



**Configuraciones epistémicas presentes en dos libros de texto de tercer grado de básica
primaria, en torno al concepto de división**

Marcela Medina

Alexandra Rojas

Universidad del Valle – Sede Norte del Cauca

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander de Quilichao

2016



**Configuraciones epistémicas presentes en dos libros de texto de tercer grado de básica
primaria, en torno al concepto de división**

Marcela Medina 1157728

Alexandra Rojas 1157751

Directora:

Mag. Jennifer Salgado Piamba

Universidad del Valle – Sede Norte del Cauca

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander de Quilichao

2016



Programa Académico _____

Fecha

Código del programa: _____

Resolución del programa: _____

| Día | Mes | Año |
|-----|-----|------|
| 12 | 09 | 2016 |

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Configuraciones epistémicas de dos libros de texto en torno al concepto de diáscora

Se trata de:

Proyecto

Informe Final

Director

Jennifer Salgado Piamba

Nombre del Primer Evaluador

Mynam Beliso Vega Restrepo

Nombre del Segundo Evaluador

Monica A. Aponte

Estudiantes

| Nombres y Apellidos | Código | Plan | E-mail | Teléfonos de contacto |
|---------------------|--------|------|--------|-----------------------|
| Marcela Medina | | | | |
| Alexandra Rojas | | | | |

Evaluación

Aprobado

Meritorio

Leurado

Aprobado con recomendaciones

No Aprobado

Incompleto

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el _____.

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes, expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

Jennifer S.


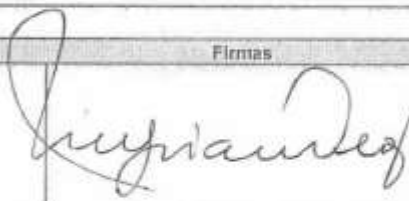
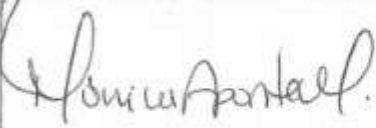
Mynam Beliso Vega Restrepo

Monica A. Aponte

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

| Recomendaciones <input type="checkbox"/> | Observaciones <input type="checkbox"/> | Razón de desacuerdo - Alternativas <input type="checkbox"/> |
|--|--|--|
| <i>Si se considera necesario, usar hojas adicionales</i> | | |
| Los evaluadores resaltan la organización del trabajo y estructuración del mismo. Se sugieren precisiones de forma que se realizarán en compañía de su director de tesis. | | |
| El trabajo cumple las expectativas de un trabajo de pregrado y un cumplimiento de objetivos de manera satisfactoria. | | |
| | | |
| Firmas | | |
|  |  |  |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado | Primer Evaluador | Segundo Evaluador |



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación de obras en el repositorio institucional

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE,

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)



LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS PRESENTES EN DOS LIBROS DE TEXTO DE TERCER GRADO DE BÁSICA PRIMARIA, EN TORNO AL CONCEPTO DE DIVISIÓN.

Autores:

Nombre: ANGELA MARCELA MEDINA VARGAS

Firma: Marcela Medina V.
C.C. 1061492114 coloto

Nombre: JOHANA ALEXANDRA ROJAS PATIÑO

Firma: Johana A. Rojas
C.C. 1062.309.736

Fecha: 03 - OCTUBRE- 2016

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|----|
| Introducción | 1 |
| Capítulo I. Preliminares | 3 |
| 1. Problemática | 3 |
| 2. Justificación | 8 |
| 2.1. Desde las orientaciones curriculares nacionales | 8 |
| 2.2. Desde los libros de texto | 15 |
| 3. Antecedentes | 17 |
| 4. Objetivos | 20 |
| 4.1. Objetivo general | 20 |
| 4.2. Objetivos específicos | 20 |
| Capítulo II. Marcos de referencia | 21 |
| 5. Marco teórico | 21 |
| 5.1. Referente matemático | 21 |
| 5.3. Referente cognitivo | 30 |
| 5.4. Referente metodológico | 36 |
| Capítulo III. Análisis general de los libros de texto | 39 |
| 6. Libro: ZonActiva Matemática 3 | 39 |
| 7. Libro: Competencias Matemáticas 3 | 48 |
| Capítulo IV. Configuraciones epistémicas de los libros de texto | 56 |
| 8. Libro: ZonActiva Matemática 3 | 56 |
| 9. Libro: Competencias Matemáticas 3 | 74 |
| 10. Esquemas de las configuraciones epistémicas de los dos libros de texto | 92 |
| Capítulo V. Conclusiones | 95 |
| Referencias bibliográficas | 99 |

TABLA DE GRÁFICAS

| | |
|--|----|
| Gráfica 1: Algoritmo tradicional con resta. Tomado de Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética: La División. Pág. 3 | 4 |
| Gráfica 2: Algoritmo tradicional sin resta. Tomado de Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética: La División. Pág. 3 | 5 |
| Gráfica 3: Transformación lineal | 22 |
| Gráfica 4: La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. Font & Godino. Pág.69. | 26 |
| Gráfica 5: Objetos que intervienen en la práctica matemática. Tomado de configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Godino, et al. Pág. 7. | 28 |
| Gráfica 6: Isomorfismo de medida. Vergnaud. | 32 |
| Gráfica 7: Análisis vertical. Vergnaud. | 33 |
| Gráfica 8: Análisis Horizontal. Vergnaud. | 33 |
| Gráfica 9: Lenguaje escrito. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124 | 40 |
| Gráfica 10: Lenguaje gráfico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 141. | 41 |
| Gráfica 11: Contenido de la obra. ZonActiva Matemática 3 | 42 |
| Gráfica 12: Contenido de la obra. Anímate. ZonActiva Matemática 3. Pág. 119. | 43 |
| Gráfica 13: Tratamiento pedagógico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 154. | 44 |
| Gráfica 14: Tratamiento pedagógico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 142. | 45 |
| Gráfica 15: Relación con el currículo. ZonActiva Matemática 3. Pág. 10 | 46 |
| Gráfica 16: Valores que transmite. ZonActiva Matemática 3. Pág. 165. | 47 |
| Gráfica 17: Aspectos físicos del libro. ZonActiva Matemática 3 | 48 |
| Gráfica 18: Lenguaje escrito. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75 | 49 |
| Gráfica 19: Lenguaje gráfico. Competencias Matemáticas 3. Pág. 80 | 50 |
| Gráfica 20: Contenido de la obra. Competencias Matemáticas 3. Pág. 72 | 51 |
| Gráfica 21: Tratamiento pedagógico. Competencias Matemáticas 3. Pág. 73. | 53 |
| Gráfica 22: Relación con el currículo. Competencias Matemáticas 3. Pág. 73 | 54 |
| Gráfica 23: Valores que transmite. Competencias Matemáticas 3. Pág. 137. | 54 |
| Gráfica 24: Aspectos físicos del libro. Competencias Matemáticas 3 | 55 |
| Gráfica 25: Situación problema. ZonActiva Matemática 3. Pág. 126. | 57 |
| Gráfica 26: Explicación y solución de ejemplos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122 | 57 |
| Gráfica 27: Procedimiento con divisor de una cifra. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122 | 57 |
| Gráfica 28: Procedimiento con divisor de dos cifras. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124 | 58 |
| Gráfica 29: Tabla de completar con cantidades. ZonActiva Matemática 3. Pág. 121 | 58 |
| Gráfica 30: Tabla de completar con procedimiento. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129 | 59 |
| Gráfica 31: Tabla de verdadero y falso. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129 | 59 |
| Gráfica 32: Tabla para completar con números múltiplos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 133 | 59 |
| Gráfica 33: Tabla para seleccionar términos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127 | 60 |
| Gráfica 34: Crucinúmeros. ZonActiva Matemática 3. Pág. 135 | 61 |
| Gráfica 35: Diagrama de Venns. ZonActiva Matemática 3. Pág. 135 | 61 |
| Gráfica 36: Ruleta. ZonActiva Matemática 3. Pág. 131 | 61 |
| Gráfica 37: Construcción de figura. ZonActiva Matemática 3. Pág. 137 | 62 |

| | |
|---|----|
| Gráfica 38: Ejemplificación de una actividad. ZonActiva Matemática 3. Pág. 136 | 62 |
| Gráfica 39: Lenguaje simbólico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 128 | 63 |
| Gráfica 40: Situación problema 1. ZonActiva Matemática 3. Pág. 120..... | 64 |
| Gráfica 41: Situación problema 2. ZonActiva Matemática 3. Pág. 121..... | 64 |
| Gráfica 42: Situación problema 3. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122..... | 64 |
| Gráfica 43: Situación problema 4. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127..... | 64 |
| Gráfica 44: Esquema de Vergnaud situación problema 1. ZonActiva Matemática 3 | 65 |
| Gráfica 45: Esquema de Vergnaud situación problema 4. ZonActiva Matemática 3 | 65 |
| Gráfica 46: Situación 1. Análisis vertical de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3. | 66 |
| Gráfica 47: Situación 2. Análisis vertical de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3. | 66 |
| Gráfica 48: Situación 1. Análisis horizontal de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3..... | 67 |
| Gráfica 49: Situación 2. Análisis Horizontal de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3..... | 67 |
| Gráfica 50: Situación problema 5. ZonActiva Matemática 3. Pág. 131..... | 67 |
| Gráfica 51: Situación problema 6. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127..... | 67 |
| Gráfica 52: Situación problema 7. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129..... | 68 |
| Gráfica 53: Descripción de divisores. ZonActiva Matemática 3. Pág. 130 | 68 |
| Gráfica 54: Descripción de divisible por 2. ZonActiva Matemática 3. Pág. 132..... | 69 |
| Gráfica 55: Descripción de divisible por 3 y 6. ZonActiva Matemática 3. Pág. 134..... | 69 |
| Gráfica 56: Descripción de números primos y compuestos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 136 | 69 |
| Gráfica 57: Vocabulario. ZonActiva Matemática 3. Pág. 125 | 70 |
| Gráfica 58: Enunciado, división con dos cifras. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124..... | 71 |
| Gráfica 59: Enunciado, división con una cifra. ZonActiva Matemática 3. Pág. 126..... | 71 |
| Gráfica 60: Procedimiento de agrupamiento o sustracción repetida. ZonActiva Matemática 3. Pág. 120 . | 73 |
| Gráfica 61: Argumento de explicación. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122 | 74 |
| Gráfica 62: Argumento de prueba para la división. ZonActiva Matemática 3. Pág. 128 | 74 |
| Gráfica 63: Descripciones de la mitad, tercera y cuarta parte de un número. Competencias Matemáticas 3. Pág. 73 | 75 |
| Gráfica 64: Descripción de las partes de la división. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75 | 76 |
| Gráfica 65: Situación problema. Competencias Matemáticas 3. Pág. 78 | 76 |
| Gráfica 66: Explicación del proceso de dividir. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83..... | 76 |
| Gráfica 67: Descripción de factores y divisores. Competencias Matemáticas 3. Pág. 81..... | 77 |
| Gráfica 68: Foto publicitaria. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75 | 77 |
| Gráfica 69: Representación de un enunciado. Competencias Matemáticas 3. Pág. 82..... | 77 |
| Gráfica 70: Lenguaje tabular. Competencias Matemáticas 3. Pág. 81..... | 78 |
| Gráfica 71: Foto para contextualizar. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83..... | 78 |
| Gráfica 72: Uso del signo de resta y división en el algoritmo tradicional. Competencias Matemáticas 3. Pág. 78 | 78 |
| Gráfica 73: Uso del signo de división en enunciados escritos. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83 | 79 |
| Gráfica 74: Uso del signo de multiplicación, división e igualdad. Competencias Matemáticas 3. Pág. 77 | 79 |
| Gráfica 75: Situación Problema 1. Competencias Matemáticas 3. Pág. 76 | 80 |
| Gráfica 76: Situación Problema 2. Competencias Matemáticas 3. Pág. 88 | 80 |
| Gráfica 77: Situación problema 3. Competencias Matemáticas 3. Pág. 76 | 80 |
| Gráfica 78: Esquemas de Vergnaud situaciones 1, 2 y 3. Competencias Matemáticas 3 | 82 |
| Gráfica 79: Situación 1, ejercicio 1. Análisis vertical. Competencias Matemáticas 3..... | 82 |

| | |
|--|----|
| Gráfica 80: Situación 1, ejercicio 2. Análisis vertical. Competencias Matemáticas 3..... | 83 |
| Gráfica 81: Situación 1, ejercicio 1. Análisis horizontal. Competencias Matemáticas 3..... | 83 |
| Gráfica 82: Situación 1, ejercicio 2. Análisis horizontal. Competencias Matemáticas 3..... | 83 |
| Gráfica 83: Situación problema 4. Competencias Matemáticas 3. Pág. 74 | 84 |
| Gráfica 84: Situación problema 5. Competencias Matemáticas 3. Pág. 79 | 84 |
| Gráfica 85: Situación problema 6. Competencias Matemáticas 3. Pág. 77 | 85 |
| Gráfica 86: Situación problema 7. Competencias Matemáticas 3. Pág. 92 | 86 |
| Gráfica 87: Situación problema 8. Competencias Matemáticas 3. Pág. 85 | 86 |
| Gráfica 88: Situación problema 9. Competencias Matemáticas 3. Pág. 82 | 86 |
| Gráfica 89: Esquema de Vergnaud situación 7. Competencias Matemáticas 3 | 87 |
| Gráfica 90: Situación 7. Análisis escalar de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3..... | 88 |
| Gráfica 91: Situación 7. Análisis funcional. Competencias Matemáticas 3 | 88 |
| Gráfica 92: Esquema de Vergnaud situación 8. Competencias Matemáticas 3 | 88 |
| Gráfica 93: situación 8. Análisis escalar de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3..... | 89 |
| Gráfica 94: Situación 8. Análisis funcional de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3..... | 89 |
| Gráfica 95: Solución de ejemplo sin mostrar procedimiento. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75..... | 91 |
| Gráfica 96: Procedimiento en lenguaje simbólico pero no escrito. Competencias Matemáticas 3. Pág. 86 | 91 |

Resumen

En el presente trabajo, se contextualizará acerca de la problemática existente en cuanto a la enseñanza de la división, para después justificar la pertinencia de revisar y analizar algunos libros de textos matemáticos de tercer grado de primaria, dado que es el grado en donde según el marco curricular Colombiano se debe iniciar el proceso de enseñanza de dicho concepto, para lo cual, generalmente se hace uso del libro texto como apoyo didáctico.

Luego se presentaron en un marco teórico las Configuraciones Epistémicas de Font & Godino (2006), como herramienta de análisis de textos, La Teoría de Los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y los tipos de cantidades desde la perspectiva de Schwartz (citado por Puig & Cerdán, 1998), quienes establecen la pertinencia de las situaciones-problema en el aprendizaje de la estructura multiplicativa. Además, se expone una metodología cualitativa, como un ejercicio de investigación.

Por último, se desarrolla el propósito del trabajo que está dirigido a la caracterización de las configuraciones epistémicas, alrededor de la división presentes en dos libros de texto, haciendo algunas reflexiones en cuanto a los resultados del análisis de las situaciones-problema que surgen de la articulación de las teorías mencionadas con respecto al objeto de estudio.

Palabras Claves: División, campo conceptual, cantidades, configuración epistémica, situación-problema.

Abstract

In this paper , we first contextualizes about the existing problems regarding the teaching of the division , then justify the relevance of review and analyze some mathematical textbooks third grade, as is the extent to which according the Colombian curriculum framework should begin the teaching of this operation , for which generally use the textbook as a teaching support is made.

Then they presented a theoretical framework the epistemic configurations Font & Godino as text analysis tool (2006), the theory of conceptual fields of Vergnaud (1990) and quantity types from the perspective of Schwartz (1988), who establish the relevance of the problem situations in learning the multiplicative structure. In addition, exposed a qualitative methodology, as an exercise of research.

Finally, the purpose of the work, which is aimed at the characterization of epistemic configurations present in two textbooks around the division, making some reflections regarding the results of analysis of problem situations arising from the joint develops mentioned theories regarding the subject matter.

Keywords: Division, conceptual field, quantities, epistemic configuration, problem-situation

Introducción

Considerando que los lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) dentro de sus orientaciones generales plantean que uno de los aspectos básicos, que fortalece el desarrollo del pensamiento numérico, es la comprensión del concepto de las operaciones básicas tales como la suma, resta, multiplicación y división, se establece que éstas deben ser objeto de estudio en todo currículo escolar.

De acuerdo a lo anterior, el presente trabajo se centra en el estudio del concepto de división, ya que su enseñanza inicia, por lo regular, en tercer grado de primaria, la cual generalmente esta direccionada a la instrucción del esquema del algoritmo tradicional. (Barba & Calvo, 2010), esto genera implicaciones negativas en los estudiantes, como que no logren significar y reconocer los distintos contextos en los que es necesario el uso de sus propiedades y el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas que requieran de dicho concepto.

En este sentido se propone revisar y analizar el concepto de división presente en dos libros de texto de tercer grado de básica primaria, bajo los referentes teóricos propuestos por Vergnaud (1990) sobre los campos conceptuales, específicamente sobre las estructuras multiplicativas; por Schwartz (citado por Puig & Cerdán, 1998) sobre la clasificación de los tipos de problemas con base en la naturaleza de las cantidades y por Font & Godino (2006) sobre las configuraciones epistémicas como una herramienta valiosa para el análisis de textos escolares, para finalmente generar reflexiones que den cuenta de la caracterización de las configuraciones epistémicas presentes en estos libros de texto alrededor de la división desde la teoría de los campos conceptuales.

De este modo, el trabajo se ha estructurado en V capítulos: El capítulo I contempla la presentación de la problemática y su justificación; también se mencionan algunas investigaciones relacionadas al propósito del trabajo y se exponen los objetivos. En el capítulo II se explican los referentes matemático, didáctico, cognitivo y metodológico, que fundamentan el desarrollo del trabajo. El capítulo III describe un análisis general bajo las categorías expuestas en *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas* de Arbeláez, et al. (1999) de los dos libros de texto seleccionados. El capítulo IV corresponde al desarrollo teórico en el que se hace la descripción y análisis de cada uno de los elementos de las configuraciones epistémicas de Font & Godino, teniendo en cuenta los referentes cognitivos desde Vergnaud y Schwartz, seguido del capítulo V que corresponde a las conclusiones obtenidas a partir de los objetivos y análisis mencionados. Por último se mencionan los referentes bibliográficos que soportan el desarrollo del presente trabajo.

Capítulo I. Preliminares

1. Problemática

En la década de los 80 se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos por las matemáticas modernas, dirigidas a enseñar estructuras abstractas y profundizar en el rigor lógico, no estaban dando los resultados esperados, como: el rigor de la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática formal. Esto condujo a un debate entre partidarios de la matemática moderna y los interesados en enseñar las cuatro operaciones básicas con números enteros, fraccionarios y decimales, pero a partir de actividades cercanas al contexto del estudiante.

Por lo anterior, en los años 90 se propone que la enseñanza de los diversos aspectos de las matemáticas se enfoque en sistemas y no en conjuntos, sugiriendo que inicie a través de la exploración de los sistemas concretos que ya utilizan los estudiantes, para luego dar paso a los sistemas conceptuales y así puedan desarrollar sistemas simbólicos.

La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. (MEN, 1998, p. 6)

Tomando estos antecedentes, personas e instituciones interesadas por la Educación Matemática participaron con el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en la formación de los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas, fruto de un proceso de reflexión y discusión encaminada a la búsqueda del mejoramiento de la calidad de la Educación Matemática en Colombia.

Los lineamientos curriculares para el área de matemáticas presentan unas orientaciones generales que deben ser tenidas en cuenta por docentes e instituciones para el diseño de currículos. Dentro de estas orientaciones se plantea que uno de los aspectos básicos, que ayuda al desarrollo del pensamiento numérico, es la comprensión del concepto de las operaciones.

Sin embargo, la enseñanza y el aprendizaje de estas operaciones se ha direccionado hacia la ejercitación de procedimientos, implicando que los estudiantes aprendan a desarrollar los algoritmos de forma mecánica e ignoren en cierta medida la relación existente entre dichas operaciones provocando, además, que se presenten dificultades para su conceptualización, como es el caso del concepto de división. (Barba & Calvo, 2010).

Dicho concepto, en los currículos escolares colombianos, está propuesto para ser enseñado en tercer grado de básica primaria; para ello, generalmente el docente inicia presentando la definición de los términos: dividendo, divisor, cociente y residuo, para luego proceder al esquema del algoritmo tradicional, en cualquiera de sus dos formas, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 84032 \\ - 53 \\ \hline 310 \\ - 265 \\ \hline 0453 \\ - 424 \\ \hline 0292 \\ - 265 \\ \hline 27 \end{array}$$

Gráfica 1: Algoritmo tradicional con resta. Tomado de Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética: La División. Pág. 3

$$\begin{array}{r}
 84032 \overline{) 53} \\
 \underline{53} \\
 310 \\
 \underline{1585} \\
 453 \\
 \underline{292} \\
 27
 \end{array}$$

Gráfica 2: Algoritmo tradicional sin resta. Tomado de Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética: La División. Pág. 3

Muchas veces este algoritmo provoca implicaciones negativas en los estudiantes, por ejemplo, que no logre significar y reconocer los distintos contextos en los que sea necesario hacer uso de las propiedades del concepto de división al igual que no permite desarrollar estrategias para la resolución de problemas que requieran de dicho concepto.

Para ahondar en la comprensión de las complejidades del concepto de división, que se enuncian en las estructuras multiplicativas, se toma como referencia la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990). Tal teoría plantea que el conocimiento se organiza en campos conceptuales, cuyo dominio se da a través de un extenso periodo de tiempo, de acuerdo al desarrollo cognitivo del sujeto. Entre estos campos, se encuentra el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, como el conjunto de aquellas situaciones que requieren de una multiplicación o una división. Dentro de este campo Vergnaud presenta la categoría del Isomorfismo de Medida *que consiste en una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo*; como un problema de tipo multiplicativo que involucra la división.

Así mismo, se tiene como referencia los tipos de cantidades abordados por Schwartz, quien propone un análisis basado en la distinción de la naturaleza de las cantidades que aparecen en los problemas multiplicativos. Schwartz distingue dos tipos de cantidades: las extensivas e intensivas.

Por tanto, estas categorías son objeto de búsqueda entre las situaciones problemas, presentadas en algunos libros de texto para determinar, cómo se está construyendo la noción de división.

Como ya se mencionó, los lineamientos deben ser tenidos en cuenta tanto para el diseño de currículos como para su implementación en las aulas de clase, por tanto los docentes deben estar a la vanguardia de los instrumentos de apoyo con los que cuentan para orientar sus clases, ya que esto influye en el desarrollo y en el éxito de la misma.

El libro de texto es un recurso que puede ser utilizado en un contexto escolar y extraescolar debido a la generalidad de sus usos, ya que sirve de apoyo al docente para desarrollar su práctica educativa y es un material de consulta o de refuerzo para los estudiantes. Esto ha llevado a que el libro de texto se convierta en uno de los medios más usados para la enseñanza de las matemáticas como menciona Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999), citando a Richaudeau: “(...) los manuales escolares, representan actualmente -y con mucho- el medio de enseñanza más ampliamente utilizado en el mundo y, por consiguiente, tiene notables implicaciones de naturaleza económica, pedagógica y social” (p. 43).

