NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEÁTICAS DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NÚCLEO TÉCNICO AGROPECUARIO

Luisa Fernanda Montaño Vallecilla

Código: 1157733

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2016

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEÁTICAS DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NÚCLEO TÉCNICO AGROPECUARIO

Luisa Fernanda Montaño Vallecilla

Código: 1157733

Director del Trabajo de Grado:

Mag. Cristian Andrés Hurtado Moreno

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2016

AGRADECIMIENTOS

Primeramente quiero darle gracias a Dios porque sin sus bendiciones nada de esto seria posible.

Agradezco a mis padres por su infinito apoyo y esfuerzo para hacer de mi una profesional, a mi familia por ser mi guía y mi motor para seguir adelante.

A mi tutor, Cristian Andrés Hurtado Moreno por guiarme, y por su paciencia.

A todas las personas que hicieron parte de este proceso de formación, compañeros y profesores. En especial Juan Manuel Hurtado, por su paciencia y por hacer esre camino más agradable.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 6

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN 10

1.1 Problemática de estudio 10

1.1.1 Resolución de ecuaciones 11

1.1.2 Uso de las letras 13

1.1.3 Transición de la aritmética al álgebra 14

1.1.4 Resolución de problemas 16

1.1.5 Razonamiento algebraico en la escuela 18

1.2 Justificación 21

1.3 Objetivos 23

1.3.1 Objetivo general 23

1.3.2 Objetivos Específicos 23

1.4 Metodología 24

CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL 26

2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática 26

1.4.1 Configuración de los objetos y procesos matemáticos 27

1.4.2 Análisis Epistémico/Cognitivo desde la perspectiva del EOS 32

1.5 Caracterización del razonamiento algebraico (RA) 33

1.5.1 Naturaleza del razonamiento algebraico desde la perspectiva del EOS 36

1.6 Niveles de Algebrización 39

CAPÍTULO III: ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS 47

3.1 **Análisis Epistémico de los problemas propuestos** 47

3.1.2 Posibles rutas de solución de los problemas propuestos 56

3.2 **Descripción de la población** 62

3.3 Análisis cognitivo de las situaciones propuestas 63

3.3.1 Análisis de la situación 1 63

3.3.2 Análisis de la situación 2 69

3.3.3 Análisis de la situación 3 74

3.3.4 Análisis de la situación 4 77

3.4 Algunas conclusiones de la implementación 83

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES EN TORNO AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA ESCUELA 84

4 BILBIOGRAFÍA 87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Objetos, lenguajes y trasformaciones de acuerdo a los niveles de algebrización. 45
Tabla 2. Análisis epistémico de la tarea 1 48
Tabla 3. Análisis Epistémico de la tarea 2 51
Tabla 4. Análisis Epistémico de la tarea 3 54
Tabla 5. Análisis Epistémico de la tarea 4 56
Tabla 6. Categorías de acuerdo a las prácticas comunes de los estudiantes en la situación 1 64
Tabla 7. Prácticas de los estudiantes en la tarea 2 70
Tabla 8. Práctica de estudiantes de la situación 3. 75
Tabla 9. Práctica de los estudiantes en la situación 4 78

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Configuración de objetos y procesos. (Tomado de Godino, Batanero y Font p.10) 31
Figura 2. Ejemplo para ilustrar los niveles de algebrización según las prácticas matemáticas. Tomado de Godino, Aké & Gonzato (p. 11) 41
Figura 3. Ejemplo de una práctica de la categoría 1 65
Figura 4. Ejemplo de la práctica matemática de un estudiante 65
Figura 5. Práctica del estudiante donde se asignan valores específicos a las llaves y tuercas. 66
Figura 6. Práctica donde el estudiante asigna valores específicos a las llaves y tuercas. 67
Figura 7. Prácticas de estudiantes de la categoría 3. 68
Figura 8. Estudiantes que no establecen ninguna relación entre las balanzas 68
Figura 9. Práctica de un estudiante de la categoría 2 70
Figura 10. Estudiante que representa la incógnita con una variable. 71
Figura 11. Estudiante que multiplica la altura final alcanzada por cinco 72
Figura 12. Estudiante que a la altura final le suma dos veces un quinto. 72
Figura 13. Representación gráfica de la situación 2 realizada por un estudiante 73
Figura 14. Estudiante en la que se asume una resolución por tanteo 75
Figura 15. Práctica de un estudiante de la situación 3 76
Figura 16. Estudiante de la categoría 1, en la situación 4. 78
Figura 17 Práctica de un estudiante en la situación 4. 80
Figura 18. Práctica de un estudiante para dar respuesta a la tarea 4 81
Figura 19. Práctica de un estudiante en la tarea 4. 82

RESUMEN

En este trabajo de grado se presentan los niveles de algebrización en que se encuentran las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de noveno grado de la Educación Básica de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario, de Corinto (Cauca). Para ello se les propuso al grupo de estudiantes cuatro situaciones problema, las cuales podían ser resueltas por estrategias más o menos algebrizadas. El marco de referencia conceptual adoptado en este trabajo de grado para el análisis de los datos recolectados se presenta desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS), en particular lo referido al análisis de la emergencia de objetos y procesos matemáticos, la caracterización del Razonamiento Algebraico, y los Niveles de Algebrización.

El trabajo permitió concluir entre otras cosas que la mayoría de los estudiantes tienden a utilizar los algoritmos de las operaciones básicas en sus prácticas matemáticas haciendo uso de cantidades extensivas (que dentro de la perspectiva del EOS, se refiere a cantidades concretas), en algunos casos se reconocen intensivos (es decir, cantidades generales) que representan con incógnitas pero no son capaces de operar con ellas. Además las prácticas matemáticas de este grupo de estudiantes se moviliza entre un nivel 0 y 1 de algebrización.

Palabras claves: Niveles de algebrización, Objetos y procesos Matemáticos, Razonamiento Algebraico, Prácticas matemáticas, Enfoque Ontosemiótico.

INTRODUCCIÓN

El razonamiento algebraico (RA) en los últimos años ha sido un tema de gran interés para investigadores en el campo de la Educación Matemática tales como Castro (2008); Aké (2013); Kaput (2000); Godino & Font (2003); Radford (2000) y Kieran (2007), y una de las cuestiones más relevantes que se han mencionado es la necesidad de estudiar los conocimientos que ponen en juego los estudiantes al resolver problemas matemáticos, no solo para identificar las dificultades, sino para desarrollar este modo de razonar desde los primeros años de escolaridad.

Si bien es necesario identificar las dificultades que presentan los estudiantes en álgebra escolar, también es importante potenciar el razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad. Según Godino, Aké, Castro y Wilhelmi (2012), el desarrollo del RA se logra de forma progresiva, gradual y sistémica en el cual se van adquiriendo mayores niveles de generalidad que conlleva a la consolidación de un lenguaje alfanumérico, es por ello que no debe relegarse solo a secundaria sino que debe promoverse en todos los niveles educativos.

Aunque no hay un consenso de lo que se entiende por razonamiento algebraico, algunos investigadores como Kieran (2007), Radford (2003) y Kaput (2000), han propuesto una caracterización del RA, los cuales coinciden en que las características principales de este son la generalización, el uso del lenguaje alfanumérico y el cálculo analítico, en el cual los objetos algebraicos van adquiriendo un significado diferente en tanto se avance en los procesos de generalización y simbolización.

Teniendo en consideración los rasgos característicos del RA es necesario analizar en qué medida desde una práctica matemática se cumplen estas características, es por ello que el Enfoque Ontosemiótico (EOS) proporciona elementos para analizar desde una práctica matemática los niveles de razonamiento algebraico que van adquiriendo los estudiantes conforme van avanzando en su proceso de formación y que les permite hacer abstracciones cada vez más generales.

En este sentido, esta propuesta de trabajo de grado se centra en las prácticas matemáticas que los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Núcleo Técnico agropecuario emplean al resolver problemas matemáticos que impliquen ecuaciones lineales con una incógnita real, es por ello que el objetivo central de este trabajo es caracterizar el razonamiento algebraico de estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, de acuerdo a los niveles de algebrización propuestos por Godino et al. (2012), que se manifiesten en sus prácticas matemáticas al solucionar estos problemas.

Para abordar el problema de investigación en este trabajo se presenta la problemática en la cual se muestran las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas que implican ecuaciones lineales, cuestión que hace preguntarse sobre la importancia de analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes y clasificarlas en los distintos niveles de algebrización de acuerdo a su grado de escolaridad, lo cual permitirá generar conclusiones y proponer algunas reflexiones sobre la importancia de desarrollar el RA en la escuela. Luego se exponen los objetivos generales y específicos que se esperan alcanzar y que orientan este trabajo, así como la justificación que da cuenta de la importancia de la realización de este.

Posteriormente se presenta el marco de referencia conceptual donde se exponen los referentes que permiten orientar el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes y que toma en consideración tres perspectivas: el enfoque ontosemiótico (EOS), en el cual se hará énfasis en los objetos y procesos matemáticos y cómo estos emergen en las prácticas matemáticas. Luego, se tomaran referentes que permitan hacer una caracterización del Razonamiento Algebraico para dejar claro lo que se entiende por este; y por último los Niveles de Algebrización propuestos por Godino et al. (2012), en el cual se presentan cuatro niveles que de acuerdo con las características propias de estos permite hacer una clasificación de las prácticas de los estudiantes y a su vez hacer una reflexión sobre el razonamiento algebraico que se muestran en estas.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se expone el problema que se abordó en este trabajo de grado, así como los objetivos generales y específicos que direccionan su elaboración, además se presentan la justificación que expone los argumentos sobre la importancia de abordar esta problemática y la metodología para realizar el trabajo propuesto.

1.1 Problemática de estudio

En las últimas décadas se han realizado diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática donde además de estudiar los problemas que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, también se presentan propuestas para mitigar en gran medida los problemas que se presentan en esta. Sin embargo aún queda mucho por realizar, tal como afirma Socas (2011), las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas han sido y son hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas.

Algunas investigaciones realizadas por autores como Paralea, (1999), Kieran & Filloy, (1989), Castro, (2012); Gallardo & Rojano, (1988), y Moreno & Castellanos, (1997), se han centrado en el estudio del álgebra escolar, donde se ha puesto de manifiesto las dificultades y errores que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas algebraicos. Estas dificultades son causadas en algunas ocasiones por una serie de errores que muestran los estudiantes, los cuales Socas (2011), analiza desde tres ejes, no disjuntos, que permiten estudiar el origen del error. Desde esta perspectiva se sitúan los errores que cometen los estudiantes en relación con tres orígenes distintos: obstáculo (cognitivos, didácticos y epistemológicos), ausencia de sentido (semiótico, estructural y autónomo) y actitudes afectivas (emociones, actitudes y creencias).

A continuación se presentaran algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra escolar, las cuales se organizan en cuatro categorías en las cuales se abordan estas dificultades y errores y una quinta donde se hacen algunas consideraciones del razonamiento algebraico que develan problemas en el razonamiento en la escuela y que es una causa de los errores que cometen los estudiantes al llegar a la secundaria, estas categorías son: dificultades y errores relacionados con la resolución de ecuaciones; dificultades y errores en el uso de las letras; dificultades y errores en la transición de la aritmética al álgebra, dificultades y errores asociadas a la resolución de problemas; y por último algunas consideraciones sobre el razonamiento algebraico.

1.1.1 Dificultades y errores relacionados con la resolución de ecuaciones

Moreno & castellano (1997), dentro de su investigación muestran algunos errores frecuentes que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, entre ellos se resaltan los siguientes:

- Un número que multiplica a la incógnita en uno de los lados de la ecuación se pasa a restar al lado opuesto de la igualdad. Esto se podría atribuir a que no diferencian el inverso aditivo del inverso multiplicativo y a la falta de conocimiento de la propiedad uniforme del signo igual, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

  (1) $3x + 1 = 0$

  (2) $x = -1 - 3$

  Al resolver la ecuación (1) los estudiantes no hacen una distinción entre el inverso aditivo y multiplicativo, en este caso, deben hacer uso del inverso multiplicativo y conocer la propiedad uniforme que indica que se pueden realizar las mismas operaciones a ambos lados de la igualdad y se conserva la equivalencia.

- Cambian el signo en un miembro de la ecuación sin hacer la misma modificación en el otro.

$$-3x + 4 = 2$$

$$3x = 2 - 4$$

En esta ecuación los estudiantes toman la expresión $-3x$ y la convierten en $3x$ cambiando el signo de forma arbitraria hacer la modificación en el otro miembro de la igualdad para que se conserve la equidad, es decir, no realizan las mismas operaciones a ambos lados de la igualdad para que no se pierda la relación entre las expresiones.

- No realizan la transposición de términos (sumandos o factores) en el orden correcto

$$\frac{5x}{3} + 2 = 3$$

$$5x + 2 = 9$$

En esta ecuación, los estudiantes no transponen las cantidades en el orden correcto, primero los sumandos y luego los factores, en este caso primero realizan la transposición del factor 3, cuando en primera instancia deben trasladar el sumando 2.

Lo errores mencionados se deben también como manifiesta Castro (2012), a que algunos estudiantes que no tienen en cuenta la equivalencia, transforman las expresiones o ecuaciones arbitrariamente, esto genera una dificultad en su aprendizaje, dado que en la solución de ecuaciones y al hacer transformaciones de las expresiones, estas han de seguir las normas establecidas por el álgebra, de tal forma que se obtengan expresiones equivalentes y no se modifique la solución.

Otros estudios como los realizados por Kieran & Filloy, (1989), Kieran, (1992) se han centrado en la comprensión de los estudiantes, en la estructura de las ecuaciones y la resolución de estas, y encontraron que los estudiantes tienen dificultad en tratar expresiones con muchos términos como una sola unidad y no perciben la estructura superficial, por ello estos autores muestran el siguiente ejemplo, donde $4(2r+1)+7=35$, tiene la misma estructura de $4x+7=35$, debido a que $2r+1$ que está en la primera ecuación puede ser vista como x, en la segunda ecuación, teniendo así la misma estructura.

Teniendo en cuanta lo anterior, manifiesta:

> Los estudiantes deben comprender que los objetos con los que están operando son expresiones algebraicas y no solamente números; además que las operaciones que se realizan son las de simplificación, factorización, racionalización del denominador, resolución o diferenciación de ecuaciones, etc., y no sumas, restas, multiplicaciones o divisiones. (p.3)

Lo anterior genera muchas confusiones en los estudiantes impidiendo que resuelvan de forma adecuada los problemas propuestos.

1.1.2 Dificultades y errores en el uso de las letras

Otra de las dificultades se debe a la falta de interpretación de las expresiones algebraicas, donde según Kieran & Filloy (1989) la mayoría de los estudiantes tratan las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o variables. Por ejemplo consideran que $l+m+n=l+p+n$ nunca es verdad, debido a que ven la letra m como una incógnita o valor especifico más que como una variable que puede tener el mismo valor de p.

Paralea (1999) afirma, que muchas de las dificultades son debidas a la significación que poseen las letras, por ejemplo “$3l$” es comprendida a menudo como tres objetos, en vez de 3 veces el número de ese objeto. Un acercamiento a la comprensión de estas afirmaciones es animar constantemente a comprobar por sustitución el trabajo que se realice así como a “pensar con letras”.

Escalante & Cuesta (2012) dentro de su investigación también mostraron que los estudiantes no comprenden el sistema de signos del álgebra, es decir, tienen dificultades para seleccionar las cantidades a representar (con letras) y para hacer una relación funcional entre ambas variables.

Por su parte Küchemann (citado por Ursini, 1994), identificó seis maneras de interpretar los símbolos literales, estos son los siguientes:

Como letra evaluada (letra que se le asignan números), letra como objeto (abreviatura para designar un objeto), como incógnita específica (letra que representa un número particular desconocido), como número generalizado (letra que es capaz de asumir números distintos), y como variable (letra que tiene un rango de valores no especificado).

Sin embargo según Ursini (1994) los estudiantes presentan dificultades para hacer estas distinciones, además menciona investigaciones como las realizadas por Küchemann, (1980) y Booth, (1984) en las cuales se muestra la dificultad que muestran los estudiantes para trabajar con variables como número generalizado y que estos tienden a interpretarla como una incógnita específica, como un objeto e incluso la ignoran.

1.1.3 Dificultades y errores en la transición de la aritmética al álgebra

En aritmética, la concatenación denota adición (37 significa $30 + 7$; 26 significa $20 + 6$), sin embargo en el álgebra la concatenación significa multiplicación ($4b$ significa $4xb$) esto hace según Kieran & Filloy (1988) que al extender la generalización sobre lo que era correcto en la aritmética conlleve a que los estudiantes malinterpreten el sentido de los términos algebraicos.

Una investigación realizada por Gallardo & Rojano (1988), pone de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones ya que no encuentran diferencias entre las *ecuaciones aritméticas* donde hay una sola ocurrencia de la incógnita, es decir, la incógnita se encuentra solo en un miembro de la igualdad y son de la forma $ax = b$, $x \pm a = b$, $a \times (x \pm b) = c$, $(x \pm a) \times b = c$, (donde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$); y las *ecuaciones no aritméticas* o algebraicas donde se requiere la operación de la incógnita debido a que existe una relación entre dos expresiones algebraicas, como por ejemplo $AX \pm B = CX \pm D$, esta dificultad se debe, fundamentalmente, a no darse cuenta en general el cambio de representación entre la aritmética y el álgebra, permaneciendo aún en el campo puramente aritmético.

