ANÁLISIS DE ENUNCIADOS RELATIVOS A LA PROPORCIONALIDAD COMO PARTE DEL CAMPO CONCEPTUAL MULTIPLICATIVO, EN CARTILLAS DE ESCUELA NUEVA PARA GRADO QUINTO

Autor:

ZULAY NAYIBY PEÑAFIEL RAMOS (1157714)

UNIVERSIDAD DEL VALLE -SEDE NORTE DEL CAUCA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTANDER DE QUILICHAO

2017

ANÁLISIS DE ENUNCIADOS RELATIVOS A LA PROPORCIONALIDAD COMO PARTE DEL CAMPO CONCEPTUAL MULTIPLICATIVO, EN CARTILLAS DE ESCUELA NUEVA PARA GRADO QUINTO

Autor:

ZULAY NAYIBY PEÑAFIEL RAMOS (1157714)

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTORA:

Mg. JENNIFER SALGADO PIAMBA

UNIVERSIDAD DEL VALLE -SEDE NORTE DEL CAUCA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTANDER DE QUILICHAO

2017

RESUMEN

El presente trabajo de grado se centra en el análisis de enunciados-problema relativos a la proporcionalidad como campo conceptual multiplicativo, en las cartillas de Escuela Nueva para grado quinto, el trabajo se basa en la teoría que propone Vergnaud (1990) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, especialmente en los problemas característicos del isomorfismo de medida, en el cual interviene el concepto de proporción y proporcionalidad directa.

Mediante la teoría semiótico cognitiva de Duval (2004) se realizó el análisis de enunciados-problema que aparecen en el texto de Escuela Nueva, acerca de los posibles registros semióticos y transformaciones a la luz de las estructuras multiplicativas.

PALABRAS CLAVES: proporcionalidad directa, estructura multiplicativa, enunciados problema, representaciones semióticas, conversión.

Tabla de contenido

Índice de ilustraciones

Introducción

Las matemáticas como parte fundamental de una formación de calidad, son enseñadas desde los primeros años de escolaridad, los cuales son considerados como las etapas más relevantes para una formación valiosa a largo plazo. Dentro de esta área existe, y de manera creciente, una preocupación por investigar aquellos fenómenos que inciden en el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, específicamente la proporcionalidad, como parte importante de las matemáticas para el desarrollo del pensamiento matemático, y para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, es considerado como un tema de investigación primordial, por las constantes dificultades que evidencian los estudiantes a la hora de resolver enunciados-problema que involucren dicho concepto.

En este trabajo se busca analizar los enunciados-problema[1] en las cartillas de Escuela Nueva, correspondiente al grado quinto, en lo referente a la proporcionalidad; en especial la proporcionalidad directa. También concierne a este proyecto traer a consideración los requerimientos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional mediante los Lineamientos Curriculares Nacionales MEN (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para la enseñanza de este concepto.

En este sentido, el presente trabajo se caracteriza por centrarse en la propuesta que desde hace algunos años, realiza el Ministerio de Educación Nacional (MEN) mediante las cartillas de Escuela Nueva, para mejorar la calidad de la Educación Básica en las zonas rurales. Dicha propuesta es

[1] Un enunciado- problema se entiende como la producción de un enunciado que invita al análisis cognitivo de la relación entre datos conocidos y desconocidos, cuyas relaciones de base dan cuenta de ciertas clases de problemas que requieren de un campo de posibilidades para llegar a su solución .

una guía que intenta acompañar al maestro en su proceso de enseñanza, y ésta debe responder a las necesidades del entorno, sociales y del mismo Ministerio, por lo tanto, debe considerarse como parte importante en la manera cómo aprenden los estudiantes.

También es de interés analizar los enunciados- problema en relación con algunos elementos semióticos propuestos en la teoría de Duval (2004), tales como: los registros de representación y las actividades cognitivas, en especial la conversión. Debido a que la enseñanza de estos aspectos no es explicita, pero es primordial a la hora de la realización de la actividad matemática y de su comprensión, por tal motivo, es necesario prestar atención especial.

De esta manera, se pretende observar algunos rasgos acerca de cómo se presentan estos conceptos en grado quinto, teniendo en cuenta que la proporcionalidad pertenece al campo de las estructuras multiplicativas[2] de Vergnaud, en tanto relación cuaternaria, la cual permite trabajar la razón y la proporción como relación entre cantidades, números o magnitudes; y no simplemente como una división indicada que tiende a confundir a los estudiantes con otros conceptos como la fracción.

Con el fin de llevar una línea de trabajo y observar de manera puntual los objetivos, el trabajo se divide en cinco capítulos, en el primero se hace una descripción de la problemática, mediante la cual se llega al planteamiento del problema, seguido del diseño de objetivos que se justifican mediante las orientaciones curriculares nacionales, los libros de texto y la teoría de las representaciones semióticas.

---

[2] Se entiende por estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren de una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. (Vergnaud, 1990, p.8).

El segundo capítulo consta del marco de referencia conceptual, en el que se presentan los referentes a considerar para el desarrollo del trabajo, y en el que se apoya gran parte de problemática del trabajo, debido a las posturas que genera analizar las mismas.

En el tercer capítulo se plantea los enunciados-problema seleccionados de la cartilla, específicamente de la sección dedicada a la proporcionalidad directa, con el fin de acercar al lector con la metodología de trabajo. También se expone una caracterización de los enunciados-problema según su clasificación en los distintos tipos de problema multiplicativos a partir de la relación cuaternaria, esto con el fin lograr potencializar los análisis propios de la estructura multiplicativa y la composición de cantidades extensivas e intensivas inmersas en esta estructura.

El cuarto capítulo cierra una serie de análisis de cada una de las situaciones-problema presentadas en el capítulo tres, con la distinción de vincular algunos elementos semióticos necesarios a la hora de buscar consolidar una relación entre conceptos mediante el uso de distintos registros de representación.

Al finalizar se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo de este trabajo, junto con algunas recomendaciones observadas y obtenidas mediante la práctica conseguida al escribir el cuerpo del trabajo.

CAPÍTULO I.

DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Actualmente la educación colombiana se centra en desarrollar en sus estudiantes un pensamiento matemático, crítico, progresivo y continuo, que evidencie la adquisición de un conocimiento verdadero, mediante la relación entre conceptos matemáticos, (MEN, 1998). En este sentido, se presenta una problemática relacionada con la enseñanza de la proporcionalidad directa en relación con las estructuras multiplicativas de Vergnaud.

1.1 Planteamiento del problema

Una de las problemáticas más comunes en la Educación Matemática tiene que ver con las nociones que se tienen de los conceptos matemáticos y las dificultades que subyacen a estos, debido a su naturaleza abstracta. Esto, provoca inconvenientes en el aprendizaje de las matemáticas, y obstaculiza una visión más amplia de las relaciones entre conceptos matemáticos; relaciones que permiten adquirir habilidades para dominar un concepto y dar solución a cuestiones propias del contexto cotidiano. En este sentido Espinoza (2012) expone que “para dominar un concepto se requiere dominar otros más, pues las situaciones que involucran ese concepto, siempre estarán ligados a otros” (p.15). Por tal motivo, proponer situaciones significativas que permitan relacionar los conceptos, es una puesta de los más recientes programas de matemáticas en Colombia (MEN, 1998).

Actualmente, el currículo de matemáticas ha puesto la mirada en el desarrollo del Pensamiento lógico-matemático, en la integración de los diferentes procesos matemáticos y en el desarrollo de competencias en Matemáticas, como parte fundamental para el progreso de una nueva visión del conocimiento matemático. Este enfoque de la educación permite estructurar y actualizar el currículo, integrando varios elementos que permitan un aprendizaje significativo a partir de situaciones del contexto.

En coherencia con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) que direccionan y aportan a la construcción de una propuesta curricular, que contribuya a la formación de educandos con los conocimientos suficientes, para responder a las necesidades sociales y económicas del país. La presente investigación reconoce que en la actualidad la sociedad requiere de personas con un pensamiento investigativo, interpretativo, y argumentativo, entren otras; para solventar las crecientes necesidades sociales.

Tanto los estándares como los lineamientos muestran a grandes rasgos la estructura que organiza el desarrollo de los distintos tipos de pensamiento, que se integran dentro del currículo, los cuales evidencian la importancia de establecer relaciones entre los conceptos matemáticos, como la razón y la proporción; que se muestran como unos de los más elusivos a la comprensión de la teoría de la proporcionalidad al trabajarse de manera articulada (Perry P. , Guacaneme, Fernandez, & Andrade, 2003).

Considerando que la proporción es una de las relaciones que le da vida a la razón, esta debe permitir establecer cuándo dos elementos que conforman una razón, guardan la misma relación que otros que configuran otra razón Perry *et al.* (2003). Por tanto, se reconocerá de aquí en adelante que la razón y proporción, pueden entenderse como una relación, en la cual la proporción involucra la razón; de aquí en adelante para referirse a estos temas se usara únicamente proporción.

En este sentido, la proporción y la proporcionalidad directa como herramienta para comprender situaciones de la vida cotidiana, constituyen un ámbito para desarrollar el Pensamiento Numérico y Sistemas de Numeración, dado que este pensamiento intenta favorecer el desarrollo de habilidades de tipo conceptual, en torno a los métodos de cálculo, las propiedades de las operaciones aritméticas y las relaciones entre ellas. Relaciones de las cuales parte la naturaleza de la proporción en los primeros años de escolaridad, ya que la proporción parece no tener utilidad si para ella no se pueden definir operaciones y relaciones. Perry *et al.* (2003).

Una manera de ver y enseñar la proporción a partir de relaciones entre conceptos de una manera articulada, y que puede iniciarse desde los primeros años de escolaridad, es con base a Vergnaud (1990) en su teoría de los campos conceptuales. Esta teoría da cuenta de procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas y multiplicativas, en las cuales se caracterizan las operaciones aritméticas y sus relaciones. Según Espinoza (2012) la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud se entiende como:

> Teoría cognitiva fundamentada en que el aprendizaje de un concepto es un proceso lento y que para que se dé, se requiere el dominio de un conjunto de situaciones entrelazadas donde participan otros conceptos que en conjunto forman proposiciones, todas ellas pertenecientes a un mismo campo conceptual cuyo dominio se evidencia cuando en el individuo se ha construido un buen esquema de asimilación para enfrentar situaciones de dicho campo (p.15).

Para Vergnaud (1990) el conocimiento está organizado por campos conceptuales. Un campo conceptual es un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta. En este sentido, Vergnaud (2003) propone en su teoría, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y el de las estructuras aditivas. El primero encierra todas aquellas situaciones y problemas cuyo estudio las identifica como proporciones simples o compuestas, y que por lo tanto para ser abordados requieren de la multiplicación, la división o ambas operaciones. (Espinoza, 2012, p.18). El segundo, son todas aquellas situaciones en las que se involucra una suma o una resta. El centro del presente trabajo se da en torno al campo conceptual de las estructuras multiplicativas, pues en este campo se involucra la proporcionalidad directa mediante el isomorfismo de medida.

De acuerdo con Vergnaud (2003) existen dos relaciones de tipo multiplicativo, el *isomorfismo de medidas* que consiste en presentar la multiplicación como una relación que involucra cuatro cantidades, de las cuales dos pertenecen a un mismo espacio de medida y las dos restantes a otro espacio de medida. La otra relación es el *producto de medidas*, que consiste en una relación entre tres cantidades, de las cuales una es producto de las otras dos.

Estas relaciones, son el punto de partida para la mayoría de los problemas de tipo multiplicativo en la escuela, en especial la categoría de relaciones multiplicativas presentada como isomorfismo de medida, la cual permite caracterizar la proporcionalidad directa como parte de la estructura multiplicativa, y posteriormente le permitirán al estudiante relacionar y trabajar de manera articulada la multiplicación, división, la proporción, la proporcionalidad directa, etc. Vergnaud (2003). La estructura multiplicativa que propone Vergnaud comprende cuatro cantidades, mediante las cuales es posible evidenciar diferentes tratamientos y relaciones que posibilitan la comprensión de la proporción, como relación entre números y cantidades; aspectos que no son tan evidentes para niños que identifican en la multiplicación solo tres cantidades $a, b\ y\ c$ lo cual desde la teoría de los campos conceptuales se considera como una representación de la multiplicación poco adecuada, para lograr que desaparezca el vínculo que los estudiantes crean entre la razón y la fracción, identificándolos como un mismo objeto matemático que cumple las mismas funciones.

Esto significa en palabras de Espinoza (2012) que ahora se pretende, a partir de la teoría del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, que la multiplicación sea además una relación de cuatro términos, pues bajo el modelo inicial de significación (que es insuficiente), se esconde una relación de proporcionalidad, modelo ausente por demás en el sistema educativo en el área de las matemáticas.

De acuerdo con esto, preparar a los estudiantes para el estudio formal de la proporción y la proporcionalidad directa desde los primeros años de escolaridad, es una puesta desde los Estándares (2006) y Lineamientos (1990), los cuales ratifican la importancia de presentar problemas de diferentes grados de dificultad, que involucren distintos procedimientos para llegar a una respuesta, a partir del esquema de la relación cuaternaria.

En relación con lo anterior, los Estándares (2006) proponen que para todos los conjuntos de grado, y en particular al terminar el ciclo cuarto-quinto, se debe trabajar a partir de la integración de los distintos pensamientos y de las situaciones problema que involucren las diversas representaciones de un concepto matemático. La multiplicación es uno de los conceptos matemáticos que admite diversas aproximaciones y que se inicia en algunos casos extraescolarmente, pero que a través de situaciones significativas se va construyendo un conocimiento más formal, flexible y dinámico, que el estudiante debe evidenciar al terminar grado quinto. De acuerdo con esto, se realizó el análisis de enunciados -problema de la cartilla de escuela nueva para grado quinto.

El eje principal para presentar las relaciones multiplicativas, es el uso y aplicación de enunciados-problema que sean propios del contexto. Según Munera, J. & Obando, G. (2003) citado en (Gobernacion, Antioquia, 2005) una situación problema se entiende como el:

> Contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación. (p. 183)

En otras palabras, el trabajo que ahora se propone a partir de las estructuras multiplicativas en la escuela debe contribuir a la adquisición del pensamiento numérico y para ello, el contexto en el cual se desarrollen las situaciones -problema es una condición importante para el aprendizaje.

A través de las situaciones- problema con las cuales los estudiantes se enfrentan, podrán desarrollar un pensamiento matemático que le permita conocer el sentido del concepto que se les presente, por ello, la escuela debe aportar al diseño y planificación de dichas situaciones.

Dado que solo la parte simbólica matemática no es la única que influye en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas, sino también los enunciados y la manera en que estos presentan el concepto, es de vital importancia poner atención sobre este aspecto. Por lo que se considera que el libro de texto y los contenidos que en él se presentan, comprometen la enseñanza del maestro[3].

La escuela en general debe inquietarse por los contenidos matemáticos que se presentan en el libro de texto. Aunque los textos escolares pretenden responder a los planteamientos curriculares del MEN, se han encontrado algunos indicios de que es muy poco coherente la correspondencia

[3] Por tal motivo de aquí en adelante le daremos como nombre a esta relación, enunciado-problema

entre los libros de texto y algunos aspectos de la nueva propuesta curricular para el área de matemáticas, Guacaneme (2002). Análisis realizados respecto a temas centrales referente a la proporción y proporcionalidad, han puesto de manifiesto que ni siquiera en los diagramas de procesos que se presentan en los libros de texto permiten evidenciar relaciones de continuidad entre los temas, aspectos que desde los lineamientos se consideran importantes para el aprendizaje.

Para identificar la correspondencia de los textos con los parámetros establecidos por el MEN (2006), el texto que se utilizará para tomar los enunciados- problema, es una propuesta de este llamada Modelo Educativo Escuela Nueva para grado quinto, esta propuesta hace parte de los programas del Ministerio para mejorar la calidad de la educación en las zonas rurales del país.

Como un elemento a considerar para el análisis de la propuesta de las cartillas del Ministerio y que permitirán realizar el análisis de los enunciados, referentes a la proporción como parte del campo conceptual multiplicativo; hace parte de la teoría semiótico- cognitiva Duval (2004), la cual plantea que hay dos características típicas de toda actividad matemática. Primero, los registros de representación que son los que permiten cumplir tres actividades cognitivas, a saber; la formación, el tratamiento y la conversión. La particularidad del aprendizaje de la proporción hace que estas actividades requieran de la utilización de sistemas de representación distintos a los del lenguaje natural. Segundo, los objetos matemáticos no son nunca accesibles por la percepción como en otras disciplinas, lo cual complejiza el quehacer matemático e impide la comprensión de los conceptos matemáticos que admiten diversas representaciones, como en el caso de las estructuras multiplicativas, entre otras.

En lo que concierne a la teoría de la proporcionalidad, específicamente a la proporcionalidad directa son diversos los registros de representación, que permiten que los objetos matemáticos sean accesibles por ejemplo; al trabajar con enunciados- problema se dispone tanto para el enunciado como para la solución: el lenguaje natural, la escritura algebraica, los esquemas sagitales, el cuadro cartesiano, entre otras. Dichas representaciones permiten que el estudiante conozca desde diferentes perspectivas la representación de un mismo objeto y amplié su campo de conocimiento.

A partir de las características mostradas, el problema se identifica y se muestra a través de la siguiente pregunta.

¿Cómo el análisis semiótico de enunciados- problema propuestos en las cartillas de Escuela Nueva para grado quinto, sobre la proporcionalidad directa, establece una relación con la estructura multiplicativa?

2. Objetivos

2.1 Objetivo General

Analizar enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa, como parte de la estructura multiplicativa en las cartillas de Escuela Nueva para grado quinto, en relación con algunos elementos semióticos.

2.2 Objetivos Específicos

- Rastrear los enunciados- problema presentes en las Cartillas de Escuela Nueva, relativos a la proporcionalidad directa.
- Realizar una clasificación de los tipos de problema encontrados, de acuerdo con la estructura multiplicativa.
- Identificar las transformaciones de registros de representación semióticos inmersos en los enunciados -problema relativos a proporcionalidad directa.

