociales. *Revista latinoamericana de Ciencias sociales de la niñez y juventud 6 (1)*, 55-80

Vita, V. (1992). El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo. *Mathesis* VIII (2), 115-140.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1 (1)*, 107-122

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	16/03/2016
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:	



Comentarios finales:	
Es necesario permitirle al estudiante ser reflexivo frente a su proceso de aprendizaje y crítico en su entorno escolar.	

Título del texto	**Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función.**
Nombres y Apellidos del Autor	Contreras de la Fuente Ángel, García Armenteros Manuel
Año de la publicación	**2012**

Resumen del texto:

En este documento, los autores realizan una descripción y un análisis de una clase de matemáticas que tiene como objeto matemático central el límite de una función. Lo anterior dado que "se argumenta la importancia de introducir casos reales de aula que contribuyan a deconstruir e interpretar la clase de matemáticas, desde la doble perspectiva de los contenidos y de la interacción social" como lo citan de Planas e Iranzo (2009); en ese sentido, todo concepto matemático perteneciente al currículo es susceptible de ser tratado en el aula a partir de casos reales, y el límite de una función hace parte de estos conceptos.

Toman como elementos conceptuales en el desarrollo de su descripción y análisis el enfoque ontosemiótico sobre el conocimiento e instrucción matemática, que se basa en formular una ontología de los objetos matemáticos teniendo en cuenta lo que denomina el "triple aspecto de la matemática como resolución de problemas, a saber socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. También hacen uso del significado institucional de referencia y el institucional implementado de los objetos matemáticos, entendidos respectivamente como el significado del objeto usado por el profesor al momento de planear su clase y el significado que posteriormente es apropiado por el estudiante una vez la clase ha llegado a su fin. Además, especifican la configuración epistémica de la teoría ontosemiótica, configurada por los siguientes elementos: Lenguajes, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos, todos ellos sucediendo gracias a las interacciones y conflictos entre los integrantes de la clase.

En cuanto a la sesión de clase, es caracterizada de la siguiente manera: "El profesor tiene 25 años de experiencia docente en el nivel de secundaria y 12 como profesor de universidad. La sesión dura 45 minutos y ocurre la sexta semana del tercer trimestre del curso. El concepto que se estudia es el de límite en el infinito y el profesor desarrolla la idea intuitiva del límite en el infinito. Son alumnos que no han trabajado en cursos anteriores la noción de límite y, por tanto, no han tenido contacto con la idea de límite de una sucesión. No disponen de calculadoras en la clase". La clase se desarrolla a partir del análisis gráfico de cuatro funciones, de las cuales el profesor pide a los estudiantes hallar sus límites al infinito e infinito negativo, de ahí en adelante, la sesión consiste en las respuestas de los estudiantes y el debate sobre estas generado por el profesor.

Del análisis de la actividad matemática en el aula resulta la trayectoria epistémica. Para la trayectoria epistémica, los autores llegan a la conclusión de que "La configuración

analizada tiene un carácter esencialmente actuativo, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de límites apoyadas en la representación gráfica de determinadas funciones. Según la clasificación de procesos propuesta en Font, Rubio y Contreras (2008) se trata de desarrollar el proceso de mecanización (algoritmización) de técnicas de cálculo de límites. No hay, por lo general, procesos de enunciación de proposiciones, dado que no se pretende enunciar propiedades correspondientes al trabajo con límites". Del análisis de las interacciones de las personas, en este caso profesor-estudiantes, se obtiene la trayectoria interaccional. De la trayectoria interaccional de la clase se concluye que el docente hace uso de diversas configuraciones dialógicas que en un principio pretenden brindar claridad a los estudiantes pero que contienen términos que generan conflictos semióticos en ellos. Del análisis de las técnicas topogenéticas y cronogenéticas se concluyó que el profesor hace uso de "la cooperación, en la que el profesor y los alumnos construyen el saber; y la diferenciación topogenética: el profesor hace las preguntas, el alumno responde, el profesor consensua la respuesta con los alumnos e instituye el saber. También utiliza técnicas cronogenéticas de control-delimitación, como es la demora o ralentización del saber en los momentos de preguntas y respuestas entre el profesor y los alumnos".	
Palabras Claves	Límite, función, infinito actual, infinito potencial, enfoque onto semiótico, didáctica, Trayectoria Epistémica, Trayectoria

	Instruccional, Conflicto Semiótico, Idoneidad Didáctica.

Problema que aborda el texto: Durante los procesos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, suceden diversos conflictos semióticos desde la doble perspectiva de los contenidos y la interacciòn social. Es entonces pertinente contar con un modelo validado que permita realizar análisis de los procesos educativos, concentrándose en los conflictos semióticos y que permita evaluar tales procesos y sugerir aspectos a mejorar. Un análisis haciendo uso del enfoque ontosemiótico podría satisfacer estos requerimientos y en el presente documento se pone en práctica dicho análisis.
Objetivos del texto: ● Analizar la estructura y funcionamiento de una clase de matemáticas en la que se enseña el límite de una función de una forma intuitiva en el primer curso del Bachillerato. ● Valorar la idoneidad didáctica del proceso de instrucción analizado.
Hipótesis planteada por el autor: El análisis con enfoque ontosemiótico constituye una herramienta para el docente que permite valorar los procesos educativos desde los contenidos y las interacciones entre individuos, lo que le permitirá reestructurar y mejorar dichos procesos educativos, en este caso en una clase cuyo objeto matemático central es el límite de una función.
Tesis principal del autor: El proceso de análisis se desarrolló con el enfoque en cuestión y permitió obtener

conclusiones de carácter interaccional, curricular, y didáctico en relación a los contenidos trabajados, además permitió estudiar los conflictos semióticos, lo que permite al docente tener información de importancia para mejorar sus procesos educativos.
Argumentos expuestos por el autor: Los argumentos del autor están constituidos por el propio análisis, cuyas conclusiones representan una herramienta para el docente cuyo fin es realizar mejoras a sus clases centrado en las interacciones, los contenidos y evitar los conflictos semióticos. Estos mismos resultados dan validez al modelo de análisis.
Conclusiones del texto: En general se concluye que para este caso de clase centrada en el límite de funciones, el intentar generar la comprensión del concepto únicamente mediante su interpretación gráfica y de una forma intuitiva no formal permitió conseguir el objetivo deseado respecto al aprendizaje pues para ello se necesitaría realizar un trabajo involucrando a las demás interpretaciones del concepto. Además los resultados de esta investigación permitieron corroborar resultados de investigaciones pasadas, por ejemplo que la triple representación gráfica, numérica y simbólica es imprescindible para el aprendizaje del concepto, como lo es sugerido por Tall.
Bibliografía citada por el autor: ARTIGUE, M. L’évolution des problématiques en didactique de l’Analyse. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, France, v. 18, n. 2, p. 231 -

262, 1998.

CONTRERAS, A. et al. Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, France, v. 25, n. 2, p. 151 - 186, 2005.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M. Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), México, v. 14, n. 3, p. 277 - 310, nov. 2011.

COTTRILL, J. et al. Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. The Journal of Mathematical Behavior, New Jersey, USA, v. 15, n. 2, p. 167 - 192, 1996.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Paradigma, Maracay, Venezuela, v. 28, n. 2, p. 49 - 77, dec. 2007.

DA SILVA, P.A. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. Bolema, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123 - 146, 2009.

DUBINSKY, E. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, México, v. 8 n 3, p. 25 - 41, dic. 1996.

FONT, V.; CONTRERAS, Á. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 69, n. 1, p. 33 - 52, Sept. 2008.

FONT, V., RUBIO, N Y CONTRERAS, Á. Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. In: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 21, p. 706 - 715, 2008. México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité

Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J.D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, Salamanca, España, v. 33, n.1, p. 89 - 105, feb. 2010.

GARCÍA, M. Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato. 2008, 406f. Tesis (Doctor en Ciencias Matemáticas) - Universidad de Jaén, Jaén, 2008.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática, Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, france, v. 26, n. 1, p. 39 - 88, 2006.

GONZÁLEZ, P. M. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

KIDROM, I. Abstraction and consolidation of the limit precept by means instrumental schemes: the complementary rule three different frameworks. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 69, n. 3, p.197 - 216, Nov. 2008.

PLANAS, N.; IRANZO, N. Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática (RELIME), México, v. 12, n. 2, p.179 - 213, jul. 2009.

PRZENIOSLO, M. Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 55, n.1 -

3, p. 103-132, Mar. 2004.

ROH, K. Students’ images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 69, n. 3, p.217 - 233, Nov. 2008.

ROH, K. An empirical study of students’ understanding of a logical structure in the definition of limit via the epsilon-strip activity. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 73, n. 3, p.263 - 279, Apr. 2010.

SENSEVY, G., MERCIER, A.; SCHUBAUER-LEONI, M. L. Vers un modèle de l’action didactique du professeur à propos de la course á 20. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, France, v. 20, n. 3, p. 263 - 304, 2000.

TALL, D. Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, A. C., 1991.

TALL, D. Students'Difficulties in Calculus. Plenary presentatiton in Working Group

3,In: International Congress Mathematical Education (ICME), 7th, 1992, Quebec.

Proccedings... Quebec: University of Warwick - Mathematics Education Research

Centre, 1992 . p. 1 - 8.

690 FUENTE, A. C.; ARMENTEROS, M. G.; MOLL, V. F.

TALL, D. Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking.

Mathematics Education Research Centre University of Warwick, 1994.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In:

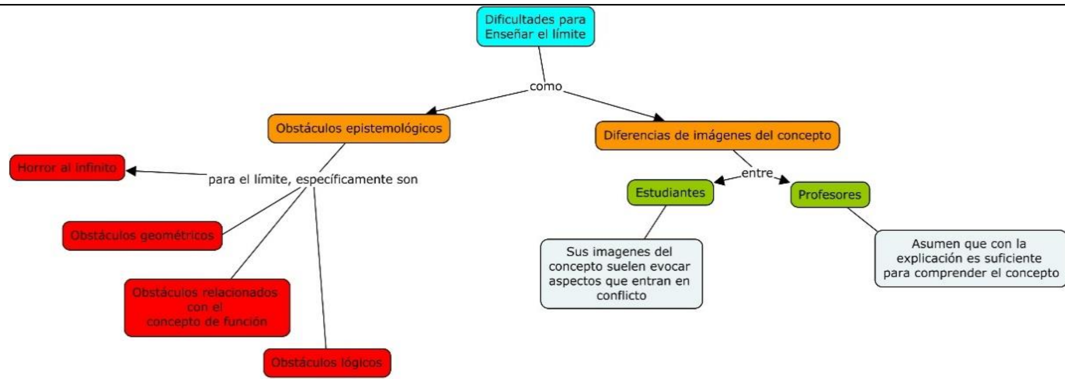
ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSICOLOGY

OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 19th, 1995, Recife. Proceedings... Recife:

Editora Universitária da UFPE, 1995. v. 1, p. 61 - 75.

<table>
<tr><td colspan="2">VINNER, S.; TALL, D. Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151 - 169, 1981.

WILLIANS, S. R. Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. Journal for Research in Mathematics Education, Reston , v. 32, n. 4, p. 341 - 367, Jul. 2001.</td></tr>
<tr><td>Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE</td><td>Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.</td></tr>
<tr><td>Fecha en que se elaboró este RAE</td><td>28/12/2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:</td></tr>
</table>



Comentarios finales:

Si bien este documento se centra en el modelo de análisis, usando como pretexto una clase sobre límites, los resultados del análisis brindan a quienes realizan este trabajo, importante información sobre los posibles obstáculos epistemológicos en el proceso de enseñanza de un concepto relacionado con el infinito, información de importancia para el diseño de la secuencia de actividades.