Lo anterior lleva a cuestionarse sobre la calidad de los libros de texto, ya que en su proceso de planeación y elaboración no solo intervienen factores de naturaleza educativa, sino que también intervienen entidades con fines lucrativos, que no tienen en cuenta los modelos de enseñanzas y las necesidades sociales, por lo cual no aportan al aprendizaje de los estudiantes, y por ende no garantiza su calidad. (Peña.1999).

Teniendo en cuenta que calidad no hace referencia solo al aspecto físico del libro, sino también a los contenidos, los modelos pedagógicos, las orientaciones filosóficas, las perspectivas de enseñanza, aprendizaje y formación entre otras y que a su vez deben estar orientados por los

Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se hace necesario entonces, hacer un análisis sobre lo que realmente se está presentando acerca de la noción de división en los libros usados como recurso principal de apoyo en las aulas de clase.

Reconociendo la importancia de los libros de texto en la práctica educativa, se presenta la noción de Configuración Epistémica planteada por Font & Godino (2006), como una forma de realizar un análisis detallado sobre un objeto matemático abordado en un libro de texto, en este caso el concepto de división. Este análisis contempla seis elementos: 1) lenguaje, que hace referencia a términos, expresiones, notaciones, gráficos, tablas entre otros en sus diversos registros de representación (escrito, oral, gestual, etc.), 2) Situaciones-problemas: Se refiere a aplicaciones extra matemáticas, tareas, ejercicios, etc. 3) Conceptos: son los introducidos mediante definiciones o descripciones, 4) Proposiciones: son enunciados sobre conceptos, axiomas, teoremas, entre otros, 5) Procedimientos: son los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, reglas, etc. 6) Argumentos: son enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Ahora bien, debido a la utilidad de los libros de texto como un recurso pedagógico por parte de los docentes a la hora de planear, organizar y desarrollar su práctica educativa en torno a un concepto matemático en este caso la división, es necesario preguntar *¿Cómo se configura el concepto de división en dos libros de texto de tercer grado de primaria, desde la teoría de los Campos Conceptuales?*

2. Justificación

La división es una operación básica de las matemáticas, por tanto su enseñanza y aprendizaje potencia el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, se hace necesario revisar y analizar cómo esta propuesta en el marco curricular, caracterizándola desde los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas para establecer la pertinencia de estudiar en los libros de texto de tercer grado, las configuraciones epistémicas acerca de la división, ya que aquellos son considerados como uno de los recursos más usados por los docentes para desarrollar su práctica educativa.

2.1. Desde las orientaciones curriculares nacionales.

Los lineamientos curriculares se diseñaron con el fin de brindar un apoyo para el mejoramiento en la calidad de la Educación Matemática y tienen en cuenta el papel del estudiante, el rol del docente y la naturaleza de los conocimientos que se han de orientar en las aulas de clase, brindando elementos para asumir los distintos enfoques de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por lo anterior, son usados como guía para la elaboración de currículos y material de apoyo en las diferentes instituciones.

Por su lado, los estándares básicos de competencias en matemáticas establecen cuáles son las competencias mínimas que los estudiantes deben desarrollar en determinado ciclo de escolaridad. Cabe resaltar que estas competencias se han establecido por lo estipulado en los lineamientos y que en su presentación conservan una coherencia vertical, es decir, entre niveles de escolaridad, y una coherencia horizontal, esto es, entre los diferentes pensamientos y sistemas estipulados en los lineamientos. Dichas competencias han de desarrollarse en cuanto a conocimientos, destrezas y habilidades, por lo cual es importante saber qué y cómo enseñar y qué y cómo evaluar.

En los lineamientos curriculares se mencionan tres aspectos importantes que no deben ignorarse para el diseño de currículos; estos son: los procesos generales, que hacen referencia a los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes en el transcurso de su aprendizaje (modelación, razonamiento, resolución de problemas, comunicación, ejercitación de procedimientos) y los conocimientos básicos que desarrollan el pensamiento matemático y que se organizan en otros pensamientos que son: el numérico, el variacional, el estocástico, el métrico y el espacial; por último, el contexto, que hace referencia al ambiente en el que los estudiantes podrían aprender matemáticas: en otras ciencias, en su vida cotidiana y en la misma matemática.

El presente trabajo se propone rastrear cómo se sitúa la división entre estos aspectos: cómo estimula el desarrollo del pensamiento matemático y los procesos generales en el estudiante y a través de qué contextos se logra significar el concepto de división, teniendo en cuenta las diferentes dificultades o problemas que se presentan a la hora de conceptualizar dicha operación.

Ahora bien, en los lineamientos se establece que desarrollar pensamiento numérico incluye comprender el sentido numérico, el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, etcétera, es decir, comprender las generalidades y uso de los números y operaciones, lo cual implica directamente que si la división es una operación básica de las matemáticas entonces esta debe ser comprendida en su totalidad.

Sin embargo el MEN (1998) en sus lineamientos curriculares plantea que existen dos tipos de problemas en torno a la división:

Los dos tipos de problemas más usuales para la división son:

a) Repartir

Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en 4 hileras iguales. ¿Cuántos debía colocar en cada hilera?

b) Agrupamiento o sustracción repetida

Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en hileras de 4. ¿Cuántas hileras podía hacer?

Los significados que los niños captan más fácilmente son aquellos que tienen que ver con una acción, como “añadir”, “quitar”, “repartir”, lo cual coincide con la idea de Piaget de que las operaciones son acciones internalizadas. (MEN, 1998, p. 33)

Estos problemas están ligados a la forma y el uso del vocabulario que se enuncia en la frase y la pregunta problema que se les hace a los estudiantes. En el *a)* que es de *repartir*, lo que se quiere es que el estudiante divida los 12 carritos en las 4 hileras, y halle que puede hacer 4 hileras de 3. En el *b)* de *agrupamiento o sustracción repetida*, podría hacer el mismo proceso de dividir, sin embargo, lo que los estudiantes posiblemente harían sería una sustracción repetida; como debe hacer grupos de 4, puede que a 12 le quite 4 para la primera hilera, luego al resultado le reste 4 carritos para la segunda hilera y le queda un último grupo de 4 para una tercera hilera.

En este sentido, Vergnaud (1990) dentro de la teoría de los campos conceptuales específicamente de la estructura multiplicativa, asume la división como parte esencial de ésta y la concibe como una relación cuaternaria en la que intervienen dos espacios de medida con cantidades de diferente naturaleza. Retomando el ejemplo anterior, los espacios de medida se representan en la cantidad de carritos y la cantidad de hileras, para las cuales existen dos cantidades discretas en cada espacio de medida. Sin embargo, la dificultad radica en el hecho de que la enseñanza de la división se centra en la ejercitación del algoritmo como un procedimiento que se torna mecánico, dejando de lado dicha relación cuaternaria en la que los estudiantes deben reconocer la existencia de la unidad, la relación vertical en cada espacio de medida y la relación horizontal entre cantidades de dichos espacios.

Ahora, en cuanto a los enunciados problema se puede decir, que los estudiantes les darán su respectiva solución de acuerdo a la forma en que éstos se planteen. Donde ellos pueden reconocer, comprender y significar el concepto de división; ya que dichas situaciones problema están inmersas en contextos de la vida cotidiana, asociando a las distintas operaciones matemáticas, una variedad de verbos o acciones que les permite decidir que algoritmo usar para responder a la pregunta del problema.

Por su parte, el pensamiento métrico se desarrolla en la medida en que los estudiantes comprenden la importancia y evolución que ha tenido la acción de medir y estimar cantidades discretas o continuas a través de la historia en diferentes contextos de la vida cotidiana, para lo cual deben hacer uso de diferentes sistemas de medidas. Sin embargo, los lineamientos curriculares estipulan que medir no es simplemente asignar cantidades numéricas, como se pretende enseñar o como se ha creído debido al poco estudio de los sistemas de medidas.

En este sentido, el pensamiento métrico debe desarrollarse desde temprana edad a través de situaciones y actividades donde las relaciones y las comparaciones entre magnitudes (más que, menos que, el doble de, el triple de, la mitad de) sean una forma de aproximarse a una conclusión correcta y donde haya necesidad de comunicar y justificar los resultados de los procesos de medición realizados.

Así, en los lineamientos se plantea que:

Los logros propuestos para los sistemas métricos van encaminados a acompañar a los estudiantes a desarrollar procesos y conceptos como los siguientes:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.

- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición. (MEN, 1998, p. 42)

Consecuentemente, se puede decir, que la división como operación básica de las matemáticas aporta al desarrollo del pensamiento métrico, ya que permite comparar y cuantificar magnitudes; a través de ésta se puede realizar equivalencias y conversiones entre las unidades de los sistemas de medida; permite la construcción de la diferencia entre unidad y patrón, y estimar magnitudes discretas y continuas.

En cuanto al pensamiento variacional, los lineamientos curriculares (1998) establecen que para su desarrollo es necesario superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados y establecer relaciones entre conceptos y procedimientos, de tal forma que se puedan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en los diferentes contextos donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

Así, la variación y el cambio se pueden tomar como ejes centrales sobre los cuales se puede organizar el currículo, ya que están inmersos en todos los campos de las ciencias y situaciones de la vida cotidiana. Permitiendo el estudio de fenómenos de variación para su posterior organización en diferentes sistemas de representación como tablas, planos cartesiano o sagital, representaciones pictóricas e icónicas, etcétera, conlleva a que haya un desarrollo próximo a conceptos y nociones

de objetos matemáticos ligados a núcleos matemáticos más avanzados como la función lineal o el estudio del cálculo.

Ahora considerando que la variación es un fenómeno que está inmerso en diferentes áreas de estudio, como en biología, física y en la misma matemática, y por ende en distintas situaciones donde se hace necesario establecer unas variables dependientes e independientes que se relacionan entre sí, y que son relevantes identificarlas con incógnitas bajo algoritmos algebraicos para un proceso de análisis en cuanto a la forma en que estas cambian.

En este sentido se reconoce la importancia de la división como una operación incluida en el tipo de algoritmos indispensables a la hora de analizar y estudiar la variación, en la medida en que esta es un caso de variación simple, por tener una incógnita que varía dependiendo de las cantidades implícitas en el algoritmo, y que además fortalece los cimientos básicos para el aprendizaje y conceptualización de lo que es la proporcionalidad directa, en el sentido en que en la estructura multiplicativa, cuando una cantidad aumenta o disminuye en un espacio de medida, ocurre lo mismo en el otro espacio de medida.

Por lo anterior, y de forma general, se reitera que los lineamientos curriculares establecen la división como una de las operaciones básicas de las matemáticas que debe enseñarse desde los diferentes contextos en que se ve involucrada para dar solución a la variedad de situaciones problemas. Para ello es necesario recurrir a distintos modelos y tipos de problemas aportados en diferentes estudios e investigaciones. Reconociendo, además, que desarrolla el pensamiento matemático desde conocimientos básicos que permite la construcción del concepto de número y el sentido de las operaciones entre ellos, la estimación, cuantificación, comparación y medición de

magnitudes, la variación y cambio de fenómenos, a través de objetos matemáticos y diferentes sistemas de representación para luego dar cuenta de ello con argumentos válidos.

Como se ha mencionado, en los estándares de competencias matemáticas se establecen las competencias mínimas que todo ciudadano debe desarrollar y que en la Educación Matemática se deben tener en cuenta para la enseñanza, aprendizaje y continua evaluación. Por lo tanto y con base en el propósito del presente trabajo, centrado en la división como operación básica de las matemáticas, es necesario identificar algunos estándares relacionados, según los pensamientos que se potencian y el ciclo de escolaridad en el cuál se ha situado.

Así, los estándares encontrados se establecen en tres pensamientos en el ciclo de primero a tercero de básica primaria.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos.

- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas

- Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). (MEN, 2006, p.35-36)

Las competencias que se deben de desarrollar, ligadas al concepto de la división y que se encuentran en los diferentes pensamientos, muestran la coherencia de lo que proponen los lineamientos para el desarrollo del pensamiento matemático en cuanto a que éste se desarrolla en la medida en que se potencian los conocimientos básicos.

2.2. Desde los libros de texto.

El libro de texto escolar es uno de los recursos didácticos más utilizados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Richaudeau citado por Arbeláez et al., 1999) ya que en éste reposan muchos de los contenidos que de manera general se han propuesto en un currículo para ser enseñados en una institución. Es común encontrar que el docente a la hora de planear, organizar y evaluar su práctica pedagógica se apoye en un texto escolar para organizar contenidos y elegir actividades. Por consiguiente, es importante que el docente al seleccionar un texto lo haga de manera autónoma, teniendo en cuenta la filosofía personal e institucional respecto a las formas de enseñar y aprender las matemáticas y no delegue ésta tarea a las editoriales que muchas veces ofrecen los libros por estrategias de venta más no por la calidad del texto.

La utilización de los libros de texto en el contexto educativo puede contribuir con aspectos que permiten un desarrollo más eficiente de una clase; por ejemplo, un texto puede permitir que un docente logre enseñar a varios alumnos al mismo tiempo, teniendo así un mejor aprovechamiento de éste. El texto también transmite la enseñanza de valores de manera explícita o implícita ya sea en lo que dice o como lo dice, en sus diseños gráficos y en las formas que propone para trabajar actividades, como el trabajo en grupo, que permite que los estudiantes se comuniquen, se colaboren, se escuchen etc.

En este sentido, el libro de texto como medio de enseñanza debe articularse con lo establecido por los referentes curriculares para garantizar un aprendizaje significativo en los estudiantes, es decir, que contribuya con el desarrollo de formar ciudadanos competentes, como se establece en los Estándares (2006), por lo que se debe tener en cuenta: “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (p. 4). Por lo tanto, el libro de texto debe proveer estos ambientes para cada una de los conceptos abordados, entre ellos el concepto de división, ya que es una de las operaciones fundamentales en matemáticas.

Por lo anterior, el texto escolar debe ser objeto de investigación acerca de los contenidos que presentan y omiten, la estructura que usa, el marco legal que los regula y los criterios utilizados por los docentes para seleccionarlos etc. En esta medida, se hace relevante que el docente como principal responsable de elegir la mejor propuesta entre los libros de texto, asuma una reflexión epistémica como medio que le permita analizar elementos tales como: conceptos, situaciones problema, procedimientos, propiedades y argumentaciones, en tanto que son elementos que se articulan para movilizar un objeto matemático; tal análisis informa de la anatomía del texto matemático. En el caso particular, este trabajo de grado se apoyará en la herramienta de análisis de textos matemáticos: las configuraciones epistémicas, elaborada por Font & Godino (2006).

El texto escolar debería ser un foco principal de investigación para la Educación Matemática, no obstante, este parece no tener mucho interés para los educadores colombianos dadas las pocas investigaciones que conciernen a libros de texto en comparación con otros aspectos de la educación. De acuerdo con Peña (1999) una de las razones que explica el desinterés por reflexionar sobre el libro de texto, es que este tema ha dejado de asumirse como un problema de naturaleza

educativa, ya que su diseño y evaluación se ha convertido en un elemento de corte industrial en la medida que son las editoriales las que en primera instancia son encargadas de la planeación y elaboración de un texto escolar al igual que las investigaciones que se realizan acerca de éste.

3. Antecedentes

A continuación se presentan tres trabajos que han sido tenidos en consideración para el desarrollo del presente trabajo. El primero es la tesis de pre-grado de las estudiantes Marlen Andrea Ospina Puentes y Jennifer Salgado Piamba, el segundo es la tesis de pre-grado de la estudiante Diana Marcela Aguirre y por último es un artículo escrito por David Barba y Cecilia Calvo.

Tesis de Pregrado “Configuraciones Epistémicas Presentes en los Libros de Tercer Grado, en Torno al Campo Conceptual Multiplicativo”

De acuerdo al propósito del presente trabajo se toma en consideración la tesis de pre-grado inscrita en la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas del programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, realizada por las estudiantes Marlen Andrea Ospina Puentes y Jennifer Salgado Piamba de la Universidad del Valle, quienes plantean que la escuela ha favorecido un único sentido y modelo del concepto de multiplicación presentándola solo como adición repetida o asociada a tablas de multiplicar. Esto propicia la memorización de hechos numéricos y además e impide ver las relaciones que tiene el concepto con otros campos y nociones.

Ospina & Salgado proponen un análisis de texto que tiene como objeto de estudio el concepto de multiplicación, este estudio se centra en las configuraciones epistémicas presentes en dos libros de texto, el cual les permite caracterizar el tipo de prácticas que se privilegian en la enseñanza de

la multiplicación y con base en ello, brindar reflexiones didácticas orientadas a la cualificación del quehacer docente.

Cabe resaltar que uno de los caminos que deja abierto este trabajo para futuras investigaciones es el análisis de configuraciones epistémicas para la unidad de división, ya que el campo conceptual multiplicativo aborda problemas que pueden ser solucionados a través de una multiplicación o una división.

Tesis de Pregrado “Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la Resolución de Problemas Aritméticos Dirigidos a Tercer Grado de Educación Básica”

Otro trabajo que se toma en consideración es la tesis de pre-grado de la estudiante Diana Marcela Aguirre, quien propone estudiar algunos aspectos relacionados a la enseñanza y aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas en el grado tercero de la educación básica. Para ella las estructuras multiplicativas tradicionalmente son vistas como aprendizaje mecánico de un algoritmo, como memorización de las tablas de multiplicar y como resolución de problemas de multiplicación y división presentes en textos escolares.

Por tanto formula una secuencia didáctica dirigida a tercer grado de educación básica sobre la resolución de problemas aritméticos a través de la aplicabilidad de las estructuras multiplicativas, y en esta identifica dificultades que presentan los estudiantes y las estrategias que usan para la solución de los problemas propuestos en la secuencia didáctica.

Artículo “La División: Mucho Más que un Algoritmo”

Teniendo en cuenta el objeto de estudio del presente trabajo, se considera el artículo realizado por David Barba y Cecilia Calvo, quienes mencionan que la división es mucho más que saber

ejecutar un algoritmo, para ellos la división es poder resolver diferentes tipo de problemas utilizando estrategias que no simplemente remiten al algoritmo tradicional de la división.

Por tanto proponen “una secuencia didáctica que, respetando el principio antes expuesto, permita desplazar el aprendizaje del algoritmo, como organizador del currículum, en favor de la construcción de estrategias de cálculo en un sentido más amplio”, ya que para ellos, la división como objeto de aprendizaje, es saber reconocer los distintos contextos en que se aplica, usar sus propiedades, identificar regularidades y sobre todo, implica desarrollar estrategias personales de resolución de los problemas escolares que se plantean asociados a esa operación.

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

Caracterizar las configuraciones epistémicas, presentes en dos libros de texto de tercer grado de básica primaria, respecto al concepto de división, desde la teoría de los campos conceptuales.

4.2. Objetivos específicos

- Rastrear en los libros de texto el tipo de lenguaje, situaciones-problemas, conceptos, argumentos, proposiciones, procedimientos, en torno al objeto de estudio.
- Analizar las situaciones-problema relacionados con la división, a la luz de las estructuras multiplicativa de Vergnaud y los tipos de cantidad propuestos por Schwartz.
- Esquematizar las relaciones entre los elementos rastreados teniendo en cuenta el isomorfismo de medidas y los tipos de cantidades.

Capítulo II. Marcos de referencia

5. Marco teórico

Como marco teórico se han establecido tres referentes concernientes al concepto de división, que sirven de ejes para el desarrollo del presente trabajo. Estos referentes son: El matemático, que muestra la división como una transformación lineal por ser parte de la estructura multiplicativa, el segundo referente es el didáctico, que da cuenta de la configuración epistémica como herramienta para el análisis de textos matemáticos y por último el referente cognitivo, donde se encuentra la caracterización del desarrollo cognitivo que se despliega entorno al objeto de estudio.

5.1.Referente matemático.

En este referente, inicialmente se va a definir la división desde la perspectiva aritmética ya que generalmente es la más usada en las instituciones educativas. Luego se menciona una breve definición desde el álgebra un poco más formal que la anterior; sin embargo, y para ser coherentes con la finalidad del presente trabajo, se tendrá en cuenta que ésta hace parte de la estructura multiplicativa, por lo tanto se va a definir desde la perspectiva lineal que permite relacionar diferentes conceptos, que a su vez no solo desarrollan el pensamiento numérico sino también otros pensamientos, como se ha mencionado en la justificación.

En aritmética, la división entre dos números naturales, llamados dividendo y divisor, consiste en calcular otro número llamado cociente, tal que multiplicado por el divisor dé como resultado el dividendo, es decir: *si $D = \text{dividendo}$, $d = \text{divisor}$ y $c = \text{cociente}$, entonces, $D = (d * c)$* . La idea de divisor es la de reparto; cuando no es posible repartir todos los elementos disponibles en una cantidad exacta se dice que no está dentro de los números naturales; sin embargo, para estos casos

se puede denotar de la siguiente forma $D = (d * c) + r$, donde $r = residuo$ o cantidad sobrante que no puede ser dividida.

Desde el álgebra la división se expresa como un algoritmo con la siguiente definición:

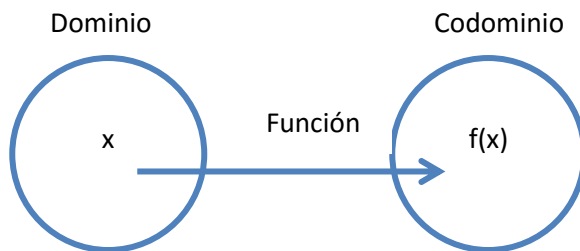
Si $a, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, entonces existe un q y r en \mathbb{Z} únicos tales que:

$$a = mq + r, 0 \leq r < |m|$$

Los números q y r se llaman cociente y residuo, respectivamente.

Cabe mencionar que las anteriores definiciones no son suficientes para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la división, debido a que no asumen la estructura multiplicativa como una relación cuaternaria sino como una relación ternaria entre divisor, cociente y residuo, dejando de lado la naturaleza de los espacios de medida a los que pertenecen estas cantidades, lo cual muestra la división como un algoritmo tradicional.

Ahora, la transformación lineal es una función que permite transformar una cantidad x que pertenece a un espacio (dominio) en otra $f(x)$ que pertenece a otro espacio (codominio). Es decir, existen dos espacios de medida para los cuales a cada elemento que pertenece al dominio le corresponde una imagen perteneciente al codominio a través de una función, como se muestra en el siguiente esquema:



Gráfica 3: Transformación lineal

Para que una transformación sea lineal, ésta debe satisfacer las siguientes propiedades:

Superposición. La imagen de la suma de dos cantidades es igual a la suma de las imágenes de dichas cantidades:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Homogeneidad. La imagen del producto de un escalar por una cantidad es igual al producto del escalar por la imagen de dicha cantidad:

- $yf(x) = f(yx)$

Como se ha mencionado anteriormente, la definición de la división como una transformación lineal es la que más aporta al propósito del trabajo debido a que sus propiedades son equivalentes a los análisis escalar y funcional propuestos por Vergnaud (1990) dentro de la categoría del isomorfismo de medida que se detallaran más adelante.