3. Justificación

Los conceptos relativos a la proporción y la proporcionalidad directa se consideran como temas importantes para comprender la teoría de la proporcionalidad, de ahí el hecho de que sea un tema central para el currículo de matemáticas, y que su enseñanza inicie desde los primeros años de escolaridad. En Ruiz y Valdemoros (2006) y Ruiz y Lupiañez (2009) se señala que, en el proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos, referentes a la proporción y proporcionalidad directa, se evidencian algunas dificultades debido a que la naturaleza de estos conceptos es enseñada de manera errada en la escuela, puesto que es uno de los temas más difíciles de comprender, tanto para los profesores como para los estudiantes.

Bajo estas consideraciones, en los Lineamientos Curriculares, se presenta la multiplicación como una forma de trabajar el razonamiento proporcional desde los primeros años de escolaridad, y para ello, la categoría del isomorfismo de medida es la perspectiva que permite presentar la multiplicación dentro de una situación que involucre la proporcionalidad directa. De acuerdo con lo anterior, es pertinente traer a consideración, la propuesta curricular para el área de matemáticas del Ministerio, esta puntualiza las necesidades de la educación colombiana y propone una mirada acerca de la enseñanza de la proporcionalidad (proporcionalidad directa) desde los diferentes tipos de pensamiento, en los cuales se centra el desarrollo y la comprensión de la naturaleza de dicho concepto.

Es necesario poner de manifiesto que hay diversas problemáticas asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad directa desde la manera en que se presentan los enunciados -problema en los libros de texto. También, es importante para el desarrollo de este trabajo estudiar el tratamiento que se le da a la proporcionalidad directa desde los enunciados- problema propuestos en un libro de texto, propio del ministerio, como lo son las cartillas de Escuela Nueva para grado quinto. De igual manera, se menciona la importancia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de la proporcionalidad.

3.1 Orientaciones curriculares nacionales

Los Lineamientos Curriculares MEN (1998), en tanto referentes vigentes, constituyen una guía para llevar a cabo diseños curriculares para el área de matemáticas. En ellos se plantea que el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos dentro y fuera del ámbito escolar. De esta manera, los Lineamientos brindan orientaciones en torno a qué y cómo enseñar, y a qué y cómo evaluar (Ospina y Salgado, 2011, p. 11).

Los lineamientos proponen tres elementos a considerar que permiten estructurar el currículo de matemáticas, estos son los *conocimientos básicos*, los cuales tienen que ver con procesos específicos que se desarrollan en el pensamiento matemático; *los procesos generales* presentes en toda actividad matemática, y *el contexto* de aprendizaje de las matemáticas, que se caracteriza según el contexto inmediato, todo lo que tiene que ver con el entorno físico, el contexto escolar y extraescolar.

Dada la importancia de los Lineamientos y de los elementos que allí se señalan, se propone abordar la proporcionalidad directa desde los diferentes pensamientos en los que este concepto cobra sentido, y mediante las primeras comprensiones que se pueden obtener acerca de este concepto desde la enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida.

En los Lineamientos se enfatiza que el desarrollo del pensamiento numérico requiere, tanto del sentido numérico como del sentido operacional, y la comprensión del concepto de las operaciones. En particular, la multiplicación es señalada como una de las operaciones con mayor grado de dificultad debido a las múltiples aproximaciones que parten de su estructura, y principalmente porque en la multiplicación se trabaja con cantidades de distinta naturaleza, contrario al caso de la suma y la resta.

Según el MEN (1998) la multiplicación se puede ejemplificar a través de diferentes situaciones, por ejemplo, como factor multiplicante, adición repetida, como razón y como producto cartesiano; estas son formas de trabajar dicho concepto, pero en los niños se evidencian serias dificultades para relacionarlas con éste y con alguna otra operación. Así, se considera que:

> Las relaciones entre operaciones se amplían en la medida en que los operandos aumentan desde números naturales hasta números racionales. Cuando se exploran los números racionales, es natural explorar y utilizar relaciones adicionales, tales como aquellas que se establecen entre la división y la multiplicación (p.75)

De acuerdo con ello, es necesario que en la escuela los niños puedan enfrentarse con situaciones en las cuales involucren diversos sentidos y significados acerca de la multiplicación. Una forma de entrelazar la multiplicación con otros conceptos es enseñarla mediante la relación cuaternaria, en dicha relación emerge la gran mayoría de problemas de tipo multiplicativo, debido a que intervienen cuatro cantidades en lugar de tres, como en el algoritmo de la multiplicación, y esto permite relacionar dos cantidades de acuerdo con una medida común sin dejar de lado la relación que guardan las cuatro cantidades entre sí. Por ello Vergnaud (2003) considera que la relación cuaternaria es importante para introducir la multiplicación en la escuela, de tal manera que esta permita reconocer la noción de razón, de proporción, de proporcionalidad directa, de función lineal, entre otras.

Debido a la importancia que tiene enseñar la multiplicación para abordar otros conceptos, esta es enseñada mediante los distintos sistemas numéricos, pero una parte de ella solo se aborda al iniciar el estudio de los racionales cuando se establecen relaciones como mayor que, menor que, más grande que, menos grande que MEN (2006), desligando las propiedades y reglas operatorias de la multiplicación para reducirlas a un mero algoritmo. Así pues, los lineamientos proponen que el avance del pensamiento numérico, requiere para su desarrollo de todos los sistemas numéricos, pero también de otros sistemas presentes en los demás pensamientos, y de la misma manera es necesario que la multiplicación se aborde en la escuela. De esta forma la proporcionalidad directa es posible abordarla en los primeros años de escolaridad en relación con la multiplicación vista como isomorfismo de medida.

Además de este pensamiento, se encuentran otros pensamientos, como el métrico y el variacional que dan cuenta del desarrollo de competencias dentro del campo multiplicativo.

Al referirse al pensamiento métrico es necesario introducir los sistemas métricos, los cuales permiten cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos y en las reacciones de los objetos externos a nuestras acciones MEN (1998).

La importancia de este pensamiento radica en que, no solo se reduce a una asignación numérica, sino que más bien éste debe permitir la exploración y comprensión de las magnitudes y los procesos de medición. Si bien es cierto que, la proporción alude al uso de magnitudes para cuantificar datos y establecer relaciones y comparaciones, también es cierto que no siempre es necesario utilizar medidas para establecer relaciones entre los objetos, por ejemplo, Obando (2015) refiere que:

> En su forma más general, el proceso de medir implica que dadas dos cantidades se determine la razón entre ellas, es decir, definir cuántas veces está contenida la cantidad menor en la mayor,

> o definir cuánto es la cantidad menor de la mayor. En este sentido dadas dos cantidades, el proceso de medir implica tomar una de las cantidades como unidad, y determinar la razón que la otra cantidad tiene con esa que se ha tomado como unidad. (p.154)

Generar tales oportunidades de reflexionar en los beneficios de adquirir pensamiento métrico, requiere plantear situaciones en las que no solo se recurra a utilizar magnitudes numéricas, sino que también se explore el carácter no numérico de los objetos matemáticos y para ello la proporcionalidad permite verificar uno de los tantos casos en que el pensamiento métrico trabaja la parte cuantitativa, no numérica. De acuerdo con (Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández, 2003).

> Entre las longitudes, amplitudes y superficies se pueden definir razones, establecer proporciones y verificar la existencia de proporcionalidad sin recurrir a sus medidas. Por ejemplo, se podría desarrollar un trabajo de proporcionalidad geométrica con los segmentos de tal suerte que sea posible establecer razones entre las longitudes de los segmentos, se pueden verificar si dos razones entre las longitudes de los segmentos forman una proporción, si dos conjuntos de longitudes de segmentos son proporcionales (p.26).

Desde esta perspectiva los procesos de medición y la unidad de medida que permite hacer estimaciones no son inmediatos, más bien requiere de tiempo y acompañamiento para seleccionar de manera correcta un procedimiento a seguir.

De acuerdo con lo anterior, la proporcionalidad directa vista como isomorfismo de medida, requiere para su conceptualización de los procesos de medición, pues es un concepto que permite comparar y cuantificar magnitudes, establecer covariaciones entre espacios de medida y cuantificar tales variaciones (Ospina y Salgado, 2011, p. 16).

Como se ha mencionado anteriormente, otro de los pensamientos en el cual la proporcionalidad directa cobra sentido, es en el Pensamiento Variacional; en dicho pensamiento se trabajan la variación y el cambio, estos conceptos se aprecian en el contexto de la vida diaria y en el contexto propio de las matemáticas, permite establecer relaciones de dependencia o no dependencia entre variables; además promueve actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

En MEN (1998) se destacan algunas estructuras conceptuales en los que se desarrolla el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Entre ellos está el continuo numérico, la función como dependencia, las magnitudes, el álgebra en su sentido simbólico y los modelos matemáticos de tipos de variación como la estructura aditiva, multiplicativa, la variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. Todos estos conceptos, métodos y procedimientos deben permitir que la variación cobre sentido en situaciones de la matemática y de la vida diaria que involucren fenómenos de cambio y variación.

La estructura multiplicativa es uno de los modelos matemáticos de variación que permite desarrollar razonamiento multiplicativo dentro de un contexto de variación proporcional que en una etapa más avanzada se consolida en una base fundamental para el estudio del cálculo.

De acuerdo con MEN (1998) en los primeros años de escolaridad el estudio de la variación puede iniciarse con los patrones aditivos y multiplicativos dentro de un contexto numérico y también geométrico. Particularmente, los patrones multiplicativos permiten evidenciar relaciones entre cantidades del mismo o diferente tipo. Por ejemplo, las escalas pueden utilizarse como herramienta para iniciar el estudio de la variación de la mano de la proporcionalidad utilizando como elementos de enseñanza las fotografías, las fotocopias reducidas y las representaciones pictóricas.

Definir una relación entre razones le da vida y utilidad a la razón; a este respecto vale la pena pensar en que la proporción es una de tales relaciones Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández (2003). En este sentido, Ospina y Salgado (2011) proponen que el trabajo escolar que incorpore dicha perspectiva puede asumir el estudio de las relaciones de covariación a la luz del análisis de situaciones de proporcionalidad directa e inversa.

Para los intereses del presente trabajo solo se tendrá en cuenta la proporcionalidad directa, pues es el que mejor caracteriza la relación cuaternaria y la variación entre espacios de medida.

Por su parte desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, como uno de los màs importantes referentes a nivel de la Educacion colombiana, plantea unos parametros que direccionan la educacion hacia un nivel optimo de calidad, enfocados en el desarrollo de competencias con el fin de superar niveles de complejidad cada vez mas altos, MEN (2006).

Segùn los intereses del presente trabajo se hace necesario traer a consideracion los estandares que orientan la enseñanza de la proporcionalidad directa en el conjunto de grado Cuarto-Quinto, y que permiten estructurar la propuesta del modelo eductativo Escuela Nueva.

Los estandares se resumen en la siguiente tabla de acuerdo con el conjunto de grado y a los pensamientos mencionados en parrafos anteriores.

Estandares basicos de competencias en matematicas	
C U A R T O A Q U I N T O	**Pensamiento Numerico y Sistemas Numericos**
	☑ Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. ☑ Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
	Pensamiento Metrico y Sistemas de Medida
	☑ Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, area, volumen, capacidad, peso y masa, duracion, rapidez, tempertaura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analiticos
	☑ Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varian en el tiempo con cierta regularidad en situaciones economicas, sociales y de las ciencias naturales.

Ilustración 1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas relacionados con la proporcionalidad directa en grado quinto. Tomado de MEN (2006)

Los estándares mencionados en la ilustración 1, establecen que la proporcionalidad se debe abordar teniendo en cuenta la base de las estructuras multiplicativas, y esto se refleja en relación con los tres pensamientos, por tal motivo, es de interés para este trabajo acentuar posición acerca de lo que se propone desde los estándares para la enseñanza de la proporcionalidad directa en la escuela teniendo en cuenta situaciones -problema que partan de la estructura multiplicativa.

Los elementos delineados por los Lineamientos y Estándares en cuanto a los cinco tipos de pensamiento, y en especial al pensamiento Numérico, Métrico y Variacional, convergen en que la enseñanza de conceptos como la proporcionalidad directa, función lineal, proporción, variación, calculo, etc. Puede partir de situaciones multiplicativas como las propone Vergnaud (2003) y de manera particular para el caso de la proporcionalidad directa mediante el isomorfismo de medidas.

3.2 Desde los libros de texto

El libro de texto considerado como un valioso instrumento educativo para la labor docente, ha permanecido por muchas décadas integrado en el aprendizaje de los estudiantes en las instituciones públicas y privadas de Colombia. Es uno de los medios con más impacto en el trabajo docente (de manera implícita), debido a la propuesta de contenidos, diseño de objetivos, las actividades de evaluación, tareas, estrategias didácticas y pedagógicas que traen consigo los libros de texto Arbeláez, Arce, Guacaneme, y Sánchez (1999).

Si bien es cierto, que hoy en día hay gran variedad de textos producidos por diferentes editoriales, que son diseñados mediante estudios que intentan corresponder a las necesidades sociales de los usuarios que pueden acceder a ellos; también es cierto que existe una gran población estudiantil que no tiene la posibilidad de acceder a libros de calidad que les posibilite el desarrollo de competencias de aprendizaje de acuerdo con su contexto, en palabras de Arbeláez *et al* (1999) sostienen que en un texto bien diseñado puede contribuir a facilitar y hacer más eficiente el trabajo del profesor y de los estudiantes y a mejorar la calidad de la educación.

El MEN (2006) con el propósito de brindar una cobertura especial a la población acentuada en las zonas rurales de Colombia y que no cuenta con este importante recurso, ha dispuesto de manera gratuita una propuesta pedagógica llamada Cartillas de Escuela Nueva, que de alguna manera contribuya a una mejor formación y apoye los procesos de enseñanza. Teniendo en cuenta para el diseño de estas guías los actuales referentes de calidad como: los Lineamientos Curriculares

(1998), Estándares Básicos de Competencias (2006), orientaciones Pedagógicas y Decreto 1290/09). Por lo cual la cartilla proporciona información científica de la mano de variadas experiencias que dotan de significado y sentido los conceptos matemáticos a partir de las ilustraciones y situaciones presentadas, de acuerdo con Arbeláez *et al* (1999)

> Además de ser portadores de información científica, los libros de texto transmiten y forman valores de manera explícita o implícita. Los valores están presentes no sólo en lo que se dice, sino en lo que se deja de decir, en la forma como se lo dice y aun en el diseño gráfico, la ilustración y la misma presentación física del libro (p. 7)

Las cartillas Escuela Nueva para grado quinto, es un modelo educativo diseñado por el MEN con el apoyo de Corpoeducacion y el comité de cafeteros de Caldas, con el objetivo de garantizar una educación de calidad enfocada al desarrollo de competencias en Matemáticas. Este proyecto se lleva realizando desde 1997 y a lo largo de 13 años se han integrado nuevas propuestas que sirvieron de guía para la edición del 2010. La edición 2010 incluye la propuesta teórica de la pedagogía activa y una metodología en la cual el profesor es quien dirige y orienta la clase, en busca de que los estudiantes construyan un conocimiento, de acuerdo a los referentes actuales de calidad emanados por el MEN.

Este proyecto del Ministerio se desarrolla especialmente en las instituciones educativas públicas de zonas rurales, las cuales son insuficientes[4] y albergan un número significativo de estudiantes para pocos profesores.

De acuerdo con lo anterior, es necesario resaltar que el análisis de los enunciados-problema encontrados en dicha cartilla, son importantes en la medida que permita observar cómo desde el

[4] La expresión se refieres a que son muy pocas, lejanas y en condiciones poco adecuadas.

propio Ministerio se está abordando temas como la proporción y proporcionalidad directa, los cuales han sido ampliamente problematizado por las constantes dificultades que presentan los estudiantes para comprender situaciones -problema presentes en los libros de texto en general.

En este sentido Guacaneme (2002) observa que el concepto de razón es presentado en los libros de texto como cocientes entre dos cantidades, lo cual liga el concepto de división con la naturaleza de la razón; y en cuanto a la proporción lo asocia con la igualdad entre dos razones, aspectos que excluyen las relaciones entre magnitudes y reducen la naturaleza del concepto de razón y proporción, como un numero fraccionario o una simple medida. Aspectos que inciden en el aprendizaje de la proporcionalidad, puesto que son las bases para consolidar un razonamiento proporcional.

Así, Obando, Vasco, y Arboleda (2009) asumen que la proporcionalidad es un concepto altamente estructurante que pone en relación diferentes ámbitos de las matemáticas escolares y por tal motivo se encuentra a lo largo del desarrollo del currículo colombiano.

Lo mencionado anteriormente evidencia que existen falencias en la enseñanza de dicho objeto de conocimiento, las cuales pueden provenir de la formación y conocimientos de los maestros y de los contenidos matemáticos presentes en los textos escolares.

Sin embargo, el interés del trabajo no se centra en realizar el análisis del texto del Ministerio, si no en las situaciones-problema relativas a la proporcionalidad directa, propuestas en las cartillas de Escuela Nueva, por la importancia que cobra para una educación de calidad, presentar a los estudiantes propuestas educativas con sentido y coherentes con las directrices del MEN, el cual se apoya de estudios teóricos y didácticos a nivel internacional para estructurar la educación colombiana.

3.3 Papel de las representaciones semióticas

Es necesario resaltar la importancia para el aprendizaje, de las distintas formas de representación que puede tener un mismo objeto matemático y el uso que los textos puedan darle para lograr la comprensión de dicho concepto. En el caso de la proporcionalidad, solo para mencionar algunos, se puede representar como porcentaje, gráfico continuo, gráfico discreto y la más importante para este trabajo como relación cuaternaria.

Considerando los elementos expuestos en Duval (2004) se tiene que el aprendizaje de las matemáticas ineludiblemente requiere de notaciones simbólicas que dan cuenta de las distintas representaciones del número, de los símbolos matemáticos, de las figuras geométricas y en general de todos los sistemas de escritura que permiten exteriorizar un conocimiento, un pensamiento, una idea, un sentimiento, etc.

