

**UTILIZACIÓN DE LAS PRUEBAS DE COMPARACIÓN DE TRATAMIENTOS EN
LAS INVESTIGACIONES FORMATIVAS DE LA UNIVERSIDAD DE SUCRE**

EFRAÍN ANTONIO ARRIETA VILLALBA

DIANA CECILIA CONTRERAS ABAD

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO – SUCRE
2004**

**UTILIZACIÓN DE LAS PRUEBAS DE COMPARACIÓN DE TRATAMIENTOS EN
LAS INVESTIGACIONES FORMATIVAS DE LA UNIVERSIDAD DE SUCRE**

EFRAÍN ANTONIO ARRIETA VILLALBA

DIANA CECILIA CONTRERAS ABAD

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de licenciado en
Matemáticas

Directora

MELBA LILIANA VERTEL MORINSON

Lic. en Matemáticas y Física

Especialista en Estadística

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO – SUCRE
2004**

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Sincelejo, Noviembre ____ de 2004

Los criterios expuestos, las opiniones expresadas y las conclusiones anotadas son de única y exclusiva responsabilidad de los autores y no comprometen en nada a la **Universidad de Sucre**
(artículo 12 del reglamento de trabajos de grado)

DEDICATORIA

A Dios por ser mi guía, fortaleza y apoyo en los momentos que sentí de fallecer y por ser, para mí, el dios que hace mis sueños realidad, y que me lleva siempre de triunfo en triunfo y de victoria en victoria.

A mis padres, Telmiro y Blanca, por creer en mí, por darme la oportunidad de realizar este sueño y por tener la paciencia al esperar que se hiciera una realidad.

A mis hermanos, Fabián, Carlos y Adrián, por motivarme, entre chanza y juego, a alcanzar este triunfo.

A mi hermana Rebeca, a su esposo, John y a mi sobrino Andrés David por permitirme vivir en su hogar y darme esos consejos que me ayudaron a crecer en muchas áreas de mi vida.

A mi amigo incondicional por haber estado en los momentos felices y difíciles de este tiempo y por darme, siempre, una palabra de aliento y fortaleza que me motivó a seguir luchando.

A todas aquellas personas que de una u otra manera me impulsaron para que hoy pueda gozarme con este gran triunfo y que sé que también se gozan conmigo.

DIANA

DEDICATORIA

A Dios, por permitirme lograr este sueño

A mis padres Guillermo Arrieta y Angelia Villalba, por confiar en mí y apoyarme en todos los momentos que los necesité.

A mi hijo Efraín Júnior, por ser el motivo por el cual me esforcé para que este sueño se hiciera realidad.

A mis hermanas Nellys e Irlena y en especial a mi hermano Edgar, quien, indirectamente, fue el guía para alcanzar este triunfo.

A mis sobrinos José Guillermo, Adriana, Marcela y Rafael Ricardo.

A mis abuelos, tíos, primos y a todas aquellas personas que con su apoyo, aprecio, nobleza y cariño me impulsaron a seguir adelante.

EFRAÍN ANTONIO

AGRADECIMIENTOS

Los autores del presente trabajo expresan sus más sinceros agradecimientos:

A Dios por su apoyo y por ayudarnos en todo, siempre.

A la Universidad de Sucre por formarnos como profesionales y por colaborarnos en la realización de este trabajo.

A la Licenciada en Matemáticas y Física y especialista en Estadística, Melba Liliana Vertel Morinson por su asesoría en la realización de este trabajo.

Al personal de las Bibliotecas de la Sede Puerta Roja y El Perico de la Universidad de Sucre por colaborarnos en recolección de la información.

A todas aquellas personas que nos colaboraron en la realización de este trabajo.

CONTENIDO

	Págs.
RESUMEN	
ABSTRACT	
1. INTRODUCCIÓN	8
2. OBJETIVOS	10
2.1. Objetivo General	10
2.2. Objetivos Específicos	10
3. ESTADO DEL ARTE	11
3.1. Antecedentes	11
3.2. Contenido Estadístico	13
3.2.1. Comparación de tratamientos	13
3.2.2. Análisis de Varianza	14
3.2.3. Pruebas de comparación de medias de tratamientos	19
3.2.3.1. Pruebas de comparación de tratamientos de naturaleza cualitativa	20
3.2.3.1.1. Prueba de Rango Múltiple de Duncan	20
3.2.3.1.2. Prueba de contrastes ortogonales	23
3.2.3.1.3. Prueba de la Diferencia Significativa Mínima (DMS)	26
3.2.3.1.4. Método de Tukey	28
3.2.3.1.5. Método de Newman – Keuls	30
3.2.3.1.6. Método de Scheffé	32
3.2.3.1.7. Método de Bonferroni	34
3.2.3.1.8. Método de T – Multivariado	36
3.2.3.2. Pruebas de comparación de tratamientos de naturaleza cuantitativa	38
3.2.3.2.1. Método de Polinomios Ortogonales	38
4. METODOLOGÍA	45
5. RESULTADOS	47
5.1. Investigaciones del Programa de Ingeniería Agrícola	48
5.2. Investigaciones del Programa de Zootecnia	55
5.3. Investigaciones del Programa de Biología	64

5.4.	Investigaciones del Programa de Ingeniería Agroindustrial	69
	CONCLUSIONES	74
	RECOMENDACIONES	75
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
	ANEXOS	78

LISTA DE TABLAS

	Págs.
Tabla 1. Representación de las observaciones en cada tratamiento	14
Tabla 2. Análisis de Varianza de un diseño completamente al azar	17
Tabla 3. Muestra las observaciones de cada tratamiento en cada uno de los bloques	18
Tabla 4. Análisis de Varianza para un Diseño de Bloques Completos al Azar	19
Tabla 5. Métodos de ensamble	21
Tabla 6. Análisis de Varianza de los datos de los métodos de ensamble	22
Tabla 7. Análisis de Varianza de los métodos de ensamble para Contrastes Ortogonales	25
Tabla 8. Diferencias entre tratamientos para la prueba de Tukey	29
Tabla 9. Transformación de las potencias de x en polinomios ortogonales	39
Tabla 10. Cantidad de grano producida por parcela, para cinco densidades de plantas	40
Tabla 11. Cálculos para contrastes con polinomios ortogonales y sumas de cuadrados	42
Tabla 12. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre la densidad de plantas y la cosecha de granos	43
Tabla 13. Cosechas de granos observadas y sus estimaciones a partir de la ecuación polinomial cuadrática	44
Tabla 14. Datos de la evapotranspiración diaria del cultivo de patilla	48
Tabla 15. Análisis de varianza de la ET diaria del cultivo de patilla	49
Tabla 16. Análisis de Varianza con contrastes ortogonales incluidos	50
Tabla 17. Datos de la producción de patilla	51
Tabla 18. Análisis de varianza para los datos de la producción de patilla	51
Tabla 19. Valores de los Coeficientes de los Polinomios Ortogonales para % de K_2SO_4	52
Tabla 20. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial entre % el exceso de K_2SO_4 y la producción de patilla	53
Tabla 21. Distribución de animales y/o lotes por tratamiento para el RCC	56
Tabla 22. Efecto de la condición sexual en el RCC (%)	56
Tabla 23. Análisis de varianza para los datos de la variable RCC	56
Tabla 24. Datos del RCC utilizando como repeticiones los 19 lotes	57
Tabla 25. Análisis de varianza del RCC utilizando como repeticiones los lotes	57
Tabla 26. Datos del peso de los conejos al momento del sacrificio (gr.)	59

Tabla 27. Análisis de varianza para el peso al sacrificio	60
Tabla 28. Prueba de Contrastes Ortogonales para peso al sacrificio	60
Tabla 29. Valores de coeficientes de los polinomios ortogonales para el % de harina de Guandul	61
Tabla 30. Análisis de Varianza para la relación del modelo polinomial entre % de harina de Guandul y el peso al sacrificio de los conejos	62
Tabla 31. Datos del número de explantes vivos en la etapa de iniciación	64
Tabla 32. Análisis de varianza para el número de explantes vivos en la etapa de iniciación	65
Tabla 33. Valores de los Coeficientes de los Polinomios Ortogonales para el % de Agar	66
Tabla 34. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial entre el % de Agar y el número de explantes vivos	67
Tabla 35. Datos de las concentraciones de azúcares para % de sacarosa y de harina de batata	69
Tabla 36. Análisis de varianza de la concentración de azúcares para % de sacarosa y de harina de batata	70
Tabla 37. Análisis de varianza de la concentración de azúcares para % de sacarosa	71
Tabla 38. Análisis de varianza de la concentración de azúcares para % de harina de batata	71
Tabla 39. Coeficientes de los polinomios ortogonales para % de sacarosa	72
Tabla 40. Análisis de varianza para la relación del modelo Polinomial entre el % de sacarosa y la concentración de azúcares	72

LISTA DE ANEXOS

	Págs.
ANEXO 1. Valores tabulados de la distribución F	79
ANEXO 2. Valores críticos para la prueba de Duncan (1%)	84
ANEXO 3. Puntos críticos para la distribución t de student	86
ANEXO 4. Puntos porcentuales del estadístico rango estudentizado (5%)	87
ANEXO 5. Tabla de Bonferroni	88

RESUMEN

Este trabajo se desarrollo con el propósito de estudiar la utilización de las pruebas de comparación de medias de tratamientos o comparación múltiple en las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre.

Se desarrolló una parte teórica en la cual se describen las pruebas de comparación de medias de tratamientos (Duncan, Contrastes Ortogonales, Tukey, Newman – Keuls, Diferencia Mínima Significativa, T – Multivariado, Bonferroni, Scheffé y Polinomios Ortogonales) y una parte aplicativa en la cual se revisaron y corrigieron 6 investigaciones formativas, aplicando la prueba adecuada para la información encontrada en ellas. Se revisaron dos del programa de Zootecnia, una de Biología, dos de Ingeniería Agrícola y una de Agroindustrial.

Se encontraron 67 investigaciones en las cuales se utilizó diseño experimental y pruebas de comparación múltiple; 17 en Biología, en las cuales el 80% las utilizaron inadecuadamente; 22 en Zootecnia, en las cuales el 36 % las utilizaron inadecuadamente; 4 en Ingeniería Agroindustrial, en las cuales el 50% las utilizaron inadecuadamente y 23 en Ingeniería Agrícola, en las cuales el 65 % las utilizaron inadecuadamente.

Los errores más frecuentes que se presentan son: 1) utilizar una prueba para comparar tratamientos de naturaleza cualitativa con factores de naturaleza cuantitativa; 2) utilizar la prueba de Duncan en la comparación de 4 o más tratamientos, debido a que es una prueba poco potente para detectar pequeñas diferencias significativas y es propensa a aumentar el error tipo I por el número de comparaciones que realiza; 3) realizar el diseño experimental de manera incorrecta.

ABSTRACT

This work you development with the purpose of studying the use of the tests of comparison of stockings of treatments or multiple comparison in the formative investigations of the University of Sucre.

A theoretical part was developed in which the tests of comparison of stockings of treatments are described (Duncan, Contrasts Orthogonal, Tukey, Newman - Keuls, Least Significant difference (LSD), T - Multivariado, Bonferroni, Scheffé and Polynomials Orthogonal) and a part applicative in which you/they were revised and they corrected 6 formative investigations, applying the appropriate test for the information found in them. Two of the program of Zootecnia were revised, one of Biology, two of Agricultural Engineering and one of Agroindustrial.

They were investigations in which it was used experimental design and tests of multiple comparison; 17 in Biology, in which the 80% used them in an incorrect way; 22 in Zootecnia, in which the 36% used them improperly; 4 in Agroindustrial Engineering, in which 50% used them improperly and 23 in Agricultural Engineering, in which the 65% used them improperly.

The most frequent errors that are presented are: to use a test to compare treatments of qualitative nature with factors of quantitative nature. To use the test of Duncan (that is a not very potent test to detect significant and prone small differences to increase the error type I for the number of comparisons that he/she carries out), in the comparison of 4 or more treatments. To carry out the experimental design in an incorrect way.

1. INTRODUCCIÓN

En un informe estadístico, la etapa del análisis e interpretación de datos se puede considerar como la más importante, ya que esta tiene que ver con la formulación del objetivo de la investigación y de las hipótesis planteadas; sin embargo, este proceso se hace más difícil, si el investigador no tiene pleno conocimiento de los métodos que se pueden utilizar para realizar un análisis concreto, claro y veraz de la información (Martínez, 2002).

Los métodos estadísticos, en su sentido más amplio, deben jugar un papel fundamental en el proceso investigativo y garantizar la objetividad de los resultados. “Una utilización inadecuada de los métodos estadísticos puede dar lugar a conclusiones erróneas” (Carbonell y Camacho, 1993).

En algunas investigaciones formativas de la Universidad de Sucre, en las cuales se ha trabajado con diseño experimental y pruebas de comparación de tratamientos, se encontró que los estudiantes aplicaron pruebas inadecuadas para el análisis de los datos recolectados.

Los estudiantes obviaron que a partir del problema, de los recursos disponibles y del objetivo de dicha investigación se establece el método o prueba a utilizar, de tal manera que este responda con mayor eficacia a las preguntas que generaron la investigación; y por el contrario, buscaron que todo lo anterior se ajustara a dicho método o prueba, sin tener en cuenta que este proceso es incorrecto y que no les daría los resultados verdaderos que debía arrojar la investigación al analizar la información adecuadamente (Carbonell y Camacho, 1993).

Las pruebas de comparación de medias de tratamientos se deben usar con mucha cautela, debe identificarse y concienzudamente estudiar cada situación. Una prueba específica para

comparar medias de tratamientos debe depender del propósito del experimento y de si tales experimentos tienen estructura (Martínez, 1997).

En muchas de las investigaciones revisadas se encontró que los estudiantes usaron la prueba de Duncan para el análisis de la información recolectada y que debido a esto, ignoraron información útil, obteniendo en algunos casos conclusiones sesgadas o insostenibles (Martínez, 1997).

El propósito es mostrar la utilización correcta de las pruebas de comparación de medias de tratamientos (Duncan, Contrastes Ortogonales, Diferencia mínima Significativa (DMS), Tukey, Newman – Keuls, Scheffé, Bonferroni, T- Multivariada, Polinomios Ortogonales), con el fin de mejorar investigaciones posteriores.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio sobre las pruebas de comparación de medias de tratamientos y su utilización en las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 2.2.1.** Comparar la información recolectada en las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre con la teoría de cada una de las pruebas para determinar cual de ellas se ajusta a dicha información.
- 2.2.2.** Comparar las conclusiones obtenidas en las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre con las nuevas conclusiones obtenidas al aplicar la prueba que realmente se ajusta a la información recolectada en dichas investigaciones.
- 2.2.3.** Mostrar la importancia de utilizar correctamente las pruebas de comparación de medias de tratamientos en las investigaciones formativas de la Universidad de sucre.

3. ESTADO DEL ARTE

3.1. ANTECEDENTES

Janiet Riley (1997) en su artículo llamado “Utilización de la Estadística en las ciencias biológicas: principales problemas y soluciones” en la cual revisa la calidad de la Estadística en la investigación agrícola en Costa Rica, concluye que los Centros Nacionales de Investigación y universidades disponen de muy pocos estadísticos entre su personal, relaciones muy débiles entre investigadores agrícolas y Estadísticos, pocos estadísticos y escasos lineamientos estadísticos en comités, editoriales de revistas científicas y en agencias que financian la investigación y la enseñanza de la Estadística en las escuelas de agronomía se concentra en aspectos teóricos.

La investigación realizada por Riley & Darmi (1995) en la que revisaron revistas de acuicultura que contenían una gran proporción de artículos de países en desarrollo. Ellos encontraron que de 180 trabajos, solamente en unos pocos podría considerarse que los métodos estadísticos se usaron y los resultados se presentaron correctamente. Las razones de ello fueron atribuidas a una pobre capacitación y a una inadecuada descripción de los requerimientos de presentación en las revistas.

Camacho y Carbonell (1993) en su artículo “Problemas en la utilización de la Estadística en la investigación agrícola”, revisaron y discutieron el uso inadecuado de la Estadística en la investigación Agrícola. Identificaron algunos problemas existentes en las principales etapas del proceso, desde el diseño del experimento hasta la interpretación y presentación de los resultados, incluyendo la toma y análisis de datos.

Señala un aparte del artículo elaborado por Precce (1984) que... *“Los países del Tercer Mundo padecen gravemente de falta de capacidad en Biometría. Los experimentos agrícolas mal diseñados, inadecuadamente conducidos y superficialmente analizados son comunes...”*

“Las recetas estadísticas son seguidas ciegamente y el ritual toma el lugar del pensamiento científico”. En investigaciones realizadas por él, encontraron que en el volumen 15 de *Agronomía costarricense*, el 40% de los casos omitió o hizo una descripción confusa del diseño. En una revisión de 74 artículos publicados en dos volúmenes de la revista española *“Investigación agrícola, Serie de Producción y Protección Vegetales”* (IAPPV), solo 18 especificaron el diseño.

Otro problema común que encontraron, es la confusión que se da entre la estimación y prueba de hipótesis o significación. En la investigación agrícola se ha enfatizado exageradamente la prueba de hipótesis. En este contexto, indudablemente los problemas más frecuentes ocurren en el uso de las pruebas de comparación múltiple, a pesar de que su uso inadecuado ha sido señalado por varios autores desde hace al menos dos décadas. En el volumen 15 de *“Agronomía costarricense”*, por ejemplo, en el 30% de los casos se utilizó el análisis de varianza seguido de una comparación múltiple, usualmente la prueba de Duncan. En la mencionada revisión de IAPPV, el 73% de las pruebas fueron erróneas.

La investigación realizada por Ramón Silva Acuña, Víctor Hugo Álvarez y Annie Silva Acuña, titulada: *“COMO COMPARAR CORRECTAMENTE TRATAMIENTOS DE NATURALEZA CUALITATIVA”*, se basó en la revisión de documentos en donde se difunden los procedimientos de múltiples comparaciones a ser adoptados para el análisis de datos experimentales. En la primera parte de este trabajo se analizaron el volumen 67 de *Agronomy Journal* y constataron que el 70% de los autores usaron en forma inadecuada las pruebas de comparación de medias; de manera similar, en el volumen 70 de *Phytopathology*, el 60% de las publicaciones también habían utilizado las pruebas de medias de forma incorrecta. Las consideraciones anteriores sugieren la necesidad de que cuando se realicen investigaciones científicas, además de considerar el tamaño de la muestra, el de la parcela experimental, el número de las repeticiones y el diseño a emplear es necesario considerar la estructura de los tratamientos para que puedan ser realizadas correctamente las comparaciones, respetando así las hipótesis establecidas a priori, y entonces seleccionar la prueba de medias más adecuada para realizar tal comparación.