En este sentido, la transformación lineal permite identificar las relaciones entre las cantidades de los diferentes espacios de medida ya que hay una función que transforma una cantidad de un espacio de medida en otro, o una cantidad en otra en el mismo espacio de medida. Es decir, la variación es directamente proporcional, lo cual implica que a través de una función lo que ocurre en un espacio de medida también ocurre en el otro espacio de medida.

5.2.Referente didáctico.

Teniendo en cuenta el objetivo general del presente trabajo, se ha optado por tomar como referente didáctico las configuraciones epistémicas. Estas se proponen como una herramienta para analizar textos matemáticos (Font & Godino 2006) y se constituyen por la relación existente entre diferentes elementos que son relevantes para el aprendizaje de los objetos matemáticos en los estudiantes.

Para el desarrollo de esta herramienta, Font & Godino (2006), mencionan en el documento *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores* que se tuvo en cuenta que “los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida los resultados de la investigación” (p. 68). Lo que justifica la pertinencia de revisar la forma en que se presentan los objetos matemáticos en dichos manuales o textos escolares.

Luego se destaca el hecho de que en algunos países tienen en cuenta dos tipos de objetos matemáticos, los conceptos y los procedimientos, los cuales se relacionan entre sí para fortalecer el sentido que se crea de los objetos en estudio. Sin embargo, Font & Godino (2006) establecen que es necesario ampliar el tipo de elementos que intervienen en torno al aprendizaje o concepción de los objetos matemáticos; dichos elementos son: lenguaje, situaciones-problema, conceptos, procedimientos, argumentos y proposiciones.

A la relación de los elementos anteriormente nombrados es a lo que se denomina configuración epistémica, resaltando además, el hecho de que dichas configuraciones epistémicas pueden ser axiomática o empírica, de acuerdo con el tipo de concepción que se tenga sobre la naturaleza de las matemáticas y su relación con el contexto; además marcan el significado o significados derivados de sus formas de organización y presentación de los objetos matemáticos.

Dicho significado, es esencial en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos; por ello se dice que estos se ven envueltos en una dialéctica entre el pensamiento, el lenguaje matemático y las situaciones-problema. El pensamiento hace referencia a la concepción que los estudiantes tienen de un objeto matemático y como ésta se configura de acuerdo con los conocimientos que van obteniendo en la medida en que estudian cierto objeto, para lo cual se ven involucradas las situaciones-problemas, que a su vez dependen del contexto, es decir, escolar o extraescolar. Para

ello juega un papel muy importante el lenguaje usado por los referentes que sirvan de apoyo en ese proceso de enseñanza y estudio, ya sea los profesores, los manuales escolares, entre otros. En este sentido, se asume el lenguaje como un sistema de representación semiótica, distinto o paralelo al lenguaje natural, para expresar las relaciones y las operaciones en matemáticas.

Entre otros aspectos, Godino (2008) en su teoría *un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*, que es dentro de la cual emergen las configuraciones epistémicas, establece que los objetos matemáticos se clasifican en dos niveles. El primer nivel denominado *configuraciones de objetos*, conformado por los siguientes elementos, que ya han sido mencionados con anterioridad:

Lenguaje: Hace referencia a expresiones algebraicas, gráficos, tablas y lenguaje escrito.

Situaciones-problemas: Son las tareas, ejercicios o problemas contextualizados en los que se deben aplicar conocimiento matemático para su respectiva solución.

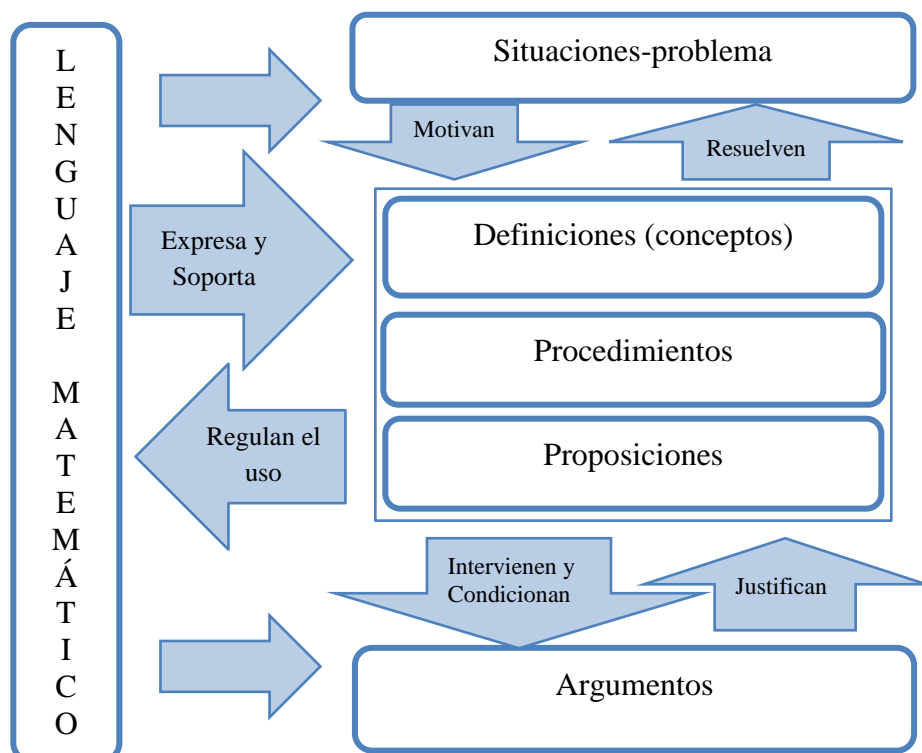
Conceptos: Proporcionados mediante definiciones o descripciones.

Proposiciones: Enunciados sobre conceptos, axiomas, teoremas, entre otros.

Procedimientos: Son las acciones de solución, tales como: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, reglas, etc.

Argumentos: Son los enunciados usados para validar y explicar las proposiciones y procedimientos.

Para una mejor comprensión de la relación existente entre dichos elementos, se presenta la siguiente gráfico:



Gráfica 4: La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. Font & Godino. Pág.69.

Con base en el esquema anterior se puede decir que una configuración epistémica muestra la anatomía de un texto en cuanto a un objeto específico, ya que permite analizar las relaciones entre los seis elementos mencionados. Cabe mencionar que el objeto de estudio en el presente trabajo es la división, y por ello se hace pertinente la información obtenida a través de las configuraciones epistémicas para identificar cómo se presenta y cómo se desarrolla para la enseñanza y aprendizaje este objeto matemático en algunos libros de texto de tercer grado de primaria, teniendo en cuenta además, otras teorías concernientes.

Por su parte, el segundo nivel es llamado *facetas de los objetos matemáticos* y se refiere a la forma en que se perciben los objetos del primer nivel. Esta forma de percepción está descrita en facetas duales: personal-institucional, ostensivo-no ostensivo, expresión-contenido, ejemplar-tipo, elemental-sistemático. Ambos niveles son complementarios y necesarios en el proceso de aprendizaje de los significados del objeto matemático estudiado.

Ahora bien, Font & Godino (2006), establecen que estas facetas se pueden considerar de la siguiente manera respectivamente:

Personal-Institucional: Los significados son personales cuando son el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas; son institucionales cuando son convencionales, es decir, son compartidos y aprendidos en el seno de una institución.

Ostensivo–No Ostensivo: Los objetos ostensivos se pueden mostrar a los demás a través del lenguaje, los no ostensivos no son perceptibles por sí mismos. Sin embargo, los ostensivos también pueden ser no ostensivos si son imaginados o pensados por el sujeto. Así mismo, los objetos no ostensivos pueden ser ostensivos cuando se representan por medio del lenguaje.

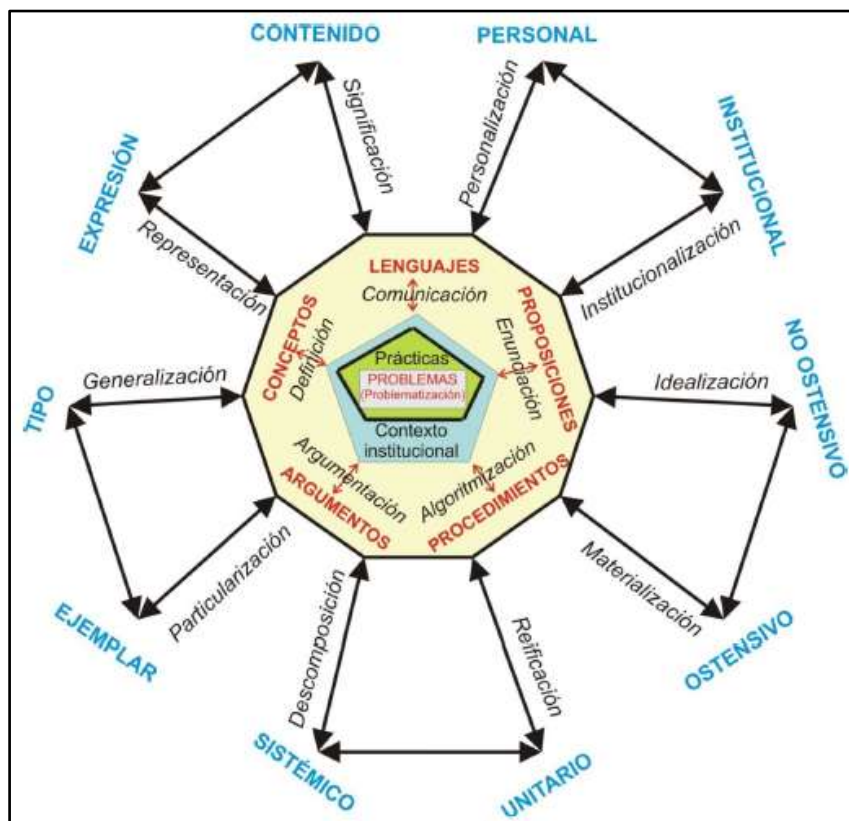
Expresión-Contenido: Se entiende como una relación que se establece por medio de funciones semióticas, entre el significante (dado en cualquier lenguaje) y su significado (objeto abstracto).

Ejemplar-Tipo: También denominados extensivos-intensivos, y se refiere a centrar la atención en la dialéctica de lo particular a lo general, ya que el estudio de las matemáticas se interesa por generalizar los problemas, las soluciones y el discurso con el que se describen y se organiza.

Elemental-Sistémico: Los elementales son los conocimientos previos o básicos; los sistémicos hacen parte de un sistema un poco más complejo que se debe “descomponer” para su estudio.

El siguiente gráfico muestra los procesos que intervienen en la práctica matemática; se ve cómo se da la relación entre los objetos del primer nivel y las facetas del segundo nivel. Dicha práctica involucra un problema contextualizado, donde el sujeto desarrolla procesos matemáticos, tales como: comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación, de los cuales emergen los objetos primarios (lenguaje, definiciones, proposiciones,

procedimientos y argumentos). Por su parte, las dualidades son complemento de los objetos primarios y además dan lugar a procesos cognitivos/ epistémicos, que son: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.



Gráfica 5: Objetos que intervienen en la práctica matemática. Tomado de configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Godino, et al. Pág. 7.

Con base en la relación expuesta de los objetos que componen las configuraciones epistémicas, se dice que los significados que se tienen de los objetos depende del marco contextual en el que esté situado el sujeto aprendiz, y que dicha relación permite distinguir un tipo de organización epistémica específica, que ya antes se ha mencionado y son de tipo *axiomática o formal* y *empírica*.

Las formales (o intramatemáticas), son aquellas que se dan en las instituciones universitarias y se basan en una concepción convencional de las matemáticas; presentan definiciones formales y

rigurosas, haciendo uso de un simbolismo matemático complejo, en situaciones o problemas no matemáticos descontextualizados. (Font & Godino, 2006).

Las empíricas (o extramatemáticas ó contextualizadas, realistas) emergen de las situaciones extramatemáticas en las que los estudiantes se ven envueltos. Presentan una visión empirista de las matemáticas, ya que se valen de las concepciones y vivencias de los estudiantes en el aprendizaje de las mismas; por ende, se enseña a través problemas contextualizados para darles sentido a las matemáticas y generar nuevas situaciones de aplicación de las matemáticas. (Font & Godino, 2006).

Este tipo de configuraciones también serán tenidas en cuenta en el desarrollo del trabajo ya que es pertinente la articulación del tipo de situaciones en las que los estudiantes aprenden con los conceptos y perspectivas que están inmersas y que se transmiten a través de los recursos didácticos, empleados por los docentes para desempeñar su labor o práctica educativa, como lo es, en el presente caso, el libro de texto.

Por lo anterior, las configuraciones epistémicas como herramienta de análisis de libros de texto matemáticos son de gran importancia, debido a que la información que brindan en cuanto a la estructura del contenido y las facetas de los objetos matemáticos en relación con las prácticas educativas, permiten realizar un análisis general que contempla aspectos como el contexto, la naturaleza de los significados de los objetos matemáticos, la organización de los elementos que lo conforman y el lenguaje usado que influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

5.3.Referente cognitivo.

5.3.1. Campos conceptuales de Vergnaud

La teoría de los campos conceptuales es una teoría psicológica que pretende proporcionar un marco referencial para el estudio del desarrollo cognitivo del sujeto en situación. Para Vergnaud (citado por Moreira, 2002) el conocimiento se organiza en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencias prácticas, madurez y aprendizaje.

Aunque esta teoría se interese por los procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra, no es propia de las matemáticas, ya que puede ser usada en otras ciencias como física, biología, historia etc., en las que existen también campos conceptuales que no pueden ser enseñados de forma inmediata o por conceptos aislados, sino que requieren de un desarrollo progresivo de dicho campo. (Vergnaud citado por Moreira, 2002).

En esta teoría, Vergnaud presenta tres argumentos relevantes que lo llevaron al concepto de campo conceptual: 1) un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones; 2) una situación no se analiza con un solo concepto; 3) la construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto o de todos los aspectos de una situación es un proceso que se extiende a lo largo de varios años, con analogías y mal entendidos entre situaciones, entre conceptos, entre procedimientos, entre significantes.

En este sentido, Vergnaud (citado por Moreira, 2002) concibe como campo conceptual: ‘‘Un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras,

contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición'' (p.2).

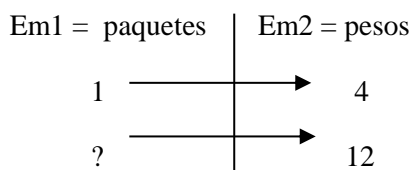
Así, un campo conceptual abarca todo un conjunto de situaciones, conceptos, teoremas, procedimientos etc., que se articulan para movilizar un conocimiento, al cual no se llega de forma inmediata, ya que requiere de un tiempo no determinado en el que el estudiante va a generar esquemas y concepciones específicas que serán útil para dominar el campo conceptual.

De este modo, la teoría de los campos conceptuales, además del propio concepto de *campo conceptual*, aborda otros conceptos claves tales como: 1) *los conceptos*, que se definen por tres conjuntos: el primero es un conjunto de diferentes situaciones que dan sentido al concepto y constituyen el referente de este, el segundo es un conjunto de invariantes operatorios como propiedades, relaciones, teoremas, axiomas y conceptos-en-acción de los que dispone un sujeto, para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto y son los que definen el significado del concepto, y el tercero es un conjunto de representaciones simbólicas como lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc., que pueden ser usadas para exteriorizar y representar los invariantes de los que dispone el sujeto para afrontar la situación, estos conjuntos definen el significante del concepto, (Vergnaud, 1990, p. 21). 2) *las situaciones* son las tareas, ejercicio, situaciones problema, y actividades, para las cuales el sujeto dispone de un repertorio de competencias necesarias para su desarrollo, 3) *los esquemas* son la organización invariante de los comportamientos y conocimientos que evoca un sujeto ante una situación, por tanto son los esquemas los que dan sentido a una situación, 4) *los invariantes operatorios* son los conocimientos contenidos en los esquemas como: los conceptos en acción y teoremas en acción, que constituyen la parte conceptual de los esquemas. (Vergnaud, 1990, p. 4).

Ahora bien, Vergnaud (1990) define al campo conceptual de las estructuras multiplicativas como el conjunto de aquellas situaciones que pueden ser analizadas, como problemas de proporciones simples y múltiples, para los cuales se requiere del uso de una multiplicación, una división o una combinación de estas operaciones, y que además en dichas situaciones intervengan conceptos como: función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división. Además identifica tres clases de problemas dentro de la estructura multiplicativa, tales como el isomorfismo de medida, el producto de medida y la proporción múltiple. En esta propuesta de trabajo se estudia la división bajo la categoría del isomorfismo de medida.

El isomorfismo de medida: establece la división como una relación entre cuatro cantidades que involucran dos espacios de medida de distinta naturaleza, es decir que dos de las cantidades pertenecen a un espacio de medida y el resto son de otro tipo; en esta categoría se toma la unidad como base para la razón. A manera de ejemplo se presenta así: “ Pedro tiene 12 pesos y quiere comprar algunos paquetes de caramelo que cuestan 4 pesos cada paquete. ¿Cuántos paquetes puede comprar?” (Vergnaud, 1991, p.4).

Espacio de medida 1, (Em1).



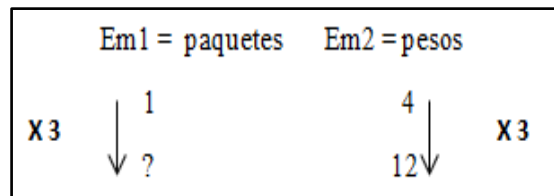
Espacio de medida 2, (Em2)

Gráfica 6: Isomorfismo de medida. Vergnaud.

En el ejemplo anterior encontramos las cantidades 1 y ? que son discretas y pertenecen al mismo espacio de medida (paquetes) y las cantidades 4 y 12 que también son cantidades discretas pero que pertenecen a otro espacio de medida (pesos), por tanto, para dar solución a la situación problema se divide 12 pesos entre 4 para encontrar ? paquetes, así la división es una función inversa

de la función directa (x4 pesos/paquetes), que hace pasar de la unidad al valor unitario. (Vergnaud, 1991). Dada la relación entre estas cuatro cantidades Vergnaud plantea dos análisis diferentes: análisis vertical y análisis horizontal.

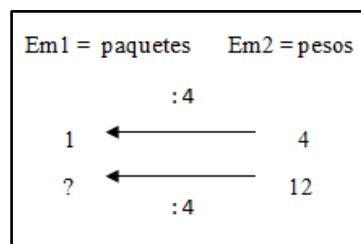
El análisis vertical (escalar): se centra en que existe un operador escalar dentro de cada espacio de medida que aumenta o disminuye las cantidades (entre 1 y ? ó 4 y 12).



Gráfica 7: Análisis vertical. Vergnaud.

Si multiplicamos por el escalar 3 encontramos que Pedro puede comprar 3 paquetes con los 12 pesos.

El análisis horizontal (función): se centra en que existe un operador función que hace pasar de un espacio de medida a otro (Em1 a Em2) y que mantiene una razón constante (entre 1 y ? y 4 y 12, respectivamente).



Gráfica 8: Análisis Horizontal. Vergnaud.

Si dividimos por el operador función :4 encontramos que Pedro puede comprar 3 paquetes con los 12 pesos.

De acuerdo a lo anterior, el isomorfismo de medida se puede ver como una transformación lineal, en el sentido que intervienen dos espacios de medida que se transforman de manera idéntica

a través de una función lineal. Esto hace que a cada cantidad del segundo espacio de medida le corresponde una cantidad del primer espacio de medida. Por tanto, la división como un isomorfismo de medida es un caso de proporcionalidad directa, ya que cuando una cantidad aumenta o disminuye en un espacio de medida, ocurre lo mismo en el otro espacio de medida.

5.3.2. Tipos de cantidades desde la perspectiva de Schwartz

Schwartz (citado por Puig & Cerdán, 1988) propone un análisis basado en la distinción de la naturaleza de las cantidades que aparecen en los problemas multiplicativos. La primera distinción hace referencia a las *cantidades extensivas (E)*: que expresan la extensión de una entidad o dimensión por ejemplo 5 sillas, 2.3 kg; estas cantidades se refieren a un conjunto, montón o trozo de esas entidades o dimensiones (sillas y kilogramos), además la suma de estas cantidades no altera ni cambia la entidad o dimensión; es decir, si se suma 2.3 kg + 5.3 kg se tendrá el resultado en kilogramos (7.6 kg).

La segunda distinción son las *cantidades intensivas (I)*: son unidades compuestas que se forman por el cociente de dos cantidades extensivas que describen un aspecto interior de una entidad o dimensión, por ejemplo las razones como: velocidad (m/s), (km/h), litros por botella, ‘estudiantes por profesor’, ‘precio unitario’.

Schwartz de acuerdo a las cantidades (E) e (I), implicadas en los problemas multiplicativos, clasifica tres tipos de problemas entre dichas cantidades:

1. *Problemas con estructura $E \times I = E$ e $I \times E = E$* : son los problemas en los que hay una cantidad intensiva que se multiplica con una cantidad extensiva generando como resultado una cantidad extensiva. En la división adopta dos formatos: *Partitivo* cuando la incógnita está en la cantidad

intensiva y responde a la fórmula $? \times E = E'$, por ejemplo, “*María tiene algunas galletas. Ana tiene 8 galletas, ella tiene dos veces más galletas que María. ¿Cuántas galletas tiene María?*” y de *Medida* cuando la incógnita está en la cantidad extensiva, en otras palabras, responde a la fórmula: $I \times ? = E'$, por ejemplo “*María tiene 4 galletas, Ana tiene 8 galletas. ¿Cuántas veces más tiene Ana las galletas de María?*” (Caballero, 2005).

2. *Problemas con estructura $E \times E' = E''$* : Corresponde a los problemas en los que se multiplican dos cantidades extensivas dando como producto otra cantidad extensiva diferente de las otras dos. En la división E/E es una partición, porque se pregunta por el tamaño de cada parte, por ejemplo “*Juana tiene 35 manzanas para repartirlas entre 5 compañeros. ¿Cuántas manzanas le corresponde a cada compañero?*” y la división E/I es una cuotición porque se pregunta por el número de partes; por ejemplo “*Juana tiene 35 manzanas para repartirlas con sus compañeros, a cada uno le correspondió 5 manzanas ¿Cuántos compañeros tiene Juan?*”
3. *Problemas con estructura $I \times I = I'$* : En estos problemas dos cantidades intensivas son multiplicadas para dar como resultado una tercera cantidad intensiva. En los problemas de división se resuelve con la operación I/I , por ejemplo, “*Un grifo echa a lo largo del día 80 litros, si echa a razón de 20 litros a la hora. ¿Cuántas horas habrá tardado en echar los 80 litros?*” (Caballero, 2005).

La clasificación de los tipos de problema presentados por Vergnaud y por Schwartz es el referentes que se tendrá en cuenta para la selección y el análisis de las situaciones - problemas que se pretenden encontrar en los dos libros de texto escogidos como objeto de estudio, ya que permite describir la estructura de los problemas multiplicativos en función de la relación cuaternaria que es necesaria para la conceptualización de la división.

