Niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes de la licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle sede Norte del Cauca acerca de la Combinatoria.

Andy Jhoán Cuellar López

Código: 201257069

Esteban Martínez Anacona.

Código: 201257350

Universidad del Valle.

Instituto de educación y pedagogía.

Licenciatura en educación básica con énfasis en matemática

2017.

Niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes de la licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle sede Norte del Cauca acerca de Combinatoria

Andy Jhoán Cuellar López

Código: 201257069

Esteban Martínez Anacona.

Código: 201257350

Tutor trabajo de grado:

Mg. Deisy Zemanate Cuellar

Universidad del Valle.

Instituto de educación y pedagogía.

Licenciatura en educación básica con énfasis en matemática

2017.

Agradecimientos

Expresamos nuestro sincero agradecimiento a nuestra directora de grado Deisy Zemanate Cuellar, por su apoyo, paciencia y estrecha colaboración, así como su valiosa contribución académica en este trabajo.

Asimismo, agradecemos todo el apoyo dado por nuestras madres Nidia Anacona y Gloria López, ya que fueron nuestro motor para acabar este trabajo.

Resumen

En este trabajo de grado se identifica el nivel de comprensión que logran alcanzar los estudiantes de educación superior al resolver tareas que involucran los distintos tipos de combinatoria. El estudio se realizó mediante una prueba escrita a un total de 16 estudiantes de la Universidad del valle sede Norte del Cauca que están inscritos en la carrera Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas que cursan la materia análisis exploratorio de datos. La caracterización de los conocimientos puestos en juego se realizó mediante el análisis de las respuestas de la prueba usando métodos cuantitativos y cualitativos.

La investigación mostró que los estudiantes en general no alcanzaron un nivel mayor al nivel de generalización y las tareas con mayor dificultad eran aquellas que requerían del uso de dos tipos de combinatoria.

Palabras claves: combinatoria, nivel de comprensión, teoría antropológica de lo didáctico.

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación de didáctica de las matemáticas, y analiza aspectos tanto cualitativos como cuantitativos que fueron tomados a partir de un estudio de casos, en el que se intenta determinar cuáles son los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes de la licenciatura en matemáticas que estaban terminado el curso de análisis exploratorio de datos, respecto a la combinatoria.

Dicho trabajo está estructurado de la siguiente manera: el primer capítulo aborda todo lo relacionado con los aspectos generales de la investigación, iniciando con los antecedentes, donde se presentan los trabajos más relevantes para el interés de este trabajo; seguido de ello, se planteó la problemática llegando a su vez a la pregunta que da pie a dicho proyecto; después se presenta la justificación y por último están los objetivos, tanto general como específicos.

En cuanto al capítulo 2, este muestra los distintos marcos que son usados para el análisis: el primero es la combinatoria desde la propuesta de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1996), luego viene la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard, la cual permite identificar las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que utilizan los estudiantes al momento de resolver problemas combinatorios y por último la teoría de la comprensión de Sierpinska, la cual da a conocer las pautas necesarias para identificar el nivel de comprensión que presentan los estudiantes sobre la combinatoria.

Ahora bien, en el capítulo 3 se presenta el enfoque metodológico abordado y las distintas fases desarrolladas en el estudio, en donde se construye las obras matemática y didáctica de la combinatoria, a través de las cuales se analizan los resultados que se obtienen de la prueba puesta en acto; la reformulación de la prueba, la cual fue tomada del trabajo realizado por Roa, R (2000) en su tesis de doctorado; la construcción de la solución ideal de la prueba puesta en acto y su relación con los actos de comprensión.

El último capítulo presenta el análisis de los resultados obtenidos en toda la prueba, y las conclusiones que se construyen a partir de los resultados arrojados, entre los cuales se destacan que los estudiantes en general no alcanzaron un nivel mayor al nivel de generalización y las tareas con mayor dificultad fueron las tareas que requería del uso de dos tipos de combinatoria, ya que se vio un alto grado de dificultad al momento de los estudiantes resolverlas.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES

1.1 Antecedentes

Los trabajos realizados en relación a la combinatoria en el contexto tanto nacional como internacional son pocos. Es por esta razón que se ve la necesidad de indagar sobre la combinatoria en relación con su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se presentan a continuación los aportes más relevantes de algunos trabajos realizados con respecto a la combinatoria.

-En el ámbito internacional, se encuentra el trabajo realizado por Batanero, C., Cañizares, J., Godino, J, & Roa, R (1997), donde se enfocan en el estudio de problemas combinatorios simples y compuestos en algunos estudiantes de quinto semestre de licenciatura en matemáticas, en el cual se hizo uso de un cuestionario para comprobar y analizar los resultados. Estos autores en este trabajo plantean la importancia de contar con la comprensión y aplicación de la combinatoria, ya que ésta permite desenvolverse en el campo probabilístico y potencia el pensamiento formal.

Lo anterior se ve evidenciado en lo planteado por Inhelder y Piaget (citado en Batanero et al 1997), donde mencionan que el razonamiento hipotético deductivo es manejado por el uso de distintas posibilidades para encontrar una solución a una situación problema, las cuales son descubiertas y evaluadas por las operaciones combinatorias. Adicional a ello, Piaget (citado en Batanero et al 1997) plantea que después de desempeñarse en un periodo de solo operaciones formales, los estudiantes son capaces de descubrir e ir construyendo procedimientos sistemáticos relacionados con la combinatoria; por lo tanto, las operaciones combinatorias son vistas como operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal.

Sin embargo Fischbein (citado en Batanero et al 1997) plantea que la capacidad de resolver problemas combinatorios, no siempre alcanza el nivel de las operaciones formales, si no se da una enseñanza específica del área, para él las estimaciones intuitivas realizadas por los sujetos subyacían en la relación con las operaciones combinatorias y la cantidad de elementos a combinar. En este sentido, el autor plantea la combinatoria es reducida a una estructura mínima, para apoyar las intuiciones erróneas arrojadas por los sujetos involucrados.

-Otro trabajo relevante, es el realizado por Batanero, C., Godino, J, & Navarro, V (1996), donde se trata de dar respuestas a preguntas tales como: ¿Qué papel juega la combinatoria en la probabilidad y matemáticas discretas? ¿Es la capacidad combinatoria solo un instrumento matemático o es un componente fundamental del razonamiento lógico?, entre otras. Estos autores plantean una propuesta que contrasta con los estándares N.C.T.M que presenta el razonamiento combinatorio como una herramienta útil, puesto que es la base de la matemática discreta.

Además, ellos argumentan que la combinatoria es un eje esencial de la matemática discreta y como tal ejerce un rol importante en las matemáticas escolares. Además de ello, la combinatoria no es simplemente una herramienta que se pueda usar para el cálculo probabilístico. Según Piaget e Inhelder (1951), si el sujeto no posee la capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad, salvo en algunos experimentos aleatorios básicos.

-Otro trabajo destacado, es el realizado por Roa (2000), el cual hace parte de un proyecto de investigación que viene desarrollando el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada desde 1990 sobre distintos aspectos de la didáctica de la combinatoria elemental. En este estudio se analizan las estrategias de resolución respecto a los problemas combinatorios elementales, además las dificultades y errores por parte de estudiantes que están finalizando los cursos de la licenciatura en Matemáticas.

El estudio se realiza mediante una prueba escrita, la cual se aplica en tres fases a un total de 147 estudiantes y entrevistas individuales a una muestra pequeña. La caracterización de los conocimientos puestos en juego por los estudiantes se ha realizado mediante el análisis de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas usando métodos cuantitativos y cualitativos.

La investigación muestra que, a pesar del carácter elemental de los problemas combinatorios seleccionados, los estudiantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido a la estructura compleja de los procesos de resolución requeridos, puesto de manifiesto mediante un análisis de tipo semiótico, y a deficiencias en la enseñanza de la combinatoria que enfatiza el estudio de las fórmulas de las operaciones combinatorias en detrimento de componentes más primarios del razonamiento combinatorio.

-Por otro lado, en el ámbito nacional, tenemos el trabajo realizado por Parra, D (2015), donde plantea un panorama general cronológico respecto a la combinatoria. En dicha investigación, se abordan las ideas y aportes provenientes de matemáticos y culturas de distintos lugares y épocas. En segundo lugar, se plantea un estudio histórico epistemológico, el cual permite conocer los aportes ya realizados en la educación matemática en relación a la combinatoria. Y por último, el autor destaca la importancia de algunos personajes como lo fueron Jacobo Bernoulli y Leibniz entre otros, que hicieron trabajos respecto a las teorías del cálculo de probabilidades, el análisis combinatorio y conceptos matemáticos.

-Sumado a ello, otro trabajo realizado, es el de Zapata, L., Quintero, S, & Morales, S (2010), el cual plantea la enseñanza de la combinatoria orientada bajo la teoría de las situaciones didácticas (TSD), el cual tiene como fin facilitar su comprensión, ya que la combinatoria es muy compleja para estudiantes de cualquier nivel académico. Este trabajo abordó dos situaciones muy relevantes: el desempeño de los estudiantes, debido a que muchos de ellos se les dificulta el poder diferenciar una combinación de una permutación; y el papel del docente, debido a que muchos de ellos carecen de la conceptualización de la combinatoria. Por último cabe mencionar que los autores centran este trabajo en el núcleo del pensamiento aleatorio y en su desarrollo a partir de 3 momentos:

Planteamiento para el diseño de una unidad didáctica que aborda la enseñanza de la combinatoria con un fuerte énfasis en su comprensión; aplicación de la prueba, la cual fue desarrollada por los estudiantes en parejas y por último, el análisis de los resultados obtenidos durante la prueba puesta en acto.

De dichos análisis se concluye que los estudiantes tienen mayor facilidad para los problemas que involucran el principio multiplicativo y que presentan más dificultad para los problemas que involucran formas de contar, organizar o arreglar elementos de conjuntos en los cuales se repiten elementos o hay restricciones.

1.1.1 Pertinencia de los antecedentes.

Estos documentos tanto nacionales como internacionales tomados como antecedentes nos aportan diferentes aspectos y conocimientos que sirven de base para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Por un lado, en cuanto a los dos primeros antecedentes internacionales Batanero et al (1997) y Batanero et al (1996), proporcionan cuestiones en común. Lo primero es que aportan aspectos tales como, las diferentes dificultades y errores que se presentan en los estudiantes al momento de solucionar problemas combinatorios (simples, compuestos) independientemente del nivel académico que poseen.

Lo segundo es que dan a conocer las variables a tener en cuenta en el momento de evalu ar el razonamiento matemático de los estudiantes; objeto de la investigación. Y por último ofrecen un panorama general de los métodos y estrategias más comunes usados por los estudiantes.

En cuanto al tercer antecedente internacional, el de Roa (2000), se toma debido a la gran confiabilidad que ofrece todo el desarrollo de esta investigación y en particular al tipo de prueba que usa para llevar acabo los respectivos análisis. Esta prueba es fundamental ya que en ella se involucran los distintos tipos de combinatoria que existen, por tal razón se toma para ser aplicada en el presente trabajo de grado, con el fin de poder determinar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes que la presentan respecto a la combinatoria

Por otro lado, en cuanto a los antecedentes nacionales, hay uno que es de mayor importancia, el cual es el trabajo realizado por Parra (2015), ya que proporciona un panorama general respecto a la combinatoria, dando a conocer los momentos claves que ocurrieron a través del tiempo respecto a ésta. De acuerdo a ello se determinan los momentos más importantes para su consolidación, con el fin de realizar una aproximación histórica que facilite la construcción de la obra matemática de la combinatoria para el presente proyecto.

1.2 Planteamiento del problema.

Situaciones como apuestas, juegos, fenómenos atmosféricos, censos, y fenómenos de la vida cotidiana, son los que dieron lugar a cuestiones probabilísticas y estadísticas, cuestiones que han sido involucradas en los currículos de educación, pues ayudan al desarrollo del pensamiento matemático, especialmente el aleatorio (MEN 2006). Por tanto su aprendizaje ha sido objeto de estudio en diferentes investigaciones, (Batanero, C. 2000; Martínez, H. 2014; entre otras).

Algunas de estas investigaciones muestran que existen dificultades y errores en cuanto a la enseñanza de la estadística, las cuales, según Batanero et al (1994), radican en que la enseñanza de esta disciplina ha recibido menos atención que otras ramas de las matemáticas

Otra dificultad que se presenta es que estas investigaciones realizadas, fueron hechas por psicólogos en lugar de educadores matemáticos, los cuales están más capacitados en dicha área. Adicional a ello, Ortiz, Batanero, & Serrano, (citado en Morales, S., Quintero. 2010), mencionan que los libros de texto usados para enseñar estadística hacen mayor énfasis en el procedimiento que en la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido a simples algoritmos.

Lo anterior exige que se realicen más investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística con el objeto de indagar y generar propuestas que contribuyan a la enseñanza de esta. En este sentido, es necesario ir a las bases de esta ciencia y mirar cómo se pueden trabajar. Una de estas bases es la combinatoria, la cual como lo plantea Piaget (citado en Cañizares. J. 1997) la comprensión de la idea de azar y probabilidad requiere la adquisición de razonamiento combinatorio y proporcional, y la idea de causalidad.

Sin embargo, al momento de enfrentarse a la combinatoria, los estudiantes independientemente del nivel académico presentan dificultades (Navarro., Pelayo, 1994). Entre estas dificultades, según Martínez (2014), el estudiante no sabe diferenciar entre una permutación o una combinación y esto es generado bien sea por la falta de algunas temáticas o por la carencia de argumentos conceptuales en el momento de su enseñanza. Por otro lado, en el ámbito de la educación superior, podemos observar tal como lo plantea Roa (2000), que se presentan dificultades en cuanto a la interpretación de los datos inmersos en los problemas combinatorios, y además al momento de identificar y aplicar las fórmulas de la combinatoria.

De acuerdo a lo ya mencionado, se puede percibir que existe una problemática en relación a la comprensión y aplicación de la combinatoria, tanto a nivel de la educación básica y media como en la educación superior. Dado que a nivel nacional ya se ha tomado la combinatoria como objeto de estudio, enfocada principalmente a un nivel básico y medio, se toma la combinatoria como objeto de estudio haciendo énfasis en la educación superior.

En relación a ello, con ánimo de analizar los conocimientos que poseen algunos estudiantes con un enfoque matemático superior, se propone centrar total atención en los estudiantes del programa de licenciatura en educación básica con énfasis en matemática de la Universidad del Valle Sede Norte del Cauca para realizar el trabajo de investigación, dado que los estudiantes de pregrado para optar por el título deben abordar el curso análisis exploratorio de datos. Este curso tiene como propósito analizar con la ayuda de herramientas estadísticas, situaciones problemas inmersas dentro de la cotidianidad, además de fomentar una nueva actitud en los futuros docentes de matemáticas que les permita abordar problemas de la enseñanza con un enfoque más integral, en donde haciendo uso de las matemáticas puedan generar relaciones con el mundo de la experiencia.

Ahora bien, el papel que juega la combinatoria en todo el curso es de suma importancia. En este sentido, surge la siguiente pregunta**: ¿Qué niveles de comprensión alcanzan los estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle Sede Norte del Cauca que estaban finalizando el curso de Análisis Exploratorio de datos con respecto a la combinatoria?**

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general:

Identificar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Norte del Cauca acerca de la combinatoria.

1.3.2 Objetivos específicos

- Reconstruir la obra matemática y la obra didáctica de la combinatoria a partir de referentes matemáticos, históricos, curriculares y didácticos.
- Rediseñar una prueba tomando como referencia tanto la obra matemática como la obra didáctica reconstruida de la combinatoria.
- Relacionar la comprensión que manifiestan los estudiantes expresada al resolver la prueba con los actos de comprensión planteados por Sierpinska.

1.4 Justificación

Los orígenes de la probabilidad y la estadística, al igual que cuestiones referidas a las matemáticas, se encuentran en las diferentes prácticas (sociales, económicas y culturales) del ser humano y en sus respectivas necesidades. Es así que en la actualidad cuando se enseña estadística se debe de acudir a aquellas situaciones en las que esta disciplina surgió, trayendo a colación las que la fundamentan. Entre estas bases encontramos la combinatoria, la cual se considera como fundamental antes de abordar otros aspectos de la probabilidad y la estadística, pues su comprensión permite el estudio de más conceptos y teoremas.

En este orden de ideas, la combinatoria no solo es importante como principio de la estadística, sino que también es aplicable en otra ciencias tales como: Química, Biología, etc., (Batanero et al 1996). Además de la relevancia en el ámbito académico, la combinatoria también permite solucionar problemas de la vida cotidiana, tales como: organizar grupos, conocer las posibilidades de ganarse una rifa, combinar pinturas, elegir a partir de un número de prendas una forma de vestirse, entre otros.

De acuerdo con lo anterior, se ve la necesidad de enseñar la combinatoria en los diferentes niveles de educación (básica, media y educación superior). Dado que a nivel nacional se pueden encontrar trabajos sobre la combinatoria, pero enfocados en los niveles de educación básica y media, surge la necesidad de saber qué sucede con la educación superior, especialmente en aquellos estudiantes con alguna preparación matemática, de acuerdo a ello, este trabajo toma como población de estudio a los estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca.

Cabe mencionar que este trabajo es de suma importancia, ya que permite obtener una información muy valiosa para la Universidad del Valle, primero porque a partir de una prueba escrita que involucra los distintos tipos de combinatoria permite conocer el nivel de comprensión que han alcanzado los estudiantes en formación para profesores; segundo porque da a conocer desde el desarrollo de la prueba que tan preparados conceptual y didácticamente están los futuros docentes para afrontar la enseñanza de la combinatoria, dada su importancia y aplicabilidad en distintos ámbitos tanto contextuales como profesionales.

CAPÍTULO 2

Marco conceptual.

En este apartado se presentan los referentes conceptuales que serán usados para el desarrollo del presente trabajo, los cuales permiten estudiar, describir y analizar los resultados de la investigación.

2.1 Sobre la comprensión.

En un primer momento se presenta el concepto de comprensión de manera general, desde los diferentes significados que se le han dado a través del tiempo, pero para el interés de este trabajo, se toma como énfasis lo planteado por Sierpinska.

El concepto de "comprensión" a través de los años ha tomado distintas definiciones de acuerdo al autor en acción. Para dar cuenta de lo anterior, se toma como referente el documento de Meel, D (2003).