En este sentido las representaciones cumplen un fin primordial y es el de permitir establecer una relación de comunicación a partir de la exteriorización de las representaciones mentales, sin embargo, no solo se limitan a permitir una comunicación sino que también posibilitan el desarrollo de la actividad matemática, en tanto, esta requiere de varios sistemas de escritura simbólica y algebraica, para lograr dotar de sentido las representaciones de los objetos matemáticos esquematizados mentalmente, ya que estos, son de naturaleza abstracta y se hace imprescindible el uso de las representaciones simbólicas matemáticas universales

Dada la necesidad e importancia de las representaciones, cabe resaltar que hay tres tipos, las representaciones internas- conscientes que dan cuenta de las ideas y percepciones, las representaciones interna- no consientes y las representaciones conscientes- externas que reciben el nombre de representaciones semióticas.

De acuerdo con Duval, (2004) las representaciones semióticas permiten una “mirada del objeto” a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) que tienen el valor de significantes. Las representaciones semióticas le son propias a un sistema semiótico; así la diversificación de representaciones depende de los distintos sistemas semióticos que existan. De esta manera conocer las diferentes formas de representar un mismo objeto matemático, lo cual aumenta las capacidades cognitivas de quien las explora.

Hay una gran variedad de representaciones semióticas como figuras, esquemas sagitales, gráficos cartesianos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc., las cuales permiten representaciones distintivas del concepto de multiplicación e incluso de la proporcionalidad.

El carácter intencional de una representación semiótica es importante para el aprendizaje de un concepto, este carácter intencional permite que quien observa la representación pueda determinar o no el significado de lo que observa, y así este pueda cobrar sentido. Por eso, es importante que en los libros de texto se proponga distintas maneras de ver un mismo objeto matemático pero acompañado de una intención.

En particular, los enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa pueden trabajarse en los libros de texto de distintas maneras sin dejar de lado la naturaleza misma del concepto y de esta manera ofrecer fundamentos necesarios para la enseñanza de los educandos colombianos. Es decir, el aprendizaje de un concepto matemático, no necesariamente implica un único método, más bien requiere del el uso y conocimiento de varios, pero teniendo conciencia del funcionamiento cognitivo y de las diferentes actividades que hacen posible tener distintos caminos para llegar al mismo objetivo y que además posibilite la articulación entre conceptos matemáticos.

De manera general, el MEN, mediante los Lineamientos y Estándares proponen una mirada de la Educación Matemática, en pro de superar las diversas problemáticas asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad directa, y para ello, trae a consideración la propuesta de Vergnaud (2003) la cual enfatizan la importancia de trabajar la multiplicación como relación cuaternaria; para permitir establecer una estrecha relación entre conceptos matemáticos, como función lineal y proporcionalidad directa, entre otros; desde los primeros años de escolaridad. Por tal motivo, es de interés, el análisis de enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa en cartillas de Escuela Nueva para grado quinto.

Para dicho análisis, es primordial tener en cuenta el papel de las representaciones semióticas en el aprendizaje, pues dichas representaciones son fundamentales a la hora de generar un aprendizaje, pues el uso de ellas permite hacerlas visibles y accesibles a los demás sujetos y, a la vez permite deducir algunos aspectos del funcionamiento cognitivo de quien las emite. Para ello, es necesario observar el uso de registros de representación propios de la estructura multiplicativa como tema de interés para este trabajo.

CAPÍTULO II.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El marco teórico del presente trabajo cuenta con tres referentes que desarrollan algunos de los aspectos a tener en cuenta, para el análisis de enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa. Inicialmente, se trata de establecer la relación entre la estructura multiplicativa y la transformación lineal como eje articulador para trabajar la proporcionalidad; seguidamente, se menciona el enfoque que presenta Vergnaud de las estructuras multiplicativas como base para enseñar la proporcionalidad directa y, la caracterización que hace Schwartz acerca de la naturaleza de las cantidades en problemas multiplicativos. Finalmente, se menciona algunos elementos de la teoría semiótico-cognitiva de Raymond Duval, que sirven de herramienta de análisis para dar cuenta de que el conocimiento matemático es posible analizarlo según el uso de los registros de representación propios del concepto matemático.

4.1 Referente matemático

La teoría de la proporcionalidad como objeto de conocimiento, se identifica como un potente modelo matemático, que se enmarca dentro de la teoría de las Magnitudes, y en estudios modernos se encuentra estrechamente ligado con el álgebra lineal, pues en las bases de la proporcionalidad subyacen relaciones lineales. Para el caso de la proporcionalidad directa, que es el tema central de este trabajo, interesan las covariaciones que se pueden modelar mediante aplicaciones lineales; en este caso mediante la categoría del isomorfismo de medidas. A partir de esta categoría, la multiplicación se interpreta como una relación que involucra cuatro cantidades, por tal motivo desde dicha categoría, se establecen relaciones explicitas con la proporcionalidad directa y otros conceptos matemáticos; aspectos desligados de la multiplicación vista como operación binaria de $R \times R \rightarrow R$, donde las parejas $(a, b) \in R \times R \ \exists\ c\ tal\ que\ c = a \cdot b, con\ c \ \in R$. Dicha manera, de entender la multiplicación desliga relaciones de fondo, pues al trabajar solo con tres cantidades, impide reconocer un campo de posibilidades para relacionarse con otros conceptos matemáticos. Por tanto, para efectos del presente trabajo y de la enseñanza escolar esta definición de la multiplicación es insuficiente y poco útil.

En este sentido, en la multiplicación se ve una percepción de la linealidad a través de la relación cuaternaria como la siguiente.

E1	E2
a	*f(a)*
b	*f(b)*

Ilustración 2. Relación cuaternaria propuesta por Vergnaud

De acuerdo con esto, la multiplicación vista como relación lineal reconoce e involucra cantidades, espacios de medida (*E*), tipo de magnitudes y abre todo un campo de posibilidades para abordar conceptos de la proporcionalidad en la escuela.

Ahora bien, para observar las relaciones que desde la multiplicación se pueden trabajar como la forma más sencilla de proporcionalidad directa, se traen a consideración las propiedades de la transformación lineal.

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *Homogeneidad con respecto a la suma*

2. $\propto f(x) = f(\propto x)$ *Homogeneidad con respecto a la multiplicación*

3. $f(x) = k \cdot x$

Las funciones que cumplen 1 y 2 se llaman transformaciones lineales entre espacios de medida *M1 y M2*, la función que asigna a cada cantidad $x \in M1$ es la imagen de $f(x) \in M2$, para cada x y $y \in M1$ y cada escalar $\propto \in R$.

A partir de las características de estas propiedades se justifica los análisis que describe Vergnaud (2003), los cuales permiten poner en relación magnitudes de dos espacios de medida mediante la función lineal.

La elección de un análisis para la solución de enunciados-problema está determinada por factores tales como la naturaleza de las cantidades (continuas, discretas) implicadas y por los números (naturales, enteros, racionales, etc.) utilizados en cada espacio de medida. Estas propiedades son fundamentales para definir relaciones entre conceptos relativos a la proporcionalidad.

Adicionalmente, la proporcionalidad directa, tiene unas referencias particulares a la razón y proporción en el contexto de las magnitudes, por tal motivo es importante traerlas a consideración. De esta manera se propone trabajar estos conceptos desde la investigación realizada por Guacaneme (2001).

Razón: una razón se considera como una relación multiplicativa entre dos números, cantidades o entre un número y una cantidad, diferentes de cero. Una razón en forma simbólica se expresa como $\frac{\alpha}{\beta}$ donde el número α recibe el nombre de antecedente y β el de consecuente.

Proporción: Llamaremos proporción a la igualdad de dos razones y la escribiremos así:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ o bien } \alpha : \beta = \gamma : \delta$$

donde los números α y δ se llaman *extremos* y los números β y γ *medios*; y el número δ se denomina tambien *cuarta proporcional* de los numeros α, β y γ.

La proporcion vista desde la relacion cuaternaria da cuenta de la siguiente ilustarcion.

E1	E2
$\propto$	$f(\propto)$
β	x

Ilustración 3. Forma de expresar la proporción según Vergnaud (2003)

En cuanto a la proporcionalidad directa, este concepto implica una relación cuantitativa, pero no necesariamente corresponde a una relación cuantitativa numérica. Se entiende por proporcionalidad directa.

> *Dos magnitudes son proporcionales o* ***directamente proporcionales****, si sus cantidades se corresponden biunívocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.*

Esta definición, alude al término *ordenadamente*, para indicar que la variación de las cantidades correspondientes a un espacio de mediada, deben ser las mismas para, las cantidades correspondientes al otro espacio de medida.

Además esta definición satisface tres condiciones, dos de ellas propias de la transformación lineal (propiedades 1 y 2) y la otra es si $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ implica $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{b})$, esta condición establece el carácter creciente de la función lineal.

Teorema fundamental de la proporcionalidad directa.

Las medidas de cantidades correspondientes de dos magnitudes proporcionales, con unidades correspondientes, son iguales. Si $\mathbf{a}=\mu \cdot \mathbf{b}$ es también $\mathbf{a'}=\mu \cdot \mathbf{b'}$.

Es necesario aclarar que la función de este teorema no es la de definir la proporcionalidad directa sino que de este se deriva de la definición propia que se tome de este concepto, ya que algunos autores definen la proporcionalidad directa a partir de dicho teorema, en lugar de que el teorema se derive de la definición de proporcionalidad directa.

Este trabajo pretende identificar la relación de la proporcionalidad con las estructuras multiplicativas de Vergnaud, de tal manera que se evidencie que la multiplicación es una manera de abordar la proporcionalidad en la escuela mediante la relación cuaternaria. Las relaciones explicitas que se proponen desde la teoría de Vergnaud acerca de la estructura multiplicativa se desarrollan a continuación.

4.2 Referente cognitivo

En este referente se presentan dos modelos explicativos, los problemas de tipo multiplicativo presentes en las estructuras multiplicativas de Vergnaud (2003), los cuales permiten presentar la proporcionalidad directa mediante la relación cuaternaria y la clasificación de la naturaleza de cantidades propuestas por Schwartz (1998) que aparecen en la estructura de los problemas de tipo multiplicativo, dado el papel fundamental que desempeñan las magnitudes en la comprensión de situaciones- problema de tipo multiplicativo.

4.2.1 Campos conceptuales

La necesidad de una teoría específica en matemáticas que tenga en cuenta la naturaleza del conocimiento matemático, dadas las características que lo distinguen de otros, y la complejidad a la hora de establecer relaciones entre conceptos, no es nada fácil. Aun así, es importante investigar en torno a temas matemáticos como la proporcionalidad dentro de una teoría que reconozca que un concepto no va solitario, sino por el contrario ligado a otros, como es el caso de la teoría de los campos conceptuales (TCC).

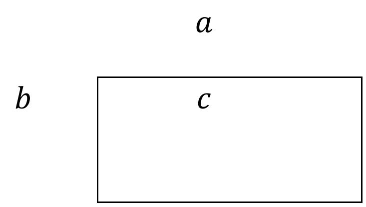
La TCC es una teoría cognitiva fundamentada en que el aprendizaje de un concepto es un proceso lento y que para que se dé requiere el dominio de un conjunto de situaciones entrelazadas donde participan otros conceptos, que en conjunto forman proposiciones todas ellas pertenecientes a un mismo campo conceptual Espinoza (2012). En este sentido, dicha teoría permite orientar el que hacer educativo matemático, en cuanto a las situaciones que pretenden generar aprendizaje acerca de las estructuras aditivas, multiplicativas, del álgebra y relaciones número- espacio. Barrantes (2006).

Ahora bien, la comprensión de un concepto por parte de un estudiante dentro de esta teoría, no es posible lograrlo al dar una única solución, sino más bien, mediante la realización de diversas situaciones. Además, en la comprensión de un concepto las representaciones, relaciones y propiedades juegan un papel fundamental para que este cobre sentido.

Las situaciones que guardan una relación entre si conforman un campo conceptual, de acuerdo con Vernaud (1990) un campo conceptual se entiende como:

> El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal, fracción, razón, numero racional, múltiplo y divisor, etc. (p.8)

En particular el campo conceptual de las estructuras multiplicativas se caracteriza desde dos perspectivas, el producto de medida y el isomorfismo de medida (IM). El producto de medida, consiste en “una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (Vergnaud, 2003, p. 211). En esta forma de relación multiplicativa, intervienen dos clases de problemas; en palabras de Vergnaud (2003), la multiplicación, cuando se debe encontrar la medida-producto, conociendo las medidas elementales y, división cuando hay que encontrar una de las medidas elementales, cuando se conoce la otra. Esta clase de relación multiplicativa de acuerdo con Valencia y Diana Gomez (2010) se puede ejemplificar de la siguiente manera:



$$\boldsymbol{a \cdot b = c}$$

Ilustración 4. Esquema del producto de medidas

En esta propuesta la proporción y la proporcionalidad directa se estudia de acuerdo con las ideas de Vergnaud, en relación con la categoría de problemas de estructura multiplicativa que denomina Isomorfismo de Medidas (IM).

Un (IM), consiste en una proporción simple directa entre dos espacios de medida $E1\ y\ E2$, conocida como una relación cuaternaria. En esta categoría entran en juego dos espacios de medida y cuatro cantidades, dos pertenecen a un espacio de medida y las otras dos, son medidas del otro espacio, todas ellas pueden ser números naturales, fraccionarios o decimales Gómez (2007).

El esquema utilizado por Vergnaud para representar los problemas es una tabla de correspondencia entre dos tipos de medida E1 y E2, como la ilustración 1.

Sean $E1\ y\ E2$ dos espacios de medida, donde $x\ \in E1\ y\ f(x)$ es la función que lleva a x de $E1$ a $E2$.

E1	E2
x	*y=f(x)*
x`	*y`= f(x`)*

Ilustración 5. Relación cuaternaria

Como se evidencia en la ilustración anterior la función f: E1 en E2 es una función lineal. Entonces, un isomorfismo de medida se puede asumir como una transformación lineal puesto que involucra dos espacios de medida y cuatro cantidades.

En este sentido, al tratar con situaciones de tipo multiplicativo bajo la relación cuaternaria que establece el IM emergen las propiedades de la linealidad como estructura matemática, estas son:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *Homogeneidad con respecto a la suma*

2. $\propto f(x) = f(\propto x)$ *producto por un escalar*

3. $f(x) = k \cdot x$

Por ejemplo, de acuerdo con la propiedad 1, característica de la linealidad, se puede realizar el *análisis escalar*, el cual hace pasar de una línea a otra en un mismo espacio de medida, es decir, para $E1$ de x a x`, y lo mismo sucede en $E2$; en ambos espacios de medida se utiliza el mismo operador escalar $x/x$` para llegar a una solución. A manera de ilustración se tiene:

E1	E2
x	$y=f(x)$
$x`/x \downarrow$	$\downarrow x`/x$
$x`$	$y`= f(x`)$

Ilustración 6. Análisis Escalar (Vertical)

Donde ***x`/x;*** es una razón- operador, ya que es la razón de crecimiento o decrecimiento entre dos cantidades del mismo espacio de medida.

Para ilustrar este tipo de análisis se propone el siguiente problema: *Si 3 kilos de manzana se venden por $15.000 en la plaza de mercado, ¿Cuánto costarán 13 kilos de manzana?*[5]

	Kilos	Precio	
	3	15000	
$\times 13/3$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\times 13/3$
	13	x	

Ilustración 7. Ejemplo de Análisis escalar (vertical).

Solución: mediante este análisis se puede observar que el problema hace intervenir una proporción para llegar a la solución, $\frac{3}{13} = \frac{15000}{x}$, o $\frac{3\ kilos}{13\ kilos} = \frac{precio\ de\ 3\ kilos}{precio\ de\ 13\ kilos} = \frac{\$15000}{x}$, es decir, 13 kilos de manzana cuestan $ 65.000

[5] Adaptado de la cartilla Escuela Nueva (2010)

Sin embargo, este análisis se complementa de una mejor manera con el *análisis funcional*, pues por sí solo, no agota todas las posibilidades del isomorfismo de medida.

El análisis funcional es externo y consiste en buscar el operador que liga x de $E1$ con y de $E2$, y trasladarlo para pasar de *x'* de *E1* a *y'* de *E2*. En palabras de Ospina y Salgado (2011), establece una relación entre las parejas correspondientes en ambos espacios de medida.

$$
\begin{array}{ccc}
E1 & & E2 \\
\boldsymbol{x} & \xrightarrow{y/x} & y=f(x) \\
x` & \xrightarrow{y/x} & y`= f(x`)
\end{array}
$$

Ilustración 8. Análisis Funcional (horizontal)

El operador y/x es una razón funcional ya que representa el coeficiente de la función lineal de *E1* a *E2*, que es una constante que da la relación entre dos cantidades de diferente espacio de medida. Según el problema anterior se realizara el análisis funcional para complementar el análisis escalar. El esquema seria el siguiente:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Kilos} & & \text{Precio} \\
3 & \xrightarrow{\frac{15000}{3}} & 15000 \\
13 & \xrightarrow[\frac{15000}{3}]{} & x
\end{array}
$$

Ilustración 9. Ejemplo Análisis funcional (horizontal)

Solución: se puede observar que $\frac{15000}{3} = 5000$ y al multiplicar 5000 por 13 se tiene que el precio de 13 kilos de manzana es $65.000

Desde la propuesta teórica de Vergnaud se establece que el análisis funcional se sitúa en un nivel muy elaborado, y esta es una de las razones por la cuales se encuentran serias dificultades para hacer comprender la noción de proporción, proporcionalidad directa y de función.