3.2. MARCO TEÓRICO

3.2.1. COMPARACIÓN DE TRATAMIENTOS

La comparación de tratamientos surge como una necesidad en la lógica de pretender tomar una decisión, en la solución de un problema importante o como un paso importante para el mejor entendimiento del proceso.

En el contexto de un problema de investigación o mejora surge la necesidad de realizar alguna comparación de tratamientos con el fin de elegir la mejor alternativa de las varias que existen, o por lo menos para tener una mejor comprensión del comportamiento de la variable de interés en cada uno de los distintos tratamientos. Por ejemplo, la comparación de cuatro dietas de alimentación con ratas de laboratorio, se hace con el fin de estudiar si alguna nueva dieta que se propone es mejor o igual que las dietas ya existentes; la variable de interés en este caso es el peso promedio alcanzando por cada grupo de animales después de alimentar a cada grupo con la dieta que le toco en suerte (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Por lo general el interés del experimentador se centra en comparar los tratamientos en cuanto a sus medias poblacionales, sin olvidar que también es importante compararlos en relación a sus varianzas y su capacidad actual y futura para cumplir con los requerimientos de calidad y productividad. Así, desde el punto de vista estadístico, la hipótesis fundamental a probar cuando se comparan varios tratamientos es:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a = \mu$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

con la cual se quiere decidir si los tratamientos son iguales estadísticamente en cuanto a sus medias, contra la alternativa de que al menos dos de ellas son diferentes. La estrategia natural

para resolver este problema es obtener una muestra representativa de mediciones en cada uno de los tratamientos, y con base en las medias y varianzas muestrales, construir un estadístico de prueba para decidir el resultado de dicha comparación (Gutiérrez y De la Vera, 2003).

3.2.2. ANÁLISIS DE VARIANZA (ANAVA)

El nombre de análisis de varianza (ANAVA) viene del hecho de que se utilizan cocientes de varianzas para probar la hipótesis de igualdad de medias. La idea general de esta técnica es separar la variación total en las partes con la que construye cada fuente de variación en el experimento.

En el caso del Diseño Completamente al Azar (DCA) se separan la variabilidad debida a los tratamientos y la debida al error. Cuando la primera predomina “claramente” sobre la segunda es cuando se concluye que los tratamientos tienen efecto, o lo que es lo mismo, las medias son diferentes. Cuando los tratamientos contribuyen igual o menos que el error, se concluye que las medias son iguales. Antes de comenzar con el análisis del DCA se introduce alguna notación que simplifica la escritura de las expresiones involucradas en dicho análisis (Gutiérrez y De la vera, 2003).

Tabla 1. Representación de las observaciones en cada tratamiento

Tratamientos				
T_1	T_2	T_3	...	T_a
Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1a}
Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2a}
Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	...	Y_{3a}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$Y_{r_1 1}$	$Y_{r_2 2}$	$Y_{r_3 3}$...	$Y_{r_a a}$

Y_{ij} : Representa la i – ésima observación en el tratamiento j , con $i = 1, 2, \dots, r_j$ y $j = 1, 2, \dots, a$

$Y_{\bullet j}$: Suma de las observaciones del tratamiento j

$\bar{Y}_{\bullet j}$: Media de las observaciones del j -ésimo tratamiento

$Y_{\bullet\bullet}$: Suma o total de la $N = r_1 + r_2 + \dots + r_a$

$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$: Media global o promedio de todas las observaciones

Note que el punto indica la suma sobre el correspondiente subíndice.

$$Y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r_{\bullet j}} Y_{ij}; \quad \bar{Y}_{\bullet j} = \frac{Y_{\bullet j}}{r_{\bullet j}}; \quad Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{r_{\bullet j}} \sum_{j=1}^a Y_{ij}; \quad \bar{Y}_{\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet}}{N}; \quad j = 1, 2, \dots, a$$

donde $N = \sum_{j=1}^a r_{\bullet j}$ es el total de observaciones.

El objetivo del ANAVA en el DCA es probar la hipótesis de igualdad de las respuestas medias dadas por

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a \\ H_1: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

la cual se puede escribir e forma equivalente

$$\begin{aligned} H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 \\ H_1: \tau_j \neq 0 \text{ para algún } j, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

donde τ_j es el efecto del tratamiento j sobre la variable de respuesta. Si se acepta H_0 se confirma que los efectos sobre la respuesta de los a son estadísticamente nulos (iguales a cero), y en caso de rechazar se estaría concluyendo que al menos un efecto es diferente de cero. (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Para probar la hipótesis dada por las relaciones (2.2.1) o (2.2.2) mediante la técnica de ANAVA con un criterio de clasificación, lo primero es descomponer la variable total de los datos en sus dos componentes: la variabilidad debida a tratamientos y la debida al error aleatorio.

La Suma de cuadrados de los tratamientos se puede expresar de la siguiente manera:

$$SC_{Trat} = \sum_{j=1}^a r_{\bullet j} (\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2$$

y la Suma de Cuadrados del Error se puede expresar así:

$$SC_{Error} = \sum_{i=1}^{r_{\bullet j}} \sum_{j=1}^a (Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet j})^2$$

Una medida de la variabilidad total presente en las observaciones de la tabla (2.2.1) es la suma total de cuadrados dada por

$$SC_T = \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{j=1}^a (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

La SC_T se puede expresar como $SC_T = SC_{Trat} + SC_{Error}$, es decir,

$$SC_T = \sum_{j=1}^a r_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{j=1}^a (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$$

Observando con detalle estas sumas de cuadrados, se aprecia que la SC_{trat} mide la variación o diferencias entre tratamientos, ya que si los tratamientos son muy diferentes entre si, entonces la diferencia $\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$ tenderá a ser grande en términos absolutos, y con ello también será grande la SC_{Trat} . Mientras que la SC_{Error} mide la variación dentro de tratamientos, ya que si hay mucha variación entre las observaciones de cada tratamiento entonces $Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$ tenderá a ser grande en términos absolutos (Gutiérrez y De la vara, 2003).

Como hay un total de $N = \sum_{j=1}^a r_{.j}$ observaciones, la SC_T tiene $N - 1$ grados de libertad. Hay a tratamientos o niveles de factor de interés, así que la SC_{Trat} tiene $a - 1$ grados de libertad, mientras que la SC_{Error} tiene $N - a$.

La sumas de cuadrados divididas entre sus respectivos grados de libertad se llaman *Cuadrados Medios*. Los dos que más interesan son el *Cuadrado Medio de Tratamientos* y el *Cuadrado Medio del Error*, que se denotan por

$$CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{a - 1} \quad \text{y} \quad CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{N - a}$$

Cuando la hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a = \mu$ (o $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$) es verdadera, ambos cuadrados medios son estimadores insesgados de la varianza común σ^2 de los tratamientos que se comparan. En cambio, cuando la igualdad de las a medias es falsa, el cuadrado medio del error (CM_{Error}) sigue siendo un estimador insesgado de la varianza, mientras que el cuadrado medio de tratamientos (CM_{Trat}) deja de ser un estimador insesgado de la varianza, y el sesgo que surge se atribuye a que las medias no son iguales. Es decir, los valores esperados de los cuadrados medios están dados por

$$E(CM_{Error}) = \sigma^2 \quad \text{y} \quad E(CM_{Trat}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{j=1}^a r_{\cdot j} \bar{Y}_{\cdot j}^2}{N - a}$$

En estas expresiones se aprecia mejor que cuando la hipótesis nula es verdadera, ambos cuadrados medios estiman la varianza σ^2 , ya que el segundo término de la expresión para el $E(CM_{Trat})$ sería igual a cero. Con base en este hecho se construye el estadístico de prueba como sigue: se sabe que SC_{Error} y SC_{Trat} son independientes, por lo que SC_{Error}/σ^2 y SC_{Trat}/σ^2 son dos variables aleatorias independientes con distribución ji – cuadrado con $N - a$ y $a - 1$ grados de libertad, respectivamente. Entonces, bajo el supuesto que la hipótesis nula es verdadera, el estadístico

$$f_{Calc} = \frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}}$$

debe seguir una distribución F con $(a - 1)$ grados de libertad en el numerador ($N - a$) grados de libertad en el denominador (Anexo 1) (Gutiérrez y De la vara, 2003).

A continuación se mostrará la tabla de Análisis de Varianza.

Tabla 2. Análisis de Varianza de un diseño completamente al azar

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	f_{Calc}
Tratamiento	$SC_{Trat} = \sum_{j=1}^a r_{\cdot j} (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$ $= \sum_{j=1}^a \frac{r_{\cdot j} Y_{\cdot j}^2}{r_{\cdot j}} - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{N}$	$a - 1$	$CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{a - 1}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}}$
Error	$SC_{Error} = \sum_{i=1}^{r_{\cdot j}} \sum_{j=1}^a (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j})^2$ $= \sum_{j=1}^a (r_{\cdot j} - 1) s^2$	$N - a$	$CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{N - a}$	
Total	$SC_T = \sum_{i=1}^{r_{\cdot j}} \sum_{j=1}^a (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$ $= \sum_{i=1}^{r_{\cdot j}} \sum_{j=1}^a (Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{N})$	$N - 1$		

(Gutiérrez y De la Vara, 2003)

En el caso de un diseño de Bloques Completamente Aleatorizado (DBCA) los tratamientos se distribuyen aleatoriamente en las unidades experimentales dentro de cada bloque, con una aleatorización diferente en cada uno de ellos. Cada bloque es lo suficientemente grande para contener todos los tratamientos y la asignación real de cada uno de los a tratamientos dentro de cada bloque se hace al azar. Una vez se ha realizado el experimento, los datos se registran en una tabla, como la que se muestra a continuación (Montgomery y Runger, 2002).

Tabla 3. Muestra las observaciones de cada tratamiento en cada uno de los bloques

Bloques	Tratamientos			
	1	2	...	a
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1a}
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2a}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
b	Y_{b1}	Y_{b2}	...	Y_{ba}

El procedimiento general de un diseño de bloques completos aleatorizados consiste en seleccionar b bloques y correr una réplica correcta completa del experimento en cada bloque.

Se describirá ahora el análisis estadístico de un diseño de bloques completos aleatorizados. Suponer que el interés se centra en un solo factor con a niveles y que el experimento se corre en b bloques. Las observaciones pueden representarse con el modelo estadístico lineal

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \text{ donde } i = 1, 2, \dots, a \text{ y } j = 1, 2, \dots, b$$

donde μ es la media general, τ_j es el efecto del tratamiento j -ésimo, β_i es el efecto del bloque i -ésimo y ε_{ij} es el término del error aleatorio, el cual se supone que tiene una distribución normal e independiente con media cero y varianza σ^2 . Los tratamientos y los bloques se considerarán inicialmente como factores fijos. Además, los efectos de los tratamientos y los bloques se definen como desviaciones de la media general, por lo que $\sum_{j=1}^a \tau_j = 0$ y $\sum_{i=1}^b \beta_i = 0$. Se supondrá asimismo que no hay interacción entre los tratamientos y los bloques. Es decir, el efecto del tratamiento j -ésimo es el mismo, independientemente del bloque (o bloques) en que se pruebe. A continuación se muestra la

tabla de Análisis de Varianza de un Diseño de Bloques Completos Aleatorizados (Montgomery y Runger, 2002).

Tabla 4. Análisis de Varianza para un Diseño de Bloques Completos al Azar

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	f_{Calc}
Tratamiento	$SC_{Trat} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^a Y_{\cdot j}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$	$a - 1$	$CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{a - 1}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}}$
Bloques	$SC_{Bloq} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^b Y_{i\cdot}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$	$b - 1$	$CM_{Bloq} = \frac{SC_{Bloq}}{b - 1}$	
Error	$SC_{Error} = SC_T - SC_{Trat} - SC_{Bloq}$	$(a-1)(b-1)$	$CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$SC_T = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$	$ab - 1$		

3.2.3. PRUEBAS DE COMPARACIÓN DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS

Cuando se rechaza la hipótesis nula H_0 , y por consiguiente se acepta la hipótesis alterna $H_1 : \mu_j \neq \mu_{j'}$ para algún $j \neq j'$, es necesario investigar cuáles tratamientos resultaron diferentes, o cuáles tratamientos provocan la diferencia. Estos interrogantes se responden probando la igualdad de todos los posibles pares de medias, mediante la hipótesis

$$H_0 : \mu_j = \mu_{j'}$$

$$H_1 : \mu_j \neq \mu_{j'}$$

para toda $j \neq j'$. Para probar estas hipótesis se han propuesto muchos métodos diferentes, conocidos como *métodos de comparaciones múltiples o pruebas de rango múltiple*. La diferencia primordial entre los métodos radica en la *potencia* que tienen para detectar las diferencias entre las medias de tratamientos de naturaleza cualitativa (como son: Duncan, Scheffé, Tukey, DMS, Newman – Keuls, T – multivarido, Contrastes Ortogonales, Bonferroni). Se dice que una prueba es más potente si es capaz de detectar diferencias más

pequeñas, siempre y cuando estas diferencias sean reales. A continuación veremos algunos de estos métodos. (Gutiérrez – De la Vara, 2003)

3.2.3.1. PRUEBAS PARA COMPARAR TRATAMIENTOS DE NATURALEZA CUALITATIVA

3.2.3.1.1. PRUEBA DE RANGO MÚLTIPLE DE DUNCAN

Se usa para encontrar diferencias significativas en muestras cualitativas. Para aplicar la prueba de Duncan en la comparación de todos los pares de medias, cuando las muestras son iguales, los a promedios de los tratamientos se arreglan en orden ascendente, y el error estándar de cada promedio se determina como:

$$S_{\bar{Y}_{\bullet j}} = \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} \quad (2.3.1)$$

Para tamaños de muestras desiguales, se sustituyen en la ecuación (2.3.1) con la media armónica $\bar{r}_{\bullet j}$ del $\{r_{\bullet j}\}$ donde

$$\bar{r}_{\bullet j} = \frac{a}{\sum_{j=1}^a (1/r_{\bullet j})}$$

Observe que si $r_{\bullet 1} = r_{\bullet 2} = \dots = r_{\bullet a}$, $\bar{r}_{\bullet j} = r_{\bullet j}$. En la tabla de Duncan de los rangos significativos (Anexo 2) se obtienen los valores $r_{\alpha}(p, v)$ para $p = 2, 3, \dots, a$, donde α es el nivel de significación y v es el número de grados de libertad del error. Estos rangos se convierten en un conjunto de $a - 1$ rangos mínimos significativos (por ejemplo R_p) para $p = 2, 3, \dots, a$ calculando

$$R_p = r_{\alpha}(p, v) S_{\bar{Y}_{\bullet j}} \quad \text{para } p = 2, 3, \dots, a.$$

Entonces, se prueban las diferencias observadas entre las medias, empezando con la más grande contra la menor, la cual se compararía con el rango mínimo de significación R_a . Después se calcula la diferencia de la mayor y la segunda menor y se compara con el

rango mínimo de significación R_{a-1} . Estas comparaciones se continúan hasta que todas las medias se han comparado con la media mayor. Por último se calcula la diferencia entre la segunda media mayor y la menor y se compara con el rango mínimo de significación R_{a-1} . Este proceso se continúa hasta que se han considerado las diferencias entre todos los $\frac{a(a-1)}{2}$ pares de medias posibles. Si una diferencia observada es mayor que el rango de significación mínima correspondiente, se concluye que el par de medias en cuestión es significativamente diferente, para evitar contradicciones, ninguna de las diferencias entre un par de medias se considera significativa si las dos medias en cuestión se localizan entre otras dos medias que no difieren significativamente (Montgomery, 1995).

Los valores de $r_{\alpha}(p, \nu)$ se eligen de manera tal que se obtenga el nivel de protección especificado. En general, el nivel de protección es $1 - \alpha$ para la comparación de dos medias que son adyacentes, y es $(1 - \alpha)^{p-1}$ cuando las dos medias bajo comparación son miembros de un grupo de p medias. Por tanto, esta prueba tiene una tasa de error experimental por pasos mayor que α . Si deben hacerse muchas comparaciones, entonces debe utilizarse otro procedimiento para controlar de mejor manera el error experimental por pasos (Montgomery y Runger, 1998).

Ejemplo 1: Un equipo de mejora investiga el efecto de cuatro métodos de ensamble A, B, C y D, sobre el tiempo de ensamble en minutos. Se aplicaron cuatro veces los cuatro métodos de ensamble en orden completamente aleatorio. Los tiempos de ensamble obtenidos se muestran en la siguiente tabla, (usar $\alpha = 0.05$):

Tabla 5. Métodos de ensamble

Método de ensamble	A	B	C	D	Totales
Tiempo de ensamble en minutos	6	7	11	10	
	8	9	16	12	
	7	10	11	11	
	8	8	13	9	
$r_{\cdot j}$	4	4	4	4	N = 16
$Y_{\cdot j}$	29	34	51	42	$Y_{\cdot\cdot} = 156$
$\bar{Y}_{\cdot j}$	7.25	8.5	12.75	10.5	$\bar{Y}_{\cdot\cdot} = 9.75$
$s^2_{\cdot j}$	0.916	1.66	5.583	1.66	

Probaremos la hipótesis de que al menos dos de los tiempos promedios de los cuatro métodos de ensamble son diferentes, utilizando el análisis de varianza.

Las hipótesis son:

$$H_0 = \tau_A = \tau_B = \tau_C = \tau_D = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ al menos para una } i = A, B, C, D.$$

Tabla 6. Análisis de Varianza de los datos de los métodos de ensamble.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	f_{calc}	p-value
Tratamiento	69.5	3	23.17	9.42	0.0018
Error	29.5	12	2.46		
Total	99.0	15			

Para probar esto se hará uso de $\alpha = 0.05$. Puesto que $f_{0.05,3,12} = 3.49$ es menor que $f_{calc} = 9.42$, se rechaza H_0 , es decir, que los tiempos promedios de los cuatro métodos de ensamble no son estadísticamente iguales y se concluye que sí hay diferencias o efecto de los métodos de ensamble en cuanto al tiempo promedio. (Gutiérrez y De la vara, 2003).