5.4. Referente metodológico.

El diseño de este trabajo de grado siguió la modalidad de monografía, ya que se presenta un escrito sobre el concepto de división, en el que se tuvo en cuenta diferentes teorías que brindaron elementos para hacer una caracterización del concepto abordado. Para dicha caracterización se tomó la metodología de investigación cualitativa, donde *“se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio”*. (Martínez P. 2006). Es decir, con esta metodología se estudia intensivamente un sujeto o situación únicos; permite comprender a profundidad lo estudiado y sirve para planear posteriormente investigaciones más extensas, aunque no sirve para hacer generalizaciones.

Este ejercicio de investigación tiene el enfoque cualitativo, puesto que se preocupa por el contexto de los acontecimientos u objetos estudiados, desarrollando procesos en términos descriptivos e interpretando acciones, lenguajes, etc., para situarlos en una correlación con un contexto social más amplio. Es decir, es una investigación cualitativa interpretativa, y por tal razón no se asignan valores numéricos a sus observaciones e indagaciones, sino que se registran sus datos en el lenguaje de los sujetos.

Ahora bien, para el desarrollo del proyecto fue necesario plantear y definir algunas fases que fueron primordiales para cumplir con el propósito del trabajo. Tales fases son:

Fase 1: En esta fase se dio a conocer la problemática y la pertinencia del proyecto para la Educación Matemática, además de plantear los objetivos y determinar el marco referencial que sirvió de base para el desarrollo del trabajo. Por último se hizo la selección de dos libros de texto de grado tercero de primaria que fueron objeto de estudio. Para ello se tuvo en cuenta la plataforma virtual de Colombia Aprende que ofrece gratuitamente el Ministerio de Educación Nacional.

Esta plataforma es considerada por la UNESCO como uno de los tres mejores Portales de América Latina y el Caribe. Brinda un espacio a la comunidad educativa para fortalecer el mejoramiento de la educación colombiana, ya que a través de este portal es posible acceder a recursos, productos y servicios que son inherentes al proceso educativo.

Los estudiantes pueden encontrar información relacionada con las pruebas del Saber 11°, las pruebas Saber Pro y los créditos educativos, además de sacar provecho de las herramientas y recursos necesarios para la investigación y desarrollo de sus tareas. Así mismo, los investigadores en educación pueden hacer uso de productos e información que beneficie el desarrollo y adquisición de sus conocimientos. Entre tanto, para las familias el portal proporciona herramientas para la búsqueda de colegio e incentivan la educación desde el hogar a través de actividades en familia.

De acuerdo a los beneficios y servicios que brinda el Portal: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html> consideramos que es una fuente confiable para ser tomada como referencia en el momento de seleccionar los dos libros de texto a analizar, *ZonActiva Matemáticas 3* de la editorial Norma y *Competencias Matemáticas 3* de la Editorial Educar, como dos de los más consultados en dicha plataforma.

Fase 2: Esta fase se desarrolló a partir del análisis general de los dos libros de texto, para lo cual se tuvieron en cuenta las categorías expuestas en *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas* de Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999) con respecto a organización del contenido, diagramación y lenguaje empleado en la obra.

Posteriormente se rastrearon en los apartados concernientes al concepto de división que presenta cada uno de los libros de texto seleccionados, los seis elementos que se establecen en las

configuraciones epistémicas, como lo son: el tipo de lenguaje, situaciones-problemas, conceptos, argumentos, proposiciones y procedimientos. Para el rastreo de dichos elementos, se tuvieron en cuenta las especificidades de cada uno de ellos, descritos en el referente didáctico.

Con base en las estructuras multiplicativas propuestas por Vergnaud y los tipos de cantidades de Schwartz, contemplados en el referente cognitivo, se procedió a analizar cada una de las situaciones-problema encontradas, esto, bajo la categoría del isomorfismo de medida y la naturaleza intensiva o extensiva de las cantidades.

Fase 3: En esta fase se usó el esquema que proponen Font & Godino (2006) para la configuración epistémica, presentado en la *gráfica 4* que condensa la información proveniente de la descripción de los seis elementos. Este esquema evidencia cómo se articulan dichos elementos para movilizar el concepto de división. Además, permite realizar las reflexiones pertinentes que dan cuenta de la caracterización de las configuraciones epistémicas presentes en algunos libros de texto de tercer grado de primaria alrededor de la división desde la teoría de los campos conceptuales.

Capítulo III. Análisis general de los libros de texto

Los libros de texto son el recurso didáctico más usado en las instituciones educativas; los saberes matemáticos que en ellos se contemplan en tanto sus elementos teóricos y pedagógicos, además de su diseño están regidos bajo los parámetros establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. Ello los hace un blanco fácil y necesario para analizar su organización y contenidos respecto a la división como operación básica de las matemáticas.

Por tanto, se presenta la descripción general de los dos libros de tercer grado de primaria que es el nivel donde según los Estándares Básicos de Competencias se debe situar la división. Dichos libros fueron seleccionados teniendo en cuenta el catálogo de la plataforma virtual de Colombia Aprende.

Los libros que se han seleccionado y que se analizan teniendo en cuenta las categorías expuestas en *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas* de Arbeláez, et al. (1999) con respecto a organización del contenido, diagramación y lenguaje empleado en la obra, son:

- ZonActiva Matemática 3
- Competencias Matemáticas 3

6. Libro: ZonActiva Matemática 3

Autores:

Ana María Vega Reyes

Luz Helena Silva Calderón

Luisa Fernanda Nivia Romero

Cristina Fernanda Mejía Fonseca

Luis Eduardo Guzmán Pineda

Diana Carolina Baquero Guevara

Sandra Ortiz Peña

Grupo Editorial:

Norma S.A.

Bogotá, D.C., Colombia

Copyright © 2011

ISBN del libro: 978-958-45-2626-4

Lenguaje escrito:

El libro presenta un vocabulario claro y adecuado al lector; el tamaño, el color y el estilo de letra es legible; los enunciados son precisos y no se extienden; se hace uso de terminología técnica acorde al grado de escolaridad. Éste lenguaje escrito se puede ver cuando se presentan las situaciones problema, cuando se enuncian los ejercicios, ejemplos (*ver gráfica 9*), además se acompaña de un lenguaje simbólico como números y signos matemáticos para complementar el enunciado.

En una torre de 12 pisos se instalan 168 ventanas en total. Si en cada piso se instala el mismo número de ventanas, ¿cuál es ese número?
Como se hace un reparto en partes iguales podemos resolver la situación con la división $168 \div 12$.

168 | 12
-12 | 14

48 |
-48 |

0

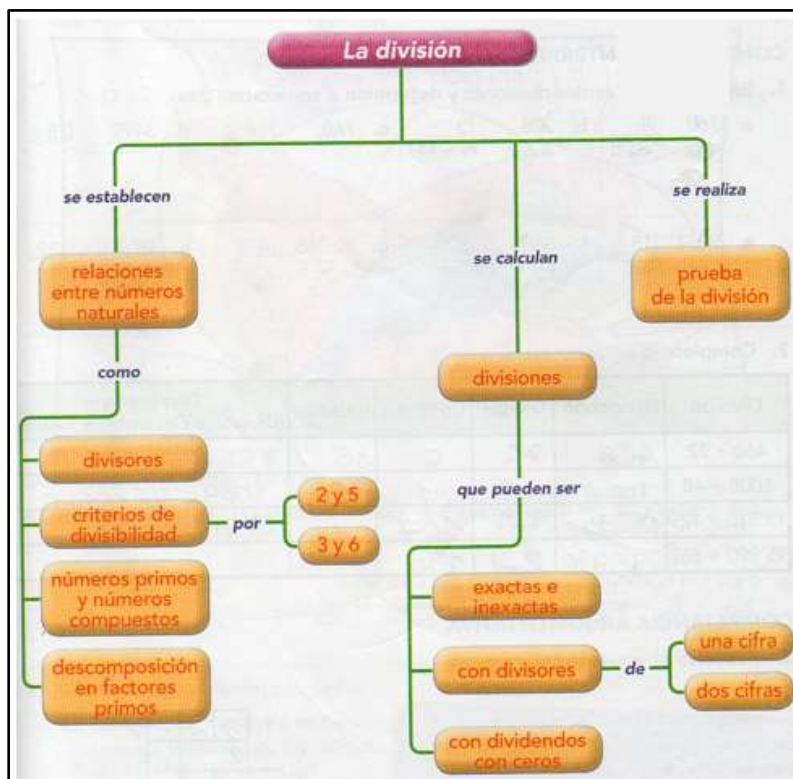
Separamos dos cifras en el dividendo, puesto que hay dos cifras en el divisor. 12 entre 16 cabe 1 vez.
Multiplicamos $1 \times 12 = 12$ y efectuamos $16 - 12 = 4$.
Bajemos la siguiente cifra: 8.
Ahora, 12 entre 48 cabe exactamente 4 veces. Escribimos 4 en el cociente.
Multiplicamos $12 \times 4 = 48$ y efectuamos $48 - 48 = 0$.

Gráfica 9: Lenguaje escrito. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124

Por otra parte cabe resaltar que el libro presenta recuadros de colores que contienen enunciados cortos que sirven de apoyo para la comprensión de las actividades propuestas.

Lenguaje gráfico:

El lenguaje gráfico del libro contempla fotografías, mapas, imágenes, tablas, figuras y diagramas que tienen tamaño, color y forma adecuados al propósito que sirven (*ver gráfico 10*). En este sentido, el lenguaje gráfico es complemento del lenguaje escrito ya que permite una mayor comprensión y contextualización de lo que se presenta en los enunciados, además algunos de ellos sirven de ayuda para la solución de actividades.



Gráfica 10: Lenguaje gráfico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 141

Contenido de la obra:

El contenido del libro está organizado en 8 unidades, en las cuales se distribuyen cuatro de los conocimientos matemáticos, como se muestra a continuación:

| UNIDAD | TEMA | CONOCIMIENTO BÁSICO |
|--------|-----------------------------|-----------------------|
| 1 | Conjuntos | Pensamiento numérico |
| 2 | Números hasta 9 999 999 | Pensamiento numérico |
| 3 | La multiplicación | Pensamiento numérico |
| 4 | Geometría | Pensamiento espacial |
| 5 | La división | Pensamiento numérico |
| 6 | Medición | Pensamiento métrico |
| 7 | Iniciación a las fracciones | Pensamiento numérico |
| 8 | Estadística | Pensamiento aleatorio |

Gráfica 11: Contenido de la obra. ZonActiva Matemática 3

Al inicio de cada unidad se presentan cuatro recuadros con su respectivo título y descripción. Tres de ellos tienen como título uno de los procesos generales, tales como: *Comunicación*, *Razonamiento*, *Resolución de Problemas* y el cuarto recuadro se titula *Conexiones*, pero su descripción hace referencia al proceso de modelar. También presentan una situación contextualizada que busca que el estudiante se motive y se prepare para el nuevo conocimiento que va a desarrollar; a este espacio se le denomina ¡Anímate! (*ver gráfica 12*).

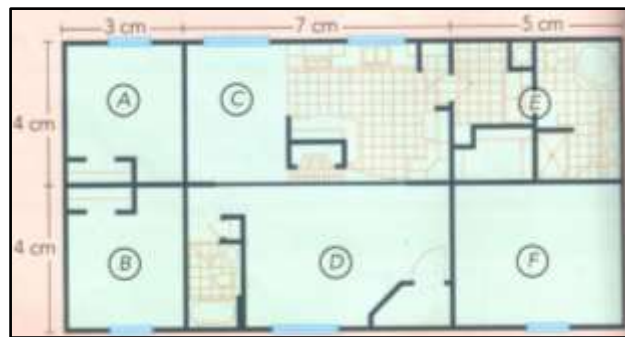


Gráfica 12: Contenido de la obra. Anímate. ZonActiva Matemática 3. Pág. 119

A lo largo del libro se presentan diferentes recuadros de diferentes colores, algunos denominados *aprendo más*, que son ayudas para comprender algún tema específico, *conexiones con ciencias sociales*, que brindan información sobre la relación entre el tema tratado y las ciencias sociales, etc. También se presentan algunas secciones llamada *hagamos click* con el fin de vincular la aplicación de las Tecnologías de la Información y Comunicación a los desarrollo de las matemáticas, *ciudadanía y paz* que busca promover valores y actitudes de convivencia, *evalúo mis competencias* que se presenta al final de cada unidad y permite conocer el desarrollo de los conocimientos adquiridos, y *prueba saber*, espacio que ofrece actividades orientadas a preparar a los estudiantes para las pruebas saber.

Tratamiento pedagógico:

El libro promueve una pedagogía activa; para introducir un tema hace uso de una situación problema que permite que el estudiante explore, investigue, analice y construya su propio conocimiento (*ver gráfica 13*). Antes de presentar las actividades a resolver, ofrece ejemplos con su respectiva solución.



Gráfica 13: Tratamiento pedagógico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 154

Además al final de cada unidad se da un espacio denominado *mi creación* que permite que el estudiante desarrolle su imaginación y creatividad, y entre *evalúo mis competencias* hay un espacio de *autoevaluación*, para que tome una posición crítica frente a sus conocimientos (*ver gráfica 14*).

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios afianzo y refuerzo los diferentes niveles de competencia que he trabajado en esta unidad.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA

1. Efectúo las siguientes divisiones y determino si son exactas o no.

a. $168 \overline{) 8}$ b. $208 \overline{) 2}$ c. $768 \overline{) 16}$ d. $3499 \overline{) 28}$

e. $9234 \overline{) 18}$ f. $8688 \overline{) 320}$ g. $42368 \overline{) 411}$ h. $98898 \overline{) 132}$

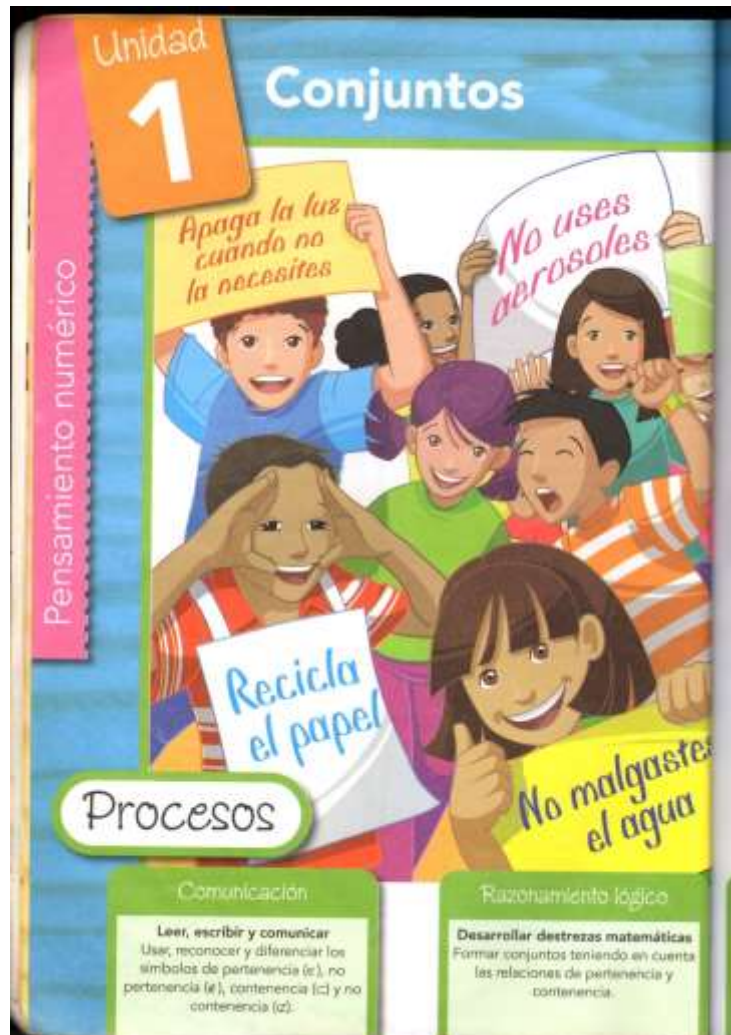
2. Completo la siguiente tabla.

| División | Dividendo | Divisor | Cociente | Residuo | Dividendo = (Divisor × Cociente) + Residuo |
|------------------|-----------|---------|----------|---------|---|
| $468 \div 72$ | 468 | 72 | 6 | 36 | $468 = 72 \times 6 + 36$ |
| $1008 \div 48$ | 1008 | 48 | 21 | 0 | $1008 = 48 \times 21 + 0$ |
| $13810 \div 129$ | 13810 | 129 | 107 | 7 | $13810 = 129 \times 107 + 7$ |
| $95990 \div 662$ | 95990 | 331 | 145 | 0 | $95990 = 331 \times 145 + 0$ |

Gráfica 14: Tratamiento pedagógico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 142

Relación con el currículo:

De acuerdo a lo estipulado por el Ministerio de Educación Nacional, el libro se ajusta a sus parámetros, ya que en su organización tiene en cuenta algunos de los pensamientos matemáticos, además las actividades y ejercicios se clasifican de acuerdo con el proceso que desarrollan (*ver gráfica 15*), aunque en su mayoría, el libro tiende a potenciar la resolución de problemas. Sin embargo, cabe resaltar que para cada tema se propone un logro a alcanzar, lo cual no es coherente con las nuevas directrices curriculares.



Gráfica 15: Relación con el currículo. ZonActiva Matemática 3. Pág. 10

Valores que transmite:

Los valores que el texto transmite son el trabajo en equipo, el respeto, el dialogo, la convivencia, la participación, la utilización adecuada de los recursos naturales (*ver gráfica 16*), el pensamiento analítico, creativo y crítico, estos se pueden evidenciar en las actividades propuestas en la sección de *ciudadanía y paz*, en los *ánimate* y en algunas actividades.

Ciudadanía y paz

Clasificación de las basuras

Me reúno con mis compañeros y formamos grupos con el fin de identificar y clasificar las basuras que se generan en el colegio, los sitios donde se encuentran y las acciones que debemos realizar para evitar la contaminación.

Las basuras pueden clasificarse en:

- Los desechos orgánicos que provienen de la materia viva e incluyen residuos de alimentos, papel y cartón.
- Los desechos inorgánicos que provienen de la materia inerte como el vidrio, plásticos, metales y otros materiales.

La basura también puede clasificarse según el tiempo que tarda en degradarse:

- Los desechos biodegradables se descomponen en forma natural en un tiempo relativamente corto. Por ejemplo, los desechos orgánicos como los alimentos, tardan pocos días en descomponerse.
- Los desechos no biodegradables como el vidrio, el plástico, las latas, etcétera, tardan mucho tiempo en hacerlo.

Participo con mis profesores, compañeros y compañeras en proyectos colectivos orientados al bien común y a la solidaridad.



Etapas del proyecto

1. **Conformo** grupos de trabajo.
2. **Calculamos** el perímetro y el área donde hay mayor contaminación por basuras.
3. **Clasificamos** basuras.

| Desechos orgánicos | Desechos inorgánicos |
|--------------------|----------------------|
| | |

| Desechos biodegradables | Desechos no biodegradables |
|-------------------------|----------------------------|
| | |

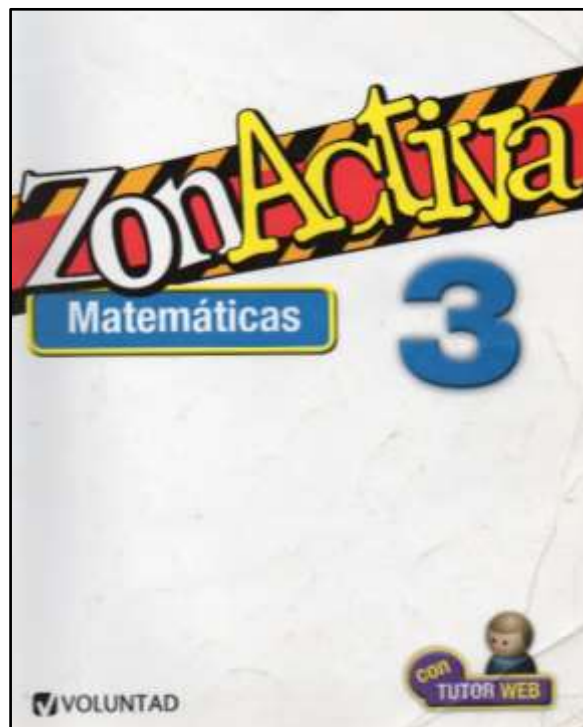
4. Algunas acciones para reducir la contaminación por basuras en el colegio pueden ser la elaboración de carteles informativos de clasificación de basuras.



Gráfica 16: Valores que transmite. ZonActiva Matemática 3. Pág. 165

Aspectos físicos del libro:

El tipo y tamaño de letra es legible, los títulos y subtítulos tienen color y tamaño diferente, los gráficos tienen colores llamativos. Las páginas están numeradas desde la 11 hasta la página 207. El libro está seccionado en 8 unidades de acuerdo a los pensamientos matemáticos para los cuales se le ha asignado un color diferente a cada uno (rosado, rojo, verde y azul).



Gráfica 17: Aspectos físicos del libro. ZonActiva Matemática 3

7. Libro: Competencias Matemáticas 3

Autores:

Alix Aleida Garavito Ramírez

William Hernando Dueñas P.

Carlos Orlando Ramírez Méndez.

Grupo Editorial

Educar S.A

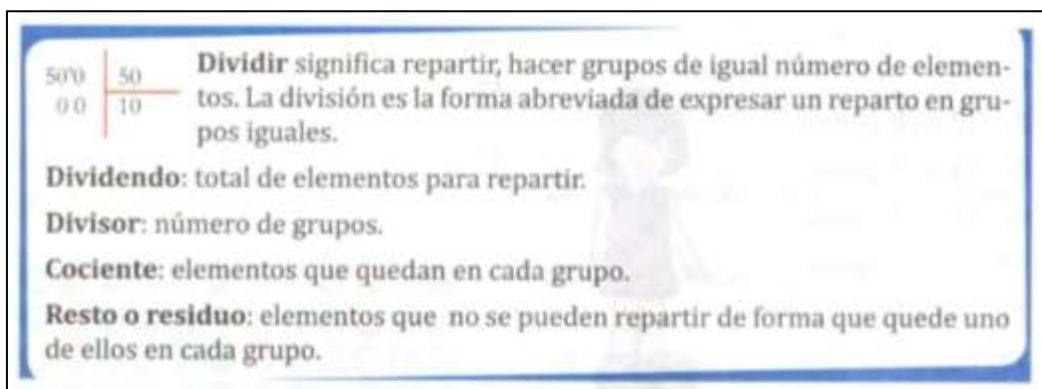
Bogotá, D.C., Colombia

Copyright © 2010

ISBN del libro: 978-958-05-1263-9

Lenguaje escrito:

El lenguaje escrito que presenta el libro, está dado a través de un vocabulario cercano a la edad de los estudiantes, de acuerdo al grado de escolaridad que va dirigido. Los enunciados, situaciones-problemas, definiciones etc., son claros y de una extensión adecuada que puede permitir que el estudiante comprenda la intención de cada uno de ellos (*ver gráfica 18*).



Gráfica 18: Lenguaje escrito. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75

El libro también presenta términos y símbolos matemáticos, acordes al grado tercero de básica primaria y que por supuesto sirven de apoyo para que el estudiante comprenda los diferentes conceptos a enseñar desde una perspectiva no tan formal, pero sí más técnica.