Como se puede apreciar, dentro de la categoría de IM, de acuerdo con las relaciones que se establezcan entre las cantidades dadas, esta relación puede verse como una razón o una proporción. Además, por medio de los análisis escalar y funcional se puede analizar las situaciones problema presentes en las cartillas de Escuela Nueva relativos a la proporcionalidad directa como parte de las estructuras multiplicativas y de esta manera evidenciar los tratamientos que surgen del campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

4.2.2 Naturaleza de las cantidades en problemas multiplicativos

De acuerdo con el trabajo realizado por Schwartz (1998) sobre la naturaleza de las cantidades que aparecen en la estructura de los problemas multiplicativos, es preciso traer a consideración esta trabajo, debido al papel fundamental que las magnitudes desempeñan para determinar el tipo de relaciones y procedimientos a seguir para hallar una solución. Según (Puig & Cerdan , 1988). "la estructura de las cantidades de un problema multiplicativo es el conjunto de expresiones de las cantidades que aparecen en él, y las operaciones permitidas entre esas cantidades" (p.6). La estructura multiplicativa presenta diferentes tipos de problemas, en ellos se relacionan cantidades que combinan magnitudes, ambas diferentes, para producir una cantidad que solo se reduce a una de las magnitudes.

Vergnaud (2003) identifica dos categorías principales de medidas, una de ellas ya mencionadas, el isomorfismo de medida, la otra es el producto de medida. De acuerdo con estos tipos de problemas es posible ver cómo se relacionan las magnitudes y cómo es la naturaleza de cantidades que surgen a partir de estos problemas.

Schwartz (1998) menciona que las cantidades usadas en matemáticas surgen de los procesos de contar, medir y de realizar cálculos con ellas. Para referirse a ellas resalta que cada cantidad tiene unidades de medida. En este sentido se entiende por cantidad, como un par ordenado (x, u) en el que x es un numero y u una unidad de una magnitud. Así, para mencionar algunos ejemplos; 1.64 cm, es la altura de una persona o 60 km/h es la velocidad de un auto, donde cm, Km/h son las unidades de magnitud. Estos ejemplos de cantidades cumplen un axioma fundamental de esta teoría, el cual expone que la relación entre números y sus respectivas unidades de magnitud es un componente primordial a la hora de modelar situaciones.

Para Schwartz existen dos composiciones de cantidades, una de ellas deja el referente igual (suma, resta) debido a que ambas cantidades trabajan con igual unidad de medida, y la otra lo transforma (multiplicación, división) debido a que pueden ser iguales o no. Las unidades de medida que son transformadas mediante la composición de cantidades determinan dos tipos de cantidades, las cuales se denominan *extensivas* e *intensivas*.

Se entiende por cantidades *extensivas,* aquellas cantidades que surgen a partir de procesos directos de conteo, medición o suma y resta de una de ellas. Las cantidades extensivas son aditivas, en el sentido que trabajan con igual unidad de medida, y por ello la unidad de medida no cambia. Por ejemplo, para restar cantidad de Km con cantidad de Km se obtiene nuevamente Km pero en una menor cantidad.

$$65\ Km - 20\ Km = 45\ Km$$

También se pueden clasificar las cantidades extensivas como discretas o continuas. Un ejemplo de cantidad extensiva discreta es 6 vasos, en esta cantidad la unidad es el objeto al que se hace referencia.

Por cantidades *intensivas,* se entiende, como aquellas cantidades obtenidas mediante la división entre cantidades extensivas y que no hacen referencia a una cantidad, sino más bien, a la calidad. Es decir, estas cantidades establecen relaciones entre dos unidades de medida como velocidad, densidad, precio unitario, etc.

Acerca de esto el autor expone un ejemplo, el peso total del café (5 Lb), el costo total del café ($ 15.000), costo por libra del café ($ 3.000).

$$\frac{\$\ 15.000}{5\ Lb} = \$3.000$$

De lo cual se identifica que la cantidad intensiva es 3000, $, Lb (costo por libra) pues se obtuvo de dividir costo total / peso total, por tanto, el costo y peso total del café son extensivas pues se obtienen de manera directa y no mediante una división. En palabras de Schwartz (1998).

> La cantidad es una clase diferente de descriptor del café. Mientras que las dos primeras cantidades describen todo el montón de granos de café, la cantidad (precio×libra) puede describir no solo todo el montón de granos sino también un solo grano de café o un camión cargado de tales granos. Es un descriptor de una cualidad del café y no de la cantidad de café. (p.41)

Teniendo en cuenta los dos tipos de cantidades propuestos por Schwartz, se puede decir entonces que la naturaleza de las cantidades que surgen de los problemas de la estructura multiplicativa pueden ser intensivas *(I)* o extensivas *(E).* Los problemas de estructura multiplicativa contienen dos cantidades conocidas, unos datos y una cantidad por encontrar.

A partir de esto Schwartz propone tres tipos de relación, que corresponden a problemas de distintas categorías. Por ejemplo la terna (*I, E, E'*) pertenecen al tipo de problema multiplicativo llamado Isomorfismo de medida y la terna (*E, E', E''*) pertenecen al producto de medida. Para efectos del trabajo solo se abordará la terna que pertenece al isomorfismo de medidas.

- *Cantidad Extensiva por Cantidad Intensiva :* $(E \times I) = E'$

  Al multiplicar una cantidad extensiva con una cantidad intensiva resulta una cantidad extensiva del mismo tipo que aparece en la cantidad intensiva.

  Para ilustrar esta clasificación de problemas multiplicativo se propone el siguiente ejemplo:

  Cinco motos consumen a diario 3 lt de gasolina. ¿Cuántos lt de gasolina consumen a diario entre todas las motos?[6]

  Solución:

  Cantidad Extensiva: 5 motos

  Cantidad Intensiva: $3\ \frac{Litros}{moto}$

  Entonces si al multiplicar 5 *motos* $\times 3 \frac{lt}{motos}$ se obtiene 15 *lt* al simplificar la unidad de medida que se repite, de esta manera resulta la cantidad extensiva (E`) del mismo tipo de la intensiva.

[6] Tomado y adaptado del texto problemas aritméticos escolares (1988)

- *Cantidad Extensiva por Cantidad Extensiva: (E×E')=E''*

  Al multiplicar una cantidad extensiva por otra cantidad extensiva resulta una cantidad extensiva diferente a las otras dos.

  El siguiente ejemplo ilustra esta clasificación de problemas multiplicativos: *En una bolsa de caramelos hay cinco paquetes de chicle. Cada paquete tiene tres chicles. ¿Cuántos chicles hay en cada bolsa?*[7]

  Cantidad Extensiva (*E*): 1 bolsa de caramelos

  Cantidad Extensiva (*E`*): 5 paquetes

  Al multiplicar 5 *pqt* ×3 $\frac{chicles}{pqt}$= 15 chicles, donde 15 chicles es la cantidad extensiva resultante (*E``)*, donde la cantidad (*E``)* es una cantidad extensiva discreta.

- *Cantidad Intensiva por Cantidad Intensiva: (I×I')=I''*

  Al multiplicar una cantidad intensiva con otra intensiva resulta otra cantidad intensiva.

  Un ejemplo para ilustrar esta última clasificación es el siguiente: *Una moto consume 4 litros de gasolina por Kilómetro, viajando a una velocidad de 100Km/h. ¿cuánta gasolina consumirá en litros/h.?*[8]

  Cantidad Intensiva (*I*): 4 Lt/Km

  Cantidad Intensiva (*I`*): 100 Km/h

[7] Tomado del texto problemas aritméticos escolares (1988)

[8] Tomado y adaptado de la tesis configuraciones epistémicas en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo (2011).

> La respuesta resulta de multiplicar 4 Lt/Km ×100 Km/h= 400 Lt/h, donde 400 Lt/h es la cantidad intensiva resultante *(I``)*. Es importante mencionar que las cantidades aquí mencionadas deben relacionarse entre sí, de esta manera se pueden cancelar las cantidades iguales para que resulte una nueva cantidad intensiva.

La multiplicación vista únicamente como suma iterada impide observar las relaciones mencionadas anteriormente. Por tal motivo, tener en cuenta la relación entre cantidades y la referencia que hace del objeto de la cantidad, constituye un avance importante para superar las dificultades entorno a la enseñanza del concepto de proporción y proporcionalidad directa, en tanto relación entre cantidades, magnitudes o números.

A continuación, se desarrollan los elementos semióticos que sirven de herramienta de análisis y como estrategia para contextualizar al lector se introducen situaciones- problema, rastreadas de la cartilla y de esta manera posibilita la identificación de algunas transformaciones de registros de representación relativos a la proporcionalidad directa.

4.3 Referente Semiótico

En lo que concierne a este referente, se puntualiza en la importancia de utilizar las representaciones semióticas para acceder al conocimiento matemático y detallar las actividades cognitivas que se desarrollan en un registro semiótico.

A partir de la teoría semiótico-cognitiva de Duval (2004) es que se pretende establecer una relación entre los distintos tipos de representaciones que se pueden tener de un mismo objeto matemático y cómo estas relaciones intervienen en el aprendizaje del concepto proporcionalidad directa a la luz de enunciados- problema.

4.3.1 Representaciones semióticas

La noción de representación está relacionada directamente con los objetos del entorno mental que un sujeto puede poseer o abstraer del mundo físico, pero más allá de esto, las representaciones son esenciales para el desarrollo de la vida diaria y para la adquisición del conocimiento matemático. En este sentido, en las matemáticas es útil y necesario usar distintas representaciones que permitan aludir a una cantidad, una magnitud, una medida, a los números, y en general en todas las cuestiones que tienen que ver con la posibilidad y la constitución de un cierto conocimiento (Duval, 2004, p.25).

Las representaciones que se trabajan en las matemáticas cobran sentido cuando se relacionan con un sistema semiótico, que a su vez, ha de permitir que se efectúen las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, estas son formación, tratamiento y conversión. Los sistemas semióticos que permiten estas tres actividades reciben el nombre de registros de representación semiótica.

Existen numerosos registros de representación semiótica, sin embargo estos se diferencian por el sistema de reglas, por las diferentes posibilidades que pueden emerger de su asociación y por la naturaleza de los significantes. Estas diferenciaciones fundamentan la diversidad de registros y la complementariedad de los tratamientos posibles.

Asimismo, los registros de representación ocupan un papel fundamental en el desarrollo de los conocimientos, y un análisis de ese papel enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados; el primero es, *la diversificación de los registros de representación*, este fenómeno evidencia la dificultad de trabajar en matemáticas con varios sistemas de representación al mismo tiempo, por ejemplo, los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos no pueden considerarse como un solo registro de representación. Estos son sistemas de representación diferentes entre sí, y cada uno de ellos genera diversas preguntas sobre el aprendizaje. El segundo es, *la diferenciación entre representante y representado,* la diferenciación entre la forma y el contenido establece una posibilidad de comprender lo que representa una representación, es decir, reconocer las características propias de una representación en diferentes contextos; y el tercer fenómeno es el de *la coordinación entre los diferentes registros de representación,* este fenómeno evidencia que al reconocer las relaciones entre la variedad de representaciones de un mismo objeto, este pueda ser movilizado a través de sistemas semióticos diferentes permitiendo una comprensión del mismo. Estos tres fenómenos dentro de un análisis del aprendizaje se consideran fundamentales, sin embargo, un análisis de tal importancia no puede dejar de lado las tres actividades cognitivas fundamentales de las representaciones.

Diversas representaciones de la lengua natural

A partir de las características mencionadas en el párrafo anterior, y teniendo en cuenta que el uso de distintos registros de representación permite identificar y relacionar propiedades del objeto matemático en diferentes contextos, es necesario observar algunas formas de representación que se pueden usar para trabajar la proporcionalidad directa como: lengua natural, escritura algebraica, esquema sagital, cuadro cartesiano, tablas de correspondencia, porcentajes, gráficas (continua, discreta).

A continuación, se detallan las actividades cognitivas fundamentales de las representaciones semióticas ligados a la enseñanza de enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa.

4.3.2 Actividades Cognitivas

Un registro de representación semiótico debe permitir cumplir las actividades cognitivas fundamentales. La primera actividad fundamental le es propia a un sistema semiótico y se puede dar de dos maneras como representación mental o como representación externa, esta actividad recibe el nombre de *formación.* La segunda actividad es llamada *tratamiento* y esta consiste en transformar una representación dentro del mismo registro. Por su parte, hablaremos de *conversión* cuando la transformación sucede en un registro diferente al que pertenecía la representación inicial.

4.3.2.1 *Formación*

La formación de las representaciones semióticas se da según el registro de representación utilizado. Esta actividad favorece la creación de representaciones mediante la utilización y combinación de distintos signos, los cuales deben respetar las reglas de conformidad[9] del sistema semiótico del cual emergen. Las reglas de conformidad de cada sistema semiótico garantizan que se establezcan relaciones de comunicación y que se conserven las unidades constitutivas de cada representación.

De acuerdo con el registro de representación utilizado se establecen las reglas de conformidad, por ello se presentan las reglas de conformidad propias de la actividad de formación para los registros de lengua natural, escritura algebraica, esquema sagital y cuadro cartesiano**,** los cuales para efectos del presente trabajo, se utilizan en la solución de enunciados-problemas relativos a la proporcionalidad directa

[9] Las reglas de conformidad, cumplen la función de identificación de un registro de representación, sin embargo, no siempre permite realizar la identificación y mucho menos garantiza la comprensión de la representación.

Lengua natural: El registro de lengua natural es un registro de representación utilizado para expresar las ideas y relaciones entre objetos matemáticos, este registro depende de una intencionalidad, de esta manera se logra crear un enunciado, mediante la utilización de caracteres que forman frases y de criterios cognitivos propios del sujeto. Aun así, el lenguaje natural, se convierte también en una dificultad para el aprendizaje, pues de un mismo enunciado se pueden tomar varias interpretaciones, ya que el lenguaje natural tiene un carácter ambiguo debido a las reglas de formación propias del discurso.

Escritura algebraica: Desde la perspectiva de Vergnaud (2003) es el tipo de representación utilizado para simbolizar la proporción; este consiste en ubicar los datos a dos columnas, uno debajo del otro separados por el signo / y se relacionan mediante el signo = haciendo uso de letras o números según sea el caso. Mediante la escritura de los datos y la ubicación de cada uno de ellos es que se pueden establecer relaciones para dar solución a un enunciado.

De manera particular la escritura algebraica, puede dar cuenta de una razón, cuando no se establece una relación; o de una proporción cuando si es posible establecer alguna relación entre los datos. Para este registro se debe cumplir que, en ningún caso debe admitirse el cero como denominador. A continuación, se presenta un ejemplo de la representación algebraica de un enunciado-problema.

P2 : en una urna se empacan canicas de dos colores: rojas y verdes. Por cada 3 canicas rojas se echan 7 verdes. ¿Cuántas canicas rojas se empacan en la urna si se sabe que hay 574 verdes?

$$\frac{3}{x} = \frac{7}{574} \quad donde\ x = cantidad\ de\ canicas\ rojas$$

Ilustración 10. Formación de la escritura algebraica de acuerdo con el enunciado P2

Según Duval (2004) “la formación, implica la selección de un cierto número de caracteres de un contenido percibido, imaginado o ya representado en función de las posibilidades de representación propias del registro hecho” (p. 44). En este sentido, es esencial conocer que dicha representación cobra sentido dentro del registro de la escritura algebraica de las proporciones.

Esquema sagital: En la proporcionalidad directa, el esquema sagital permite representar las relaciones cuaternarias, como una forma de relación multiplicativa. Es decir, pone en juego dos espacios de medida y establece una relación entre ellos. El esquema sagital, está conformado por dos columnas y dos filas, las cuales se relacionan mediante flechas horizontales respectivamente, además en cada columna se ponen en correspondencia dos conjuntos, es decir, que guardan una relación entre sí. Para ejemplificar dicho registro, se hará uso del enunciado-problema P2.

$$
\begin{array}{ccc}
\textit{Canicas rojas} & & \textit{Canicas verdes} \\
3 & \longrightarrow & 7 \\
x & \longrightarrow & 574
\end{array}
$$

x=canicas rojas empacadas en la urna

Ilustración 11. Formación del esquema sagital de acuerdo con el enunciado P2

Las reglas de formación del esquema sagital, indican que, hay dos tipos de información, las cuales han recibido un nombre según el enunciado-problema, sin embargo, la solución de este, depende de la interpretación de la información y de la selección que se haga de la unidades significantes del enunciado-problema.

4.3.2.2 *Tratamiento*

Es la transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema, según las únicas reglas propias al sistema. Es a partir de las reglas de expansión propias de un registro que es posible obtener una representación final de la representación inicial. Las reglas de expansión de acuerdo con Duval (2004) son reglas cuya aplicación da una representación en el mismo registro que la representación de partida.

Lo que caracteriza a los tratamientos es que es una transformación interna a cualquier registro de representación y por tanto, esta debe respetar unas reglas de aplicación para que se pueda cumplir dicha transformación. Además la finalidad de realizar tratamientos es la de adquirir conocimiento en comparación con las representación inicial.

Lengua natural: este registro parte de contener una información según la organización de las frases, pero se pueden obtener otra organización del enunciado, según sea la elección de las unidades significantes. Por ejemplo.

P4: Cada 25 segundos la rueda de un molino da 3 vueltas. ¿Cuántas vueltas da en 20 minutos y 11 segundos?

P4: Cada 25 segundos, da 3 vueltas la rueda de un molino. ¿Si se demora 20 minutos y 11 segundos, cuantas vueltas da?

A dichos enunciados-problema se les ha aplicado un tratamiento, de acuerdo con las reglas de expansión propias del lenguaje natural. Dado que si las reglas no son propias al registro utilizado puede provocar un ocultamiento de la información y por tanto de la intención o sentido del enunciado.

Escritura algebraica: el proceso de solución de la escritura algebraica requiere de realizar unos pasos propios del isomorfismo de medida, para ello, es necesario identificar las relaciones entre cada espacio de medida y conocer los análisis necesarios para efectuar el tratamiento de manera correcta. El enunciado-problema utilizado para mostrar el tratamiento es P1[10], mediante la escritura algebraica de dicho enunciado es posible evidenciar el tratamiento, es decir, se mantiene el mismo registro semiótico durante su solución.

$$\frac{3}{x} = \frac{25}{1211}$$

$$\frac{vueltas\ en\ 25\ segundos}{vueltas\ en\ 1211\ segundos} = \frac{25\ segundos}{1211\ segundos}$$

$$\frac{3\ vueltas}{x} = \frac{25\ segundos}{1211\ segundos}$$

$$145.3\ vueltas\ = 1211\ segundos$$

Es decir, que la rueda da 145. 3 vueltas en 20 minutos y 11 segundos. Para llegar a dicha solución se ha recurrido a propiedades de la linealidad como base para el desarrollo de la proporcionalidad directa.