Como hay diferencias entre las medias de los tratamientos, pero no se tiene información específica sobre cuales tratamientos son diferentes entre sí, se procede aplicando el método de Duncan para encontrar cuales de ellas son diferentes.

Ahora, como $a = 4$ medias, $r_{\bullet j} = 4$, $CM_E = 2.46$ y las medias de los tratamientos en orden ascendente son:

$$\bar{y}_{A\cdot} = 7.25 \text{ min}$$

$$\bar{y}_{B\cdot} = 8.50 \text{ min}$$

$$\bar{y}_{D\cdot} = 10.50 \text{ min}$$

$$\bar{y}_{C\cdot} = 12.75 \text{ min}$$

El error estándar de cada media es $S_{\bar{y}_{\bullet j}} = \sqrt{CM_E / r_{\bullet j}} = \sqrt{2.46 / 4} = 0.78$. De la tabla de rangos significativos (Anexo 2) para $v = 12$ grados de libertad para el error y $\alpha = 0.05$, se tiene que $r_{0.05}(2, 12) = 3.08$, $r_{0.05}(3, 12) = 3.23$ y $r_{0.05}(4, 12) = 3.33$. Por tanto, los rangos menos significativos son

$$R_2 = r_{0.05}(2,12)s_{\bar{Y}_{\cdot j}} = (3.08)(0.78) = 2.40$$

$$R_3 = r_{0.05}(3,12)s_{\bar{Y}_{\cdot j}} = (3.23)(0.78) = 2.52$$

$$R_4 = r_{0.05}(4,12)s_{\bar{Y}_{\cdot j}} = (3.33)(0.78) = 2.60$$

Las comparaciones entre tratamientos por la prueba de Duncan es la siguiente:

Comparación	Diferencia	R	Decisión	
C vs. D	12.75 – 10.50	R ₂ = 2.40	2.25 < 2.40	N. S.
C vs. B	12.75 – 8.50	R ₃ = 2.52	3.27 > 2.52	*
C vs. A	12.75 – 7.25	R ₄ = 2.60	5.5 > 2.60	*
D vs. B	10.50 – 8.50	R ₂ = 2.40	2.0 < 2.40	N. S.
D vs. A	10.50 – 7.25	R ₃ = 2.60	3.25 > 2.60	*
B vs. A	8.50 – 7.25	R ₂ = 2.40	1.25 < 2.40	N. S.

De este análisis, resulta

Tratamientos	C	D	B	A
Promedios	12.75 a	10.50 a	8.50 ab	7.25 bb

Letras iguales no difieren por la prueba de Duncan al nivel del 5% de significancia. Es decir entre los tratamientos C y D no hay diferencias, siendo los peores en cuanto tienen los tiempos promedios más altos. El tratamiento A es el que tiene menor tiempo promedio, por lo tanto, es el mejor (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

3.2.3.1.2. PRUEBA DE CONTRASTES ORTOGONALES

Un Contraste Ortogonal o comparación entre las medias es una diferencia entre las mismas, con signos algebraicos apropiados. También se pueden considerar como funciones lineales específicas entre las medias (Fondo Nacional Universitario, 1997).

La comparación de las medias de los tratamientos de interés, implicará una combinación

lineal de los totales de los tratamientos como $C = \sum_{j=1}^a c_j y_{\cdot j}$

con la restricción de que $\sum_{j=1}^a c_j = 0$. A estas combinaciones lineales se les llama **contrastes**. La suma de cuadrados de cualquier contraste es

$$SC_o = \frac{\left(\sum_{j=1}^a c_j y_{\bullet j} \right)^2}{r_{\bullet j} \sum_{j=1}^a c_j^2} \quad (2)$$

que tiene un solo grado de libertad. Si el diseño es desbalanceado, entonces las comparaciones de las medias de los tratamientos requiere que $\sum_{j=1}^a r_{\bullet j} c_j = 0$, y la ecuación (2) pasa a ser

$$SC_z = \frac{\left(\sum_{j=1}^a c_j y_{\bullet j} \right)^2}{\sum_{j=1}^a r_{\bullet j} c_j^2}$$

Un contraste se prueba comparando su suma de cuadrados con el cuadrado medio del error. El estadístico resultante tiene una distribución como la F, con 1 y $N - a$ grados de libertad. Dos contrastes con coeficientes $\{c_j\}$ y $\{d_j\}$ son ortogonales si

$$\sum_{j=1}^a c_j d_j = 0$$

ó, en el caso de un diseño desbalanceado, si

$$\sum_{j=1}^a r_{\bullet j} c_j d_j = 0.$$

Para a tratamientos, un conjunto de $a - 1$ contrastes ortogonales harán la partición de la suma de cuadrados debida a los tratamientos en $a - 1$ sumas de cuadrados independientes, con un solo grado de libertad. Por tanto, las pruebas realizadas en contrastes ortogonales son independientes (Montgomery y Runger, 2002).

Hay muchas maneras de elegir los coeficientes de los contrastes ortogonales para un conjunto de tratamientos. Por lo general, algún elemento del contexto del experimento deberá sugerir cuales de las comparaciones son de interés (Montgomery y Runger, 2002).

El método de contrastes ortogonales es útil para hacer comparaciones preplaneadas, es decir, los coeficientes de contraste deben elegirse antes de llevar a cabo el experimento, ya que si estas comparaciones se seleccionan después de examinar los datos, la mayoría de los experimentadores construirían pruebas que compararían las diferencias de las medias más grandes (Montgomery y Runger, 2002).

Estas diferencias más grandes podrían deberse a la presencia de efectos reales, o podrían ser causados por el error aleatorio. Si los experimentadores eligen siempre las diferencias más grandes para hacer las comparaciones, inflarán el error tipo I de la prueba, ya que es posible que en un porcentaje excepcionalmente alto de las comparaciones seleccionadas, las diferencias observadas se deban al error (Montgomery – Runger, 2002).

Ejemplo 2: Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1. Existen cuatro métodos de ensamble, y los conjuntos posibles de comparaciones entre las medias y las comparaciones ortogonales asociadas son:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_A &= \frac{\mu_B + \mu_C + \mu_D}{3} & z_1 &= 3\mu_A - \mu_B - \mu_C - \mu_D = 0 \\ H_0 : \mu_B &= \frac{\mu_C + \mu_D}{2} & z_2 &= 2\mu_B - \mu_C - \mu_D = 0 \\ H_0 : \mu_B &= \mu_C & z_3 &= \mu_C - \mu_D = 0 \end{aligned}$$

Tabla 7. Análisis de Varianza de los métodos de ensamble para Contrastes Ortogonales.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{Tab} 5%
Tratamiento	69.5	3	23.17	9.42	3.49
$z_1 (\mu_A \text{ vs } \mu_B, \mu_C, \mu_D)$	33.33	1	33.33	13.55*	4.75
$z_2 (\mu_B \text{ vs } \mu_C, \mu_D)$	26.042	1	26.042	10.58*	4.75
$z_3 (\mu_C \text{ vs } \mu_D)$	10.125	1	10.125	0.407 N. S.	4.75
Error	29.5	12	2.46		
Total	99.0	15			

Nótese que las constantes de contraste son ortogonales. Al utilizar los datos de la Tabla 3, se obtienen los valores numéricos de los contrastes y las sumas de cuadrados como sigue.

$$\begin{aligned}
\hat{z}_1 &= 3(29) - 34 - 51 - 42 = -40 & SC_{z_1} &= \frac{(-40)^2}{4(12)} = 33.33 \\
\hat{z}_2 &= 2(34) - 51 - 42 = -25 & SC_{z_2} &= \frac{(-25)^2}{4(6)} = 26.042 \\
\hat{z}_3 &= 51 - 42 = 9 & SC_{z_3} &= \frac{(9)^2}{4(2)} = 10.125
\end{aligned}$$

Estas sumas de cuadrados de los contrastes hacen una partición completa de la suma de cuadrados de los tratamientos; esto es, $SC_{Trat} = SC_{z_1} + SC_{z_2} + SC_{z_3}$. Estas pruebas sobre los contrastes usualmente están incorporadas en el análisis, se concluye que los tratamientos B, C y D dan los peores resultados; que los tratamientos C y D no son mejores que el B y que entre los tratamientos C y D no hay diferencias.

3.2.3.1.3. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA SIGNIFICATIVA (DMS)

Frecuentemente, los analistas no saben de antemano cómo construir los contrastes ortogonales apropiados, o quizá deseen probar más de $a - 1$ comparaciones usando los mismos datos. Por ejemplo, tal vez un analista quiera comparar todos los pares posibles de medias. La hipótesis nula sería entonces $H_0: \mu_i = \mu_j$ y la hipótesis alterna $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ para toda $i \neq j$ (Montgomery – Runger, 2002).

Para a tratamientos se tiene en total $a(a - 1)/2$ pares de medias. Por ejemplo, si $a = 4$ existen $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ posibles pares de media. El estadístico de prueba para cada una de las hipótesis dadas es la correspondiente diferencia en valor absoluto de sus medias muestrales $(\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet j'})$. Se rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu_i = \mu_j$ si ocurre que

$$|\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet j'}| > t_{(\alpha/2, N-a)} \sqrt{CM_E \left(\frac{1}{r_{\bullet j}} + \frac{1}{r_{\bullet j'}} \right)} = DMS$$

donde el valor de $t_{\alpha/2, N-a}$ se lee en las tablas de la distribución T de Student (Anexo 3) con $N - a$ grados de libertad que corresponden al error, el CM_E se obtiene de la tabla de ANAVA, r_j y $r_{j'}$ son el número de observaciones para los tratamientos i y j ,

respectivamente. La cantidad DMS es la diferencia mínima que debe haber entre dos medias muestrales para poder considerar que los tratamientos correspondientes son significativamente diferentes. Así, cada diferencia de medias muestrales en valor absoluto que sea mayor que el número DMS se declara significativa (Gutiérrez y De la vara, 2003).

Note que si el diseño es balanceado, es decir, si $r_1 = r_2 = \dots = r_a = r$, la diferencia mínima significativa se reduce a

$$DMS = t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{2CM_E/r}$$

En caso de rechazar H_0 se acepta la hipótesis alterna $H_1: \mu_i \neq \mu_j$, que nos dice que las medias de los tratamientos j y j' son diferentes. El método DMS tiene una potencia importante, por lo que en ocasiones aun pequeñas diferencias las declara significativas. Trabaja con un error α mayor al declarado por el usuario (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Ejemplo 3. Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1. Los siguientes datos se toman de la Tabla 3 del Ejemplo 1:

$a = 4$ medias, $r = 4$, $CM_E = 2.46$ y $t_{0.025, 12} = 2.18$ Las medias de los tratamientos son:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{C\cdot} &= 12.75 \text{ min} \\ \bar{y}_{D\cdot} &= 10.50 \text{ min} \\ \bar{y}_{B\cdot} &= 8.50 \text{ min} \\ \bar{y}_{A\cdot} &= 7.25 \text{ min}\end{aligned}$$

$DMS = t_{(0.025, 12)} \sqrt{2CM_E/r_{\cdot j}} = 2.18 \sqrt{2(2.46)/4} = 2.42$. Por lo tanto, cualquier par de promedios de los tratamientos que difiere en más de 2.42 implica que el par de medias de los tratamientos correspondientes son diferentes.

Las comparaciones entre los promedios observados de los tratamientos son las siguientes:

$$\begin{aligned}C \text{ vs. } D &= |12.75 - 10.50| = 2.25 < 2.42 \quad \mathbf{N. S} \\ C \text{ vs. } B &= |12.75 - 8.50| = 4.25 > 2.42 \quad * \\ C \text{ vs. } A &= |12.75 - 7.25| = 5.50 > 2.42 \quad * \\ D \text{ vs. } A &= |10.50 - 7.25| = 3.25 > 2.42 \quad * \\ D \text{ vs. } B &= |8.50 - 10.50| = 2.00 < 2.42 \quad \mathbf{N. S.}\end{aligned}$$

$$B \text{ vs. } A = |7.25 - 8.50| = 1.25 < 2.42 \quad \text{N. S.}$$

Tratamientos	C	D	B	A
Promedios	12.75 a	10.50 a	8.50 ab	7.25 bb

Letras iguales no difieren por la prueba de DMS al nivel del 5% de significancia. A partir de este análisis, se observa que los tratamientos C y D son los que tienen mayor tiempo promedio y se comportan igual, por lo tanto, son los peores. El mejor tratamiento es el A con menor tiempo promedio (Gutiérrez – De la Vara, 2003).

3.2.3.1.4. MÉTODO DE TUKEY

Se trata de un procedimiento excelente para curiosear sobre los datos cuando el interés se centra en pares de medias, además, es un método más conservador que consiste en comparar las diferencias entre medias muestrales con el valor crítico dado por

$$T_{\alpha} = q_{\alpha}(a, N - a) S_{\bar{Y}_{\bullet j}}, \quad (2.3.4.1)$$

donde el error estándar $S_{\bar{Y}_{\bullet j}} = \sqrt{CM_E / r_{\bullet j}}$ se obtiene de la tabla de ANOVA, en función del cuadrado medio del error y $r_{\bullet j}$ es el número de observaciones por tratamientos, a es el número de tratamientos, $N - a$ es igual a los grados de libertad para el error, α es el nivel de significancia prefijado y el estadístico $q_{\alpha}(a, N - a)$ son puntos porcentuales de la distribución del rango estudentizado, que se puede obtener de la correspondiente tabla de los Puntos Porcentuales del Estadístico Rango Estudentizado (Anexo 4) Gutiérrez – De la Vara, 2003).

Cuando los tamaños de las muestras no son iguales la ecuación (2.3.4.1) queda como

$$T_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}(a, N - a)}{\sqrt{2}} \sqrt{CM_E \left(\frac{1}{r_{\bullet i}} + \frac{1}{r_{\bullet j}} \right)}$$

donde el error estándar sería $S_{\bar{Y}_{\bullet j}} = \sqrt{CM_E \left(\frac{1}{r_{\bullet i}} + \frac{1}{r_{\bullet j}} \right)}$ (Montgomery, 1995).

Se declaran significativamente diferentes los pares de medias cuya diferencia muestral en valor absoluto sea mayor que T_{α} . El método de Tukey trabaja con un error α muy cercano al declarado por el experimentador (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Ejemplo 4. Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1. A partir de la ANAVA se calcula el error estándar de las medias de tratamientos, como sigue

$$S_{\bar{Y}_j} = \sqrt{CM_E / r_{\bullet j}} = \sqrt{2.46 / 4} = 0.78$$

De las tablas del rango estudentizado dadas en el anexo, para $\alpha = 0.05$ se obtiene $q_{0.05}(4, 12) = 4.20$, de manera que el valor crítico es

$$T_{0.05} = q_{0.05}(4, 12) S_{\bar{Y}_j} = 4.20 \times 0.78 = 3.27$$

que al compararlos con las diferencias de las medias muestrales los resultados son:

Tabla 8. Diferencias entre tratamientos para la prueba de Tukey

Diferencia Poblacional	Diferencia muestral en valor absoluto	Decisión
C vs. D	$12.75 - 10.50 = 2.25 < 3.27$	No significativa
C vs. B	$12.75 - 8.50 = 4.25 > 3.27$	Significativa
C vs. A	$12.75 - 7.25 = 5.50 > 3.27$	significativa
D vs. B	$10.50 - 8.50 = 2.00 < 3.27$	No significativa
D vs. A	$10.50 - 7.25 = 3.25 < 3.27$	No significativa
B vs. A	$7.25 - 8.50 = 1.25 < 3.27$	No significativa

Tratamientos	C	D	B	A
Promedios	12.75 a	10.50 a	8.50 ab	7.25 ab

A partir de este análisis se observa que los peores tratamientos según la prueba de Tukey son el C y D, por tener los mayores tiempos promedios y los tratamientos A y B tienen igual comportamiento, debido a que presentan los menores tiempos promedios, por lo tanto son los mejores (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

3.2.3.1.5. MÉTODO DE NEWMAN – KEULS

El método exige que los $r_{\bullet j}$ sean iguales, sin embargo, cuando los $r_{\bullet j}$ no son muy diferentes se puede obtener una buena aproximación. En este caso, en las fórmulas siguientes $r_{\bullet j}$ se puede reemplazar por

$$\bar{r}_{\bullet j} = a \left(\frac{1}{r_{\bullet 1}} + \frac{1}{r_{\bullet 2}} + \dots + \frac{1}{r_{\bullet a}} \right)^{-1}$$

esto es, el promedio armónico de $r_{\bullet j}$. Para este método no se conoce un valor exacto de la tasa de error juiciosa por experimento. (Gutiérrez y De la vara, 2003).

Para aplicar este método, se ordenan las a medias en forma ascendente, luego se denotan las medias así: \bar{Y}_1 corresponde a la media más pequeña, \bar{Y}_2 denota la siguiente media más pequeña y así sucesivamente. La media más grande se denota mediante \bar{Y}_a . Luego los rangos estudentizados de las a medias,

$$\frac{\bar{Y}_a - \bar{Y}_1}{\sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}}}$$

se compara con el valor crítico $q_\alpha(a, N - a)$ obtenido en la tabla correspondiente (Anexo 4). Si

$$|\bar{Y}_a - \bar{Y}_1| > \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} q_\alpha(a, N - a)$$

entonces se comparan los rangos de los dos conjuntos de $a - 1$ medias

$$(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_{a-1}) \text{ y } (\bar{Y}_2, \bar{Y}_3, \dots, \bar{Y}_a) \text{ con } \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} q_\alpha(a - 1, N - a)$$

De esta manera se continúan examinando los subconjuntos de medias más pequeños, siempre y cuando los subconjuntos de medias anteriores resulten con rangos significativos. Cada vez que un rango resulte no significativo, las medias involucradas se incluyen en un solo grupo. Ningún subconjunto de medias metido en un grupo no significativo puede declararse significativo posteriormente. Cuando todas las pruebas de rangos resultan no

significantes, el procedimiento queda concluido. Todo par de medias bajo el mismo grupo no presenta diferencias significantes; de lo contrario, esto es, si pertenece a grupos diferentes, se considera estadísticamente diferente (Gutiérrez y De la vara, 2003).