Título del texto	**El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria**
Nombres y Apellidos del Autor	Sergio Jato Canales
Año de la publicación	**2012**

Resumen del texto: Éste es un estudio en el que el autor da una definición de infinito y lo clasifica desde una postura actual de la matemática, después realiza un recorrido a través de la historia del infinito, y así llegar a identificar cómo este concepto se ve inmerso en las matemáticas de la secundaria, también presenta en su estudio la opinión que tiene el alumnado del I.E.S AUGUSTO GONZÁLES LINARES frente a su propio conocimiento del infinito usando como medio una encuesta, y como resultado del análisis realizado se concluye con algunas sugerencias en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del mismo.

En este orden de ideas, el autor abre el texto con una serie de definiciones que presenta la Real Academia española (RAE) en su diccionario para el concepto del infinito, llegando a la conclusión de que se describen muchas cualidades de este concepto pero no se concretiza nada, porque desde esta perspectiva la idea de infinito choca con la lógica en la que cualesquiera partes de un conjunto no puede ser igual al conjunto, si se entiende que la cualidad que se compara es la cantidad de elementos, después de esto a manera de profundización propone dos clases de infinito, a saber; INFINITO POTENCIAL e

INFINITO ACTUAL, el primero entendido como la reiteración de una acción que permite dar el paso al límite, el segundo en el que una vez dado el paso al límite muestra una aceptación de la existencia del infinito en lo concreto como un objeto.

Después se presenta una reseña histórica alrededor del concepto infinito, que arranca diciendo que una de las culturas que primero se acercó al concepto en mención fue la griega con el término “ápeiron” que significaba “sin límites” y lo limitado se forma a partir de ésto, por lo que el “ápeiron” se relacionaba con la idea de Dios porque él también era ilimitado. Los siguientes personajes que intervienen en esta historia son Zenón de Elea y Aristóteles, el primero plantea unas paradojas en contra del movimiento, y el segundo en base a las paradojas del primero realiza la distinción entre las dos clases de infinito y prohíbe la aceptación del infinito actual en su escuela, y esto se mantuvo hasta el siglo XIX, también se habla de Euclides quien trato de manera cuidadosa al infinito dentro de sus postulados pero evitando mencionarlo directamente. Continuando con el orden cronológico los matemáticos del siglo IX interpretan al infinito como 1/0 pues al sumarle o restarle cualquier cantidad no alteraba al número infinito (1/0) y esto se mantuvo durante la matemática árabe-medieval.

Nueve siglos después aproximadamente aparece Bonaventura Cavalieri quien formuló la teoría de los indivisibles y llegando a que la suma de las infinitas áreas de un cuerpo es igual a toda el área y lo mismo sucedía con el volumen. Es Galileo el que se pregunta por lo infinitamente pequeño y a pesar de llegar a algunas contradicciones, dio pie a que los matemáticos posteriores Newton y Leibniz desarrollaran el cálculo integral y diferencial, sin embargo a pesar de todo lo anterior y de que Jhon Wallis usé por primera vez el símbolo ∞ para denotar al infinito (la asignación del símbolo ∞, permitió acercarse mejor al concepto de infinito por la facilidad que se tenía al realizar cálculos), no se había definido claramente el concepto de infinito; es hasta que Georg Cantor y Benrhard Bolzano definen al conjunto finito como aquello que tiene una cantidad natural de elementos y lo infinito como aquello que no es finito, Richard Dedeking definió al conjunto infinito aquel que correspondía con una de sus partes y al conjunto finito como el que no es infinito, después menciona a otros como David Hilbert, Kurl Gödel y Jonh Conway (demostraron que no se podía demostrar por medio de la teoría de conjuntos la existencia de conjuntos infinitos), y llega a la conclusión de que el concepto del infinito actualmente aún es muy complejo para la comprensión completa del mismo.

Una vez analizado al infinito a través de la historia se realiza una incursión este concepto desde enseñanza en la educación secundaria, Y evidentemente para el autor para los estudiantes no existe problema aparente en entender y desarrollar un infinito potencial, su problema radica en el momento de realizar un aprendizaje de cálculo infinitesimal, porque los profesores se dedican a usar el infinito potencial como un axioma y esto impide un buen desarrollo de las actividades matemáticas propias de cada materia.

Luego se presenta una tabla en la que se analiza la presencia del infinito con algunos conceptos, como continuidad, función y probabilidad entre muchos otros, y es perceptible que el currículo ce centre mucho en el infinito potencial y es por eso que tienen problemas al enfrentarse al infinito actual en el cálculo infinitesimal.

Ahora se presenta la encuesta realizada a 12 estudiantes del I.E.S AUGUSTO GONZÁLES LINARES y las afirmaciones después del análisis de resultados:

- Los estudiantes conciben al infinito como algo que no tiene y no puede tener fin, lo cual limita al concepto a sus cualidades.
- Los estudiantes no saben si existen infinitos mayores o menores que otros, por lo que los argumentos no son claros frente a dicha comparación.
- Para los estudiantes no sólo hay un infinito y no puede haber otro más grande.
- Los estudiantes entienden al límite como tendencia a valores específicos.
- Es complicado para los estudiantes creer que un conjunto infinito esté acotado.
- La intuición se presenta como una barrera para la acepción del infinito actual.

Finalmente se hacen unas sugerencias para la enseñanza del infinito que enmarcan un abordaje profundo del infinito actual a partir de una profundización en la teoría de conjuntos, y a partir de allí no evadir contextos en los que aparezca el infinito actual, y construir propuestas que busque la interiorización del infinito en sus dos interpretaciones.

Palabras Claves	Educación, infinito (actual y potencial), finito, límite, cálculo infinitesimal.

Problema que aborda el texto: Los estudiantes de secundaria pueden llevar a cabo satisfactoriamente procesos relacionados con el infinito potencial, sin embargo la manera axiomática en que se llevan los cursos de cálculo infinitesimal no permite una aceptación y aprehensión del infinito actual por parte de estos estudiantes.
Objetivos del texto: • Conocer la postura que tienen algunos estudiantes del I.E.S AUGUSTO GONZÁLES LINARES frente a su propio conocimiento sobre el infinito. • Mostrar sugerencias al proceso de enseñanza del infinito actual en las aulas de secundaria.
Hipótesis planteada por el autor: El infinito actual está inmerso en las matemáticas de la secundaria.
Tesis principal del autor: El currículo de la secundaria hace un énfasis muy imperante en la enseñanza de conceptos, como continuidad, función y probabilidad entre muchos otros, en procesos de tipo potencial y evitan situaciones en las que se enfrenten a modelos contra-intuitivos.
Argumentos expuestos por el autor: • Realizar encuestas de tipo cualitativo basadas en la identificación de los conceptos que se relacionan con el infinito, para poder decir que la intuición es un obstáculo para la comprensión y aceptación por parte de los estudiantes del infinito actual en procesos contraintuitivos. • Se realiza el contraste ente los conceptos en los que está inmerso el infinito según lo

establecen los estamentos legales y las convicciones que tienen los estudiantes de un colegio en particular I.E.S AUGUSTO GONZÁLES LINARES, y al parecer no hay una preocupación de las entidades legales para fomentar la construcción de un infinito actual, de hecho hay un énfasis particular en la fomentación de un infinito potencial asociado a la vida cotidiana.

Conclusiones del texto:

- Deben construirse propuestas en las que se promueva la construcción y profundización en las discusiones referentes al infinito actual.
- Las herramientas tecnológicas permiten desarrollar discusiones frente a las nociones y elementos referentes al infinito.

Bibliografía citada por el autor:

Legislación:

- ESPAÑA. 2006. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial de España*, 5 de enero de 2007, 5, pp. 677 – 773.
- ESPAÑA. 2008. Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial de España*, 6 de noviembre de 2007, 266, pp. 45449 – 45476.

Libros:

- (Gracián 2010) Gracián, E. 2010. *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático.* España: RBA Coleccionables S.A. ISBN 978-84-473-6968-3
- J. Durán, A. 2010. *La verdad está en el límite. El cálculo infinitesimal.* España: RBA Coleccionables S.A. ISBN 978-84-473-6963-8
- Lavine, S. 2005. *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica México. ISBN 968-16-7510-X
- Zellini, P. 1980. *Breve historia del infinito.* España: Ediciones Siruela, S.A. ISBN 84-7844-064-X.
- Calviño, S; Sánchez, A. 1999. *Matemáticas 2. Primer ciclo de E.S.O.* España: Editorial EVEREST, S.A. ISBN 84-241-7150-0
- Vizmanos, J; Anzola, M, Alcaide, F. 2003. *Matemáticas GAUSS. 4º Curso de Secundaria.* España: Ediciones SM. ISBN 84-348-9325-8
- Pastor, A; Rufo, M.J; Arjona, P. 1999. *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato.* España: Editorial EVEREST, S.A. ISBN 84-241-7578-6
- Colera, J; García, R; Oliveira, M.J. 2003. *Matemáticas II.* España: Grupo ANAYA S.A. ISBN 84-667-2161-4

Artículos de revista impresa:

- (Lorenzo 2001) Lorenzo, J de. 2001. El infinito matemático. *Investigación y Ciencia*, número 23, pp 4-9.

- (Reményi 2001) Reményi, M. 2001. Historia del signo infinito. *Investigación y Ciencia*, número 23, pp 28 - 29.

Artículos de revista digital en línea:

- (Fedriani y Tenorio 2010) Fedriani, E.; Tenorio, Á. 2010. Matemáticas del más allá: el infinito. *Revista iberoamericana de Educación Matemática* [en línea], número 21, pp. 37 - 58. [Consulta: 1 Junio 2012]. ISSN 1815-0640. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_008.pdf
- Waldegg, G. 1996. *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Revista Mexicana de Investigación Educativa* [en línea], Vol 1, número 1, pp. 107-122. [Consulta: 25 Mayo 2012]. ISSN 1405-6666. Disponible en: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/140/14000108.pdf

Trabajos académicos:

- (Costa y Otto 2005) Costa, E.; Otto, B. de. 2005. *Ideología y Matemáticas: el infinito*. Universidad de Oviedo.

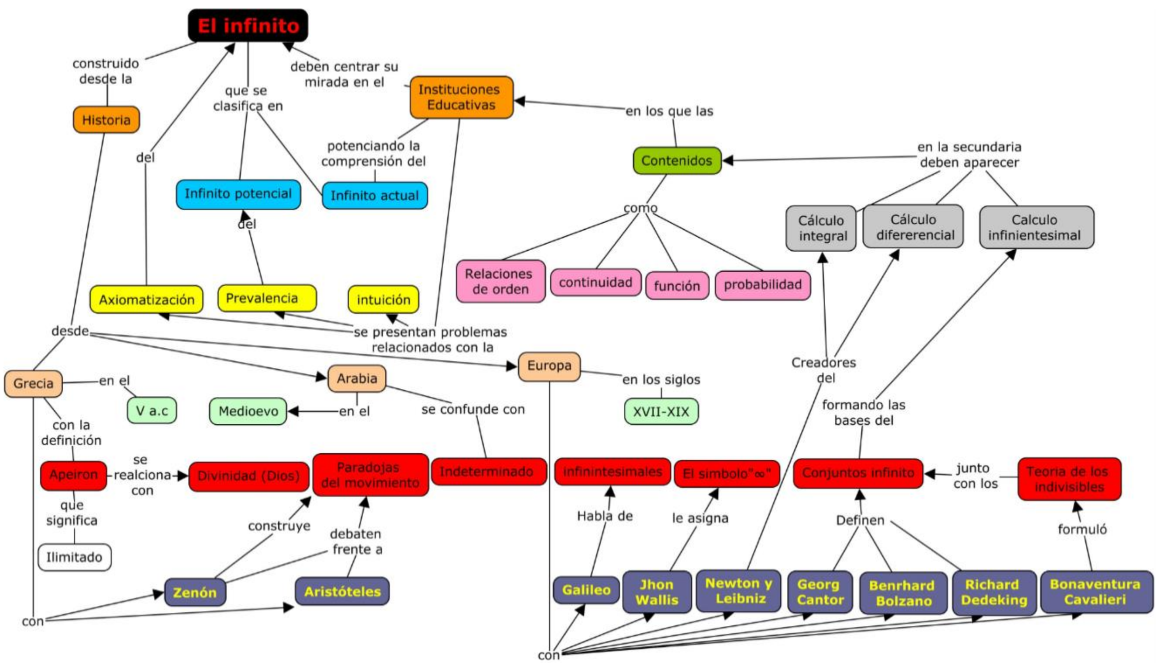
Páginas web:

- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 2001. Diccionario de la lengua española (22.a ed.). [Consulta: 25 Mayo 2012]. Disponible en: http://www.rae.es/rae.html
- INSTITUTO NACIONAL DE TECNOLOGIAS EDUCATIVAS Y DE FORMACION DE PROFESORADO. 2012. *Proyecto Gauss* [sitio web]. España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. [Consulta: 28 Mayo 2012]. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/gauss/web/indice.htm
- BIBLIOTECA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. 2012. *Tutorial de Citas y Referencias* [sitio web]. Cantabria: [Consulta: 3 Junio 2012]. Disponible en: http://www.buc.unican.es/Servicios/formacion/CITAR/PAG0.htm

Nombre y apellidos de quien elaboró este	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego

RAE	Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	5 Enero de 2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)



Comentarios finales:

- Las conclusiones que se obtienen del trabajo son un cimiento fuerte para nuevas investigaciones porque resultan de análisis cuantitativos muy bien elaborados.
- Se demuestra que la hipótesis es demostrada dando justificaciones desde la perspectiva legal, curricular y educativa entre otros.