Lenguaje gráfico:

El lenguaje gráfico del libro se presenta a través de fotografías, esquemas, imágenes, tablas, figuras y diagramas; su tamaño, color y forma son adecuados y pertinentes, en tanto sirven de complemento al lenguaje escrito, permitiendo una contextualización e ilustración llamativa de lo que se presenta en los enunciados y que seguramente pueden servir de motivación para los estudiantes.



Gráfica 19: Lenguaje gráfico. Competencias Matemáticas 3. Pág. 80

Contenido de la obra:

El contenido del libro está organizado en 4 unidades de distintos colores:

Unidad 1: Los números en los supermercados. (Color: morado)

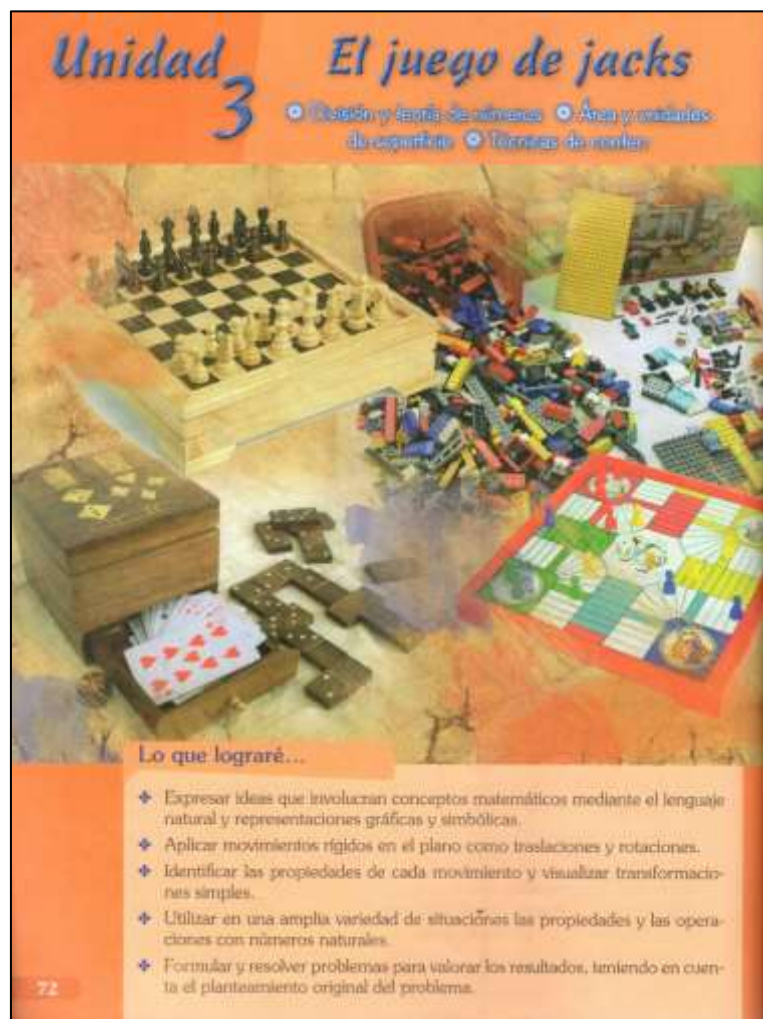
Unidad 2: Diseño y multiplicación. (Color: azul)

Unidad 3: El juego de Jacks (Color: naranja)

Unidad 4: Matemáticas en la cocina (Color: verde)

Cada unidad incluye tres secciones que también se diferencian por el color: la primera sección que es de color verde, hace referencia al pensamiento numérico y variacional, la segunda de color naranja, hace referencia al pensamiento métrico y espacial, y la última que es morada, al pensamiento aleatorio.

Al inicio de cada unidad se muestra una imagen o foto relacionada con el nombre de ésta. Luego, en la parte superior se presentan los tópicos alrededor de los cuales se van a enseñar los temas y en la parte inferior se marca un recuadro subtulado *Lo que lograré...*, en éste, se presentan los logros que se supone el estudiante debe alcanzar (*ver gráfica 29*).



Gráfica 20: Contenido de la obra. Competencias Matemáticas 3. Pág. 72

Después de definir algunos términos y presentar un tema particular; el estudiante debe desarrollar unos ejercicios, problemas y preguntas que se encuentran en una sección denominada *practico lo que sé...*, y que está dividida en otras tres secciones más, nombradas: Comunicación, solución de problemas y razonamiento.

Al terminar cada unidad, se encuentra una sección titulada *Evalúo mi saber*, en la cual se propone cierta cantidad de situaciones-problema que deben ser resueltas por los estudiantes para que se autoevalúen en cuanto a los saberes o conocimientos que se supone han aprendido. Cabe mencionar que en la unidad 2 *Diseño y multiplicación* y en la unidad 4 *Matemáticas en la cocina*, antes de dicha sección se encuentra otra sección llamada *Matemática ciudadana*, en la que también se le presenta al estudiante una o varias situaciones-problema a partir de las cuales se les hace diversas preguntas para ser respondidas de forma subjetiva; es decir, no contiene un concepto netamente matemático.

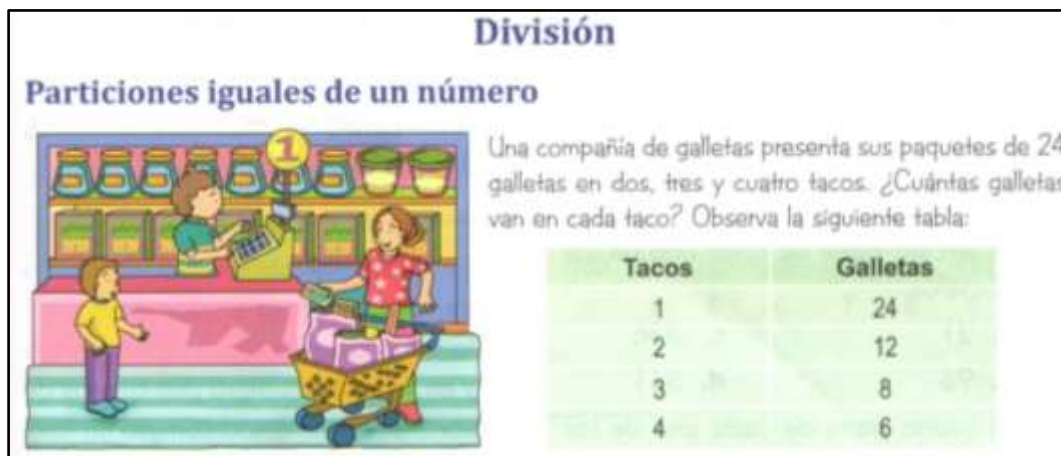
Además, al finalizar la unidad 4 se encuentra una tercera sección, denominada *Matemáticas recreativas*, donde se da información e instrucciones para que los estudiantes puedan construir material manipulativo que les permita tener mayor interacción con algunos conceptos matemáticos. Así mismo, tiene un apartado titulado *convivencia y paz*, donde hay un texto corto acerca de algunos aspectos que perjudican en cierta medida el medio ambiente y la convivencia social, a partir del cual se elaboran algunas cuestiones para que sean motivo de reflexión para los estudiantes.

Por último, el libro muestra la bibliografía y algunas páginas web que han sido de apoyo para el diseño y elaboración de este mismo.

Tratamiento pedagógico:

El libro promueve una pedagogía pasiva, en el sentido en que primero presenta una situación-problema con su solución, lo cual no permite que el estudiante explore y ponga en juego sus conocimientos (*ver gráfica 21*). Luego, se orienta el tema determinado y se da un espacio para que el estudiante desarrolle ciertos ejercicios y situaciones-problema; sin embargo, no se le brindan

ejemplos en los que el estudiante pueda observar y comprender de forma más significativa, como podría ser la solución de los problemas a resolver.



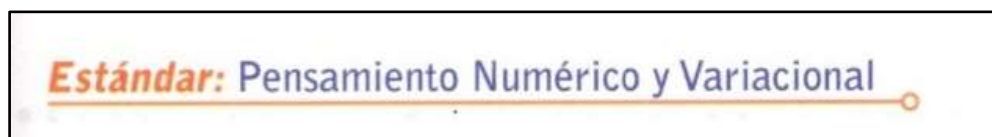
Gráfica 21: Tratamiento pedagógico. Competencias Matemáticas 3. Pág. 73

No obstante, las situaciones-problema son contextualizadas y cuentan con una ilustración gráfica que ayuda a la comprensión de los enunciados. Cabe mencionar que en la sección de *Matemáticas recreativas*, el estudiante puede explorar abiertamente otras opciones para conceptualizar conceptos a través de material manipulativo.

Relación con el currículo:

De acuerdo en los referentes curriculares, se podría decir que el libro tiene en cuenta, en cierta medida, algunos criterios establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. Esto, en cuanto a los conocimientos básicos que los estudiantes deben potenciar. Sin embargo, no es coherente ya que no habla de competencias a desarrollar sino de logros a alcanzar. Además, en el encabezado de las páginas aparece, por ejemplo: *Estándar: Pensamiento Métrico y Espacial*, lo cual es incorrecto, porque un pensamiento no es un estándar (*ver gráfica 22*) y en el pie de página, aparece

Descriptor de desempeño, seguido de un logro, lo cual tampoco es coherente si se está hablando de competencias.

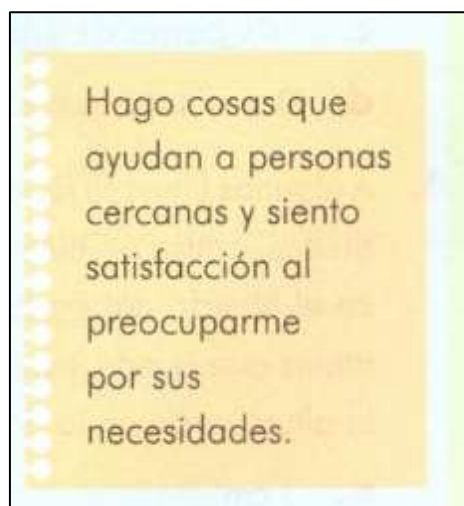


Gráfica 22: Relación con el currículo. Competencias Matemáticas 3. Pág. 73

Ahora bien, aunque la sección *practico lo que sé...* se divida en tres apartados, con nombres *comunicación*, *solución de problemas* y *razonamiento*, es pertinente resaltar que *solución de problemas* no es un proceso general como se establece en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aunque *comunicación* y *razonamiento* sí lo son.

Valores que transmite:

Las actividades planteadas a lo largo del libro no promueven valores como el diálogo, el trabajo en equipo, y por tanto el respeto o la tolerancia, ya que las consignas están escritas de tal forma que el estudiante las desarrolle de forma individual (*ver gráfica 23*).

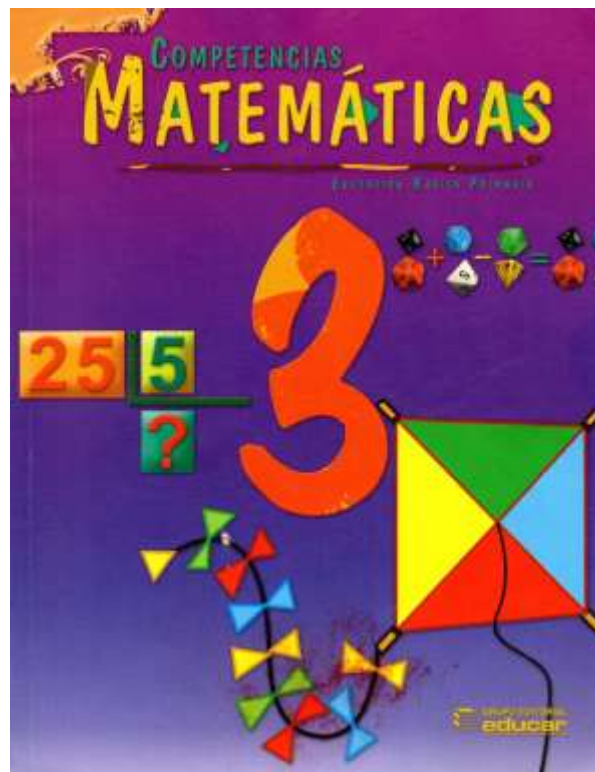


Gráfica 23: Valores que transmite. Competencias Matemáticas 3. Pág. 137

La convivencia, la utilización adecuada de los recursos naturales y el pensamiento analítico, creativo y crítico, se pueden evidenciar en la sección de *Matemática Ciudadana* en la cual se encuentra un apartado de *convivencia y paz*, y en la sección de *Matemática creativa*.

Aspectos físicos del libro:

El tipo, tamaño y estilo de la letra es legible, los títulos y subtítulos tienen color y tamaño diferente, los gráficos tienen colores llamativos. Las páginas están numeradas desde la 3 hasta la 144. En su mayoría, las páginas están repartidas en una y dos columnas, el empastado de la portada es delgado pero llamativo.



Gráfica 24: Aspectos físicos del libro. Competencias Matemáticas 3

Capítulo IV. Configuraciones epistémicas de los libros de texto

Teniendo en cuenta el análisis general de los dos libros seleccionados, y con base en la herramienta de análisis de textos matemáticos descrita en el marco teórico, se muestra la descripción de cada uno de los elementos que la componen, estos son: el lenguaje, situaciones problema, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales permiten determinar la forma, la organización, los sentidos y significados que el libro de texto está dando al concepto de división. Cabe mencionar que a las situaciones-problema se les hace una descripción o análisis más profundo, bajo la teoría de los campos conceptuales y los tipos de cantidades, expuestos en el referente cognitivo.

8. Libro: ZonActiva Matemática 3

En este libro el concepto de división se desarrolla en la unidad 5, (páginas 118 a 143) y está ubicado en el pensamiento numérico.

Lenguaje

En el desarrollo de la unidad 5 donde se aborda el concepto de división, se puede observar un lenguaje verbal, tabular, gráfico y simbólico.

El lenguaje verbal se usa en los enunciados de problemas, en las descripciones de definiciones como: divisores, factores, criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 6, número primo y compuesto, al igual que en los ejemplos propuestos y en las explicaciones de las soluciones de los ejemplos.

Este lenguaje también se presenta en las explicaciones de procedimientos; como el caso del algoritmo tradicional de división, el cual es usado para ejemplificar características concernientes al concepto de división; tales como división exacta e inexacta, división con divisores de una, dos y tres cifras, es decir el concepto de división se explica y se ejemplifica a partir del algoritmo

tradicional de división, ya que primero se enuncia un problema y después proceden a explicarlo a través del algoritmo tradicional, en el que se resaltan los términos: dividendo, divisor, cociente y residuo.

TEMA 42
Logro
Realizar divisiones en donde hay ceros en el dividendo.

División con ceros en el dividendo

A un campamento asisten 808 personas y se dispone de carpas con capacidad para 8 personas cada una.

¿Cuántas carpas se ocupan con las 808 personas?



Gráfica 25: Situación problema. ZonActiva Matemática 3. Pág. 126

| Ejemplo | Solución | | |
|--|---|--|--|
| <p>En una maratón de aeróbicos se repartieron 162 botellas de agua, en partes iguales, entre los 9 finalistas. ¿Cuántas botellas recibió cada uno? ¿Sobraron botellas?</p> | <p>Como se realizó una repartición en partes iguales, efectuamos la división: $162 \div 9$, que la podemos escribir como:</p> | | |
|  | <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;"> $\begin{array}{r} 162 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 72 \\ -72 \\ \hline 0 \end{array}$ </td> <td style="padding-left: 10px;"> <p>Separamos dos cifras del dividendo. $16 \div 9 = 1$ y $1 \times 9 = 9$ $16 - 9 = 7$, y bajamos la otra cifra. $72 \div 9 = 8$ y $8 \times 9 = 72$ $72 - 72 = 0$</p> </td> </tr> </table> <p>Respuesta: cada finalista recibió 18 botellas de agua y no sobró ninguna botella.</p> | $\begin{array}{r} 162 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 72 \\ -72 \\ \hline 0 \end{array}$ | <p>Separamos dos cifras del dividendo. $16 \div 9 = 1$ y $1 \times 9 = 9$ $16 - 9 = 7$, y bajamos la otra cifra. $72 \div 9 = 8$ y $8 \times 9 = 72$ $72 - 72 = 0$</p> |
| $\begin{array}{r} 162 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 72 \\ -72 \\ \hline 0 \end{array}$ | <p>Separamos dos cifras del dividendo. $16 \div 9 = 1$ y $1 \times 9 = 9$ $16 - 9 = 7$, y bajamos la otra cifra. $72 \div 9 = 8$ y $8 \times 9 = 72$ $72 - 72 = 0$</p> | | |

Gráfica 26: Explicación y solución de ejemplos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} 98 \overline{) 8} \\ -8 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 2 \end{array}$ | <p>Separamos la primera cifra del dividendo, de izquierda a derecha: 9</p> <p>Calculamos cuántas veces cabe la cifra del divisor entre la cifra separada: 8 entre 9 cabe 1 vez.</p> <p>Multiplicamos $1 \times 8 = 8$ y efectuamos la sustracción $9 - 8 = 1$</p> <p>Bajamos la siguiente cifra: 8 y calculamos cuántas veces cabe 8 entre 18: 2 veces.</p> <p>Multiplicamos $2 \times 8 = 16$ y sustraemos: $18 - 16 = 2$.</p> |
|---|---|

Gráfica 27: Procedimiento con divisor de una cifra. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122

$$\begin{array}{r} 168 \quad | \quad 12 \\ -12 \\ \hline 48 \\ -48 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Separamos dos cifras en el dividendo, puesto que hay dos cifras en el divisor. 12 entre 16 cabe 1 vez.
- Multiplicamos $1 \times 12 = 12$ y efectuamos $16 - 12 = 4$.
- Bajamos la siguiente cifra: 8.
- Ahora, 12 entre 48 cabe exactamente 4 veces. Escribimos 4 en el cociente.
- Multiplicamos $12 \times 4 = 48$ y efectuamos $48 - 48 = 0$.

Gráfica 28: Procedimiento con divisor de dos cifras. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124

En el lenguaje tabular se encuentran 5 tipos de tablas, de las cuales algunas son para completar y otras para seleccionar. En el primer tipo de tabla (ver gráfica 29) se da el valor del dividendo y el divisor para que se complete el valor del cociente, residuo y determine si la división es exacta. El segundo tipo de tabla (ver gráfica 30) consiste en resolver y verificar una división dada; esta se completa con el procedimiento realizado. En el tercer tipo de tabla (ver gráfica 31) se dan dos afirmaciones para que el estudiante analice y complete determinando si es verdadero o falso lo afirmado. El cuarto tipo de tabla (ver gráfica 32), por su parte, tiene un listado de números que se deben completar encontrando el dígito que falta para ser divisible por 2 y 5. Por último, el quinto tipo de tabla (ver gráfica 33) se completa seleccionando el valor del cociente y residuo de una división dada.

Completo la siguiente tabla. **Observo** el ejemplo.

| Dividendo | Divisor | Cociente | Residuo | ¿Es división exacta? |
|-----------|---------|----------|---------|----------------------|
| 65 | 7 | 9 | 2 | No |
| 32 | 8 | | | |
| 35 | 9 | | | |
| 55 | 5 | | | |
| 73 | 8 | | | |

Gráfica 29: Tabla de completar con cantidades. ZonActiva Matemática 3. Pág. 121

1. **Resuelvo y verifico** cada división.

| División | Prueba de la división | División | Prueba de la división |
|----------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 453 3 | | 2150 86 | |
| 806 6 | | 52 654 425 | |

Gráfica 30: Tabla de completar con procedimiento. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129

Análizo lo que se afirma en cada caso. Si es cierto, **marco** verdadero y si no lo es **marco** falso.

| Situación | Verdadero | Falso |
|---|-----------|-------|
| a. Pueden repartirse 146 dulces, en partes iguales entre 12 niños sin que sobre ninguno. | | |
| b. Con 570 pétalos de rosas pueden elaborarse 19 adornos con el mismo número de pétalos en cada uno, sin que sobre ninguno. | | |

Gráfica 31: Tabla de verdadero y falso. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129

2. **Completo** los números para que sean divisibles por el número que se indica.

| Divisibles por 2 | Divisibles por 5 | Divisibles por 2 y por 5 |
|------------------|------------------|--------------------------|
| 43□ | 43□ | 3□0 |
| 67□ | 39□ | □20 |
| 79□ | 67□ | 12□□ |
| 542□ | 885□ | 2□4□ |
| 787□ | 992□ | 8□□0 |

Gráfica 32: Tabla para completar con números múltiplos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 133

Efectúo cada división, encuentro el cociente y el residuo, los marco en la tabla.

| División | Cociente | | | Residuo | | |
|--------------|----------|-----|-----|---------|---|---|
| $208 \div 2$ | 14 | 104 | 100 | 0 | 1 | 4 |
| $305 \div 3$ | 11 | 10 | 101 | 0 | 1 | 2 |
| $406 \div 2$ | 203 | 23 | 230 | 6 | 0 | 9 |
| $408 \div 4$ | 120 | 102 | 12 | 3 | 0 | 1 |
| $609 \div 3$ | 23 | 230 | 203 | 2 | 1 | 0 |

Gráfica 33: Tabla para seleccionar términos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127

En el lenguaje gráfico podemos encontrar imágenes que ilustran el contexto abordado en situaciones problema, ejemplos, actividades; estas ayudan al estudiante a tener una contextualización del enunciado. También se muestran gráficos que se usan para presentar algunas actividades de forma diferente y creativa, como por ejemplo; crucinúmeros, diagrama de venn, ruletas y construcción de una figura (*ver gráficos 34,35,36,37*); estos gráficos solo organizan información necesaria para realizar la actividad.

Por otra parte, hay ilustraciones que se convierten en un referente potente para que el estudiante signifique el propósito de la actividad; por ejemplo, que diferencie entre un número primo y uno compuesto, ya que en estas ilustraciones el estudiante puede notar cómo se organizan por filas los objetos nombrados en la actividad según el número dado (*ver gráfico 38*).

Resuelve el siguiente crucinúmero.

| Horizontales | Verticales |
|---|---|
| 1. Número impar, menor que 10 y divisible por 3. | 1. Número divisible por 6, mayor que 20 y menor que 25. |
| 2. Número divisible por 5, par y representa una decena. | 2. Número divisible por 6 y por 3, y menor que 15. |
| 3. Número impar, divisible por 3 y menor que 5. | |
| 4. Número divisible por 5 y menor que 10. | |

Gráfica 34: Crucinúmeros. ZonActiva Matemática 3. Pág. 135

Ubica cada uno de los siguientes números en el conjunto correspondiente.