El procedimiento se puede simplificar así:

1. Ordenar las a medias en forma ascendente (o descendente).
2. Calcular los puntos críticos usando la ecuación correspondientes

$$\sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} q_{\alpha}(a, N-a) = SNK_i \quad i = 1, 2, \dots, a$$

usando q para $N - a$ grados de libertad y, por turno, $a = 1, 2, \dots, p$ medias.

3. Si $|\bar{Y}_m - \bar{Y}_n| > SNK_a$ es significativa se procede a comparar $|\bar{Y}_m - \bar{Y}_{m+1}|$ y $|\bar{Y}_{m-1} - \bar{Y}_n|$ contra SNK_{a-1}
4. Se continúa de esta manera hasta que se encuentren todos los pares de comparaciones siguientes (Martínez y Martínez, 1997).

Ejemplo 5. Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1.

Métodos	A	B	D	C
Medias	7.25	8.50	10.50	12.75

Si se usa $\alpha = 0.05$, primero se compara $12.75 - 7.25 = 5.5$ con

$$q_{0.05}(4, 12) \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} = 4.20 \sqrt{\frac{2.46}{4}} = 4.20 \sqrt{0.615} = (4.20)(0.78) = 3.276 \quad \text{dado que } 5.5 > 3.276$$

seguidamente se examinan los dos subconjuntos $a - 1 = 4 - 1 = 3$.

En este caso se compara $12.75 - 8.50 = 4.25$ y $10.50 - 7.25 = 3.25$ con

$$q_{0.05}(3, 12) \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} = 3.77 \sqrt{\frac{2.46}{4}} = 3.77 \sqrt{0.615} = (3.77)(0.78) = 2.94$$

dado que $4.25 > 2.94$ y $3.25 > 2.94$ enseguida se examinan los subconjuntos de $a - 2 = 4 - 2 = 2$, de los cuales hay una comparación.

Acá se debe comparar $10.50 - 8.50 = 2$ con

$$q_{0.05}(2,12) \sqrt{\frac{CM_E}{r_{\bullet j}}} = 3.08 \sqrt{\frac{2.46}{4}} = 3.08 \sqrt{0.615} = (3.08)(0.78) = 2.40$$

dado que $2 < 2.40$, se concluye que entre las medias de B y D no existe diferencias significativas.

Tratamientos	C	D	B	A
Promedios	12.75 a	10.50 a	8.50 ab	7.25 bb

Letras iguales no difieren por la prueba de Newman – Keuls al nivel del 5% de significancia. Es decir entre los tratamientos C y D no hay diferencias, siendo los peores en cuanto tienen los tiempos promedios más altos. El tratamiento A es el que tiene menor tiempo promedio, por lo tanto, es el mejor.

3.2.3.1.6. MÉTODO DE SCHEFFÉ

Este método está diseñado para probar todos los contrastes que pudieran interesar al experimentador, en particular aquellos que involucran a más de dos medias, sin el inconveniente de inflar por ello el error tipo I. (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Solo depende del contraste y del número de observaciones, pero no del número de comparaciones. Si el número de comparaciones es muy grande, resulta más potente y por ello más recomendable que el método de Bonferroni.

Este método radica en la formulación de un contraste que es una comparación que escoge el investigador para representar una combinación lineal de cualquier número de medias de población.

Se define un contraste, denotado por L, como

$$L = \sum_{j=1}^a c_j \mu_j \quad (2.3.5.1)$$

en donde μ_j es la media del j -ésimo nivel, y las c_j son contrastes tales que $\sum_{j=1}^a c_j = 0$.

Un estimador no sesgado de L está dado por

$$\hat{L} = \sum_{j=1}^a c_j \bar{Y}_{\bullet j}, \quad (2.3.5.2)$$

cuya varianza se estima mediante

$$s^2(\hat{L}) = CM_{Error} \sum_{j=1}^a \frac{c_j^2}{r_j}. \quad (2.3.5.3)$$

Scheffé demostró que todos los posibles contrastes definidos por (2.3.5.1) se encuentran incluidos, con una probabilidad de $1 - \alpha$, en el conjunto de intervalos

$$\hat{L} - As(\hat{L}) \leq L \leq \hat{L} + As(\hat{L}),$$

en donde

$$A = \sqrt{(k-1) f_{1-\alpha, a-1, N-a}} \quad (2.3.5.4)$$

y \hat{L} y $s^2(\hat{L})$ se definen mediante (2.3.5.2) y (2.3.5.3), respectivamente. Si para algún contraste L se obtiene un intervalo a partir de (2.3.5.4) que no incluye el cero, entonces el contraste es estadísticamente discernible. Por lo tanto, en realidad para cada contraste L se está probando la hipótesis nula

$$H_0: L = 0.$$

La esencia del conjunto de intervalos definidos por (2.3.5.4) es que para todos los intervalos el nivel de confianza es de $100(1 - \alpha)$. Si se va a repetir un experimento muchas veces, y para cada uno se calculan los intervalos de confianza para todos los posibles contrastes mediante el empleo de (2.3.5.4), entonces en un $100(1 - \alpha)$ de las repeticiones, todos los intervalos de confianza serán correctos. Que el intervalo de confianza sea de $100(1 - \alpha)$ para todos los intervalos, es mejor a obtener un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ para cada par de medias de tratamientos, en cuyo caso el nivel de confianza solo es para cada par individual y no para el conjunto entero de estos (Canavos, 1999).

Ejemplo 6: Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1. Se quiere contrastar la hipótesis:

$$H_0: \mu_A = \frac{\mu_B + \mu_C + \mu_D}{3}$$

Donde se puede escribirse alternativamente como $H_0 : 3\mu_A - \mu_B - \mu_C - \mu_D = 0$, lo que implica que la hipótesis está definida por el contraste $L_0 : 3\mu_A = \mu_B + \mu_C + \mu_D$, de manera que el contraste estimado está dado por

$$\hat{L}_0 = 3\bar{Y}_A - \bar{Y}_B - \bar{Y}_C - \bar{Y}_D$$

Con las medias muestrales

Métodos	A	B	C	D
Medias	7.25	8.50	12.75	10.50

se calcula el estadístico $\hat{L}_0 = 3(7.25) - 8.50 - 12.75 - 10.50 = -10$. La varianza del contraste es

$$s^2(\hat{L}_0) = 2.46(12)/4 = 7.38. \quad \text{Como} \quad As(\hat{L}_0) = \sqrt{s^2(\hat{L}_0)(k-1)f_{1-\alpha, a-1, N-a}} = \sqrt{7.38 \times 3 \times 3.49} = 8.79 \text{ y } |\hat{L}_0| = 10, \text{ se rechaza la hipótesis, por lo tanto, podemos afirmar}$$

que los tratamientos B, C y D no son los mejores por tener mayores tiempos promedios que el tratamiento A, por lo tanto, A es el mejor (Gutiérrez – De la Vara, 2003).

3.2.3.1.7. MÉTODO DE BONFERRONI

Es particularmente bueno cuando se está interesado en un número pequeño m de comparaciones. Es recomendable el uso de este método cuando se tienen m comparaciones planeadas y el estadístico F no resulta significativo para la prueba de igualdad de medias (Martínez y Martínez, 1997).

Es uno de los más sencillos de aplicar, solo requiere el uso de la distribución t y puede aplicarse a pruebas del ANAVA que utilizan muestras de tamaños distintos. Este procedimiento intenta controlar la posibilidad de error global para el experimento reduciendo el nivel de significancia para cada comparación, de manera que realiza siguiendo una prueba significativa de F.

El procedimiento de Bonferroni se basa en los mismos supuestos que la ANAVA: las poblaciones de que proceden las muestras son normales y poseen una varianza común. Si

hay a tratamientos, muestras, entonces debe realizarse $m = \binom{a}{2} = a(a-1)/2$ comparaciones pareadas de medias; la posibilidad de error para cada comparación se establece como α/m , donde α es el nivel global de significancia para el experimento y m el número de comparaciones por realizar.

Cuando se utiliza el procedimiento de Bonferroni, la diferencia crítica (DC) que debe rebasarse para declarar significativa una diferencia positiva de medias poblacionales, $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$, está dada por

$$DC = t_{\alpha/(2m)} \sqrt{s_{\bullet\bullet}^2 \left(\frac{1}{r_{\bullet j}} + \frac{1}{r_{\bullet i}} \right)}$$

donde $m = \binom{a}{2}$ y $s_{\bullet\bullet}^2$ es la varianza total poblacional.

Si todas las muestras son del mismo tamaño, la expresión para DC se convierte a la fórmula más simple:

$$DC = t_{\alpha/(2m)} \sqrt{\frac{2s_{\bullet\bullet}^2}{r_{\bullet j}}}$$

donde $m = \binom{a}{2}$ y $r_{\bullet j}$ el tamaño común de las muestras (Weimer, 1996).

Ejemplo 7. Considérese el experimento de comparación de métodos de ensamble del Ejemplo 1. Sea $s_{\bullet\bullet}^2 = 2.45$ y $r_{\bullet j} = 4$. Como $a = 4$, el número de comparaciones de medias pareadas es $m = \binom{a}{2} = a(a-1)/2 = 4(3)/2 = 6$, el nivel de significancia para cada una de las seis comparaciones pareadas debe ser $\frac{\alpha}{2m} = \frac{0.05}{2 \times 6} = 0.0042$, la diferencia crítica que debe ser alcanzada o rebasada entre una pareja de medias para ser declarada significativa está dada por

$$DC = t_{0.0042} \sqrt{\frac{2 \times 2.45}{4}} = t_{0.0042} \times 1.106$$

para $g.l. = r_{\bullet j}(a - 1) = 4 \times 3 = 12$. Si utilizamos la tabla de Bonferroni para $\alpha = 0.05$, (Anexo 5) entonces $t_{\alpha/2m} = 3.15$, con $m = 3$ y $g.l. = 12$. No podremos utilizar la tabla de t , a menos que redondeemos 0.0042 a 0.005, porque el resultado para $g.l. = 12$ no sería exacto.

Entonces $DC = (3.15)(1.106) = 3.48$.

Las cuatro medias son:

$\bar{y}_A = 7.25 \text{ min}$, $\bar{y}_B = 8.50 \text{ min}$, $\bar{y}_C = 12.75 \text{ min}$, $\bar{y}_D = 10.50 \text{ min}$. Las seis diferencias positivas son:

$$\begin{aligned} C - D &= |12.75 - 10.50| = 2.25 < 3.48 = DC \quad \text{N. S.} \\ C - B &= |12.75 - 8.50 = 4.25| > 3.48 = DC \quad * \\ C - A &= |12.75 - 7.25 = 5.50| > 3.48 = DC \quad * \\ D - A &= |10.50 - 7.25 = 3.25| < 3.48 = DC \quad \text{N. S.} \\ D - B &= |10.50 - 8.50 = 2.00| < 3.48 = DC \quad \text{N. S.} \\ B - A &= |8.50 - 7.25 = 1.25| < 3.48 = DC \quad \text{N. S.} \end{aligned}$$

Tratamientos	C	D	B	A
Promedios	12.75 a	10.50 a	8.50 ab	7.25 ab

En resumen: del anterior análisis se concluye que los tratamientos C y D no son los mejores resultados presentan.

Los tratamientos B y A presentan iguales letras, por lo tanto, son iguales para el tiempo (min.) promedio y mejores que el C y el D.

3.2.3.1.8. MÉTODO DE T – MULTIVARIADO

Este método se aconseja cuando el experimentador tiene que hacer comparaciones de un conjunto linealmente independientes de comparaciones de μ_j . No se debe usar este procedimiento para un conjunto de combinaciones lineales que son linealmente

dependientes. Esta restricción, por lo tanto, debe prevenir el uso de este método para hacer todas las comparaciones posibles entre pares de medias, dado que el conjunto de todas las comparaciones posibles entre medias no es un conjunto linealmente independiente (Martínez y Martínez, 1997).

Si se desea hacer p comparaciones linealmente independientes, se concluirá que las comparaciones q -ésimas $\sum c_{jq}\mu_j \neq 0$, $q = 1, 2, \dots, p$, si

$$|\sum c_{jq} \bar{Y}_{\bullet j}| > t_{\alpha/2, p, N-a} \sqrt{\hat{s}_{\bullet}^2 \sum \frac{c_{jq}^2}{r_{\bullet j}}}$$

donde $\hat{s}_{\bullet}^2 = \sum_{j=1}^a \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet j})^2}{r_{\bullet j} - 1}$ y $t_{\alpha/2, p, N-a}$ es el porcentaje $\alpha/2$ superior de una distribución t - multivariada de una p con $N - a$ grados de libertad y una matriz de correlación I_p . Los de $t_{\alpha/2, p, N-a}$ se dan en la tabla t en los anexos (Martínez y Martínez, 1997).

Este método tiene una tasa de error juiciosa por experimento menor o igual a α . Ahora bien, si las combinaciones lineales $\sum c_{jq}\mu_j$ son estadísticamente independientes para $q = 1, 2, \dots, p$, la tasa de error juiciosa por experimento es exactamente igual a α . Para un conjunto específico de comparaciones linealmente independiente, este método da los mejores resultados. Si el conjunto de comparaciones de interés es linealmente independiente, el método de t - multivariado siempre será mejor que el método de Bonferroni (Martínez y Martínez, 1997).

3.2.3.3.2. PRUEBAS PARA COMPARAR TRATAMIENTOS DE NATURALEZA CUANTITATIVA

3.2.3.2.1 MÉTODO DE POLINOMIOS ORTOGONALES

El modelo polinomial que se usa con frecuencia para describir las relaciones de tendencia entre la respuesta medida y los niveles cuantitativos de un factor x es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p + e \quad (2.3.8.1)$$

Los polinomios lineal, cuadrático y cúbico proporcionan buenas aproximaciones a muchas relaciones comunes en las ciencias biológicas y físicas (Kuehl, 2001).

Es posible simplificar el análisis de tendencia si se examinan los contrastes ortogonales entre los niveles de los factores de tratamiento que miden los efectos polinomiales lineal, cuadrático y de orden más alto. Estos contrastes conocidos como polinomios ortogonales, permiten evaluar la importancia de cada componente polinomial en un caso específico (Kuehl, 2001).

En la Tabla 9 se muestran las transformaciones de las potencias de x en un polinomio ortogonal (P_{ci}) hasta de tercer orden. Los valores de la tabla 10 son válidos para cualquier distancia entre los valores de x (o niveles del factor) siempre que el espaciamiento sea igual entre ellos y el número de réplicas sea el mismo para todos los tratamientos.

Las constantes λ_i al principio de cada transformación convierte los valores de P_i en valores enteros (Kuehl, 2001).

Tabla 9. Transformación de las potencias de x en polinomios ortogonales

Media: $P_0 = 1$
Lineal: $P_1 = \lambda_1 \left[\frac{x - \bar{x}}{d} \right]$
Cuadrática: $P_2 = \lambda_2 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^2 - \left(\frac{t^2 - 1}{12} \right) \right]$
Cúbica: $P_3 = \lambda_3 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^3 - \left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right) \left(\frac{3t^2 - 7}{20} \right) \right]$

donde, t = número de niveles del factor, x = valor del factor, \bar{x} = media de los niveles del factor y d = distancia entre los intervalos.

Nótese que en la tabla 10 que el término $(x - \bar{x})/d$ ocurre constantemente en todas las transformaciones a polinomios ortogonales. La transformación $(x - \bar{x})$ centra los valores de x alrededor de 0, mientras que la división entre el incremento de los valores de x coloca los valores en una escala de incrementos de unidad (Kuehl, 2001).

Se puede hacer una partición de la suma de cuadrados de los tratamientos, en un conjunto aditivo de suma de cuadrados con 1 grado de libertad para cada uno de los $(t - 1)$ contrastes polinomiales ortogonales. En consecuencia, es posible examinar de manera secuencial la significancia de los términos lineal, cuadrático, cúbico, etc., en este modelo, para determinar que la ecuación polinomial se ajuste mejor.

A continuación se muestran las estimaciones de los coeficientes α_C para la ecuación polinomial ortogonal en la ecuación 2.3.8.1 y la suma de cuadrados para cada contraste polinomial ortogonal (Kuehl, 2001).

El interés se centra en la contribución de cada término polinomial del modelo. Una estrategia para determinar la mejor ecuación polinomial es probar la significancia de los términos en la secuencia: lineal, cuadrática, cúbica y así sucesivamente. Primero se estudia el polinomio más sencillo y se va construyendo uno más complicado conforme los datos lo requieran para una descripción adecuada. La secuencia de las hipótesis es $H_0: \alpha_1 = 0$, $H_0: \alpha_2 = 0$, $H_0: \alpha_3 = 0$, etc. Se aplica la prueba F respectiva a cada hipótesis sobre los

contrastes polinomiales ortogonales. El $f_{\text{calc}} = \text{CM}_{\text{Cont}}/\text{CM}_{\text{Error}}$ para cada contraste polinomial estimado (Kuehl, 2001).

La relación polinomial expresada como función de y y x en unidades reales de las variables observadas, es más informativa que cuando se expresa en unidades del polinomio ortogonal. (Kuehl, 2001)

Las curvas de respuesta estimadas se componen de las estimaciones de varios parámetros.

El estimador de la varianza de $\hat{y} = \bar{y}_{..} + \hat{\alpha}_1 P_1 + \hat{\alpha}_2 P_2$ es:

$$s_{\hat{y}}^2 = s_{\bar{y}_{..}}^2 + P_1^2 s_{\hat{\alpha}_1}^2 + P_2^2 s_{\hat{\alpha}_2}^2$$

El estimador de la varianza para un contraste polinomial s_c^2 es:

$$s_c^2 = \left(\frac{s^2}{r \sum P_{ci}^2} \right)$$

y el estimador del error estándar para el contraste es la raíz cuadrada de la varianza (Kuehl, 2001).

Ejemplo 9. Producción de grano y densidad de la población de plantas. Un científico desea determinar la relación entre el número de plantas por unidad de área y la producción de grano, con un régimen de fertilización y cultivo dado.