Título del texto	**Análisis de aspectos epistemológicos en la historia del infinito, fundamentales para la construcción del límite de una función (propuesta de aula).**
Nombres y Apellidos del Autor	Pedro Elías Chaparro Rueda y Carlos Andrés Muñoz Samacá.
Año de la publicación	**2012**
Resumen del texto: En este trabajo de pregrado, se muestra una propuesta de aula en la que los autores pretenden ver cómo algunos aspectos de la historia del infinito sirven como puente para la comprensión y enseñanza del límite en funciones. Presentan algunos aspectos históricos, como la noción primitiva del infinito, los procesos infinitos, indivisibles, continuidad, entre otros que permiten la construcción de límite, después muestran 4 actividades en las que intentan que los estudiantes construyan una definición intuitiva de lo qué es el infinito. Finalmente las aplica y concluyen que uno de cuatro estudiante se acerca a las definiciones formales para infinito, además que acerarse a un solo obstáculo epistemológico en relación al infinito no permite que el estudiante pierda el “horror al infinito” y para poder entender qué significa e y δ son infinitensimales dinámicos, cosa que es necesaria para ua construcción medianamente formal del concepto de límite.	

<table>
<tr><td>Palabras Claves</td><td>Límite, Indivisibles, continuidad, obstáculos epistemológicos, función, dinámico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema que aborda el texto:
En la educación media cuando se proponen definiciones de límite, se hace cómo si los infinitesimales que se usan dentro de ésta fueran estáticos y no dinámicos como realmente no lo son.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos del texto:
• Identificar los aspectos epistemológicos en la historia del infinito fundamentales para la construcción del límite de una función.
• Diseñar un conjunto de actividades fundamentadas en los aspectos epistemológicos en la historia del infinito que contribuya a superar el O.E “horror al infinito”.
• Diseñar categorías de análisis y tipos de aprendizaje a partir de la construcción histórica del infinito, que permitan valorar la pertinencia de las actividades. Realizar un análisis sobre la construcción del conocimiento generado a partir de la interacción del estudiante(s) y las situaciones problemáticas en el pilotaje de las actividades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hipótesis planteada por el autor:
En la escuela se enseña el infinito límite con una postura positivista de las matemáticas y esto impide ver la dinámica de los objetos presentes en la definición de este objeto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tesis principal del autor:
Es necesario interpretar el infinito desde diferentes aspectos epistemológicos para construir el límite duna función.</td></tr>
</table>

Argumentos expuestos por el autor: • Desde la experiencia personal a los autores les enseñaron el límite desde una postura positivista de la educación matemática, por lo que no fue clara la definición formal de límite. • Es necesario hablar de una definición de infinito actual antes de interpretar el límite pues es lo que por experiencias anteriores sugieren algunos autores que han estudiado sobre éste tema.
Conclusiones del texto: • La interpretación del infinito actual es necesaria para la construcción del límite. • La propuesta de actividades permitió hablar de manera informal de continuidad e infinito como se pretendía.
Bibliografía citada por el autor: Apostol, T. (2006). Análisis Matemático (Segunda ed.). Massachusetts, USA: Reverté. Bachelard, G. (1993). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI editores. Barrios, J. (1993). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri. Recuperado el 6 de Junio de 2012, de Gobierno de Canarias: http://www.gobcan.es/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/act2_pdf_web/a2_c012w.pdf Berge, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. Revista Oficial del comite Latinoamericano de

matemática educativa: Relime , VI, 163-197.

Blázquez, S. (1999). Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Tesis doctoral. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Collette, J. P. (1985). Historia de las matemáticas II. España: Siglo XXI editorers.

De Lorenzo, J. (2001). El infinito Matemático. Ideas del infinito , 4-9.

Delahaye, J. P. (2001). El carácter paradójico del infinito. Ideas del infinito , 36-44.

Edwards, C. H. (1982). The historical development of calculus. New York: Springer.

Gutierrez, J. (2005). El concepto de límite: Imagen, definición y algoritmos relacionados. Bogotá D.C, Colombia: Universidad de los Andes.

Jiménez, W., & Rojas, S. (2007). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto límite de una función en el grado once. Monografía de Grado. Bogotá D.C, Colombia: UPN.

Lavine, S. (2005). El infinito, asiduo pretendiente de las matemáticas. En Compendiendo el infinito (págs. 11-55). México, D.F: Fondo de cultura económica.

Lievano, L., & Morales, J. (2009). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 14 y 16 años, acerca del infinito?¿Cuál es la posible influencia de los lenguajes matemáticos, las representaciones y los modelos?. Monografía de grado. Bogotá D.C, Colombia: UPN.

Macho, M. (2009). Topología de Espacios Métricos. País Vasco: Universidad del País Vasco.

Martínez, D., & Usgame, H. (2005). Una propuesta para abordar la noción de límite desde las representaciones geométrica, aritmética y analítica. Tesis de grado. Bogotá D.C, Colombia: UPN.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de Límite e implicaciones didácticas. Ciencia y Tecnología N° 9 , 44-59.

Montemayor, M., García, M., & Garza, Y. (2002). Guía para la investigación documental. México D.F: Trillas.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. Boletín Vol. I, N°2 .

Pérez, J. (2006). Orígenes del Cálculo. Recuperado el 08 de 06 de 2012, de ugr: http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Origenes_del_Calculo.pdf

Pretexto, G. (1992). Elementos sobre la enseñanza del límite. IX Coloquio Distrital de Matemáticas , 4-14.

Puerto, E. (2010). Concepciones del concepto del infinito actual en estudiantes universitarios. Tesis de Maestría. Bogotá D.C, Colombia: UPN.

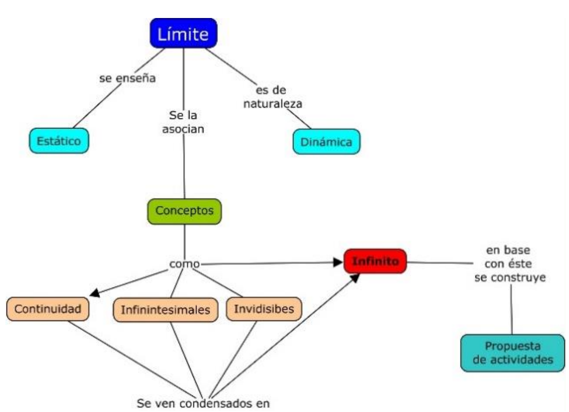
Sandoval, C. (2002). Investigación Cualitativa. Bogotá, Colombia: ICFES.

Vardi, I. (2001). Arquímedes ante lo innumerable. Ideas del infinito , 10-13.

Zill, D. (1987). Cálculo con geometría analítica. Belmont, California: Grupo editorial iberoamérica.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Diego Escobar y Yampier Agudelo
Fecha en que se elaboró este RAE	5 Enero de 2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

- Un concepto como el de límite en funciones y aspectos epistemológicos asociados, son necesarios para la construcción de un concepto como del límite de una función en una interpretación dinámica.

Título del texto	**Infinito, límite de lo ilimitado.**
Nombres y Apellidos del Autor	Acosta Sofía, Figares Gabriela, López Victoria, Mesa Victoria, Molfino Verónica, Rivero Florencia
Año de la publicación	**2013**

Resumen del texto:

Este documento presenta los resultados de una investigación realizada por los autores cuyo objetivo consistía en explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en algunos aspectos del discurso matemático escolar, específicamente en estudiantes de la carrera de profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación (Uruguay).

Los autores hacen uso del modelo epistemológico de prácticas propuesto por Montiel (2011). Dicho modelo las prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades entran en juego para explicar la construcción del conocimiento matemático. Las primeras se entienden como "la práctica normativa de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen" (Covián, 2005); las segundas como "el conjunto articulado de actividades intencionales que siguen un propósito específico enmarcadas en un paradigma específico"; mientras tanto las actividades son explícitas y se observan en los individuos y grupos humanos. También es usado por los autores el contexto de significación descrito por Espinoza (2009) que es "el ámbito en el cual cierta persona o

colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural".	
Palabras Claves	Infinito, discurso matemático escolar, infinito, actual, infinito potencial, prácticas, epistemología.
Problema que aborda el texto: Existe una tensión entre los que los estudiantes entienden de infinito y lo que los docentes creen que estos estudiantes entienden o necesitan que entiendan. Por lo tanto se requieren reflexiones sobre el discurso matemático del docente y sus implicaciones didácticas en lo transmitido a los estudiantes.	
Objetivos del texto: Explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en algunos aspectos del discurso matemático escolar, específicamente en estudiantes de la carrera de profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación (Uruguay).	
Hipótesis planteada por el autor: Conviven en las personas y en los centros educativos, dos concepciones de infinito: No académico y académico, el primero es de carácter intuitivo y surge fuera de la escuela para referirse a aquello que no se puede calificar como "mucho" o "muy grande". Además hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan.	
Tesis principal del autor:	

Los resultados, como lo dicen los autores, se explican de la siguiente manera: “El concepto de infinito vive de forma implícita en nuestras aulas pero es raramente explicitado en alguna de las manifestaciones del discurso matemático escolar. Entendemos que con este taller hemos dado herramientas para comenzar a explicitar parte de lo que se pone en juego cuando el infinito aparece, solapado, en el aula. Y, de esa manera, comenzar a reflexionar sobre cómo las diferentes concepciones conviven en el discurso de docentes y estudiantes”.

Argumentos expuestos por el autor:

Aplicación de cuestionario y sus resultados, permitieron a los autores realizar un análisis en donde exponen todas sus conclusiones acerca de los significados de infinito de los estudiantes y cómo se relacionan con las expectativas del docente.

Conclusiones del texto:

Luego de la aplicación de un cuestionario aplicado a estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores “Artigas” y del Profesorado Semipresencial, se concluye que en esta muestra de estudiantes conviven las dos acepciones de infinito, Actual y Potencial, siendo que en algunos estudiantes llegan a entrar en conflicto y generan un replanteamiento de respuestas anteriores, negando su propio razonamiento; mientras tanto, en algunos pocos estudiantes, las dos concepciones de infinito son aceptadas como complementarias.

Bibliografía citada por el autor:

Covián, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza Ramírez, L. (2009). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Franco y Ochoviet (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 509-513. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Garbin y Azcárate (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las ciencias, 20 (1), 87-113.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual, (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2011a). Concepciones del espacio geométrico y su relación con el infinito.