En un principio tenemos a Brownell y Sims (citado en Meel, D 2003), para ellos la comprensión es la capacidad que tiene cada sujeto de actuar, pensar o desenvolverse de manera correcta al enfrentarse a una situación, además está comprensión es sujeta a cambios, ya sea respecto a la finalización que se le va dar o a la situación problema que se presenta. Adicional a ello, estos autores plantean que la comprensión ve la necesidad de relacionar las experiencias del sujeto con los símbolos inherentes del área, también dicha comprensión es influida por las acciones que ejerce el docente.

Para Polya, G (citado en Meel et al 2003), la comprensión es un complemento de la resolución de problemas, es decir, es primordial comprender todos los aspectos que están involucrados en una situación problema, los hechos desconocidos con los hechos conocidos, los descubrimientos que se dan paso a paso con lo primeramente asimilado por parte del sujeto, los resultados generales por medio de los resultados específicos, entre otras.

Polya identifica que existen cuatro niveles de comprensión para la matemática. El primero es la **mecánica:** este nivel se refiere al método memorizado apropiado para darle solución al problema usado por un individuo; el segundo es el **inductivo:** este nivel se refiere a que por medio de tratar con casos simples se puede llegar a resolver casos más complejos que involucren el mismo objeto matemático; el tercero, es el nivel **racional:** este hace referencia a la importancia de aceptar lo ya demostrado por parte de otro sujeto y por último, el cuarto nivel es el **intuitivo:** este se refiere a la seguridad del sujeto respecto a la verdad que tiene sobre algo. De acuerdo a lo anterior, la comprensión está asociada con reglas matemáticas.

Por otra parte, para Skemp, R (citado en Meel et al 2003) la comprensión es diferente del conocimiento, lo cual lo conduce a plantear unas categorías respecto a la comprensión. La primera categoría es la **comprensión relacional**, esta se basa en cómo saber qué hacer y por qué se debe hacer, además esta categoría proporciona vías para una transferencia más eficiente, para lograr una extracción del conocimiento que posee cada sujeto; también para llegar a que la comprensión sea una meta por sí misma y como tal promoverla. La segunda categoría es la **comprensión instrumental**, esta se enfoca en la decisión de reglas sin una razón detrás, además permite obtener un recuerdo más rápido para conllevar a una respuesta inmediata.

La tercera categoría es la **comprensión lógica**, se basa en una organización de acuerdo con una prueba formal ya realizada a una situación como tal y por último, la cuarta categoría es la **comprensión simbólica**, la cual se refiere a la relación del simbolismo con las notaciones de las ideas asociadas al problema.

De igual manera Dubinsky, propone su teoría denominada APOE, la cual toma como pilar la propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva[1]. Para Dubinsky la comprensión empieza con la manipulación de los objetos tanto mentales como físicos con el fin de formar unas acciones, estas acciones tienen la función de profundizar más en el objeto en sí para lograr formar unos procesos que conducen a formar objetos. En este sentido, tanto las acciones, procesos y objetos se pueden organizar en esquemas.

Para la construcción de los esquemas la abstracción reflexiva juega un rol muy importante, ya que es eje central de la teoría APOE, debido a que se encarga de separar las propiedades e identifica los elementos que están inmersos en el concepto. Además, la abstracción reflexiva posibilita la construcción de nuevas estructuras a través de la creación de interconexiones entre conceptos que se han abstraído previamente, de ahí que este concepto revista importancia en el análisis de los procesos de construcción mediante los cuales un estudiante apropia una definición matemática que se estructura sobre varios conceptos.

Para Dubinsky un esquema no es estático si no que está en continuo cambio, para ello propone para las construcciones mentales cuatro elementos cruciales:

El primero es la **acción;** en esta cada estudiante tiene una concepción de un objeto determinado, además se refiere a cualquier operación tanto mental como físico de carácter externo y generalmente de tipo algorítmico, y que puede transformar un objeto, independientemente que este sea físico o mental.

[1] Proceso por el que el individuo obtiene conocimiento a partir de la experiencia lógico-matemática que surge de sus propias acciones sobre los objetos

El segundo es el **proceso**; en donde cada estudiante piensa sobre un concepto sin la necesidad de haber actuado sobre él, dicho concepto ha sido interiorizado mediante un proceso realizado por el sujeto.

El tercero es el **objeto**; cada sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas sobre un objeto y si éste tiene conocimiento de dicho proceso como un todo y además es capaz de identificar las transformaciones que se puede aplicar sobre el concepto, se dice que el proceso ha sido encapsulado, es decir, el sujeto construye una concepción del objeto.

El cuarto elemento es el **esquema**, este se refiere a que un esquema de un objeto se da a partir de una relación entre acciones, procesos, objetos y otros esquemas, todas estas están encaminadas hacia el concepto.

Para Sierpinska, A (1992) hablar de compresión significa que un sujeto es capaz de poder decir que éste objeto es y ése otro no, cuando pueda relacionar un objeto con otros objetos, cuando es capaz de descubrir de qué teoría hace parte ese objeto y cuáles son sus aplicaciones, es aquí cuando se puede decir que el sujeto ha comprendido algo de ese concepto trabajado. Además la comprensión es un acto que viene relacionado con un proceso de interpretación, es decir, la comprensión deriva su fundamento en las ideologías, en la inclinación hacia algo, en la concepción sobre algo, en las relaciones y esquemas de pensamiento que no se percibe del sujeto.

Por lo tanto, la comprensión en matemáticas debe enfocarse en los cambios cualitativos relacionados con el conocimiento matemático en la mente humana, en otras palabras, saltos desde los antiguos conocimientos a las nuevas formas de conocimiento. Para Sierpinska dichos saltos tienen dos formas de complementarse entre sí.

“Si, conocemos de una nueva manera, al contemplar nuestras viejas formas de conocimiento, lo que vemos son cosas que nos impedían conocer de este nuevo modo. Algunas de estas formas pueden ser calificadas como obstáculos epistemológicos. Pero si, en lugar de contemplar los errores del pasado, concentramos nuestra mirada sobre lo que está frente de nosotros, podemos describir el salto como una nueva manera de conocer”. (Sierpinska, 1992, p. 27).

A lo primero lo llama el acto de superación de una dificultad o un obstáculo; a lo segundo, un acto de comprensión. Y ambas son complementarias porque ninguna de ellas, por si sola, da cuenta del salto; ambas son necesarias para explicar lo que sucedió. Por lo que concluye que “al tratar de describir lo que significa comprender un concepto matemático ambas visiones son necesarias: Actos de comprensión y actos de superación de dificultades u obstáculos” (Sierpinska, 1992, p 29).

En relación a lo anterior, cuando se quiere comprender un objeto como tal, es necesario tanto los obstáculos epistemológicos como los actos de comprensión, ya que los obstáculos epistemológicos son inevitables en la construcción de la comprensión de los conceptos y su existencia se refleja en su desarrollo histórico, por tanto un estudio epistemológico de un concepto puede dar evidencia de obstáculos epistemológicos que subsistan en sujetos actuales, ayudando a estudiar la comprensión que un estudiante puede tener de dicho concepto según las diversas maneras en que puede percibirlo y los obstáculos inherentes a esas maneras.

Es importante mencionar que para Sierpinska un obstáculo epistemológico se refiere a un obstáculo que no es solo de unas cuantas personas, sino que está conectado a un momento específico o en alguna cultura, producto de esquemas de pensamiento inconsciente o de creencias ciegas.

2.1.1 Niveles de comprensión según Sierpinska

A continuación se presentan los niveles de comprensión planteados por Sierpinska

- **Nivel 1: identificación**

Esta se refiere a reconocer un objeto respecto con otros objetos, donde el resultado de este acto, que en un principio parecía de poca importancia, de repente pasa a ser el objeto principal de gran interés y valioso para estudiar.

- **Nivel 2: discriminación**

Esta se da a partir de dos objetos, es aquí donde el sujeto percibe las diferencias en cuanto a las propiedades, cualidades de los dos objetos puestos en juego.

Nivel 3: generalización

Esta se refiere a la idea de ampliar el rango de aplicaciones posibles que puede llegar a tener un objeto como tal, por esta razón, el estudiante puede tener dos conclusiones, la primera es que lo lleva a reconocer que hay elementos que no son de importancia y segundo, a tener nuevas interpretaciones de los objetos.

- **Nivel 4: síntesis**

Esta se refiere a la capacidad de percibir las relaciones entre hechos lejanos, como un resultado, propiedades, relaciones, objetos, entre otros.

2.2 Combinatoria

"Es difícil dar una definición precisa de la combinatoria y resumir en pocas líneas sus numerosos campos de aplicación" (Batanero et al. 1996 p. 17), por tanto en este apartado se presenta una aproximación histórica de la misma y los principales conocimientos disciplinares y didácticos que la fundamentan.

2.2.1 Aproximación histórica.

A continuación se presenta un desarrollo histórico de la combinatoria tomando como referencia el trabajo realizado por Parra (2015), a partir del cual se hará énfasis en uno de los momentos históricos clave; "*la resolución dada al problema de los dados del caballero de Méré*", donde además se toman algunas consideraciones presentes en un artículo de la revista Suma escrita por Basultos, J & Burgués, C (2007), debido a la importancia y pertinencia de los mismos.

La combinatoria ha sido objeto de interés para el ser humano desde la antigüedad hasta nuestros días. Un claro ejemplo de esto, se presenta cuando el hombre intenta dar solución al problema de seleccionar o elegir parejas de un determinado conjunto de elementos, muestra de ello se observa en los problemas de los cuadrados mágicos que se encontraron en el famoso libro chino I – Ching del siglo XXII A.C, puesto que ellos se identifican por ser un arreglo de elementos de un conjunto finito que responde a una determinada condición.

Luego en el siglo V A.C. aparecen los números triangulares, los cuales responden a la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ y generan en su representación gráfica un triángulo, lo que más adelante se conoce como la relación del triángulo aritmético con los números combinatorios. Así mismo en el siglo III A.C. surge la regla para calcular combinaciones de n sílabas

Más tarde en el siglo IV se presenta el primer intento por determinar las permutaciones y combinaciones con el trabajo de Xenócrates de Calcedonia, el cual consiste en calcular el número total de silabas que podía hacerse con las letras del abecedario. Posteriormente en siglo XII se presentan los primeros indicios de las reglas para encontrar las variaciones (con y sin repetición) y las combinaciones en la obra *lilavati* creada por el matemático Baskara, en donde enuncia una regla para hallar el número de colocaciones de cosas de una clase y $(m - n)$ de otra, es decir, por primera vez se vislumbra el problema de la distribución de objetos o partición de conjuntos. Afirma también que las selecciones de n objetos entre m dados coinciden con ese número.

Después en el siglo XIV el matemático y astrónomo Levi Ben Gerson escribió las reglas principales de cálculo de las permutaciones y combinaciones, las cuales en términos actuales se describen de la siguiente forma:

1. n! para el número de permutaciones de *n* cosas.

2. $n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$ para el número de variaciones de cosas tomadas *r* a *r*

3. Para el número de combinaciones:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{(1)(2)(3) \ldots (r)}$$

Luego en el Siglo XVI el estudio del Triángulo aritmético ayuda a la comprensión de los números combinatorios, ya que la publicación de éste coloca al alcance de todo el conocimiento científico los logros en teoría de probabilidad y combinatoria. Además, en este mismo siglo se dan los primeros pasos para la construcción de la combinatoria como rama de las matemáticas, gracias a las contribuciones de dos de los más grandes matemáticos de la historia que son, Pierre Fermat y Blaise Pascal, tal como lo plantea Parra (2015):

"los trabajos de estos matemáticos, reconocen el análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal y se deja de ver como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas". (p. 34).

Asimismo en el siglo XVII con los trabajos de los matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz y Jacobo Bernoulli se da inicio de la combinatoria como disciplina. En cuanto al primero, él en su obra *Disertatio de arte combinatoria* introduce por primera vez este término. Por otra parte, Jacobo Bernoulli en su obra *Ars Conjectandi* (Arte de conjeturar) establece nociones sobre la probabilidad partiendo de las nociones básicas de combinatoria.

Ahora bien, teniendo presente el desarrollo histórico que presenta la combinatoria en determinadas épocas y culturas, es posible observar como la combinatoria nace a partir de la indagación sobre juegos de dados, cartas o repartos de los cuales se obtiene una correspondencia, a diferencia de muchos conocimientos matemáticos que se desarrollan a partir de necesidades fenomenológicas[2].

Uno de estos .juegos el cual fue clave para la constitución de la combinatoria como disciplina fue "***El problema de los dados del caballero de Méré***". A continuación se presenta las diferentes soluciones que se le han dado a través de la historia.

Problema: *Se propone lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría por lo menos un seis; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego. En el segundo juego, de Méré propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparecería por lo menos una vez.* (p. 2).

Soluciones.

1- La primera aparición que se da de este problema son las encontradas en las cartas que se envían Pierre Fermat y Blaise Pascal que se produjo entre el verano y el otoño de 1654 en la cual simplemente se mencionaba el problema pero no se presentaba

[2] Entiéndase necesidad fenomenológica como necesidades del mundo físico o fenómenos de la naturaleza.

ninguna solución a este, dando a entender que tanto Pascal como Fermat conocían dicha solución y no era necesario escribirla en la correspondencia que se enviaban.

2- Christiaan Huygens, representa el juego con el siguiente diagrama (ver figura 1.1.), en el que se han enumerado las partidas en sentido contrario a la ocurrencia cronológica de las mismas.

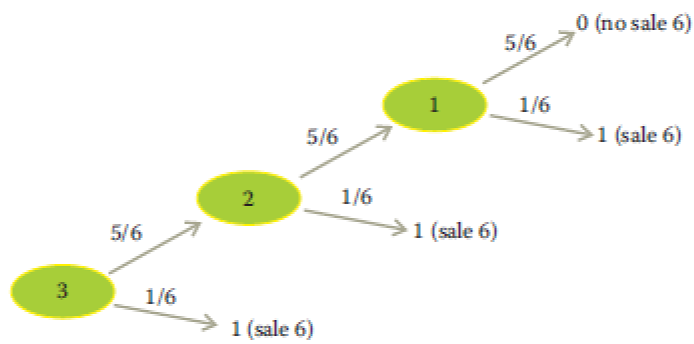


Figura 1.1 Primer paso de Huygens

Usando su proposición 3[3] Huygens valora la partida número 1 de este juego. Si el premio es 0 (si pierde la partida) y 1 (si la gana), el valor esperado de esta partida para el jugador que lanza es:

$$e_1 = \frac{5}{6}(0) + \frac{1}{6}(1) = \frac{1}{6}$$

A continuación se sustituye la partida 1 por su valor en e_1. (Ver figura 1.2)

[3] Siendo p el número de casos en que se puede corresponder a y q el número de casos en que puede hacerlo b, asumiendo que todos los casos son igualmente posibles, mi esperanza será igual a $\frac{pa+qb}{p+q}$

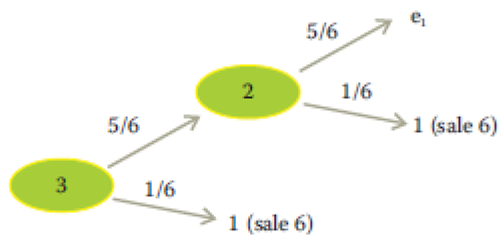


Figura 1.2 segundo paso de Huygens

Entonces, la valoración de la segunda partida para el jugador que lanza (usando de nuevo la proposición 3) es:

$$e_2 = \frac{5}{6}(e_1) + \frac{1}{6}\,(1) = \frac{5}{6}(e_1) + \frac{1}{6}$$

En el siguiente paso (ver figura 1.4), Huygens sustituye esa segunda partida por su valoración y consigue así el valor esperado de la tercera.

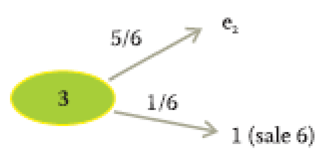


Figura 1.3 tercer paso de Huygens

Se obtiene entonces:

$$e_3 = \frac{5}{6}(e_2) + \frac{1}{6}$$

Generalizando se obtiene:

$$e_{n+1} = \frac{5}{6}(e_n) + \frac{1}{6}$$

Dónde:

$$e_1 = \frac{1}{6}$$

Esta ecuación final permite calcular la esperanza o valoración del jugador que lanza, de la partida (n+1)-ésima a partir de la n-ésima. Es decir que la ecuación relaciona los valores esperados de dos partidas consecutivas.

La ecuación puede resolverse por sustituciones sucesivas, obteniéndose como la suma de los términos de una progresión geométrica finita de razón $\frac{5}{6}$. La solución que se obtiene es:

$$e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$

Una vez obtenido, Huygens construye tres funciones sobre los enteros positivos asociadas al caso de n partidas o lanzamientos en el juego:

- $f(n) = número\ de\ alternativas\ favorables\ al\ jugador\ que\ lanza.$
- $g(n) = número\ total\ de\ alternativas.$
- $h(n) = número\ de\ alternativas\ desfavorables\ al\ jugador\ que\ lanza.$

Y concluye que:

- $f(n) = 6n - 5n$
- $g(n) = 6n$
- $h(n) = 5n$

La tabla 1.1 es la que realmente Huygens presentó como solución a este problema.

Tabla 1.1 solución final presentada por Huygens para darle solución al problema del caballero de méré

Número de lanzamientos	Chance del primero al segundo
1	1 a 5
2	11 a 25
3	91 a125
4	671 a 625 (más de 1 contra 1, añade Huygens)
5	4651 a 3125 (aproximadamente 3 a 2)
6	31031 a 15625 (aproximadamente 2 a 1)

3- Una solución en términos actuales es la siguiente:

- Sea p y q las probabilidades de éxito y fracaso que tiene cada jugador, además sea *n* la cantidad de partidas buscadas.
- Se sabe por esperanza matemática que $p + q = 1$

Entonces se obtiene la solución despejando *n:*

p (éxito en la 1ra partida)+p (fracaso en la 1ra y éxito en la 2da)+p (fracaso en la 1ra y 2da y éxito en la 3ra)+$\cdots$*+p (fracaso en las n-1 primeras partidas y éxito en la n-ésima)=* $\frac{1}{2}$.