En esta investigación también se manifiesta que en aritmética el signo de igualdad se usa fundamentalmente para relacionar un problema con su respuesta numérica, es decir, como una relación entre un proceso y el resultado de su ejecución. En álgebra, el signo de igualdad tiene un carácter dual: como operador (carácter asimétrico de la igualdad), como equivalencia o relación (carácter simétrico de la igualdad). La no comprensión de estas diferencias causa dificultades en la resolución de ecuaciones ya que usualmente se enfatiza en la noción de operador y no en la de equivalencia.

Además Kieran & Filloy (1989) mencionan que el hecho de que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado, les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad; esto se debe a que en los primeros años de escolaridad, el signo igual se usa más para anunciar un resultado que para expresar una relación simétrica y transitiva: el signo es unidireccional.

Lo mencionado en esta categoría es lo que Rojano & Gallardo (1988) denominan una ruptura o corte didáctico, esto es, el obstáculo que se presenta en el límite del pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, estos conocimientos son tales que para dar paso al algebraico es necesario romper con conceptos y hábitos del aritmético, pero que a su vez, se requiere de extender las nociones y acciones asignadas a los objetos aritméticos a un nuevo universo de objetos que incluye a los algebraicos. Se refieren específicamente a los objetos o elementos constitutivos de las ecuaciones, es decir, los coeficientes (inicialmente de naturaleza aritmética), las incógnitas (de naturaleza algebraica) y los signos $+, -, =$ (de naturaleza dual).

1.1.4 Dificultades y errores en la resolución de problemas

Gran cantidad de las dificultades ligadas al lenguaje del álgebra, surge en la resolución de problemas al hacer cambios de expresiones verbales a algébricas o viceversa, como apunta Castro (2012), aparecen dificultades en la formulación de ecuaciones algebraicas cuando la información se presenta con palabras. La investigación que ha realizado, está centrada en estudiar la manera de hacer traducciones entre los lenguajes simbólico y verbal por estudiantes de educación secundaria. Se ha manifestado que utilizando las mismas expresiones, los estudiantes cometen más errores al realizar la traducción de enunciados verbales a su representación simbólica que cuando se hace desde el simbólico al verbal.

En una investigación realizada por Rodríguez, Molina, Cañadas & Castro (2015) muestra que cuando se presenta un problema mediante un enunciado verbal y es necesaria su traducción a simbolismo algebraico para su resolución, los estudiantes ponen resistencia al uso del simbolismo algebraico y prefieren utilizar estrategias y representaciones de tipo aritmético.

Además manifiestan que en esa traducción los estudiantes proponen diversidad de traducciones; el número de cantidades contenidas en el enunciado verbal no coincide con el número de símbolos diferentes utilizados; tienden a utilizar más letras del mínimo necesario, una de las cuales corresponde a la incógnita del enunciado; y existe una cierta preferencia por la elección de las cantidades que deben ser designadas con una letra.

Así como los estudiantes presentan dificultades al realizar traducciones del lenguaje natural al simbolismo algebraico, también las tienen en sentido contrario, es decir, del simbolismo algebraico al lenguaje natural, Rodríguez et al. (2015), Muestra que en las ecuaciones de primer grado, los errores identificados se deben a la traducción incorrecta de la notación matemática, a la asignación de valores no realistas, a las incógnitas de los problemas inventados, al cambio de la estructura de la ecuación en el problema, al uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema y a que establecen de forma incorrecta una relación parte-todo.

En la investigación hecha por estos autores, se plantea una clasificación de los errores en los procesos de traducción donde presentan los siguientes: *Los errores según la completitud del enunciado:* hacen referencia a la falta o sobra de algún símbolo o palabra para que expresión, simbólica o verbal, dada por el estudiante pueda ser considerada correcta; *los errores derivados de la aritmética:* son los que provienen del uso incorrecto o falta de interpretación de los signos u operaciones; *los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico*: son específicos y asociados al uso del sistema de representación simbólico.

Por su parte, Puig (1998) manifiesta que en la resolución de problemas que impliquen ecuaciones se presentan tres dificultades, estas son: dificultades para analizar el enunciado, determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas; dificultades en la traducción y dificultades al escribir la ecuación, el error que puede cometerse aquí es igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad.

Según los resultados presentados por las pruebas TIMSS (2007), los estudiantes de Colombia presentan un bajo nivel académico en matemáticas, lo cual indica que tienen dificultades en dominio de contenido (números, álgebra, geometría, datos y probabilidad), y en dominios cognitivos que implican razonar, conocer y aplicar, por ello es importante analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Godino, Batanero y Font (2007), presentan un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática en el cual definen como práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

1.1.5 Razonamiento algebraico en la escuela

En los últimos años el razonamiento algebraico (RA) ha sido un tema de gran interés para investigadores en el campo de la Educación Matemática tales como Castro (2008); Aké (2013); Kaput (2000); Godino & Font (2003); y Radford (2000). En muchas de estas investigaciones se ha manifestado la importancia de potenciar este razonamiento desde los primeros años de escolaridad.

Debido a las dificultades en el aprendizaje del álgebra que han reportado diversas investigaciones en Educación Matemática como las mencionadas anteriormente, se han hecho propuestas como el Early Álgebra[1] y la pre-álgebra[2], aunque ambas tiene como objetivo principal desarrollar el RA desde los primeros años de escolaridad tienen concepciones epistemológicas distintas, tal como se presenta en Socas (2007).

---

[1] La Early álgebra propone incorporar a las aulas de Educación Primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para de este modo desarrollar competencias propias del Álgebra.

[2] La pre-álgebra se encarga de mitigar las dificultades que se presentan al iniciar el álgebra.

Aunque no hay una definición concreta de lo que se entiende por razonamiento algebraico autores como Kieran (2007); Carraher y Schliemann (2007), Radford (2003), entre otros han hecho una caracterización de este y coinciden en que involucra rasgos de generalización deliberada y expresiones de generalidad, es decir, que el razonamiento algebraico tiene como rasgo fundamental la generalización y el uso de símbolos para expresar ideas matemáticas.

Como ya se había mencionado, los estudiantes presentan grandes dificultades y errores al resolver problemas algebraicos y más aún cuando estos implican ecuaciones, gran parte de esto se debe según a que no se potencia el razonamiento algebraico (RA) desde los primeros años de escolaridad, lo cual genera que los estudiantes al llegar a secundaria se encuentren con un lenguaje alfanumérico de forma inmediata sin la previa consolidación de este.

Así pues, el RA se da de manera gradual, sistemática y progresiva donde cada vez más se van alcanzando mayores niveles de generalidad que según Godino, Aké, Castro y Wilhelmi (2012) es un rasgo característico de este razonamiento, además se va construyendo poco a poco un lenguaje alfanumérico para expresar los conocimientos que los estudiantes van adquiriendo.

Para potenciar el RA en los primeros años de escolaridad es importante que el docente de matemáticas esté atento a los nuevos aportes en Educación Matemáticas que le permita comprender la importancia de proponer problemas matemáticos, tal como la generalización de patrones, de tal forma que les permita a los estudiantes ir avanzando en sus grados de generalización.

Por otra parte los docentes deben estar en la capacidad de identificar como los estudiantes van adquiriendo cada vez más los niveles de generalidad y tener herramientas para analizar el razonamiento de sus estudiantes conforme a las prácticas matemáticas que estos manifiesten y así tomar postura frente a las dificultades y errores que estos manifiesten.

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, cabe resaltar que en los primeros años de escolaridad se pueden expresar generalidades diferentes a la alfanumérica que son muy importantes tales como la gestual, el lenguaje ordinario y gráfico, y que a lo largo de la vida escolar se va construyendo otras maneras de representar estas generalidades hasta llegar a expresar ideas matemáticas a través de un lenguaje alfanumérico.

Así pues, pese a la importancia de desarrollar el razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, investigaciones como Radford (2000); Kieran (2007); Socas (2007); Castro (2014), manifiestan que este se sigue relegando a secundaria en donde se enseña de forma tradicional, es decir, se siguen enseñando objetos algebraicos y unas reglas para resolver una serie de ejercicios sin hacer reflexiones en torno a ellos y que los estudiantes no vean el álgebra como algo abstracto y aislado de los contextos de la vida diaria.

Todo lo anterior hace que los estudiantes no desarrollen el pensamiento algebraico como se esperaría al culminar su etapa escolar, pues los conocimientos que adquieren se limitan a resolver algoritmos.

Por lo cual el interés de este trabajo de grado es indagar sobre:

¿Qué razonamiento algebraico manifiestan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario, cuando solucionan problemas que involucren ecuaciones lineales con una incógnita real?

1.2 Justificación

Este trabajo presenta un análisis acerca de las prácticas matemáticas, tal como se muestra en el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, presentado por Godino, Batanero & Font (2007), estas prácticas serán analizadas a través de unos problemas propuestos a los estudiantes que implican ecuaciones lineales con una incógnita real. Se toman las ecuaciones porque abordan un concepto importante en el álgebra escolar puesto que permite mostrar la relación de equivalencia entre expresiones de fenómenos distintos, y a través de este se pueden observar los distintos niveles de razonamiento algebraico que despliegan los estudiantes de grado noveno de la institución Núcleo Técnico Agropecuario al realizar dichas prácticas.

Además se toman las ecuaciones lineales como objeto matemático para seleccionar los problemas que los estudiantes deben resolver dado que es un concepto esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que permiten el cambio de un campo aritmético a uno algebraico, cuestión que según Rojano & Gallardo (1988), genera una ruptura o corte didáctico, puesto que es necesario en las ecuaciones algebraicas realizar operaciones con la incógnita para así determinar su valor, cuestión que no sucede en las ecuaciones aritméticas, dicha ruptura ocasiona problemas en la comprensión de los estudiantes, por ello se considera necesario estudiar las ecuaciones lineales.

Teniendo en cuenta que diversas investigaciones como las presentadas por Kieran & Filloy (1989); Castro (2012); Gallardo & Rojano (1988); y Paralea (1999), muestran algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar, se considera necesario analizar el RA de los estudiantes para determinar el nivel de algebrización y en caso de no estar en un nivel adecuado de acuerdo al grado de escolaridad, hacer reflexiones que incentiven a los docentes a promover el desarrollo del RA desde los primeros años de escolaridad para que se puedan mitigar en gran medida las dificultades que se presentan en secundaria.

Por otra parte, las situaciones problema permiten generar procesos de modelación y a su vez crear modelos matemáticos como lo son las ecuaciones lineales con una incógnita real, las cuales permiten no solo resolver problemas en matemáticas, sino también en otras áreas del conocimiento y de la vida real, todo esto ayuda a consolidar competencias en los estudiantes que los ayuden a resolver diversas situaciones que impliquen la utilización de ecuaciones.

En este sentido el trabajo propuesto, presenta un análisis acerca de las prácticas de los estudiantes para determinar los objetos que emergen en estas y los niveles de algebrización que los estudiantes poseen. El concepto de ecuaciones lineales con una incógnita real, se toma para la selección de los problemas que serán implementados en estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, ya que en este grado de escolaridad los estudiantes ya han abordado en gran medida este concepto en el aula de clases y han trabajado cuestiones algebraicas que les ayudará a resolver los problemas matemáticos propuestos.

En síntesis, este trabajo es pertinente porque permitirá a los docentes en ejercicio tener un modelo para identificar a través de las prácticas matemáticas los niveles de algebrización de los estudiantes, y a su vez hacer una reflexión más profunda de los conocimientos que ponen en juego sus estudiantes al enfrentarse a un problema algebraico propuesto en el aula, que le ayudará a observar las generalidades alcanzadas por los estudiantes. Además a los docentes en formación, les será de gran ayuda puesto que muestra algunas herramientas para analizar las prácticas matemáticas e identificar los distintos niveles en los que se pueden clasificar las prácticas matemáticas y comprender la importancia de potenciar el razonamiento algebraico en sus estudiantes.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar el razonamiento algebraico de estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario, de acuerdo a los niveles de algebrización que se manifiesten en sus prácticas matemáticas al solucionar problemas que involucren ecuaciones con una incógnita real.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Identificar los objetos y procesos matemáticos emergentes en las prácticas matemáticas que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas propuestos.
2. Identificar los niveles de algebrización de la actividad matemática que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas propuestos.
3. Generar algunas conclusiones entorno al razonamiento algebraico de los estudiantes objeto de estudio y proponer algunas reflexiones en relación al desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela.

1.4 Metodología

La metodología utilizada será una investigación cualitativa de tipo descriptivo, según Tamayo (2003), la investigación descriptiva comprende la descripción, registro, análisis e interpretación de la naturaleza actual, y la composición o procesos de los fenómenos. Este enfoque se realiza sobre cómo una persona o grupo de personas funciona en el presente, trabaja sobre realidades y su característica fundamental es la de presentar una interpretación correcta.

Teniendo en cuenta lo anterior a continuación se muestra cuatro etapas en las cuales se desarrollará este trabajo:

Primera etapa

Establecer la problemática, los objetivos y la justificación que orienta este trabajo de grado y que permiten su realización.

Segunda etapa

Definir el marco de referencia conceptual que orienta este trabajo y que se presenta desde tres perspectivas: El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) propuesto por Godino et al. (2007), del cual se hará énfasis en los objetos matemáticos y cómo estos emergen en las prácticas matemáticas; La caracterización del razonamiento algebraico (RA), donde se expone que se entiende por este y la importancia de ser desarrollado y potenciado desde los primeros años de escolaridad, así como la naturaleza de este razonamiento desde el EOS; y por último los 4 niveles de algebrización que permitirán hacer el análisis de las prácticas matemáticas que realizarán los estudiantes objeto de estudio.

Tercera etapa

Implementar en la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario del municipio de Corinto (Cauca), una prueba que contiene cuatro problemas algebraicos, se seleccionará aleatoriamente uno de los tres cursos de grado noveno que hay en la institución para así observar sus prácticas matemáticas. La descripción de la población escogida se presentará en el siguiente capítulo.

Para obtener los datos que permita hacer un análisis de los niveles de algebrización, se plantearan cuatro problemas, los cuales pueden resolverse desde un nivel 0 hasta un nivel 3. Estos problemas serán seleccionados teniendo en cuanta como tema central las ecuaciones lineales, puesto que en este grado de escolaridad los estudiantes han tenido una formación algebraica que les permitiría realizar estos problemas, además los problemas serán seleccionados de algunas investigaciones que se han realizado al respecto tales como Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014), Castro (2008), y Godino, Aké, Whilelmi, Neto, Etchegaray & Lasa (2015).

Cuarta Etapa

Realizar el respectivo análisis. Se pretende analizar las prácticas matemáticas que los estudiantes despliegan al realizar las tareas propuestas, de las cuales se obtendrán los resultados que permitan analizar los distintos niveles de algebrización que los estudiantes presenten.

Posteriormente se harán reflexiones respecto al resultado obtenido que orienten a los docentes en ejercicio y docentes en formación a analizar con más detalle las prácticas de sus estudiantes y a comprender la importancia de potenciar este razonamiento no solo en educación secundaria sino a través de todos los grados de escolaridad de los estudiantes.

CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este apartado se presentan los referentes conceptuales que permitirán analizar las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes de grado noveno, como es el propósito central de este trabajo; para ello se toma en consideración tres perspectivas: en primer lugar el Enfoque Ontosemiótico (EOS), del cual se hará énfasis en los objetos matemáticos y cómo estos emergen en las prácticas matemáticas. Posteriormente se tomaran referentes que permitan hacer una caracterización del Razonamiento Algebraico (RA) para dejar claro lo que se entiende por este; y por último los Niveles de Algebrización propuestos por Aké (2013), Godino, Aké, Gonzato & Whilelmi (2013) para determinar conforme a las prácticas de los estudiantes en qué nivel algebraico están. Estas perspectivas se presentan a continuación:

2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

El EOS es un marco teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática propuesto principalmente por Godino, Batanero y Font, con el objetivo de comparar y articular diversas aproximaciones teóricas usadas en Didáctica de las Matemáticas (DM) desde un punto de vista unificado, y que permita superar los problemas que se presentan en los diversos paradigmas que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la DM, como lo manifiesta Godino, Batanero & Font (2007); Godino (2012).

Como se muestra en Godino et al. (2007), Este enfoque se ha ido consolidando durante varios años, en los que se han rastreado tres momentos o etapas como se muestra a continuación: en la primera etapa (1993-1998) se desarrollaron y precisaron las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático (entendidos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para la realización del problema matemático propuesto) y su relación con la noción de comprensión. En la segunda etapa (1998) se progresó en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudia los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica; y en la última etapa se centró el interés en los modelos teóricos propuestos en DM sobre la instrucción y conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de estas.

Actualmente el EOS se configura a partir de cinco categorías de análisis las cuales están compuestas de una serie de nociones teóricas que permiten estudiar el nivel de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estas categorías son: los sistemas de práctica, la configuración de objetos y procesos matemáticos, la configuración didáctica, la dimensión normativa y la idoneidad didáctica. Para la elaboración de este trabajo se hará énfasis en el segundo tipo de análisis, dado que, de acuerdo con el propósito central de este trabajo se hace necesario observar los objetos y procesos matemáticos emergentes en las prácticas matemáticas para hacer una caracterización del razonamiento algebraico de los estudiantes.