En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 853-861. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

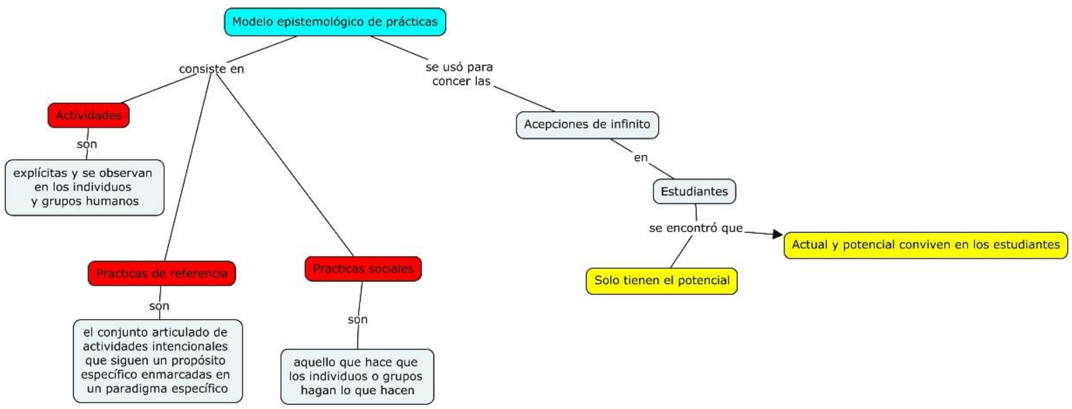
Lestón, P. (2011b). El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Lestón y Crespo Crespo (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano.

En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 879-888. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	28/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos	

encontrados en el texto: 
Comentarios finales: Este documento brinda a los autores del presente trabajo de grado información teórica, obtenida de la práctica, acerca de la construcción que los estudiantes podrían tener acerca del concepto de infinito, resaltando obstáculos a evitar en el proceso y una oportunidad para reflexionar en cómo superar las dificultades tenidas por el docente del caso.

Título del texto	Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática.
Nombres y Apellidos del Autor	Neira Sanabria Gloria Inés
Año de la publicación	2013

Resumen del texto:

Dado que existe una preocupación por parte de la comunidad educativa en los problemas existentes en la enseñanza de los objetos matemáticos correspondientes al cálculo, en este documento se intenta explicitar y describir dificultades, encontradas a partir de múltiples investigaciones, para el aprendizaje del cálculo escolar, sin embargo, el número de estas investigaciones es pequeño en comparación con el número de investigaciones enfocadas a la transición aritmética-álgebra.

En primer lugar se resalta que no existe un paso natural del álgebra al cálculo en términos curriculares. Según afirma la autora "En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que no tiene ninguna razón ni matemática ni pedagógica, sino solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del álgebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no sólo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo”.

Lo anterior se resume en que, en el ámbito escolar bien se podrían diferenciar dos transiciones desde el álgebra, una hacia la geometría analítica y otra hacia el cálculo, hecho que no permite una construcción continua de los preconceptos necesarios para el cálculo.

También existen tensiones disciplinares de aprehensión cognitiva en el aprendizaje del cálculo, los diferentes registros semióticos usados tanto en álgebra como en geometría analítica y en cálculo, siendo que los mismos símbolos y notaciones se utilizan de manera diferente en las tres ramas. Además en el álgebra y la geometría analítica se utiliza un razonamiento que tiende a priorizar la obtención de equivalencias mientras que en el cálculo, específicamente en el concepto de límite (pilar de esta rama de las matemáticas), se usa un razonamiento que prioriza la obtención de condiciones suficientes para determinadas situaciones.

Además, en las dificultades identificadas en el aprendizaje del cálculo se diferencian dificultades relacionadas con:

- El rechazo al estatus operacional del límite.
- El entendimiento de la continuidad.
- La noción de función.
- El análisis geométrico del cálculo.
- Aspectos lógicos y simbólicos del cálculo.

Esta clasificación es realizada por Sierpinska, mientras tanto Artigue las reagrupa en tres tipos de dificultades relacionadas con:

<table>
<tr><td colspan="2">La conceptualización del límite.
La complejidad de los objetos matemáticos del cálculo.
Rupturas en el modo del pensamiento necesarias para el entendimiento del cálculo.</td></tr>
<tr><td>Palabras Claves</td><td>Dificultades, cálculo diferencial, álgebra escolar, prácticas, conflicto semióticos, transición, ruptura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema que aborda el texto:

“El escenario usual del trabajo inicial del cálculo muestra repitencia, deserción escolar, «incomprensión» de conceptos, inadecuado manejo de razonamientos, escasa competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas; cursos desarrollados mecánicamente, trabajo puramente algorítmico y algebraico, sin alcanzar comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo”. La transición álgebra-cálculo no ha sido estudiada tanto como la transición aritmética-álgebra. Es necesario entonces que la comunidad educativa realice esfuerzos en el estudio y producción de herramientas para fortalecer la transición álgebra-cálculo y evitar las dificultades expuestas en la anterior cita.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos del texto:

Explicitar y describir dificultades, encontradas a partir de múltiples investigaciones, para el aprendizaje del cálculo escolar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hipótesis planteada por el autor:</td></tr>
</table>

“Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente”.
Tesis principal del autor: La Hipótesis de la autora es reafirmada como tesis en las conclusiones del documento.
Argumentos expuestos por el autor: Existen tensiones de carácter curricular que implican la posibilidad de desarrollar dos rutas (en cuanto a contenidos) a partir del álgebra, una hacia la geometría analítica y otra hacia el cálculo, También existen tensiones disciplinares de aprehensión cognitiva en el aprendizl cálculo, los diferentes registros semióticos usados tanto en álgebra como en geometría analítica y en cálculo
Conclusiones del texto: Los acercamientos teóricos descritos favorecen la discusión y elaboración de propuestas orientadas a solucionar el problema, además de plantear un gran número de problemas no triviales prontos a ser solucionados a través de la reflexión de la comunidad académica.
Bibliografía citada por el autor: Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (Ed.). (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. et al. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En N. Climent, L. Contreras y J. Carrillo (Eds.), Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (p.p. 71-86). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, Actas EMA (Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, p.p. 305-320).

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática (Trad. Parra, M., del original en francés: Graphiques et equations. L'Articulation de deux registres, 1988. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN. Ferrini-Mundy, J., y Guadard, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus. Journal of Research in Mathematics Education, 23(1), 56-71.

Moru, K. (2006). Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho (Tesis Doctoral). University of the Western Cape, Bellville, South Africa.

Neira, G. (2012). Del Algebra al Cálculo: ¿Transición o Ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En Pensamiento, Epistemología y Lenguaje Matemático. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación No 2 (pp. 13-42). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

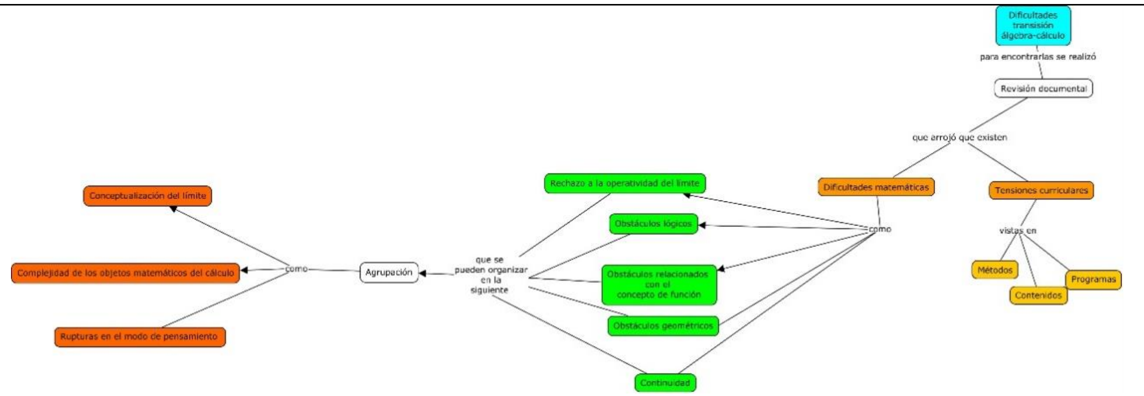
Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista Ingeniería, (1), 87-92.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. London: The Falmer Press.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D. Grouws (Ed.), Handbook or research on Mathematics teaching and learning (pp. 495-510). New York: MacMillan.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	30/12/2015

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

Este documento es de gran importancia y utilidad para los autores de este trabajo en la medida que permite tener claridad de la existencia y origen de dificultades en la enseñanza de conceptos íntimamente relacionados con el infinito actual. Hecho que permite concentrarse en atender estas dificultades.

Título del texto	**Sobre el infinito y sus dificultades antes de Georg Cantor y sus obras.**
Nombres y Apellidos del Autor	Marin Gaviria Isaías David
Año de la publicación	**2014**

Resumen del texto:

Marin realiza da inicio a este ensayo planteando la dificultad de la mente humana para concebir y entender el infinito, siendo finita en sí misma. Aun así, desde la matemática es posible tener mayor claridad en lo que respecta al concepto del infinito. El autor realiza un recorrido epistemológico de la dualidad del infinito en sus interpretaciones actual y potencial, recordando a los lectores que durante mucho tiempo las ideas aristotélicas sobre el infinito, por el hecho ya mencionado de que la mente humana es algo finito y según el pensamiento previo a cantor, era imposible para ella comprender algo que es infinito. El autor menciona que Aristóteles entendió la posibilidad de interpretar el infinito de dos maneras diferentes, sin embargo rechazó al infinito actual debido a no ser capaz de comprenderlo.

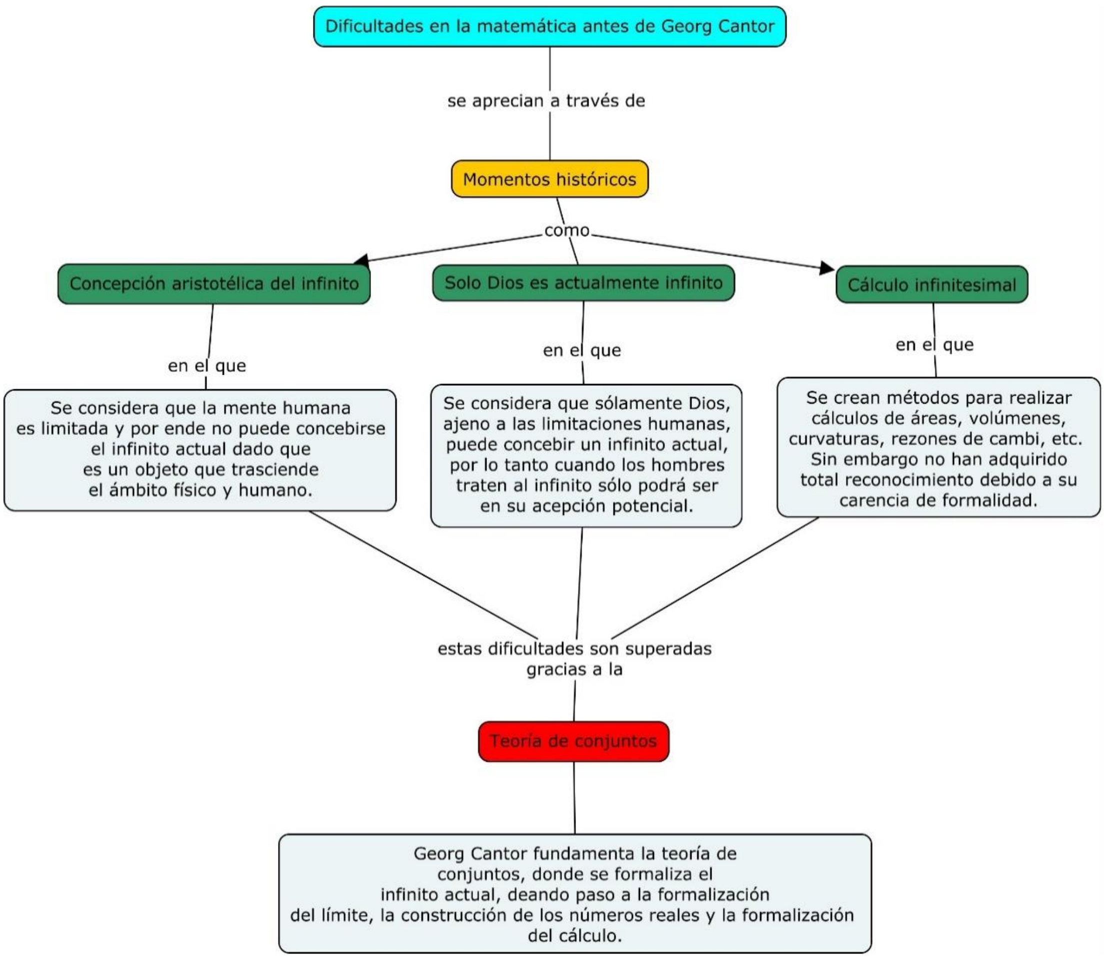
También desde el punto de vista religioso, el infinito como totalidad (actual) era una característica que se le atribuía únicamente a Dios, ser considerado perfecto y omnipotente, por ende infinito en sí mismo, mientras que el hombre es imperfecto y finito. Sin embargo, respecto a esta postura surgieron interrogantes como “[...]¿Por qué un ser perfecto, incorruptible como lo es Dios, no puede crear cosas iguales a él? ¿Es el infinito simplemente la representación de la esperanza del hombre por tener una