282 33 135 354 327 258 711 756 237

Divisibles por 3 Divisibles por 6

¿Qué puedo concluir? _____

Gráfica 35: Diagrama de Venns. ZonActiva Matemática 3. Pág. 135

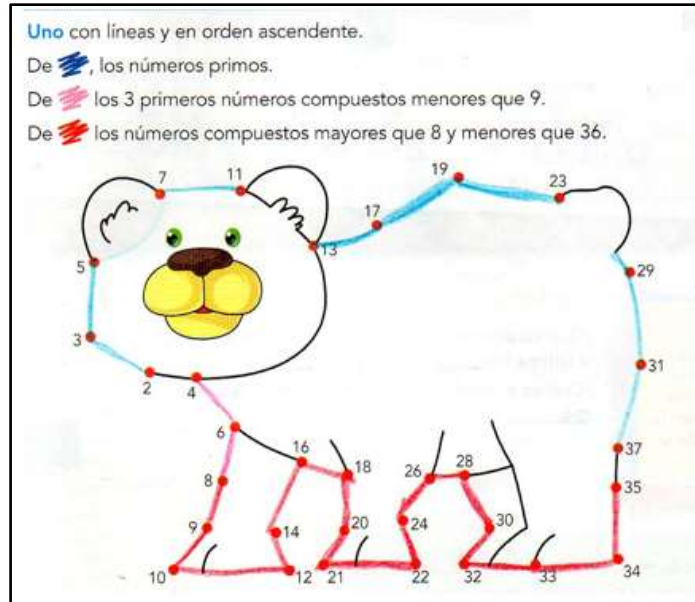
Marco con **X** el número que no es divisor del que está en el centro de cada ruleta.

a.

b.

c.

Gráfica 36: Ruleta. ZonActiva Matemática 3. Pág. 131





Gráfica 37: Construcción de figura. ZonActiva Matemática 3. Pág. 137

Un coleccionista de carros clásicos en miniatura tiene 7 Ferrari y 6 Ford.

Contestemos:


¿Cómo pueden organizarse los Ferrari en filas de manera que en cada una quede el mismo número de carros?


 1 fila de carros: 1×7


 7 filas de carro en cada una: \times


Los 7 Ferrari pueden organizarse de dos formas diferentes.
A 7 solo lo dividen exactamente el y el .

Completemos las distintas formas como pueden organizarse los 6 carros Ford.

 1 fila de carros.

 2 filas de carros.


 3 filas de carros.

 6 filas de carro.

6 tiene como divisores a: 1, 2, 3 y 6.

Gráfica 38: Ejemplificación de una actividad. ZonActiva Matemática 3. Pág. 136

Dentro del lenguaje simbólico se encuentran signos de operaciones (+, -, =, x, división) y signos de agrupación, usado para probar una división.

| Ejemplo | Solución |
|--|---|
| <p>¿Es cierto que con 180 rosas pueden elaborarse 16 ramos de 12 rosas cada uno?</p>  | <p>Determinamos cuántos ramos de 12 rosas pueden hacerse con 180 rosas, mediante la división.</p> $\begin{array}{r} 180 \overline{)12} \\ -12 \\ \hline 60 \\ -60 \\ \hline 0 \end{array}$ <p>Prueba: $180 = (12 \times 15) + 0$</p> <p>Respuesta: con 180 rosas se elaboran 15 ramos de 12 rosas cada uno y no 16.</p> |

Gráfica 39: Lenguaje simbólico. ZonActiva Matemática 3. Pág. 128

Situaciones problema

Las situaciones problema que propone el texto con respecto a la división están dentro del contexto de la vida cotidiana, de la matemática, y de otras disciplinas como la física. Algunas de estas situaciones se presentan como actividades propuestas a realizar por el lector y otras como ejemplos en los que se muestra su respectiva solución. Para esto se remiten a hacer uso del algoritmo tradicional de división con resta como un procedimiento de explicación y en el que resaltan los términos dividendo, divisor, cociente y residuo.

A pesar de que estas situaciones se explican bajo el algoritmo tradicional de división, se logra rastrear la propuesta de Vergnaud en cuanto a los tipos de problemas presentes en las estructuras multiplicativas, específicamente el isomorfismo de medida, al igual que los tipos de cantidades presentes en las situaciones problema que propone Schwartz, por tanto enseguida se muestran algunas de estas situaciones con sus respectivos análisis.

El nuevo diseño de las chaquetas de una fábrica de confecciones, tiene 4 botones. Para un pedido se necesitan 24 botones. ¿Cuántas chaquetas se van a confeccionar?

Gráfica 40: Situación problema 1. ZonActiva Matemática 3. Pág. 120

Un niño guarda 3 monedas en su alcancía cada día. Cuando la rompe, encuentra 27 monedas. ¿Cuántos días tardó en llenarla? _____

Gráfica 41: Situación problema 2. ZonActiva Matemática 3. Pág. 121

En una maratón de aeróbicos se repartieron 162 botellas de agua, en partes iguales, entre los 9 finalistas. ¿Cuántas botellas recibió cada uno? ¿Sobraron botellas?

Gráfica 42: Situación problema 3. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122

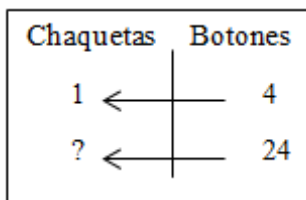
Amparo compró un paquete de 12 esferos que le costó \$ 5400. ¿Cuánto pagó por cada esfero?

Gráfica 43: Situación problema 4. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127

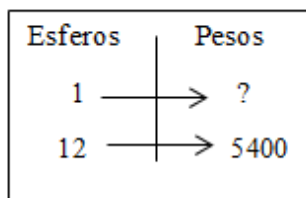
De las anteriores situaciones problemas se puede observar que son de tipo multiplicativo, que bajo la perspectiva de Vergnaud pertenecen al tipo de problema llamado isomorfismo de medida, pues se evidencia en sus enunciados la existencia de dos espacios de medida, para los cuales se dan cuatro cantidades, una de ellas es la unidad que se toma de base para la razón. Dentro de estos problemas se puede notar que en algunos la cantidad buscada es el número de unidades del primer espacio, correspondiente a una magnitud dada en el segundo espacio; en otros se interroga por el valor unitario, conociendo el vínculo de correspondencia entre dos magnitudes de diferente

naturaleza. Para ejemplificar lo dicho anteriormente se escogen dos problemas y se analizan bajo lo que propone Vergnaud.

En las situaciones problemas 1 y 4 (*ver gráfica 40, 43*), se distinguen dos espacios de medida: chaquetas y botones, esferos y pesos respectivamente; además se muestra claramente que son cuatro las cantidades puestas en relación, siendo una de ellas la unidad y ? designa la cantidad buscada. En la situación problema 1, el valor unitario esta dado y se interroga por el número de unidades del primer espacio es decir la cantidad de chaquetas, teniendo en cuenta una magnitud dada en el segundo espacio o sea 24 botones; por tanto se ve una correspondencia entre la cantidad de chaquetas necesarias para 24 botones, conociendo que por 1 chaqueta se necesitan 4 botones (*ver gráfica 44*). Mientras que en la situación problema 4, se interroga por el valor que toma la unidad, en este caso el valor que toma 1 esfero, conociendo el vinculo de correspondencia entre dos magnitudes de naturaleza diferente osea que 12 esferos cuestan 5400 pesos (*ver gráfica 45*).



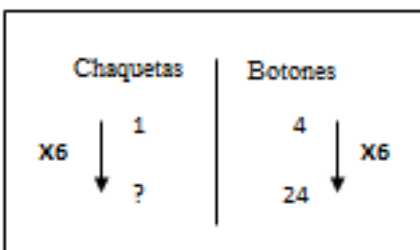
Gráfica 44: Esquema de Vergnaud situación problema 1. ZonActiva Matemática 3



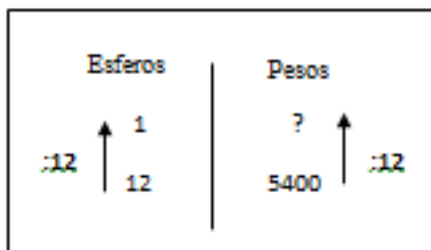
Gráfica 45: Esquema de Vergnaud situación problema 4. ZonActiva Matemática 3

Ahora, reconociendo la relación que existe entre las cuatro cantidades de la situación 1 y la situación 2, se procede a realizar a cada situación, su respectivo análisis vertical y horizontal que propone Vergnaud.

Análisis vertical o escalar: en la situación1, aunque no es explícito se distingue un operador escalar dentro de cada espacio de medida que aumenta la cantidad de 1 a ? y de 4 a 24, (ver gráfica 46). Mientras que en la situación 2 el operador escalar que se distingue disminuye las cantidades de 12 a 1 y de 5400 a ?, (ver gráfica 47).

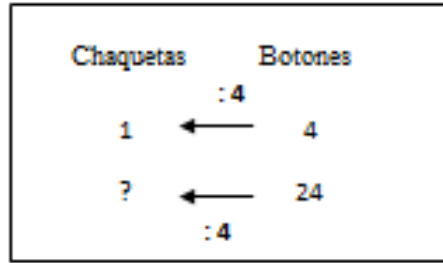


Gráfica 46: Situación 1. Análisis vertical de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3.

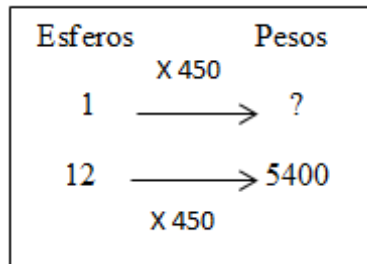


Gráfica 47: Situación 2. Análisis vertical de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3.

Análisis horizontal o funcional: En la situación 1, se distingue el operador función que permite pasar del espacio de medida de botones al espacio de medida de chaquetas, manteniendo una razón entre las cantidades 4 a 1 y 24 a ? (ver gráfica 48). En la situación 2 el operador función permite pasar de la cantidad de esferos al precio de los esferos e igualmente se conserva la razón entre 1 a ? y 12 a 5400 (ver gráfica 49).



Gráfica 48: Situación 1. Análisis horizontal de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3



Gráfica 49: Situación 2. Análisis Horizontal de Vergnaud. ZonActiva Matemática 3

En cuanto a los tipos de problemas que propone Schwartz, de acuerdo a las cantidades que involucra en el desarrollo de la unidad se observan algunos como los siguientes:

Raúl tiene una pieza de tela de 60 centímetros que debe recortar en partes iguales mayores de 10 cm y menores de 20 cm.
 ¿Cuánto puede medir cada pieza?

 ¿Cuántas piezas obtiene?

Gráfica 50: Situación problema 5. ZonActiva Matemática 3. Pág. 131

José recorrió en su bicicleta 3050 metros durante 50 minutos.
 ¿Cuántos metros recorrió por minuto? _____

Gráfica 51: Situación problema 6. ZonActiva Matemática 3. Pág. 127

Veinte personas van a hacer un paseo en auto. En cada auto caben 6 personas. ¿Cuántos autos deben contratarse para que todos puedan ir al paseo? **Explico** mi respuesta.

Gráfica 52: Situación problema 7. ZonActiva Matemática 3. Pág. 129

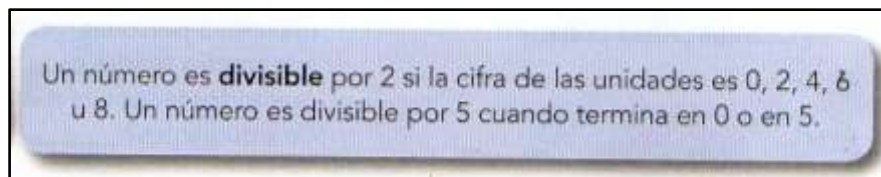
Estos problemas corresponden al tipo E/E y E/I que dentro de la división hacen referencia a problemas de partición y de cuotición respectivamente; por ejemplo el problema de la *gráfica 51* es del tipo E/E ya que es el cociente de dos cantidades extensivas metros/minutos; este problema es de partición debido a que se pregunta por el tamaño de cada parte o sea los metros recorridos por minuto, mientras que el problema de la *gráfica 52* es de tipo E/I como se puede notar es el cociente de una cantidad extensiva y una intensiva, siendo la cantidad extensiva personas y la cantidad intensiva personas por auto. Este último problema es de cuotición en la medida que se pregunta por el número de partes; es decir por el número de autos necesarios para llevar veinte personas conociendo que en cada uno caben seis personas.

Conceptos – definiciones

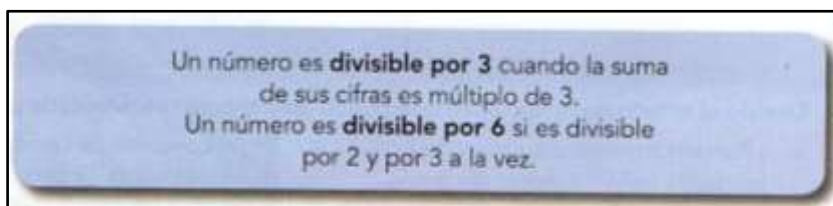
En el desarrollo de la unidad no se presentan definiciones formales como teoremas, axiomas, colorarios etc., lo que se observa son descripciones sobre los procesos realizados; dentro de estas descripciones se encuentran divisores, factores, criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 6, número primo y compuesto.

Los **divisores** de un número son aquellos valores que lo dividen exactamente. Los divisores de un número también son sus **factores**.

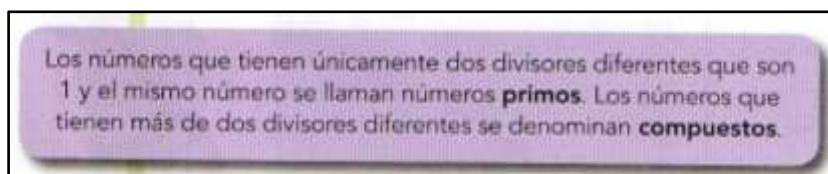
Gráfica 53: Descripción de divisores. ZonActiva Matemática 3. Pág. 130



Gráfica 54: Descripción de divisible por 2. ZonActiva Matemática 3. Pág. 132



Gráfica 55: Descripción de divisible por 3 y 6. ZonActiva Matemática 3. Pág. 134



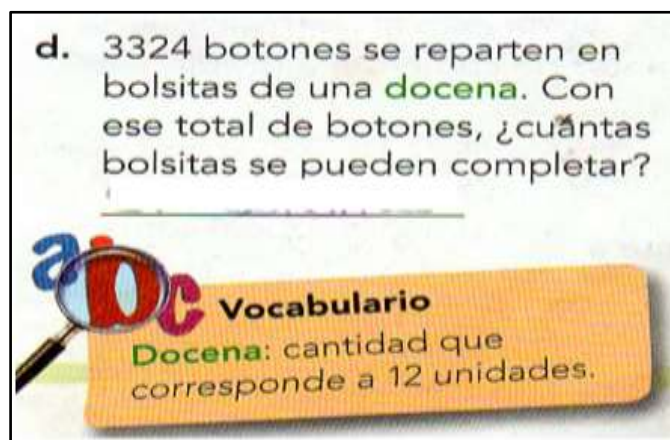
Gráfica 56: Descripción de números primos y compuestos. ZonActiva Matemática 3. Pág. 136

Por su parte el concepto de división se presenta como una relación entre cuatro términos (dividendo, divisor, cociente y residuo) representada por medio del algoritmo tradicional de división (*ver gráfica 60*), ya que el libro al inicio de cada tema (divisiones exactas e inexactas, división con divisores de una cifra, división con divisores de dos y tres cifras, división con ceros en el dividendo, prueba de la división, divisores, criterios de divisibilidad por 2 y por 5, por 3 y por 6, números primos y números compuestos, descomposición de factores primos.), contenidos en esta unidad; inician con una situación problema que explican y desarrollan a partir del algoritmo tradicional de división,

Por tanto en las explicaciones y en los ejemplos siempre se resalta la relación entre los términos (dividendo = divisor \times cociente + residuo) en este sentido, el significado que el libro de texto promueve al concepto de división, está centrado en la ejecución del algoritmo tradicional que a

pesar de que deja ver la existencia de cuatro cantidades no tiene en cuenta los dos espacios de medida a los que pertenecen las cantidades y a su vez la relación que se da entre estos espacios de medida.

Además, se observan definiciones de palabras que pueden ser desconocidas para el estudiante, por tanto son ayudas para contextualizarlo; estas definiciones están contenidas en recuadros denominado *vocabulario*.



Gráfica 57: Vocabulario. ZonActiva Matemática 3. Pág. 125

Proposiciones

Como se señaló anteriormente el libro no presenta definiciones formales como axiomas, teoremas etc., solo describen características de procesos realizados; por tanto los enunciados que se pueden encontrar en la unidad son afirmaciones derivadas de explicaciones sobre procesos realizados, los cuales funcionan como reglas que soportan procedimientos; estas afirmaciones de cierta forma generalizan los pasos explicados para desarrollar el algoritmo de división (*ver gráfica 58*).

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 168} \\ \underline{-12} \\ 48 \\ \underline{-48} \\ 0 \end{array}$$

Separamos dos cifras en el dividendo, puesto que hay dos cifras en el divisor. 12 entre 16 cabe 1 vez.
 Multiplicamos $1 \times 12 = 12$ y efectuamos $16 - 12 = 4$.
 Bajemos la siguiente cifra: 8.
 Ahora, 12 entre 48 cabe exactamente 4 veces. Escribimos 4 en el cociente.
 Multiplicamos $12 \times 4 = 48$ y efectuamos $48 - 48 = 0$.

Contestemos:
 En cada piso se instalan ____ ventanas.

Aprendo más
 Cuando se **divide** un número entre otro de **dos cifras**, se dividen las dos primeras cifras del divisor y se continúa el mismo procedimiento hasta llegar a la cifra de las unidades del dividendo.

Aprendo más
 Cuando hay tres cifras en el divisor se comienza la división separando tres cifras en el dividendo.

Gráfica 58: Enunciado, división con dos cifras. ZonActiva Matemática 3. Pág. 124

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 808} \\ \underline{-8} \\ 008 \\ \underline{-8} \\ 0 \end{array}$$

Se separa una cifra en el dividendo y se divide 8 entre 8. Se escribe 1 en el cociente.
 Se efectúa $1 \times 8 = 8$ y se sustrae: $8 - 8 = 0$.
 Se baja la siguiente cifra que es cero y se divide entre 8: $0 \div 8 = 0$.
 Se escribe 0 en el cociente.
 Se baja la siguiente cifra que es 8 y se divide entre 8. El cociente que es 1, se escribe en el cociente.
 Se multiplica $1 \times 8 = 8$ y se efectúa la sustracción: $8 - 8 = 0$.

Contestemos:
 Se ocupan _____ carpas.

Aprendo más
 Observa que luego de efectuar la sustracción $8 - 8 = 0$, se bajó la siguiente cifra, que también es 0, y se hizo la división entre $8:0 \div 8 = 0$; ese valor debe escribirse en el cociente para luego seguir con el procedimiento que ya conoces.

Contestemos
 Cuando hay la misma cantidad de ceros en las últimas cifras tanto en el dividendo como en el divisor, la división puede simplificarse eliminando la misma cantidad de ceros en los dos términos.

Gráfica 59: Enunciado, división con una cifra. ZonActiva Matemática 3. Pág. 126

Procedimientos

Dentro de la unidad de división se encuentran procedimientos como ejecución del algoritmo tradicional de división, operaciones básicas y técnicas de cálculo; el algoritmo tradicional es usado para solucionar y explicar las situaciones que se presentan al inicio de cada tema; este es representado y explicado paso por paso. Es importante resaltar que este algoritmo es

frecuentemente usado en el desarrollo de la unidad tanto en situaciones problema como en ejercicios, ejemplos y actividades (*ver gráfica 39*). De igual forma estos procedimientos se soportan con proposiciones que generalizan los pasos explicados para su desarrollo (*ver gráfica 59*).


Las operaciones básicas están presentes en las explicaciones del paso a paso del algoritmo tradicional; estas funcionan como reglas que validan el resultado de la división y a su vez el de los términos de la división (*ver gráfica 39*); por tanto estas reglas se pueden ver como argumentos que también soportan procedimientos (*ver gráfica 62*).

También se puede observar una técnica de cálculo presentada por los lineamientos curriculares de matemáticas (1998) como uno de los tipos de problemas presentes en el concepto de división denominado *agrupamiento o sustracción repetida*; este es usado en algunas explicaciones y soluciones de ejemplos, además es enunciado en un recuadro denominado *aprendo más* como se puede ver en la *gráfica 60* en la que se presenta como una proposición que resalta el procedimiento; sin embargo esta afirmación puede limitar al estudiante a concebir la división solo como repartición en partes iguales.

20

El nuevo diseño de las chaquetas de una fábrica de confecciones, tiene 4 botones. Para un pedido se necesitan 24 botones. ¿Cuántas chaquetas se van a confeccionar?

Para determinar el número de chaquetas, vamos sustrayendo 4 botones cada vez, hasta que no quede ninguno.



24 - 4 = 20 20 - 4 = 16 16 - 4 = 12 12 - 4 = 8 8 - 4 = 4 4 - 4 = 0

Contestemos:
 ¿Cuántas veces pudimos sustraer 4? 6
 Los 24 botones alcanzan para confeccionar 6 chaquetas.

Dividendo → 24 4 ← Divisor
 Residuo → 0 6 ← Cociente

Aprendo más
 Para repartir una cantidad en partes iguales podemos sustraer varias veces el mismo número; de esta forma estamos realizando una **división**.

Cuando el residuo de una división es cero, la división es **exacta**; si el residuo es diferente de cero, se tiene una división **inexacta**.

Gráfica 60: Procedimiento de agrupamiento o sustracción repetida. ZonActiva Matemática 3. Pág. 120

Argumentos

Los argumentos que se presentan en relación con el concepto de división, están aquellos relacionados con las explicaciones de procedimientos usados para divisiones con divisores de una, dos y tres cifras; al igual que para las divisiones con ceros en el dividendo.

Estos argumentos resaltan características que se observan en una situación o ejemplo particular, para luego generalizar un procedimiento; en este sentido se organizan los argumentos a partir de lo particular y se llega a una generalidad. Estos argumentos favorecen al estudiante en la medida que refuerza de manera general lo que se ha explicado en un procedimiento particular (*ver gráfica 62*).

98 | 8

-8 ↓ 12

18

-16

2

Separamos la primera cifra del dividendo, de izquierda a derecha: 9

Calculamos cuántas veces cabe la cifra del divisor entre la cifra separada: 8 entre 9 cabe 1 vez

Multiplicamos $1 \times 8 = 8$ y efectuamos la sustracción $9 - 8 = 1$

Bajamos la siguiente cifra: 8 y calculamos cuántas veces cabe 8 entre 18, 2 veces.

Multiplicamos $2 \times 8 = 16$ y sustraemos: $18 - 16 = 2$.

Contestemos:
Los 98 galones alcanzan para ___ días y quedan ___ galones.

Aprendo más
Cuando se divide un número entre otro de una cifra, si la primera cifra del dividendo es menor que el divisor, debemos separar las dos primeras cifras y ahora sí empezar el proceso de la división.

En una división el residuo siempre debe ser menor que el divisor.

Gráfica 61: Argumento de explicación. ZonActiva Matemática 3. Pág. 122

¿Cuántos surcos con 15 árboles cada uno se sembraron?