Se elaboró un experimento para estimar la curva de respuesta polinomial que caracteriza esta relación. El diseño de tratamiento consistió en cinco densidades de plantas (10, 20, 30, 40 y 50). Cada uno de los cinco tratamientos se asignó al azar entre las tres parcelas con un diseño de experimento con muestras totalmente aleatorio. Las cosechas de grano resultantes se muestran en la tabla 10.

Tabla 10. Cantidad de grano producida por parcela, para cinco densidades de plantas.

	Densidad de plantas (x)				
	10	20	30	40	50
	12.2	16.0	18.6	17.6	18.0
	11.4	15.5	20.2	19.3	16.4
	12.4	16.5	18.2	17.1	16.6
Medias ($\bar{y}_{.j}$)	12.0	16.0	19.0	18.0	17.0

Una gráfica (Gráfico 1) de las observaciones sugiere una relación cuadrática entre la cosecha de grano y la densidad de plantas. En este estudio, las respuestas medias de la cosecha ($\bar{y}_{\bullet j}$) con la densidad de plantas (x) mostrada en la tabla 9, también sugiere un polinomio cuadrático de respuesta como modelo aproximado para describir la relación biológica entre la cosecha de grano y la densidad de plantas. El objetivo de determinar la ecuación polinomial de menor orden posible que describa la relación en forma adecuada. Es posible ajustar una ecuación de cuarto grado en x , con cinco valores de x , sin embargo puede funcionar igual una ecuación menos compleja de segundo grado.

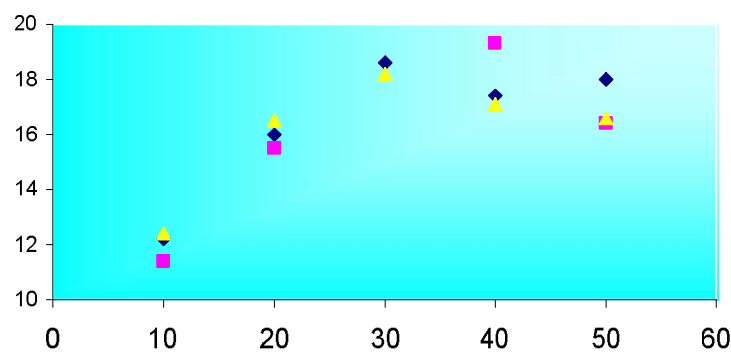


Gráfico 1. Cosecha de grano vs. densidad de plantas

Existen $t = 5$ niveles del factor de densidad de plantas y se pueden estimar $(t - 1) = 4$ contrastes ortogonales. Después de transformar los polinomios de x en polinomios ortogonales, las ecuaciones del modelo polinomial ortogonal completo para la relación entre a densidad de plantas y la cosecha de grano es:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 P_{1i} + \alpha_2 P_{2i} + \alpha_3 P_{3i} + \alpha_4 P_{4i} + e_{ij}$$

donde μ es la gran media y P_{ci} es el polinomio ortogonal de c - ésimo orden, para el i - ésimo nivel del factor de tratamiento.

Como $\bar{x} = 30$ y $d = 10$ la transformación que se obtiene

x :	10	20	30	40	50
$(x - 30)$:	-20	-10	0	10	20
$(x - 30)/10$:	-2	-1	0	1	2

La transformación de las densidades de plantas en polinomios ortogonales se muestra en la tabla 10 con $d = 10$, $t = 5$, $\bar{x} = 30$ y $x = 10, 20, 30, 40$ y 50 . Cada conjunto de coeficientes de P_1 a P_4 forma una comparación entre los tratamientos, ya que la suma de todos los coeficientes en las columnas es igual a 0. Los contrastes son mutuamente ortogonales.

Tabla 11. Cálculos para contrastes con polinomios ortogonales y sumas de cuadrados

<i>Coefficientes de los polinomios ortogonales (P_{ci})</i>						
<i>Densidad (x)</i>	$\bar{y}_{\bullet j}$	Media	Lineal	Cuadrática	Cúbica	Cuarta
10	12	1	-2	2	-1	1
20	16	1	-1	-1	2	-4
30	19	1	0	-2	0	6
40	18	1	1	-1	-2	-4
50	17	1	2	2	1	1
λ_c		-	1	1	5/6	35/12
Suma = $\sum P_{cj} \bar{y}_{\bullet j}$		82	12	-14	1	7
Divisor = $\sum P_{cj}^2$		5	10	14	10	70
SCP_c = $r(\sum P_{cj} \bar{y}_{\bullet j})^2 / \sum P_{cj}^2$		-	43.2	42.0	0.3	2.1
$\hat{\alpha}_C = \sum P_{cj} \bar{y}_{\bullet j} / \sum P_{cj}^2$		16.4	1.2	-1.0	0.1	0.1

En la tabla 11 se muestra la estimación de los coeficientes α_C para la ecuación polinomial ortogonal en la ecuación 2.3.8.1 y la suma de cuadrados para contraste polinomial ortogonal. La ecuación polinomial ortogonal estimada se encuentra sustituyendo las estimaciones de μ , α_1 , α_2 , α_3 y α_4 de la tabla 10 en la ecuación 2.3.8.1. La ecuación estimada resultante es:

$$\hat{y}_i = 16.4 + 1.2P_{1i} - 1.0P_{2i} + 0.1P_{3i} + 0.1P_{4i} \quad 3.2.8.2$$

El análisis de varianza para este experimento se muestra en la parte superior de la tabla 11. La razón $F_0 = CM_{\text{Treat}}/CM_{\text{Error}}$ examina la hipótesis nula general $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Para un nivel de significancia de 0.05, la región crítica es $f_0 > f_{0.05, 4, 10} = 3.48$. La hipótesis nula se rechaza, pues $f_0 = 29.28$ excede el valor crítico.

Las particiones de una suma de cuadrados con 1 grado de libertad para cada contraste polinomial ortogonal se resumen en el análisis de varianza de la parte inferior de la tabla 11. Observe que la suma de cuadrados para los 4 contrastes suman lo mismo que la suma de cuadrados para la densidad: 87.60, con 4 grados de libertad.

Tabla 12. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre la densidad de plantas y la cosecha de granos.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	f_{Calc}	$Pr > f_{Cal}$
Densidad	4	87.60			
Error	10	7.48			
Contraste	GL	SC del contraste	Cuadrados medios	f_{Calc}	$Pr > f_{Cal}$
Lineal	1	43.20	43.20	57.75	0.000 *
Cuadrática	1	42.00	42.00	56.15	0.000 *
Cúbica	1	0.30	0.30	0.40	0.541
Cuarta	1	2.10	2.10	2.81	0.125

Para cada partición de suma de cuadrados, la hipótesis es $H_0: \alpha_C = 0$, con región crítica $f_{Calc} > f_{0.05, 1, 10} = 4.96$; la hipótesis nula se rechaza para los términos lineal y cuadrático del modelo ($Pr > f_{Calc} = 0.000$), pero no para los términos cúbicos ($Pr > f_{Calc} = 0.541$) y de cuarto orden ($Pr > f_{Calc} = 0.125$). Según las pruebas estadísticas el modelo cuadrático es suficiente para describir la relación entre la cosecha de granos y la densidad de plantas.

La curva de respuesta cuadrática estimada sin los términos cúbico y cuarto, $\hat{\alpha}_3 P_3$ y $\hat{\alpha}_4 P_4$ de la ecuación 3.2.8.2 es:

$$\hat{y}_i = \bar{y}_{..} + \hat{\alpha}_1 P_{1i} + \hat{\alpha}_2 P_{2i} = 16.4 + 1.2 P_{1i} - 1.0 P_{2i} \quad (3.2.8.3)$$

El valor estimado para una densidad de plantas $x = 10$ se determina sustituyendo $P_1 = -2$ y $P_2 = 2$ en la ecuación 3.2.8.3, es decir $\hat{y}_i = 16.4 + 1.2(-2) - 1.0(2) = 12.0$. En la tabla 13 se muestran las cosechas de grano observadas y sus estimaciones, a partir de la ecuación 3.2.8.3, para todas las densidades de plantas.

Tabla 13. Cosechas de granos observadas y sus estimaciones a partir de la ecuación polinomial cuadrática

Densidad	Coeficientes		Estimación	Observación
x	P_1	P_2	\hat{y}_i	$\bar{y}_{\bullet j}$
10	-2	2	12.0	12
20	-1	-1	16.2	16
30	0	-2	18.4	19
40	1	-1	18.6	18
50	2	2	16.8	17

Las cantidades necesarias $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $d = 10$, $\bar{x} = 30$ y $t = 5$. Entonces, si se sustituye las P_i se tiene:

$$\hat{y} = 16.4 + 1.2P_1 - 1.0P_2 = 16.4 + 1.2(1)\left[\frac{x-30}{10}\right] - 1.0(1)\left[\left(\frac{x-30}{10}\right)^2 - \left(\frac{5^2-1}{12}\right)\right]$$

simplificando

$$\hat{y} = 5.8 + 0.72x - 0.1x^2 \quad (3.2.8.4)$$

La curva estimada a partir de la ecuación 3.2.8.4 puede graficarse, junto con los datos observados (cuadrados) y las medias de los tratamientos \bar{y}_j (puntos).

La ecuación cuadrática elegida como la mejor para la relación entre la producción de grano y la densidad de plantas tiene tres estimaciones $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 16.4$, $\hat{\alpha}_1 = 1.2$ y $\hat{\alpha}_2 = -1.0$.

4. METODOLOGÍA

4.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación, por su finalidad, corresponde al tipo descriptivo – aplicativo, debido a que en ella se describen las pruebas de comparación múltiple y se aplican a las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre en donde estas se utilizan.

4.2. UBICACIÓN GEOGRÁFICA

El presente trabajo se realizó en la sede puerta roja de la Universidad de Sucre, localizada en la ciudad de Sincelejo, capital del departamento de Sucre, el cual se encuentra delimitado de la siguiente forma: por el norte y el este con el departamento de Bolívar, por el sur con el departamento de Córdoba y por el oeste con el mar Caribe.

La Universidad de Sucre fue institucionalizada mediante ordenanza 01 de noviembre de 1977 “por la cual se crea la Universidad de Sucre, se fija su estructura y se confieren facultades al gobierno del departamento para organizar y reglamentar el funcionamiento de dicha Universidad”

Dicha ordenanza reza en su artículo segundo: “La Universidad de Sucre es una entidad de derecho público departamental de carácter académico e investigativo.”

En la actualidad la Universidad de Sucre cuenta con cuatro facultades: Facultad de Educación y Ciencias, Facultad de Ciencias de la Salud, Facultad de Ingeniería y Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas.

4.3. VARIABLE DE ESTUDIO

Investigaciones formativas de la Universidad de Sucre: Se define como la tesis o trabajo de grado de los estudiantes de la Universidad de Sucre, específicamente de los programas de Zootecnia, Biología, Ingeniería Agrícola y Agroindustrial, en las cuales se halla realizado Diseño experimental y Prueba de Comparación múltiple.

4.4. UNIVERSO O POBLACIÓN ESTUDIADA Y MUESTRA SELECCIONADA

Para el desarrollo del presente trabajo se utilizó una población de 67 investigaciones formativas, tomando como muestra 6 (2 de Zootecnia, 2 de Ingeniería Agrícola, 1 de Biología y 1 de Ingeniería Agroindustrial), en las cuales se utilizó pruebas de comparación múltiple.

4.5. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Las investigaciones formativas realizadas por los estudiantes de los programas mencionados, se encuentran en la biblioteca de la sedes Puerta Roja y Granja El Perico de la Universidad de Sucre

4.6. PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

Una vez recolectada la información concerniente al problema de investigación se procedió a revisarla. Luego de revisarla, se procedió a compararla con la teoría de cada una de las pruebas para determinar cual de ellas es la más apropiada para dicha información y por último se realizaron las correcciones necesarias en cada una de ellas.

5. RESULTADOS

Al realizar la revisión de las investigaciones formativas de la Universidad de Sucre, específicamente, de los programas de Biología, Zootecnia, Ingeniería Agrícola e Ingeniería Agroindustrial, en las cuales se utilizó Diseño experimental y pruebas de comparación de medias de tratamientos, se encontraron 67 investigaciones; 17 en Biología, en las cuales el 80% las utilizaron inadecuadamente; 22 en Zootecnia, en las cuales el 36 % las utilizaron inadecuadamente; 4 en Ingeniería Agroindustrial, en las cuales el 50% las utilizaron inadecuadamente y 23 en Ingeniería Agrícola, en las cuales el 65 % las utilizaron inadecuadamente.

Se encontró que los investigadores utilizaron pruebas de comparación de medias de tratamientos de naturaleza cualitativa para tratamientos de naturaleza cuantitativa, por lo tanto, las conclusiones pueden no ser confiables.

Se encontró que no se escogió la prueba apropiada para comparar las medias de tratamientos de naturaleza cualitativa, debido a que utilizaron pruebas con las cuales se realizan demasiadas comparaciones y por esto se corre el riesgo de aumentar el error tipo I, además, escogieron pruebas poco potentes que no detectan pequeñas diferencias significativas.

A continuación hacemos mención de algunas de las investigaciones realizadas por estudiantes de los programas antes mencionados.

5.1. INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL PROGRAMA DE INGENIERÍA AGRÍCOLA

Trabajo 1.

Este trabajo se realizó con el objeto de determinar el comportamiento de la patilla Charleston Gray bajo dos sistemas de fertilización, determinando la evapotranspiración diaria real y coeficiente de cultivo para cada periodo fenológico, como también comparar entre dos sistemas de fertilización el desarrollo de cada fase y la producción.

El método utilizado fue el de parcelas experimentales en un modelo estadístico de bloques completamente al azar con tres tratamientos y tres repeticiones, para un total de 9 unidades experimentales.

Los tratamientos son:

Tratamiento 1 (T1): Fertiirrigación

Tratamiento 2 (T2): Fertiirrigación manual

Tratamiento 3 (T3): Riego sin fertilización (testigo)

A continuación se mostraran los datos y el análisis de varianza de la variable de evapotranspiración (ET) diaria del cultivo de patilla en el periodo de la cosecha.

Tabla 14. Datos de la evapotranspiración diaria del cultivo de patilla

Repeticiones Tratamientos	1	2	3	Total	Promedio
T1	0.8	1.4545	0.9818	3.2363	1.079
T2	0.7716	0.95	0.145	1.8666	0.622
T3	0.1583	0.465	0.3058	0.9291	0.3097

Análisis de Varianza de evapotranspiración diaria del cultivo de patilla en el periodo de la cosecha.

Tabla 15. Análisis de varianza de la ET diaria del cultivo de patilla

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}	
					0.05	0.01
Tratamientos	2	0.88	0.44	7.21*	6.94	18.00
Bloques	2	0.38	0.19	3.14	6.94	18.00
Error	4	0.24	0.06			
Total	8	1.53				

Como $f_{calc} > f_{tab}$ entre los tratamientos, para $\alpha = 0.05$, se concluye que existen diferencias significativas entre las medias de estos.

Para determinar cuales de ellas son diferentes utilizaron el método de Rango Múltiple de Duncan.

Los valores de los rangos menos significativos, para $\alpha = 0.05$ son:

$$R_2 = 0.555, \quad R_3 = 0.567$$

Tratamientos	1	2	3
Medias	1.079	0.622	0.3097

$$\begin{aligned}
 |T1 - T3| &= |1.079 - 0.3097| = 0.7693 > 0.567 && \text{Significativa} \\
 |T1 - T2| &= |1.079 - 0.622| = 0.457 < 0.555 && \text{No significativa} \\
 |T2 - T3| &= |0.622 - 0.3097| = 0.3123 < 0.555 && \text{No significativa}
 \end{aligned}$$

Concluyeron que el uso de la fertirrigación y de fertirrigación manual en la explotación agrícola trae igual beneficios al cultivo de la patilla en la época de la cosecha, y que el peor resultado es para el tratamiento testigo.

En la anterior investigación utilizaron una prueba de comparación que no es muy potente, de aquí, que no declare a pequeñas diferencias como significativas, además, realiza tres comparaciones, y se corre el riesgo de que con cada una de ellas aumente el error tipo I. Por estas razones aplicaremos, a continuación, la prueba de Contrates Ortogonales, que es más potente y realiza menos comparaciones.

Como los tratamientos son $a = 3$, se realizarán $a - 1$ contrastes. Como se conocen los tratamientos se realizan comparaciones específicas, para darse conclusiones pertinentes.

1) H_0 : Testigo vs. demás. Es decir, $H_0 : \mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$

2) H_0 : fertiirrigación vs. fertiirrigación manual. Es decir, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Tabla 16. Análisis de Varianza con contrastes ortogonales incluidos.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	f_{calc}	f_{tab}
Bloques	2	0.38	0.44	7.21 *	6.94
Tratamientos	2	0.89	0.585	7.21 *	6.94
z_1: testigo vs. demás	1	0.585	0.585	9.75 *	7.71
z_2: fertiirrig. vs. fertiirrig. manual	1	0.305	0.305	6.92 N. S.	7.71
Error	4	0.24	0.06		
Total	8	1.53			

Se concluye que los tratamientos a probar son mejores que el testigo; la fertiirrigación y fertiirrigación manual dan iguales resultados, se utilizará el de menor costo.

De lo anterior se puede concluir que la Prueba de Contrastes Ortogonales, ciertamente, es más potente y da recomendaciones pertinentes, porque se tiene conocimiento de los tratamientos, además, por el menor número de comparaciones es más confiable al dar las recomendaciones.

Trabajo 2.

Este trabajo se realizó con el objeto de determinar los efectos de la fertiirrigación potásica en el sistema agua – suelo – planta y en el cultivo de la patilla.

Se empleó el diseño de bloques completos al azar con tres tratamientos y tres repeticiones, además un tratamiento testigo. Los tratamientos consistieron en aplicaciones en exceso del 25% (Tratamiento 2), 50% (Tratamiento 3) y 75% (Tratamiento 4) de K_2SO_4 exceptuando el testigo (0%, Tratamiento 1), que solo se le aplicó lo requerido de acuerdo al análisis de suelo y los requerimientos nutricionales del cultivo, con aplicaciones de fertirriego diaria en cada uno de los tratamientos, la concentración que se manejó para cada tratamiento fue 5 gr/lit de K_2SO_4 .