En términos generales se obtiene la siguiente ecuación:

$$p + qp + \ q^2p + \cdots + \ q^{n-1}p = \ \frac{1}{2}$$

Sacando factor común a lo anterior tenemos que:

$$p(1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}) = \frac{1}{2}$$

Donde la suma del segundo miembro es la de una progresión geométrica limitada a razón q y teniendo en cuenta que $p = 1 - q$, obtenemos lo siguiente

$$(1-q)\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{2}$$

$$1 - q^n = \frac{1}{2}$$

$$q^n = \frac{1}{2}$$

$$n = -\frac{\ln 2}{\ln q}$$

2.2.2 Perspectiva matemática.

Este trabajo emplea los problemas combinatorios elementales los cuales incluyen problemas simples, que son aquellos problemas combinatorios que pueden ser resueltos mediante la aplicación de una sola operación combinatoria (variaciones, permutaciones, combinaciones, con o sin repetición) y los problemas compuestos, que requieren para su solución dos operaciones combinatorias y su composición por la regla de la suma o el producto.

Ahora bien para la resolución de los problemas combinatorios Dubios (citado en Batanero et al 1996) plantea cuatro modelizaciones diferentes que se relacionan entre si las cuales son:

a) Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.

b) Colocación de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas).

c) Partición de un conjunto en subconjunto de objetos.

d) Descomposición de un número natural en sumandos.

De estas cuatro modelizaciones Batanero et al (1996), plantean que la cuarta modelización se da a partir de un caso particular de la tercera, por tanto se expondrán las tres primeras modelizaciones. Para estas tres modelizaciones se plantean tres esquemas respectivamente

a. Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.

Dado un conjunto de n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los cuales se selecciona r, es necesario tener en cuantas dos condiciones:

- Tomar en consideración el orden de los elementos para distinguir dos muestras, es decir, ¿se trata de una muestra ordenada o una muestra no ordenada?
- Se pueden repetir los elementos, es decir, es una muestra con o sin remplazamiento?

Al dar respuesta a estas preguntas obtenemos las cuatro operaciones combinatorias básicas la cuales son:

Tabla 2.1 combinatoria de selección[4]

Sub- esquema	Modelo combinatorio
Selección ordenada sin reemplazamiento	Variaciones ordinarias: $V_{n,r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+r)$
Selección ordenada con reemplazamiento	Variaciones con repetición: $V_{n,r} = n.r$
Selección no ordenada sin reemplazamiento	Combinaciones ordinarias $C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{P_r}$
Selección no ordenada con reemplazamiento	Combinaciones con repetición: $CR_{n,r} = C_n + r - 1, r$

[4] Tomado de Batanero et all (1996, p.32)

A estas cuatro operaciones básicas se le debe agregar el caso particular $V_{n,n} = P_n$ el cual no debería considerarse como una nueva operación combinada ya que es un caso particular de las variaciones.

b. Colocación de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas).

Dependiendo que los objetos dentro de las cajas se les tenga en cuenta o no el orden y además que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se obtienen seis tipos básicos de sub-esquemas de colocación, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. A partir de cada uno de los seis tipos básicos, se obtienen nuevos subtipos desde las siguientes cuatro condiciones:

1. Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$).
2. Colocaciones sobreyectivas: con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).
3. Colocaciones biyectivas: con un solo objeto por caja ($n=r$).
4. Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía.

c. Partición de un conjunto en subconjunto de objetos.

Cuando se pide (o se interpreta) efectuar una partición de un conjunto de *r* elementos en *n* subconjuntos. Este tercer esquema puede verse como una nueva interpretación del esquema de colocación de *r* objetos en *n* cajas. Si olvidamos las cajas y nos fijamos en los subconjuntos de objetos que contienen, obtenemos los subconjuntos en que se puede descomponer un conjunto, pudiendo haber subconjuntos vacíos (caso de que alguna caja no contuviese ningún elemento).

Ahora bien, ya fueron evidenciados los modelos que son usados en la resolución de problemas combinatorios, por tal motivo se procede a presentar los diferentes tipos de operaciones combinatorias, las cuales son:

***Combinaciones sin repetición*.**

Dada una colección de m objetos $a_1, a_2, \ldots\ a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo $n \leq m$, llamaremos combinación de orden n a cualquier subcolección,$a_1, a_2, \ldots, a_n$ de n objetos de la colección dada.

Dos combinaciones serán distintas si algún o algunos elementos de uno de los grupos no se encuentran en el otro, es decir, si difieren en algún o algunos elementos.

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Formación y número de combinaciones: al número de combinaciones de orden $\boldsymbol{n}$ de una colección de $\boldsymbol{m}$ objetos, lo designaremos por $\boldsymbol{C_{m,n}}$ y diremos que es el número de combinaciones de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$. Su número es

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

- Demostración: se procede por inducción para formar las combinaciones de m elementos tomados n a n y calcular su número.

Para $n = 1$, las combinaciones de orden *1*, serán:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \ldots \ a_m$$

Para $n = 2$ se obtiene las combinaciones de orden dos de m elementos. Estas podrían obtenerse añadiendo a cada combinación de orden 1 los elementos que le siguen, uno a uno, es decir,

$$a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_1a_4 \quad \ldots \quad a_1a_n$$

$$a_2a_3 \quad a_2a_4 \quad \ldots \quad a_2a_n$$

$$a_3a_4 \quad \dots \quad a_3a_n$$

.

.

.

$$a_{n-1}a_n$$

Combinaciones formadas de orden $n - 1$, de modo que en cada una aparezcan los índices ordenados de menor a mayor, las combinaciones de orden n, se obtienen añadiendo a cada combinación de orden $n - 1$ cada uno de los elementos posteriores al último de los que en ella figuren.

De esta forma, todas las combinaciones n-arias así formadas son distintas, bien porque proceden de combinaciones de orden $n - 1$, o bien, por tener diferente el último elemento.

Además se obtienen todas las posibles, pues si faltara alguna, separando en una cualquiera de ellas el último elemento nos quedaría una combinación de orden $n - 1$ que no habría figurado entre las que nos habían servido de partida de orden $n - 1$ en contra de la hipótesis. Calculamos ahora el número de combinaciones.

Supongamos formadas todas las combinaciones de orden n de m elementos, es decir: $C_{m,n}$

Si en cada combinación permutamos de todos los modos posibles de n elementos que figuran en ella, obtendríamos todas las variaciones posibles de esos m elementos tomados n a n. Así pues, cada combinación da lugar a P_n variaciones, por tanto,

$$V_{m,n} = C_{m,n}.P_n \rightarrow C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Al número resultante se le llama número combinatorio y se nota en la forma

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Combinaciones con repetición.

Llamaremos combinaciones con repetición de orden n definidas en un conjunto A con m elementos, a los diferentes grupos de n elementos. Iguales o distintos, que pueden formarse con los m elementos dados, de modo que dos grupos son distintos cuando difieran, al menos, en un elemento.

El orden n de una combinación con repetición puede ser mayor que el número de elementos con los cuales se forma. Cuando $n \leq m$, entre las combinaciones con repetición figuran las combinaciones simples del mismo orden.

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Número de combinaciones con repetición: El número de combinaciones con repetición de orden $\boldsymbol{n}$ de una colección de $\boldsymbol{m}$ objetos lo simbolizaremos por $\boldsymbol{CR_{m,n}}$ y lo llamaremos combinaciones con repetición de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$. Su valor es:

$$CR_{m,n} = \binom{m-1+n}{n}$$

Variaciones sin repetición.

Dada una colección de *m* objetos $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo $n \leq m$, llamaremos variación de orden *n* a cualquier subcolección, $a_1, a_2, \dots, a_n$ de *n* objetos de la colección dada.

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Formación y número de variaciones: Al número de variaciones de orden *n* de una colección de *m* objetos lo notaremos $\boldsymbol{V_{m,n}}$ diciendo que es el número de variaciones de *m* elementos tomados *n* a *n* y

$$V_{m,n} = m \cdot (\mathrm{m}-1) \cdots\cdots (\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)$$

- Demostración: Para $V_{m,n}$, se parte del conjunto que contiene todos los elementos con los que se va a trabajar P= $\{p_1,\ p_2, p_3, \dots\ p_m\}$.

  - Ahora bien se sabe que $n \leq m$, ya que si $n > m$, cualquier n-dupla de elementos de *P* tendrá elementos repetidos.
  - Si se toma $n = 1$ se obtienen m 1-duplas las cuales serían $(p_1); (p_2); \dots (p_m)$ y por tanto tenemos que $V_{m,1} = m$.
  - Luego se realiza para el caso de $n = 2$ y se obtendrán todas las variaciones hasta $m(m-1)$. Por tanto $V_{m,2} = m(m-1)$

Para establecer una fórmula general para $V_{m,n}$, se supone que se tienen todas las $(n-1)$-uplas (sin repetición), estas $(n-1)$-uplas se obtienen a partir de tomar una de estas y al final se le agrega uno de los $(m-(n-1))$ elementos de *P* que no figuren en ella, de tal forma que por cada $(n-1)$-uplas se pueden fabricar $(m-(n-1))$ n-uplas. De esta forma se obtienen todas las n-uplas de *P* sin repetir ninguna. Por tanto:

$V_{m,n} = (m - n + 1)V_{m,n-1}$ Con $(n \leq m)$

Como ya se observó que $V_{m,1} = m$, se deduce de $(1 - 1)$ que:

$$V_{m.n} = m(m-1) \dots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde $m! = (m)(m-1)(m-2) \dots (2)(1)$ y se hace uso de la conversión de

$$0! = 1 \text{ Cuando } m = n$$

Variaciones con repetición.

Dada una colección de *m* objetos $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo *n*, llamaremos variación con repetición de orden *n* a cualquier subcolección de *n* objetos de la colección dada, pudiendo repetirse los mismos.

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Formación: Al número de variaciones con repetición de orden *n* de una colección de m objetos lo notaremos $\boldsymbol{VR_{m,n}}$ y diremos que es el número de variaciones con repetición de *m* elementos tomados *n* a *n* y

$$VR_{m,n} = \boldsymbol{m^n}$$

- Demostración: Las variaciones con repetición de orden *n* que pueden formarse con los *m* objetos $a_1, a_{2,\dots}a_m$

Para $n = 1$, las variaciones con repetición de orden 1 serían:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \qquad a_m$$

Es decir,

$$VR_{m,1} = m$$

Para obtener las de orden dos ($n = 2$), añadimos a cada una de las de orden 1, cada uno de los demás elementos, incluido el mismo, o sea,

$$a_1a_1 \quad a_2a_1 \quad a_3a_1 \quad \dots \quad a_ma_1$$

$$a_1a_2 \quad a_2a_2 \quad a_3a_2 \quad \dots \quad a_ma_2$$

$$a_1a_3 \quad a_2a_3 \quad a_3a_3 \quad \dots \quad a_ma_3$$

.

.

.

$$a_1a_m \quad a_2a_m \quad a_3a_m \quad \dots \quad a_ma_m$$

Entonces, por cada variación con repetición de orden 1, habrá *m* variaciones con repetición de orden 2, luego,

$$VR_{m,2} = m.VR_{m,1}$$

Supongamos obtenidas las de orden $m - 1$.

Para obtener las de orden *m* añadimos a cada una de ellas, cada uno de los demás elementos, incluido el mismo. Entonces,

$$VR_{m,n} = m.VR_{m,n-1}$$

Tendremos, por tanto,

$$VR_{m,1} = m$$

$$VR_{m,2} = m.VR_{m,1}$$

$$VR_{m,2} = m.VR_{m,2}$$

.

.

.

$$VR_{m,n-1} = m.VR_{m,n-2}$$

$$VR_{m,n} = m.VR_{m,n-1}$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, tendremos

$$VR_{m,1}.VR_{m,2} \dots VR_{m,n-1}.VR_{m,n} = m.m.VR_{m,1}.m.VR_{m,2} \dots m.VR_{m,n-2}.m.VR_{m,n-1}$$

De aquí que

$$VR_{m,n} = m^n$$

Sea el número de variaciones con repetición de orden *n* que pueden formarse con *m* elementos dados.

Permutaciones sin repetición.

Dada una colección de *n* objetos $a_1, a_1, \dots, a_n$, llamaremos permutación a cualquier ordenación de los mismos. Por tanto, dos permutaciones serán distintas si los objetos están colocados en orden diferente.

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Formación: el número de permutaciones de n objetos lo designaremos por $\boldsymbol{P_n}$ y su valor es, por el principio de multiplicación,

$$P_n = 1 \cdot 2 \ \cdot 3 \cdot \cdots \cdot \ (n-1).n$$

A este número se le llama factorial de n y se nota $n!$, es decir,

$$n! = n \cdot (\mathrm{n}-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Obsérvese que

$$n! = (n-1)! \cdot \mathrm{n}$$

Permutaciones con repetición.

Sea una colección de *n* objetos entre los que hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí pero distintos de los $n_1 n_3$ iguales entre sí, pero distintos de los n_1 y n_2 y así sucesivamente hasta n_r iguales entre sí, pero distintos de todos los anteriores. Llamaremos permutaciones con repetición a las distintas formas de ordenarlos.

Obsérvese que dos permutaciones cualesquiera serán diferentes, cuando se diferencien, al menos, por el lugar que ocupan dos elementos distintos.

Las notaremos por:

$$PR_n^{n_1,n_{2,\ldots,}n_r}$$

Donde, $n_1 + n_2 + \cdots + \ n_r = n$

A continuación se presentan aspectos fundamentales para dar un tratamiento adecuado a las situaciones que abordan los distintos casos de este tipo de combinatoria

- Formación: El número de permutaciones con repetición de *n* elementos en las condiciones de la definición anterior, es

$$PR_n^{n_1,n_{2,\ldots,}n_r} = \frac{P_n}{P_{n1}.P_{n2}\ \ldots..P_{nr}} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ \ldots..n_r!}$$

- Demostración: Se supone que tenemos formadas todas las permutaciones con repetición:

$$PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)}$$

Si se sustituye los n_1 elementos iguales por otros distintos y luego los ordenamos de todos los modos posibles conservando en sus puestos los $n - n_1$ restantes, de cada grupo de este cuadro se deducirán $n_1!$ distintos y se obtiene

$$n_1!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)}$$

Si en este cuadro se sustituye los n_2 elementos iguales por otros distintos y procedemos de la misma forma, se obtiene

$$n_1!\,n_2!\dots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)}\text{ Grupos.}$$

Si se continúa con este proceso hasta llegar al último grupo de elementos iguales, resultará un total de

$$n_1!\,n_2!\dots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)}$$

Grupos que constituyen las permutaciones de *n* elementos distintos, luego,

$$n_1!\,n_2!\dots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)} = n! \rightarrow\ PR_{n,(n_1,n_2,\dots n_r)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}$$

En resumen, es importante mencionar que en la resolución de problemas combinatorios se abordan conceptos básicos empleados de manera implícita como:

- Conjuntos y subconjuntos discretos.
- Relación de equivalencia.
- Correspondencia entre conjuntos.
- Producto cartesiano.

- Operaciones con conjuntos.
- Partición de un conjunto; equipotencia.

Así mismo, se hace uso de reglas como:

-Regla del producto: esta regla permite determinar el número de formas en que se puede efectuar una elección que consta de varias etapas.

- Regla de la suma: esta regla permite determinar el número de formas en que se puede efectuar una elección que consta de dos o más configuraciones.
- Regla del cociente: Este regla se usa para relacionar entre si las operaciones combinatorias. Esto implica establecer una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias.

Teniendo en cuenta los conocimientos básicos y las reglas para resolver problemas combinatorios, se puede decir que:

- La Combinatoria estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos, también se debe tener en cuenta que en todo problema combinatorio hay dos conceptos claves que se deben distinguir, los cuales son:
  - la población: es el conjunto de elementos que se está estudiando, en las operaciones combinatorias se denomina m al número de elementos que contiene este conjunto.
  - La muestra[5]: es un subconjunto de la población, y en las operaciones combinatorias se denomina n al número de elementos que contiene este conjunto.

[5] La muestra se puede dar en los tres modelos presentados con anterioridad (modelo de selección, modelo de colocación y modelo de partición).

2.2.3 Perspectiva didáctica.

A continuación se presentan los aspectos didácticos con respecto al aprendizaje de la combinatoria. Primero se muestran las dificultades y posibles errores que pueden ocurrir al momento de resolver la prueba escrita, por tal motivo se toma los aportes de Socas (1997, p 125-148) y Batanero et al (1996, p 77-79), por ultimo se expone los sistemas de representación que se pueden usar en la combinatoria.

- **Dificultades asociadas al pensamiento Combinatorio**

Al momento de resolver problemas combinatorios los estudiantes pueden llegar a presentar dificultades, estas llegan a ser de diversa naturaleza. Según Socas (1997) las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se pueden clasificar en cinco categorías: aquellas inherentes a la naturaleza de las matemáticas, que corresponde a las dos primeras categorías; la ligada a los procesos de enseñanza; aquellas relacionadas con los procesos cognitivos de los estudiantes y la que se presenta por falta de actitud racional hacia las matemáticas. Para el interés de esta investigación, sólo se mencionan algunas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dado que no es del interés de este trabajo profundizar en dichas dificultades.

Las Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos se relacionan con el lenguaje en la comprensión y comunicación de dichos objetos y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos. Este tipo de dificultad es muy común en los problemas combinatorios, ya que como lo plantea Batanero et al (1996) los enunciados de los problemas combinatorios en ocasiones tienen convenios implícitos que no son claros para el estudiante; como por ejemplo en los problemas combinatorios, los estudiantes están acostumbrados a usar tan sólo la hipótesis dada en los enunciados, pero cuando se enfrentan a problemas compuestos, en donde deben fijar una o más variables para poder dar una respuesta válida, es decir, añadir restricciones adicionales a las que ya están impuestas por el mismo problema, los estudiantes no logran dar una respuesta acertada, dado que no logran identificarlas. Batanero et al (1996).

Otra dificultad, radica en el uso de distintas notaciones para las operaciones combinatorias. Tales como:

- ✓ C_m^n para el concepto teórico
- ✓ $\binom{m}{n}$ para expresar el numero combinatorio correspondiente

Los estudiantes pueden recordar la fórmula del cálculo del número combinatorio $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ pero al momento de asociar la posición de los parámetros ($m\ y\ n$) en la fórmula C_m^n y la notación del número combinatorio, el estudiante puede confundir el cálculo final ($\binom{n}{m}$) a pesar de que ha identificado la operación combinatoria necesaria para resolver la tarea. Batanero et al (1996, p. 78).