[10] La solución que aquí se presenta no corresponde con la presentada en la cartilla, ya que se corrigió un error de procedimiento, por lo cual la respuesta no concuerda con la que aparece en el capítulo III.

Esquema sagital: para evidenciar el tratamiento en este registro es necesario, ver la secuencia de transformaciones que se dan en el mismo registro, esto es mediante un análisis funcional.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Vueltas} & & \textbf{Tiempo en segundos} \\ 3 & \longrightarrow & 25 \\ x & \longrightarrow & 1211 \end{array}$$

Ilustración 12. Tratamiento en el enunciado- problema P4

Se distinguen tres cantidades y un valor desconocido, y para hallarlo se realiza el siguiente paso, que da cuenta de un análisis horizontal o funcional.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Vueltas} & & \textbf{Tiempo en segundos} \\ & \frac{25}{3} & \\ 3 & & 25 \\ x & \longleftarrow & 1211 \\ & \frac{25}{3} & \end{array}$$

Mediante el análisis funcional, propio del isomorfismo de medida, es que es posible realizar el tratamiento para este registro y dar solución a la pregunta *¿Si se demora 20 minutos y 11 segundos, cuantas vueltas da?* Así, al efectuar $1211 \div \frac{25}{3} = 145.3$, es decir, que la rueda da 145 vueltas en 1211 segundos.

4.3.2.3 Conversión

Se entiende por conversión, como una transformación en la que las representaciones propias a un sistema se pueden hacer corresponder dentro de otro sistema, de tal manera que la representación de llegada posibilita otras significaciones de la representación de partida. La conversión, permite la puesta en correspondencia entre las unidades significantes de cada representación en diferentes registros, por ejemplo, el planteamiento de una ecuación que se obtiene de un enunciado- problema, es la conversión de la representación inicial dentro del registro de lengua natural a un registro simbólico algebraico. Sin embargo, la correspondencia término a término no es siempre tan evidente debido a que la escritura simbólica no abarca una serie de términos suficientes que se correspondan con la variedad que si se dispone para la lengua natural.

La actividad de conversión no es tan comprensible, ni tan evidente a la hora de resolver problemas en matemáticas, pero si es fundamental para el aprendizaje y el desarrollo cognitivo. En palabras de Duval (2004) la conversión es pues una transformación externa relativa al registro de la representación de partida.

La distinción entre lo que es un tratamiento y lo que es una conversión es fundamental para analizar las condiciones propias del aprendizaje de conceptos matemáticos. Los tratamientos por su parte se distinguen de la conversión, puesto que no moviliza los mismos sistemas cognitivos y la elección de un tratamiento u otro dependen en muchos casos de lo que se pregunta en el otro registro. En cuanto a la conversión, la inexistencia de reglas que den cuenta de las relaciones y asociaciones entre registros la distinguen de la actividad de tratamiento, por una parte y; por otra esta transformación a diferencia del tratamiento y la formación se considera como la actividad más compleja, debido a que el cambio de registro no es inmediato ni simple a la hora de resolver situaciones- problema.

En la comprensión de un concepto como la proporcionalidad directa, no solo el cambio de registro en lengua natural al registro simbólico, es el que ocasiona obstáculos para realizar la conversión, sino que a menudo la ausencia de *coordinación* de los registros de representación también se convierte en un obstáculo más a superar para alcanzar la comprensión conceptual.

> En todo caso, la coordinación de los registros es la condición para el dominio de la comprensión, en la medida en que es la condición para la diferenciación real entre los objetos matemáticos y su representación. Esta coordinación constituye un umbral cuyo traspaso cambia radicalmente la actitud frente a un tipo de actividad o de dominio. (Duval, 1996, p.9).

Entonces, para lograr la comprensión es necesario distinguir entre la representación y el contenido conceptual que la representación expresa. El contenido conceptual de una representación no depende únicamente de los conceptos o de lo objetos representados, sino también de los registros semióticos empleados. "Por ello cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas" (Duval, 2006, p. 158). La relación entre las actividades cognitivas y la coordinación entre los registros que permitirán alcanzar la comprensión conceptual se resume de la siguiente manera:

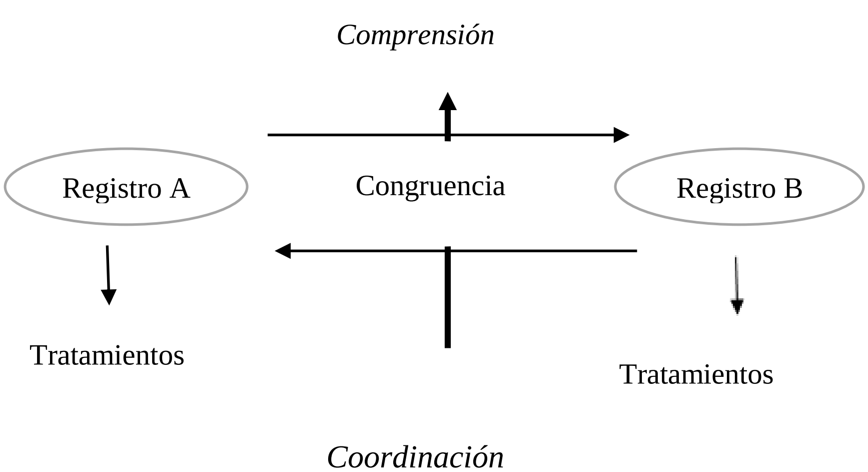


Ilustración 13. Relación actividades cognitivas. Duval (2004)

La comprensión entonces, no alude de manera única a dar un salto desde el contenido de la representación al concepto matemático, sino más bien desde esta teoría se insiste en lograr relacionar diversos contenidos de la representación de un mismo concepto, cuando se efectúan las conversiones entre registros de representación.

Las actividades cognitivas mencionadas, y en especial la de conversión, son necesarias en la escuela, ya que el aprendizaje de conceptos como proporción se trabaja a través de distintos registros de representación, por ejemplo como porcentajes, gráficos, escalas, etc. Para los estudiantes las relaciones de un registro con otro no son nada evidentes, por lo tanto la importancia de los cambios de registro, los tratamientos y las reglas que posibilitan esta transformación forman parte fundamental en la manera como aprenden los estudiantes cuando se enfrentan con enunciados problema, en los cuales es necesario reconocer diferentes representaciones de un mismo objeto matemático.

A continuación se ejemplifica la conversión entre los registros de representación utilizados para la solución de enunciados problema relativos a la proporcionalidad directa. Mediante la situación-problema *P7,* que plantea lo siguiente: *Un carro se desplaza 100 km cada 3 horas. ¿Cuántos Kilómetros avanzara en 25,5 horas?* Se puede observar un cambio de representación, es decir de lengua natural a un esquema sagital, observemos:

Transformación de un registro a otro

$\downarrow$

Un carro se desplaza 100 km cada 3 horas. ¿Cuántos Kilómetros avanzara en 25,5 horas?

Conversión

$\downarrow$

Se mantienen los mimos objetos indicados

Horas	Km
3	100
25.5	*X*

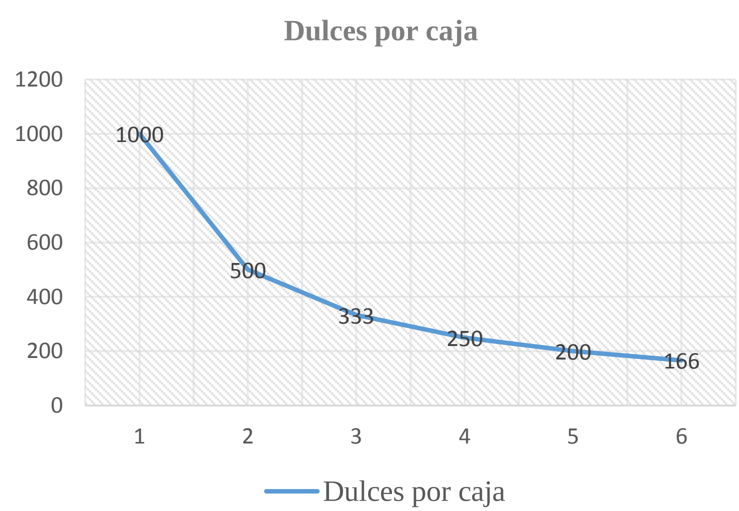
También se pueden efectuar otras transformaciones, como las siguientes para el ejemplo *P8. Juana tiene 1000 dulces, que desea empacar colocando la misma cantidad en cada caja, hace la siguiente tabla para tener información rápida de la cantidad de dulces que empaca en cada caja.* Inmediatamente se le está dando una tarea de conversión, pues se trata de pasar de una información en lenguaje natural a una información en representación tabular.

La característica de esta situación es que toda la información no se representa en la lengua natural, solo una parte de ella, y la mayor parte de información se da en el registro tabular, de la cual se le pide que realice una tarea más de conversión, realizar una gráfica cartesiana.

Numero de cajas	1	2	3	4	5	6
Dulces por caja	1000	500	333.3	250	200	166.6

Ilustración 14. Tarea de conversión registro tabular

Ahora veamos una conversión más mediante el registro de una gráfica cartesiana.



Este registro permite tener un panorama distinto al que produce una tabla o la lengua natural, es por ello, que entre más registros de representación un estudiante pueda conocer y comprender, mejor será la conceptualización y las relaciones que él se puede establecer de un objeto matemático.

5. Antecedentes

El presente trabajo se caracteriza por realizar el análisis de enunciados- problema relativos a la proporcionalidad directa como parte del campo conceptual multiplicativo que propone Vergnaud (2003), por tanto es fundamental estudiar y observar trabajos de pregrado realizados en torno al análisis de enunciados por una parte y de otra trabajos que involucren y desarrolle la teoría cognitiva de Vergnaud como parte importante de este trabajo. De acuerdo a ello, se ubica la tesis de Gómez y Correa (2012) que realiza un análisis de enunciados teniendo en cuenta algunos aspectos de la teoría semiótico-cognitiva de Duval (2004), la tesis de Ospina y Salgado (2011) la cual aborda de manera muy explícita las situaciones de tipo multiplicativo de la teoría de Vergnaud y la tesis de Valencia y Gomez (2010) que aporta un analisis detallado de la relacion de la estructura multiplicativa con casos especificos de covariacion lienal.

"Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de la educación media"

La investigación realizada por Gómez y Correa (2012), aporta al presente trabajo el ámbito semiótico de la investigación, puesto que asume que la teoría semiótico- cognitiva de Duval (2004) es una teoría que se caracteriza por asumir que el acceso a los objetos matemáticos no se da de manera sensible sino más bien mediante la movilización de distintas representaciones propias del objeto matemático. De esta manera, dicho trabajo propone a partir del análisis de enunciados realizado una manera de reconocer aspectos semióticos incidentes en el aprendizaje de un concepto matemático, como las condiciones de redacción, situaciones de lectura y propias del objeto matemático. De las cuales para el presente trabajo solo se tienen en cuenta los aspectos semióticos incidentes en el aprendizaje de la proporcionalidad directa.

“Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo”

Trabajo de pregrado enfocado al estudio de la teoría Ontosemiotica de Godino (2008) presentes en dos libros de texto, como herramienta de análisis para observar el tratamiento que desde los libros de texto se le dan a la multiplicación. En dicho trabajo, el análisis de los libros de texto en torno al concepto de multiplicación, evidencia elementos teóricos tomados de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1998), para explicitar la relación del concepto de multiplicación con la variación, la proporción, la proporcionalidad directa y función lineal. Aspectos importantes para el presente trabajo de grado, pues mediante el trabajo de Ospina y Salgado (2011) es posible reconocer dos modelos para caracterizar las situaciones-problema relativas a la proporcionalidad directa, como lo es el análisis funcional y el análisis escalar propio del isomorfismo de medida.

“Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria”

La propuesta que presentan Gómez y Valencia (2010) se centra en situaciones problema de covariación lineal y para ello se apoyan en análisis escalar y análisis funcional que propone Vergnaud (1991) para caracterizar la trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación. De este trabajo es importante resaltar el estudio realizado acerca del isomorfismo de medida como un caso particular de proporcionalidad directa que se justifica bajo las propiedades de la linealidad.

6. Referente metodológico

El trabajo se enmarcara dentro de una investigación cualitativa, de acuerdo a Taylor & Bogdan (1987) esta se refiere a "la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabra de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (p.4). Además este autor considera que un estudio cualitativo no es un análisis impresionista, basado en una mirada superficial a un escenario o a personas. Es una pieza de investigación sistémica conducida con procedimientos rigurosos, aunque no necesariamente estandarizados.

La investigación cualitativa dentro del ámbito educativo es considera significativa en la medida en que esta permite analizar información desde la postura del investigador, la cual es flexible en cuanto al modo en que intenta realizar el análisis del tema de interés.

En este sentido, se realizó en primer lugar la selección de enunciados-problema presentes en la cartilla de Escuela Nueva, específicamente en la tercera cartilla, unidad 8, pág. 48. Los criterios de selección que se tuvieron en cuenta, tienen que ver con las modalidades de trabajo que aborda la cartilla, que son: trabajo libre, individual, y en grupo, a partir de estas modalidades se extrajeron enunciados que permitieran ejemplificar y representar los demás enunciados presentes.

Seguidamente se presentó la solución de los enunciados-problemas tal y como aparecen en la cartilla, y se complementó con un análisis general de lo que involucra cada enunciado según la observación de lo que intenta comunicar cada enunciado de acuerdo a sus características. Mediante esta breve presentación se logra realizar más adelanté establecer la solución de cada enunciado mediante la categoría de isomorfismo de medida, para posteriormente clasificarlos de acuerdo con el tipo de problema multiplicativo que tiene de fondo cada enunciado. Finalmente se logró realizar en base con la información anterior un análisis semiótico según las actividades cognitivas que desarrolla, el registro de representación semiótico propias de la proporcionalidad directa.

Además, con este análisis que permitirá entender la relación entre los registros de representación semiótica y las estructuras multiplicativas de Vergnaud mediante el isomorfismo de medida como base para la enseñanza de la proporcionalidad, se espera establecer las posibles relaciones del manejo que le da las Cartillas de Escuela Nueva acerca de la proporcionalidad directa y la propuesta que se hace de este mismo concepto desde los Lineamientos curriculares Nacionales.

De acuerdo con el análisis realizado a los enunciados-problema presentes en la cartilla de Escuela Nueva, y las posibles consideraciones que emerjan mediante el análisis se podrá realizar las conclusiones que aparecerán en el trabajo de grado.

CAPITULO III.

El propósito del presente capítulo, en primer lugar es realizar una contextualización al lector de la metodología implementada en la cartilla Escuela Nueva, para abordar la noción de proporcionalidad. En este sentido, se realizó la selección de los enunciados-problemas correspondientes, que abordan la enseñanza de la proporcionalidad directa de acuerdo con la propuesta de trabajo de la cartilla, se tomaron situaciones que ejemplificaran procedimientos libres o situaciones de experimentación, también situaciones que amplían el conocimiento mediante el trabajo individual y además situaciones que permitían precisar los conocimientos mediante el trabajo en grupo.

Luego se presentan algunas clases de situaciones-problemas de las cartillas de Escuela Nueva, según la categoría de isomorfismo de medida; de acuerdo con el carácter discreto o continuo de las cantidades y las propiedades de los números utilizados. También se muestra una clasificación de la naturaleza de las cantidades que se trabajan en las situaciones-problema, por la importancia que tiene identificar el tipo de medidas de las cantidades para modelar situaciones en las que necesariamente la medida se transforma en otra.

En esta medida, en primer lugar se presenta un análisis general de cada enunciado, de acuerdo a la forma en que la cartilla presenta los mismos. Luego, se complementa con la clasificación de cada enunciado en los diferentes tipos de problemas multiplicativos de Vergnaud.

7.1 Los enunciados-problema en las cartillas de Escuela Nueva

Las orientaciones del MEN propuestas en el modelo educativo de Escuela Nueva tienen un fin particular, y es el de proponer espacios educativos que permitan superar lo que ellos han llamado el modelo reproduccionista[11], por ello en la propuesta de las cartillas se enfatiza en que los estudiantes sean quienes construyan el significado de las cosas y de acuerdo con sus capacidades puedan interpretar, relacionar y operar la información.

A continuación, se presenta una situación que ejemplifica la metodología que se propone en dichas cartillas, para abordar algunas formas de variación.

Mariana y Alejo están interesados en la forma cómo crecen las sombras de las cosa cuando se proyectan en una pared. Construyan un aparato como el de Mariana y Alejo, sigan las indicaciones y contesten las preguntas.

Ilustración 15. Montaje para trabajar formas de variación

Acerquen y alejen el cartón que tiene la pequeña abertura rectangular a linterna y observen que sucede con las dimensiones del rectangulo en la pered¿Cuándo la distancia D entre el carton y la linterna disminuye, aumentan o disminuyen las dimensiones del rectángulo? *¿Qué pasa cuando aumentan*?

[11] Se concibe la enseñanza como la presentación de modelos a los estudiantes, y el aprendizaje como la reproducción, por parte del alumno. P. 71

Ahora mantengan constante la distancia entre el cartón y la pared y alejen o acerquen la linterna. Digan que pasa con el rectángulo a medida que la distancia entre la linterna y la pared (D+d) se hace mayor y que cuando se hace menor.