1.4.1 Configuración de los objetos y procesos matemáticos

Según Godino (2002), un **objeto o entidad matemática**[3] es todo aquello que puede ser indicado, señalarse o a lo cual puede hacerse referencia cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas; estos emergen en las **prácticas matemáticas**[4] que se entienden como toda acción o expresión realizada por alguien para resolver una situación problema[5], comunicar la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas; analizar cómo estos surgen implica considerar como mínimo, dos niveles de objetos que nacen de la actividad

[3] Los objetos matemáticos aquí no son entendidos como usualmente se concibe en Educación Matemática, es decir, como un ente abstracto que es reconocido como tal en tanto se le atribuyen unas propiedades, en el EOS se considera como emergentes en las prácticas matemáticas.
[4] Se usará negrilla para resaltar las nociones teóricas empleadas en esta categoría de análisis.
[5] Las situaciones problemas son entendidas como cualquier situación donde esté en juego un objeto matemático; realizar una suma por ejemplo desde el EOS es una situación problema.

matemática según Godino, Batanero y Font (2007) estos son: un primer nivel donde están aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.), y en un segundo nivel una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior.

En el primer nivel se presentan las configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de las prácticas matemáticas y a su vez estas son necesarias para la interpretación de los resultados obtenidos al dar respuesta a un situación problema, puesto que para ello se hace uso de lenguajes verbales y simbólicos, esto con el fin de elaborar argumentos donde se puedan observar conceptos, procedimientos y proposiciones que ayuden a determinar qué tan satisfactorios son estos resultados. Debido a lo anterior se propone una tipología de objetos matemáticos primarios:

- **Elementos lingüísticos**: son los términos, expresiones, gráficos, etc. En sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- **Situaciones-problemas**: son las tareas, ejercicios, aplicaciones en otras áreas del conocimiento.
- **Conceptos-definición**: introducidos mediante definiciones o descripciones.
- **Proposiciones:** enunciados sobre conceptos.
- **Procedimiento**: algoritmos, técnicas de cálculo, operaciones.
- **Argumentos:** enunciados utilizados para validar los procedimientos, conceptos y proposiciones empleados en la práctica matemática.

Ahora bien, el segundo nivel da cuenta de los atributos contextuales de los objetos matemáticos emergentes, aquí se manifiesta que el lenguaje utilizado en el nivel anterior permite dar fuerza a los significados de los objetos y establecer su naturaleza funcional, es por ello que de acuerdo al lenguaje en el que participan pueden considerarse unas facetas o dimensiones duales que se presentan a continuación:

- **Personal / institucional**: los objetos que emergen en una institución (conjunto de personas que hacen parte de una práctica matemática), se denominan objetos institucionales, y si surgen de forma personal son llamados objetos personales; es decir, que la cognición personal es el resultado del pensamiento y acción del sujeto individual ante una clase de problemas; y la cognición institucional o grupal, es el resultado del diálogo y convenios que establecen los sujetos que forman parte de la grupo de prácticas.
- **Ostensivo / no ostensivo:** lo ostensivo hace referencia a los objetos matemáticos que son perceptibles a través de un sistema de representación por ejemplo, verbal, grafico, etc., y los no ostensivos son aquellos objetos que son pensados pero no se exteriorizan. Un ejemplo que ilustra esto es la representación interna o mental que un sujeto tenga de la recta (objeto no ostensivo) y el registro de representación sea gráfico, tabular o algebraico que este usa para expresarlo, como se muestra: $y = mx + b$ (objeto ostensivo).
- **Expresión / contenido:** se muestra la estrecha relación entre el significante y el significado de un objeto, es decir, entre lo que se puede ver (signo) y lo que este signo significa, de acuerdo con unos acuerdos y criterios establecidos por una comunidad. Por ejemplo el signo $\times$, en un contexto aritmético hace referencia a un producto, pero álgebra hace alusión a una incógnita.
- **Extensivo / intensivo** (ejemplar-tipo): establece la relación entre lo particular (ejemplo) y lo general (tipo) de un objeto matemático en determinada situación. Por ejemplo la ecuación $2x + 3 = 5$ es de carácter extensivo puesto que es un caso particular de todas

las ecuaciones que tienen la estructura $ax + b = c$ que en su representación general son de carácter intensivo.

- **Unitario – sistémico:** lo unitario son los objetos que han sido consolidados a través de un conjunto de otros objetos y ese conjunto es necesario para consolidar un objeto se denominan sistémico. Por ejemplo al estudiar la adición y sustracción en los últimos niveles de la educación primaria se considera el sistema de numeración decimal como algo conocido, es decir, como unitario, pero en los primeros niveles es necesario enseñarlo de forma sistémica o por etapas para su comprensión final.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios y sus atributos contextuales en las prácticas matemáticas se dan a través de ciertos procesos los cuales se presentan a continuación:

Para la resolución de problemas matemáticos es necesario implementar unas prácticas matemáticas las cuales permiten la emergencia de los objetos primarios (lenguajes, proposiciones, procedimientos, argumentos y conceptos), pero esto ocurre a través de los procesos de comunicación, enunciación, algoritmización, y definición respectivamente. Por ejemplo los argumentos emergen en las prácticas en tanto se hace un proceso de argumentación.

Así mismo, a estos objetos que emergen se le atribuyen determinados atributos contextuales por medio de unas dualidades a saber: expresión/contenido, personal/ institucional, ostensivo/ no ostensivo, unitario/ sistémico y ejemplar/ tipo, también se generan a través de unos procesos más generales, estos son: representación/significación, personalización/institucionalización, idealización/materialización, reificación/descomposición y particularización/generalización.

La siguiente figura ilustra la emergencia de los objetos matemáticos a través de los diferentes procesos.

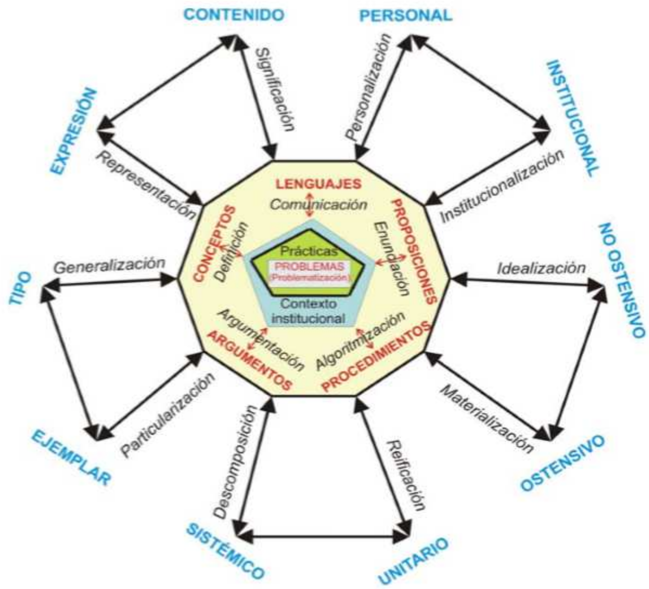


Figura 1. Configuración de objetos y procesos. (Tomado de Godino, Batanero y Font p.10)

Esta figura muestra que al resolver un problema matemático se despliegan unas prácticas matemáticas en las cuales emergen los objetos matemáticos primarios tales como: conceptos, lenguajes, proposiciones, procedimientos y argumentos, estos se hacen explícitos a través de los procesos de definición, comunicación, enunciación, algoritmización y argumentación, respectivamente. Estos objetos primarios emergentes requieren ser dotados de ciertos atributos contextuales para dar fuerza a los significados de los objetos y establecer su naturaleza funcional, pero esto se logra conforme a procesos más generales, como se muestra a continuación:

- Los procesos de personalización e institucionalización dan paso a la dualidad personal/institucional.
- La materialización e idealización, genera lo ostensivo/no ostensivo, es decir, cuando los estudiantes piensan en un procedimiento para dar solución a un problema, están haciendo

un proceso de idealización, pero cuando lo exteriorizan a través un algoritmo realizan un proceso de materialización de este.

- La reificación y la descomposición dan lugar a lo unitario/sistémico, cuando se hace necesario descomponer un objeto para ser estudiado se genera un atributo sistémico, en tanto no se descomponga el objeto es reificado, es de atributo unitario.
- La particularización y la generalización, generan el ejemplar/tipo; por ejemplo cuando se escribe la ecuación $3x - 4 = 2x$, se está haciendo una particularización de todas las ecuaciones que tienen la forma $ax \pm b = cx$, la cual es su generalización.
- La representación y significación dan paso a la expresión/contenido, es decir a la representación de un objeto y a lo que este signifique.

Todos estos procesos y objetos primarios permiten la consolidación de un objeto matemático a través de las prácticas matemáticas que se desarrollen de forma personal o en una institución.

1.4.2 Análisis Epistémico/Cognitivo desde la perspectiva del EOS

En el EOS además de las categorías de análisis ya planteadas, también presenta dos categorías de análisis que se articulan con algunas propuestas como lo son los objetos matemáticos primarios que sirven de base para hacer un análisis epistémico/cognitivo de las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes al resolver un problema matemático. Dicho esto Rivas, Godino y Konic (2009) definen lo que se entiende por análisis epistémico y cognitivo; el análisis epistémico consiste en identificar y poner en correspondencia los objetos matemáticos con su significado al resolver un problema matemático. Por su parte el análisis cognitivo consiste en estudiar las respuestas dadas por los estudiantes tomando en cuenta los resultados del análisis epistémico.

1.5 Caracterización del razonamiento algebraico (RA)

El razonamiento algebraico en los últimos años ha sido un tema de gran interés para investigadores en el campo de la Educación Matemática tales como Castro (2008); Aké (2013); Kaput (2000); Godino & Font (2003); Radford (2000) y Kieran (2007), donde resaltan la gran importancia de desarrollar este razonamiento en los estudiantes desde los primeros años de escolaridad y no solo en secundaria como suele hacerse.

Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), manifiestan que usualmente el álgebra es entendida como el lenguaje simbólico y este se restringe a la resolución de problemas y el estudio de polinomios, que se introducen de forma inmediata en secundaria sin dar continuidad a los temas tratados en primaria como lo son la aritmética, la geometría y la medida, esto hace que los estudiantes en secundaria presenten una serie de dificultades puesto que en los primeros años de escolaridad no se potencia el RA tal como afirma Kieran en (2007).

Debe entenderse que el desarrollo del RA es el resultado de un proceso de maduración de carácter más general, es decir, que no se restringe a la manipulación de símbolos alfanuméricos, sino que se genera a lo largo del tiempo y es de carácter gradual, sistemático y progresivo, es allí donde radica la importancia de ser potenciado desde los primeros años de formación educativa. Esto ha llevado a que diferentes investigadores como Davis (1985) y Vergnaud (1988), apoyen la inclusión del álgebra desde una edad temprana.

Debido a esto, se han hecho propuestas para desarrollar el RA desde los primeros años de escolaridad tales como la pre-álgebra y la Early álgebra, de las cuales Aké (2013) hace una distinción entre dos enfoques: la primera trata se enfoca en mitigar las dificultades de los sujetos al iniciar el álgebra, y la segunda se encarga de introducir el álgebra desde una edad temprana.

Es por ello que el NCTM (2000), propone incluir en el diseño curricular de las instituciones educativas un bloque temático sobre álgebra para la educación infantil y primaria, en el cual se establecen cuatro estándares de contenido algebraico. Ahora bien, aunque no hay una definición concertada por la comunidad académica de lo que se entiende por RA, algunos autores han intentado definición de este, entre las cuales están las siguientes:

Kieran (2007) menciona que:

> El razonamiento algebraico puede interpretarse como una aproximación cuantitativa a las situaciones que hacen hincapié en los aspectos generales de relaciones con herramientas que no son necesariamente literal-simbólico, pero que en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo de creación y para sostener el discurso tradicional de la escuela en el álgebra (p.275).

Por su parte Carraher y Schliemann (2007) mencionan que el RA es un proceso psicológico que involucra la resolución de problemas que son expresados matemáticamente de forma sencilla usando una notación algebraica.

Así mismo, Kaput y Lins (citado por Aké, 2013) establecen las que consideran son las características claves del RA, estas son:

1. Involucra actos de generalización deliberada y expresiones de generalidad.
2. Involucra un razonamiento basado en las formas de generalizaciones sintácticamente-estructuradas, incluyendo acciones sintácticas y semánticamente guiadas.

Diversos autores coinciden en que la generalización es un rasgo esencial en el RA, es por ello que Radford (2003), estudia los tipos de generalización de patrones numéricos-geométricos de estudiantes de secundaria y logra identificar dos tipos de generalización pre algebraica[6]. Además menciona que en los primeros niveles algebraicos hay otra forma de expresar generalidades tales como la gestual, ordinaria y gráfica hasta llegar a un lenguaje algebraico donde el pensamiento algebraico se expresa en un lenguaje alfanumérico.

Así pues, se logra establecer una diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico, dado que en el algebraico existen mayores niveles de abstracción y se requiere de un cálculo analítico, es decir, hacer un análisis de las variables que están presentes en el problema propuesto, qué significado tienen y cómo estas se relacionan para dar solución al problema matemático.

De acuerdo a lo anterior Aké (2013), coincide en la introducción del álgebra temprana y recoge todas las aproximaciones a la caracterización del RA y sus rasgos particulares, además considera que la naturaleza de este asume tres supuestos básicos a saber: el papel esencial de la generalización, el uso del lenguaje alfanumérico y el cálculo analítico, en el cual los objetos algebraicos van adquiriendo un significado diferente en tanto se avance en los procesos de generalización y simbolización. Dicho esto considera como rasgos esenciales del RA, la generalización y los medios para expresar las situaciones de generalización e indeterminación.

Además, plantea que el EOS, proporciona herramientas que permiten distinguir qué objetos matemáticos tienen una naturaleza algebraica y en qué medida pueden ser introducidos en la escuela elemental. Esta es la caracterización que permitirá analizar la naturaleza de los objetos que pueden emerger en las prácticas de los estudiantes que es de gran importancia para la

[6] Estas son la generalización factual, que hace alusión a la generalización de acciones que permanecen ligadas a un nivel concreto, y en la generalización contextual se generalizan acciones numéricas y objetos de forma abstracta.

realización de este trabajo, así como la naturaleza del RA desde el EOS tal como se presenta a continuación.

1.5.1 Naturaleza del razonamiento algebraico desde la perspectiva del EOS

Puesto que no se ha llegado a un consenso para determinar las características esenciales del razonamiento algebraico, Aké (2013), considera que es necesario elaborar un modelo comprensivo que articule coherentemente el currículo matemático escolar en los distintos niveles educativos, y que facilite el diseño de actividades instruccionales que beneficien el surgimiento y consolidación del RA. Es por ello que considera que el EOS un modelo teórico que sirve de base para analizar la actividad matemática en general y los tipos de objetos y procesos que surgen en las prácticas matemáticas.

Además se considera que las prácticas matemáticas que surgen en el aula pueden ser "más o menos algebraicas" de acuerdo al grado de escolaridad en el que se encuentre el sujeto y en la medida en que este incluya características propias de su nivel educativo. Por tanto no se puede hablar de problemas algebraicos sino de métodos o soluciones algebraicas.

Como ya se había mencionado en el apartado anterior, el EOS presenta herramientas para esclarecer la naturaleza de la práctica algebraica y a su vez para analizar las configuraciones matemáticas de objetos y procesos.

En los objetos algebraicos prototípicos, los objetos primarios propuestos por el EOS sirven de base para la consolidación de los objetos algebraicos, es decir, que estos deberán ser expresados en un lenguaje alfanumérico para ser considerado como objeto algebraico, sin desconocer que hay otros niveles que se consolidan de forma progresiva y que van avanzando de acuerdo a los grados de generalidad. De esta forma los objetos primarios algebraicos son:

- Relaciones binarias: estas son de equivalencia o de orden y tienen las propiedades de ser reflexiva, transitiva, simétrica o asimétrica; es necesario hacer uso de estas relaciones para definir nuevos conceptos matemáticos.
- Operaciones y sus propiedades: estas son realizadas sobre los elementos de un conjunto de objetos, aquí el cálculo algebraico tiene como característica la aplicación de propiedades matemáticas, (asociativa, distributiva, etc.).
- Funciones: implica considerar las operaciones y sus propiedades, así como contemplar las distintas representaciones de una función (tabular, gráfica, algebraica).
- Estructuras, sus tipos y propiedades: son las características del algebra de mayor grado de complejidad o abstracta (anillos, grupos, espacio vectorial, etc.)

En los procesos algebraicos prototípicos se toma en consideración los procesos que dan lugar a los objetos primarios (personal/ institucional, intensivo/extensivo, sistémico/unitario, etc.,) aquí se toma como centrales solo tres de esos, puesto que poseen rasgos característicos del RA conforme a la literatura en didáctica del álgebra, estos son:

- Intensivo/extensivo y sus procesos de generalización y particularización, que de acuerdo como se anotó arriba es considerado uno de los rasgos más importantes del RA y que permiten determinar los niveles de algebrización.
- Unitario/sistémico y sus procesos de descomposición y reificación.
- Ostensivo/no ostensivo y sus procesos de idealización y materialización, puesto que permiten la simbolización, los gestos, la expresión en lenguaje natural, etc. que es parte determinante del RA ya que hace que los objetos matemáticos sean asequibles y se puedan hacer reflexiones frente a ellos.