continuidad permanente en el mundo?”. Estas dificultades en la comprensión del infinito además de estar presentes en la historia, se reflejan en las aulas de clase y los estudiantes pueden llegar, a causa de estas, a realizar razonamientos y afirmaciones erróneos, si su concepción del infinito es solamente la de infinito potencial. Fueron los desarrollos de Georg Cantor lo que permitió formalizar y validar al infinito actual. Irónicamente, el propósito de Cantor no era ese, sin embargo, necesitó del infinito actual formalizado y trabajó para construir una teoría axiomatizada que permitiera operar con conjuntos infinitos sin llegar a contradicciones con la matemática de la época.	
Palabras Claves	Georg Cantor, infinito actual, infinito potencial, epistemología, límite, cálculo, movimiento.
Problema que aborda el texto: Desde la antigüedad el problema del entendimiento del infinito radicó en la renuencia a aceptar el infinito actual, esto puede verse a través de la historia en el desarrollo de conceptos relacionados al infinito, dcho problema terminó gracias al trabajo de Georg Cantor quien consiguió la aceptación en la comunidad matemática del infinito actual.	
Objetivos del texto: Mostrar un recorrido epistemológico del desarrollo del concepto de infinito centrado en la tensión generada por la no aceptación de la interpretación de infinito actual, tensión terminada gracias al trabajo de Cantor.	

Hipótesis planteada por el autor: Tratar al infinito teniendo como referente al mundo sensible tiende a generar conclusiones contradictorias. Lo anterior puede verse reflejado a travès de las ideas de Arquímedes, Zenón y Cantor, siendo este último quien fue capaz de teorizar y comprender totalmente al infinito actual, terminando con las dualidades en el sentido de las conclusiones y las contradicciones.
Tesis principal del autor: Los desarrollos de cantor sirvieron como base para la fundamentación del concepto de límite que a su vez permitió la formalización del cálculo, además permitió el entendimiento del infinito actual, ligado al movimiento, y facilitó establecer un puente entre problemas de la física y de la matemática.
Argumentos expuestos por el autor: Los desarrollos de Georg Cantor, a pesar de que resultaron de una coincidencia, constituyeron un punto de convergencia para todas las discusiones referentes al infinito, que encontraron su respuesta en la aceptación del infinito actual, además de sentar la base de la teoía del cálculo.
Conclusiones del texto: En el trabajo de Georg Cantor sobre el infinito se logra: ● Dar rigor matemático al infinito. ● Establecer la multiplicidad de infinitos en tèrminos de tamaño. ● Sentar las bases de las matemáticas como se conocen hoy en día.

Bibliografía citada por el autor:	
Bermúdez, C. G. (2009). G. Cantor Sistemas de números y conjuntos. La Coruña, España: Universidad de da Coruña. Galera, M. C. (1995). La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito. En: Divulgaciones Matemáticas 3 (1/2), pp. 115-120. Maracaibo Venezuela: Universidad de Zulia. Ortiz, J. R. (1994). El concepto de Infinito. En: Boletín Vol. I, Número 2, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo. Ramón, O. (1994). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. 1, Número 2, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo.	
Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	26/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos	

encontrados en el texto:



Comentarios finales:

En este documento se explicita la importancia de la teoría de Cantor en relación con la aceptación del infinito actual. De ahí que resulta pertinente realizar una revisión a dicha teoría dado que por un lado permite claridad teórica a quienes realizan este trabajo, por otro podría proporcionar nociones e ideas aplicables a las actividades a diseñar.

Título del texto	**Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos de cálculo**
Nombres y Apellidos del Autor	Gloria Garcia O., Celly Serrano, Hernán Díaz
Año de la publicación	**2014**

Resumen del texto: En este artículo se presenta una reseña de lo que fue la línea de investigación con el nombre "una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos de cálculo", en la que se tiene como objetivo buscar respuestas de tipo didáctico a problemas de la enseñanza matemática en todo el país y al estudio de las matemáticas que como área permite modelar situaciones en contextos reales.

Se identifican algunos obstáculos epistemológicos, después de definir obstáculo epistemológico como la solución a las dificultades que se presentaron en la aprehensión de un concepto en las diferentes etapas del desarrollo a través de la historia, entre estos se encuentran; 1) la identificación del límite como último término de un proceso, 2) aplicación de propiedades de los procesos finitos a procesos infinitos, 3) Horror al infinito, relacionado con el aspecto metafísico, 4) Cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, y definen finalmente que el principal objetivo del trabajo es buscar diferentes estrategias que le permitan al estudiante construir estos procesos de infinito estructural (actual) a partir de desarrollos cognitivos de los estudiantes.

En seguida se presenta el estudio se definen tres núcleos, el primero es el aprendizaje y la cognición de conceptos básicos, el segundo está referido a la enseñanza y los recursos que se utilizan para dicho fin, el tercero es un contraste entre los dos núcleos anteriores pero aplicados a situaciones reales. Finalmente se hace una sugerencia de algunos elementos a tener en cuenta en la construcción teórica de propuestas en relación al límite y la derivada; historia y epistemología; en el que se muestra cómo se construye teoría en matemáticas a partir de solucionar problemas, que involucraban cambio, a través de la historia y cómo esto da cimientos a la matemática moderna, Aprendizaje y cognición; en este se concluye que los procedimientos algorítmico terminan por ser un obstáculo para el aprendizaje cognitivo en relación al infinito en situaciones que involucran cambio, enseñanza y estudios curriculares; en el que se atribuye al cálculo una estrecha relación con la enseñanza, y por este motivo en las experiencias de campo se deben presentar propuestas de enseñanza en las que se motiven la creatividad y actitudes matemáticas diversas frente a las situaciones presentadas. Lo anterior es sustentado con paráfrasis de los textos consultados por los autores.	
Palabras Claves	Enseñanza, infinito, derivada, límite, obstáculos epistemológicos, cálculo.
Problema que aborda el texto: Las situaciones a las que el estudiante se enfrenta para le aprendizaje del cálculo diferencial, no son las más adecuadas y por esto se reduce al cálculo a una aplicación de	

algoritmos.
Objetivos del texto: • Mostrar algunos elementos de tipo didáctico, epistémico, y conceptual necesarios para construir propuestas para la enseñanza del cálculo. • Hacer un recorrido histórico que permita decir qué pasó en la historia con relación al desarrollo de los conceptos trabajados para la enseñanza del cálculo.
Hipótesis planteada por el autor: Es necesario hablar de los obstáculos epistemológicos del infinito para poder construir situaciones que lleven al progreso del cálculo en la escuela.
Tesis principal del autor: La enseñanza del cálculo está ligada a la metacognición transpuesta a realidades cercanas al estudiante, relacionadas con el movimiento.
Argumentos expuestos por el autor: • Desde una perspectiva historia el cálculo se desarrolló a través de situaciones que involucran movimiento. • Que se reduce al cálculo a la aplicación de reglas y formulas porque el currículo nacional es a esto a lo que motiva al estudiante.
Conclusiones del texto: • Los procedimientos en ocasiones terminan por ser un obstáculo epistemológico pues impide el análisis de las situaciones que generaron dichos procesos.

- Se debe reestructurar el currículo para que desde la políticas educativas se haga que el estudiante se acerque a su contexto real con la motivación y creatividad para resolver problemas presente en el medio.

Bibliografía citada por el autor:

Aristóteles. (1995). Física. Madrid, España: Gredos

Arquímedes. (1986). El método. (Luís Vega, Trad.). Madrid, España: Alianza.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. Educación matemática. 11. 1. 5- 24.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (2002). Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. Educación Matemática. 16. 2. 5-20.

Asimov, I. (2000). De los números y su historia. Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Bachelard, G. (1948). La formación del espíritu científico. Argos

Barrios, J. (1992). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri. Encuentros: De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico. Realizado para el seminario «Orotova» de historia de la ciencia. 305-326.

Bell, E. (1937). Los grandes matemáticos. Losada S.A.

Bell, E. (1995). Historia de las matemáticas. México: Fondo de cultura económica.

Berge, A. & Sessa C. (2003). Completitud y continuidad a través de 23 siglos. Aportes a una investigación educativa. Relime. 6. 3. 163-197.

Blay, M. (2001). La ciencia del movimiento en el siglo XVII. Temas Investigación y Ciencia. 23. 18-22.

Borges, J. (1984). El jardín de senderos que se bifurcan. Buenos Aires, Argentina: La oveja Negra Ltda.

Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. Madrid, España: Ed. Alianza.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques. 7. 2. 33-115. (J. Centeno, B. Melendo y J. Murillo Trads.).

Brousseau, G. (2001). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Recuperado el 6 de enero de 2006 desde http: ///C/WEBSHARE/Wwwroot/Papers/Brousseau/ObstáculosBrousseau.htm.

Burbage, F. & Chouchan, N. (2002). Leibniz y el infinito. pp. 1-96

Cajori, F. (1987). Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento: Fases en el desarrollo de la teoría de límites. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación. Año IV. E8. 1-86.

Carrera, J. (2001). El infinito y la lógica de primer orden. Temas Investigación y Ciencia. 23. 23-27.

Castro, I. & Pérez, J. (2003). Las paradojas en matemáticas. Revista de la Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana. 8. 1. 25-37.

Castro, I. & Pérez, J. (2004). Primeros antecedentes sobre lo infinitamente pequeño. Revista de la Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana. 9. 1. 13-22.

Centeno, J. (1990). Número decimales ¿por qué?, ¿para qué? Madrid, España: Síntesis.

Chevallard, Y. (1991). La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Cid, E. s.f. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Artículo publicado. Universidad de Zaragoza.

Coriat, M. & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las ciencias, 18 (1), 25-34

Coronado, L. s.f. El atomismo de Leucipo y Democrito como intento de solución a la crisis eleática. Artículo publicado. Universidad de Costa Rica.

Courant, R. & Robbins, H. (2002). ¿Qué son las matemáticas? México: Fondo de Cultura económica.

Cruz, A. (2003). Sobre la construcción del concepto de continuidad: una consideración histórica. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de duda. Epsilon. 36, 341-360.

D'Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Dauben, J. (1983). Georg Cantor y la teoría de los números transfinitos. Investigación y ciencia. 83. 82-93.

Delahaye, J. (2001). El carácter paradójico del infinito. Temas Investigación y Ciencia. 23. 36-44.