Como se observa, en la situación anterior se le dan las condiciones al estudiante para guiarlo en un proceso de construcción y experimentación para que pueda identificar de acuerdo con su propia experiencia y observación lo que el profesor quiere enseñar. Como la anterior situación se pueden encontrar muchas más contenidas en las cartillas de Escuela Nueva, y solo se utiliza esta para mostrar que las situaciones- problema que se presentarán aluden al tipo de situaciones donde los estudiantes son quienes construyen su propio conocimiento, y el profesor cumple el papel de apoyar el proceso de aprendizaje, mediante la observación de las actividades que el estudiante realiza según sea la modalidad, trabajo en grupo o individual.

7.2 Algunos enunciados- problema de proporcionalidad directa propuestos en la cartilla Escuela Nueva

Los enunciados problema que se desarrollan a continuación, descritos como P1, P2, P3…,se han obtenido de la tercera cartilla de Escuela Nueva para grado quinto y su solución se aborda de la misma manera que propone la cartilla. Inicialmente se mencionan las situaciones que ejemplifican el trabajo en grupo, ya que es la propuesta inicial de la cartilla.

Trabajo en grupo

P2: consigan varios metros de piola y en un lugar plano sobre tierra o arena claven estacas cada 30 cm, así como lo muestra la figura.

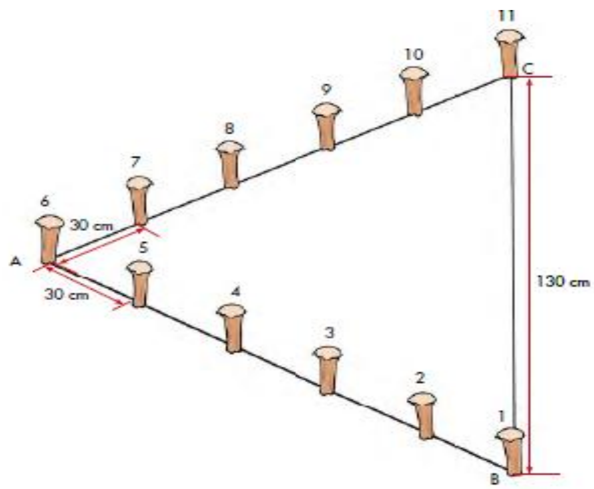


Ilustración 16. Modelo de construcción de la situación P2

Coloquen una vara desde la estaca 1 hasta la 11. Busquen que la piola quede estirada. Coloquen varas sobre el piso que unan la estaca que esta sobre la línea imaginaria que va de A a B, y la que está enfrente sobre la otra línea que va de A a C. (la estaca 5 con 7, la 4 con 8, 3 con 9, 2 con 10 y 1 con 11). Tomen medidas y completen la tabla.

Solución.

Variación de la longitud de la vara en relación con la distancia de la estaca a la estaca A					
Distancia a la estaca A (en cm)	***A y 5***	***A y 4***	***A y 3***	***A y 2***	***A y 1***
	30	*60*	*90*	*120*	*150*
Longitud de la vara (en cm)	***5 y 7***	***4 y 8***	***3 y 9***	***2 y 10***	***1 y 11***
	26	*52*	*78*	*104*	***130***

En el anterior enunciado se observa la invitación a trabajar en grupo, a campo abierto utilizando recursos del medio y, dejando a un lado la modalidad tradicional para aprovechar recursos didácticos y prácticos con el fin de generar un aprendizaje.

Las actividades presentes en la cartilla promueven la ampliación del campo educativo e invitan a profundizar los conocimientos con ayuda de los compañeros.

Para la solución de este enunciado es necesario tabular los resultados obtenidos de experimentar con las medidas que se pedían encontrar, con el fin de identificar la variación de la longitud respecto a la distancia.

Un aspecto importante y que puede causar confusión en dicha situación es que la longitud entre 1 y 11 puede variar si las distancias de AB y AC no se mantienen constantes, como se plantea en la situación, es decir, siempre debe ser de 30cm. Si esto no se lograra realizar, al completar la tabla no se podría interpretar la variación en caso de que fuese directamente proporcional, pues se presentan valores distintos para cada condición. Además es común tener un margen de error en la medición de la longitud de la vara entre 5 y 7, 4 y 8, etc.

Sin embargo, en la situación no se le pide al estudiante que defina si la variación es directa, lo que se intenta es que logre establecer alguna forma de variación e intente comprenderla mediante la observación de los datos obtenidos. Más adelante se especifica que tipo e variación es y cómo se llegó a la solución, de acuerdo a la aplicación del concepto de proporción.

P3: observen que al unir con las varas los pares de estacas se forman triángulos (el del vértice 5, A, 7; el de vértices 4, B, 8, etc.)

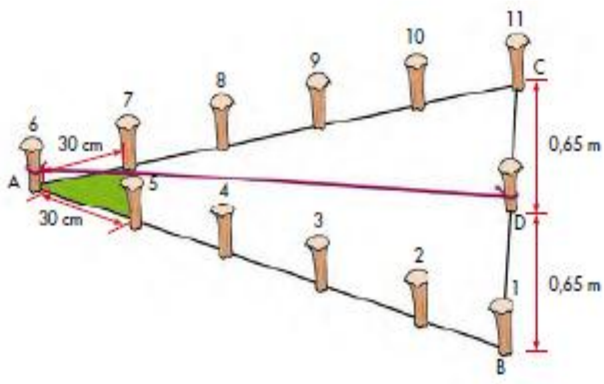


Ilustración 17. Modelo de construcción de la situación P3

Tracen las alturas de estos triángulos y midan sus longitudes, con esta información calculen sus áreas, completen la tabla.

Solución:

En este enunciado se encuentra de alguna manera similitud con el anterior, pues parte de la misma grafica pero se incluyen otros aspectos que intentan acercar un poco más al estudiante a la comprensión de la variación proporcional directa.

Variación de la altura y el área de los triángulos en relación con la distancia de la estaca a A.					
Distancia a la estaca A (en cm)	**A y 5**	**A y 4**	**A y 3**	**A y 2**	**A y 1**
	30	60	90	120	150
Longitud de la altura (en cm)	**25**	**55**	**80**	**110**	**135**
Valor del área	**312.5**	**1375**	**3000**	**5775**	**8775**

Para que el estudiante pueda completar la tabla debe de tener en cuenta los datos obtenidos en la situación anterior y realizar nuevas mediciones que le permitan calcular el área de los triángulos.

Sin embargo, de acuerdo con la forma en que se presenta el enunciado no es claro cuáles son los triángulos a los cuales se les va a calcular el área, pues solo de utiliza para referenciar los triángulos dos vértices (A, 5), (A, 4), en lugar de tres vértices, que serían (5, A, 7), (4, A, 8), etc. Esto puede generar obstáculos en la comprensión de lo que se debe hacer puesto que la tabla está diseñada tiendo en cuenta el problema anterior, solo se le agregan unas celdas de acuerdo con lo que se pide y se deja de lado la simbolización matemática propia de los triángulos.

Trabajo individual

P1: Hay muchos hechos en los que es posible encontrar dos magnitudes que varían de forma proporcional directa. Estudia la variación de las siguientes magnitudes, haz la gráfica y decide si las magnitudes son directamente proporcionales.

Hecho: se compran 1, 2, 3, etc., unidades de un mismo artículo.
Magnitudes: número de artículos comprados.
Valor pagado.
¿El valor pagado es directamente proporcional al número de artículos comprados?

Solución:

Para llegar a una solución es necesario agregar un valor aleatorio a las magnitudes para posteriormente observar la variación. En este caso se establece que cada unidad tiene un valor de $1500 y la gráfica utilizada es una tabla.

Unidades compradas	*1*	*2*	*3*
Valor pagado ($)	*1500*	*3000*	*4500*

Luego, es posible afirmar que las magnitudes son directamente proporcionales, es decir el valor pagado es directamente proporcional a la cantidad de unidades compradas de un mismo artículo.

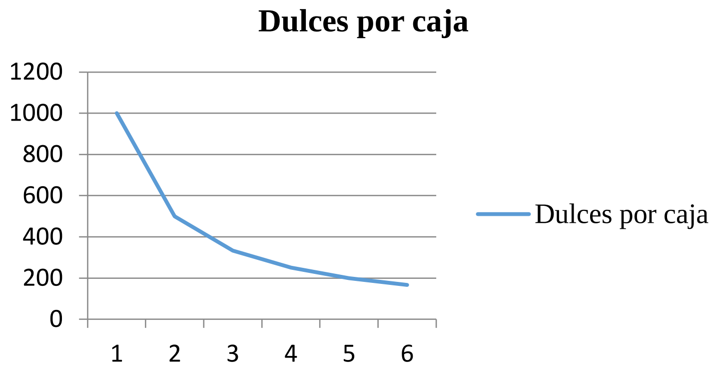
En esta situación se busca que el estudiante mediante el análisis de la información brindada logre establecer si las magnitudes varían de forma directa. En dicha situación se motiva al estudiante a construir sus propios conceptos y a que sea él mismo quien asigne datos, valores, y no este limitado a una sola posibilidad. Una posible causa de confusión para el estudiante puede provenir de las palabras "unidades" "mismo artículo" puesto que no se específica a qué artículo se refiere, y por otro lado no es claro a que se refieren las unidades si son gr, lb, etc. Esto lo puede interpretar un estudiante como objetos distintos que refieren a cosas distintas.

P8. Juana tiene 1000 dulces, que desea empacar colocando la misma cantidad en cada caja, hace la siguiente tabla para tener información rápida de la cantidad de dulces que empaca en cada caja.

Numero de cajas	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Dulces por caja	*1000*	*500*	*333.3*	*250*	*200*	*166.6*

- *Elabora una gráfica cartesiana*
- *Estas dos magnitudes son directamente proporcionales.*

Solución



Mediante la gráfica se puede afirmar que las dos magnitudes establecidas no son directamente proporcionales.

Este enunciado en comparación con los enunciados anteriores no implica la utilización de cálculos matemáticos para conocer si las magnitudes son directamente proporcionales, más bien utiliza información tabular y procedimientos gráficos, que den cuenta de la interpretación de la misma, para conocer si las magnitudes varían o no de manera proporcional directa. Es decir, la gráfica que representa una variación proporcional directa es una línea recta, que debe relacionar la cantidad de dulces por cada caja, dicha relación debe permanecer constante.

La información dada en la tabla se presenta con valores numéricos, que permiten ubicarlos en el gráfico cartesiano, sin conservar ningún patrón en la distancia, entre uno y otro, por lo que se podría decir que es una razón más para establecer que no se está hablando de razones que conservan magnitudes constantes.

P4. Cada 25 segundos la rueda de un molino da 3 vueltas. ¿Cuántas vueltas da en 20 minutos y 11 segundos?

Solución: *Primer paso: asegurarse que las magnitudes involucradas en el problema son directamente proporcionales. Magnitudes: Número de vueltas de la rueda* ***y*** *tiempo que dura la* *rueda dando vueltas Segundo paso: como ya se sabe que las magnitudes son directamente proporcionales, y ya que las razones entre sus valores correspondientes son equivalentes. Entonces:*

$$\frac{25s}{3\ vueltas} = \frac{1271s}{?}$$

$$\frac{25s}{3\ vueltas} = \frac{1271s}{?} \qquad 1271 \div 25 \approx 51$$

$$51x$$

$$\frac{25s}{3\ vueltas} = \frac{1271s}{?} \qquad 3v \times 51 = 153v$$

$$51x$$

Luego, la rueda del molino da 153 vueltas en 21 min y 11 s (1721 s)

Se observa que en este problema se alude al método de igualación de razones para llegar a una solución, para ello mencionan que cuando se tienen dos magnitudes directamente proporcionales la razón entre los valores correspondientes de las magnitudes permanece constante. Entonces, se debe reconocer el tipo de magnitudes involucradas y si son directamente proporcionales, es decir si una aumenta la otra también, lo que significa que a mayor número de vueltas del molino será mayor el tiempo.

Por otro lado, dado que el tiempo que dura la rueda girando es directamente proporcional al número de vueltas entonces se establece $\frac{25s}{3\ vueltas}$, para luego establecer la otra razón correspondiente que permite hallar el valor desconocido.

Sin embargo, se puede inferir que aunque establece alguna relación entre magnitudes, no se tiene en cuenta el proceso entre las unidades de medida de cada cantidad. Lo cual no permite establecer de manera correcta que unidad de medida representa el valor $51x$ para dar la respuesta con las respectivas unidades de medida, en este caso vueltas $\times$ segundos.

P5. En una urna se empacan canicas de dos colores: rojas y verdes. Por cada 3 canicas rojas se echan 7 verdes. ¿Cuántas canicas rojas se empacan en la urna si se sabe que hay 574 verdes?

Solución:

La razón constante corresponde a $\frac{3}{7}$*, ahora se determina la otra razón correspondiente* $\frac{x}{574}$ *y entre esta se resuelve el problema.*

Teniendo en cuenta la razón entre el número de canicas que se echan a la urna respecto a sus colores se determina que:

$$\frac{3canicas\ R}{7\ canicas\ V} = \frac{?}{574\ canicas\ V} \qquad 574 \div 7 \approx 82$$

$$82x$$

$$\frac{3canicas\ R}{7\ canicas\ V} = \frac{?}{574\ canicas\ V} \qquad 3 \times 82 \approx 246$$

$$82x$$

Por tanto, se empacaron 246 canicas rojas en la urna.

El problema presentado es de características similares al anterior, sin embargo la posición del dato desconocido cambia, pero se debe aplicar el mismo procedimiento (igualación de razones).

En este caso no se presentan cantidades continuas para operar, sencillamente se está aludiendo a una cantidad discreta de la misma naturaleza (canicas) en la cual se distinguen por la característica de color; por lo cual se esperaría que el procedimiento de solución sea más sencillo para un estudiantes, sin embargo, puede suceder que el cambio de posición de la incógnita dificulte llevar a cabo la solución.

P6. ¿Si en una urna hay 120 canicas en total, cuantas canicas hay de cada color?

Solución:

Se sabe que en la urna deben haber canicas de color rojo y verde, y la relación entre el número de canicas rojas y el número de canicas verdes es de $\frac{3}{7}$*, por lo tanto,* $120 \times 3\% = 3{,}6$ *y* $120 \times 7\% = 8.4$. *entonces si multiplicamos 3,6 y 8,4 por 10, se obtiene que: en la urna deben haber 36 canicas rojas y 84 canicas verdes.*

Este enunciado se deriva de *P5,* aunque la propuesta de solución corresponde a la igualación de razones, se observa que la solución de este, se realiza mediante la interpretación de la razón constante dada en el enunciado anterior $\frac{7}{3}$. Por lo que, puede ser una causa de confusión para el estudiante si no logra establecer la relación entre la razón y la cantidad de canicas en la urna.

P7. Un carro se desplaza 100 km cada 3 horas. ¿Cuántos Kilómetros avanzara en 25,5 horas?

Solución:

Primer paso: asegurarse que las magnitudes involucradas en el problema son directamente proporcionales.

Magnitudes: distancia en kilómetros

Tiempo de desplazamiento del auto.

Segundo paso: como ya se sabe que las magnitudes son directamente proporcionales, y ya que las razones entre sus valores correspondientes son equivalentes. Entonces:

$$\frac{3horas}{100\ Km} = \frac{25.5\ horas}{?}$$

$$\frac{3\ horas}{100\ Km} = \frac{25.5\ horas}{?} \qquad\qquad 25.5 \div 3 \approx 8.5$$

$$8.5x$$

$$\frac{3\ horas}{100\ Km} = \frac{25.5\ horas}{?} \qquad\qquad 100Km \times 8.5 \ = 850\ Km$$

$$8.5x$$

Luego, el carro avanza 850 Km en 25.5 horas.

Este enunciado se soluciona de manera similar a *P5 y P7* , sin embargo el tiempo está dado en horas para cada par de razones, por lo tanto no es necesario realizar la conversión de horas a minutos y de minutos a segundos, ya que ambas están dadas en la misma unidad de medida lo que implica un paso menos en la solución del enunciado. Por lo demás el procedimiento es de la misma naturaleza que la cartilla ha planteado para abordar enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa.

P9. Doña Estela se comprometió a hacer 60 carpetas. Si tiene que entregarlas en tres días, debe hacer 20 diarias. Completa la tabla.

Número de días	*3*	*4*	*X*
Número de carpetas diarias	*20*	*x*	*10*

Solución

Número de días	*3*	*4*	*6*
Número de carpetas diarias	*20*	*15*	*10*

Para este enunciado es necesario aplicar el siguiente razonamiento, si se demora 4 días ¿Cuántas carpetas se deben realizar a diario? y si se hacen 10 carpetas diarias, ¿Cuántos días se necesitan?, dado que es una situación común, pues se presenta en un contexto cotidiano, el estudiante puede recurrir a la colaboración de personas adultas para dar solución sin necesidad de realizar el método de igualación de razones, pero no podría establecer si se está hablando de magnitudes directamente proporcionales, por ello es importante realizar la gráfica para determinar el tipo de variación. Sin embargo al estudiante aplicar este método se encontraría con que no es posible establecer una relación directa entre $\frac{3}{20}$ y $\frac{4}{x}$, ya que $\frac{4}{3} = 1.33$ y al multiplicar 1.33×20 =26.6, resultado que no es válido si se habla de magnitudes que varían de forma proporcional.

Se han presentado nueve enunciados que resumen y ejemplifican las situaciones-problema propuestas en la tercera cartilla de matemáticas de escuela nueva para grado quinto, en las que se aborda variaciones proporcionales y magnitudes directamente proporcionales aplicadas a situaciones comunes a partir del uso del registro tabular, gráfico cartesiano y lenguaje algebraico. Hasta aquí se ha encontrado que esta propuesta incide de manera significativa en el uso de varios registros de representación, es decir condiciona al niño para que comparen, midan, calculen, construyan e infieran razonamientos. Además, vinculan el trabajo con unidades continuas y discretas que requieren de realizar procesos de conversión de unidades.

De acuerdo con lo estudiado es posible inferir que el niño debe tomar en consideración todo lo aprendido mediante la práctica para identificar cuándo dos magnitudes varían de forma proporcional, para posteriormente lograr consolidar lo aprendido llevando los datos a una tabla y finalmente graficarla y de esta manera comprobar el tipo de variación.