De los atributos contextuales presentados anteriormente, se toma como central lo intensivo puesto que es un rasgo fundamental del RA y deja ver el modelo de algebrización que da lugar a los niveles de algebrización, este modelo es propuesto por Aké (2013) y se presenta a continuación:

Este modelo se basa en la interpretación de la práctica matemática, que es el resultado de un proceso de generalización del cual se obtienen objetos intensivos, este viene a ser la regla que genera la clase, así, esta regla pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que la constituye como una entidad unitaria que emerge en el sistema a través de un proceso de generalización. Esta nueva entidad unitaria debe ser hecha ostensiva a través de un proceso de materialización por medio de un nombre, gesto, icono o símbolo, para que haga parte de otras prácticas, procesos y operaciones. Este objeto unitario luego pasa a ser una nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de representación que acompaña a la generalización y materialización. Por último, el símbolo se desprende de los referentes a los que representa, para convertirse en un objeto sobre el cual se realizan opciones. Estos símbolos-objetos forman conjuntos con los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, sobre los cuales se opera de forma sintáctica, analítica o formal.

De esta forma se generan los procesos y objetos matemáticos que sirven de base para establecer los niveles de algebrización, estos objetos y procesos dan lugar a diferentes tipos de configuraciones, tal como se presenta a continuación:

Los objetos y procesos algebraicos dan lugar a diferentes tipos de configuraciones algebraicas de acuerdo a las tareas propuestas, puesto que estas pueden ser enfocadas a pasar de un sistema de representación a otro, poner en juego los objetos algebraicos prototípicos, a generar objetos intensivos, o simplemente a la aplicación de estos objetos. Teniendo en cuenta esto se presentan las siguientes configuraciones:

- Configuración intencional: es aquí donde se reconocen los objetos intensivos aunque no se es capaz de operar y relacionar estos objetos.
- Configuración relacional: en este punto se es capaz de relacionar objetos de forma intensiva a través de propiedades.
- Configuración operacional: se utiliza las letras para representar incógnitas, las relaciones son establecidas a través de una ecuación y se hacen operaciones haciendo uso de las definiciones y propiedades de la aritmética. Se incluye además pasar de un lenguaje natural a uno algebraico.
- Configuración funcional: el lenguaje es aritmético y con base al establecimiento de relaciones se construyen reglas generales.
- Configuración estructural: intervienen como objetos centrales las propiedades estructurales de las operaciones.

Lo mencionado anteriormente permite determinar la naturaleza del razonamiento algebraico y da pie para establecer los niveles de algebrización que presenta un sujeto y que puede ser analizada en una práctica matemática tomando en consideración los grados de generalidad que estos muestren al resolver dichos problemas.

1.6 Niveles de Algebrización

Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), proponen las características que deben tener las prácticas matemáticas para resolver una tarea, y esto permite determinar los niveles de algebrización en que estas se ubican, estos niveles están establecidos entre un nivel 0 (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel (nivel consolidado de algebrización) que se identifican en la actividad matemática y que se puede considerar propiamente algebraica.

Así pues, los niveles se le asignan a la actividad matemática y no a las tareas, es decir, dependiendo de la manera en cómo se resuelven los problemas, una práctica matemática puede clasificarse en un nivel u otro. Entonces es necesario identificar en la actividad matemática características que permitan clasificarlas como aritméticas o algebraicas, es decir, aspectos que permitan establecer los niveles de algebrización, estos criterios son:

- Generalización: generación o inferencia de intensivos.
- Unitarización: Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
- Formalización y ostensión: nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
- Transformación: utilización de objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

A continuación se presentan los niveles de algebrización propuestos por Aké, Godino, Gonzato y Wilhelmi, que permitirán hacer el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado noveno. Puesto que cada nivel presenta unas características propias es posible contrastar dichas características con las prácticas desarrolladas por los estudiantes que permitirá ubicarlas en uno de estos niveles de razonamiento algebraico, que es uno de los objetivos de este trabajo. Además se ilustra mediante la exposición de una práctica matemática cómo una misma actividad puede ser resuelta en diferentes niveles de algebrización.

Nivel cero: ausencia de Razonamiento Algebraico

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos o literales que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla que generaliza la relación de casos particulares. (Aké, 2013, p.118)

Aquí se realizan operaciones sobre datos particulares (extensivos), se manipulan números sin reconocer propiedades de las operaciones para obtener un resultado. Se tomará el siguiente ejemplo para analizar los distintos niveles de algebrización.

Ejemplo 1: secuencia de árboles

Completa la secuencia de los árboles, hasta la décima posición, indicando el número de triángulos negros que hay en cada árbol. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura de la posición 100?

Figura 2. Ejemplo para ilustrar los niveles de algebrización según las prácticas matemáticas. Tomado de Godino, Aké & Gonzato (p. 11)

Si para dar solución a esta actividad el sujeto debe ir contando los triángulos negros y hacer los dibujos posteriores para llegar al resultado final, esta práctica indicaría un nivel cero de algebrización, puesto que solo se opera con los datos conocidos de forma extensiva, sin establecer relaciones o generalidades entre ellos. Este nivel no es de carácter algebraico y las prácticas que los estudiantes realizan son meramente aritmética.

Nivel 1: nivel incipiente de algebrización

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados con símbolos y letras pero sin operar con dichos objetos. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. (Aké, 2013, p.119).

En este nivel los estudiantes no operan sobre los datos sino que hacen uso de las propiedades de las operaciones y logran establecer relaciones entre los datos que presenta el problema y que permita llegar a una solución adecuada.

Retomando el ejemplo 1, supongamos que un estudiante plantea la siguiente solución: se observa que en las figuras exceptuando la base y la punta hay 4 triángulos de forma horizontal en el centro, para saber cuántos triángulos hay en determinada posición, esta debo restarle la unidad, la multiplico por 4 (número de triángulos de forma horizontal en las posiciones centrales) y luego le sumo 3 (el número de triángulos que forman la base y la punta del árbol).

Esta práctica matemática para atender al problema propuesto da cuenta un nivel 1 de algebrización puesto que, el estudiante en su actividad matemática logra reconocer y expresar la regla general del problema en un lenguaje natural, además no realiza operaciones sobre los objetos particulares sino a través de las propiedades.

Nivel 2: nivel intermedio de algebrización

En este nivel intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En las tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. (Aké, 2013, p.121)

Si en la actividad matemática que el estudiante realiza para dar solución al problema del ejemplo 1, este enuncia una relación entre la posición y el número de triángulos utilizando un lenguaje simbólico-literal a saber $4(n-1)+3$, esta práctica estaría en un nivel 2 de algebrización, puesto que no opera las variables pero logra establecer una expresión en donde asignándole valor a la posición se podría determinar el número de triángulos que el árbol tendría en esa posición.

Nivel 3: nivel consolidado de algebrización

Aquí, se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones de tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. (Aké, 2013, p.123)

En este nivel se espera que los estudiantes sean capaces de reconocer los intensivos presentes en los objetos matemáticos que hacen parte de una tarea y que sean capaces de establecer reglas generales a través del cálculo analítico.

Siguiendo con la línea del ejemplo, en un nivel 3 de algebrización el estudiante es capaz de operar con las variables y hacer un tratamiento analítico de la función $f(n) = 4(n-1)+3$, para obtener así la expresión canónica equivalente $f(n) = 4n-1$.

Los niveles mencionados anteriormente son esenciales para determinar el grado de algebrización de las actividades matemáticas de los estudiantes que serán objeto de estudio y así caracterizar el razonamiento algebraico que ellos manifiesten al resolver los problemas matemáticos que se les propongan.

A continuación se presenta en la tabla 1 una síntesis de las características esenciales que permiten ubicar una práctica matemática en determinado nivel. Esta tabla permite clasificar una práctica matemática de acuerdo a los objetos matemáticos que emergen, al tratamiento que se realiza con los objetos y al lenguaje empleado para expresar las ideas matemáticas.

Nivel	0	1	2	3
Tipos de objetos	Se realizan cálculos sobre objetos particulares (extensivos) para obtener un resultado. Intervienen datos desconocidos.	Intervienen objetos intensivos y estos son reconocidos. Se ponen en juego incógnitas y el uso de símbolos ([], _,…) etc., para representar un valor desconocido.	Intervienen indeterminadas o variables.	Intervienen indeterminadas o variables.
Lenguaje	Aritmético, expresado de forma natural, numérico icónico y gestual.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.	Simbólico-literal, usados para referir a los intensivos reconocidos, ligados a la información del contexto espacial y temporal.	Simbólico-literal, los símbolos se usan de manera analítica sin referir a la información del contexto.
Transformaciones	Operacional con objetos extensivos.	No se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido. En las tareas funcionales, se calcula con objetos extensivos y en las estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones.	En las tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En las tareas funcionales, se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	En la tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.

Tabla 1. Objetos, lenguajes y trasformaciones de acuerdo a los niveles de algebrización.

En esta tabla, tipos los objetos hacen relación a los objetos matemáticos que emergen en la práctica y el grado de generalidad que estos poseen, es decir, manifiestan qué tan intensivo es un objeto de acuerdo al nivel de algebrización, si surgen variables, incógnitas o algún símbolo para representar un valor desconocido. El lenguaje hace referencia a las formas de expresión de las prácticas, es decir, si al hacer ostensiva una práctica se hace por medio de un lenguaje numérico, icónico, gestual o simbólico literal. Y por último las transformaciones que dan cuenta de las operaciones que se realizan ya sea con objetos extensivos (particulares) o intensivos (generales), el uso de propiedades o la estructura de las ecuaciones que construyan los estudiantes.

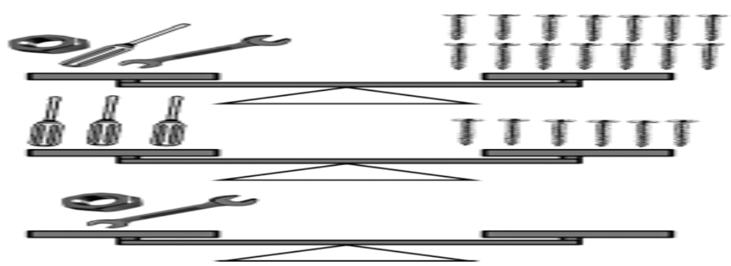
Por otra parte, aunque en la investigación realizada por Godino et al. (2015) Se ha identificado otros tres niveles de algebrización, nivel 4, 5 y 6 que imponen niveles más amplios, no obstante, el nivel 4 y 5 se encarga de estudiar parámetros, por ello se entrevistó al docente encargado de orientar el curso de matemáticas a los estudiantes de la Institución y se le preguntó, si los estudiantes ya habían trabajado parámetros e indicó que no, por tanto sólo se escogieron los cuatro primeros niveles, del nivel cero al tres.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1 Análisis Epistémico de los problemas propuestos

En este apartado se presenta el análisis epistémico como se entiende desde la perspectiva del EOS tal como se mencionó en el marco de referencia conceptual, además se plantearán las posibles soluciones que pueden tener de acuerdo a los niveles de algebrización.

Problema 1: (Balanza algebraica), ¿cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 2) para que quede equilibrada?[7]



Tipos de objetos	Significado
ELEMENTOS LINGÜISTICOS	
Se presenta la imagen que muestra el equilibrio que tienen tres balanzas que contienen tornillos, destornilladores y llaves.	Imagen ilustrativa de la situación.
¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?	Formula la pregunta y determina la incógnita que se debe encontrar.
CONCEPTOS	
División	Fraccionamiento del todo en partes.

[7] Tomado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014), p. 209

Ecuación	Ecuación matemática que relaciona dos números.
Igualdad	Expresión matemática que relaciona números.
PROPIEDADES	
Equivalencia de ecuaciones	Establece que las operaciones elementales no alteran la ecuación.
PROCEDIMIENTOS	
Despeje de variable en una ecuación lineal	Permite encontrar el peso equivalente entre destornilladores y tornillos.
ARGUMENTOS	
Dado que tres destornilladores equivalen a 6 tornillos ($3d = 6t$) entonces un destornillador pesa dos tornillos.	Relación entre el número de destornilladores equivalentes en tornillos.
Puesto que en la primera balanza se muestra que una pieza, un destornillador y una llave equivalen a 14 tornillos, entonces como en la tercera balanza en relación con la primera hace falta un destornillador hay que restarle a 14 la cantidad equivalentes a un tornillo en este caso 2, por tanto en la tercera balanza se necesitan 12 tornillos para preservar el equilibrio.	Se relaciona el valor encontrado en la primera balanza con las cantidades de la tercera balanza.

Tabla 2. Análisis epistémico de la tarea 1

Problema 2: cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm., ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota? 1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución usando notación algebraica.[8]

Tipos de objetos	**Significado**
ELEMENTOS LINGÜISTICOS	
Desde cierta altura se lanza una pelota	Plantea la condición inicial del problema y a la vez, indica que la altura inicial desde la cual se lanzó la pelota por primera vez, es un valor desconocido.
Rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó	Establece la relación numérica entre la altura desde la que cae y la altura a la cual rebota
Si después de tres rebotes	Indica el número de veces que la pelota rebota, y por tanto el número de veces que se debe considerar la relación numérica entre la altura desde la cual cae y la altura del rebote
La altura alcanzada es 6 cm.	Plantea el valor numérico de la última altura alcanzada en el tercer rebote.
¿A qué altura inicial se lanzó la pelota?	Formula la pregunta y se determina la incógnita que se debe encontrar.
CONCEPTOS	
Fracción	Modo de expresar una parte de un todo

[8] El análisis epistémico de este problema fue retomado de Castro (2008), p. 50

	dividido en partes iguales.
Incógnita-variable	Letra que se le asigna a un valor desconocido, para luego hallar su valor.
Ecuación	Expresión matemática que relaciona cantidades conocidas y desconocidas y que permite calcular el valor de la cantidad desconocida.
Multiplicación	Operación aritmética; dados dos números uno racional y el otro entero (multiplicando, multiplicador) la multiplicación de dichos números consiste en obtener un tercero (producto).
Igualdad	Expresión matemática que relaciona dos números
PROPIEDADES	
Dada una cantidad que es el resultado de una reducción (a/b) de un número desconocido, podemos conocer el número.	La suma de las partes da el total.
Equivalencia de ecuaciones.	Establece que las operaciones "elementales" no alteran la solución de la ecuación.
PROCEDIMIENTOS	
Hallar la fracción de una cantidad.	Calcular la altura a la cual rebotará la pelota o dada la altura a la cual rebota, encontrar la

	altura desde donde se lanzó.
Despeje de variable en ecuación Lineal.	Permite encontrar la incógnita al operar sobre los números.
Multiplicar el valor 6 por $5 \times 5 \times 5$	Procedimiento numérico que permite encontrar la altura inicial a partir de la última altura, después de tres rebotes.
ARGUMENTOS	
Si 6 es la quinta parte de una cantidad desconocida, entonces podemos encontrar la cantidad desconocida.	Relación entre el antecedente y el consecuente de la fracción, interpretada como operador.
Si x es la altura inicial desconocida y cada vez que la pelota rebota, la altura se reduce en un quinto, y si rebota tres veces, entonces la altura final alcanzada será $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right)$	Se relaciona la altura desconocida con el procedimiento que la transforma al reducir la altura cada vez en un quinto de la altura previa.
Si la altura final alcanzada es de 6 cm. y la altura final corresponde a la expresión algebraica del renglón anterior, entonces tenemos la relación: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right) = 6$	Se vinculan dos cantidades, que de acuerdo con el enunciado del problema, son iguales.

Tabla 3. Análisis Epistémico de la tarea 2

Problema 3: hay seis asientos entre sillas y butacos. Las sillas tienen cuatro patas y los butacos tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos butacos hay?[9]

Tipos de objetos	**Significado**
ELEMENTOS LINGÜISTICOS	
Hay seis asientos entre sillas y butacos	Indica una primera condición que establece que en total hay seis asientos.
Las sillas tienen cuatro patas y los butacos tienen tres y en total son 20 patas.	Se establece una relación entre el número de patas de las sillas y de los butacos que sumadas son 20
¿Cuántas sillas y cuantos butacos hay?	Formula la pregunta y determina las incógnitas que se deben encontrar.
CONCEPTOS	
Adición	Operación matemática que consiste en añadir una cantidad a otra para obtener un resultado.
Ecuación	Expresión matemática que relaciona cantidades conocidas y desconocidas y que permite encontrar el valor de la cantidad desconocida.
Igualdad	Expresión matemática que relaciona dos números.
PROPIEDADES	

[9] Este problema fue adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhemi (2014), p. 200

Dada una ecuación planteada se pueden transponer los términos sin alterar el resultado de la ecuación.	Propiedad uniforme de la ecuación.
PROCEDIMIENTOS	
Constituir la ecuación lineal entre el total de sillas y butacos (ecuación 1).	Permite establecer la relación entre las sillas y los butacos.
Despeje de variable en una ecuación lineal.	Permite encontrar la incógnita al operar con números.
Construir la ecuación lineal entre el total de patas entre butacos y butacos (ecuación 2).	Establecer la relación entre la cantidad de patas que en conjunto suman los butacos y butacos.
Reemplazar una ecuación en otra.	Una vez hallada una de las incógnitas se puede reemplazar en la ecuación para encontrar la otra.
Despeje de variables en una ecuación lineal.	Permite encontrar la incógnita al operar con números.
ARGUMENTOS	
Si el total de sillas y butacos es 6, entonces se puede encontrar una cantidad desconocida.	Relación entre el número de sillas y butacos en total.
Si el total de patas entre sillas y butacos es 20 se puede establecer una ecuación general para encontrar la solución.	Relación entre el número de patas que forman en conjunto sillas y butacos.
Al reemplazar en la ecuación general la	Se vinculan las dos relaciones establecidas en

cantidad encontrada para dar solución a la tarea planteada.	el enunciado del problema.