Igualmente la presencia de dificultades, origina errores en el tratamiento matemático tales como:

Errores asociados a dificultades del lenguaje

Indica que el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos estudiantes un problema similar al aprendizaje. Estos errores son producto del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su incorrecto aprendizaje. Una carencia de comprensión de los textos escolares matemáticos puede provocar errores; por ello, la resolución de problemas de aplicación está básicamente libre a errores de traducción a partir de un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

Errores asociados a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos

Se refiere a la inclusión de todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Este tipo de errores se originan por deficiencias en el uso de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

Errores originados por asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento

La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los estudiantes siguen desarrollando operaciones cognitivas incluso cuando las condiciones elementales de tareas matemáticas puestas en juego se hayan modificado. Permanecen en la mente aspectos del contenido o del proceso de solución, cohibiendo el procesamiento de nueva información. Este tipo de errores trae consigo cinco subtipos:

- Errores por perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que las operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.

- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas de aplicación.

Errores originados por la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

Resalta la manifestación reiterada por la aplicación de reglas o estrategias semejantes en contenidos diferentes, puesto que el razonamiento por analogía no siempre funciona en Matemática.

Sistemas de representación

Al momento de solucionar tareas que involucran los diferentes tipos de combinatoria, el estudiante puede usar distintas clases de representación, según Batanero et al (1996), entre estas tenemos:

- Conjuntos: es la forma en que los estudiantes agrupan los objetos presentes en el problema que tengan características similares y a partir de estos grupos podrán ir determinado cuáles son los posibles arreglos que se pueden presentar en la tarea planteada.

  Por ejemplo: ¿De cuantas formas se pueden colocar tres bolas (azul, negra, roja) en dos cajas? (véase figura 2.1)

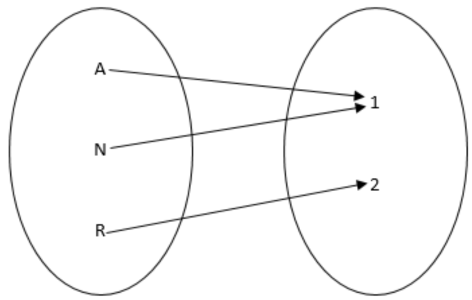


Figura 2.1 Colocación de tres bolas en dos cajas (conjuntos)

- Fórmulas: en este sistema de representación los estudiantes se remiten al uso directo de la fórmula, teniendo en cuenta la técnica necesaria para resolver la tarea.

Por ejemplo: para el caso anterior tenemos que:

$$CR_{3.2} = 6$$

- Numérico: en este sistema de representación los estudiantes hacen uso del tanteo, exploración y regla del producto como técnica de resolución.
- Gráficos: este sistema de representación es donde los estudiantes hacen uso de los diagramas de árbol, grafos o hacen uso de celdas o cajas, para representar la solución del problema.

Por ejemplo: otra forma de solucionar la tarea presentada es:

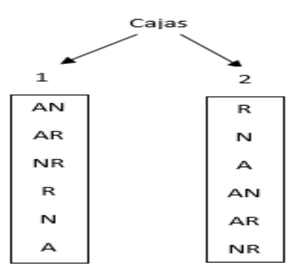


Figura 2.2 Colocación de tres bolas en dos cajas (gráfico)

2.3 Teoría Antropológica de lo Didáctico

La teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard (1999), es "antropológica" dado que sitúa la actividad matemática y la actividad del estudio de las matemáticas, como un conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales (Bosch & Gascón, 2009). En este sentido la TAD considera que la actividad humana puede describirse con un modelo único, el cual se denomina "praxeología".

Ahora bien, la TAD propone que la actividad matemática puede ser modelada mediante las praxeologías (praxis-logos), dado que la noción de praxeología permite entender la actividad matemática como una actividad humana más, es por ello que en toda actividad humana se pude distinguir dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del "saber hacer", la cual consta de un conjunto de tareas, las cuales se presentan en diferentes tipos de problemas (T) y las formas en la que estos problemas son resueltos mediante un conjunto de técnicas (t) sistemáticas.
- El nivel del logos o del "saber" en el cual se ubican en un primer nivel aquellos discursos en donde hace la descripción, explicación y la justificación de las técnicas que se utilizan y se le llaman tecnologías (θ) y en un segundo nivel, la fundamentación de la tecnología, a este nivel se le llama teoría (Θ). La teoría asume un papel descriptivo y justificativo respecto a la tecnología.

Con estos dos niveles (*praxis y logos)*, o estos cuatro componentes (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría) se pude decir que todo lo que se enseña y se aprende dentro de una institución educativa se puede organizar en praxeologías matemáticas. Ahora bien, las praxeologías matemáticas no aparecen de forma instantánea sino que son el resultado de un proceso de estudio de una construcción matemática, en estos procesos de construcción matemática se poseen características que estarán presentes en todos estos, los cuales son llamados momentos didácticos[6].

La TAD propone un modelo que describe la dinámica que tiene el estudio de las organizaciones matemáticas, a partir de las tareas problemáticas asociadas a estas.

Ahora bien, la TAD propone el desarrollo de una obra matemática para de este modo organizar los procesos didácticos dentro de una institución.

2.3.1 Obra matemática

Tal como lo plantea Gascón, J. (1998), La obra matemática (OM) es el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables:

1- La práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas.
2- El discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos niveles, el de las tecnologías y el de las teorías.

2.3.2 Obra didáctica.

La reconstrucción de la Obra Didáctica (desde ahora OD) está concebida a partir de la toma de cinco tareas las cuales se tomaron del documento realizado por Batanero et al (1996).

Además, se presenta las posibles dificultades, obstáculos y errores que pueden ser presentados al momento de resolver problemas combinatorios, además de presentar los sistemas

[6] Los momentos didácticos son todas aquellas "dimensiones que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de las características culturales, sociales, individuales, etc."(Lucas, C. 2010, p 30)

de representación y los diversos fenómenos en los cuales puede hacerse uso de los conceptos ya mencionados.

CAPÍTULO 3

Metodología

El presente trabajo se desarrolla en la línea de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y corresponde a un trabajo de tipo mixto, en tanto que analiza aspectos cualitativos respecto al conocimiento que movilizan los estudiantes durante una prueba aplicada, como aspectos cuantitativos para presentar los porcentajes obtenidos durante el análisis y clasificación de la muestra tomada para el estudio. Se aborda como método de investigación para este proyecto el estudio de casos, ya que dicho método tiene como característica básica abordar de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución Stake (citado en Grupo L.A.C.E 1999).

Además, según Sancho (citado en Grupo L.A.C.E 1999) el estudio de caso no es una técnica específica, es una forma de organizar los datos sociales para mantener el carácter unitario del objeto social estudiado. La diferencia principal entre el estudio de caso y otro tipo de estudios es que el foco de atención es el caso, no toda la población de casos; lo que no quita que pueda haber un interés último generalizable: algún aspecto del proceso seguido o la propia metodología de análisis.

De esta forma, dicho método favorece un mayor énfasis en cada caso específico de la muestra, debido a que permite un estudio detallado de los conocimientos que manifiesta cada uno de los participantes durante la solución de una prueba que será aplicada, para conocer qué tan preparados conceptual y didácticamente pueden estar los futuros profesores que participan en este estudio para afrontar la enseñanza de la combinatoria.

Cabe añadir que el tipo de estudio de casos usado para el presente trabajo es el caso "típico", este se define en palabras de Stake (citado en Grupo L.A.C.E 1999) es una persona que representa a un grupo o comunidad. Pueden estudiarse varias personas que tienen algún aspecto en común, por lo que se espera cierta homogeneidad o coherencia en sus respuestas. Puesto que en este proyecto se piensa identificar los niveles de comprensión acerca de la combinatoria, entonces la relación que deben presentar los estudiantes que se van a escoger para realizar la prueba escrita es que hayan visto el curso análisis exploratorio de datos en un tiempo no lejano al desarrollo de este estudio.

3.1 Fases.

A continuación se presentan las fases que se llevaron acabo.

En este trabajo de investigación se distinguen cuatro fases:

- Fase 1: reconstrucción de la obra u organización matemática y su respectiva obra didáctica de la combinatoria desde lo planteado en la TAD.

Esta fase se desarrolla a partir de lo planteado en el capítulo anterior respecto a la combinatoria. De este modo, la perspectiva matemática proporciona algunos fundamentos teóricos de la combinatoria para la reconstrucción de dicha obra, en la que se abordan 6 tipos de tarea. La primera de ellas, surge del desarrollo histórico de la combinatoria y las cinco tareas restantes hacen énfasis en los distintos tipos de operaciones combinatorias. Cabe añadir que para su reconstrucción, también se realizó un estudio del programa del curso: análisis exploratorio de datos, que permitiera ver la viabilidad tanto de las tareas propuestas como de las situaciones a proponer en la prueba que sería aplicada para el interés de este trabajo.

Por otra parte, la perspectiva didáctica permite construir la obra didáctica, la cual está compuesta por los siguientes puntos: dificultades y errores, sistemas de representación; cruciales para conocer algunos aspectos de las técnicas usadas por los participantes y para analizar los posibles errores que se puedan presentar durante la solución de la prueba.

- Fase 2: rediseño y aplicación de la prueba.

En esta fase, se toma una prueba ya diseñada y usada en Roa (2000); Navarro-Pelayo (1994) la cual fue aplicada en estas dos investigaciones tanto en estudiantes de secundaria como en estudiantes de matemáticas avanzadas, para conocer las técnicas que cada uno de ellos aplica para resolver las tareas allí propuestas. De este modo, la validación de dicho instrumento se concreta a partir del estudio realizado al programa del curso “Análisis exploratorio de datos”, en tanto que las tareas allí propuestas, van en la misma dirección de algunos de los objetivos planteados en el programa. No obstante, el rediseño que se realiza alude a ciertos aspectos del lenguaje, en cuanto al contexto.

- Fase 3: análisis de los resultados de la prueba desde la teoría de la comprensión (Sierpinska) y la TAD.

En esta fase, a partir de los resultados obtenidos durante la aplicación de la prueba, se construyen rejillas desde los elementos propuestos en la TAD que facilitan tanto la organización como el análisis de los datos recolectados. Dicha rejilla viene estructurada de la siguiente manera: porcentaje de estudiantes que utilizaron una técnica en común, imagen de la técnica usada, errores expuestos, sistemas de representación usados y el nivel alcanzado.

- Fase 4: conclusiones.

En esta fase se exponen las conclusiones más relevantes que arrojaron los análisis de la prueba, con el fin de proporcionar una valiosa información a la universidad y algunas reflexiones en cuánto a la formación conceptual y didáctica de los futuros profesores.

Aproximación contextual

El trabajo se realiza con 16 estudiantes de la carrera licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle Sede Norte del Cauca ubicada en Santander de Quilichao, los cuáles están terminando el curso de análisis exploratorio de datos.

En cuanto a la prueba escrita, ésta se implementó en el mes de noviembre del 2016 durante una sesión de clase y el tiempo dado fue de 2 horas. Antes de la aplicación se les explica a los estudiantes los objetivos del trabajo y se les pide realizar la prueba con claridad para reconocer las técnicas empleadas por ellos y la justificación o argumentación de los procesos que realicen. La mayoría de los estudiantes tuvo disponibilidad al momento de contestar.

Instrumentos de la Investigación

En este apartado se presenta en cada una de las fases, los instrumentos utilizados para llevar a cabo el presente trabajo, los cuales son fundamentales para la recolección y organización de la información que conduzca al respectivo análisis desde el marco conceptual referenciado y al logro de los objetivos propuestos.

Fase 1: Reconstrucción de la organización matemática de la combinatoria desde lo planteado en la TAD.

A continuación se presenta el estudio realizado al programa del curso “análisis exploratorio de datos”, y su relación con las tareas propuestas y escritas en los cuadernos de los estudiantes. Dicho estudio es base para la realización de la obra matemática y para definir la pertinencia de la prueba a aplicar.

- ***Estudio del Programa “Análisis exploratorio de Datos”***

A continuación se presenta un estudio sobre el programa (ver anexo 1) “análisis exploratorio de datos”.

Es de suma importancia mencionar que de acuerdo a los propósitos, contenido y enfoque del programa la prueba implementada fue pertinente, en tanto que cada tarea propuesta en ella va en la misma línea de formación que se abordó durante el curso, además de dar respuesta a los dos primeros propósitos.

Primero porque da cuenta de uno de los temas principales como lo son las técnicas de conteo. Segundo porque de acuerdo a las situaciones observadas en los cuadernos, los estudiantes en la prueba se encontraron con distintas tareas que involucraban los diferentes tipos de combinatoria las cuales fueron similares a las vistas en clase.

Estudio realizados a los cuadernos “tareas propuestas”.

A continuación se presenta un breve estudio sobre las tareas propuestas con relación a la combinatoria, las cuales fueron tomadas de los cuadernos de los estudiantes. Cabe decir que para llevar acabo lo anterior se tomó 4 cuadernos. Igualmente es pertinente aclarar que dicho estudio se realizó con el propósito de analizar si las tareas que se escogieron para hacer la OM están relacionadas con las situaciones planteadas en clases.

1) Se tiene cuatro libros de matemáticas, dos de química y seis de física, que se colocan en una estantería, cuántas posiciones distintas admiten si:

¿Los libros de cada disciplina están juntos?

Esta tarea hace referencia a una permutación sin repetición

2) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

Esta tarea hace referencia a una permutación con repetición

3) El seleccionador de tenis de un país elige a cinco tenista para jugar la copa Davis, ¿cuántas parejas distintas puede elegir para cada ganador, el partido de dobles?

Esta tarea hace referencia a una combinación sin repetición

4) Cuántas banderas tricolores (tres colores no repetidos) de tres franjas horizontales se pueden construir al disponer de cinco telas de colores distintos

Esta tarea hace referencia a una variación sin repetición

5) Al poner un CD con 11 temas de músicas en el ordenador, selecciono el modo “reproducción aleatoria”, de tal forma que el programa escoge al azar (sin repeticiones) el orden de los temas. ¿De cuántas formas se pueden escuchar las pistas?

Esta tarea hace referencia a una permutación sin repetición

6) En mi colección tengo 20 CD de música, y quiero regalar 4 a un amigo, ¿cuántas posibilidades de regalo tengo?

Esta tarea hace referencia a una combinación sin repetición

7) Se desea sentar en hilera a cinco hombres y cuatro mujeres de manera que las mujeres ocupen los lugares pares, ¿de cuántas maneras es posible hacer esto?

Esta tarea hace referencia a una permutación sin repetición.

8) ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) si:

Puede haber repeticiones

Esta tarea hace referencia a una variación con repetición

De acuerdo a lo anterior se pudo observar que en clases los estudiantes trabajaron situaciones simples que involucraban cinco tipos de combinatoria, además fue evidente la ausencia de tareas compuestas donde debían hacer uso de dos tipos de combinatoria.

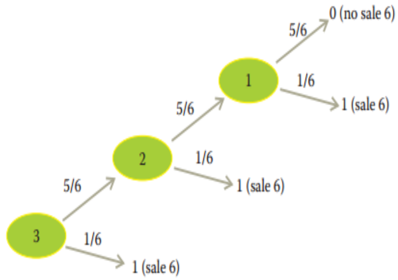
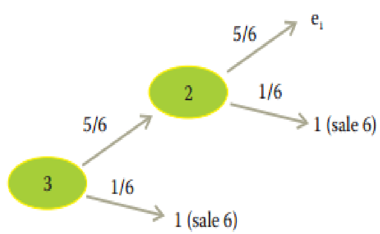
Obra matemática

A continuación se presenta la reconstrucción de la obra matemática respecto a la combinatoria, en ella se proponen seis tareas que permiten el desarrollo de ésta. La primera tarea es originada a través de la historia, la cual es el problema de "*la resolución dada al problema de los dados del caballero de Méré*".

Por otra parte, las cinco tareas restantes se toman del documento realizado por Batanero et al (1996) por la validez y confiabilidad que se origina de los resultados de investigación, además porque cada una da cuenta de los tipos de combinatoria que fueron usadas en la prueba.

Tabla 3.1 Tarea 0 Obra Matemática

Tarea 0	*"Se propone lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría por lo menos un seis; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego.*	
Técnica	Diagrama de árbol y despeje de ecuaciones	Uso de propiedades
tecnología	-Primero se realiza el diagrama de árbol para identificar los posibles resultados cada vez que se lanza un dado (éxito y fracaso).	Sea $p =$ éxito y $q =$ fracaso Se parte del hecho de que la suma de las probabilidades es igual a 1, entonces:

	 A partir de ese esquema se establece una fórmula que permite determinar la probabilidad de éxito en el primer lanzamiento. $$e_1 = \frac{5}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$ Luego se realiza un segundo esquema, en el cual no se involucra el primer lanzamiento pero si se tiene en cuenta la primera fórmula con el fin de plantear una segunda fórmula.  $$e_2 = \frac{5}{6} \cdot e_1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6} \cdot e_1 + \frac{1}{6}$$ En el siguiente paso, Huygens sustituye esa segunda partida por su valoración y consigue	$$p + q = 1$$ Ahora bien, n es el número buscado de partidas, la solución se encuentra despejando n en la igualdad: *P[éxito en la 1ª] + P[fracaso en la 1ª y éxito en la 2ª] + P[fracaso en la 1ª y 2ª y éxito en la 3ª] + … + P[fracaso en las n-1 primeras partidas y éxito en la n-ésima]* $= \frac{1}{2}$ Cabe mencionar que se iguala a $\frac{1}{2}$, ya que las dos personas tienen la misma posibilidad de ganar el juego, es decir, el juego es equilibrado. Luego, la ecuación anterior se puede plantear de la siguiente manera: $$p + qp + q^2p + \cdots + q^{n-1} = \frac{1}{2}$$ Sacando factor común tenemos:

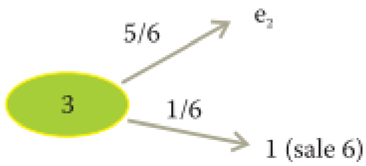
	así el valor esperado de la tercera. El esquema refleja la nueva sustitución.  Obteniendo entonces: $$e_3 = \frac{5}{6} \cdot e_2 + \frac{1}{6}$$ Este proceso se realiza hasta terminar todos los lanzamientos que se requieran. Por último se establece la fórmula general que va a permitir determinar la probabilidad de éxito para cualquier *n* cantidad de lanzamientos. $$e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$	$p(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{1}{2}$ Donde la suma del segundo dato es la de una progresión geométrica limitada de razón q, y teniendo en cuenta que $p = 1 - q$ $$(1-q)\left(\frac{1 - q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{2}$$ $$1 - q^n = \frac{1}{2}$$ $$n = -\frac{\ln 2}{\ln q}$$
Teoría		Inducción matemática

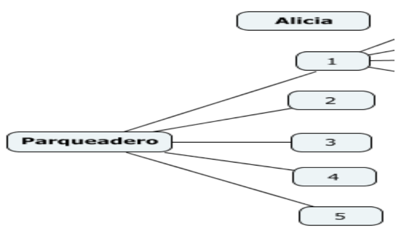
Tabla 3.2 Tarea 1 Obra Matemática

Tarea 1	*El parqueadero donde vive Alicia y Benito tiene cinco lugares para estacionar el carro. Cómo ellos son los únicos que tienen carro, pueden colocar su*

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">auto en el lugar que prefieran sí este no está ocupado. Este es el esquema del parqueadero: está enumerado del número uno hasta el cinco.