8. Una caracterización de la clase de enunciados-problema, presentados en la cartilla de Escuela Nueva, según los problemas de tipo multiplicativo propuestos por Vergnaud.

El trabajo se enfatizó en la identificación y caracterización del esquema que representa el isomorfismo de medida y los tratamientos propios de la estructura multiplicativa, en él se pueden identificar cuatro cantidades, relacionadas entre sí, donde x designa la cantidad buscada. Cabe destacar que el interés inicial se centra en estudiar las situaciones-problema para grado quinto, sin embargo lo que se presenta de aquí en adelante es un análisis rigurosos que requiere de una buena planeación del profesor para adaptarlo a niños de grado quinto, esto puede ser, considerar únicamente el uso de unidades concretas o tal vez un tipo de problema específico, como el que se presenta a continuación.

En el tipo de problema más simple, siempre se encuentra que una de las cuatro cantidades representa la unidad, es decir una de las cuatro cantidades es igual a uno, esta clase de problemas *es la más fundamental*. Entonces al variar la unidad o la cantidad de unidades es posible encontrar tres clases de problemas de tipo multiplicativo, cuando la incógnita varia de posición, es decir, puede ser alguna de las cuatro cantidades involucradas.

8.1 Primera clase de problema (tipo A)

En esta clase de problema se encuentra dado en el enunciado el valor de la unidad, correspondiente a *E1* y lo que se pide es hallar la cantidad (*x*) del número de unidades (*b*). Este problema representa el caso más sencillo, una *multiplicación.*

E1	*E2*
1 $\longrightarrow$	*a*
b $\longrightarrow$	*x*

Ilustración 18. Problema de multiplicación

A continuación se muestran los enunciados- problema encontrados en la cartilla, que ilustran esta clase de problema.

P1: Hay muchos hechos en los que es posible encontrar dos magnitudes que varían de forma proporcional directa. Estudia la variación de las siguientes magnitudes, haz la gráfica y decide si las magnitudes son directamente proporcionales.

Análisis vertical (escalar)

Cantidad de artículos comprados	Valor pagado en pesos
1	*1500*
$x\frac{2}{1}$	$x\frac{2}{1}$
2	*X*

$1\ articulo\ \times \frac{2}{1}\ veces = 2\ articulos$ $\qquad$ $1500\ pesos \times \frac{2}{1} veces\ = 3000\ pesos$

Mediante este enunciado se puede establecer la relación entre las unidades de E1 y las cantidades de E2, el objetivo del enunciado es, hallar el valor a pagar, si se compran 2 artículos e identificar el tipo de variación. En esta medida para poder llevar a cabo la solución se realizó un análisis vertical, o una multiplicación que lleva de 1 a 2, es decir aplicar el operador sin dimensión $x\frac{2}{1}$ o la aplicación sucesiva de dos operadores (:1) y (× 2).

Análisis horizontal (función)

Cantidad de artículos comprados		Valor pagado en pesos
1	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	*1500*
2	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	x

$$1\ \cancel{artículo} \times \frac{1500\ pesos}{1\ \cancel{artículo}} = 1500\ pesos \qquad 2\ \cancel{artículos} \times \frac{1500\ pesos}{1\ \cancel{artículo}} = 3000\ pesos$$

En este análisis permite mediante la razón funcional $\frac{1500}{1}$ introducir la noción de razón, ya que posibilita la identificación del punto de llegada a través del punto de partida, esto es de E1 a E2.

P2: consigan varios metros de piola y en un lugar plano sobre tierra o arena claven estacas cada 30 cm, así como lo muestra la figura…

Coloquen una vara desde la estaca 1 hasta la 11. Busquen que la piola quede estirada. Coloquen varas sobre el piso que unan la estaca que esta sobre la línea imaginaria que va de A a B, y la que está enfrente sobre la otra línea que va de A a C. (la estaca 5 con 7, la 4 con 8, 3 con 9, 2 con 10 y 1 con 11)[12]

Análisis vertical (escalar)

Distancia en cm	*longitud en cm*

$x\frac{60}{30}$

[12] Esta situación necesariamente requiere de unas acciones previas para poder lle[illegible]o tal análisis, y de acuerdo a las necesidades de trabajo se recurrió a utilizar el concepto de proporcionalidad para hallar los valores desconocidos.

$$x\frac{60}{30}\quad \begin{array}{c|c} 30 & 26 \\ 60 & X \end{array}$$

$$30\cancel{cm}\times\frac{60cm}{30\cancel{cm}} = 60cm \qquad 26\cancel{cm}\times\frac{60cm}{30\cancel{cm}} = 52cm$$

Para obtener el valor de la longitud de la vara 5 a la vara 6, fue necesario realizar el siguiente procedimiento $\frac{150}{30} = \frac{30}{x} = \frac{130\cdot 30}{150}$, por lo tanto $x = 26$. De esta manera se podría completar todos los datos de la tabla y posteriormente aplicar los análisis característicos del isomorfismo de medida, cuyo operador fraccionario es$\frac{60}{30}$ y en otras palabras, se puede considerar como el escalar

Análisis horizontal (funcional)

Distancia en cm		*Longitud en cm*
30	$\xrightarrow{x\frac{26}{30}}$	*26*
60	$\xrightarrow{x\frac{26}{30}}$	x

$$30\cancel{cm}\times\frac{26cm}{30\cancel{cm}} = 26cm \qquad 60\cancel{cm}\times\frac{26cm}{30\cancel{cm}} = \ 52cm$$

Dado que los ejemplos no siempre van a involucrar el valor de la unidad, y más bien pueden aparecer valores diferentes, por lo cual se convierte en un problema de mayor dificultad, es necesario tomar en consideración la noción de razón operador ($\frac{x`}{x}$) del análisis escalar, propuesto por Vergnaud para hallar el valor unitario cuando este no aparece. Los siguientes enunciados-problema, propuestos en la cartilla se pueden clasificar mediante las siguientes subclases.

Números enteros grandes y valor unitario decimal

P7. Un carro se desplaza 100 km cada 3 horas. ¿Cuántos Kilómetros avanzara en 25,5 horas?

Análisis vertical (escalar)

	Tiempo en horas	*Distancia en kilómetros*	
$x\frac{25,5}{3}$	*3*	*100*	$x\frac{25,5}{3}$
	25,5	*X*	

$$\mathbf{3\,\cancel{horas}} \times \frac{\mathbf{25{,}5\ horas}}{\mathbf{3\,\cancel{horas}}} = \mathbf{25,5\ horas} \qquad \mathbf{100\ kilometros} \times \frac{\mathbf{25{,}5\,\cancel{horas}}}{\mathbf{horas}} = \mathbf{850\ kilometros}$$

Ilustración 19. Ejemplo de problema de multiplicación: números enteros grandes

Análisis horizontal (función

Tiempo en horas		Distancia en kilómetros
3	$\xrightarrow[x\frac{100}{3}]{}$	*100*
25,5	$\xrightarrow[x\frac{100}{3}]{}$	*x*

$$3\,\cancel{horas} \times \frac{100\ km}{3\,\cancel{horas}} = 100km \qquad 25{,}5\,\cancel{horas} \times \frac{100\ km}{3\,\cancel{horas}} = 850\ km$$

En el diagrama anterior no se ve representado la subclase del valor unitario de la situación problema, el cual se presenta a continuación.

	Tiempo en horas	*Distancia en kilómetros*	
:3	*1*	*33.3*	*:3*
	3	*100*	

$$\frac{\mathbf{3\ horas}}{\mathbf{3veces}} = \mathbf{1hora} \qquad \frac{\mathbf{100\ kilometros}}{\mathbf{3\ veces}} = \mathbf{33.3\ kilometros}$$

Ilustración 20. Ejemplo de problema de multiplicación: valor unitario decimal

En el diagrama se observa que la unidad se ha obtenido al dividir las unidades entre tres, de igual manera se ha hecho para obtener el valor de la unidad. Como esta subclase de problemas, se pueden encontrar muchos más, pero para efectos del trabajo solo se mencionan las encontradas en el análisis de cada enunciado realizado en el capítulo III.

Números enteros grandes

P9. Doña Estela se comprometió a hacer 60 carpetas. Si tiene que entregarlas en tres días, debe hacer 20 diarias.

A partir del enunciado se puede establecer la relación entre las cuatro cantidades, la característica particular de este enunciado, es que el mismo enunciado da a conocer las cuatro cantidades, para luego establecer unas relaciones explicitas como: en 4 días ¿Cuántas carpetas se deben hacer a diario? Para ilustrar esta subclase se presenta el siguiente diagrama de acuerdo a análisis horizontal o funcional dl isomorfismos de medida.

Análisis Horizontal (función)

Días		*Carpetas*
1	$\xrightarrow{x\frac{20}{1}}$	*20*
3	$\xrightarrow{x\frac{20}{1}}$	*60*

$$\mathbf{1}\,\cancel{\boldsymbol{día}} \times \frac{\mathbf{20}\ \boldsymbol{carpetas}}{\mathbf{1}\ \cancel{\boldsymbol{día}}} = \mathbf{20}\ \boldsymbol{carpetas} \qquad \mathbf{3}\ \cancel{\boldsymbol{días}} \times \frac{\mathbf{20}\ \boldsymbol{carpetas}}{\mathbf{1}\ \cancel{\boldsymbol{día}}} = \mathbf{60}\ \boldsymbol{carpetas}$$

Ilustración 21. Ejemplo problema de multiplicación: números enteros grandes

La primera clase de problemas que se acaba de presentar, refleja la noción de razón funcional que hace pasar de una categoría a la otra, por lo cual se está hablando de un análisis funcional (horizontal) para trabajar problemas multiplicativos simples, que permiten introducir desde los primeros ciclos de educación la noción de fracción e incluso la de razón, y en problemas más complejos la noción de proporción.

Análisis vertical (escalar)

	Días	*Carpetas*	
$x\frac{3}{1}$	*1*	*20*	$x\frac{3}{1}$
	3	*60*	

$1dia \times \frac{3\ dias}{\cancel{1\ dia}} = 3\ dias \qquad 20\ carpetas\ \times \frac{3\ dias}{\cancel{1\ dia}} = 60\ carpetas$

Mediante el análisis vertical se tienen que $\frac{3}{1}$ es el operador fraccionario que permite pasar de 1 día a 3 días multiplicando por 3 y dividiendo entre 1. De igual manera se pasa de 20 carpetas a 60 carpetas. El análisis vertical es pues complementario del análisis horizontal y permite dar otra mirada de la misma situación problema mediante el uso de operadores multiplicativos.

8.1.1 Segunda clase de problema (tipo B)

En esta clase de problema no se encuentra el valor de la unidad, por lo tanto, lo que se pide es hallarla. Las otras dos si se conocen, por ello este tipo de problema representan una *división.*

E1		*E2*
1	$\longrightarrow$	*x*
b	$\longrightarrow$	*c*

Ilustración 22. Problema de división-partición: búsqueda del valor unitario

De acuerdo con, lo presentado en la cartilla no se encontró algún enunciado que dé cuenta de esta clase de problemas de manera explícita. Sin embargo se puede observar mediante la ilustración 20, ya que en sí, los enunciados propuestos no expresan de manera directa este tipo de problema.

8.1.2 Tercera clase de problema (tipo C)

Para esta clase de problema se desconoce el número de unidades y de igual manera que el anterior representa una división.

E1		*E2*
1	$\longrightarrow$	*a*
x	$\longrightarrow$	*c*

Ilustración 23. Problema de división- cuoticiòn: búsqueda de la cantidad de unidades.

A continuación se presenta el enunciado problema que se puede clasificar dentro de esta clase.

P4. Cada 25 segundos la rueda de un molino da 3 vueltas. ¿Cuántas vueltas da en 20 minutos y 11 segundos?

Vueltas		Tiempo en Segundos
3	$\xleftarrow{:\frac{25}{3}}$	*25*
x	$\xleftarrow[:\frac{25}{3}]{}$	*1211*

$$25segundos \div \frac{25\ segundos}{3\ vueltas} = 3\ vueltas \qquad 1211\ segundos \div \frac{25\ segundos}{3\ vueltas} = 145.32\ \ vueltas$$

Ilustración 24. Ejemplo problema de división: búsqueda de la cantidad de unidades

Se identifica como la razón funcional a $\frac{25}{3}$, la cual permite pasar del espacio de medida (vueltas) al espacio de medida (tiempo en segundos). En palabras de Vergnaud (2003) “este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función” (p.210). Este análisis además, de establecer la relación entre las cantidades de cada espacio de medida, también implica un avance en la conceptualización de la naturaleza de las cantidades y en un primer acercamiento al trabajo con funciones, en especial la función lineal.

A manera de síntesis, se encontró que la propuesta de Vernaud para abordar la enseñanza de la multiplicación en la escuela, mediante el isomorfismo de medida, no está presente de manera explícita, pues el modelo encontrado mediante el análisis da cuenta de la identificación de dos magnitudes, cuatro cantidades relacionadas mediante la formación tradicional de razones, y un número que se obtiene al dividir un valor dado entre otro. En este modelo encontrado, aunque mencionan la palabra magnitudes no establece una correspondencia entre ellas, además se reduce a aplicar operaciones de división y multiplicación, sin tener en cuenta el tipo de cantidades y la naturaleza de las mismas. Esto de ninguna manera permite establecer algún tipo de relación con la noción de función lineal, proporción, razón, proporcionalidad directa, etc. Por lo cual es posible considerar que la categoría de isomorfismo de medida y sus diferentes tratamientos y variaciones están ausentes en el desarrollo de la unidad dedicada al trabajo de la proporcionalidad directa.

8.2 Naturaleza de las cantidades en las situaciones-problema

Dentro del análisis realizado a la unidad correspondiente al trabajo de la proporcionalidad directa se puede realizar la siguiente clasificación de enunciados según las siguientes características.

Cantidad Extensiva por Cantidad Intensiva*:* (*E*× *I*)=*E'*

- *Situación-problema P1*

Cantidad extensiva (E)= 1 articulo

Cantidad intensiva (I)= $\frac{1500 \text{ pesos}}{1 \text{ articulo}}$

Mediante P1 se puede establecer la siguiente relación para dar cuenta de una cantidad extensiva de mismo tipo de la intensiva. $1\, articulo \times \frac{1500\, pesos}{1\, articulo} = 1500\, pesos.$

- *Situación-problema P4*

Cantidad extensiva (E)= 3 vueltas

Cantidad intensiva (I)= $\frac{25\, Segundos}{3\, Vueltas}$

Se observa que al realizar la operación $3\, vueltas \times \frac{25\, segudos}{3\, vueltas} = 25\, segundos.$ Donde la cantidad E` es *25 segundos, y esta cantidad es extensiva pero del mismo tipo de la intensiva.*

- *Situación- problema P7*

Cantidad extensiva *(E)= 3 horas*

Cantidad intensiva *(I)=* $\frac{100km}{3\, h}$

Al resolver resulta una cantidad *E`* del mismo tipo que aparece en I, es decir $3\, horas \times \frac{100\, Km}{3\, horas} = 850\, km.$

De acuerdo con el análisis realizado en la cartilla no se encontraron situaciones que den cuenta de *(E×E')=E''* y *(I×I')=I''* pues estas clasificaciones son muy poco comunes, debido a la poca importancia que se le da a las relaciones entre cantidades, y porque aun la multiplicación se presenta como una relación ternaria, en la que la prioridad se establece en el carácter numérico y algebraico, desligando las relaciones entre números y la unidad de medida.

CAPITULO IV

Este apartado se dedica a hacer una presentación de los dos tipos de problemas encontrados anteriormente, con el fin de realizar un análisis de acuerdo a algunos elementos semióticos de la representación en forma de tabla del isomorfismo de medida, teniendo en cuenta las actividades cognitivas y de esta manera retomar el análisis propuesto en el capítulo tres, en cuanto a la correspondencia entre el uso de representaciones semióticas y la enseñanza de la proporcionalidad directa.

9. Situaciones-problema tipo A

P1: Hay muchos hechos en los que es posible encontrar dos magnitudes que varían de forma proporcional directa. Estudia la variación de las siguientes magnitudes, haz la gráfica y decide si las magnitudes son directamente proporcionales. Se compran 1, 2, 3, etc. , unidades de un mismo artículo. La representación de la cual se hace uso de acuerdo a Vergnaud es:

Análisis horizontal (función) del registro tabular

Cantidad de artículos comprados		**Valor pagado en pesos**
1	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	*1500*
2	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	3000
3	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	*4500*
4	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	*6000*
5	$\xrightarrow{x\frac{1500}{1}}$	*7500*

$$1\ articulo \times \frac{1500\ pesos}{1\ articulo} = 1500\ pesos \qquad 2\ articulos \times \frac{1500\ pesos}{1\ articulo} = 3000\ pes$$

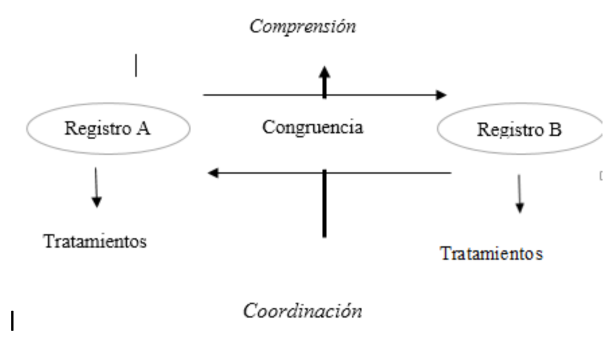
¿El valor pagado es directamente proporcional al número de artículos comprados?

Dado que el enunciado propone determinar el tipo de variación, es necesaria la construcción de un esquema de correspondencia más completo, entre los dos tipos de espacios (los artículos y el precio de cada artículo) y varias cantidades, de las cuales se señalan únicamente las indicadas por la situación. Así, por ejemplo el esquema permite observar de manera más precisa el tipo de variación sin dejar de lado el reconocimiento de las partes constitutivas y características del isomorfismo y su análisis funcional.