Tabla 4. Análisis Epistémico de la tarea 3

Problema 4: para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va encoche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?[10]

Tipos de objetos	**Significado**
ELEMENTOS LINGÜISTICOS	
Por cada alumno que va en coche hay tres que van andando	Establece la primera condición del problema y da pautas para establecer una proporción entre las cantidades.
Hay 212 alumnos en la escuela	Permite establecer una relación entre la cantidad total de estudiantes y la proporción entre los estudiantes que van andando o en coche.
¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?	Indica las incógnitas que hay que hallar.
CONCEPTOS	
Proporción	
Ecuación	Expresión matemática que relaciona cantidades conocidas y desconocidas y que permite calcular el valor de la cantidad

[10] Tomado de Godino, Aké. Wilhelmi, Neto, Etchegaray & Lasa (2015), p 121.

	desconocida.
PROPIEDADES	
Sustitución de variables.	Dadas dos incógnitas una vez se encuentre el valor de una puede reemplazarse en la ecuación para hallar el valor de la otra.
PROCEDIMIENTOS	
Establecer una ecuación	Establecer la relación entre la cantidad de alumnos que van andando y los que van en coche con la cantidad total de alumnos.
Despeje de variables en ecuaciones lineales	Permite encontrar la incógnita al operar sobre los números.
Restar la cantidad dada con el valor encontrado	Permite encontrar la cantidad de alumnos que utilizan cada medio de locomoción.
ARGUMENTOS	
Dado que por cada alumno que va en coche 3 van andando y que el total de alumnos es 212, se puede establecer que $x + 3x = 212$	La ecuación permite establecer una relación entre la cantidad de alumnos que van en coche y andando con la cantidad total de alumnos.
Despejando la ecuación se puede encontrar que la cantidad de alumnos que van en coche son 53.	La solución de la ecuación permite encontrar una cantidad desconocida que ayudará a encontrar la que falta.

Restar el valor encontrado (53) a la cantidad total de alumnos (212).	Permite encontrar el total de personas que usan cada medio de locomoción, es decir, 53 van en coche y 159 andando.

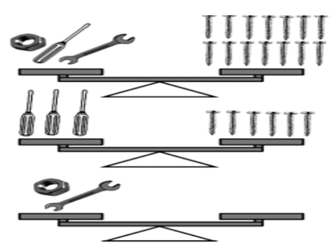
Tabla 5. Análisis Epistémico de la tarea 4

El análisis epistémico de estos problemas permiten identificar los objetos matemáticos que pueden surgir dentro de una práctica matemática al resolverlos, además es de gran importancia puesto que dichos objetos saldrán a flote cuando los estudiantes realicen sus prácticas matemáticas que es lo que nos permitirá realizar el análisis cognitivo y así determinar el nivel de razonamiento de sus prácticas.

3.1.2 Posibles rutas de solución de los problemas propuestos

A continuación se muestran las posibles soluciones que puede tener cada uno de los problemas propuestos y con forme a estas se determina el nivel de algebrización de esa práctica matemática de acuerdo a los objetos matemáticos que emergen, el lenguaje y el tratamiento que se realiza, que permitirán los grados de generalidad presentes.

Problema 1: (Balanza algebraica): ¿cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 2) para que quede equilibrada?



Soluciones

Solución 1: La segunda balanza indica que 3 destornilladores pesan igual que 6 tornillos; luego 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. En la primera balanza, hay 14 tornillos en el plato de la derecha; si quitamos el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio. Luego en la tercera balanza hay que poner; 12 (tornillos). Esta práctica corresponde a un nivel 1 de algebrización puesto que se aplican relaciones, para encontrar la respuesta se debe establecer una relación entre los destornilladores y los tornillos de la segunda balanza, lo cual permite determinar que cada destornillador equivale a dos tornillos, luego, esta información debe ser relacionada con la primera balanza para encontrar que si se resta lo que equivale a un destornillador en esta balanza se obtiene la cantidad necesaria en la tercera balanza, que es lo que permite encontrar la respuesta correcta. Todo anterior se hace en un lenguaje natural y numérico, además, se operan con objetos extensivos, es decir, con datos conocidos.

Solución 2: Puesto que 3d=6t (3 destornilladores = 6 tornillos); dividiendo entre 3 ambos miembros, d=2t. Además, en la primera balanza p+d+l=14t (pieza, destornillador, llave=14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, o sea 2 tornillos. Por tanto en la tercera balanza hay que poner 12 tornillos. Dado que en esta práctica se plantean las ecuaciones en un lenguaje algebraico, es decir, se usan los símbolos de forma analítica y se realizan operaciones con las variables o cantidades desconocidas, esta práctica está en un nivel 3 de algebrización.

Problema 2: cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm., ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota? 1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución usando notación algebraica.

Soluciones

Solución 1: Se sabe que la altura a la cual rebota la pelota es un quinto de la altura a la cual fue soltada, como 6 es la última altura, entonces la altura previa es 6×5 y la altura previa en el segundo rebote es: $6 \times 5 \times 5$, finalmente la altura inicial es: $6 \times 5 \times 5 \times 5$ cm. Esta práctica muestra un nivel 0 de algebrización puesto que siempre se opera con datos extensivos y conocidos.

Solución 2: Sea x la altura desconocida, como en cada rebote la altura a la que rebota es un quinto de la altura inicial, entonces la altura del primer rebote será $(\frac{1}{5})\,x$; por tanto en dos rebotes más, la altura alcanzada será: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right)$; y como 6 cm corresponden a la altura del último rebote, entonces tenemos la relación: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right) = 6$; de donde el valor buscado será: $x = 5 \times 5 \times 5 \times 6$ cm. Aquí se muestra un nivel 1, puesto que se hace uso de propiedades para dar respuesta al problema planteado, además se opera con datos conocidos y el lenguaje empleado es numérico aunque interviene una variable para representar una cantidad reconocida.

Problema 3: Hay seis asientos entre sillas y butacos. Las sillas tienen cuatro patas y los butacos tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos butacos hay?

Soluciones

Solución 1: Supongamos que hay el mismo número de sillas y de butacos: 3+3+3+4+4+4. Como el resultado sobrepasa el total de 20 patas, excediéndose en 1 pata, se cambia una silla (de 4 patas) por un butaco (de 3 patas). Finalmente se obtienen 4 butacos y 2 sillas: 3+3+3+3+4+4, teniendo un total de 20 patas. Esta práctica pertenece a un nivel 0, puesto que se opera con objetos extensivos, es decir, con datos concretos y explícitos expresados en un lenguaje natural y numérico.

Solución 2: Teniendo en cuenta que el número de asientos es 6 y que cada silla aporta 4 patas y cada butaco 3, entonces se puede construir una tabla con todos los casos posibles.

Números	1	2	3	4	5	6
Patas de sillas	4	**8**	12	16	20	24
Patas de butacos	3	6	9	**12**	15	18

Luego, tiene que haber 2 sillas y 4 butacos, ya que entonces hay 6 asientos en total (2+4=6) y el número total de patas es 20 (8+12=20). Esta práctica matemática está en un nivel 1 puesto que usa un lenguaje natural y numérico, se operan con objetos extensivos, es decir, las cantidades dadas en el problema, se establecen relaciones entre el número de patas de las sillas y la de los butacos y se realiza una tabla para determinar cuál de las combinaciones concuerda con el número total de asientos.

Solución 3: Sea B el número de butacos y S el número de sillas. Como el total de butacos y sillas deben sumar 6, entonces $B + S = 6$. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los butacos y las sillas, esto es $3B + 4S = 20$. Como de $B + S = 6$, se obtiene que $B = 6 - S$; por tanto $3(6 - S) + 4S = 20$, donde $18 + S = 20$, obteniéndose finalmente que S=2. Si S=2, entonces B=4. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas. Puesto que se hace uso de un lenguaje simbólico-literal, los símbolos o variables se operan de manera analítica utilizando reglas para obtener la solución, además se reconocen y se hace uso se extensivos de mayor generalidad, por ello esta práctica pertenece a un nivel 3.

Problema 4: para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Soluciones

Solución 1: Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte); de cada 12 alumnos 3 irían en coche. Por tanto, 53 alumnos irían en coche. La solución sería 53 alumnos van en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 van andando. Dado a que se operan con objetos extensivos esta práctica corresponde a un nivel 0 de algebrización.

Solución 2: Por cada 4 alumnos hay 3 que van andando. Podemos plantear la siguiente proporción:

4 (Alumnos)---------> 3 van andando

212 (Alumnos en la escuela) ---------> x van andando

$x = 3 \times 212/4$

Una vez que obtenemos el número de alumnos los que van andando a clase x= (159), solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para obtener los que acuden al colegio en coche.

$212 - 159 = 53$ Alumnos van en coche.

En esta práctica aunque se reconocen las cantidades desconocidas y se hacen explicitas, no se realizan operaciones con ella aunque si se hace uso de propiedades, por ello esta práctica se puede clasificar en un nivel 1 de algebrización.

Solución 3:

Sea X= cantidad de alumnos que van en coche, la cantidad total de estudiantes es igual a la suma de la cantidad de estudiantes que va en coche (x) y la cantidad de estudiantes que van andando (3x).

$212 = x + 3x$

$212 = 4x\,; \; x = \frac{212}{4}; \quad x = 53$

53 Alumnos van en coche y $212 - 53 = 159$ van andando

En esta solución muestra un nivel 2 de algebrización, puesto que se hace uso de variables, se utiliza un lenguaje simbólico literal para referirse a los intensivos reconocidos, y además no se operan con las variables.

Solución 4:

Sean x= Alumnos que van en coche y y= Alumnos que van andando, la suma de ambos es igual a la cantidad total de estudiante que hay en la escuela, tal como se muestra a continuación:

$x + y = 212$;

Ahora bien, como por cada estudiante que va en coche 3 van andando, se establece una relación 1→3.

$X + 3x = 212$; Donde $y = 3x$

$4x = 212$; $x = 212/4 = 53$, asi pues al resolver la ecuación tenemos que 53 alumnos van en coche, y para saber cuántos van andando debemos restar $212 - 53 = 159$.

Aquí se muestra un nivel 3 de algebrización, puesto que se emplea un lenguaje simbólico literal y se hace uso de variables para representar las cantidades desconocidas, se opera con ellas si hacer alusión al contexto, es decir, la transformación se realiza a través de un cálculo analítico.

3.2 **Descripción de la población**

A continuación, se presentan las características generales del colegio donde fueron implementados los problemas matemáticos y las características generales de los estudiantes que presentaron dicha prueba.

La Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario , es una institución que ofrece Escuela primaria, secundaria y media, está ubicada en el municipio de Corinto (Cauca), se caracteriza por encaminar a sus estudiantes en el manejo de la tierra, la cría de animales y el manejo de residuos reciclables. La muestra seleccionada para realizar este trabajo de grado la constituyen 23 estudiantes de grado 9-1 de la Educación Básica que fue elegida al azar entre los tres grupos de grado noveno que hay en la institución, las edades de los estudiantes están comprendidas entre los 13 y 15 años. Para la recolección de la información se presentó una prueba escrita en una sesión de dos horas.

3.3 Análisis cognitivo de las situaciones propuestas

En este apartado se presenta el análisis cognitivo de las prácticas desplegadas por los estudiantes al dar solución a las situaciones propuestas, lo cual al final podrá dar cuenta del nivel de algebrización de las prácticas desarrolladas, para el análisis de estas situaciones se crearan diversas categorías de análisis que surguran de acuerdo a las practicas comunes desplegadas por los estudiantes.

3.3.1 Análisis de la situación 1

A continuación, se presentan en la tabla 6, cuatro categorías que fueron construidas acuerdo a las prácticas comunes realizadas por los estudiantes y que dejan ver los procesos, el lenguaje y las transformaciones de éstas en términos generales.

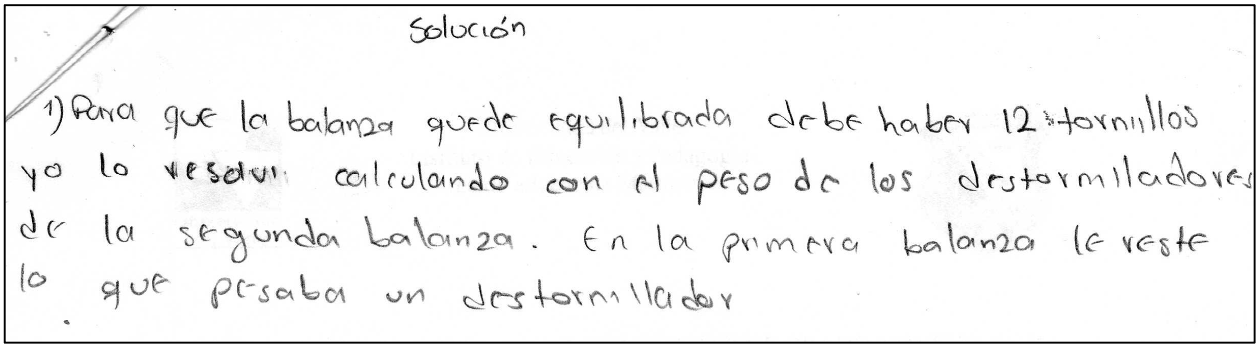
CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
1	Estudiantes que encuentran relación entre la cantidad de destornilladores y tornillos, y usan esta relación con las otras balanzas para encontrar la respuesta correcta.	11	48%
2	Estudiantes que encuentran una relación entre la cantidad los destornilladores y, llegando a la respuesta correcta, pero adjudican pesos específicos a las tuercas y la llaves.	5	22%

3	Estudiantes que encuentran la relación entre destornilladores y tornillos de la segunda balanza, pero no relacionan esta información con las otras balanzas la relación de las otras balanzas, por ello no pueden llegar a la respuesta correcta del problema.	2	8%
4	Estudiantes que no encuentran ninguna relación entre los tornillos y los destornilladores y por ende con ninguna balanza.	5	22%

Tabla 6. Categorías de acuerdo a las prácticas comunes de los estudiantes en la situación 1

De acuerdo con la tabla 6, 11 de los 23 estudiantes (48%), que hacen parte de la categoría 1 lograron establecer correctamente la relación entre la segunda balanza y las demás balanzas, lo cual les permitió llegar a la respuesta correcta.

Estos estudiantes lograron establecer la relación entre los destornilladores y los tornillos de la segunda balanza , lo cual les permitió encontrar que cada destornillador pesa dos tornillos, es decir, identifican la primera relación de equivalencia que se presenta en la balanza, la cual es fundamental para resolver acertadamente la situación propuesta, luego, teniendo en cuenta que cada destornillador equivale a dos tornillos, restaron esa cantidad a la primera balanza lo que les permite concluir que a los 14 tornillos primera balanza se deben restar los dos tornillos ($14 - 2 = 12$), para así encontrar la respuesta correcta que son 12 tornillos. En la figura 3 se muestra una de las prácticas desplegadas por los estudiantes de esta categoría.



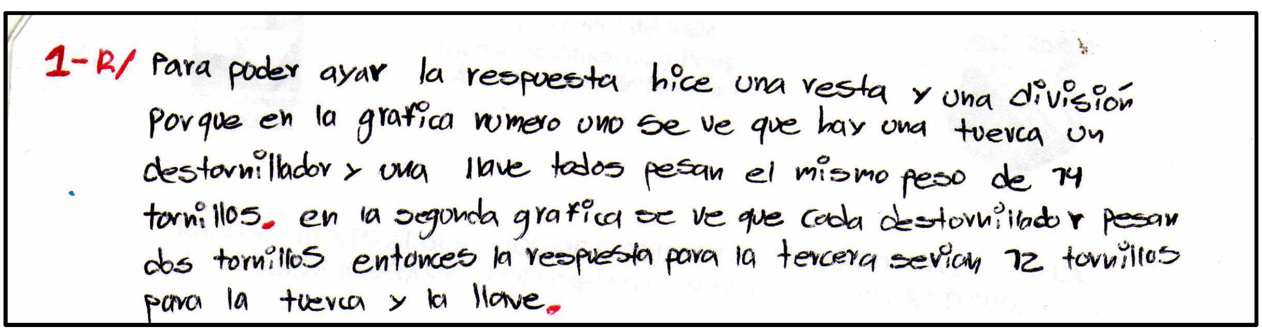
Solución

1) Para que la balanza quede equilibrada debe haber 12 tornillos yo lo resolvi calculando con el peso de los destornilladores de la segunda balanza. En la primera balanza le reste lo que pesaba un destornillador

Figura 3. Ejemplo de una práctica de la categoría 1.

En la figura 3, se muestra que este estudiante logra establecer la primera relación de equivalencia entre la cantidad de tornillos y destornilladores, posteriormente lo relaciona con la primera balanza para realizar una resta que le permitió encontrar la respuesta correcta.