Se utilizó un sistema de riego por goteo, con goteras en línea de flujo turbulento y caudal de 4 lt/hora.

Se realizó análisis estadístico a la producción de patilla, a la densidad aparente y a la porosidad del suelo. Los datos recolectados y el análisis de varianza para la variable Producción de patilla se muestran a continuación.

Tabla 17. Datos de la producción de patilla

Bloques	Tratamientos				Total del bloque	Media del bloque
	T1(Testigo)	T2	T3	T4		
1	332	317	348	390	1387	346.75
2	347	332	386	422	1487	371.75
3	303	375	367	435	1480	370.00
Total Trat.	982	1024	1101	1247		
Media Trat.	327.33	341.33	367	415.66		

Tabla 18. Análisis de varianza para los datos de la producción de patilla.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	f_{calc}	f_{tab}	
					5%	1%
Tratamientos	3	13593.67	4531	11.33	4.76	9.78
Bloques	2	2298.42	1149.21	2.99	5.14	10.92
Error	6	2309.58	384.93			
Total	11	18201				

Como el f_{calc} para los tratamientos, a un nivel de significancia del 5% excedió el f_{tab} , se concluye que existen diferencias significativas entre ellos.

Para saber cuales de ellos son diferentes utilizaron la prueba de Duncan.

$R_2 = 41.17$, $R_3 = 42.4$, $R_4 = 43.22$

Tratamientos:	T1(testigo)	T2	T3	T4
Medias:	327.33	341.33	367	415.66

Las medias conectadas por la misma línea no son significativamente diferentes. Es decir, que el mejor tratamiento para la producción de patilla es la aplicación en exceso del 75% de K_2SO_4 .

Observando la información de la investigación anterior podemos concluir que debido a que los tratamientos son de naturaleza cuantitativa, la prueba de Duncan no es la apropiada para analizar las medias de los tratamientos, ya que esta es una prueba para tratamientos de naturaleza cualitativa; por lo tanto las conclusiones expuestas en dicha investigación no son las más correctas. Para hacer un análisis correcto de los datos se usará la prueba de Polinomios Ortogonales, que es una prueba para factores cuantitativos.

Para esto se utilizaran los siguientes datos:

$a = 4$, Número de contrastes: $a - 1 = 3$, entonces

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 p_{i1} + \alpha_2 p_{i2} + \alpha_3 p_{i3} + e_{ij}$$

Como $x = 0, 25, 50, 75$ entonces $\bar{x} = 37.5$ y $d = 25$. Si

x :	0	25	50	75
$(x - 37.5)$:	-37.5	-12.5	12.5	37.5
$(x - 37.5)/25$:	-1.5	-0.5	0.5	1.5

Para hallar los coeficientes de P_1 , P_2 y P_3 se necesita los valores de $\frac{a^2 - 1}{12} = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{16 - 1}{12} = \frac{15}{12} = 1.25$, $\frac{3a^2 - 7}{20} = \frac{3(4)^2 - 7}{20} = \frac{3(16) - 7}{20} = \frac{41}{20} = 2.05$ y $(x - 37.5)/25$ para cada valor de x . Así, en la siguiente tabla se muestran los valores de estos.

Tabla 19. Valores de los Coeficientes de los Polinomios Ortogonales para % de K_2SO_4

% en exceso de K_2SO_4	$\bar{Y}_{\bullet j}$	Coeficientes de los Polinomios Ortogonales P_{c_j}			
		Media	Lineal	Cuadrática	Cúbica
0	327.3333333	1	-3	1	-1
25	341.3333333	1	-1	-1	3
50	367	1	1	-1	-3
75	415.6666666	1	3	1	1
λ_c		-	2	1	10/3
Divisor: $\sum P_{c_j}^2$		4	20	4	20
Suma: $\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j}$		1451.333	290.6666666	34.66666666	11.33333333
$SC_{P_c} = r_{\bullet j} (\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j})^2 / \sum P_{c_j}^2$		-	12673.06666	901.33332	19.26666
$\hat{\alpha}_o = \sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j} / \sum P_{c_j}^2$		362.8333	14.5333	8.6666	0.5666

La ecuación estimada resultante es: $\hat{y}_{\bullet j} = 362.83 + 14.53P_{i1} + 8.66P_{i2} + 0.56P_{i3}$

Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre el % en exceso de K_2SO_4 y la producción de patilla.

Tabla 20. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial entre % el exceso de K_2SO_4 y la producción de patilla

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Concentración	3	13593.67	4531	11.33*	4.76
Error	6	2309.58	384.93		
Contraste	G L	S C	C M	f_{calc}	f_{tab}
Lineal	1	12673.06666	12673.06666	32.923*	5.99
Cuadrática	1	901.33332	901.33332	2.3415	5.99
Cúbica	1	19.26666	19.26666	0.05	5.99

* Significativa ($\alpha = 5\%$)

La hipótesis nula se rechaza para el término lineal. Por tanto, el modelo lineal es suficiente para describir la relación del % en exceso de K_2SO_4 y la producción de patilla.

De aquí, la ecuación es: $y = bx + c$.

Para hallar los valores de b y c se aplica regresión polinomial.

ANÁLISIS DE VARIANZA

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Regresión	1	4224,35555	4224,35555	27,5321892*	0,03445493
Residuos	2	306,866666	153,433333		
Total	3	4531,22222			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t
Intercepción	319,233333	10,3635579	30,8034495
% de K_2SO_4	1,16266667	0,22158219	5,24711246

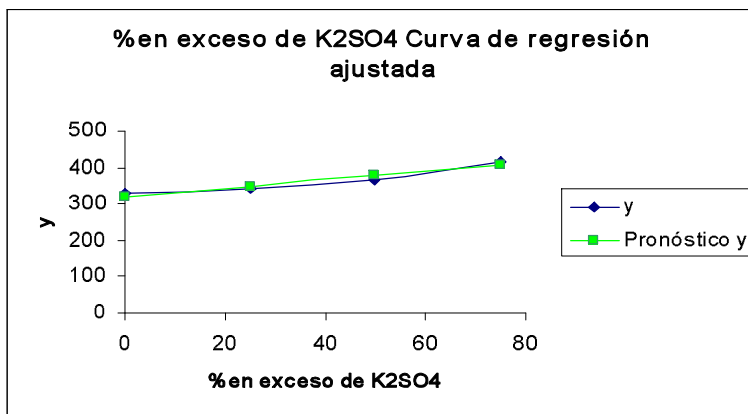


Gráfico 2. Curva de regresión ajustada para % en exceso de K_2SO_4 vs. Producción de patilla

La ecuación nos queda de la siguiente manera:

$$y = 1.16266x + 319.233$$

De lo anterior se puede concluir que a medida que aumenta el exceso de K_2SO_4 se aumenta 1.16266 Kg. la producción de patilla, con un error estándar de 0.22 Kg.

5.2. INVESTIGACIONES DEL PROGRAMA DE ZOOTECNIA

Trabajo 1.

El presente estudio evaluó la influencia de la condición sexual en el rendimiento en carne, como un aporte a la búsqueda del prototipo de animal que se debe producir en las explotaciones, comercializar y procesar en el tercer milenio; para lograr lo anterior, se obtuvo información de 264 animales cebuinos alimentados a pasto, repartidos en 19 lotes (4 lotes para novillas, 4 lotes para vacas, 5 lotes para toretes y 6 lotes para novillos), sacrificados, faenados y deshuesados.

Se aplicó un diseño enteramente al azar con 4 tratamientos y de 4 a 6 repeticiones , en donde las variables a estudiar fueron: Peso Canal Caliente (PCC), Peso Canal Frío (PCF), Perímetro de la Pierna (PP), Longitud de la Canal (LC), medida de la Grasa dorsal en el punto G1 (G1), medida de la Grasa dorsal en el punto G2 (G2), Rendimiento en Canal Caliente (RCC), Rendimiento en Canal Frío (RCF), Carne Extra (CE), Carne de Primera (CP), Carne de Segunda (CS), Carne de Tercera (CT), Grasa de la Canal (GT), Porcentaje de Grasa de la Canal (RGT), Hueso Canal (HC), Rendimiento en Hueso de la Canal (RHC), Total de Carne al Deshuese (TCD), Total de Carne Aprovechable (TCA) Nueva ecuación para el Total de Carne Aprovechable (TCAN), Rendimiento de Canal a Carne (RCAC), Relación Grasa Total/Carne (RGTC), Relación Hueso Canal/ Carne, siendo los tratamientos las diferentes condiciones sexuales evaluadas (T1: Novillas, T2: vacas, T3: Torettes, T4: Novillos).

A continuación se muestran los datos y el análisis de varianza de la variable Rendimiento en Canal Caliente (RCC)

Distribución de animales y/o lotes por tratamiento de la variable Rendimiento en Canal Caliente (RCC).

Tabla 21. Distribución de animales y/o lotes por tratamiento para el RCC

Tratamientos	Novillas	Vacas	Toretes	Novillos	Total	Promedio
Número de Observaciones (animales) por lote	14 (L1)	14 (L1)	14 (L1)	14 (L1)		
	14 (L2)	14 (L2)	14 (L2)	13 (L2)		
	14 (L3)	13 (L3)	13 (L3)	14 (L3)		
	14 (L4)	14 (L4)	14 (L4)	14 (L4)		
			14 (L5)	15 (L5)		
				14 (L6)		
Lotes (repeticiones)	4	4	5	6	19	4.75
Total Observac.	56	55	69	84	264	66

Tabla 22. Efecto de la condición sexual en el RCC (%)

Lote							Promedio (%)
Tratam.	L1	L2	L3	L4	L5	L6	
T1	51.47	50.92	51.53	48.36			50.57
T2	51.85	55.28	50.01	53.44			52.64
T3	56.83	55.51	54.88	55.00	54.19		55.28
T4	55.27	56.22	54.41	54.68	53.40	53.86	54.64
Promedio total (%)							53.283

Tabla 23. Análisis de varianza para los datos de la variable RCC

FV	GL	SC	CM	f_{cal}	$f_{tab}(\alpha = 0.01)$
Tratamientos	3	1236.6852	412.228	66.129*	3.78
Error	260	1620.7559	6.234		
Total	263	3959.2022			

El análisis de varianza mostró que existen diferencias significativas entre por lo menos dos tratamientos. En la definición del modelo estadístico anotaron que se utilizó la prueba de Contrastes Ortogonales o la prueba de Duncan para comparar las medias de los tratamientos, sin embargo, en la investigación no está registrada la realización de ninguna de estas pruebas para determinar cuáles de ellas son significativamente diferentes, además, para hacer el diseño experimental utilizaron 4 tratamientos y 19 Lotes. Sin embargo, ellos exponen las conclusiones que obtuvieron y dicen que el mayor RCC se obtuvo con los toretes, siendo

este el mejor tratamiento, seguido de los novillos y las vacas, y que el menor RCC fue para las novillas. Al comparar el grupo de hembras, el mejor rendimiento fue alcanzado por las vacas.

Ahora, se hará el análisis de varianza utilizando los 19 lotes como repeticiones.

Tabla 24. Datos del RCC utilizando como repeticiones los 19 lotes

Tratamientos	Repeticiones	Total	Promedio
T1	4	202,28	50,57
T2	4	210,58	52,645
T3	5	276,41	55,282
T4	6	327,84	54,64

Tabla 25. Análisis de varianza del RCC utilizando como repeticiones los lotes

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	$Prob$	f_{tab}
Tratamientos	3	60,92	20,31	9,87	0,00077	3,287
Error	15	30,86	2,057			
Total	18	91,78				

Debido a que $f_{calc} > f_{tab}$ se concluye que existen diferencias significativas entre por lo menos dos tratamientos.

Para determinar cuales de las medias de los tratamientos son diferentes se aplicará la prueba de Scheffé.

Las hipótesis son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3}$$

$$L_0 = 3\bar{y}_{\bullet 1} - \bar{y}_{\bullet 2} - \bar{y}_{\bullet 3} - \bar{y}_{\bullet 4}$$

$$H_0 : \mu_2 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$L_1 = 2\bar{y}_{\bullet 2} - \bar{y}_{\bullet 3} - \bar{y}_{\bullet 4}$$

$$H_0 : \mu_3 = \mu_4$$

$$L_2 = \bar{y}_{\bullet 3} - \bar{y}_{\bullet 4}$$

Los contrastes estimados están dado por:

$$\hat{L}_0 = 3\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4,$$

$$\hat{L}_1 = 2\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4,$$

$$\hat{L}_2 = \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4$$

Las medias muestrales son:

Tratamientos	T1	T2	T3	T4
Medias	50.57	52.645	55.282	54.64

$$\bar{r}_{\bullet j} = \frac{4+4+5+6}{4} = \frac{19}{4} = 4.75, \quad CM_E = 2.057$$

Ahora, se calcula los contrastes estimados y la varianza de cada contraste:

$$\hat{L}_0 = 3(50.57) - 52.64 - 55.28 - 54.64 = -10.75, \quad s^2(\hat{L}_0) = 2.057(12)/4.75 = 5.197$$

$$\hat{L}_1 = 2(52.64) - 55.28 - 54.64 = -4.64, \quad s^2(\hat{L}_1) = 2.057(6)/4.75 = 2.6$$

$$\hat{L}_2 = 55.28 - 54.64 = 0.64, \quad s^2(\hat{L}_2) = 2.057(2)/4.75 = 0.87$$

Como $As(\hat{L}_0) = \sqrt{s^2(\hat{L}_0)(3)(3.78)} = 7.68$ y $|\hat{L}_0| = 10.75$ se rechaza la hipótesis nula, es decir, el RCC de las novillas es diferente del RCC de las vacas, toretes y novillos, por lo tanto, los mejores son los segundos.

Como $As(\hat{L}_1) = \sqrt{s^2(\hat{L}_1)(3)(3.78)} = 5.43$ y $|\hat{L}_1| = 4.64$ se rechaza la hipótesis nula, es decir, el RCC de las vacas es diferente del RCC de los toretes y de los novillos, por lo tanto los mejores son los toretes y novillos.

Como $As(\hat{L}_2) = \sqrt{s^2(\hat{L}_2)(3)(3.78)} = 3.14$ y $|\hat{L}_2| = 0.64$ se acepta la hipótesis nula, es decir, no existen diferencias entre el RCC de los toretes y los novillos.

De aquí, se puede concluir que el mejor RCC fue de los toretes y novillos, seguido por el RCC de las vacas y quien tuvo el menor RCC fue las novillas. Debido a esto, se verifica que los estudiantes dieron conclusiones erróneas con respecto al RCC entre novillos y toretes, pues, ellos concluyeron que eran diferentes, y con respecto de las hembras (novillas y vacas), concluyeron que el RCC era igual y con la prueba de Scheffé se declaró esa pequeña diferencia como significativa.

Trabajo 2.

El propósito del trabajo fue evaluar la harina de semilla de Guandul en la alimentación de conejos en la etapa de levante – ceba.

Se utilizaron 24 conejos destetados de 35 días de edad, 12 hembras y 12 machos cruzados de la raza Nueva Zelanda por Mariposa, con peso promedio de 500 gramos.

Se aplicó un diseño experimental 2 x 4 (sexo x tratamiento) con arreglo enteramente al azar, utilizando 4 tratamientos, 3 experimentales y un testigo. Cada tratamiento estaba compuesto por 6 animales, con una relación macho – hembra 1:1.

Los cuatro tratamientos fueron:

T₀: Grupo control, 0% de harina de Guandul + 100% alimento balanceado comercial

T₁: 15% harina de semilla de Guandul + 85% alimento balanceado

T₂: 30% harina de semilla de Guandul + 70% alimento balanceado

T₃: 45% harina de semilla de Guandul + 55% alimento balanceado.

Los parámetros evaluados fueron: Ganancia de peso, Peso al sacrificio y Rendimiento en Canal.

A continuación se mostraran los datos y el análisis de varianza de la variable Peso al sacrificio.

Tabla 26. Datos del peso de los conejos al momento del sacrificio (gr.).

Repeticiones Tratamiento	1	2	3	4	5	6	Total	Promedio del Peso (gr.)
T₀	1755	1840	1670	1670	1530	1600	10065	1677.5
T₁	1810	1780	2000	1875	1720	1735	10920	1820
T₂	1840	1970	1875	1935	1780	2030	11430	1905
T₃	1840	1875	1810	1720	1970	1750	10965	1827.5

Tabla 27. Análisis de varianza para el peso al sacrificio

Fuente de	Grados de	Suma de	Cuadrado		
------------------	------------------	----------------	-----------------	--	--

Variación	Libertad	Cuadrados	Medio	f_{calc}	f_{tab}
Tratamientos	3	161775	53925	5.84486*	3.238
Sexo	1	23437.5	23437.5	2.540363	4.49
Interacción (T x S)	3	25670.833	8556.9444	0.927477	3.238
Error	16	147616.66	9226.04167		
Total	23	358500			

*Significativa

Debido a que $f_{calc} > f_{tab}$ existen diferencias significativas entre los tratamientos, a un nivel del 5%.

Para determinar cuales de ellos son diferentes utilizaron Contrastes Ortogonales.

Tabla 28. Prueba de Contrastes Ortogonales para peso al sacrificio.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Tratamientos	3	161775	53925	5.84*	3.24
$C_1 (T_1 + T_2 + T_3 - 3T_0)$	2	135200	135200	14.65*	4.49
$C_2 (T_1 + T_3 - 2T_2)$	1	26406.25	26406.25	2.86	4.49
$C_3 (T_1 - T_3)$	1	168.75	168.75	0.02	4.49
Error	16	147616.67	9226.04		

El mejor peso al momento del sacrificio lo obtuvieron los conejos bajo el tratamiento 2 y el peor peso lo obtuvieron los conejos bajo el tratamiento testigo.

En esta investigación se observó que los tratamientos son de naturaleza cuantitativa, y ellos utilizaron una prueba de Contrastes Ortogonales que es para factores de tipo cualitativo, esto verifica que las conclusiones obtenidas no son las más correctas.

Por lo tanto, se mostraran los resultados obtenidos utilizando una prueba para comparar tratamientos de naturaleza cuantitativa, en este caso Polinomios Ortogonales.