-Representar todas las formas diferentes en que Alicia y Benito pueden estacionar el carro.</td></tr>
<tr><td>Técnica.</td><td>Regla del producto.

Supongamos que la primera persona en llegar a estacionar su carro es Alicia:



Por ende, Ella va tener 5 lugares disponibles para estacionar su carro.

Luego, llega a estacionar el carro Benito. Si Alicia estaciono su carro en el lugar #1, Benito va tener disponible 4 lugares (#2, #3, #4, #5).</td><td>Fórmula.

Como el orden de llegada de Alicia y Benito no altera las configuraciones finales (Si Alicia llega primero y Benito de segundo es igual a que llegue Benito de primero y Alicia de segunda), ya que, el que llegue de primero va a tener 5 posibilidades y el segundo cuatro posibilidades.

Dado estas condiciones se observa que esta tarea es una variación sin repetición ($VR_{m,n}$), para la cual se establece la siguiente fórmula de resolución:

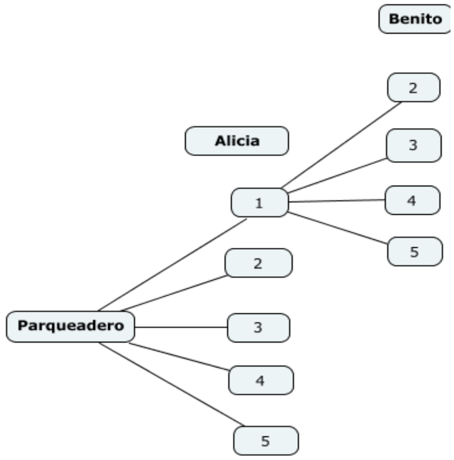
$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$
Donde:

m: total de elementos

n: elementos que se van a tomar

por consiguiente,

$$V_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$</td></tr>
</table>

	 Es decir, que la persona que siempre llegue en segundo lugar va tener cuatro sitios disponibles para estacionar su carro, independientemente de donde este el otro carro del que llegó primero. Ahora se hace uso de la regla del producto para determinar todas las formas posibles en que Alicia y Benito pueden estacionar su carro. 1^{ra} 2^{da} $5 \quad x \quad 4 \quad = 20$	
Tecnología.	Procederemos por inducción sobre el número de conjuntos, n.	Para $V_{m,n}$, se parte del conjunto que contiene todos los elementos con los que se va a trabajar P= $\{p_1,\ p_2, p_3, \ldots\ p_m\}$.

	• Veamos si el teorema es cierto para$n = 2$. En efecto, sean $A_1 \; y \; A_2$ dos conjuntos finitos no vacíos, $A_1 = \{a_1, a_2, \dots a_q\}$ Y $A_2\{b_1, b_2, \dots b_r\}$ Por definición de producto cartesiano, se tiene que $A_1 \; x \; A_2 = \{(a_i, b_j): a_i \in \; A_1 \; y \; b_j \in A_2$ para cada uno de los $a_1, 1 \leq i \leq q$, tendremos los pares distintos, $(a_i, b_i), (a_i, b_2), \dots (a_i, b_r)$ Es decir, r pares o r elementos de $A_1 \; x \; A_2$. Haciendo lo mismo para cada uno de los $a_i \in A_i, 1 \leq i \leq q$, tendremos $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_r)$ $(a_2, b_1)(a_2, b_2), \dots, (a_2, b_r)$ $\dots$ $(a_q, b_1), (a_q, b_2), \dots, (a_q, b_r)$	• Ahora bien se sabe que $n \leq m$, ya que si $n > m$, cualquier n-dupla de elementos de P tendrá elementos repetidos. • Si se toma $n = 1$ se obtienen m 1-duplas las cuales serían $(p_1); (p_2); \dots (p_m)$ y por tanto tenemos que $V_{m,1} = m$. • Luego se realiza para el caso de $n = 2$ y se obtendrán todas las variaciones hasta $m(m-1)$. Por tanto $V_{m,2} = m(m-1)$ Para establecer una fórmula general para $V_{m,n}$, se supone que se tienen todas las $(n-1)$-uplas (sin repetición), estas $(n-1)$-uplas se obtienen a partir de tomar una de estas y al final se le agrega uno de los $(m-(n-1))$ elementos de P que no figuren en ella, de tal forma que por cada $(n-1)$-uplas se pueden fabricar $(m-(n-1))$ n-uplas. De esta forma se obtienen todas las n-uplas de P sin repetir ninguna. Por tanto:

	o sea, un total de $(q)(r)$ pares distintos en$A_1\ x\ A_2$, luego $|A_1\ x\ A_2| = (q)(r) = |A_1|\ x\ |A_2|$ Por tanto, la proposición es cierta para $n = 2$. Ahora bien supongamos que es cierta para $n = p$, es decir si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos. Entonces, $\left|A_1\ x\ A_2\ x \ldots x\ A_p\right| = |A_1|\ x\ |A_2| \ldots \left|A_p\right|$ Veamos si la proposición es cierta para $n = p + 1$ En efecto, si $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces $\left|A_1\ x\ A_2\ x \ldots x\ A_p\ x\ \ A_{p+1}\right|$ $= \left|(A_1\ x\ A_2\ x \ldots x\ A_p\ )\ x\ \ A_{p+1}\right|$ $= \left|A_1\ x\ A_2\ x \ldots x\ A_p\right|\ x\ \left|\ A_{p+1}\right|$	$V_{m,n} = (m-n+1)V_{m,n-1}$ con $(n \leq m)$ Como ya se observó que $V_{m,1} = m$, se deduce de $(1-1)$ que: $V_{m.n} = m(m-1) \ldots (m-n+1)$ $= \dfrac{m!}{(m-n)!}$ Donde $m! = (m)(m-1)(m-2) \ldots (2)(1)$ y se hace uso de la conversión de $0! = 1$ cuando $m = n$

<table>
<tr><td></td><td>$= |A_1 \mid x \mid A_2| \, x \ldots x \left| A_p \right| x \left| \ A_{p+1} \right|$

Consecuentemente, por el Principio de inducción matemática, el teorema es cierto para todo entero
Positivo, n, es decir,
$|A_1 \, x \, A_2 \, x \ldots x \, A_n|$
$= |A_1| \, x \, |A_2| \ldots |A_n|$</td><td></td></tr>
<tr><td>Teoría.</td><td colspan="2">Esta tarea se resuelve a partir de la estructura de la combinatoria, pero teniendo en cuenta que es un caso específico de esta , debido a que tiene unas condiciones:
Son variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n (m ≥ n) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:
- No entran todos los elementos.
- Si importa el orden.
No se repiten los elementos.</td></tr>
</table>

Tabla 3.3 tarea 2 Obra Matemática

Tarea 2	*En el despacho de una oficina trabajan cuatro personas Alfonso, Berta, Carlos y Delia, cada una de las cuales tienen su propia mesa. A principio de año el secretario de la oficina recibe dos ejemplares idénticos de la guía telefónica. No sabe cómo colocarla sobre las mesas, porque al faltarle dos ejemplares, piensan que dos de las personas van a molestarse.*

	¿De cuántas formas diferentes puede colocarse las guías de teléfono encima de las cuatro mesas, si solo diferenciamos en qué mesa coloca la guía? (solo puede poner una guía en cada mesa). Escribe todas las posibilidades de colocación.	
Técnica.	Fórmula Una configuración está formada por el modo de seleccionar 2 mesas entre 4 posibles. Además, en cada mesa solo va una guía telefónica y éstas no se pueden repetir. Seguido de ello, las guías telefónicas son iguales, el orden de selección de las mesas no produce nuevas configuraciones, es decir, el orden de colocación no influye en la formación de estas. Por ello, estas son las condiciones de formación de las combinaciones sin repetición. $C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ Donde,	Tanteo Sea *(1, 2)* las guías telefónicas. Sea *(A, B, C, D)* las mesas. A continuación se presenta las diferentes formas de colocar las guías sobre las mesas: *1A, 2B* *1B, 2C* *1C, 2D* *1A, 2C* *1B, 2D* *1A, 2D*

	m: Total de elementos n: elementos tomados $C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$	
Tecnología.	Combinación sin repetición Se procede por inducción para formar las combinaciones de m elementos tomados n a n y calcular su número. Para *n = 1*, las combinaciones de orden *1*, serán: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \; ... \; a_m$ Para $n = 2$ se obtiene las combinaciones de orden dos de *m* elementos. Estas podrían obtenerse añadiendo a cada combinación de orden 1 los elementos que le siguen, uno a uno, es decir, $a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_1a_4 \quad \dots \quad a_1a_n$ $a_2a_3 \quad a_2a_4 \quad \dots \quad a_2a_n$ $a_3a_4 \quad \dots \quad a_3a_n$ . . . $a_{n-1}a_n$ Supuestas formadas las de orden $n - 1$, de modo que en cada una aparezcan los índices ordenados de menor a mayor, las combinaciones de orden *n*, se obtienen añadiendo a cada combinación de orden n – 1 cada uno de los elementos posteriores al último de los que en ella f figuren.	

	De esta forma, todas las combinaciones n-arias así formadas son distintas, bien porque proceden de combinaciones de orden $n - 1$, o bien, por tener diferente el último elemento. Además se obtienen todas las posibles, pues si faltara alguna, separando en una cualquiera de ellas el último elemento nos quedaría una combinación de orden n – 1 que no habría figurado entre las que nos habían servido de partida de orden n − 1 en contra de la hipótesis. Calculamos ahora el número de combinaciones. Supongamos formadas todas las combinaciones de orden n de m elementos, es decir: $C_{m,n}$. Si en cada combinación permutamos de todos los modos posibles de n elementos que figuran en ella, obtendríamos todas las variaciones posibles de esos m elementos tomados n a n. Así pues, cada combinación da lugar a P_n variaciones, por tanto, $$V_{m,n} = C_{m,n}.P_n \rightarrow C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$ Al número resultante se le llama número combinatorio y se nota en la forma $$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$
Teoría.	Esta tarea se resuelve a partir de la estructura de la combinatoria, pero teniendo en cuenta que es un caso específico de esta , debido a que tiene unas condiciones:

	Se llama combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n *($m \geq n$)* a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que: • No entran todos los elementos. • No importa el orden. No se repiten los elementos.

Tabla 3.4 tarea 3 Obra Matemática

Tarea 3	*Si lanzamos al aire una moneda, vamos a obtener dos resultados cara o cruz, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener a partir del lanzamiento de dos, tres, cuatro,…, n monedas?*	
Técnica.	Exploración Se parte de los dos resultados que se pueden dar al lanzar la moneda (cara, sello) Se repite el procedimiento hasta llegar a n lanzamientos: $\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}$ $2 \quad 2 \quad 2 \quad \ldots \quad n$	Fórmula Se parte del hecho de que se obtiene dos sucesos al lanzar la moneda (cara, sello) Por ende, siempre que se lance una moneda se va seguir obteniendo 2 resultados, es decir la constante es 2 Esto permite decir que la repetición es importante, por esta razón, tales condiciones permiten plantear lo siguiente: $VR_{2.n} = 2^n$

	-A partir de esto aplicamos regla del producto para establecer lo siguiente: $2\ x\ 2\ x\ 2\ x \ldots x\ n = \ 2^n$	
Tecnología.		Variaciones con repetición Las variaciones con repetición de orden *n* que pueden formarse con los m objetos $a_1, a_{2,\ldots} a_m$ Para $n = 1$, las variaciones con repetición de orden 1 serian: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \qquad a_m$ Es decir, $VR_{m,1} = m$ Para obtener las de orden dos $(n = 2)$, añadimos a cada una de las de orden 1, cada uno de los demás elementos, incluido el mismo, o sea, $a_1a_1 \quad a_2a_1 \quad a_3a_1 \quad \ldots \quad a_ma_1$ $a_1a_2 \quad a_2a_2 \quad a_3a_2 \quad \ldots \quad a_ma_2$ $a_1a_3 \quad a_2a_3 \quad a_3a_3 \quad \ldots \quad a_ma_3$ . . . $a_1a_m \quad a_2a_m \quad a_3a_m \quad \ldots \quad a_ma_m$

		Entonces, por cada variación con repetición de orden 1, habrá m variaciones con repetición de orden 2, luego, $$VR_{m,2} = m.VR_{m,1}$$ Supongamos obtenidas las de orden $m-1$. Para obtener las de orden *m* añadimos a cada una de ellas, cada uno de los demás elementos, incluido el mismo. Entonces, $$VR_{m,n} = m.VR_{m,n-1}$$ Tendremos, por tanto, $$VR_{m,1} = m$$ $$VR_{m,2} = m.VR_{m,1}$$ $$VR_{m,2} = m.VR_{m,2}$$ . . . $$VR_{m,n-1} = m.VR_{m,n-2}$$ $$VR_{m,n} = m.VR_{m,n-1}$$ Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, tendremos $VR_{m,1}.VR_{m,2} \dots VR_{m,n-1}.VR_{m,n}$ $= m.m.VR_{m,1}.m.VR_{m,2} \dots m.VR_{m,n-2}.m.VR_{m,n-1}$

		De aquí que $$VR_{m,n} = m^n$$ Sea el número de variaciones con repetición de orden n que pueden formarse con m elementos dados.
Teoría,	Esta tarea se resuelve a partir de la estructura de la combinatoria, pero teniendo en cuenta que es un caso específico de esta , debido a que tiene unas condiciones: Se llaman variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos formados por n elementos de manera que: • No entran todos los elementos si $m > n$. Sí pueden entrar todos los elementos si $m \leq n$ • Sí importa el orden. Sí se repiten los elementos.	

Tabla 3.5 tarea 4 Obra Matemática

Tarea 4	*En el despacho de una oficina trabajan cuatro personas Alfonso, Berta, Carlos y Delia, cada una de las cuales tienen su propia mesa. A principio de año el secretario de la oficina recibe dos ejemplares idénticos de la guía telefónica. No sabe cómo colocarla sobre las mesas, porque al faltarle dos ejemplares, piensan que dos de las personas van a molestarse.* *Si ahora el secretario recibe 4 teléfonos: 2 de color amarillo, 1 rojo y 1 verde, ¿de cuantas formas diferentes puede colocar los teléfonos en las cuatro mesas?.*	
Técnica.	Fórmula	Exploración

	La selección sucesiva de los 4 teléfonos produce como configuración una de las ordenaciones posibles de las fichas. Al cambiar el orden de extracción de una ficha se obtiene una configuración diferente, excepto cuando cambian de lugar entre si los dos teléfonos amarillos. Este modo de generar las configuraciones corresponde al modelo de las permutaciones de 4 objetos entre los cuales 1 se repite 2 veces. La permutación con repetición se expresa con la siguiente fórmula: $PR_n^{a,b,r} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$ Donde, n: total de elementos a: las veces que se repite este elemento b: las veces que se repite este elemento	Supongamos que todos los teléfonos son distintos. El primer teléfono se puede colocar entre un conjunto de 4 mesas; por tanto habría cuatro posibilidades. Para el segundo teléfono hay 3 posibilidades de colocar en las mesas, para el tercer 2 y para el cuarto 1. Cada selección en un paso se puede combinar con todas las de los siguientes. Por tanto, el número de configuraciones sería: ___ ___ ___ ___ *4 3 2 1 = 24* Sin embargo como 2 teléfonos son iguales, el cambio de orden entre ellos no produce una nueva configuración. Cada 2 configuraciones de las 24 contadas se reducen a 1.

	c: las veces que se repite este elemento Entonces: $PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!1!} = 12$	
Tecnología.	Permutación con repetición Se supone que tenemos formadas todas las permutaciones con repetición: $PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)}$ Si se sustituye los n_1 elementos iguales por otros distintos y luego los ordenamos de todos los modos posibles conservando en sus puestos los $n - n_1$ restantes, de cada grupo de este cuadro se deducirán $n_1!$ distintos y se obtiene $n_1!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)}$ Si en este cuadro sustituimos los n_2 elementos iguales por otros distintos y procedemos de la misma forma, se obtiene	

	$n_1!\,n_2!\ldots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)}$ Grupos. Si continuamos con este proceso hasta llegar al último grupo de elementos iguales, resultará un total de $n_1!\,n_2!\ldots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)}$ Grupos que constituyen las permutaciones de n elementos distintos, luego, $n_1!\,n_2!\ldots n_r!\ x\ PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)} = n!$ $\rightarrow\ PR_{n,(n_1,n_2,\ldots n_r)} = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$	
Teoría.	Esta tarea se resuelve a partir de la estructura de la combinatoria, pero teniendo en cuenta que es un caso específico de esta , debido a que tiene unas condiciones: Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento **se** repit**e** a **veces ,** el segundo b veces **,** el tercero c veces, ... $n = a + b + c + \ldots$ Son los distintos grupos que pueden formarse con esos *n* elementos de forma que : Sí entran todos los elementos. Sí importa el orden.	