Dividendo → 326 | 15 ← Divisor

-30 ← Cociente

26

-15

11 ← Residuo

Completemos:
Se sembraron ___ surcos con ___ árboles en cada uno.
¿Es cierto que un surco queda con 12 árboles solamente? ___

326 = □ × □ + □ ← Residuo

Dividendo Divisor Cociente

Recuerda que para comprobar si la división es correcta debe cumplirse que:
(Cociente × Divisor) + Residuo = Dividendo

abc Vocabulario
Surco: abertura alargada

Gráfica 62: Argumento de prueba para la división. ZonActiva Matemática 3. Pág. 128

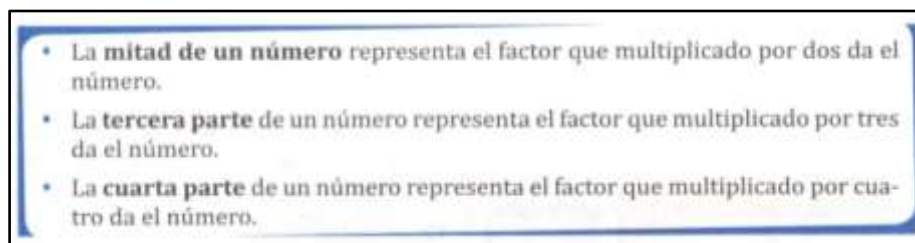
9. Libro: Competencias Matemáticas 3

En este libro el concepto de división contempla desde las páginas 73 hasta la 88, se encuentra ubicado en la unidad 3 denominada “El juego de Jacks” y a su vez está dentro del pensamiento numérico y variacional.

Lenguaje:

A lo largo de la unidad 3 se pueden identificar diferentes tipos de lenguaje tales como el verbal, el gráfico, el tabular y el simbólico.

Con lenguaje verbal se presentan los títulos que en éste caso siempre es la palabra *División*, los subtítulos que hacen referencia a la división como partición, como reparto, a las divisiones exactas e inexactas, división por dos y tres cifras, también indican los ejercicios, actividades y situaciones problema a resolver. Las definiciones que están dadas en un lenguaje natural son acerca de las divisiones exactas e inexactas y de sus partes, como dividendo, divisor, cociente, y residuo. Los enunciados de problemas que contextualizan al estudiante para que a través de la operación de división le dé respuesta a una pregunta, enunciados cortos que indican una acción a realizar, enunciados largos que dan explicación del proceso de dividir o información para saber cuándo se ha terminado de resolver satisfactoriamente una división y por último, en lenguaje verbal se encuentran ciertas palabras que dan organización a las tablas e indicaciones para la solución de ejercicios pertenecientes al concepto de división.

- 
- La **mitad de un número** representa el factor que multiplicado por dos da el número.
 - La **tercera parte** de un número representa el factor que multiplicado por tres da el número.
 - La **cuarta parte** de un número representa el factor que multiplicado por cuatro da el número.


Gráfica 63: Descripciones de la mitad, tercera y cuarta parte de un número. Competencias Matemáticas 3.
Pág. 73

| | |
|--|--|
| $\begin{array}{r} 50\overline{)0} \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$ | <p>Dividir significa repartir, hacer grupos de igual número de elementos. La división es la forma abreviada de expresar un reparto en grupos iguales.</p> <p>Dividendo: total de elementos para repartir.</p> <p>Divisor: número de grupos.</p> <p>Cociente: elementos que quedan en cada grupo.</p> <p>Resto o residuo: elementos que no se pueden repartir de forma que quede uno de ellos en cada grupo.</p> |
|--|--|

Gráfica 64: Descripción de las partes de la división. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75

División

Divisiones exactas e inexactas



Al comenzar cada año escolar los consejos estudiantiles proponen actividades que benefician a todos los estudiantes, con esta idea crean comités para distribuir las actividades del año. Si se dispone de 24 estudiantes para conformar los comités, determina si es posible formar comités de 2, 5, 8 y 16 estudiantes.

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)2} \\ \underline{-2} \\ 04 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)5} \\ \underline{-20} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)8} \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)16} \\ \underline{-16} \\ 0 \end{array}$$

Una **división exacta** es la que tiene residuo cero (0).

Una **división inexacta** es aquella en la que el residuo es diferente de cero.

Gráfica 65: Situación problema. Competencias Matemáticas 3. Pág. 78

Cuando el divisor tiene dos cifras, tomamos dos cifras del dividendo, de izquierda a derecha, y revisamos. Si esta cifra es mayor que el divisor comenzamos la división, si no tomamos la siguiente cifra del dividendo y continuamos el **proceso de división**.

Gráfica 66: Explicación del proceso de dividir. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83

Un número es divisor de otro cuando al realizar la división entre ellos el residuo es cero (0).
Cuando dos o más números se multiplican, los números que se multiplican se llaman **factores**, y cada factor será **divisor** del producto entre ellos.

Gráfica 67: Descripción de factores y divisores. Competencias Matemáticas 3. Pág. 81

Por su parte, el lenguaje gráfico está dado por imágenes que ilustran algún enunciado, otras que recrean la vista del lector pero no le aportan a la comprensión o aprendizaje del concepto y por fotos que contextualizan al lector que hacen publicidad o que representan una situación. Sin embargo, del lenguaje tabular, se puede decir; que es usado para representar la relación existente entre los diferentes factores incidentes en la división, éste logra mostrar o sistematizar y organizar la variación de los elementos numéricos según el proceso de la operación de división como estructura multiplicativa.



Gráfica 68: Foto publicitaria. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75

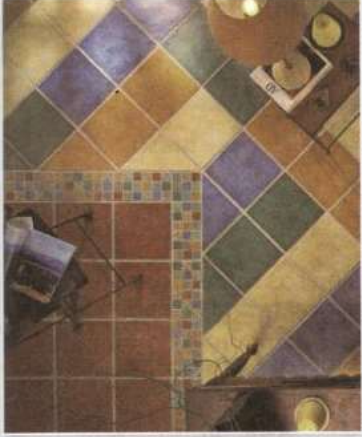
• En la cafetería del colegio hay 300 sillas y según el evento hay que organizar un cierto número de sillas por mesa.

A photograph of a school cafeteria. The room is filled with round tables and chairs, arranged in a way that suggests a social gathering or event. Large windows in the background let in natural light, and the overall atmosphere is bright and open.

Gráfica 69: Representación de un enunciado. Competencias Matemáticas 3. Pág. 82

División

Divisiones de un número



Si en un piso rectangular caben 12 tabletas cuadradas, ¿cuántas tabletas puede haber a lo largo y a lo ancho del piso?

Posibles dimensiones del piso

4 baldosas

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

3 baldosas

$3 \times 4 = 12$

6 baldosas

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |

2 baldosas

$2 \times 6 = 12$

12 baldosas


| | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

1 baldosa

$1 \times 12 = 12$

Gráfica 70: Lenguaje tabular. Competencias Matemáticas 3. Pág. 81

Divisiones por dos cifras



Un carro consume 10 galones de gasolina en un viaje de 750 kilómetros. ¿Cuál es el consumo del carro por kilómetro?

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| | c | d | u | |
| | 7 | 5 | 0 | 10 |
| - | 7 | 0 | | 7 |
| | | 5 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| | c | d | u | |
| | 7 | 5 | 0 | 10 |
| - | 7 | 0 | | 7 |
| | | 5 | 0 | |

Gráfica 71: Foto para contextualizar. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83

Ahora bien, el lenguaje simbólico es acorde al concepto de la división se muestra simbología matemática como los números del sistema decimal, el símbolo de la multiplicación, de la resta, del igual, y el signo de la división en dos formas; \div y $/$.

| | | | |
|---|---|---|--|
| $\begin{array}{r} 24 \overline{) 2} \\ -2 \\ \hline 04 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \overline{) 5} \\ -20 \\ \hline 4 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \overline{) 8} \\ -24 \\ \hline 0 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \overline{) 16} \\ -16 \\ \hline 0 \end{array}$ |
|---|---|---|--|

Gráfica 72: Uso del signo de resta y división en el algoritmo tradicional. Competencias Matemáticas 3. Pág. 78

Observa las divisiones:
 $43 \div 21$ y $41 \div 21$, ¿cuál es más difícil de resolver? ¿Por qué?

Gráfica 73: Uso del signo de división en enunciados escritos. Competencias Matemáticas 3. Pág. 83

| | |
|-------------------|-----------------|
| $6 \times 9 = 54$ | $54 \div 6 = 9$ |
| $9 \times 6 = 54$ | $54 \div 9 = 6$ |

Gráfica 74: Uso del signo de multiplicación, división e igualdad. Competencias Matemáticas 3. Pág. 77

En forma general se puede afirmar, que aunque no es muy evidente el lenguaje da cuenta del concepto de división como una relación cuaternaria, ya que siempre tiende a mostrar la relación entre las cantidades de magnitudes de diferente naturaleza a través de las tablas y de situaciones contextualizadas, también debido al vocabulario usado en las situaciones, enunciados, definiciones, etc., se puede decir que la división es tomada como una partición.

Situaciones-problema:

Las situaciones problema que presenta el texto usan un lenguaje acorde al grado, tienen enunciados cortos, algunas cuentan con una gráfica para ser ilustradas; ya sean tablas, fotos o imágenes. En su mayoría están dadas en contextos de la vida cotidiana y de la matemática, no hay situaciones en el contexto de otras disciplinas, hay algunas de contextos cotidianos, que involucran la física o la geometría.


19. Si Juan tiene 48 dulces para repartir entre 4, ¿cuántos dulces le corresponden a cada uno?



20. En una caja se colocan 10 bocadillos, ¿cuántas cajas serán necesarias para 60 bocadillos?

Gráfica 75: Situación Problema 1. Competencias Matemáticas 3. Pág. 76

Resuelve:



16. Rocío tiene una tarjeta de \$20.000 para llamar al país donde vive Darío. Si el minuto cuesta \$358, ¿cuántos minutos puede hablar Rocío con Darío?

17. En una llamada telefónica se gastaron \$4.750. Si cada minuto vale \$250, ¿cuántos minutos duró la llamada?

18. Liliana compró una tarjeta de \$50.000 para hacer una llamada de tres minutos cada día. Si el minuto vale \$120, ¿cuántos días puede hablar?

Gráfica 76: Situación Problema 2. Competencias Matemáticas 3. Pág. 88

14. Observa el reparto y exprésalo mediante una división.



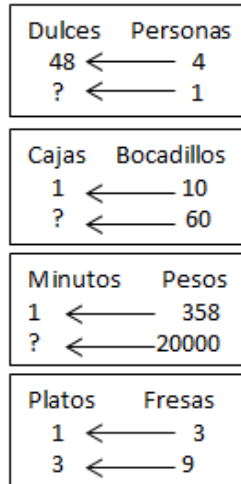
Gráfica 77: Situación problema 3. Competencias Matemáticas 3. Pág. 76

En las situaciones de contexto cotidiano se puede notar que ponen en juego las cuatro cantidades que se denotan por los nombres: dividendo, divisor cociente y residuo según su función. En estos casos, el residuo es 0 (cero), es decir que la división es exacta, y por la forma en que se escriben los enunciados, estas situaciones se pueden clasificar como problemas de tipo partición para ser resuelta, según los ejemplos presentados a lo largo de la unidad con el algoritmo tradicional con resta.

También -aunque no es explícito- cada una de estas cantidades pertenecen a dos espacios de medidas diferentes que es necesario tener en cuenta para organizar de forma correcta los datos y resolver el problema.

Sin embargo, si se tiene en cuenta la propuesta de Vergnaud para hacer un análisis profundo de las situaciones con estructuras multiplicativas entorno al isomorfismo de medida, se puede afirmar que dicha propuesta no se evidencia explícitamente; Sin embargo si esta presente, ya que estas situaciones muestran tres cantidades; dos en un espacio de medida y otra en otro espacio de medida diferente, esto para hallar una cuarta cantidad correspondiente al último espacio de medida involucrado. Cabe resaltar que la unidad es una de las cantidades presentes y que es tomada como base para la razón y de gran importancia en la conceptualización de las estructuras multiplicativas expuestas en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud; Sin embargo, dicha cantidad no es explícita en ninguna de las situaciones.

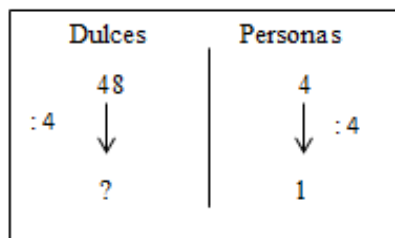
Para ejemplificar la relación cuaternaria de las situaciones se presentan los siguientes esquemas, cabe mencionar que la tercera situación presenta todas las cantidades y su esquema se muestra para evidenciar dicha relación.



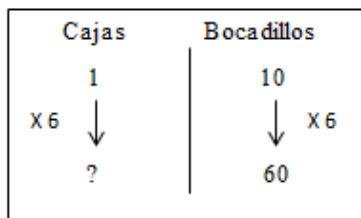
Gráfica 78: Esquemas de Vergnaud situaciones 1, 2 y 3. Competencias Matemáticas 3

Ahora bien, con base en la relación existente entre las cuatro cantidades de las situación 1, ejercicio 1 y 2 anteriormente mencionados, se procede a mostrar los análisis vertical y horizontal que propone Vergnaud en la Teoría de los Campos Conceptuales.

Análisis vertical o escalar: En la situación 1, ejercicio 1, se tienen los espacios de medidas dulces y personas y aunque no es explícito dentro de cada espacio de medida se distingue un operador escalar que disminuye las cantidades de 4 a 1 y de 48 a ?, ver gráfica 79. En la situación 1, ejercicio 2, el escalar no disminuye las cantidades en los espacios de medida sino que las aumenta; esto es en el espacio de medida cajas de 1 a ? y en el otro espacio de medida bocadillos, de 10 a 60, ver gráfica 80.

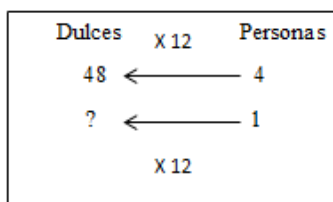


Gráfica 79: Situación 1, ejercicio 1. Análisis vertical. Competencias Matemáticas 3

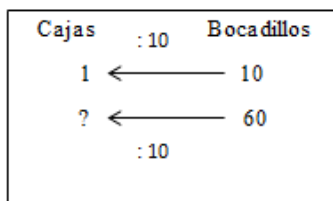


Gráfica 80: Situación 1, ejercicio 2. Análisis vertical. Competencias Matemáticas 3

Análisis horizontal o funcional: En la situación 1, ejercicio 1, se distingue el operador función que permite pasar del espacio de medida personas al espacio de medida dulces, manteniendo una razón entre las cantidades 4 a 48 y 1 a ? ver gráfica 81. En la situación 1, ejercicio 2, el operador función permite pasar del espacio de medida bocadillos al espacio de cajas e igualmente se conserva la razón entre 10 a 1 y 60 a ? ver gráfica 82.



Gráfica 81: Situación 1, ejercicio 1. Análisis horizontal. Competencias Matemáticas 3



Gráfica 82: Situación 1, ejercicio 2. Análisis horizontal. Competencias Matemáticas 3


Por otro lado, teniendo en cuenta los tipos de problemas de Schwartz la situación 2, ejercicio 16, de contexto cotidiano se clasifica en el tipo de problemas E/I y es de cuotición, ya que se está preguntando por número de partes es decir; se debe calcular la cantidad de minutos que se pueden

hablar con \$20.000 sabiendo que cada minuto cuesta \$358, por tanto la cantidad extensiva es \$20.000 y la cantidad intensiva \$358 por minuto.

Al igual que el ejercicio 17, de la misma situación de contexto cotidiano se puede decir que también pertenece al tipo de problemas E/I, ya que lo que se desea saber es cuantos minutos se habló si se gastó \$4750 y cada minuto cuesta \$250; se está preguntando por el número de partes, es decir que el problema es de cuotición.

9. Solo se pueden hallar partes iguales enteras de una cantidad, si la cantidad es múltiplo del número de partes. Relaciona con una línea las cantidades con las partes en que se puede dividir.

| Cantidad | Partes |
|----------|--------|
| 12 | 2 |
| 15 | 3 |
| 25 | 4 |
| 32 | 5 |
| 24 | 6 |
| 28 | 7 |



The image shows a table with two columns: 'Cantidad' and 'Partes'. The rows are: (12, 2), (15, 3), (25, 4), (32, 5), (24, 6), and (28, 7). Red lines connect 15 to 3 and 25 to 4. A girl is sitting to the right of the table, looking thoughtful.

Gráfica 83: Situación problema 4. Competencias Matemáticas 3. Pág. 74

12. En una división que realizó Valentina el divisor fue 5, el cociente 3 y el residuo 4. ¿Cuál era el dividendo? ¿Por qué?

Gráfica 84: Situación problema 5. Competencias Matemáticas 3. Pág. 79

40. Carrera de carros.
 Cuatro carros salieron de lugares distintos. Sigue las operaciones indicadas en los caminos y determina cuáles son los carros que llegaron al mismo destino.

Gráfica 85: Situación problema 6. Competencias Matemáticas 3. Pág. 77


En las situaciones de contexto matemático no se evidencian las cuatro cantidades y tampoco los diferentes espacios de medida que son propios del isomorfismo de medidas, las cantidades presentes son tomadas como cantidades numéricas, lo cual podría producir en el estudiante una mecanización de los algoritmos o un aprendizaje memorístico; es decir están dentro de la estructura multiplicativa pero como agrupamiento o sustracción repetida, que solo tiene en cuenta tres cantidades, dejando de lado la relación cuaternaria y los tipos de cantidades que son propios de la división en contexto. Cabe mencionar que en la gráfica (*ver gráfica 85*), se ve explícita la multiplicación como una operación básica de las matemáticas que está relacionada con el campo conceptual de la división.

Razonamiento

- Determina si las cantidades relacionadas son directamente proporcionales y responde las preguntas.

Un carro consume un galón de gasolina por cada 60 kilómetros recorridos.

| Galones | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| km | 60 | 120 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 | 540 | 600 |



6. Al duplicar el número de galones que se consumen, ¿se duplica el número de kilómetros que recorre?

7. Al triplicar el número de galones que se consumen, ¿se triplica el número de kilómetros recorridos?

Gráfica 86: Situación problema 7. Competencias Matemáticas 3. Pág. 92

36. Por una llave salen 15 litros de agua por minuto.

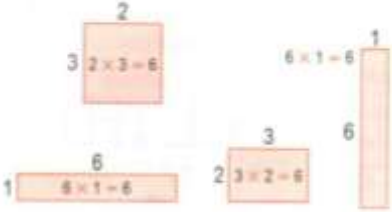
- ¿En cuántos minutos se llenarán los $\frac{3}{4}$ de un tanque de 1.200 litros? Expresa el tiempo en horas.

Gráfica 87: Situación problema 8. Competencias Matemáticas 3. Pág. 85

Razonamiento

- Determina los factores de cada número. Guíate por el ejemplo.

Para el número 6 los rectángulos son:



6. 10

7. 27

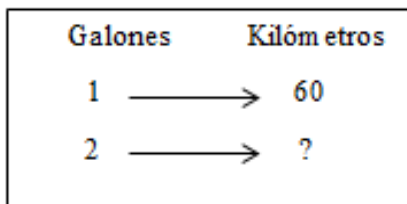
8. 21

9. 32

Gráfica 88: Situación problema 9. Competencias Matemáticas 3. Pág. 82

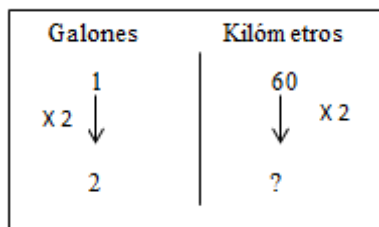
En las dos primeras situaciones 7 y 8 donde se involucran otras ramas de la matemática (*ver gráfica 86 y 87 respectivamente*) no se evidencia de forma explícita la relación cuaternaria del isomorfismo de medida, pero sí los tipos de cantidades propuestos por Schwartz. En la situación 9, (*ver gráfica 88*) a pesar de que se ven figuras geométricas y que los valores asignados a sus lados hacen referencia a medidas, tampoco se ven las cuatro cantidades del isomorfismo de medida ni los tipos de cantidades presentados por Schwartz. Sin embargo, el ejercicio podría fortalecer en el campo conceptual de la geometría, el concepto de área, viéndose involucrada la descomposición de números y el concepto de multiplicación.

Ahora bien, la situación problema 7 (*ver gráfica 86*) se clasifica en el tipo de problemas E/I y es de cuotición, ya que se pregunta por el número de kilómetros que el auto recorre con el doble de galones sabiendo que recorre en promedio 60km/galón. El esquema que representa la relación cuaternaria desde la teoría de Vergnaud es la siguiente:

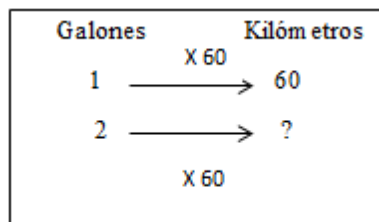


Gráfica 89: Esquema de Vergnaud situación 7. Competencias Matemáticas 3

El análisis vertical de la situación 7, está dado por el escalar 2, aumentando la cantidad en ambos espacios de medida galones y kilómetros, tal como se muestra en la gráfica 90 y el análisis funcional está dado por operador función que permite pasar del espacio de medida galones al espacio de medida kilómetros, manteniendo una razón entre las cantidades 1 a 60 y 2 a ?, como se muestra en la gráfica 91.

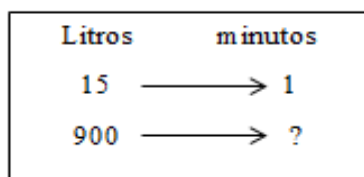


Gráfica 90: Situación 7. Análisis escalar de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3



Gráfica 91: Situación 7. Análisis funcional. Competencias Matemáticas 3

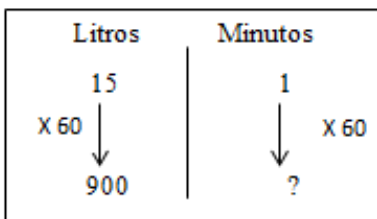
La situación 8, (*ver gráfica 87*), contiene dos tipos de problemas según las cantidades involucradas, inicialmente se presenta el tipo $E \times E = E$, que pertenece a las estructuras multiplicativas pero con la multiplicación, y luego, para dar respuesta a la pregunta de la situación, se reconoce el tipo E/I de cociente porque se pregunta por los minutos que se tarda un grifo en llenar cierta cantidad de agua en litros, es decir; minutos/litro. El esquema que representa la relación cuaternaria desde la teoría de Vergnaud es la siguiente:



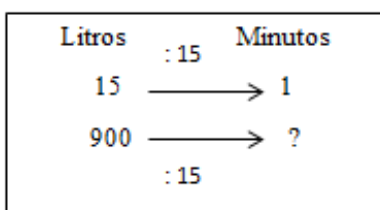
Gráfica 92: Esquema de Vergnaud situación 8. Competencias Matemáticas 3

El análisis vertical de la situación 8, está dado por el escalar 60, aumentando la cantidad en ambos espacios de medida: litros y minutos, tal como se muestra en la gráfica 93, y el análisis funcional está dado por el operador función que permite pasar del espacio de medida litros al

espacio de medida minutos, manteniendo una razón entre las cantidades 15 a 1 y 900 a ?, como se muestra en la gráfica 94.