Para esto se utilizaran los siguientes datos:

$a = 4$, Número de contrastes: $a - 1 = 3$, entonces

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 p_{i1} + \alpha_2 p_{i2} + \alpha_3 p_{i3} + e_{ij}$$

Como $x=0, 15, 30, 45$, entonces $\bar{x}=22.5$ y $d=15$. Si

x :	0	15	30	45
$(x-22.5)$:	-22.5	-7.5	7.5	22.5
$(x-22.5)/15$:	-1.5	-0.5	0.5	1.5

Para hallar los coeficientes de P_1 , P_2 y P_3 se necesita los valores de

$\frac{a^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{16-1}{12} = \frac{15}{12} = 1.25$, $\frac{3a^2-7}{20} = \frac{3(4)^2-7}{20} = \frac{3(16)-7}{20} = \frac{41}{20} = 2.05$ y $(x-22.5)/15$ para cada valor de x . Así, en la siguiente tabla se muestran los valores de estos.

Tabla 29. Valores de Coeficientes de los Polinomios Ortogonales para % de harina de Guandul

% de harina de Guandul	$\bar{Y}_{\bullet j}$	Coeficientes de los Polinomios Ortogonales P_{c_j}			
		Media	Lineal	Cuadrática	Cúbica
0	1677.5	1	-3	1	-1
15	1820	1	-1	-1	3
30	1905	1	1	-1	-3
45	1827.5	1	3	1	1
λ_c		-	2	1	10/3
Divisor: $\sum P_{c_j}^2$		4	20	4	20
Suma: $\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j}$		7230	535	-220	-105
$SC_{P_c} = r_{\bullet j} (\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j})^2 / \sum P_{c_j}^2$		-	85867.5	72600	3307.5
$\alpha_o = \sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j} / \sum P_{c_j}^2$		1807.5	26.75	-55	-5.1

La ecuación estimada resultante es: $\hat{y}_{\bullet j} = 1807.5 + 26.75P_{i1} - 55P_{i2} - 5.1P_{i3}$

Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre el % de harina de Guandul y el peso al sacrificio de los conejos

Tabla 30. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial entre % de harina de Guandul y el peso al sacrificio de los conejos

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
% de harina de Guandul	3	161775	53925	5.84*	3.24
Error	16	147616.66	9226.04167		
Contraste	G L	S C	C M	f_{calc}	f_{tab}
Lineal	1	85867.5	85867.5	9.31*	4.49
Cuadrática	1	72600	72600	7.869*	4.49
Cúbica	1	3307.5	3307.5	0.3585	4.49

* Significativa

La hipótesis nula se rechaza para el término lineal y cuadrático. Por tanto, el modelo cuadrático es suficiente para describir la relación del % de harina de Guandul y el peso al sacrificio.

De aquí, la ecuación es: $y = ax^2 + bx + c$.

Para hallar los valores de a y c se aplica regresión polinomial.

ANÁLISIS DE VARIANZA

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Regresión	2	26411,25	13205,625	23,9557823	0,14298623
Residuos	1	551,25	551,25		
Total	3	26962,5			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	1672,25	22,88421945	73,0743735	0,0087114
% de h. Guandul	14,56666667	2,45	5,94557823	0,10608163
% de h. Guandul ²	-0,244444444	0,052174919	-4,68509481	0,13387308

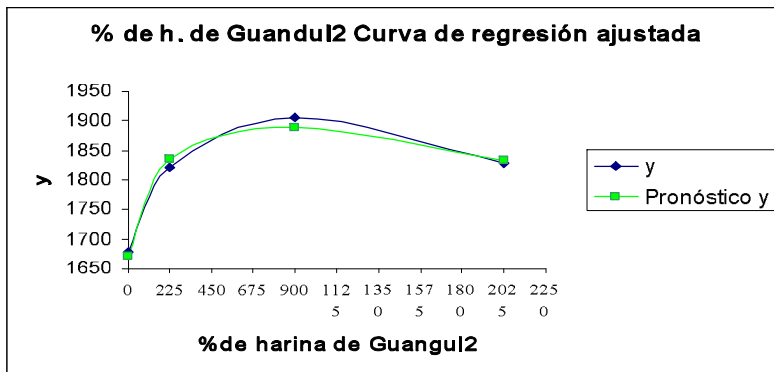


Gráfico 3. Curva de regresión ajustada para % de harina de Guandul vs. peso al sacrificio

La ecuación nos queda de la siguiente manera:

$$y = 1672.25 + 14.56x - 0.24x^2$$

Ahora, optimizamos para determinar el % de harina que da mejor resultado:

$$y' = 14.56 - 2(0.24)x = 0, \text{ entonces, } x = 30.33\% \text{ de harina de guandul}$$

De todo lo anterior, podemos concluir que el % de harina de guandul que muestra el resultado óptimo es de 30.33% en adelante. Los conejos presentan menor peso al sacrificio, debido, quizás, a que se descompensan nutricionalmente.

5.3. INVESTIGACIONES DEL PROGRAMA DE BIOLOGÍA

Con este trabajo se estandarizó un protocolo para la producción de grandes cantidades de plántulas de plátano, híbrido FHIA – 21 mediante el cultivo in Vitro de meristemas apicales con el objeto de contribuir a la repoblación de las zonas donde se cultiva el plátano. Para este fin se determinaron las condiciones óptimas del cultivo.

El diseño estadístico utilizado fue el completamente al azar (para la etapa de desinfección e iniciación) y el de bloques completos al azar (para la etapa de multiplicación y enraizamiento), en el cual la unidad experimental se ordenó dependiendo de la complejidad de cada una de las etapas que componen el experimento.

Para la etapa de iniciación se trabajó con cuatro tratamientos con 8 repeticiones cada uno, teniendo cada repetición 2 replicas. Los tratamientos utilizados para la etapa de iniciación fueron:

T1: 0% de Agar

T2: 0.3% de Agar

T3 : 0.6% de Agar

T4 : 0.9% de Agar

A continuación se muestran los datos y el análisis de varianza de la variable explantes vivos en la etapa de iniciación.

Tabla 31. Datos del número de explantes vivos en la etapa de iniciación

Repeticiones		1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Promedio
Tratamientos	T1	1	0	1	1	1	0	1	0	5	0.3125
	T2	2	2	1	2	2	2	2	2	15	0.9375
	T3	2	2	2	1	2	2	2	2	15	0.9375
	T4	0	2	1	1	2	1	1	1	9	0.5625

Tabla 32. Análisis de varianza para el número de explantes vivos en la etapa de iniciación

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{ib}	
					1%	5%
Tratamientos	3	2.25	0.75	14.28*	2.95	4.57
Error	28	1.469	0.0524			
Total	31	3.719				

* Significativo

Como el $f_{calc} > f_{tab}$ se concluye que existen diferencias significativas entre por lo menos dos medias de tratamientos.

Para determinar cuales de ellas son diferentes utilizaron la prueba de Duncan.

Los rangos mínimos significativos para $\alpha = 0.05$, son

$R_2 = 0.232$, $R_3 = 0.243$, $R_4 = 0.25$

Tratamientos:	T1	T4	T2	T3
Medias:	0.3125	0.5625	0.9375	0.9375

De lo anterior, concluyeron que los medios de cultivo compuesto por los tratamientos T2 (0.3% de Agar) y T3 permitieron un buen desarrollo y supervivencia de los ápices meristemáticos y en los tratamientos T1 (0% de Agar) y T4 (0.9% de Agar), el crecimiento y el desarrollo de los ápices meristemáticos, fue lento, presentándose en estos el mayor número de explantes muertos por efecto de la consistencia del medio de cultivo.

En esta investigación se observó que los tratamientos son de naturaleza cuantitativa, y ellos utilizaron una prueba para factores de tipo cualitativo, esto verifica que las conclusiones obtenidas no son correctas. Por lo tanto, se mostraran los resultados obtenidos utilizando una prueba para comparar tratamientos de naturaleza cuantitativa, en este caso Polinomios Ortogonales.

Para esto se utilizaran los siguientes datos:

$a = 4$, Número de contrastes: $a - 1 = 3$, entonces

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 p_{i1} + \alpha_2 p_{i2} + \alpha_3 p_{i3} + e_{ij}$$

Como $x = 0, 0.3, 0.6, 0.9$, entonces $\bar{x} = 0.45$ y $d = 0.3$. Si

$$\begin{array}{cccc} x: & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.9 \\ (x - 0.45): & -0.45 & -0.15 & 0.15 & 0.45 \\ (x - 0.45)/0.3: & -1.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 \end{array}$$

Para hallar los coeficientes de P_1 , P_2 y P_3 se necesita los valores de

$\frac{a^2 - 1}{12} = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{16 - 1}{12} = \frac{15}{12} = 1.25$, $\frac{3a^2 - 7}{20} = \frac{3(4)^2 - 7}{20} = \frac{3(16) - 7}{20} = \frac{41}{20} = 2.05$ y $(x - 2.0)/0.5$ para cada valor de x . Así, en la siguiente tabla se muestran los valores de estos.

Tabla 33. Valores de los Coeficientes de los Polinomios Ortogonales para % de Agar

% Concentración de Agar	$\bar{Y}_{\bullet j}$	Coeficientes de los Polinomios Ortogonales P_{c_j}			
		Media	Lineal	Cuadrática	Cúbica
0	0.3125	1	-3	1	-1
0.3	0.9375	1	-1	-1	3
0.6	0.9375	1	1	-1	-3
0.9	0.5625	1	3	1	1
λ_c		-	2	1	10/3
Divisor: $\sum P_{c_j}^2$		4	20	4	20
Suma: $\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j}$		2.75	0.75	-1	0.25
$SC_{P_C} = r_{\bullet j} (\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j})^2 / \sum P_{c_j}^2$		-	0.225	2	0.025
$\hat{\alpha}_c = \sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j} / \sum P_{c_j}^2$		0.69	-0.038	-0.25	-0.0125

La ecuación estimada resultante es: $\hat{y}_{\bullet j} = 0.69 - 0.038 P_{i1} - 0.25 P_{i2} - 0.0125 P_{i3}$

Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre el % de concentración de Agar y el número de explantes vivos

Tabla 34. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial % de Agar y número de explantes vivos

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Concentración	3	2.25	0.75	12.92	2.95
Error	28	1.625	0.05804		
Contraste	G L	S C	C M	f_{calc}	f_{tab}
Lineal	1	0.225	0.225	3.877	4.20
Cuadrática	1	2	2	34.46*	4.20
Cúbica	1	0.025	0.025	0.431	4.20

* Significativa

La hipótesis nula se rechaza para el término cuadrático. Por tanto, el modelo cuadrático es suficiente para describir la relación de la concentración de Agar y el número de explantes vivos.

De aquí, la ecuación es: $y = ax^2 + c$.

Para hallar los valores de a y c se aplica regresión polinomial.

ANÁLISIS DE VARIANZA

Fuente de Variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	f_{calc}	f_{tab}
Regresión	1	0,000318878	0,000318878	0,002270148	0,96632825
Residuos	2	0,280931122	0,140465561		
Total	3	0,28125			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	0,678571429	0,26501468	2,560505058	0,124642362
% de Agar ²	0,028344671	0,594900563	0,047646066	0,966328249

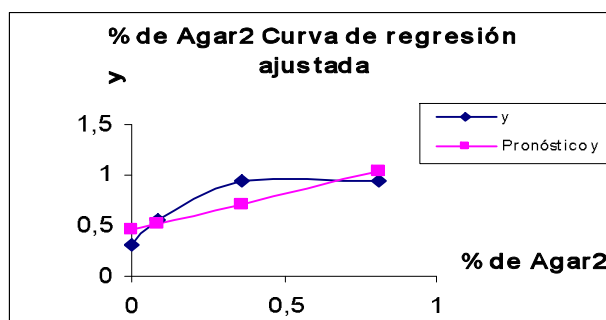


Gráfico 4. Curva de regresión ajustada para % de Agar² vs. Número de explantes vivos

La ecuación nos queda de la siguiente manera:

$$y = 0.028x^2 + 0.679$$

Ahora, optimizamos para determinar el valor máximo o mínimo para la concentración de Agar.

$$y' = 2(0.028)x$$

$$0.056x = 0$$

$$x = 0$$

De todo lo anterior podemos concluir que el medio de cultivo T1 (0% de Agar) es el peor, debido a que es donde hay mayor cantidad de explantes muertos, y en donde el crecimiento y desarrollo de los meristemas apicales es más lento.

5.4. INVESTIGACIONES DEL PROGRAMA DE INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

Con el fin de aprovechar el potencial orgánico del corozo en la región se desarrollo una investigación que consistió en realizar un análisis bromatológico a la pulpa y en la obtención de vinos, evaluándose tres concentraciones de sacarosa (10%, 20% y 30%) calentándose a 60 °C durante 30 minutos y tres concentraciones de harina de batata (5%, 10% y 15%) calentándose a 90 °C durante 15 minutos obteniéndose 6 tratamientos, con tres replicas cada uno. Se evaluó el porcentaje de alcohol y la concentración de azúcares obtenidos.

Son 6 tratamientos, 3 con % sacarosa y 3 con % harina de batata, con 6 repeticiones cada uno, con 3 replicas cada repetición, es decir, 18 muestras por tratamiento. Las concentraciones de fuente de carbono quedaron de la siguiente manera.

T1: sacarosa al 10%

T4: harina de batata al 5%

T2: sacarosa al 20%

T5: harina de batata al 10%

T3: sacarosa al 30%

T6: harina de batata al 15%

A continuación se muestran los datos obtenidos para la concentración de azúcares para la sacarosa y la harina de batata.

Tabla 35. Datos de las concentraciones de azúcares para % de sacarosa y harina de batata.

Repeticiones Tratamientos	1	2	3	4	5	6	Total	Promedio
T1	17.439	6,6	13,2198	8,4	8,898	16,419	70,974	3.943
T2	16,698	5,22	5,34	4,638	3,888	6,249	45,0366	2.502
T3	9,069	0,983	3,4098	2,958	3,06	2,6598	24,1056	1.339
T4	58.663	3,708	3,5298	4,899	4,86	3,99	196,9758	10.943
T5	32,43	2,19	2,7198	3,24	2,22	1,65	44,4498	2.469
T6	9,21	33,858	13	5,16	6,96	3,8598	72,0468	4.003

Tabla 36. Análisis de varianza para concentración de azúcares para % de sacarosa y harina de batata

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Tratamientos	5	1073.473	214.695	2.404*	2.31
Error	102	9.111.092	89.324		
Total	107	10184.565			

Como $f_{calc} > f_{tab}$ concluyeron que existen diferencias significativas entre por lo menos dos tratamientos.

Para determinar cuales de ellos son diferentes utilizaron la prueba de Duncan y la Tukey y además, corroboraron con la prueba de Newmam – Keuls y la DMS. Con la prueba de Duncan obtuvieron los siguientes resultados.

El Rango Mínimo Significativo es $RMS = 6.249$ para $\alpha = 0.05$.

Tratamientos:	T4	T6	T1	T2	T5	T3
Medias:	10.94	4.003	3.943	2.502	2.469	1.339
Orden Ranquiado:	A	B	B	B	B	B

Medias con letras iguales no tienen diferencias significativas.

Concluyeron que la concentración de sacarosa al 30% dio los mejores resultados de azúcares.

De acuerdo a lo observado en la investigación, se puede concluir que los estudiantes hicieron un diseño experimental incorrecto, puesto que los factores que tomaron son diferentes (sacarosa y harina de batata) y estuvieron expuestos a temperaturas y tiempos distintos.

Hicieron uso inadecuado de las pruebas de comparación de tratamientos, debido a que utilizaron varias pruebas para un solo análisis, lo cual representa un abuso, puesto que con una sola prueba es suficiente. Además, debido a que los factores son de naturaleza cuantitativa, no

pueden utilizar las pruebas que tomaron, puesto que estas son para factores de tipo cualitativo. Por tales razones las conclusiones expuestas no son correctas.

Se hará el análisis de varianza utilizando los tres tratamientos de % de sacarosa por una parte y los tres tratamientos de % de harina de batata por otra parte.

Tabla 37. Análisis de varianza del % de sacarosa

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Tratamientos	2	61.25	30.63	10.59*	3.179
Error	51	147.53	2.893		
Total	53	208.78			

Tabla 38. Análisis de varianza del % de harina de batata

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Tratamientos	2	733.98	366.99	2.0881	3.179
Error	51	8963.56	175.76		
Total	53	9697.54			

Para el % de sacarosa, $f_{calc} > f_{tab}$. Se concluye que existen diferencias significativas entre por lo menos dos medias.

Para determinar cual de ellas son diferentes utilizaremos la prueba de Polinomios Ortogonales.

Como $a = 3$, los contrastes ortogonales son $a - 1 = 2$ y $\frac{a^2 - 1}{12} = 0.67$. Como $x = 10, 20$ y 30 ,

entonces $\bar{x} = 20$ y $d = 10$.

$x:$	10	20	30
$x - 20:$	-10	0	10
$(x - 20)/10:$	1	0	1

Tabla 39. Coeficientes de los polinomios ortogonales para % de sacarosa

% de sacarosa	$\bar{Y}_{\bullet j}$	Coeficientes de polinomios ortogonales P_{c_j}		
		Media	Lineal	Cuadrática
10	3.9433	1	- 1	1
20	2.5022	1	0	- 2
30	1.3394	1	1	1
λ_c		-	1	3
Divisor: $\sum P_{c_j}^2$		3	2	6
Suma: $\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j}$		7.7849	- 2.6038	0.278
$SC_{P_c} = r_{\bullet j} (\sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j})^2 / \sum P_{c_j}^2$		-	61.02	0.23
$\hat{\alpha}_o = \sum P_{c_j} \bar{Y}_{\bullet j} / \sum P_{c_j}^2$		2.595	1.302	0.0463

La ecuación estimada resultante es: $\hat{y}_{\bullet j} = 2.595 + 1.302 P_{i1} + 0.0463 P_{i2}$

Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial ortogonal entre el % sacarosa y la concentración de azúcares.

Tabla 40. Análisis de varianza para la relación del modelo polinomial entre el % de sacarosa y la concentración de azúcares

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	f_{calc}	f_{tab}
Concentración	2	61.25	30.62727	10.5875	3.17879
Error	51	147.5314	2.89277		
Contraste	G L	S C	C M	f_{calc}	f_{tab}
Lineal	1	61.02	61.02	20.75*	4.04
Cuadrática	1	0.23	0.23	0.079	4.04

* Significativa

La hipótesis nula se rechaza para el término lineal. Por tanto, el modelo lineal es suficiente para describir la relación del % de sacarosa y la concentración de azúcares.