Tabla 3.6 tarea 5 Obra Matemática

Tarea 5	*Cinco hombres Antonio, Basilio, Carlos, Daniel y Esteban esperan consulta en el dentista para extraerse una muela. Ninguno quiere entrar en primer lugar. Por ello deciden sortear el orden de entrar a la consulta. Cada uno de ellos escribe su nombre en un papel y se extraen sucesivamente los papeles. El nombre obtenido en primer lugar corresponde al primero en entrar y así sucesivamente. ¿Cuántas resultados diferentes podemos obtener en el sorteo de orden de entrada a la consulta?.*	
Técnica.	Fórmula -Se parte del hecho de que al momento de realizar el sorteo, para seleccionar la primera persona que entrará a la consulta se tiene cinco posibilidades. -Por consiguiente, En caso de elegir la segunda persona para ingresar al dentista se tiene cuatro posibilidades. Este proceso se realiza hasta elegir el turno de los cinco hombres	Exploración -Como son cinco hombres, al momento de hacer el sorteo, el primer turno para ingresar al dentista tendrá cinco posibilidades. -Luego para el segundo turno solo habrá cuatro, ara el tercero habrá tres y así sucesivamente. -Luego haciendo uso de la regla del producto tenemos que $5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 120$

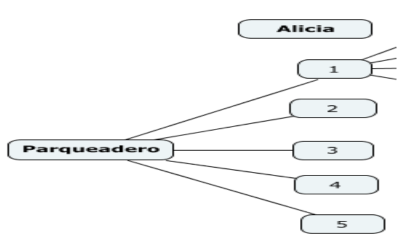
<table>
<tr><td></td><td>Por ende, estas condiciones se relacionan con una permutación sin repetición.
$$5! = 120$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Tecnología.</td><td>Permutación sin repetición
El número de permutaciones de n objetos se designa por P_n y su valor es dado por el principio de multiplicación de la siguiente forma:
$$P_n = (1)(2)(3) \ldots (n - 1)n.$$
A este número se le llama factorial de n y se nota n!, es decir,
$$n! = n(n-1) \ldots (3)(2)(1)$$
Obsérvese que
$$n! = (n-1)!\, n$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Teoría.</td><td colspan="2">Esta tarea se resuelve a partir de la estructura de la combinatoria, pero teniendo en cuenta que es un caso específico de esta , debido a que tiene unas condiciones: Se llama permutaciones de m elementos (m = n) a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que:
- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.</td></tr>
</table>

	No se repiten los elementos

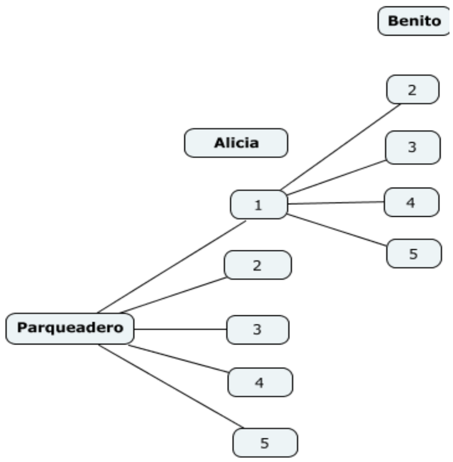
Obra didáctica.

A continuación se presenta las rejillas relacionadas con la obra didáctica respecto a la combinatoria. Para ello se toman las tareas de la 1 a la 5 presentadas anteriormente en la obra matemática.

Tabla 3.7 tarea 1 Obra Didáctica

<table>
<tr><td>Tarea 1.</td><td colspan="2">El parqueadero donde vive Alicia y Benito tiene cinco lugares para estacionar el carro. Cómo ellos son los únicos que tienen carro, pueden colocar su auto en el lugar que prefieran sí este no está ocupado. Este es el esquema del parqueadero: está enumerado del número uno hasta el cinco.
-Representar todas las formas diferentes en que Alicia y Benito pueden estacionar el carro.</td></tr>
<tr><td>Técnica.</td><td>Regla del producto
Supongamos que la primera persona en llegar a estacionar su carro es Alicia:


Por ende, Ella va tener 5 lugares disponibles para estacionar su carro.</td><td>Fórmula
Como el orden de llegada de Alicia y Benito no altera las configuraciones finales (Si Alicia llega primero y Benito de segundo es igual a que llegue Benito de primero y Alicia de segunda), ya que, el que llegue de primero va a tener 5 posibilidades y el segundo cuatro posibilidades.</td></tr>
</table>

	Luego, llega a estacionar el carro Benito. Si Alicia estaciono su carro en el lugar #1, Benito va tener disponible 4 lugares (#2, #3, #4, #5).  Es decir, que la persona que siempre llegue en segundo lugar va tener cuatro sitios disponibles para estacionar su carro, independientemente de donde este el otro carro del que llegó primero. Ahora se hace uso de la regla del producto para determinar todas las formas posibles en que Alicia y Benito pueden estacionar su carro.	Dado estas condiciones se observa que esta tarea es una variación sin repetición ($VR_{m,n}$), para la cual se establece la siguiente fórmula de resolución: $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ Donde, m: total de elementos n: elementos que se van a tomar por consiguiente, $V_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

	1ra 2da *5 x 4 = 20*	
Dificultades.	- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas - Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. - Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.	
Errores.	- Errores de asociación.	
Sistemas de representación	- Fórmula - Tanteo - Uso de cajas - Gráficos.	

Tabla 3.8 tarea 2 Obra Didáctica

Tarea 2.	*En el despacho de una oficina trabajan cuatro personas Alfonso, Berta, Carlos y Delia, cada una de las cuales tienen su propia mesa. A principio de año el secretario de la oficina recibe dos ejemplares idénticos de la guía telefónica. No sabe cómo colocarla sobre las mesas, porque al faltarle dos ejemplares, piensan que dos de las personas van a molestarse.* *¿De cuántas formas diferentes puede colocarse las guías de teléfono encima de las cuatro mesas, si solo diferenciamos en qué mesa coloca la guía? (solo puede poner una guía en cada mesa). Escribe todas las posibilidades de colocación.*

Técnica.	Fórmula	Tanteo
	Una configuración está formada por el modo de seleccionar 2 mesas entre 4 posibles. Además, en cada mesa solo va una guía telefónica y éstas no se pueden repetir. Seguido de ello, las guías telefónicas son iguales, el orden de selección de las mesas no produce nuevas configuraciones, es decir, el orden de colocación no influye en la formación de estas. Por ello, estas son las condiciones de formación de las combinaciones sin repetición. $C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ Donde, m: Total de elementos n: elementos tomados $C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$	Sea *(1, 2)* las guías telefónicas. Sea *(A, B, C, D)* las mesas. A continuación se presenta las diferentes formas de colocar las guías sobre las mesas: *1A, 2B* *1B, 2C* *1C, 2D* *1A, 2C* *1B, 2D* *1A, 2D*

Dificultades.	- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas. - Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
Errores.	- Errores de asociación
Sistemas de representación.	- Fórmula - Tanteo - Uso de cajas - Gráficos.

Tabla 3.9 tarea 3 Obra Didáctica

Tarea 3.	*Si lanzamos al aire una moneda, vamos a obtener dos resultados cara o cruz, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener a partir del lanzamiento de dos, tres, cuatro,…, n monedas?*	
	Exploración Se parte de los dos resultados que se pueden dar al lanzar la moneda (cara, sello) Se repite el procedimiento hasta llegar a n lanzamientos: $\underline{}\ \underline{}\ \underline{}\ \ \underline{}$ $2 \quad 2 \quad 2 \ \ldots\ n$	Fórmula Se parte del hecho de que se obtiene dos sucesos al lanzar la moneda (cara, sello) Por ende, siempre que se lance una moneda se va seguir obteniendo 2 resultados, es decir la constante es 2 Esto permite decir que la repetición es importante, por esta razón, tales

	A partir de esto aplicamos regla del producto para establecer lo siguiente: $$2\ x\ 2\ x\ 2\ x \ldots x\ n = 2^n$$	condiciones permiten plantear lo siguiente: $$VR_{2.n} = 2^n$$
Dificultades.	- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas. - Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.	
Errores.	- Errores de asociación.	
Sistemas de representación.	- Fórmula - Tanteo - Uso de cajas. - Gráficos.	

Tabla 3.10 tarea 4 Obra Didáctica

Tarea 4.	*En el despacho de una oficina trabajan cuatro personas Alfonso, Berta, Carlos y Delia, cada una de las cuales tienen su propia mesa. A principio de año el secretario de la oficina recibe dos ejemplares idénticos de la guía telefónica. No sabe cómo colocarla sobre las mesas, porque al faltarle dos ejemplares, piensan que dos de las personas van a molestarse.*

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Si ahora el secretario recibe 4 teléfonos: 2 de color amarillo, 1 rojo y 1 verde, ¿de cuantas formas diferentes puede colocar los teléfonos en las cuatro mesas?</td></tr>
<tr><td>Técnica.</td><td>Fórmula
La selección sucesiva de los 4 teléfonos produce como configuración una de las ordenaciones posibles de las fichas.

Al cambiar el orden de extracción de una ficha se obtiene una configuración diferente, excepto cuando cambian de lugar entre si los dos teléfonos amarillos.

Este modo de generar las configuraciones corresponde al modelo de las permutaciones de 4 objetos entre los cuales 1 se repite 2 veces.</td><td>Exploración
Supongamos que todos los teléfonos son distintos.
El primer teléfono se puede colocar entre un conjunto de 4 mesas; por tanto habría cuatro posibilidades.

Para el segundo teléfono hay 3 posibilidades de colocar en las mesas, para el tercer 2 y para el cuarto 1.

Cada selección en un paso se puede combinar con todas las de los siguientes.

Por tanto, el número de configuraciones sería:
___ ___ ___ ___
4 3 2 1 = 24</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>La permutación con repetición se expresa con la siguiente fórmula:

$$PR_n^{a,b,r} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$
Donde,
n: total de elementos
a: las veces que se repite este elemento
b: las veces que se repite este elemento
c: las veces que se repite este elemento
Entonces:
$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!1!} = 12$$</td><td>Sin embargo como 2 teléfonos son iguales, el cambio de orden entre ellos no produce una nueva configuración.

Cada 2 configuraciones de las 24 contadas se reducen a 1.</td></tr>
<tr><td>Dificultades.</td><td colspan="2">- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.</td></tr>
<tr><td>Errores.</td><td colspan="2">- Errores de asociación</td></tr>
<tr><td>Sistemas de representación.</td><td colspan="2">- Fórmula
- Tanteo
- Uso de cajas.</td></tr>
</table>

	- Gráficos.

Tabla 3.11 tarea 5 Obra Didáctica

Tarea 5.	*Cinco hombres Antonio, Basilio, Carlos, Daniel y Esteban esperan consulta en el dentista para extraerse una muela. Ninguno quiere entrar en primer lugar. Por ello deciden sortear el orden de entrar a la consulta. Cada uno de ellos escribe su nombre en un papel y se extraen sucesivamente los papeles. El nombre obtenido en primer lugar corresponde al primero en entrar y así sucesivamente.* *¿Cuántas resultados diferentes podemos obtener en el sorteo de orden de entrada a la consulta?*	
Técnica.	Fórmula Se parte del hecho de que al momento de realizar el sorteo, para seleccionar la primera persona que entrará a la consulta se tiene cinco posibilidades. Por consiguiente, En caso de elegir la segunda persona para ingresar al dentista se tiene cuatro posibilidades	Exploración Como son cinco hombres, al momento de hacer el sorteo, el primer turno para ingresar al dentista tendrá cinco posibilidades. Luego para el segundo turno solo habrá cuatro, ara el tercero habrá tres y así sucesivamente. Luego haciendo uso de la regla del producto tenemos que $5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 120$

	Este proceso se realiza hasta elegir el turno de los cinco hombres Por ende, estas condiciones se relacionan con una permutación sin repetición. $$5! = 120$$	
Dificultades.	- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticos. - Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.	
Errores.	- Errores de asociación	
Sistemas de representación.	- Fórmula - Tanteo - Uso de cajas. - -Gráficos.	

Relación de los actos de comprensión y la comprensión

A continuación se presenta una tabla (ver tabla 3.12) que hace referencia a la relación entre lo planteado por Sierpinska en cuanto a los niveles de comprensión y la combinatoria.

Tabla 3.12 niveles de caracterización

Niveles de comprensión.	
	En relación a la combinatoria, en este nivel se debe tener en cuenta lo siguiente:

Identificación.	El estudiante distingue de la tarea. - Si los elementos entran todos o no. - Si los elementos se pueden repetir o no. - Si el orden de los elementos importa o no. De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere cada tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula por ende las técnicas utilizadas para su solución son las siguientes: - Numérico - Gráficos En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico.
Discriminación.	En relación a la combinatoria, se tiene en cuenta lo siguiente: en este nivel el estudiante identifica que tipo de combinatoria (variación con o sin repetición, permutación con o sin repetición, combinación con o sin repetición) es necesaria para resolver cada tarea propuesta, es decir, es capaz de reconocer las propiedades de cada una de ellas y todas las condiciones dadas. Por tal, sabiendo que tipo de combinatoria es requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. La técnica más relevante en este nivel es: - Uso de fórmulas

	En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico.
Generalización.	En con relación a la combinatoria, se tiene en cuenta lo siguiente: se indica que el estudiante alcanzó este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria.
Síntesis.	En relación a la combinatoria, se tiene en cuenta lo siguiente: este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Aquí el sujeto es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Fase 2: rediseño y aplicación de la prueba.

Esta fase fue realizada en dos etapas; en la primera se revisó la prueba con el fin de realizarle los debidos cambios respecto al lenguaje, ya que como la prueba fue tomada de una tesis del doctoral realizada por Roa (2000) y esta fue implementada en España, presentaba ciertas palabras que no iban a nuestro dialecto, por tal se vio en la obligación de modificar esos términos para tener una mejor comprensión por parte de los estudiantes.

La segunda etapa corresponde a la aplicación de dicha prueba en la Universidad del Valle sede Norte del Cauca, en la carrera "Licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemática", específicamente a estudiantes que estaban viendo el curso análisis exploratorio de datos pero que ya habían abordado el tema de las distintos tipos de combinatoria. La prueba como tal tuvo 13 tareas (ver anexo 2) y se implementó en el mes de noviembre del año 2016.

Solución ideal

Este apartado consiste en la solución ideal (ver anexo 3) que deberían realizar los estudiantes tomando en consideración los aspectos mencionados en los objetivos del programa y los conocimientos planteados tanto en la obra matemática como en la didáctica.

Finalmente, la fase 3 y la fase 4 se desarrollan en el capítulo 4 análisis y conclusiones

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

A continuación se presentan las respectivas rejillas de análisis de cada tarea, las cuales son construidas a partir de la TAD, para ello se toma como referente la obra didáctica y la obra matemática diseñada.

Análisis tarea 1

La tabla 4.1 contiene un resumen de lo presentado en la tarea 1 por parte de los estudiantes.

Tabla 4.1 análisis tarea 1

Tarea Nº1: Seleccionar 4 cartas diferentes y colocarlas en posiciones diferentes. teniendo en cuenta unas condiciones dadas							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
3	18.75%	12	75%	0	0%	1	6.25%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
1	o%	0	0%	0	0%		

Se observa que solo 1 estudiante da una respuesta acertada a esta tarea. Dicho estudiante hace uso tanto de la fórmula como del uso del lenguaje natural, luego hace uso del lenguaje natural para explicar sus acciones (ver figura 4.1.1)

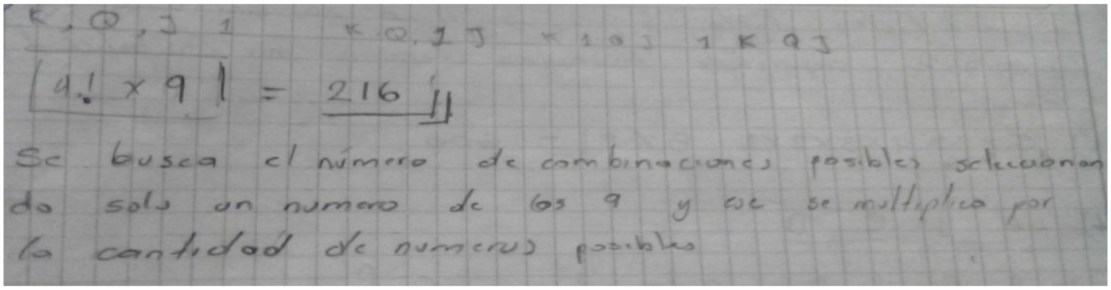


Figura 4.1.1

Por otro lado 9 estudiantes responden de manera incorrecta, ya que entienden ciertas condiciones de la tarea, pero no logran dar una respuesta acertada, es decir, presentan dificultades al momento de interpretar las condiciones implícitas presentes en la tarea (ver figura 4.1.2 y 4.1.3).