Aunque el enunciado propone realizar una gráfica no se refiere únicamente a la que se está presentado; este enunciado promueve el uso de varios registros de representación, como el grafico cartesiano; en este caso hablaríamos de una conversión pues permite observar un panorama distinto al ofrecido en el lenguaje natural o en el esquema sagital.

El registro tabular que se acaba de presentar despliega una serie de tratamientos en los que se mantiene un valor constante, este es $\frac{1500}{1}$, y lo que varía son las cantidades de cada espacio. Cabe resaltar que los tratamientos vinculados a este registro no son inmediatos y requieren de práctica y más cuando se involucran cantidades continuas.

Para tener una mejor claridad acerca de la relación entre las actividades cognitivas y el esquema sagital, se trae a consideración la siguiente ilustración.



En la ilustración, se observan dos registros cada uno de ellos con sus respectivos tratamientos. El registro A y el registro B tienen una relación biunívoca, es decir, una es consecuencia de la otra, pero identificar dicha relación no es algo inmediato, por ello es difícil alcanzar la comprensión. Sin embargo, se pueden buscar un camino para lograr la coordinación entre cada registro, este es el análisis funcional y la razón funcional que se obtiene mediante este análisis, dicha razón busca generar la coordinación entre los registros para alcanzar un aprendizaje.

De este modo se propone entender la razón funcional como el medio para llevar a cabo la coordinación entre cada registro y el análisis escalar para identificar los tratamientos al interior de cada registro.

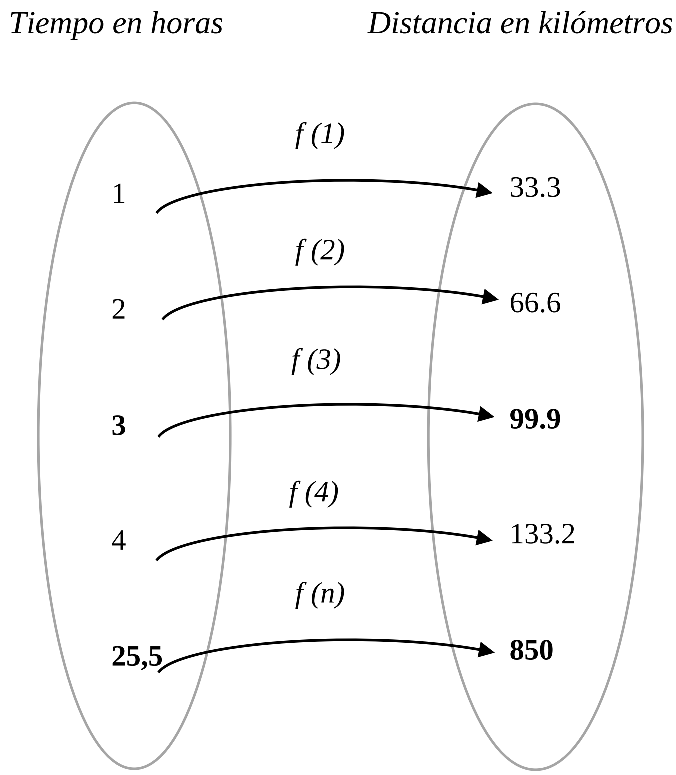
Análisis Escalar (vertical) del registro sagital

A continuación se presenta una situación- problema analizada desde el registro sagital

P7. Un carro se desplaza 100 km cada 3 horas. ¿Cuántos Kilómetros avanzara en 25,5 horas?

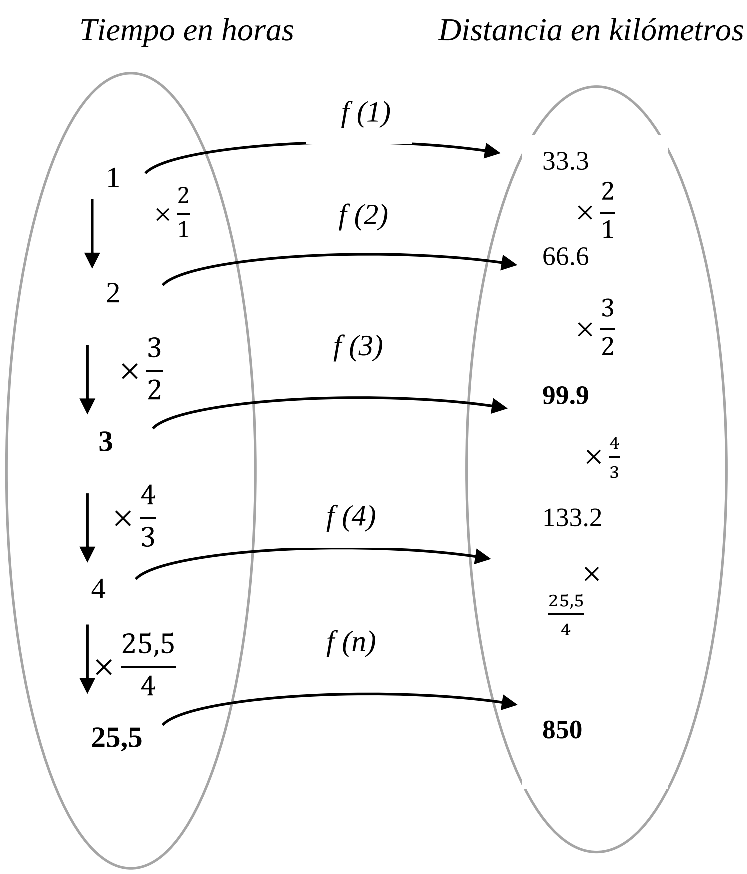
Conversión: *se cambia el sistema semiótico sin cambiar los espacios de medida y las unidades de medida[13]. Es decir, se da el paso del registro en lengua natural al registro sagital. Para cada registro de representación se debe tener en cuenta las reglas propias del registro, aunque estas no sean explicitas en algunos casos.*

[13] En negrilla se resalta las unidades planteadas en la situación-problemas. Sin embargo se agregan otras unidades para dar una mayor claridad de los tratamientos efectuados.



Para este enunciado es necesario considerar que para un mismo registro se toman unidades de distintas características, como enteros y decimales. Según Vergnaud se estaría hablando de subclases de problemas multiplicativos que se están presentando en un mismo esquema y mediante un solo enunciado. Por lo cual es recomendable, por un lado modificar el enunciado de tal manera que no se mezclen los tipos de problema y por otro tomar ventaja de las posibilidades que brinda un mismo enunciado de trabajar variedad de problemas multiplicativos con diferente tipo de unidades. Por su parte Duval considera que la escritura de números enteros y la escritura decimal constituyen dos registros diferentes, puesto que no es lo mismo pasar de 3 a 100 que de 3 a 99.9, ahora según el registro sagital es posible observar los siguientes tratamientos.

Tratamientos: se mantiene el mismo registro y se procede de acuerdo a las reglas de conformidad de dicho registro.



Los tratamientos observados son los mismos en los casos de 1 a 2, de 2 a 3, y de 3 a 4. Lo que cambia es el operador fraccionario. Sin embargo para pasar de 4 a 25,5 no implica los mismos procedimientos de tratamiento, habría que recurrir a convertir 25,5 horas a minutos para obtener una cantidad discreta. Por otra parte de acuerdo al registro sagital es posible observar la siguiente propiedad conforme a este registro, para ello se debe tener en cuenta que $k = 33.3$ y por lo tanto:

$$f1 = k$$
$$f2 = 2 \cdot f(1)$$
$$f3 = 3. f(1)$$

En esta situación se está hablando de un enunciado- problema de proporcionalidad directa que requiere de una significación de los procedimientos a realizar para lograr comprender los cambios de registro. Al observar los posibles tratamientos que posibilita este registro de representación se infiere que los procedimientos que requiere el operador fraccionario cuando las unidades son discretas pueden contribuir a lograr un primer acercamiento en grado 5 a comparación de las unidades continuas, pues implican un mayor costo de tratamiento.

9.1 Situaciones- problema tipo C

P2: consigan varios metros de piola y en un lugar plano sobre tierra o arena claven estacas cada 30 cm… Coloquen una vara desde la estaca 1 hasta la 11. Busquen que la piola quede estirada. Coloquen varas sobre el piso que unan la estaca que esta sobre la línea imaginaria que va de A a B, y la que está enfrente sobre la otra línea que va de A a C. (la estaca 5 con 7, la 4 con 8, 3 con 9, 2 con 10 y 1 con 11). Tomen medidas y completen la tabla.

Tabla propuesta en la cartilla, cuya solución se presentó en el capítulo anterior.

Variación de la longitud de la vara en relación con la distancia de la estaca a la estaca A					
Distancia a la estaca A (en cm)	***A y 5***	***A y 4***	***A y 3***	***A y 2***	***A y 1***
	30	*60*	*90*	*120*	*150*
Longitud de la vara (en cm)	***5 y 7***	***4 y 8***	***3 y 9***	***2 y 10***	***1 y 11***
	26	*52*	*78*	*104*	***130***

Conversión: del registro tabular al grafico cartesiano, con el fin de comprobar si se trata de una situación-problema de proporcionalidad directa. Cabe relatar que no es la única manera de establecer el tipo de relación, también se podría realizar al operar los extremo y los medios, y comparando los valores resultantes.

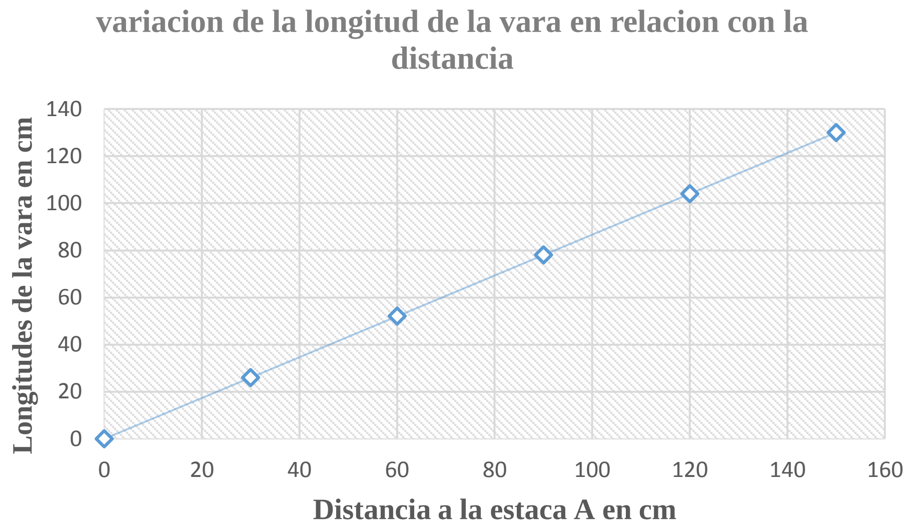


Ilustración 25: registro grafico cartesiano

Para esta situación es importante mencionar que no se podría definir una regla con la cual un estudiante logre relacionar correctamente el eje *x* con la distancia y el eje *y* con la longitud de la vara, podría hacerlo a la inversa. El cambio de registro no es inmediato aunque conserve una relación directa, y se esté trabajando con unidades discretas.

Cabe resaltar que el hecho de poder efectuar el cambio de registro no significa que haya una comprensión inmediata de lo que se está haciendo, por ello es importante reconocer la importancia de efectuar los tratamientos adecuados para cada registro y de esta manera acercarse a la coordinación de cada registro, algo por demás difícil de alcanzar.

Se presentaron tres registros de representación de acuerdo a los enunciados-problema de proporcionalidad directa propuestos en la cartilla de escuela nueva, para cada registro se evidencio los posibles tratamientos que pueden emerger durante el trabajo con ellos, teniendo en cuenta el propósito de análisis escalar y el análisis funcional de las estructuras multiplicativas de Vergnaud.

CAPITULO V

10. Conclusiones y recomendaciones

- ✓ De acuerdo al análisis de enunciados-problema realizado en las cartillas de Escuela Nueva para grado quinto referentes a la proporcionalidad directa, fue posible observar que, no es suficiente que haya un desarrollo de un único registro de representación, se requiere de varios registros y de varios análisis que permitan dar distintas miradas de la situación.
- ✓ A través de la metodología desarrollada en las cartillas se identifica una relación constante entre teoría y práctica, lo cual permite una interacción del estudiante con el objeto matemático, lo cual es muy significante en situaciones de aprendizaje. La dificultad de dicha metodología radica cuando traspasa de lo lúdico a lo teórico y necesariamente en esta parte se desconoce algunos tratamientos necesarios a la hora de dominar un conocimiento. Algunos enunciados son netamente metódicos y otros prácticos, pero necesariamente invita al estudiante a utilizar varios registros para visualizar el tipo de variación al cual se hace referencia.
- ✓ Las situaciones presentadas en la cartilla aluden a situaciones de medida y cálculos de alturas, áreas, peso, etc. Sin referirse al conjunto de expresiones de las cantidades que aparecen en la situación y se dejan de lado para operar valores numéricos. Las unidades de medida posibilitan el reconocimiento de operaciones a realizar y el tipo de problemas al cual se está enfrentando el estudiante, por lo cual sería conveniente dar mayor relevancia al dominio de dichos aspectos.
- ✓ En cuanto a los procesos utilizados, se enfatiza en operaciones como la multiplicación y división como método para trabajar la equivalencia entre “magnitudes” y la igualación de razones, además de completar tablas y graficas cartesianas.

- ✓ Respecto a las actividades cognitivas se destaca la situación de formación y de conversión, ya que en algunos enunciados se invita a la representación de la información en distintos registros, aunque no refiere explícitamente al isomorfismo de medida, se enfatiza en la representación tabular y algebraica; en ninguna de ellas se da la relevancia propia de las cantidades, especialmente a las unidades de medida y a la naturaleza de la misma.
- ✓ Los elementos teóricos presentados pueden contribuir de gran manera en el análisis de tareas o situaciones con condiciones suficientes para generar un aprendizaje significativo. Esto debido a relación que se intenta hacer visible entre los conceptos matemáticos y las representaciones semióticas por parte de Duval y la relación que Vergnaud propone para abordar conceptos tan relegados como la proporcionalidad, desde la base de la relación cuaternaria.
- ✓ Una particularidad de los análisis escalar y funcional es que se pueden acomodar a las condiciones del estudiante según su grado escolar y el objeto matemático que el docente planee trabajar, para ello es necesario analizar cada uno de los tratamientos posibles de acuerdo al tipo de unidades (continuas o discretas) y los espacios de medida utilizados.
- ✓ Es necesario que en la formulación de los enunciados se sea muy cuidadoso, pues de ahí depende en gran manera el éxito de los objetivos diseñados por parte del maestro. Es por ello que como línea de investigación para futuros trabajos se deja abierta la posibilidad de indagar sobre la formulación y comprensión de los enunciados desde un análisis discursivo. También queda la inquietud sobre la formación de profesores innovadores que diseñen actividades desde esta perspectiva y se ponga en práctica en las aulas escolares.
- ✓ Según este trabajo y las conclusiones que se han obtenido del mismo, es necesario ratificar la necesidad de investigar y consolidar una postura de la educación más integral y continua,

que brinde oportunidades de conocer las particularidades y distintas representaciones del objeto matemático y no centrarse únicamente en reglas, pasos, propiedades y algoritmos. Si no que genere conciencia sobre el sentido y el significado de cada objeto en relación con uno de mayor categoría, como se trabaja en el campo de las estructuras multiplicativas

11. Referencias Bibliográficas

Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E., & Sánchez, G. (1999). *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Barrantes, H. (2006). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática. Volumen (2),* pp 1-7.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semioticos y aprendizajes intelectuales.* (1. Myriam Vega Restrepo, Trad.) Peter Lang S.A. Editions scientifiques europeennes.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Vol (9.1) . *La Gaceta de la RSME*, 143-168.

Espinoza, E. C. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de la Ceja (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia.* Medellín, Colombia.

Gobernación, Antioquia. (2005). *Interpretación e implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.* Medellín: Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia.

Gómez, B. (2007). *La razón en semejanza: El caso del perrito.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia.

Gómez y correa. (2012). Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de educación media (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas (tesis de maestría). Universidad del Valle.* Santiago de Cali.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *EMA. Volumen 7*, pp.3-42.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de Matemáticas. *Ema. Volumen 7*, 3-42.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía* (págs. 46-94). Bogotá, Colombia: Revolución Educativa, Colombia Aprende. .

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (2009). *Praxeologias Matemáticas en torno al Numero Racional, las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en la Educación Básica.* Colombia.

Ospina, M., & Salgado, J. (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.*

Ospina, M., & Salgado, J. (2015). *La Enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva*. (Tesis de Maestría). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). Un ciclo de tareas claves para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En P. E. Perry, *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer* (págs. 3-54). Bogotá: una empresa docente.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). Problemas de una etapa: multiplicación y división. En L. Puig, & F. Cerdán, *Problema aritméticos escolares* (págs. 1-18).

Ruiz, E. F., & Lupiañez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Media. *Education & Psychology. Volumen 7*, 397-424.

Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de paulina. *Relime. Volumen 9*, 299-324.

Schwartz, J. (1998). *Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations.*

Taylor, S., & Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. En S. Taylor, & R. Bogdan, *Introduccion. Ir hacia la gente* (págs. 15-27). España: Paidos.

Valencia, J., & Diana Gómez. (2010). *Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de coovariación lineal con niños de tercero de primaria (Tesis de pregrado). Universidad del Valle.* Santiago de Cali.

Vergnaud, G. (1990). *La Teoría de los Campos Conceptuales.* CNRS y Université René. Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3,pp. 133-170,Traducción Juan D Godino.

Vergnaud, G. (1991). Los problemas de tipo multiplicativo. En G. Vergnaud, *El niño las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (págs. 197-223). México: Trillas.

Vergnaud, G. (2003). Los problemas de tipo multiplicativo. En G. Vergnaud, *El niño, las matemáticas y la realidad* (págs. 197-224). México: Trillas.

Vergnaud, G. (2003). Los problemas de tipo multiplicativo. En G. Vernaud, *El niño, las matemáticas y la realidad* (págs. 197-224). México: Trillas.