Gráfica 93: situación 8. Análisis escalar de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3



Gráfica 94: Situación 8. Análisis funcional de Vergnaud. Competencias Matemáticas 3

En general, las situaciones que presenta el libro tienen los diversos contextos que plantea el MEN y que probablemente permiten que los estudiantes no solo conceptualicen el concepto estudiado si no otros involucrados, como la proporcionalidad directa, la variación, área, número, entre otros, esto debido a que se evidencia la importancia de la aplicabilidad de conocimientos matemáticos en los diferentes ámbitos de la vida social.

Conceptos-definiciones:

Las primeras definiciones que presenta el libro en esta unidad al respecto de la división son a cerca de las particiones de un número, no son definiciones formales, es decir; no se usa lenguaje formal, propio de las matemáticas, al contrario, se usa un vocabulario acorde al grado que va dirigido, que relacionan la división directamente con el concepto de multiplicación, ya que se usan términos como multiplicado, multiplican y otros términos técnicos propios del concepto; como divisor, dividendo, residuo y cociente. También se logran rescatar otros conceptos que están

implícitos, tales como: el concepto de número como cardinal, ordinal, el concepto de unidad, de variación, de magnitud, de patrón, el concepto de resta y de multiplicación. (Ver gráfica 63, 64 y 65).

Por ello, se puede afirmar que los conceptos-definiciones podrían permitir un aprendizaje significativo, teniendo en cuenta que al campo conceptual de la división pertenecen otros conceptos como los ya mencionados, que se desarrollan conjuntamente con las situaciones problema contextualizadas.

Proposiciones:

Teniendo en cuenta que las proposiciones son enunciados sobre conceptos, axiomas, teoremas, se puede afirmar que éstos no están dados en lenguaje formal si no en lenguaje natural, se presentan a través de explicaciones o descripciones del concepto o de la función del mismo. Estos enunciados, inician mencionando el objeto a referir seguido de su descripción, o dando una breve explicación, para concluir mencionando el objeto de referencia. (Ver gráfica 63 y 64).

Debido a que las pocas explicaciones son simples y directas, a pesar de usar un vocabulario adecuado dejan de lado la relación existente entre las partes de la división, es decir los enunciados están ligados al algoritmo tradicional, dándole más importancia a la operación que a su significado y pertinencia a la hora de aplicarla en un contexto real.

Procedimientos:

En esta unidad, el desarrollo del proceso de la operación de división no es dado paso a paso con explicaciones en las situaciones problema que presenta como ejemplos, sino que muestran tablas para organizar los datos que obtienen (no muestran cómo se obtienen), muestran directamente la

división que da respuesta a la pregunta problema o una gráfica que describe la(s) respuesta(s) correcta(s) seguida del concepto usado para llegar a ella, que en algunos casos, es la multiplicación.

Al repartir 500 mililitros de gaseosa en vasos de 50 mililitros, ¿cuántos vasos se llenan?

Para realizar este reparto podemos ayudarnos de una tabla así:

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Mililitros | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |
| Vasos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Luego, se llenan 10 vasos.

Gráfica 95: Solución de ejemplo sin mostrar procedimiento. Competencias Matemáticas 3. Pág. 75

En la unidad analizada, hay un recuadro donde se describe el proceso de división con dos cifras, para ello se usa un lenguaje natural con palabras técnicas propias del concepto estudiado. (Ver gráfica 66). También en la división por tres cifras señalan las unidades, decenas, centenas, unidades de mil y decenas de mil, y a pesar de que no lo argumentan ni dan explicación de ello en el proceso, sí resaltan en recuadros la cantidad de números que se deben escoger para iniciar el proceso de la operación y a qué posición deben pertenecer.

Un plan de telefonía celular ofrece llamadas a \$325 el minuto, ¿cuántos minutos al aire tiene una tarjeta prepago de \$10.000, para utilizar el plan ofrecido?

dm. um. c d u

| | | | | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|--|---|---|---|---|
| 1 | 0. | 0 | 0 | 0 | 0 | | 3 | 2 | 5 | |
| | | | | | | | - | 9 | 7 | 5 |
| | | | | | | | | 2 | 5 | 0 |
| | | | | | | | - | | | 0 |
| | | | | | | | | 2 | 5 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|--|---|---|---|---|
| 1 | 0. | 0 | 0 | 0 | 0 | | 3 | 2 | 5 | |
| | | | | | | | - | 9 | 7 | 5 |
| | | | | | | | | 2 | 5 | 0 |
| | | | | | | | - | | | 0 |
| | | | | | | | | 2 | 5 | 0 |

Con una tarjeta de \$10.000 a \$325 el minuto podemos hablar 30 minutos y perdemos \$250.

Gráfica 96: Procedimiento en lenguaje simbólico pero no escrito. Competencias Matemáticas 3. Pág. 86

Como es evidente, el libro presenta el proceso de la división como una operación a ser resuelta con el algoritmo tradicional donde deja de lado lo que se ha mencionado a lo largo del capítulo; la relación cuaternaria.

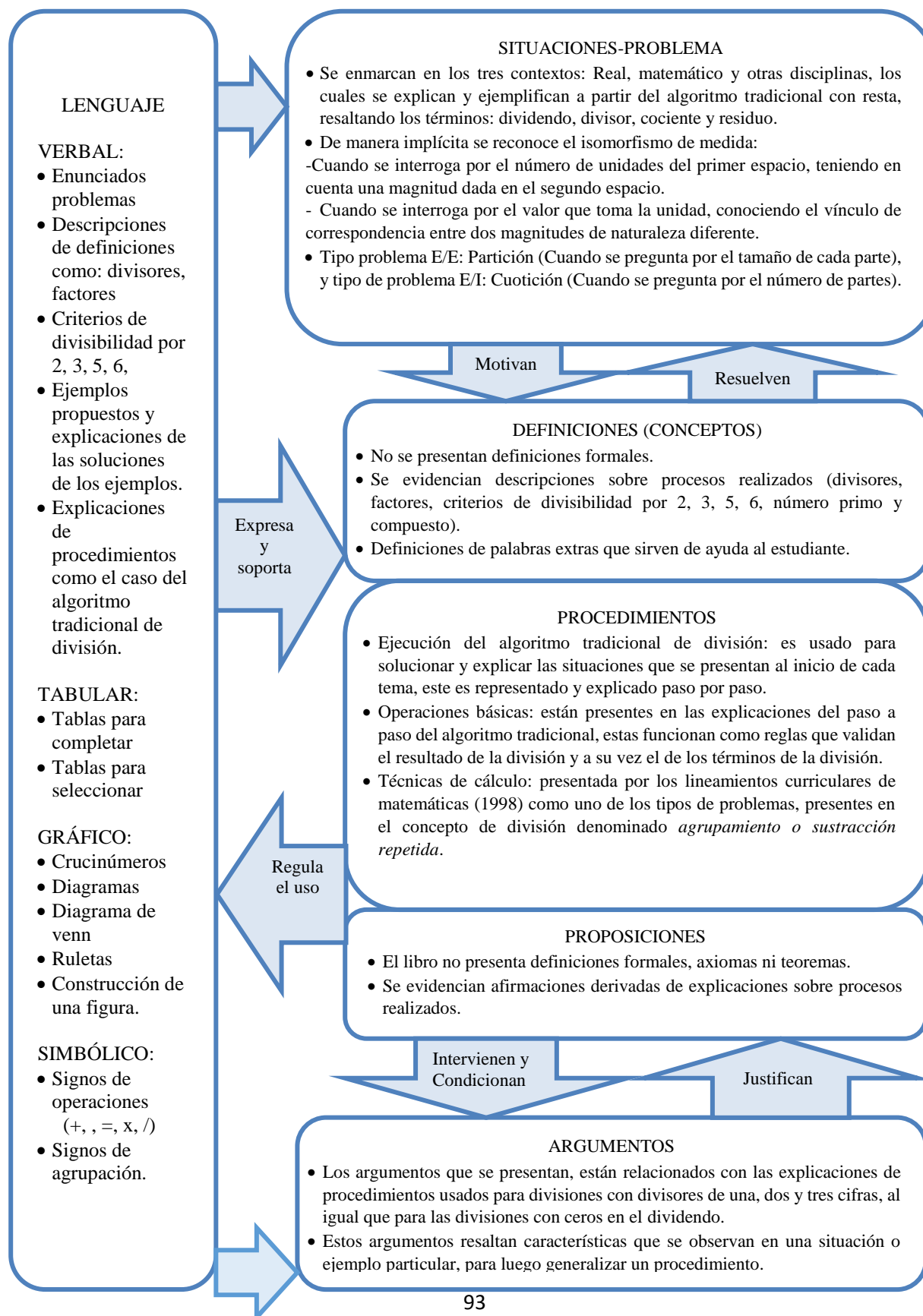
Argumentos:

Los argumentos que se presentan con respecto al concepto de división están dados como enunciados de definiciones, como explicaciones de procedimientos o como descripción de algún elemento. (*Ver gráfica 67*). Estos argumentos, son proposiciones afirmativas que regulan a través del lenguaje natural las definiciones, para que estas sean más claras y comprensibles, validan las explicaciones de los procedimientos usados, y permiten que los estudiantes a la hora de resolver los ejercicios o situaciones problema conceptualicen aquello que caracteriza el concepto abordado.

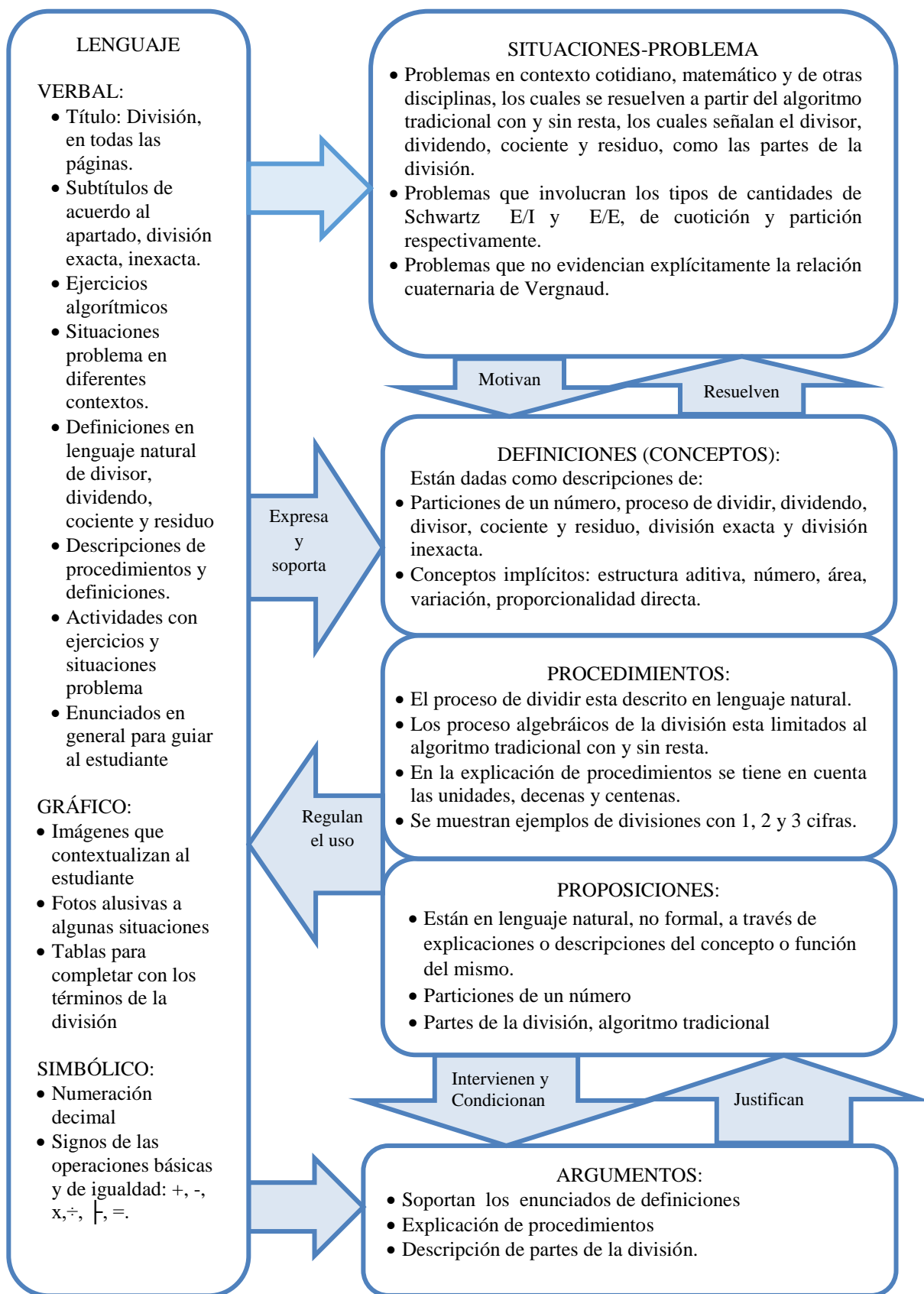
10. Esquemas de las configuraciones epistémicas de los dos libros de texto

Teniendo en cuenta los análisis realizados a cada uno de los elementos de las configuraciones epistémicas lenguaje, situaciones problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, presentes en los dos libros de texto a continuación se muestra el esquema propuesto por Godino que muestra los aspectos más relevantes de dichos elementos y como estos se articulan para movilizar el concepto de división.

Configuración epistémica del libro ZonActiva Matemática 3



Configuración epistémica del libro Competencias Matemáticas 3



Capítulo V. Conclusiones

Según el análisis de configuraciones epistémicas realizados a los dos libros de texto, se pudo encontrar que el lenguaje usado es de tipo verbal; para denotar términos propios de la matemática, para presentar descripciones de definiciones, situaciones problema, explicaciones de procedimientos y para enunciar proposiciones y argumentos, gráfico; para contextualizar al lector, tabular; para organizar información y lenguaje simbólico; para dar cuenta de algunos signos de operaciones básicas tales como el de suma, resta, multiplicación, división e igualdad, usados en la explicación del paso a paso del algoritmo tradicional para mostrar la solución de situaciones problema o de ejercicios que se relacionan directamente con el concepto abordado.

Por su parte las situaciones problema en ambos libros de texto se contemplan en los tres contextos planteados en los lineamientos curriculares, los cuales le permiten al estudiante darles sentido a las matemáticas en su realidad. Además, de manera implícita fue posible rastrear la categoría del isomorfismo de medida propuesto por Vergnaud, ya que se logró evidenciar los dos espacios de medida de diferente naturaleza a los cuales pertenecen las cuatro cantidades, siendo uno de éstas; la unidad como razón. Asimismo se pudo identificar la relación entre dichas cantidades a través del análisis funcional y escalar mostrando la proporcionalidad directa.

Al respecto de los tipos de problema que propone Schwartz, las situaciones se enmarcan en el modelo de partición que tiene en cuenta el cociente de dos cantidades extensivas E/E y el de cuotición que es el cociente de una cantidad extensiva sobre una intensiva E/I , cabe resaltar que no se encontraron situaciones con el modelo de tipo I/I también propuesto por Schwartz. Pero es importante mencionar que en el libro Competencias Matemáticas 3, se encontraron algunas situaciones que para darle solución, se hizo necesario remitirse a la multiplicación con el tipo de

problema $E \times E = E$, permitiendo dar paso a la división con el tipo de problemas E/I; esto evidencia la relación entre los dos conceptos que abarca la estructura multiplicativa.

En lo que concierne a las definiciones, se identificó que éstas no se presentan en un lenguaje formal propio de las matemáticas, como axiomas, teoremas, corolarios, sino más bien como descripciones en lenguaje natural con términos técnicos, es decir; que estas descripciones se presentan a manera de proposiciones, sin embargo, el libro ZonActiva Matemáticas 3 presenta definiciones de palabras que pueden ser desconocidas por el lector.

Ahora bien, los argumentos están dados como afirmaciones que explican y validan procedimientos realizados, aunque cabe mencionar que en los dos libros de texto, el procedimiento más usado es el algoritmo tradicional de división, sin embargo el libro ZonActiva Matemáticas 3 presenta argumentos que resaltan características observadas en la explicación de ejemplos particulares, por tanto, estos argumentos van de lo particular a lo general.

En general, la configuración epistémica como herramienta de análisis de libros de texto matemático, permite no solo determinar cómo está estructurado el contenido de un libro en cuanto a su organización, sino que también permite abstraer a partir de la relación de sus elementos y de los significados que brinda el contexto, qué sentidos cobran los conceptos que son objeto de estudio. Por ello, esta herramienta ofrece a los docentes información útil a tener en cuenta para diseñar, orientar y evaluar sus clases en la práctica educativa.

De esta forma se encontró que los libros de texto seleccionados y analizados presentan el concepto de división a partir de situaciones problema en su mayoría de contextos de la vida cotidiana; permitiendo que los estudiantes puedan reconocer la importancia y aplicabilidad de este concepto en su vida extraescolar; aunque también se encontraron ejercicios que solo desarrollan el

proceso de ejercitación de algoritmos, lo cual no le aporta a la conceptualización sino más bien a la mecanización y memorización. Sin embargo, es necesario aclarar, que en las situaciones de contexto matemático del libro Competencias Matemáticas 3 no es posible reconocer las cuatro cantidades, ya que se muestra la división como agrupamiento o sustracción repetida, produciendo en el estudiante una mecanización de los algoritmos, o un aprendizaje memorístico.

A pesar de que ambos libros presentan la división a través de situaciones contextualizadas, la explicación, ejemplificación y solución de las mismas favorecen el sentido del algoritmo tradicional de división con y sin resta, pudiendo provocar dificultades para la conceptualización, ya que este esquema no evidencia de manera explícita la relación cuaternaria y no tiene en cuenta los espacios de medida a los que pertenecen las cantidades en juego, por lo tanto en el momento de dar respuesta a la pregunta problema, pueda que el estudiante no interprete de manera inmediata a qué espacio de medida pertenece la cantidad encontrada. Además, este sentido no permite que el estudiante cree nuevas estrategias de solución.

Sin embargo, se puede resaltar que los libros de texto, sí relacionan el concepto estudiado con otros que están estrechamente ligados a él, o que se desarrollan a través de él, tal como lo son los conceptos de variación, covariación, proporcionalidad, cantidad, número, área, factor, estructuras aditivas, multiplicativas y otros.

Por otro lado, del análisis general realizado a los dos libros de texto bajo las categorías que propone Arbelaez *et al.*, donde se muestra la calidad en cuanto a presentación, contenido, parámetros curriculares nacionales y formación personal, se puede afirmar que ambos libros son de buen material, su aspecto físico es coherente con los fines educativos, el contenido es acorde al grado al que va dirigido, los gráficos son llamativos y la letra es clara y de buen tamaño. Sin

embargo, en cuanto a los parámetros curriculares, que deben ser tenidos en cuenta para el diseño de este tipo de recursos académicos, se puede ver que no hay coherencia entre lo que propone el MEN y lo que muestran los libros, es decir; hoy en día se plantean competencias en matemáticas, procesos generales y conocimientos básicos, y los libros lo mencionan a grandes rasgos pero al parecer no hay claridad, debido a que ponen como encabezado en una de las unidades del libro Competencias Matemáticas 3: *Estandar: pensamiento numérico y variacional*. Enunciado que es incorrecto, ya que los pensamientos no son estandares.

Este trabajo de grado deja abierto el estudio de las divisiones inexactas, como camino para futuras investigaciones. Dado que Vergnaud, dentro de las estructuras multiplicativas, específicamente el isomorfismo de medida; muestra una relación cuaternaria en dos espacios de medida de distinta naturaleza, para ello propone un análisis escalar que se da en cada espacio de medida y un análisis funcional que se da entre ambos espacios de medida, en dicha relación intervienen una constante proporcional que no da cabida a residuos, por tanto es pertinente el estudio de estas divisiones a la luz de otras teorías.

Para finalizar, como futuras docentes podemos afirmar que el desarrollo de este trabajo, deja grandes expectativas; ya que nos permitió conocer y apropiarnos de teorías que serán útiles para fundamentar nuestra práctica pedagógica, en lo que concierne a reconocer la importancia del buen uso y de la selección de los recursos pedagógicos, que sirven de apoyo para planear y organizar actividades que sean significativas para el aprendizaje de nuestros estudiantes, y de esta forma evaluar y analizar nuestra propia práctica profesional.

Referencias bibliográficas

- Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez, (1999). *Análisis de textos escolares de matemáticas*. Convenio UNIVALLE- MEN-ICETEX. Instituto de Educación y Pedagogía. Artes Gráficas Universidad del valle. Cali, Colombia.
- Aguirre, D. M. (2011). *Aplicación de las estructuras multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigidos a tercer grado de educación básica*. (Tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Barba, D. & Calvo, C (2010). La división: mucho más que un algoritmo, *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, volumen (54), 41-54. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/LA_division_Barba-Calvo.pdf
- Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. (Tesis de doctorado) Universidad Complutense de Madrid. España.
- Dueñas, W., Garavito, A., & Ramírez, C. (2010). *Competencias Matemáticas 3*. Bogotá: Educar. S. A.
- Godino, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactique des Mathématiques, volumen (22), 237-284. Barcelona, España.
- Font, V. & Godino, J. D. (2006). *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores*. Educaçao Matemática Pesquisa, volumen (8), 67-98.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Versión ampliada y revisada del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, volumen (39), 127-135.

- Blanco, T., Contreras, A., Giacomone, B., Godino, J., & Wilhelmi, M. (s.f.) *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático*. pp. 1-21. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf
- Baquero, D., Guzmán, L., Mejía, C., Nivia, L., Ortiz, S., Silva, L., & Vega, A. (2011). *ZonActiva Matemática 3*. Bogotá: Norma.S.A.
- Martín, A. R. (2003). *Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética: la división*. Tenerife Islas Canarias: Edición 1.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista de la división de ciencias administrativas de la universidad del norte, volumen* (20), 165-193. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2499471>
- MEN, (s.f). *Colombia aprende, la red del conocimiento*. Colombia: Ministerio de educación nacional. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-58550.html>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. Primera ed., 46-94. Bogotá, Colombia.
- Moreira, M. (2002). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Publicado en *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, volumen* (2). Traducción de Isabel Iglesias.
- Laguardia, R. (s.f). *Geometría y algebra lineal 1*. Recuperado de http://imerl.fing.edu.uy/gal1/archivos/New_Folder/libroazul.pdf

- Ospina, M. A. & Salgado, J. (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo*. (Tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Peña, L. B. (1999). El libro de texto como problema de calidad educativa. En G. Arbeláez, J. Arce, & E. G. Sánchez, *Análisis de Textos Escolares de matemáticas*, Universidad del Valle. Cali, Colombia.
- Puig, L. & Cerdán, F. (1988). Problemas de una etapa: multiplicación y división. En *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España.
- Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. CNRS y Université René Descartes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volumen (10), 133-170. Traducción de Juan D Godino.
- Vergnaud, G. (1991). Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria: los problemas de tipo multiplicativo, En *El niño las matemáticas y la realidad*, Editorial Trillas.