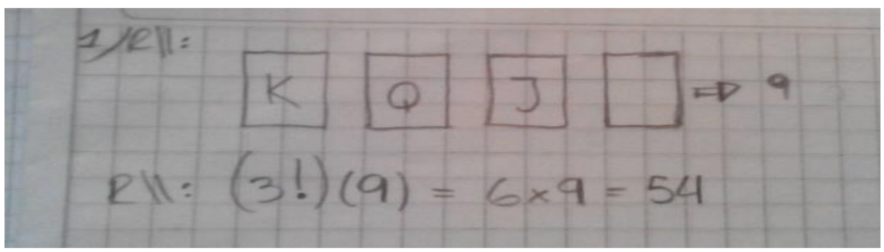


Figura 4.1.2

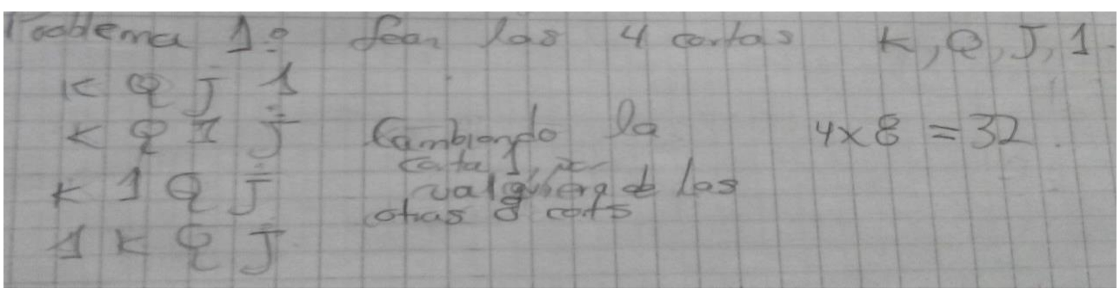
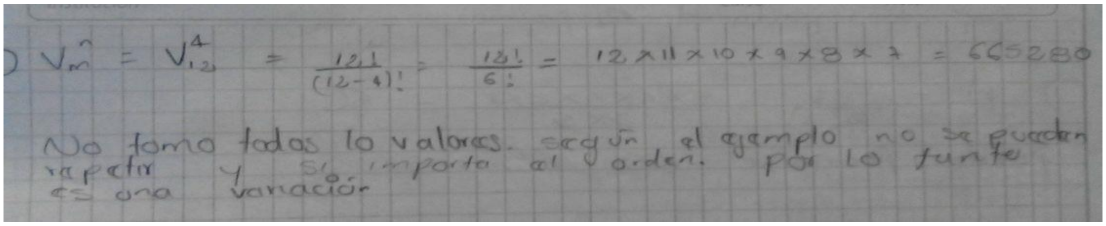


Figura 4.1.3

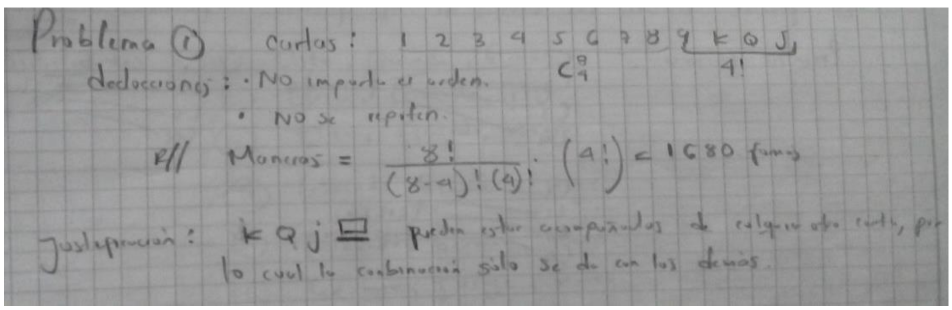
Además hay un 6.25% que logra identificar una de las operaciones combinatorias requerida pero al momento de hacer el procedimiento toman de manera incorrecta los elementos (ver figura 4.1.4).


$V_m^n = V_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{6!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 665280$

No tomo todas lo valores. según el ejemplo no se pueden repetir y si importa el orden. por lo tanto es una variación

Figura 4.1.4

En cuanto al 12.5% de los estudiantes usan una operación combinatoria incorrecta lo cual no le permite llegar al resultado esperado (ver figura 4.1.5) y finalmente tenemos un 18.75 de los estudiantes que no da cuenta de la tarea.


Problema 1 Cartas: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 $\underbrace{K\ Q\ J}_{4!}$ C_4^9

deducciones: · No importa el orden.

· No se repiten.

R// Maneras $= \frac{8!}{(8-4)!(4)!} \cdot (4!) = 1680$ formas

Justificación: K Q J □ pueden estar acompañadas de cualquier otra carta, por lo cual la combinación sólo se da con los demás.

Figura 4.1.5

Dado lo anterior se puede concluir que en relación a la tarea 1, a nivel general la mitad de los estudiantes evidencian un nivel de comprensión mínimo (identificación) ya que la mayor parte de los estudiantes que dan respuesta a la tarea no distinguen las condiciones necesarias para determinar el tipo de operación combinatoria que requiere la tarea, por lo cual estos estudiantes no logran dar una solución óptima de ella. Por otro lado solo un estudiante alcanza parcialmente un nivel 3 (generalización) de comprensión dado que este estudiante logra identificar las operaciones combinatorias necesarias para dar respuesta a la tarea pero al momento de argumentar este estudiante hace uso de la legua natural y no presenta un argumento formal.

Análisis tarea 2

Tabla 4.2 análisis tarea 2

Tarea N° 2: Seleccionar 4 fichas de colores							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
0	0%	9	56.25%	3	18.75%	4	25%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
3	6.25%	0	o%	4	25%		

Se observa que solo 7 estudiantes da una respuesta a esta tarea, de los cuales 3 hacen uso de técnicas básicas para dar la respuesta (ver figura 4.2.1) mientras que 4 hacen uso de la operación combinatoria (ver figura 4.2.2)

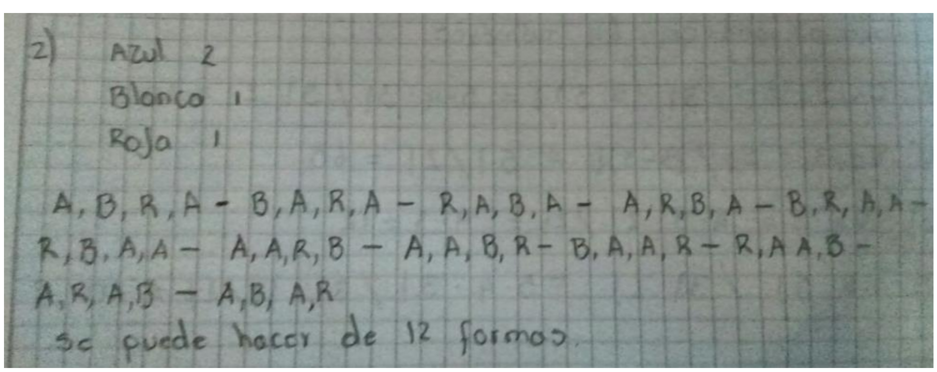


Figura 4.2.1

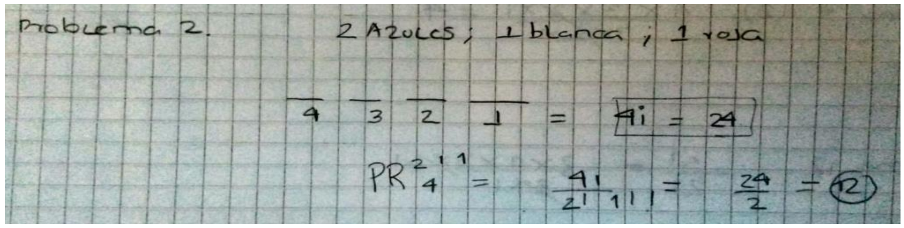


Figura 4.2.2

Por otro lado 6 estudiantes muestra que entienden parcialmente las condiciones de la tarea, pero al momento de aplicar una fórmula combinatoria lo hacen de manera errónea (ver figura 4.2.3), por lo tanto no logran llegar al resultado esperado.

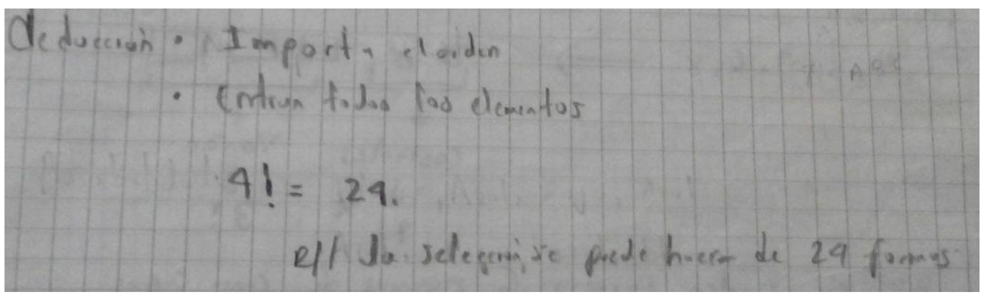


Figura 4.2.3

Finalmente, tenemos 2 estudiantes que entienden las condiciones de la tarea, pero al momento de hacer las configuraciones usando técnicas básicas (tanteo) no dan con el resultado correcto (ver figura 4.2.4).

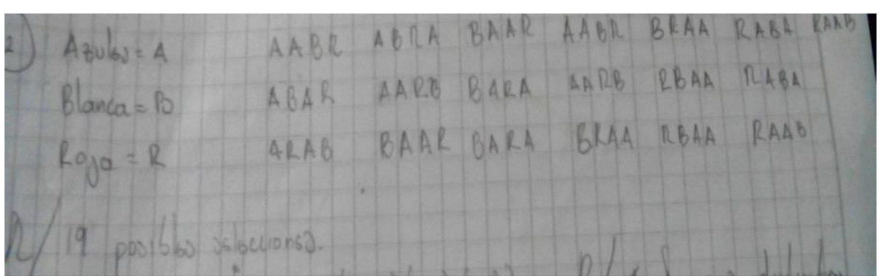


Figura 4.2.4

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 2 a nivel general la mayoría de los estudiantes evidencian que están en nivel de comprensión 1.

Análisis tarea 3

Tabla 4.3 análisis tarea 3

Tarea Nº3 Colocar 3 cartas en 4 sobres							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
2	12.5%	7	43.75%	3	18.75%	4	25%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
7	43.75%	0	0%	0	0%		

Se observa que el 43.75% de los estudiantes da una respuesta a esta tarea, de los cuales 3 hacen uso de técnicas básicas (ver figura 4.3.1) mientras que 4 hacen unos de la fórmula combinatoria (ver figura 4.3.2).

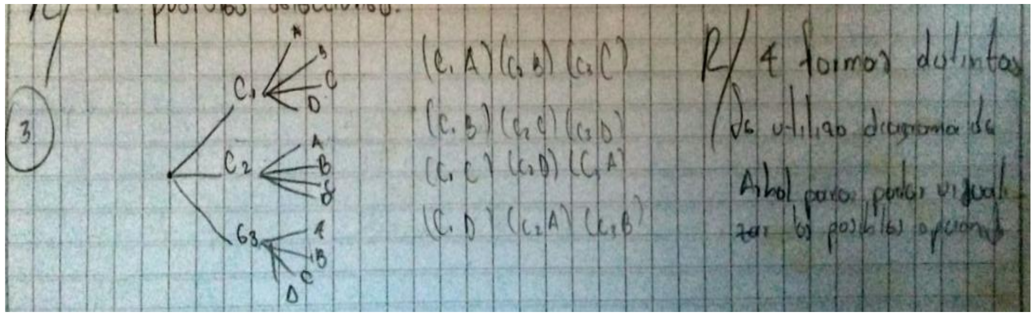


Figura 4.3.1

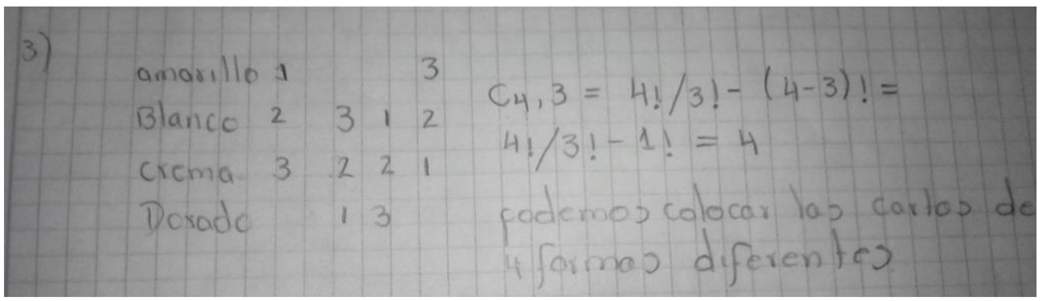


Figura 4.3.2

Por otro lado 7 estudiantes hacen uso de una técnica combinatoria errónea (ver figurar 4.3.3) por lo tanto no llegan al resultado esperado.

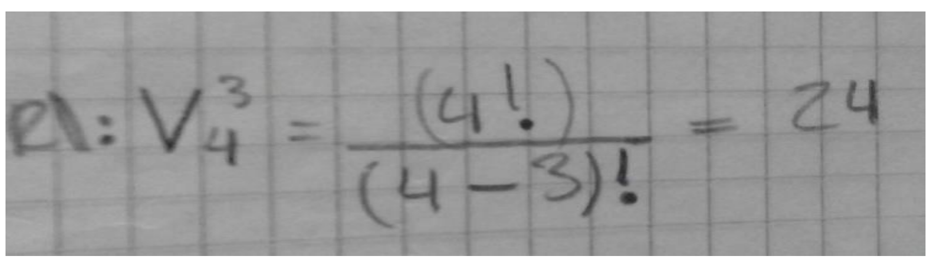


Figura 4.3.3

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 3 a nivel general una cantidad un poco menor a la mitad evidencian que están en el nivel de comprensión 1.

Análisis tarea 4

Tabla 4.4 análisis tarea 4

Tarea Nº4: Repartir 4 coches entre 3 hermanos							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
1	6.25%	12	75%		%	3	18.75%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	3	18.75%		

Se observa que 3 estudiantes da una respuesta a esta tarea, estos estudiantes hacen uso de la operación combinatoria correcta para justificar su respuesta (ver figura 4.4.1).

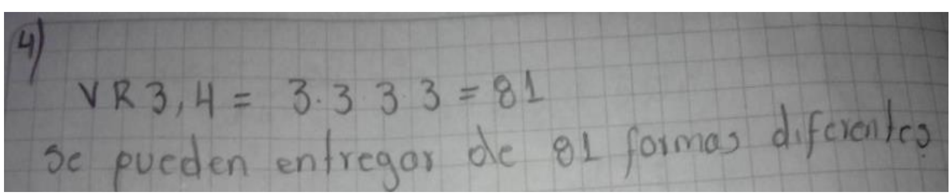


Figura 4.4.1

Por otro lado 5 estudiantes a pesar que reconocen la operación combinatoria que da respuesta a la tarea, ubican de manera incorrecta la población y la muestra en la fórmula (ver figura 4.4.2), de tal forma que no hallan el resultado correcto.

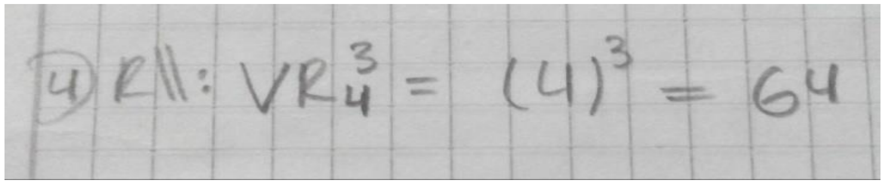


Figura 4.4.2

Otros 3 estudiantes hacen uso de la operación combinatoria incorrecta (ver figura 4.4.3).

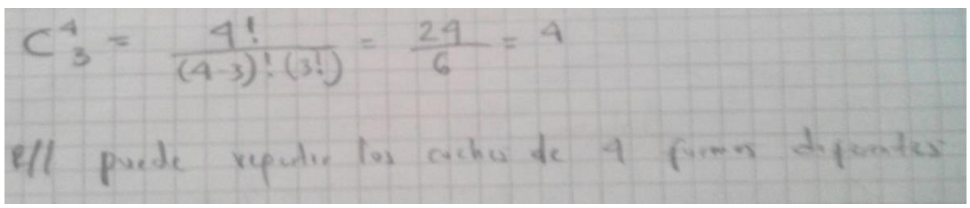


Figura 4.4.3

Por ultimo, tenemos 4 estudiantes que hacen uso de la regla del producto con la cantidad de hermanos y coches (ver figura 4.4.4).

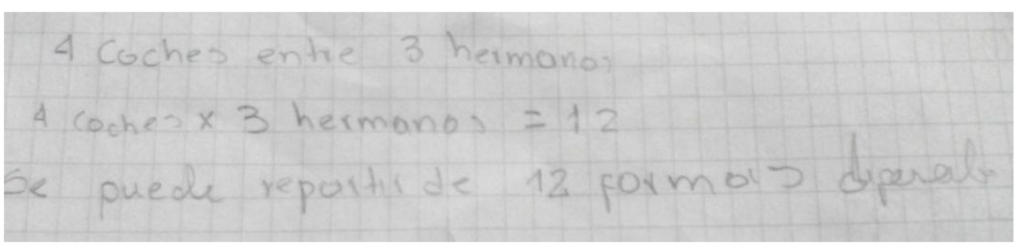


Figura 4.4.4

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 4 a nivel general se alcanzó un nivel de comprensión 1 parcialmente.

Análisis tarea 5

Tabla 4.5 análisis tarea 5

Tarea Nº5: Seleccionar 5 dígitos con reemplazamiento y colocarlos posteriormente para formar un número de 5 cifras							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
7	43.75%	9	56.25%	0	0%	0	0%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	0	0%		

Se observa que no hubo un estudiante que contestara de manera correcta esta tarea. Por otro lado tenemos que 4 estudiantes hacen uso de elementos que no hay en la tarea (ver figura 4.5.1)

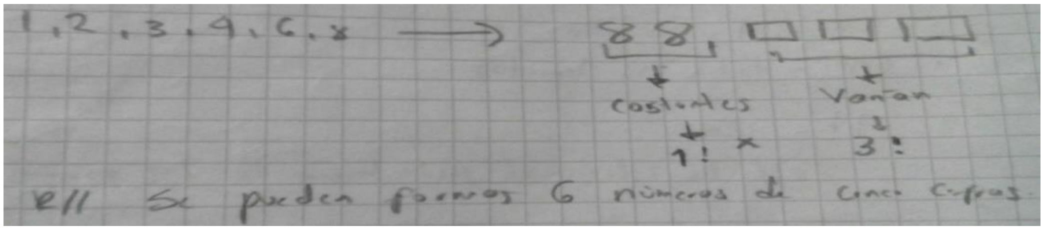


Figura 4.5.1

Luego tenemos que 5 estudiantes hacen uso de una operación combinatoria que no permite dar respuesta a la tarea (ver figura 4.5.2).

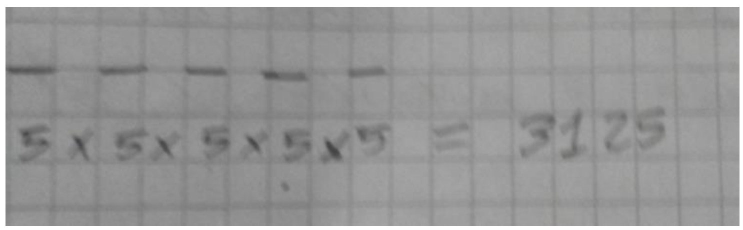


Figura 4.5.2

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 5, es la que mayor dificultad les causo a los estudiantes, por eso a nivel general no se alcanzó un nivel de comprensión óptimo en este punto, ya que los estudiantes que dieron respuesta a la tarea lo hicieron de manera incorrecta, esto posiblemente se debe a como esta tarea es de tipo compuesta los estudiantes no comprendieron las condiciones implícitas, por tanto no les permitió identificar de manera correcta las operaciones combinatoria requeridas para darle solución.