Díaz, P. s.f. Reflexiones sobre el concepto de infinito. Publicado en Revista virtual, matemática, educación e internet (Mundo de las matemáticas). Universidad de Costa Rica.

Edwards, C. (1982). The historical development of the calculus. New York, Estados

Unidos. Ed. Springer-Verlag.

Festa, E. (1995). La disputa del atomismo: Galileo, Cavalieri y los jesuitas. Mundo Científico. X. 107.

Garbin, S. & Azcarate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las ciencias. 20 (1). 87-113.

Godino, J., Batanero, C. & Cid, E. (2003). Sistemas Numéricos y su didáctica para maestros. Recuperado el 31 de marzo de 2003 desde www.urg.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gómez, V. (1990). El Infinito. Temas de hoy. Madrid, España: Nueva ciencia.

Guthrie, W. (1991). Historia de la filosofía griega II. Madrid, España: Gredos.

Hahn, H. (1997). El infinito. Sigma el mundo de las matemáticas. 4. 384-401.

Imaz, J. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? Avance y perspectiva. 20. 305-311.

Lanford, P. (1990). El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria. Barcelona, España: Paidós.

Lévy, T. (2001). Thabit ibn Qurra y el infinito numérico. Temas Investigación y Ciencia. 23. 14-17.

Massa, M. (2001). Sobre los métodos de cuadraturas de Pietro Mengoli (1625-1686). XXI International Congress of History of Science. pp. 8-14.

Medina, A. s.f. Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Artículo publicado. Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares básicos de matemáticas y lenguaje. Bogotá, Colombia.

Montoro, V. & Scheuer, N. (1995). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. Recuperado el 16 de septiembre de 2005 desde http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/Montoro_mejorado.doc

Moore, A. W. (1995). Breve historia del infinito. Investigación y Ciencia. 225. 54-59.

NRD, ASP, MESCUD. (2004). “Senso dell’infinito”. La matemática e la sua didattica. 4. 46-83.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezolana. 1. 2. 59-81.

Parrondo, J. (2003). Zenón y los camellos. Investigación y ciencia. 326. 86-87.

Recalde, L. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. Matemáticas: enseñanza universitaria. 12. 1. 51-72.

Recaman, B. (2002). Los números una historia para contar. Taurus.

Romero, I. (1997). La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción. Granada, España: COMARES.

Romero, I. & Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. Enseñanza de las Ciencias. 17. 2. 259-272.

Sacristán, A. (1991). Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. Educación Matemática. 3. 1. 5-18.

Sinaceur, H. (1994). El infinito. Mundo científico. 151. 942-948.

Smullyan, R. (1995). Satán, Cantor y el infinito. Barcelona, España. Gedisa.

Stewart, I. (1998). De aquí al infinito. Barcelona, España: Critica.

Stone, M. (1999). Enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las Ciencias. 16 (2). 233-249.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de campos conceptuales. Recherches en Didáctique des

Mathématiques. 10. 2, 3. 133-170.

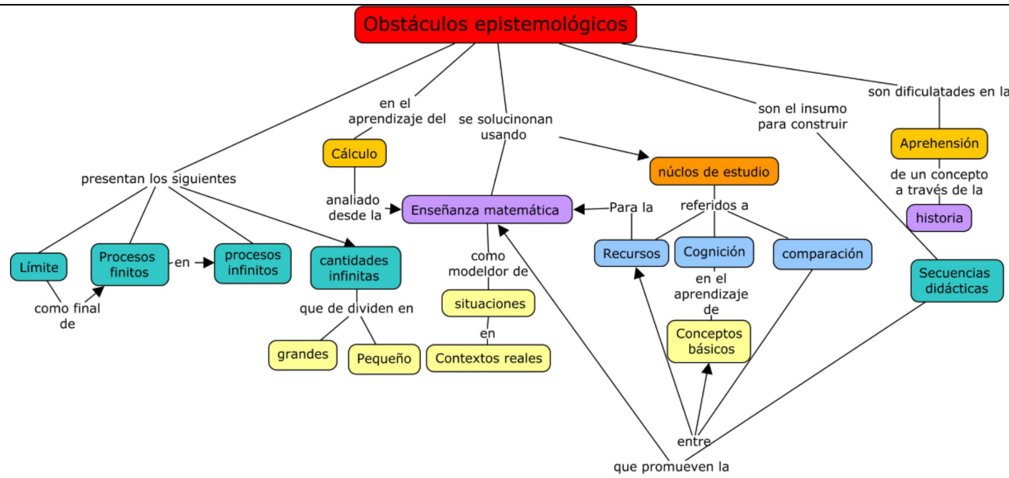
Waldegg, G. (1993). El infinito en la obra aristotélica. Educación matemática. 5. 3. 20-38.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 1. 1. 107-122.

Wellon, W. 1945. Cantor: el conquistador del infinito. Revista trimestral de cultura moderna, Universidad Nacional. 2. 3. 353-373.

Zellini, P. (1991). Breve historia del infinito. Madrid, España: Siruela.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	30/12/2015
Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:	



Comentarios finales:

- Se hace necesario reformar curricularmente la enseñanza del cálculo para que deje de ser esa aplicación de fórmulas sin sentido y se muestre como un resultado del análisis de situaciones reales que permiten llegar a dichas fórmulas.

Título del texto	**El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas.**
Nombres y Apellidos del Autor	Asuman Oktaç, Roa Solange
Año de la publicación	**2014**
Resumen del texto: La metodología utilizada por los autores para la realización de su investigación es la llamada APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), con ella realizan una descomposición genética genérica del concepto de infinito y de su relevancia en dos paradojas, la del hotel de hilbert y la de las pelotas de tenis: ● Paradoja del Hotel de Hilbert: Imagina que eres el administrador de un hotel que tiene un número infinito de habitaciones no vacías. Si solo se permite una persona por habitación, ¿cómo puedes acomodar a un nuevo y muy importante huésped en una habitación personal? ● Paradoja de las pelotas de tenis: Suponga que tiene tres botes con una capacidad ilimitada, etiquetados como bote contenedor, bote A y bote T con un botón dispensador que, cuando se presiona, mueve pelotas del bote contenedor al bote A. El bote contenedor tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis, numeradas 1, 2, 3, … Medio minuto antes del mediodía, se presiona el dispensador y las pelotas números 1 y 2 pasan al bote A e instantáneamente la pelota número 1 pasa de A a T. Un cuarto de minuto antes del mediodía, se presiona nuevamente el	

<table>
<tr><td colspan="2">dispensador y las pelotas números 3 y 4 caen al bote A y automáticamente la pelota de menor denominación pasa al bote T. En el siguiente paso, 1/8 de minuto antes del mediodía, se presiona el dispensador y las pelotas números 5 y 6 pasan del bote contenedor al bote A e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa al bote T. Si el modelo señalado continúa, ¿cuál es el contenido del bote A y T al medio día? (Dubinsky y otros, 2008, p. 100).</td></tr>
<tr><td>Palabras Claves</td><td>Teoría apoe, procesos iterativos infinitos, mecanismos y estructuras mentales, objeto trascendente, paradojas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema que aborda el texto:

El infinito potencial y el infinito actual pueden concebirse como proceso y objeto, respectivamente basándose en la teoría APOE. La comprensión del infinito está ligada a las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre el conjunto de los números naturales y el infinito como objeto trascendente no se desprende de manera directa del infinito como proceso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos del texto:

● Realizar una descomposición genética genérica del infinito y dos descomposiciones genéticas particulares: una para la paradoja de las pelotas de tenis y otra para la paradoja del hotel de Hilbert. Estos análisis toman como fundamento la construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes relacionados con el infinito potencial y actual, respectivamente.
● Realizar un análisis de la complejidad que implica coordinar procesos de</td></tr>
</table>

diferente naturaleza, convergentes y divergentes, para construir el infinito como un proceso.
Hipótesis planteada por el autor: Las estructuras y mecanismos tradicionales no han sido suficientes para explicar la manera como los individuos intentan comprender situaciones matemáticas que involucran el infinito.
Tesis principal del autor: El contexto de una situación puede ejercer una fuerte influencia en cómo un individuo la afronta. En un contexto de paradojas, éstas brindan al estudiante una herramienta formal que le permita confrontar sus propias creencias sobre el infinito, pudiendo llegar a realizar el proceso de encapsulamiento y entender al infinito como proceso y también como objeto.
Argumentos expuestos por el autor: La descomposición genética genética del infinito concluye que para la construcción del infinito como "acción" requiere que la persona sea capaz de establecer aplicaciones biyectivas entre los naturales y términos de sucesiones generadas por procesos iterativos (infinito potencial). Posteriormente es necesario que el individuo realice lo que los autores denominan "mecanismo de encapsulación" que consiste en la aceptación, motivada por las preguntas realizadas en las diversas situaciones de donde surgen los procesos iterativos, de dichos procesos como un todo (infinito actual), abstrayendo al objeto (infinito) del proceso, aceptando que todos los números naturales han sido alcanzados y por ende todos los términos del proceso iterativo. Este mecanismo de

encapsulación no es generalizable, en el sentido de que estará motivado por el contexto de cada situación.

La descomposición genética genética de las situaciones se presenta a continuación:

Para la paradoja de las pelotas de tenis, "El proceso PT, la subdivisión repetida de un intervalo de tiempo un minuto antes del mediodía, se coordina con el proceso PN cuando un individuo considera que para todo número natural n es posible determinar un instante de tiempo dado que corresponde a 1 2n minutos antes del mediodía. Por otra parte, los procesos PM y PN se coordinan cuando un individuo puede determinar que, para cada instante de tiempo n, se da el movimiento de tres pelotas a través de los botes contenedor A y T. Estos se clasifican en tres categorías (no disyuntas): las pelotas cuya numeración es de la forma n, 2n y 2n − 1. Como resultado de estas coordinaciones se tienen dos nuevos procesos". Estos procesos pueden generar dos respuestas diferentes a la pregunta dependiendo de la aceptación del proceso a pesar de la imposibilidad práctica de la situación, por parte del individuo, como terminado; si el individuo es capaz de aceptar al proceso como terminado (infinito actual) podrá concluir que en uno de los botes no queda ninguna pelota dada la naturaleza del experimento, sin necesidad de atribuirle al proceso completo la naturaleza de cada uno de sus estados individuales (infinito potencial).

Para la paradoja del Hotel de Hilbert: El primer obstáculo para los estudiantes resulta la imposibilidad práctica de construir un hotel de infinitas habitaciones, además de la imposibilidad de existencia de infinitas personas. sin embargo, si estas condiciones son aceptadas por el individuo al considerar la paradoja se tiene que "Ante la llegada de un

nuevo huésped, es posible demostrar que mediante el "movimiento" secuencial de las personas por las habitaciones es posible acomodarlo en el hotel. Esto es definir una función $f : N \rightarrow N$ tal que $f(x) = x + 1$ para todo x en N. De esta manera, el huésped de la habitación número 1 pasa a la habitación número 2; el huésped de la habitación número 2 pasa a la habitación número 3, y así sucesivamente. Luego la habitación número 1 queda libre y puede ubicarse al nuevo huésped". Luego, de manera similar se plantea una función $g(x)=2x$ para todo x en N de manera que infinitos huéspedes se muevan a infinitas habitaciones (pares) dejando libres infinitas habitaciones (impares). Lo anterior solo es posible si el individuo considera a los naturales como un objeto y no como un proceso.
Conclusiones del texto: La construcción de conceptos matemáticos relacionados con el infinito tiene bases en las ideas generadas en contextos extra-escolares. En dichas ideas se concibe al infinito sólo en potencia y los docentes debemos guiar a los estudiantes con dichas nociones intuitivas. La aceptación del infinito en acto representa un alto grado de complejidad para los estudiantes. Sin embargo, analizar "situaciones relacionadas con el infinito a partir de la construcción de procesos iterativos infinitos y sus objetos trascendentes, puede darle a un estudiante una herramienta formal que le permita confrontar sus propias creencias sobre el infinito".
Bibliografía citada por el autor:

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa-Fuentes, M. Trigueros y K.Weller

(2014), apos Theory - A framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer.