Ahora bien, en las prácticas desplegadas por estos estudiantes se pueden identificar objetos primarios que emergen al dar solución a la situación propuesta, entre estos objetos están las definiciones o conceptos aritméticos de resta y división que en algunos casos es de carácter ostensivo cuando el estudiante dice “hice una resta y una división” (véase figura 4).



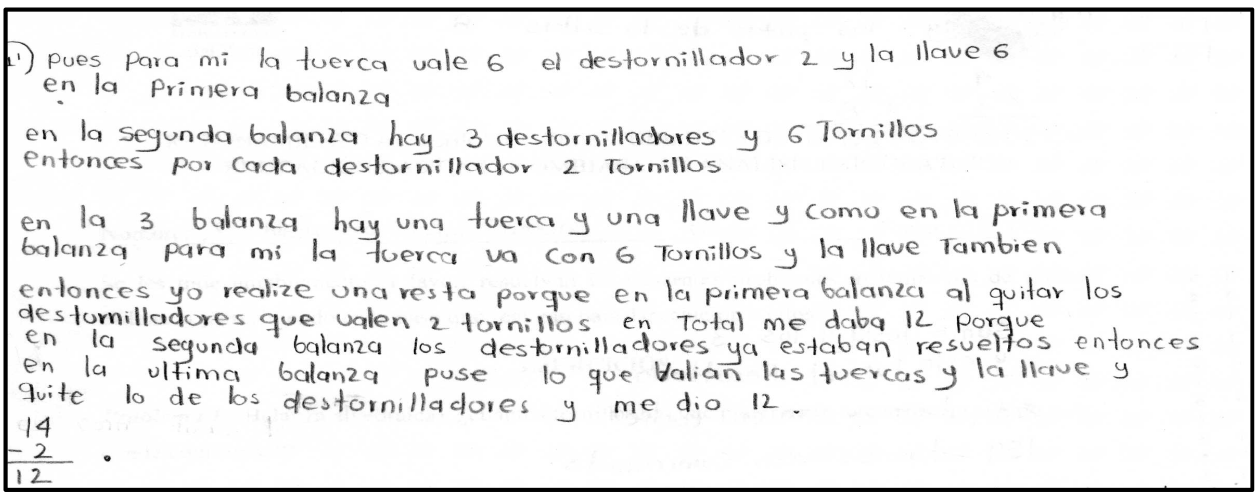
1-R/ Para poder ayar la respuesta hice una resta y una división porque en la grafica numero uno se ve que hay una tuerca un destornillador y una llave todos pesan el mismo peso de 74 tornillos. en la segunda grafica se ve que cada destornillador pesan dos tornillos entonces la respuesta para la tercera serian 72 tornillos para la tuerca y la llave.

Figura 4. Ejemplo de la práctica matemática de un estudiante

En la figura 4 se muestra de forma ostensiva el uso de la división y la resta, cuando el estudiante dice “hice una resta y una división”, está haciendo explicito las operaciones que realiza, lo cual permite identificar estos objetos. Dentro de las prácticas de esta categoría emergen también otros objetos tales como las propiedades que permiten establecer las relaciones de equivalencia, y los argumentos para justificar los procedimientos que conllevaron a la solución de la tarea.

Dado que, los estudiantes al desplegar sus prácticas lo hacen en un lenguaje natural y numérico, expresan la relación de equivalencia, los conceptos de resta y división, realizan operaciones con objetos extensivos, esta práctica se ubica en un nivel 1 de algebrización.

Ahora bien, de acuerdo con la tabla 6, el 22% (5 estudiantes) de la categoría 2, muestran las mismas relaciones con los 11 de la categoría anterior, lograron establecer las relaciones entre las balanzas y los mismos objetos, sin embargo, difieren en que a las llaves y tuercas le asignan valores específicos que son errados puesto que las balanzas no proporcionan información suficiente para hacer estas afirmaciones. Tal como se ilustra a modo de ejemplo en la figura 5.



1) pues para mi la tuerca vale 6 el destornillador 2 y la llave 6
en la Primera balanza
en la segunda balanza hay 3 destornilladores y 6 Tornillos
entonces por cada destornillador 2 Tornillos
en la 3 balanza hay una tuerca y una llave y como en la primera
balanza para mi la tuerca va con 6 Tornillos y la llave Tambien
entonces yo realize una resta porque en la primera balanza al quitar los
destornilladores que valen 2 tornillos en Total me daba 12 porque
en la segunda balanza los destornilladores ya estaban resueltos entonces
en la ultima balanza puse lo que Valian las tuercas y la llave y
quite lo de los destornilladores y me dio 12.
14
− 2
12

Figura 5. Práctica del estudiante donde se asignan valores específicos a las llaves y tuercas.

Nótese cómo en la práctica de la figura 5 el estudiante infiere que tanto la llave como la tuerca pesan 6 lo cual no puede afirmarlo puesto que la información proporcionada en las balanzas no es suficiente para hacer tal sentencia.

Un segundo ejemplo muestra como un estudiante también adjudica valores a las llaves y las tuercas, pero lo hace de forma distinta (véase figura 6).

Rta. Para que la balanza se equilibre tenemos que colocar 12 tornillos porque yo sume los tornillos delas otras fases y la tuerca son 2 tornillos el el destornillador son dos tornillos y la llave son 10 tornillos y en la tercera fase hay una tuerca y una llave como la tuerca son 2 tornillos y la llave son 10 tornillos al sumarlos da 12 tornillos.

Figura 6. Práctica donde el estudiante asigna valores específicos a las llaves y tuercas.

En la figura 6, se muestra la práctica desarrollada por un estudiante en la cual hace explicito que la llave pesa 10 y la tuerca pesa 2 igual que un destornillador. Las prácticas muestran que la llave y la tuerca tienen pesos distintos, sin embargo, ambas informaciones son incorrectas, pero como esas cantidades no intervienen para encontrar la solución encuentran la respuesta correcta.

Estas prácticas también se ubican en un nivel 1 de algebrización dado que aparecen los conceptos de resta y división, el lenguaje empleado es natural y numérico, además, se realizan operaciones con objetos intensivos a través del uso de propiedades.

Por su parte, el 8% de los estudiantes que hacen parte de la categoría 3 sólo logran identificar la relación que hay entre los tornillos y destornilladores de la segunda balanza que equivale a 2, sin embargo no logran relacionar esta información con las otras balanzas, es por ello que no establecen la relación con la primera balanza que les permitiría encontrar la respuesta correcta. Tal como se muestra a modo de ejemplo en la figura 7.

1. Se deberian poner 9 tornillos porque se le restan los tornillos sobrante de la Segunda balanza, porque si la primera muestra 14 tornillos y se le restan 5 de la Segunda ;(porque cada destornillador pesa 2 tornillos)

Figura 7. Prácticas de estudiantes de la categoría 3.

En la figura 7, se muestra que este estudiante logra encontrar que cada destornillador pesa dos tornillos y lo hace de forma extensiva, pero no es capaz de relacionar esta información encontrada con las demás balanzas, puesto que a los 14 tornillos de la balanza 1, le resta la cantidad de tornillos de la segunda balanza que en realidad son 6 y no 5 como el manifiesta, es por ello que obtiene como resultado 9.

En estas prácticas los objetos primarios que emergen son las propiedades de la relación de equivalencia, el concepto de división que les permite encontrar cuantos tornillos pesa cada destornillador y los argumentos para justificar las respuestas dadas por ellos.

En la última categoría esta el 22% de los estudiantes los cuales no logran establecer ninguna relación entre las balanzas, por ello no llegan a la respuesta correcta. Aunque las respuestas son incorrectas en estas prácticas emergen los conceptos de suma y división, además utilizan un lenguaje natural y numérico. A continuación se ilustra un ejemplo de estas prácticas.

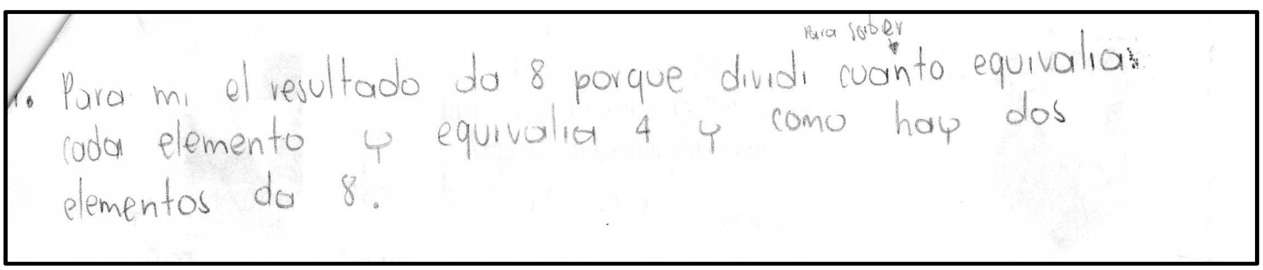

1. Para mi el resultado da 8 porque dividi para saber cuanto equivalia
cada elemento y equivalia 4 y como hay dos
elementos da 8.

Figura 8. Estudiantes que no establecen ninguna relación entre las balanzas.

Nótese que en la figura 8, el estudiante no reconoce a relación fundamental de la segunda balanza, tampoco lo hace con las demás terminan y terminan haciendo afirmaciones poco razonables que no se logran interpretar.

En síntesis, en la situación 1 los estudiantes logran identificar objetos matemáticos como lo son los conceptos de suma, resta y división que fueron empleados para determinar la cantidad de tornillos que debían poner en la tercera balanza de tal forma que esta quedara equilibrada, a su vez utilizaron procedimientos aritméticos utilizando objetos extensivos que se presentan en el problema. Además, el lenguaje empleado en general es natural, se logran establecer relaciones entre la cantidad el peso de los tornillos y los destornilladores para poder equilibrar la balanza. En las prácticas matemáticas desplegadas por los estudiantes predomina nivel 1 de algebrización.

3.3.2 Análisis de la situación 2

En la siguiente tabla se presentarán las prácticas desarrolladas por los estudiantes para dar solución a la situación 2, estas están clasificadas en 4 categorías.

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
1	Estudiantes que multiplican la cantidad de rebotes de la pelota por la altura final que esta alcanza.	8	35%
2	Estudiantes que multiplican la altura final alcanzada por la pelota (6) por 5.	7	31%
3	Estudiantes que a la altura final alcanzada por la pelota le suman $\frac{1}{5}$ y al resultado otro $\frac{1}{5}$ y a esto otro $\frac{1}{5}$.	6	26%
4	Estudiantes que solo realizaron una	1	4%

	representación gráfica de la situación pero de forma errada.		
5	Estudiantes que no realizan la situación planteada.	1	4%

Tabla 7. Prácticas de los estudiantes en la tarea 2.

El 35% de los estudiantes estiman que la altura inicial de la cual se lanzó la pelota es 18 cm, hacen esta información teniendo en cuenta que la altura final es de 6 cm y son 3 rebotes entonces se disminuyen 6 cm en cada rebote. A modo de ejemplo de esta práctica se presentará figura 9.

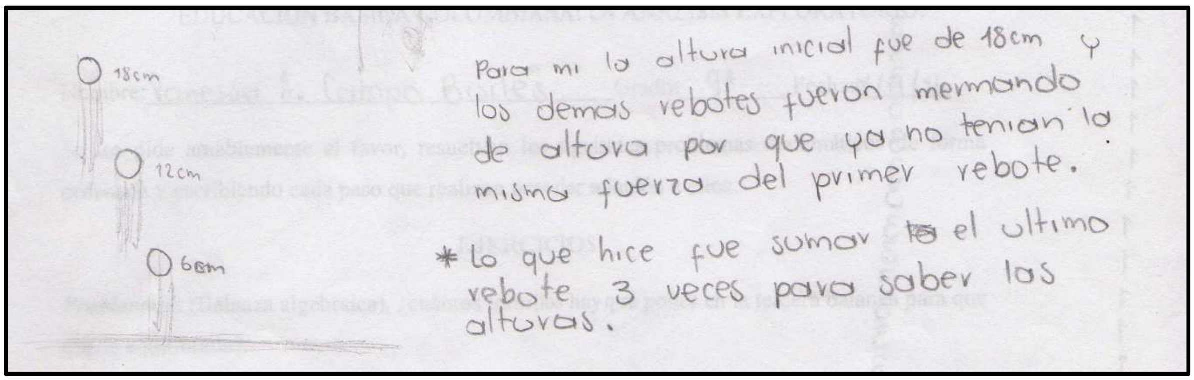


Figura 9. Práctica de un estudiante de la categoría 2

Véase como el estudiante asume que cada vez que la pelota rebota disminuye la altura 6 centímetros como si esta disminución fuera igual en cada rebote, estos estudiantes no se tienen en cuenta la información suministrada en la tarea que indica la pelota rebota hasta $\frac{1}{5}$ de la altura inicial.

Esto deja ver que los estudiantes centran la atención en dos cantidades extensivas, la altura final alcanzada por la pelota y la cantidad de rebotes para dar una respuesta. Es importante notar que en algunos casos se hace ostensivo el procedimiento de la multiplicación (ver figura 10) y otros lo enuncian en lenguaje natural en una suma iterada sumando el ultimo rebote tres veces. Todos los estudiantes intentan ilustrar la situación con una gráfica solo en un caso se hace ostensivo $\frac{1}{5}$ pero no se toma en cuenta al resolver la situación propuesta, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

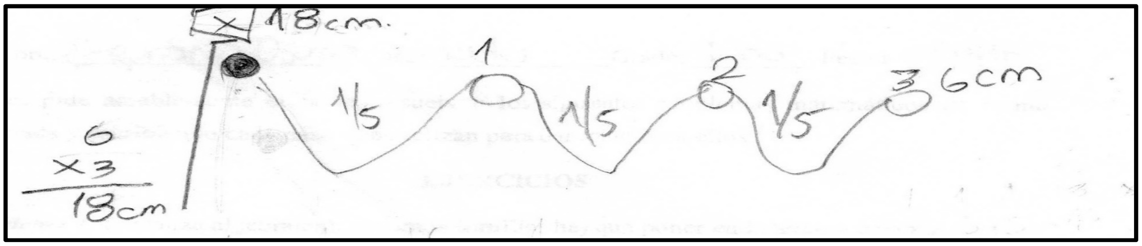


Figura 10. Estudiante que representa la incógnita con una variable.

Este caso también llamó la atención puesto que es el único que hace uso de una letra para representar la cantidad desconocida, es decir, utiliza un símbolo para referirse a un intensivo reconocido y permite ver que el estudiante reconoce el valor desconocido y lo representa mediante una incógnita.

Aunque este estudiante usa esta letra para representar la altura inicial, no opera con ella para encontrar la respuesta, solo toma en consideración los datos conocidos pero no logra establecer la relación de estos con el intensivo.

Otro 31% (7 de 23 estudiantes), para hallar sus repuestas lo que manifiestan en sus prácticas es una multiplicación entre la altura final alcanzada por la pelota (6) por 5 dado que, al parecer confunden el término $\frac{1}{5}$ con la quinta parte lo cual les dio como resultado 30, tal como se aprecia en la figura 11.

Figura 11. Estudiante que multiplica la altura final alcanzada por cinco

La confusión entre la quinta parte con cinco, se hace ostensiva en la multiplicación y en otros casos en lenguaje natural tal como se aprecia en la figura 11. Además llama la atención la gráfica de este estudiante puesto que, no ilustra de forma correcta la situación donde se muestra que cada vez que rebota la pelota la altura disminuye pero las dibuja a la misma altura.

Como se puede ver tanto los estudiantes de la categoría anterior como los de esta trabajan con datos explícitos y centran su atención en dos cantidades extensivas, en este caso la altura final alcanzada y la quinta parte que confunden con cinco.

Por otra parte el 6 de las 23 prácticas matemáticas dejan ver que a la altura final le suman $\frac{1}{5}$ de forma iterada tantas veces como rebota la pelota, tal como se aprecia en la figura 12.

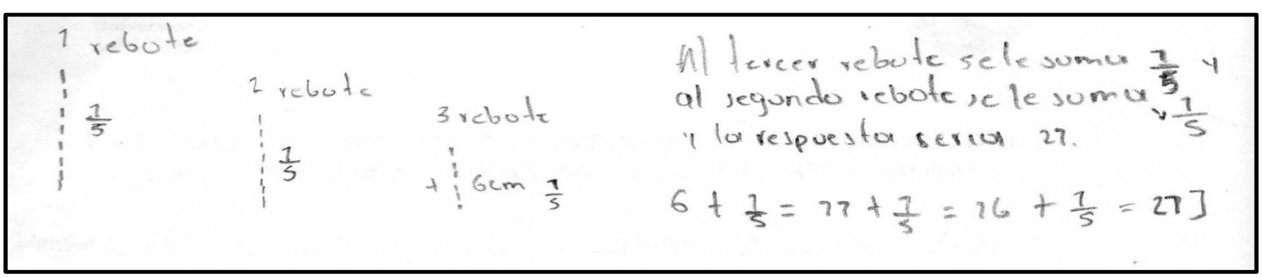


Figura 12. Estudiante que a la altura final le suma dos veces un quinto.

La práctica manifestada en la figura 12 que se ha tomado para ilustrar esta categoría, puesto que, indica que a la altura final se le debe sumar $\frac{1}{5}$ de forma iterada tres veces que es la cantidad de rebotes; las operaciones fueron realizadas de manera ostensiva para indicar porque a su juicio 21 es la altura inicial.