De aquí, la ecuación es: $y = bx + c$.

Para hallar los valores de b y c se aplica regresión polinomial.

Análisis de varianza

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado medio	f_{calc}	f_{tab}
Regresión	1	3,39014761	3,39014761	262,629463	0,03923359
Residuos	1	0,01290848	0,01290848		
Total	2	3,40305609			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t
Intercepción	5,19886667	0,17355054	29,955923
x	-0,130195	0,00803383	-16,2058466

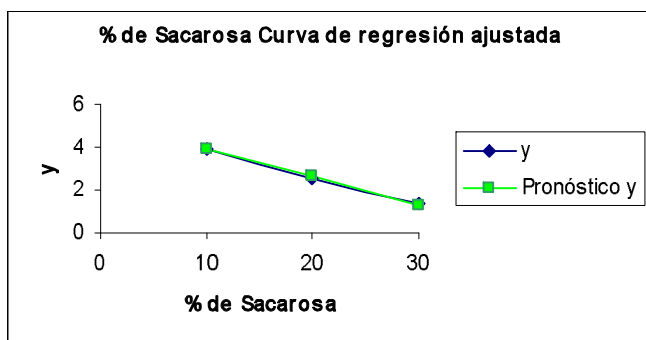


Gráfico 5. Curva de regresión ajustada para % de sacarosa vs. concentración de azúcares.

La ecuación nos queda de la siguiente manera:

$$y = -0.1302x + 5.19887$$

De lo anterior se puede concluir que la concentración de sacarosa al 30% dio los mejores resultados de azúcares.

CONCLUSIONES

- Para realizar un diseño experimental es necesario estudiar la información recolectada, y estructurarla de acuerdo al propósito u objetivo de la investigación.
- Para aplicar las pruebas de comparación múltiple es necesario tener claro la naturaleza de los factores o tratamientos, es decir, si son cualitativos o cuantitativos.
- A medida que el número de comparaciones aumenta, se aumenta el error tipo I.
- Se debe escoger una prueba que sea potente para que detecte diferencias significativas pequeñas

RECOMENDACIONES

- Cuando se realice una investigación en donde se utilice diseño experimental es necesario tener un pleno conocimiento de los métodos estadísticos a emplear.
- Cuando se realice una investigación en donde se utilice diseño experimental, es necesario buscar la asesoría de un estadístico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARBONELL, E., CAMACHO, J. (1993). Problemas en la Utilización de la estadística en la Investigación Agrícola.

GUTIÉRREZ, H., DE LA VARA, R. 2003 Análisis y Diseño de Experimentos. Mc Graw Hill. México.

KUELH, R. (2001). Diseño de experimentos, Principios Estadísticos para el Análisis de Investigaciones. Segunda Edición. Editorial Thomson. Larming.

MARTÍNEZ, R., MARTÍNEZ, N. (1977). Diseño de experimentos, Análisis de datos estándar y no estándar. Primera edición. Fondo Nacional Universitario. Santafé de Bogotá, D.C.,

MONTGOMERY, D. C. (1995). Diseño y Análisis de experimentos. Segunda edición. Limusa Wiley, grupo Noriegas editores. México.

MONTGOMERY, D., RUNGER, G. (2002). Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería. Segunda edición. Limusa Wiley. México.

PRECE, D. A. (1984). Biométrie en el Tercer Mundo: Ciencia no el ritual. Biométricos.

RILEY, J. (1997). Utilización de la Estadística en las Ciencias Biológicas: principales problemas y soluciones. IACR – Rothamsted.

RILEY, J., DARMI M. (1995). Un estudio de uso estadístico en la investigación de la acuicultura. Investigaciones de acuicultura.

SILVA, A. R., ÁLVAREZ, V. H., SILVA A. A. (2000). Como comparar correctamente Tratamientos de naturaleza Cualitativa. Fondo Nacional de Investigaciones Agropecuarias. Vicosá, Minas Gerais, Brasil.

WEINER, R. (1996). Estadística. Primera edición. CECSA. México.

- www.redpav.fpolar.info.ve/agrotrop/v50.2/a502a001.html - 15k

ANEXOS

ANEXO 1. DISTRIBUCIÓN F

gl denomi- nador	P (F≥F _α)	Grados de Libertad del numerador							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44
	0.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
	0.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7
	0.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982
	0.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925
2	0.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37
	0.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37
	0.025	38.81	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37
	0.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37
	0.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4
3	0.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25
	0.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
	0.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54
	0.010	34.12	30.62	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49
	0.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.33	44.13
4	0.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95
	0.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
	0.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98
	0.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80
	0.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35
5	0.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34
	0.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
	0.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76
	0.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29
	0.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96
6	0.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98
	0.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
	0.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.69	5.60
	0.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10
	0.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57
7	0.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75
	0.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
	0.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90
	0.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84
	0.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68
8	0.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59
	0.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
	0.025	7.37	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43
	0.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03
	0.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50
9	0.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47
	0.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
	0.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10
	0.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47
	0.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69
10	0.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38
	0.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
	0.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85
	0.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06
	0.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12
11	0.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30
	0.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
	0.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66
	0.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74
	0.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68
12	0.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24
	0.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85
	0.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51
	0.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50
	0.005	11.75	8.51	7.93	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35
13	0.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20
	0.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
	0.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39
	0.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30
	0.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08
14	0.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15
	0.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
	0.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29
	0.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14
	0.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86
15	0.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12
	0.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
	0.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20
	0.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00
	0.005	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67
16	0.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09
	0.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
	0.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12
	0.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89
	0.005	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52
17	0.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06
	0.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
	0.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06
	0.010	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79
	0.005	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39

CONTINUACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN F

gl denomi- nador	P (F<F _α)	Grados de Libertad del numerador							
		9	10	12	15	20	24	30	40
1	0.100	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53
	0.050	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1
	0.025	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006
	0.010	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287
	0.005	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148
2	0.100	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47
	0.050	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47
	0.025	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.45	39.46	39.47
	0.010	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.45	99.46	99.47
	0.005	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5
3	0.100	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16
	0.050	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
	0.025	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04
	0.010	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41
	0.005	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31
4	0.100	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80
	0.050	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
	0.025	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41
	0.010	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75
	0.005	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75
5	0.100	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16
	0.050	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
	0.025	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18
	0.010	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.39	9.29
	0.005	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53
6	0.100	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78
	0.050	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
	0.025	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01
	0.010	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14
	0.005	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24
7	0.100	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54
	0.050	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
	0.025	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31
	0.010	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91
	0.005	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42
8	0.100	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36
	0.050	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
	0.025	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84
	0.010	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12
	0.005	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29
9	0.100	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23
	0.050	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
	0.025	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51
	0.010	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57
	0.005	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52
10	0.100	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13
	0.050	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
	0.025	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26
	0.010	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17
	0.005	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97
11	0.100	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05
	0.050	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
	0.025	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06
	0.010	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86
	0.005	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.63	4.55
12	0.100	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99
	0.050	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
	0.025	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91
	0.010	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62
	0.005	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23
13	0.100	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93
	0.050	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
	0.025	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78
	0.010	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43
	0.005	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97
14	0.100	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89
	0.050	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
	0.025	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67
	0.010	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27
	0.005	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76
15	0.100	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85
	0.050	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
	0.025	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59
	0.010	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13
	0.005	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58
16	0.100	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81
	0.050	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
	0.025	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51
	0.010	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02
	0.005	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44
17	0.100	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78
	0.050	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
	0.025	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44
	0.010	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92
	0.005	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31

CONTINUACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN F

gl de- minador	P (F ≥ F _α)	gl numerador		
		60	120	∞
1	0.100	62.79	63.06	63.33
	0.050	252.2	253.3	254.3
	0.025	1010	1014	1018
	0.010	6313	6339	6366
	0.005	25253	25359	25465
2	0.100	9.47	9.48	9.49
	0.050	19.48	19.49	19.50
	0.025	39.48	39.49	39.50
	0.010	99.48	99.49	99.50
	0.005	199.5	199.5	199.5
3	0.100	5.15	5.14	5.13
	0.050	8.57	8.55	8.53
	0.025	13.99	13.95	13.90
	0.010	26.32	26.22	26.13
	0.005	42.15	41.99	41.83
4	0.100	3.79	3.78	3.76
	0.050	5.69	5.66	5.63
	0.025	8.36	8.31	8.26
	0.010	13.65	13.56	13.46
	0.005	19.61	19.47	19.32
5	0.100	3.14	3.12	3.10
	0.050	4.43	4.40	4.36
	0.025	6.12	6.07	6.02
	0.010	9.20	9.11	9.02
	0.005	12.40	12.27	12.14
6	0.100	2.76	2.74	2.72
	0.050	3.74	3.70	3.67
	0.025	4.96	4.90	4.85
	0.010	7.06	6.97	6.88
	0.005	9.12	9.00	8.88
7	0.100	2.51	2.49	2.47
	0.050	3.30	3.27	3.23
	0.025	4.25	4.20	4.14
	0.010	5.82	5.74	5.65
	0.005	7.31	7.19	7.08
8	0.100	2.34	2.32	2.29
	0.050	3.01	2.97	2.93
	0.025	3.78	3.73	3.67
	0.010	5.03	4.95	4.86
	0.005	6.18	6.06	5.95
9	0.100	2.21	2.18	2.16
	0.050	2.79	2.75	2.71
	0.025	3.45	3.39	3.33
	0.010	4.48	4.40	4.31
	0.005	5.41	5.30	5.19
10	0.100	2.11	2.08	2.06
	0.050	2.62	2.58	2.54
	0.025	3.20	3.14	3.08
	0.010	4.08	4.00	3.91
	0.005	4.86	4.75	4.64
11	0.100	2.03	2.00	1.97
	0.050	2.49	2.45	2.40
	0.025	3.00	2.94	2.88
	0.010	3.78	3.69	3.60
	0.005	4.44	4.34	4.23
12	0.100	1.96	1.93	1.90
	0.050	2.38	2.34	2.30
	0.025	2.85	2.79	2.72
	0.010	3.54	3.45	3.36
	0.005	4.12	4.01	3.90
13	0.100	1.90	1.88	1.85
	0.050	2.30	2.25	2.21
	0.025	2.72	2.66	2.60
	0.010	3.34	3.25	3.17
	0.005	3.87	3.76	3.65
14	0.100	1.86	1.83	1.80
	0.050	2.24	2.18	2.13
	0.025	2.61	2.55	2.49
	0.010	3.18	3.09	3.00
	0.005	3.66	3.55	3.44
15	0.100	1.82	1.79	1.76
	0.050	2.16	2.11	2.07
	0.025	2.52	2.46	2.40
	0.010	3.05	2.96	2.87
	0.005	3.48	3.37	3.26
16	0.100	1.78	1.75	1.72
	0.050	2.11	2.06	2.01
	0.025	2.45	2.38	2.32
	0.010	2.93	2.84	2.75
	0.005	3.33	3.22	3.11
17	0.100	1.75	1.72	1.69
	0.050	2.06	2.01	1.96
	0.025	2.38	2.32	2.25
	0.010	2.83	2.75	2.65
	0.005	3.21	3.10	2.98

CONTINUACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN F

gl denomi- nador	P(F≥F _α)	Grados de Libertad del numerador									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
	0.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
	0.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
	0.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
	0.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03
19	0.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
	0.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
	0.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
	0.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
	0.005	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93
20	0.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
	0.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
	0.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
	0.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
	0.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85
21	0.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
	0.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
	0.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
	0.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
	0.005	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77
22	0.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
	0.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
	0.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
	0.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
	0.005	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70
23	0.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
	0.050	4.26	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
	0.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
	0.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
	0.005	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.25	4.05	3.88	3.75	3.64
24	0.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
	0.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
	0.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
	0.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
	0.005	9.55	6.65	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.82	3.69	3.59
25	0.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
	0.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
	0.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
	0.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
	0.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54
26	0.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
	0.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
	0.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
	0.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
	0.005	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49
27	0.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
	0.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
	0.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
	0.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
	0.005	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45
28	0.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
	0.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
	0.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
	0.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
	0.005	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41
29	0.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.05	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
	0.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
	0.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
	0.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
	0.005	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38
30	0.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
	0.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
	0.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
	0.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
	0.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34
40	0.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
	0.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
	0.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
	0.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
	0.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12
60	0.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
	0.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
	0.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
	0.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
	0.005	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90
120	0.100	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65
	0.050	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91
	0.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
	0.010	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
	0.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71
-	0.100	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60
	0.050	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83
	0.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05
	0.010	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32
	0.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52

CONTINUACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN F

gl denomi- nador	P(F≥F _α)	Grados de Libertad del numerador								
		12	15	20	24	30	40	60	120	∞
18	0.100	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
	0.050	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
	0.025	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
	0.010	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
	0.005	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	0.100	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
	0.050	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
	0.025	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
	0.010	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
	0.005	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	0.100	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	0.050	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84
	0.025	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
	0.010	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	0.005	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	0.100	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
	0.050	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
	0.025	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
	0.010	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	0.005	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	0.100	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	0.050	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	0.025	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
	0.010	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	0.005	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	0.100	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
	0.050	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
	0.025	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
	0.010	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	0.005	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	0.100	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	0.050	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	0.025	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
	0.010	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	0.005	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	0.100	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
	0.050	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
	0.025	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
	0.010	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	0.005	3.37	3.20	3.02	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	0.100	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	0.050	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
	0.025	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
	0.010	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
	0.005	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	0.100	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
	0.050	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
	0.025	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
	0.010	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
	0.005	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	0.100	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	0.050	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	0.025	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.90	1.83
	0.010	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
	0.005	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	0.100	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
	0.050	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
	0.025	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
	0.010	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
	0.005	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	0.100	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	0.050	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	0.025	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
	0.010	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	0.005	3.18	3.01	2.82	2.72	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	0.100	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	0.050	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	0.025	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
	0.010	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	0.005	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	0.100	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	0.050	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	0.025	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
	0.010	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
	0.005	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	0.100	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
	0.050	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
	0.025	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
	0.010	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	0.005	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	0.100	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00
	0.050	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00
	0.025	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00
	0.010	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00
	0.005	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

ANEXO 2. VALORES CRÍTICOS PARA LA PRUEBA DE DUNCAN (1%)

<i>f</i>	<i>p</i>											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00
2	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00	14.00
3	8.26	8.50	8.60	8.70	8.80	8.90	8.90	9.00	9.00	9.30	9.30	9.30
4	6.51	6.80	6.90	7.00	7.10	7.10	7.20	7.30	7.30	7.50	7.50	7.50
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.50	6.80	6.80	6.80
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.00	6.30	6.30	6.30
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.80	6.00	6.00	6.00
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.50	5.80	5.80	5.80
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.40	5.70	5.70	5.70
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.39	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.36	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

CONTINUACIÓN DE VALORES CRÍTICOS PARA LA PRUEBA DE DUNCAN (5%)

<i>f</i>	<i>p</i>											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.25	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.47	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

ANEXO 3. PUNTOS CRÍTICOS PARA LA DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT

Grados de libertad	Área a la derecha de los puntos, $P(X > x)$			
	0.10	0.05	0.025	0.015
1	3.0776835	6.3137515	12.706205	21.204949
2	1.8856181	2.9199856	4.3026527	5.6427784
3	1.6377444	2.3533634	3.1824463	3.8960459
4	1.5332063	2.1318468	2.7764451	3.2976297
5	1.475884	2.0150484	2.5705818	3.002875
6	1.4397557	1.9431803	2.4469119	2.8289279
7	1.4149239	1.8945786	2.3646243	2.714573
8	1.3968153	1.859548	2.3060041	2.6338144
9	1.3830287	1.8331129	2.2621572	2.573804
10	1.3721836	1.8124611	2.2281389	2.5274842
11	1.3634303	1.7958848	2.2009852	2.4906639
12	1.3562173	1.7822876	2.1788128	2.4607002
13	1.3501713	1.7709334	2.1603687	2.4358452
14	1.3450304	1.7613101	2.1447867	2.4148977
15	1.3406056	1.7530504	2.1314495	2.397005
16	1.3367572	1.7458837	2.1199053	2.3815454
17	1.3333794	1.7396067	2.1098156	2.3680548
18	1.3303909	1.7340636	2.100922	2.35618
19	1.3277282	1.7291328	2.0930241	2.3456475
20	1.3253407	1.7247182	2.0859634	2.3362422
21	1.3231879	1.7207429	2.0796138	2.3277923
22	1.3212367	1.7171444	2.0738731	2.3201596
23	1.3194602	1.7138715	2.0686576	2.313231
24	1.3178359	1.7108821	2.0638986	2.3069134
25	1.3163451	1.7081408	2.0595386	2.3011295
26	1.3149719	1.7056179	2.0555294	2.2958145
27	1.3137029	1.7032884	2.0518305	2.2909136
28	1.3125268	1.7011309	2.0484071	2.2863802
29	1.3114336	1.699127	2.0452296	2.2821746
30	1.310415	1.6972609	2.0422725	2.2782623

**ANEXO 4. PUNTOS PORCENTUALES DEL ESTADÍSTICO RANGO
ESTUDENTIZADO (5%)**

<i>p</i>															
<i>f</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	18.10	26.70	32.8	37.20	40.50	43.10	45.40	47.30	49.10	50.60	51.90	53.20	54.30	55.40	56.30
2	6.09	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.90
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.16	10.35	10.52	10.60
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.67	8.80
5	3.61	4.54	5.18	5.64	5.99	6.28	6.52	6.74	6.93	7.10	7.25	7.39	7.52	7.64	7.75
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.04	7.14	7.24
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15	6.29	6.42	6.54	6.65	6.75	6.84
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.12	6.20
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.50
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.90	4.98	5.05	5.11	5.17
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95
∞	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.84

ANEXO 5. TABLA DE BONFERRONI

Valores de C para $1 - \alpha = 0.95$

$$\int_{-\infty}^C f(v)(t) dt = 1 - \frac{0.05}{2m}$$

[illegible]

Valores de C para $\lambda = 0.99$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \phi(v) dv = \frac{0.01}{2.00}$

[illegible]