Asiala, M., A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996),

"A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II",en J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.), cbms Issues in Mathemtics Education, núm. 6, pp. 1-32.

Brown, A., M. McDonald y K. Weller (2010), "Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity", cbms Issues in Mathematics Education, núm. 16, pp. 115-141.

Castro, I., y J. Pérez (2007), Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas, Bogotá, Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Dreyfus, T., y P. Tsamir (2004), "Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets", Journal of Mathematical Behavior, núm. 23, pp. 271-300.

Dubinsky, E., K. Weller, K. Stenger y D. Vidakovic (2008), "Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem", European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 1, núm. 1, pp. 99-121.

Dubinsky, E., K. Weller, M. McDonald y A. Brown (2005a), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis: Part 1", Educational Studies in Mathematics, núm. 58, pp. 335-359. _____________ (2005b), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos analysis: Part 2", Educational Studies in Mathematics, núm. 60, pp. 253–266.

Falk, R. (1994), "Infinity: A cognitive challenge", Theory and Psychology, vol. 4, núm. 1, pp. 35-60.

Fischbein, E. (2001), “Tacit models and infinity”, Educational Studies in

Mathematics, vol. 23, núm. 48, pp. 309-329.

Fischbein, E., D. Tirosh y P. Hess (1979), “The intuition of infinity”, Educational

Studies in Mathematics, vol. 10, núm. 1, pp. 491-512.

Hazzan, O. (1999), “Reducing abstraction level when learning abstract algebra

concepts”, Educational Studies of Mathematics, núm. 12, pp. 71-90.

Lakoff, G., y R. Núñez (2000), Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being, Nueva York, Basic Books.

Lestón, P. (2008), Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares, tesis de maestría no publicada, cicata del ipn, México.

Mamolo, A. (2008), “Accommodating infinity: A leap of imagination”, en S. L. Swars, D. W. Stinson y S. Lemons Smith (eds.), Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Atlanta, GA, Georgia State University, pp. 65-72.

Mamolo, A., y R. Zazkis (2008), “Paradoxes as a window to infinity”, Research in

Mathematics Education, vol. 10, núm. 2, pp. 167-182.

Manfreda, V., y T. Hodnik (2011), "Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity", Educational Studies in Mathematics, vol. 80, núm. 3, pp. 389-412.

Monaghan, J. (2001), "Young peoples' ideas of infinity", Educational Studies in Mathematics, núm. 48, pp. 239-257.

Moreno, L., y G. Waldegg (1991), "The conceptual evolution of actual mathematical infinity", Educational Studies in Mathematics, vol. 22, núm. 3, pp. 211-231.

Martínez, P. (1999), "Paradojas matemáticas para la formación de profesores", Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, núm.

31, pp. 27-35.

Movshovitz-Hadar, N., y R. Hadass (1990), “Preservice Education of math teachers using paradoxes”, Educational Studies in Mathematics, núm. 21, pp. 265-287.

Núñez, R. (1997), “Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales”, Educación Matemática, vol. 9, núm. 1, pp. 20-32.

Roa-Fuentes, S. (2012), El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas, tesis de doctorado inédita, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del ipn, México.

Tirosh, D. (1991), “The role of students’ intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory”, Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education

Library, núm. 11, pp. 199-214.

Tsamir, P., y T. Dreyfus (2005), “How fragile is consolidated knowledge? Ben’s

comparisons of infinite sets”, Journal of Mathematical Behavior, núm. 24, pp. 15-38.

100 Educación Matemática, vol. 26, núm. 1, abril de 2014

Solange Roa Fuentes y Asuman Oktaç

Watzlawick, P., J. Bavelas y D. Jakson (1981), Teoría de la comunicación humana, Herder, Barcelona.

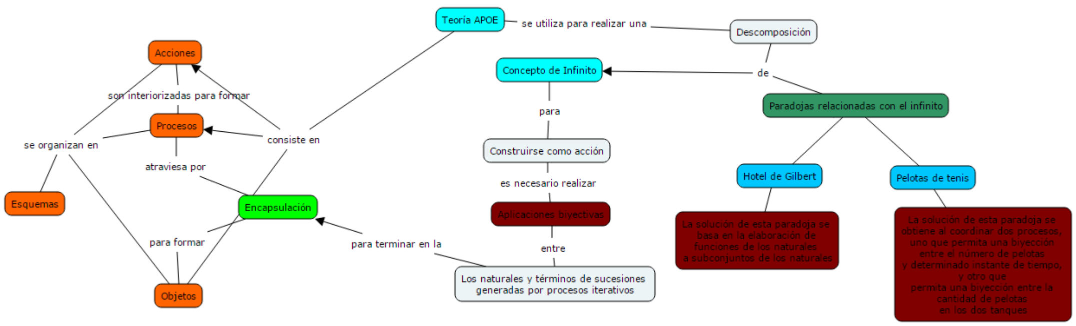
Weller, K., A. Brown, E. Dubinsky, M. McDonald y C. Stenger (2004), “Intimations

of Infinity”, Notices of the ams, vol. 51, núm. 7, pp. 741-750.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.

Fecha en que se elaboró este RAE	30/12/2015

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto:



Comentarios finales:

Este documento resulta de gran utilidad a los autores del presente trabajo dado que presenta un análisis de desarrollos de estudiantes que se enfrentan al infinito actual. Presentando qué tipos de problemas pueden darse en la construcción y comprensión del concepto. Ademáa, las dos paradojas sobre las que se centra el documento podrían llegar a constituir situaciones presentes en la secuencia de actividades que se pretende diseñar.

Título del texto	**El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis.**
Nombres y Apellidos del Autor	Mena Arturo, Mena Jaime, Montoya Elizabeth, Morales Astrid, Parraguez Marcela
Año de la publicación	**2015**
Resumen del texto: Los autores realizan una breve descripción del recorrido epistemológico del infinito, del cual se apoyan posteriormente para afirmar que éste es un obstáculo epistemológico. Posteriormente describen los resultados de realizar una experiencia con distintos grupos de personas, esta experiencia corresponde a cuestionar a las personas sobre la igualdad entre 0.9999….. y 1, luego darles múltiples pruebas de la veracidad de esta afirmación para ver si cambian o no de parecer.	
Palabras Claves	Obstáculo epistemológico, resistencia, infinito actual, epistemología.
Problema que aborda el texto: El infinito potencial y el infinito actual pueden concebirse como proceso y objeto, respectivamente basándose en la teoría APOE. La comprensión del infinito está ligada a	

las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre el conjunto de los números naturales y el infinito como objeto trascendente no se desprende de manera directa del infinito como proceso.
Objetivos del texto: • Realizar un análisis del desarrollo epistemológico del infinito. • Describir experiencias relacionadas con preguntar a diferentes grupos de personas si 0.9999… es igual que 1. • Mostrar los resultados de dichas experiencias. • Determinar si el infinito es un obstáculo epistemológico y si presenta resistencia.
Hipótesis planteada por el autor: Para fomentar una construcción apropiada del infinito es necesario plantar situaciones cuya resolución impliquen enfrentar las limitaciones del concepto. Sin embargo, el infinito como tal representa un Obstáculo epistemológico.
Tesis principal del autor: El infinito constituye un obstáculo epistemológico, que presenta resistencia pues los razonamientos en torno a él se dan desde perspectivas que no han necesitado la aceptación del infinito en acto, es decir, el infinito en acto resulta contra-intuitivo.
Argumentos expuestos por el autor: Un análisis epistemológico del desarrollo del concepto de infinito. Resultados de la aplicación a diferentes muestras de personas, de una experiencia

relacionada con la igualdad entre 0.9999…. y 1.
Conclusiones del texto: • El infinito es un obstáculo tanto epistemológico como didáctico. • El infinito como obstáculo presenta un aspecto ontogenético. • El infinito como obstáculo presenta resistencia a ser superado, a pesar de las pruebas y demostraciones que se le presenten a un individuo, es común que este se resista a aceptarlas. • La didáctica de la matemática, entendida como una disciplina de carácter experimental, aporta información de utilidad para el análisis de esta situación y situaciones análogas.
Bibliografía citada por el autor: Abel, N. H. (1902). *Mémorial publié à l' occasion du centenaire de sa naissance*. J. Dybwad (Ed.). Paris, France: Gauthier-Villars. Aquino, Tomás de. (1274/1966). *Summa Theologiae*. New York, NY: Mc Graw-Hill. Aristóteles. (trans. 1985). *The complete works of Aristotle. The revised Oxford translation*. In J. Barnes (Ed.). New Jersey, United States: Princeton University Press. Arrigo, G., & D'Amore, B. (1993). *Infiniti*. Milano, Italy: Angeli. Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación*

Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (Vol. 6, pp. 1-32). Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Bachelard, G. (1970). *La formation de l'esprit scientifique*, 7ème édition. Paris, France: Vrin.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. doi: 10.1007/BF00314724

Bishop, E. (1975). The crisis in contemporary mathematics. *Historia Mathematics, 2*(4), 507-517.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del Infinito*. D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.

Recherches en Didactique des Mathématiques, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brown, A., McDonald, M. A. & Weller, K. (2008). Step by step: Infinite iterative processes and actual
infinity. In F. Hitt, D. Holton, & P. W. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics*
Education VII (pp. 115-142). Providence, USA: American Mathematical Society.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen*. In A. Fraenkel & E. Zermelo (Eds.). Berlin,
Germany: Springer-Verlag.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista*
Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *6* (1), 27-40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: Una epistemología a través de
la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,*
4(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento
della Matemática. *La Matemática e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Mena, J. & Montalto, M. E. (2010). Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell'asintoto. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *33B*(4), 457-488.

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. En J. Rojas (Ed.), *XXIV Coloquio distrital de Matemáticas y Estadística* (pp. 21-27). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Gaia.

Dauben, J. W. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. New Jersey, United States: Princeton University Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical experience*. London, England: Birkhauser.

Descartes, R. (1643/1991). *The Philosophical writings of Descartes, Vol. III, The Correspondence*.
Cambridge, United States: University Press.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et Histoire*. Paris, France: Cedic/
Fernand Nathan.

Dubinsky, E. (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.),
Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-126). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics.
In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-220).
New York, USA: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria.
Educación Matemática, 8(3), 25-41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some Historical Issues and Paradoxes
regarding the Infinity Concept of Infinity: An APOS analysis, Part 1. Educational Studies in
Mathematics, 58(3), 335-359. doi: 10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some Historical Issues and Paradoxes

regarding the Infinity Concept of Infinity: An APOS analysis, Part 2. Educational Studies

in

Mathematics, 60, 253-266.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne, Suisse: Éditions Peter Lang.

Euclides (trad. 1956). The thirteen book of the Elements (Vol. I, II, III). New York,

USA: Dover.

Fischbein, E. D., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. Educational

Studies in

Mathematics, 10(1), 3-40. doi: 10.1007/BF00311173

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. Educational Studies in Mathematics,

48(2-3),

309-329. doi: 10.1023/A:1016088708705

Galileo. (1638/2010). Dialogues concerning two new sciences. New York, USA:

Cosimo.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las

incoherencias en los

esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 20(1), 87-

113.

Hilbert, D. (1926). Uber das Unendliche. Mathematische Annalen, 95(1), 161-190. doi:

10.1007/

BF01206605

Hipona, Agustín de. (426/1965). La Ciudad de Dios. En J. Morán (Ed.), Obras de San

Agustín

(Vol. XVI-XVII). Madrid, España: La Editorial Católica.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual (pp. 91-111). México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 11, 175-193.

Kline, M. (1980). Mathematics, the loss of certainty. New York, USA: Oxford University Press.

Kline, M. (1983). Euler and infinite series. Mathematics Magazine, 56(5), 307-315.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris, France: Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York, USA: Basic Books.