Además llama la atención que en todas las prácticas el procedimiento de sumar las cantidades lo hacen de forma errada dado que cuando suman $6 + \frac{1}{5}$ obtienen como resultado 11. También se puede observar que todos hacen un uso errado del signo igual como operador.

Por otra parte, al hacer ostensivo el procedimiento y al explicarlo en lenguaje natural no hay una correspondencia entre lo explicado en este lenguaje y en el numérico, puesto que en el natural indican que hay que sumas dos veces $\frac{1}{5}$ y en el numérico lo suman tres veces. Nuevamente los estudiantes centran la atención en dos cantidades, en este caso en 6 y en $\frac{1}{5}$.

Uno de los 23 estudiantes solo realiza la gráfica que considera que representa la situación planteada, tal como se muestra a manera de ejemplo en la figura 13.

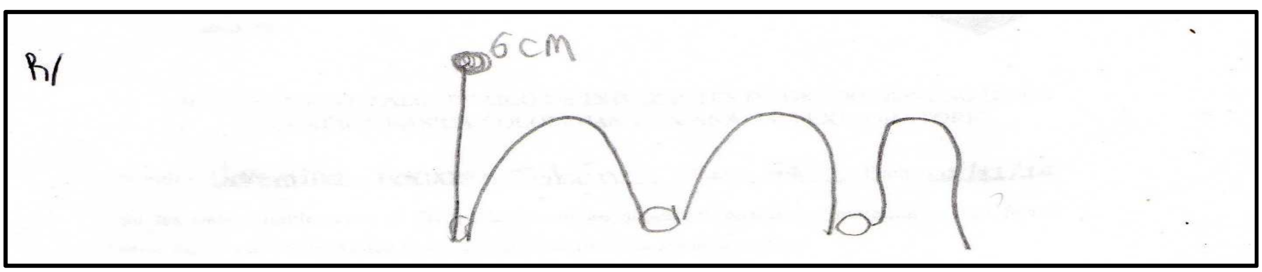


Figura 13. Representación gráfica de la situación 2 realizada por un estudiante.

El estudiante que realiza la práctica de la figura 13, reconoce que hay por lo menos tres rebotes, además, se nota por la gráfica que no comprende que 6 cm es la altura final alcanzada por la pelota y no la inicial, por lo que muestra la gráfica tampoco comprende que con cada rebote la altura disminuye puesto que ha dibujado las curvas a la misma altura. Nótese además que en todas las categorías el número 6 es tomado en consideración para intentar dar una respuesta.

De acuerdo a los aspectos anteriores las prácticas desplegadas por los estudiantes en la situación 2, se pudo notar que hay un uso de cantidades extensivas, hay presencia de un lenguaje natural con algunos procedimientos aritméticos aunque ninguno llega a la respuesta correcta, es por ello que estas prácticas se ubican en un nivel 0 de algebrización excepto el estudiante que solo realizó la gráfica y el que no dio respuesta a la situación.

Después de realizar el análisis de las practicas matemáticas desarrolladas por los estudiantes de en la situación 2, se pudo concluir que los estudiantes no lograron establecer las relaciones implícitas en el problema entre la altura final de la pelota y la altura que se reduce en un quinto después de cada rebote. Además hacen uso de cantidades extensivas, es decir, operan con cantidades concretas, hacen uso de objetos matemáticos como la suma y la multiplicación. Con respecto a las representaciones gráficas de la situación se puede observar que no hay una correspondencia entre la información presentada en la situación y las gráficas manifestadas en las prácticas. Puesto que ninguno de los 23 estudiantes llega a una respuesta correcta el nivel general de algebrización de la práctica es 0.

3.3.3 Análisis de la situación 3

En la tabla 8 se describen las prácticas desarrolladas por los estudiantes para dar respuesta a situación 3.

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
1	Estudiantes que parten de que la cantidad de sillas y butacos son 2 y 4 respectivamente, sin dejar ver explícitamente de donde se obtuvieron estas cantidades de sillas y butacos	23	100%

Tabla 8. Práctica de estudiantes de la situación 3.

Todos los alumnos objeto de estudio, manifestaron en sus prácticas que la respuesta correcta es 4 butacos y 2 sillas, pero no dejan ver los procedimientos empleados para dar cuenta de cómo llegan a estas respuestas, pues en sus prácticas sólo dejan ver que verifican estas cantidades esperando obtener con ellas las 20 patas indicadas en el problema. En otras palabras las prácticas dejan ver la verificación más que los procedimientos para dar respuesta a la situación propuesta. En la Figura 14, se muestra una práctica en la que probablemente los estudiantes resolvieron las la situación 3 por medio de tanteo como se muestra a continuación.

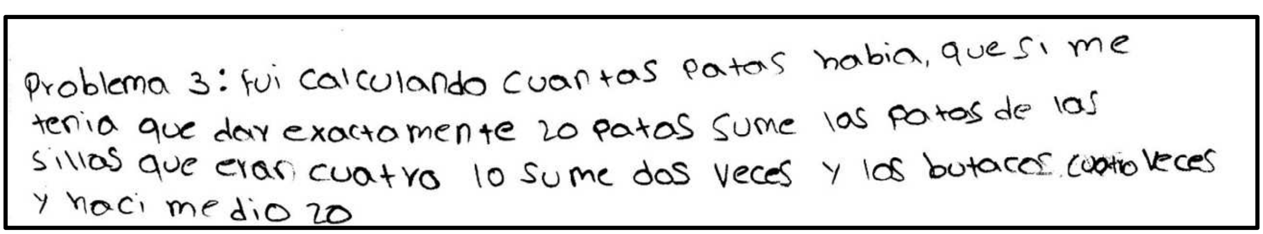

Problema 3: fui calculando cuantas patas habia, que si me tenia que dar exactamente 20 patas sume las patas de las sillas que eran cuatro lo sume dos veces y los butacos cuatro veces y haci me dio 20

Figura 14. Estudiante en la que se asume una resolución por tanteo

Ahora bien, en la Figura 14, se muestra una práctica desarrollada por un estudiante en la que deja notar que probablemente la situación fue resuelta por medio de tanteo, se infiere esto porque cuando el alumno hace explicitas las palabras “fui calculando”, podría estar indicando que hizo varios intentos con cantidades concretas y ostensivas hasta que le coincidiera con las 20 patas, es decir, a ensayo y error hasta llegar a una respuesta válida.

Por otra parte, uno de los estudiantes para verificar las cantidades asume que el valor total de las patas de los butacos es 12 y de las sillas es 8, que en conjunto forman la cantidad total de patas (20). Tal como se muestra en la Figura 15.

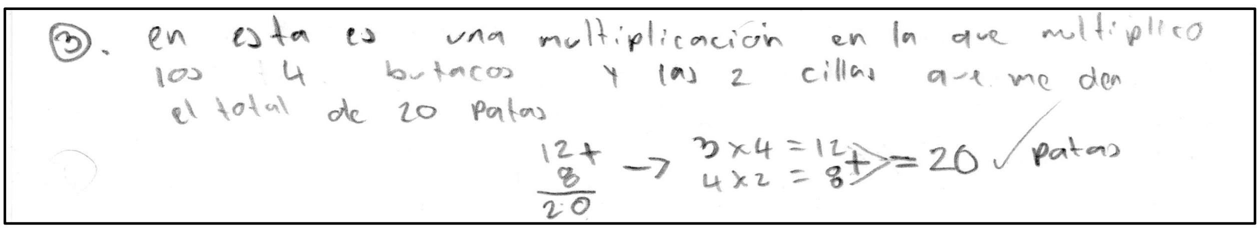


Figura 15. Práctica de un estudiante de la situación 3

Dado que las practicas sólo muestran la verificación de cantidades y no dejan ver como se obtuvieron estos valores, no se le puede asignar un nivel de algebrización. Dentro de las prácticas los estudiantes utilizaron diversas representaciones icónicas para mostrar de alguna manera cómo realizaron las prácticas matemáticas, pero dichas representaciones no reflejaban las prácticas realizadas.

En síntesis, los estudiantes solo recurren a la verificación de cantidades concretas, lo cual no deja ver los objetos matemáticos que permitan asignar un nivel de algebrización a las prácticas empleadas para la resolución de la tarea propuesta.

3.3.4 Análisis de la situación 4

A continuación se presentan las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para dar respuesta a la situación 4. Véase la siguiente Tabla.

CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
1	Estudiantes que logran establecer la razón entre las cantidad de estudiantes que van en a pie y la cantidad de estudiantes que van en coche, es decir, establecen la relación 3 a 1, respectivamente.	4	17%
2	Estudiantes que suman uno a uno la cantidad de alumnos que van en coche y la cantidad de alumnos que van andando hasta llegar a la cantidad total de alumnos que hay en la escuela (212).	7	31%
3	Estudiantes que para realizar el ejercicio platearon una regla de tres simple pero establecen la relación proporcional entre las magnitudes de forma errada.	2	9%
4	Estudiantes que ofrecen una respuesta correcta a la situación propuesta, pero no indican o hacen ostensivos los	3	13%

	procedimientos realizados.		
5	Estudiantes que no logran establecer ninguna relación entre la cantidad de alumnos que van andando y los que van en coche, y terminan operando (mediante sumas, multiplicaciones, divisiones o combinaciones de estas) arbitrariamente las cantidades expuestas en el problema.	7	31%

Tabla 9. Práctica de los estudiantes en la situación 4

En 4 de las 23 (el 17%) prácticas desarrolladas por los estudiantes, se logra evidenciar que establecen una relación proporcional entre la cantidad de alumnos que van en coche y los que van andando, es decir, logran reconocer que hay una relación de uno a tres, tal como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 16.

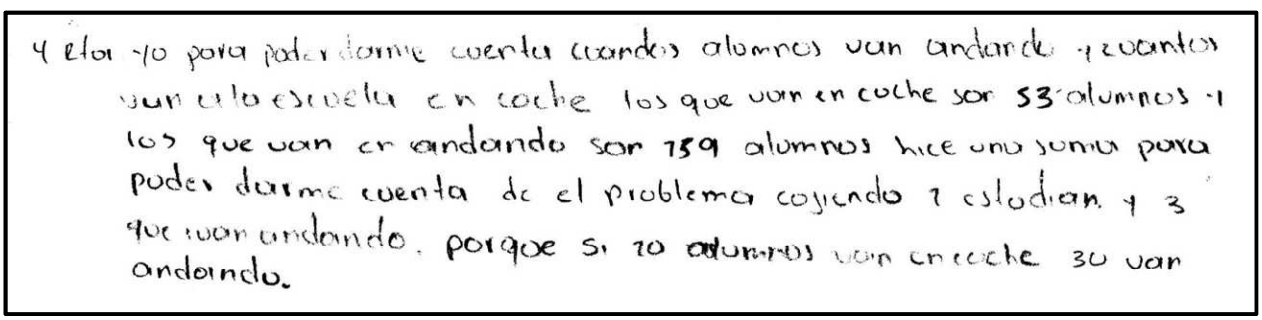

4 Ela 40 para poder darme cuenta cuandos alumnos van andando y cuantos van a la escuela en coche los que van en coche son 53 alumnos y los que van en andando son 159 alumnos hice una suma para poder darme cuenta de el problema cojiendo 1 estudian. y 3 que van andando. porque si 10 alumnos van en coche 30 van andando.

Figura 16. Estudiante de la categoría 1, en la situación 4.

En la Figura 16, se puede observar que el estudiante logra reconocer la relación proporcional entre la cantidad de alumnos que van en coche y los que van andando, esto se puede determinar porque logra establecer que si por cada alumno que va en coche hay tres que van a pie, entonces por cada 10 que van en coche hay 30 que van a pie.

Los objetos matemáticos emergentes son el concepto de relación de cantidades puesto que logran comprender que por cada estudiante que va a pie 3 van en coche, es decir, que hay una relación de 1 → 3; se emplea un lenguaje natural para argumentar la respuesta la respuesta dada. La práctica realizada es de nivel 1, puesto que intervienen objetos intensivos que permiten establecer generalidades, además logran reconocer la relación entre las dos magnitudes puestas en consideración, es decir, se reconoce una regla general, que se consideran en el problema, además, se realizan operaciones con objetos extensivos.

Por otra parte, el 31% de los estudiantes (7 de 23 estudiantes), manifestaron procedimientos algorítmicos haciendo uso de una suma para dar respuesta a la situación propuesta. En la Figura 17 se ilustra un ejemplo de ello.

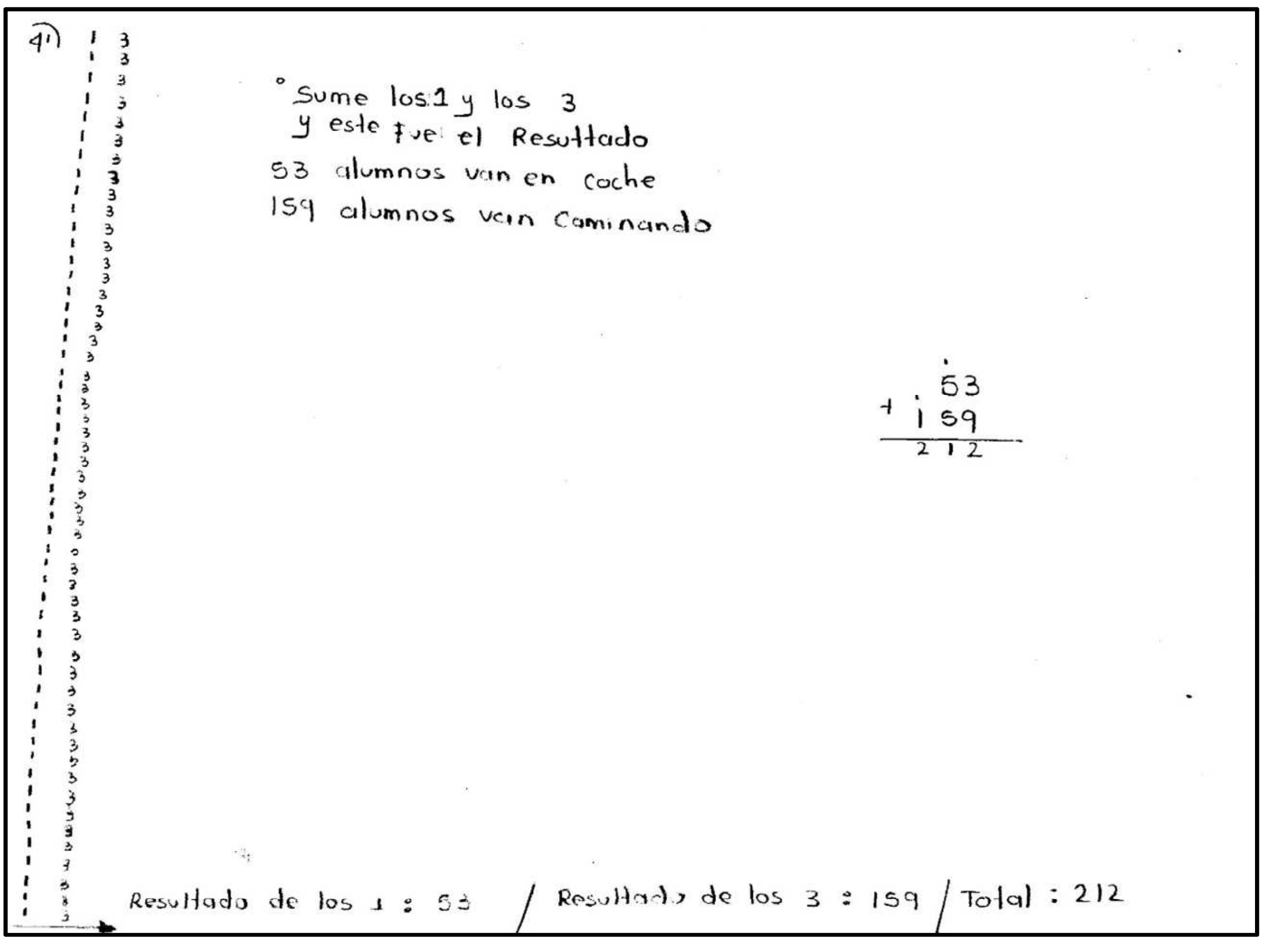


Figura 17 Práctica de un estudiante en la situación 4.

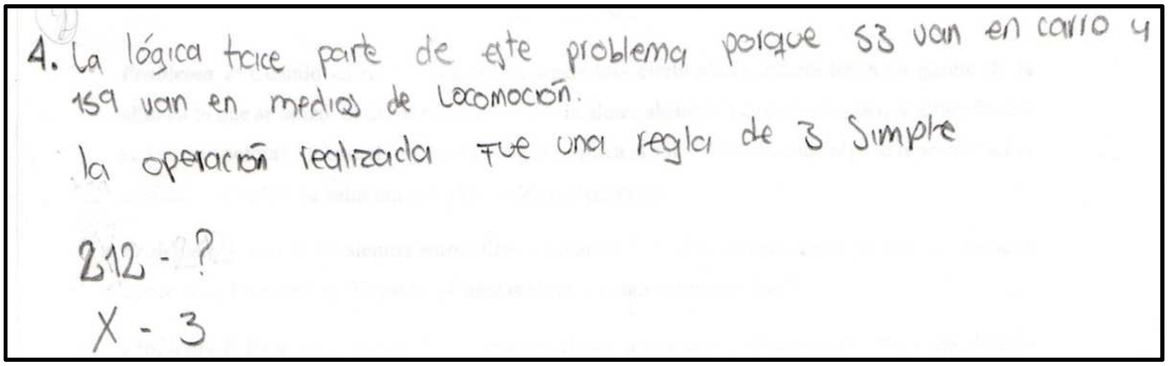
En la Figura 17, se muestra de forma ostensiva el procedimiento empleado por estos estudiantes para atender el problema, en este caso se usa algoritmo de suma empleado para encontrar la solución, manifestando una suma iterada de unos, que representan la cantidad de alumnos que van en coche por cada cuatro, y de tres que representan la cantidad de alumnos que van a pie por cada cuatro alumnos.