Lestón, P. (2008). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y

Tecnología

Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lestón, P. (2011). El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la Socioepistemología (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lucrecio, T. (trad. 1985). De la naturaleza de las cosas. Barcelona, España: Orbis.

Maor, E. (1991). To infinity and beyond: a cultural history of the infinite. New Jersey, United States: Princeton University Press.

Mena, A. (2007). Why focusing on representation: from a semiotic to a purely mathematical approach. APEC-Tsukuba International Conference III. Recuperado el 12 de diciembre de 2008 de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php

Montoya, E. (2010). Étude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili. Thèse de Doctorat non publiée, Université Denis Diderot, France, Paris.

Morales, A. (2009). Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones (Tesis

Doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112-2124.

Piaget, J. (1970). Genetic Epistemology. New York, USA: Columbia University Press.

Piaget J. & García R. (1989). Psychogenesis and the history of science. New York, USA: Columbia University Press.

Placek, T. (1999). Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism. Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Platón. (trans. 1969). Diálogos. La República o el Estado. Madrid, España: Ediciones y Distribuciones Antonio Fossati.

Rosado, P. (2004). Resignificación de la Derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Russell, B. (1937). The Principles of Mathematics (2nd Ed.). London, England: G. Alien & Unwin.

Sacristán, A. I. & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate

Representations of Infinity. International Journal of Computers for Mathematical Learning,
13(1), 47-70. doi 10.1007/s10758-008-9127-5.

Sacristán, A. I. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de
exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual (pp. 262-279). D. F., México: Fondo de Cultura Económica.

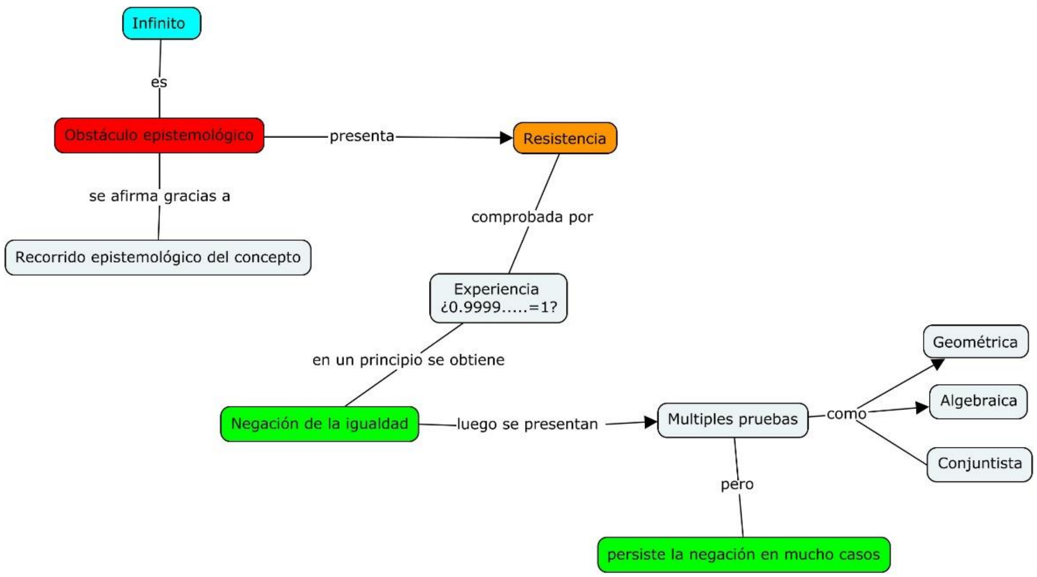
Schoenflies, A. (1927). Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. Acta Mathematica, 50(1),
1-23. doi: 10.1007/BF02421320

Schwarzenberger, R. & Tall, D. (1978). Cognitive conflict and the learning of real numbers and
limits. Mathematics Teaching, 82, 44-49.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistemologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en
Didactique des Mathématiques, 6(1), 5-67.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos e n el estudio del infinito actual. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1(1), 107-122.

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	31/01/2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: 
Comentarios finales:

Título del texto	**Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática**
Nombres y Apellidos del Autor	Cecilia Crespo Crespo
Año de la publicación	No tiene

Resumen del texto: En este documento se presenta una constante reflexión en la que la autora, a partir de algunos elementos de tipo pedagógico y disciplinar en relación a la definición de número irracional, presenta las dificultades que se le presentan al docente en la enseñanza y a los estudiantes en el aprendizaje a la hora de abordar dichos números en el aula de clases.

Se da inicio con la definición que se tiene de número irracional y las propiedades de éste, la cual está construida a partir de la historia donde los pitagóricos se niegan a aceptarlos; porque si fuesen aceptados entonces la armonía del universo, es decir; que la manera en que estaba constituido el universo podía ser expresada como el cociente de dos números enteros, sin embargo cuando se pasa al ámbito de la geometría y los Pitagóricos se encuentran con que la diagonal de un cuadrado de lado 1 es inconmensurable con su lado, se produce una crisis en la comunidad matemática porque se había derrocado una teoría que se suponía ya estaba demostrada, como consecuencia muchos matemáticos hasta el siglo XIX tenía una visión intuitiva de los números, pero esto se superó con la introducción del rigor en matemáticas. Una salida al problema es realizar la demostración de la inconmensurabilidad por medio de la reducción al absurdo realizada por Euclides, sin embargo ésta demostración no tiene muy buena acogida por parte de los estudiantes en el aula.

Una vez realizado este recorrido histórico se acerva que los estudiantes con el primer número que tiene contacto es con π, y por motivo de efectividad se utiliza su aproximación decimal, Después de esto se presenta la metodología; que consiste en discutir acerca de tres diálogos entre estudiantes en el aula de clases, y de los tres diálogos concluye:

- Las limitantes que presenta la calculadora al representar un número con muchos decimales, hace que el estudiante llegue a creer que los irracionales tienen número de cifras finito.
- Los estudiantes tienden a pensar que las diferentes representaciones de un mismo número, determina la culminación del procedimiento cuando no en todos los casos es así.
- Los estudiantes no usan el infinito actual para su vida diaria, si no que se afianzan en los procesos al infinito realizados potencialmente.

Finalmente se hacen unas sugerencias a los profesores:

- Los docentes deben organizar grupos para que esto fortalezca el aprendizaje dentro de la clase.
- El estudiante necesita tiempo para comprender los conceptos de números

racionales e irracionales y el docente debe darle el espacio para dicho fin.	
Palabras Claves	número irracional, enseñanza, aprendizaje, recorrido histórico, inconmensurabilidad, demostración, estudiantes, aproximación decimal, calculadora, infinito actual, infinito potencial.
Problema que aborda el texto: Los estudiantes usan como referencia los números que muestran las calculadoras y por esos se centran en procesos infinitamente potenciales y no existe el infinito actual porque no son capace de utilizarlo en situacinoes de su vida cotidiana.	
Objetivos del texto: Concientizar a la comunidad acerca de la importancia del fortalecimiento del proeso de enseñanza y aprendizaje de los números racionales e irracionales,	
Hipótesis planteada por el autor: Las calculadoras son un obstáculo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números racionales e irracionales, por medio de reflexiones dentro del aula sobre el infinito.	
Tesis principal del autor: Las calculadoras hacen que los estudiantes confundan la marcada diferencia que existe entre los números racionales e irracionales.	
Argumentos expuestos por el autor: • En la historia del desarrollo y evolución de los números irracionales se presentaron muchas dificultades que pueden equipararse con las situaciones que se presentan en el aula. • Desde algunos diálogos de los estudiantes se puede evidenciar que hay un	

afianzamiento en procesos infinitamente potenciales.

Conclusiones del texto:

- Los conceptos relacionados con infinito, en este casos números raccionales e irracionales toman su tiempo para ser asimilados y el maestro debe tener paciencia y darle ese tiempo de asimilación al estudiante.
- Las calculadoras terminan siendo un obstáculo en algunas partes del proceso de enseñanza y aprendizaje de los números racionales e irracionales.

Bibliografía citada por el autor:

Arredondo Velásquez, J.; Zúñiga Becerra, B. y Torres Hernández, J. (2004). *Los números reales y*

procesos infinitos en el bachillerato. En L. Díaz (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática

Educativa, Volumen 17. México: Clame (pp.918-923).

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista*

Latinoamericana de Matemática Educativa, 6 (1), 27-40.

Crespo Crespo, C., Farfán Márquez, R. (2005). Una visión de las argumentaciones por reducción

al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Matemática*

Educativa, 8(3), 287-317.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la* *socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C.; Homilka, L., Lestón, P. (2008). Los números irracionales: reflexiones acerca de la construcción del concepto de irracionalidad en el aula. Ponencia aceptada para su presentación en el *VI Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM*. Guadalajara (México).

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

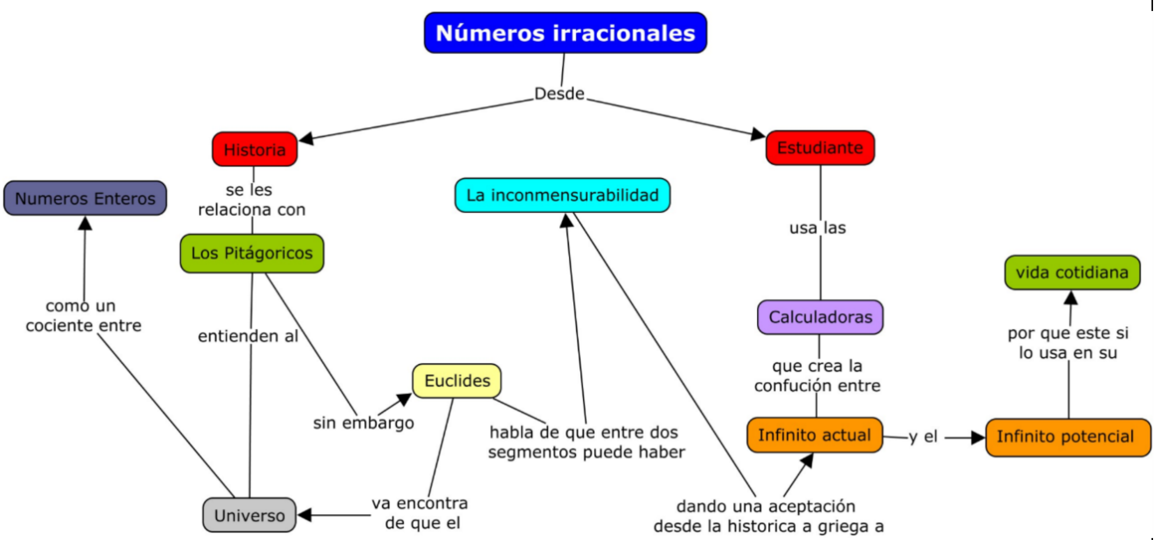
Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 259-272.

Vicario, V., Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. el caso de la irracionalidad de 2 y las funciones de la demostración. *Comunicaciones presentadas al IX Simposio SEIEM, Córdoba*. Recuperado el 27/7/2008, de: www.uco.es/~ma1mamaa/Simposio_Cordoba/3-Vicario_Carrillo.pdf

Nombre y apellidos de quien elaboró este RAE	Nelson Yampier Agudelo Peñuela - Diego Fernando Escobar Slamanca.
Fecha en que se elaboró este RAE	20 de enero 2016

Imagen (mapa conceptual) que resume e interconecta los principales conceptos encontrados en el texto: (se encuentra al final del RAE)



Comentarios finales:

- Es muy interesante como los elementos que rodean a los números racionales se relacionan directamente con la nocion que tiene el grupo de estudiante acerca del infinito y como lo utilizan en sui vida cotidiana.
- La experiencia narrada es un insumo para tomar conciencia frente al proceso de enseñanza y aprendizaje de los números racionales e irracionales, además muestra en qué momentos utilizar la calculadora e identificar en qué momento ésta empieza a ser un obstáculo para la enseñanza y comprensión de un proceso

al infinito.