Dentro de las prácticas de estos estudiantes se identificaron objetos primarios al dar solución a la tarea propuesta, los objetos emergentes son: el concepto de suma, puesto que a través de la adición logran llegar a la solución; procedimientos como lo son las técnicas de cálculo, en las cuales sumaron las misma cantidad de unos y de tres hasta llegar a la cantidad total de alumnos que hay en la escuela (212); y argumentos en los cuales hacen ostensivo en lenguaje aritmético las operaciones realizadas para dar respuesta a la tarea propuesta.

Nótese que el estudiante coloca 1 en frente del 3 para mantener la regla de cantidades y así saber cuando detenerse hasta que la suma de unos y de tres, de 212 que es la cantidad alumnos totales que hay en la escuela.

Ahora bien, dado que estas prácticas están en un lenguaje natural y numérico en las cuales intervienen objetos intensivos que son las cantidades a encontrar, se realizan operaciones con objetos particulares (extensivos) y no se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido, esta práctica se ubica en un nivel 1 de algebrización.

Por otra parte, en dos de las prácticas matemáticas (el 9% de los estudiantes) los estudiantes indican que realizaron una regla de tres simple, pero la ostentan de forma errada puesto que al plantearla evidencian dos incógnitas, además, la relación $x \rightarrow 3$ no es correcta, porque el 3 es la cantidad de alumnos que van andando y sólo debe relacionarse con los cuatro estudiantes, es decir, que de cada 4 estudiantes 3 van andando. A continuación, en la Figura 18 se muestra un ejemplo ilustrativo de ello.



4. La lógica hace parte de este problema porque 53 van en carro y 159 van en medios de Locomoción.
la operación realizada fue una regla de 3 Simple

212 - ?
X - 3

Figura 18. Práctica de un estudiante para dar respuesta a la tarea 4

En la Figura 18, se observa que el estudiante para dar respuesta a la tarea 4 indica de forma ostensiva que la operación realizada fue una regla de tres simple, como ya se mencionó fue planteada de forma incorrecta.

El estudiante dispone de cantidades extensivas $1 \rightarrow 3$, para mantener la relación de cantidad y determinar la cantidad total, es decir, que por cada 1 que va en coche 3 van a pie, esto muestra que de alguna manera se establece implícitamente la relación pero lo hacen de forma explícita. Además no establecen el orden de magnitudes, es decir, colocan los 212 con la incógnita que desean encontrar, parece ser que quieren encontrar la cantidad de alumnos que van a pie pero no la relacionan con la cantidad total de estudiantes, lo cual indica que no saben establecer la regla de tres que desean realizar.

Nótese que el estudiante hace uso de una incógnita para indicar los valores desconocidos lo cual muestra cierto grado de generalidad. Así pues, puesto que en esta la práctica intervienen variables para representar valores desconocidos, el lenguaje empleado es natural y simbólico;

pero no se establecen relaciones adecuadas, ni se muestra un procedimiento concreto que permita justificar la respuesta, por ello a esta práctica no se le adjudica ningún nivel de algebrización.

El 13% (3 de 23 estudiantes) de los estudiantes realizaron la situación plateada, puesto que no lograron reconocer las relaciones entre las cantidades y sólo operaron con los datos conocidos que el problema le suministraba, de forma arbitraria, consideraron dividir la cantidad total de estudiantes que hay en la escuela (212) y la cantidad de alumnos que van andando. Véase a modo de ejemplo la Figura 19.

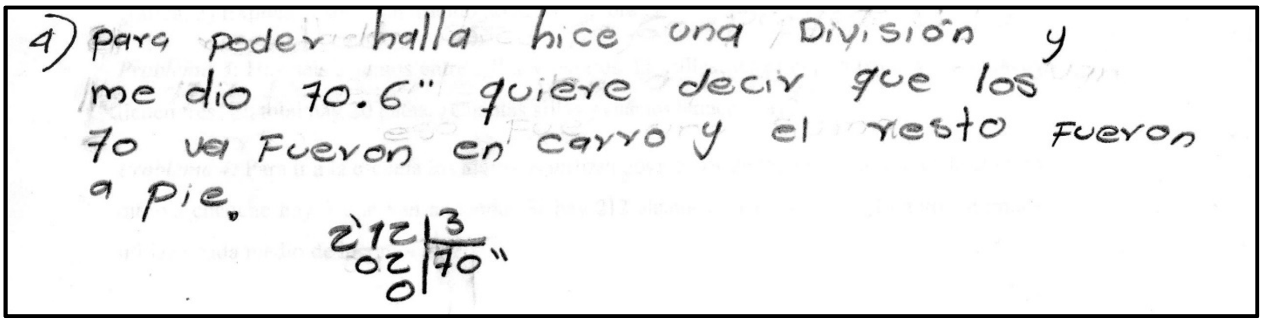


Figura 19. Práctica de un estudiante en la tarea 4.

En la práctica presentada en la figura 19, se observa que el estudiante divide la cantidad total de estudiantes que hay en la escuela (212) y la cantidad de estudiantes que van andando (3), nótese como el estudiante opera con las cantidades ostensivas del problema, pero dichas operaciones se hacen de forma arbitraria sin establecer ninguna relación correcta de acuerdo con las condiciones del problema que se establece entre la cantidad.

De acuerdo a los aspectos anteriores la prácticas desplegada por el 31% de los estudiantes en la tarea 4, se pudo observar que hay un uso de cantidades extensivas, hay presencia de un lenguaje natural con algunos procedimientos aritméticos como la división, aunque ninguno llega a la respuesta correcta, es por ello que estas prácticas no se les puede adjudicar ningún nivel de algebrización.

Pese a que la respuesta es correcta no se le puede adjudicar un nivel de algebrización, el hecho de que centre la atención en cantidades extensivas hace pensar que se ubique en un nivel 0 de algebrización porque operan cantidades concretas, pero lo hacen de forma arbitraria e incorrecta.

A modo de conclusión, después de realizar el análisis de la situación 4 se puede decir que son muy pocos los estudiantes que logran reconocer la relación proporcional inmersa en el problema entre la cantidad de estudiantes que van a pie y los que van en coche y que resolver acertadamente la situación. Además surgen objetos matemáticos como el concepto de suma y la relación de cantidades que manifiestan de forma ostensiva, en algunos casos utilizan procedimientos como lo son las técnicas de cálculos y los algoritmos de suma y división; en general se presenta un lenguaje natural y numérico, así pues de forma general se puede decir que el nivel de algebrización que prevalece en las prácticas desarrolladas por los estudiantes es de nivel 1.

3.4 Algunas conclusiones de la implementación

A partir de la implementación de las tareas propuestas aplicada a los estudiantes de grado noveno de educación básica de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario, se puede concluir que:

- En algunos casos se hizo falta realizar entrevistas a los estudiantes para comprender de forma clara el procedimiento realizado para dar respuesta a la tarea realizada, puesto que aunque lo hacen correctamente no son tan claros los procedimientos realizados.
- Estar más pendiente de las respuestas proporcionadas por los estudiantes para ir preguntando por qué utilizaban el procedimiento empleado por ellos y si era el adecuado para dar respuesta a la tarea planteada.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES EN TORNO AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA ESCUELA

En este capítulo se presentan las conclusiones generales y las reflexiones en torno al razonamiento algebraico que manifestaron los estudiantes objeto de investigación.

4.1 Conclusiones generales

Con relación al primer objetivo de este trabajo se puede concluir que:

En las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes se presenta una tendencia a trabajar con un lenguaje natural y a utilizar el sistema numérico para resolver las situaciones propuestas, hacen uso del sistema numérico más que el simbólico algebraico.

Los objetos matemáticos que prevalecieron en las prácticas matemáticas desplegadas por los estudiantes fueron los conceptos de suma, resta, multiplicación, división, relación de equivalencia y proporción, es decir, que fue posible concluir que los estudiantes tienden a utilizar procedimientos algorítmicos orientados a las operaciones básicas y en ocasiones estas operaciones alargaban las respuestas.

En su mayoría, los estudiantes utilizaron procedimientos como el tanteo, el ensayo y error, las operaciones básicas y la relación de cantidades para encontrar las respuestas correctas y probar los resultados obtenidos. Es notorio el uso del lenguaje natural para resolver las situaciones propuestas, además, se alejaba de lo simbólico-algebraico y era más de carácter numérico y prevalecía el uso de la aritmética operando con los objetos extensivos de primer nivel (cantidades numéricas conocidas) mediante las operaciones básicas.

Ahora bien, con respecto a los procesos matemáticos emergentes en las prácticas matemáticas se puede evidenciar el proceso de algoritmización con las operaciones básicas, se trabajan con objetos extensivos a través de un proceso de particularización, es decir, muestran una gran tendencia a operar con cantidades conocidas. Los procedimientos son de carácter ostensivo materializando las operaciones realizadas.

Respecto al segundo objetivo específico que hace referencia a identificar los niveles de algebrización de la actividad matemática que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas propuestos se puede concluir que:

Tomando en consideración los resultados obtenidos en el primer objetivo, dado que, en las prácticas matemáticas los estudiantes presenta mayor inclinación a operar con objetos extensivos, lenguaje utilizado es en su totalidad natural y numérico; y transformaciones empleadas por los estudiantes se ubican en su gran mayoría en lo aritmético. posible afirmar que las prácticas de los estudiantes en su mayoría están en un nivel 0 y 1 de algebrización, en pocos casos se muestran aspectos de nivel 2.

Respecto al tercer objetivo se concluye que:

De acuerdo a la experiencia que tienen los estudiantes trabajando en algebra y al grado de escolaridad en el que se encuentran, se esperaría que pudieran desplegar sus prácticas matemáticas en un lenguaje simbólico-algebraico, sin embargo, no lo hacen, operan solo con objetos extensivos, lo cual deja ver que el razonamiento algebraico es precario en este grupo de estudiantes, por lo cual es necesario que realicen tareas a los estudiantes para que les permitan avanzar en conceptos que requieran ser algebraicos (ecuación, función) con situaciones que quizás no necesariamente pueda resolverse aritméticamente.

Ahora bien, una reflexión que se deriva del trabajo realizado es, que necesario que los docentes en ejercicio sean más conscientes de la importancia de potenciar el RA desde los primeros años de escolaridad, y no dejarlo relegado a secundaria., ya que hay otras formas de potenciar este razonamiento desde los primeros años de escolaridad por medio de tareas que promuevan las relaciones cualitativas y cuantitativas; el estudio de patrones y cambios donde cada vez más se lleguen a abstracciones más complejas.

Además, es indispensable que los docentes se sigan formado académicamente para conocer más las nuevas investigaciones en Educación Matemáticas que les proporcionen herramientas, para crear estrategias y diseñar actividades que permitan ir desarrollando el RA en los estudiantes desde los primeros años de escolaridad, y que favorezcan en gran medida la consolidación de un nivel adecuado de algebrización en los estudiantes des, donde cada vez se realicen abstracciones de mayor generalidad y la construcción de un lenguaje simbólico literal.

Ahora bien, este trabajo está orientado a caracterizar los niveles de algebrización de un gupo de estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, en la cual se muestra que el nivel de algebrización es precario, seria interesante indagar por qué los estudiantes no alcanzan los niveles 2 y 3, lo cual permitiría hacer un análisis de las posibles dificultades y errores que originan ausencia de razonamiento algebraico.

4 BILBIOGRAFÍA

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y Ordóñez, L. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp.75-94). Jaén: SEIEM.

Castro, W. (2008). *Razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: un estudio exploratorio.* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Charroher, D. & Schiliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (2), 669-705. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. Y NCTM.

Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the Early grades. *Journal of Mathematical Behaviour,* 4, 195-208.

Escalante, J. & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática,* 24(1), 107-132.

Gallardo, A., Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9, 155-188.

Godino, J. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto *Edumat-maestros,* director: Juan D. Godino. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 22(2), 237-284.

Godino, J., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias, 23*(1), 199-219.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias* (en prensa).

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education.* 39(1), 127-135.

Godino, J., Castro, W., Aké. L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletín de Educación Matemática*, *26*(42B), 1-20.

Godino, J.D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etcheharay, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117 – 142.

Kaput, J., y Blanton, M. (2000). Algebraic reasoning in the context of elemetary mathematics: Making it implenmetable on a massive scale. *Annual Meeting of the North American Educational Research Association,* Montreal, Canada.

Kieran, C., (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning,* (pp. 390-419). New York.

Kieran, C., Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias,* 7(3), 229-240.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through collage leves. Building meanning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *second Handbook of research on mathematics Teaching and Learning,* (2), 707-762. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. Y NCTM.

Moreno, I., Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *EMA*. 2(3), p. 247-258.

Paralea, M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Tesis doctoral). Universidad de la laguna, Tenerife: departamento de análisis didáctico.

Puig, L. (1998). Cómo poner un problema en ecuaciones. Valencia. Recuperado de http//www.uv,es/Puig/ppe.pdf

Radford, L. (2000). Signs and meaning in students emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematic,* (42), 237-268.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in student’s emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268

Radford, L. (2003). Gestures, speach and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Rodríguez, S., Molina, M., Cañadas, M., & Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*. 77, p. 5-34.

Tamayo, M. (2003). El proceso de la investigación científica. México: Limusa.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática,* 6(3), 90-108.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l“apprentissage de I“ algebra. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemnd de didactique des mathematiques et de l’ informatique,* (pp. 189-199*)*. Paris: La Pensée Sauvage.

5 ANEXOS

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de educación Matemática

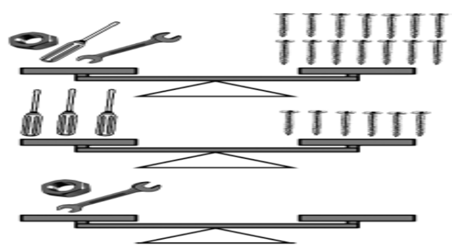
RAZONAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NÚCLEO TÉCNICO AGROPECUARIO

Nombre:____Grado:_________ Fecha:________

Se les pide amablemente el favor, resuelvan los siguientes problemas matemáticos de forma ordenada y escribiendo cada paso que realizan para dar solución a ellos.

EJERCICIOS

Problema 1: (Balanza algebraica), ¿cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?



Problema 2: Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm., ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota? 1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución usando notación algebraica.

Problema 3: Hay seis asientos entre sillas y butacos. Las sillas tienen cuatro patas y los butacos tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos butacos hay?

Problema 4: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va encoche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Solución

Laura Valentina Cruz Arteaga
9-A 2016

1. Se deberían poner 9 tornillos porque se le restan los tornillos sobrantes de la Segunda balanza, porque si la primera muestra 14 tornillos y se le restan 5 de la Segunda; (porque cada destornillador pesa 2 tornillos)

2.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

Porque se trata de la altura de la que se lanza la pelota 5 (Quinta parte) 6 (altura alcanzada despues de 3 rebotes)

3. hay 2 sillas que forman ocho patas y cuatro butacos que forman 12 patas, esto yo lo realice de acuerdo con la lógica que plantea el problema

4. La lógica hace parte de este problema porque 53 van en carro y 159 van en medios de Locomoción.

la operación realizada fue una regla de 3 Simple

212 - ?

X - 3

16 para que la balanza se equilibre tenemos que colocar 12 tornillos porque yo sume los tornillos delas otras fases y la tuerca son 2 tornillos el el destornillador son dos tornillos y la llave son 10 tornillos y en la tercera fase hay una tuerca y una llave como la tuerca son 2 tornillos y la llave son 10 tornillos al sumarlos da 12 tornillos.

2 [illegible]

1 rebote $\frac{1}{5}$

2 rebote $\frac{1}{5}$

3 rebote + 6cm $\frac{1}{5}$

Al tercer rebote se le suma $\frac{1}{5}$ y al segundo rebote se le suma y $\frac{1}{5}$ y la respuesta seria 27.

$6 + \frac{1}{5} = 11 + \frac{1}{5} = 16 + \frac{1}{5} = 27]$

Seda Si hay 20 patas de asientos entre eso hay cillas y butacas para saber cuantas butacas y cuantas cillas hay yo hice una suma cogi 4 butacas y les sume las 3 patas que tiene cada uno y me dio 12 patas entre 4 butacas y despues cogi 2 cillas de 4 patas que tiene cada una y me dio 8 patas y despues sume 12 patas mas 8 patas y me dio 20 patas por eso hay 2 cillas y 4 butacas.

4 Eta yo para poder darme cuenta cuandos alumnos van andando y cuantos van a la escuela en coche los que van en coche son 53 alumnos y los que van en andando son 159 alumnos hice una suma para poder darme cuenta de el problema cojiendo 1 estudian. y 3 que van andando. porque si 10 alumnos van en coche 30 van andando.