Análisis tarea 6

Tabla 4.6 análisis tarea 6

Tarea Nº 6: Colocar un grupo de 4 amigos en dos habitaciones							
Número de		Número de		Número de estudiantes		Número de estudiantes que	

estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
6	37.5 %	7	43.75 %	0	0%	3	18.75 %
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	3	18.75 %		

Se observa que 3 estudiantes hacen uso de la técnica combinatoria adecuada para dar respuesta a esta tarea (ver figura 4.6.1).

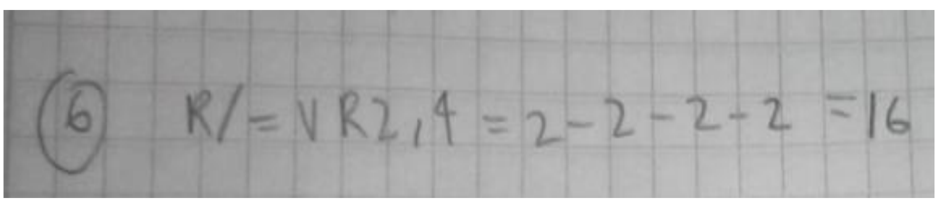


Figura 4.6.1

Por otro lado 7 estudiantes muestran el uso de una técnica combinatoria incorrecta, por tanto no llegan al resultado esperado (ver figura 4.6.2 y 4.6.3),

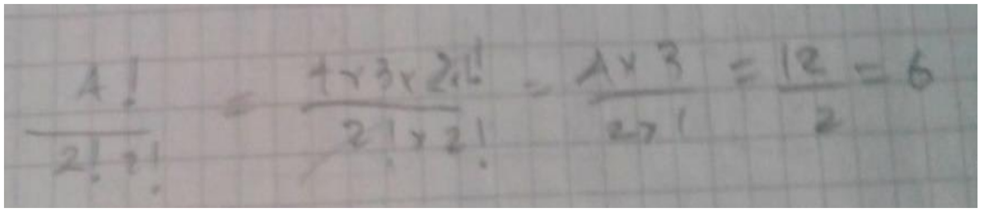


Figura 4.6.2

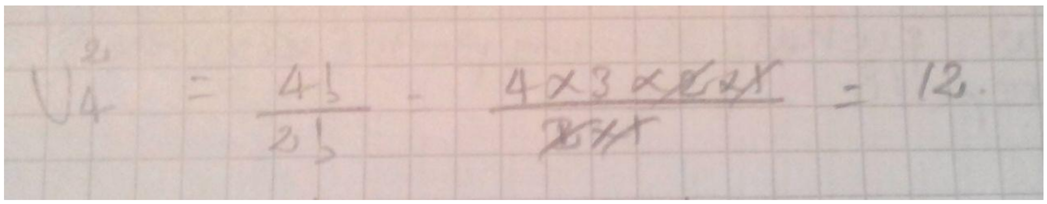


Figura 4.6.3

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 6 a nivel general se alcanzó un nivel de comprensión 1 parcialmente.

Análisis tarea 7

Tabla 4.7 análisis tarea 7

Tarea Nº 7: Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
8	50%	6	37.75%		%	2	12.5%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			

0	0%	0	0%	2	12.5%		

Se observa que solo 2 estudiantes hacen uso de la técnica combinatoria correcta para dar respuesta a esta tarea (ver figura 4.7.1).

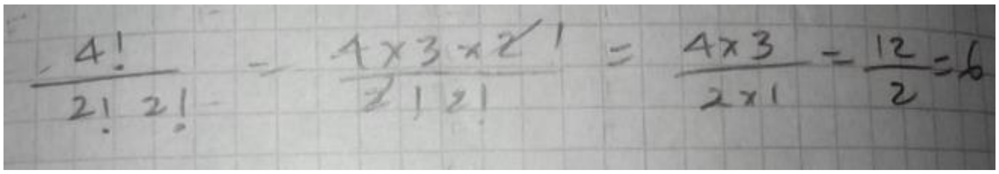


Figura 4.7.1

Por otro lado, hay 6 estudiantes muestra que tienen dificultades al momento de interpretar las condiciones implícitas en la tarea y esto los lleva a usar operaciones combinatorias incorrectas, lo que indica que no llegan al resultado esperado (ver figura 4.7.2 y 4.7.3).

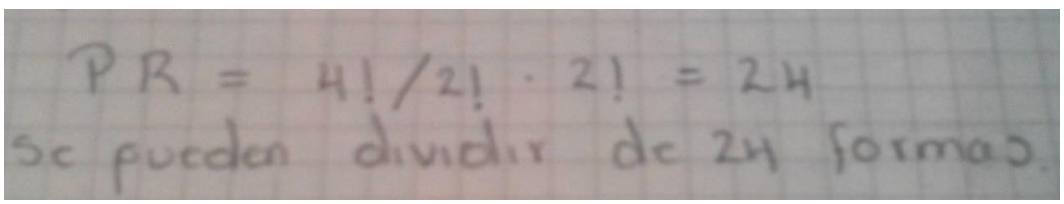


Figura 4.7.2

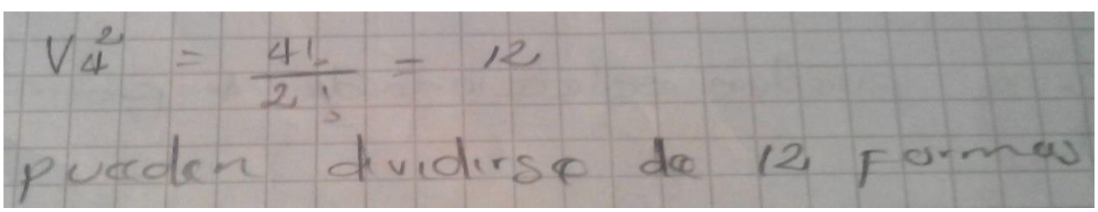


Figura 4.7.3

Dado lo anterior se puede concluir que con respecto a la tarea 7 a nivel general la mayoría de los estudiantes no evidencian un nivel mínimo de comprensión de los aspectos combinatorios puestos en juego.

Análisis tarea 8

Tabla 4.8 análisis tarea 8

Tarea Nº 8: Elegir 3 estudiantes de entre 5 voluntarios							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
4	25%	6	37.5%	0	0%	6	37.5%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	6	37.5%		

Se observa que 6 estudiantes no presenta dificultad en la resolución de la tarea, pero no muestran una técnica diferente a la aplicación de la fórmula requerida (ver figura 4.8.1)

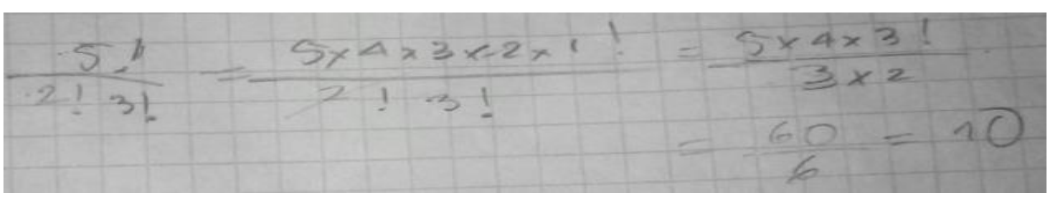


Figura 4.8.1

Por otro lado 5 estudiantes no tiene en cuenta las condiciones implícitas que presenta la tarea, por lo tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones totales (ver figura 3.8.2).

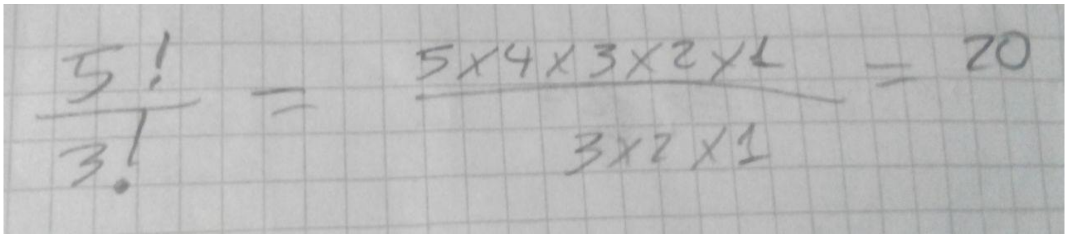


Figura 4.8.2

Luego se tiene 1 estudiante que a pesar que logra comprender las condiciones implícitas en la tarea, hace uso de una técnica básica (tanteo) (ver figura 4.8.2) lo cual ocasiona que no encuentren todas las configuraciones finales.

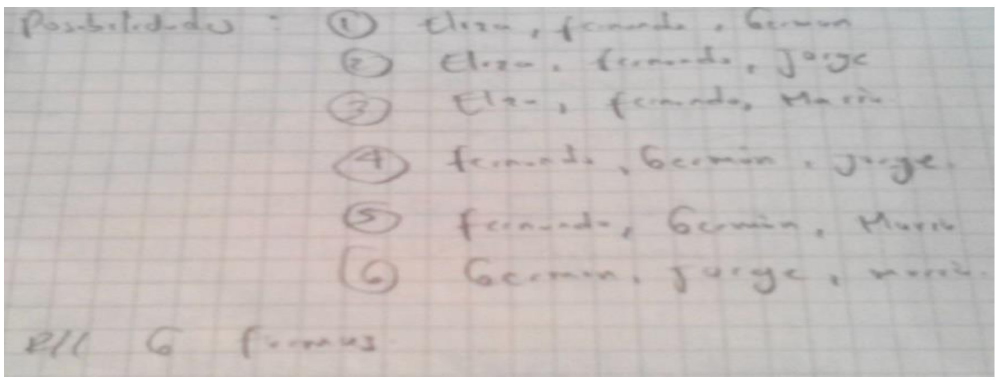


Figura 4.8.3

Dados esto, con respecto a la tarea 8 tenemos que la mayoría de los estudiantes alcanzan un nivel 2 de comprensión.

Análisis tara 9

Tabla 4.9 análisis tarea 9

Tarea Nº 9 Estacionar 3 carros en 5 lugares							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria	

				dar respuesta a la tarea.		correspondiente a la tarea.	
5	31.25%	5	31.25%	0	0%	6	37.5%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	6	37.5%		

Se observa que 6 estudiantes no presentan dificultad en la resolución de la tarea, pero no muestran una técnica diferente a la aplicación de la fórmula (ver figura 4.9.1).

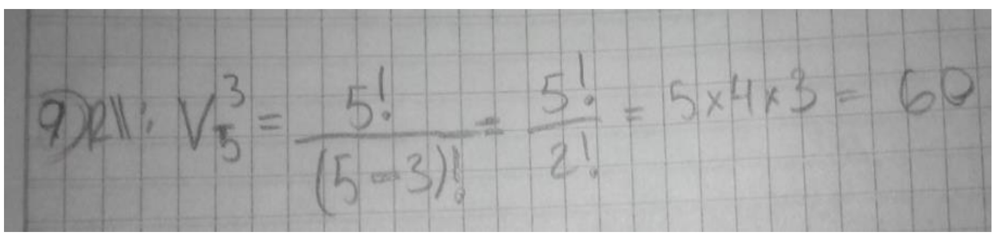


Figura 4.9.1

Por otro lado, hay 5 estudiantes que no tienen en cuenta las condiciones implícitas que presenta la tarea, por lo tanto utilizan operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones correctas (ver figura 4.9.2 y 4.9.3).

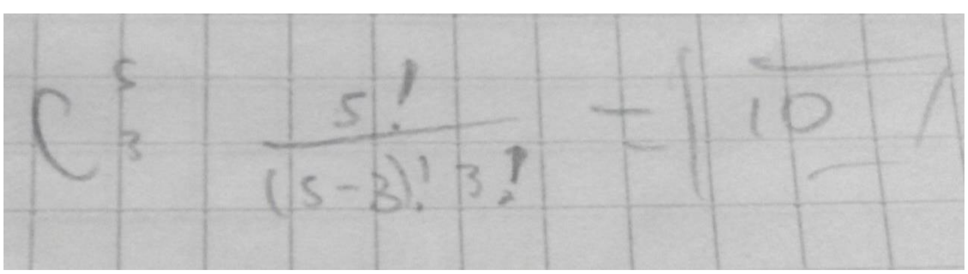


Figura 4.9.2

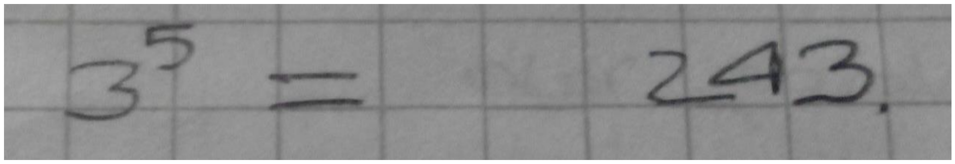


Figura 4.9.3

Dados esto, con respecto a la tarea 9 tenemos que la mayoría de los estudiantes alcanzan un nivel 2 de comprensión.

Análisis tarea 10.

Tabla 4.10 análisis tarea 10

Tarea Nº 10: Repartir 4 muñecas entre 2 niñas							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea	
4	25%	7	43.75%	3	18.75%	2	12.5%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	5	31.25%		

Se observa que 5 estudiantes logran dar respuesta a la tarea, 3 de ellos hacen uso de técnicas básicas (tanteo), mientras que 2 hacen uso de la operación combinatoria pedida (ve figuras 4.10.1 y 4.10.2).

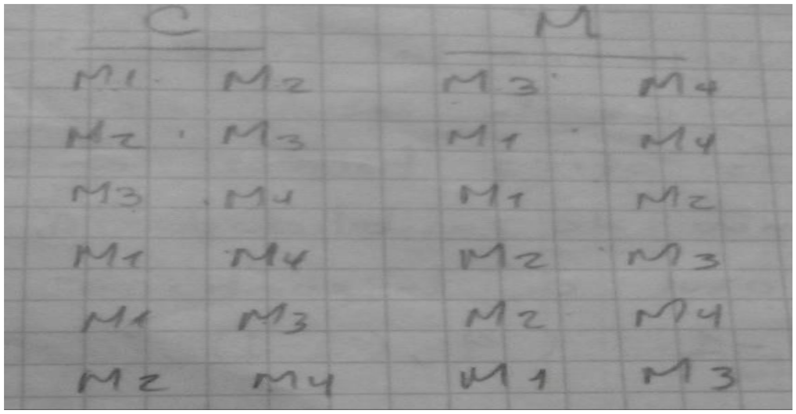


Figura 4.10.1

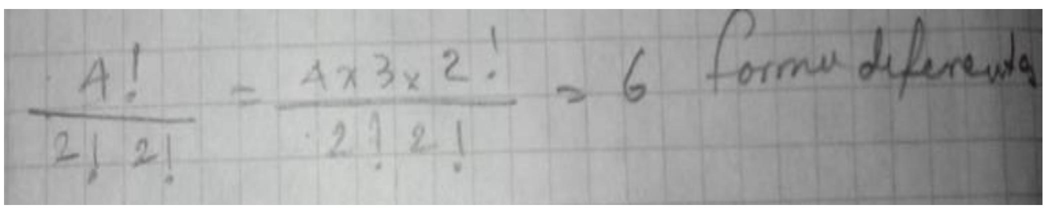


Figura 4.10.2

Por otro lado, hay 7 estudiantes que no tienen en cuenta las condiciones implícitas presentes en la tarea, por lo tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones correctas (ver figura 4.10.3)

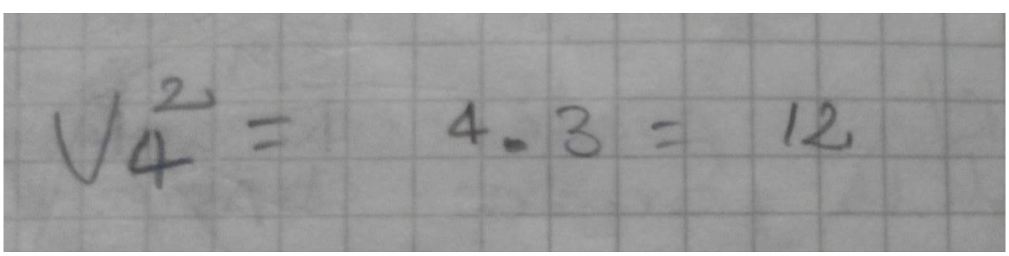


Figura 4.10.3

Dado esto, con respecto a la tarea 10 tenemos que la mayoría de los estudiantes no alcanzan un nivel óptimo de comprensión.

Análisis tarea 11.

Tabla 4.11 análisis tarea 11

Tarea Nº 11: Seleccionar números de 3 cifras							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
7	43.75 %	3	18.75 %	3	18.75 %	3	18.75 %
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	3	18.75 %	3	18,75 %		

Se observa que 6 estudiantes dan respuesta a la tarea, 3 de ellos hacen uso de la operación combinatoria necesaria (ver figuras 4.11.1), mientras que los demás hacen uso de la regla del producto (ver figuras 4.11.2).

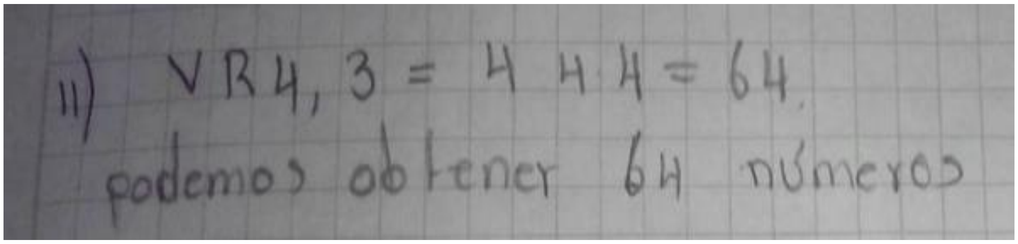


Figura 4.11.1

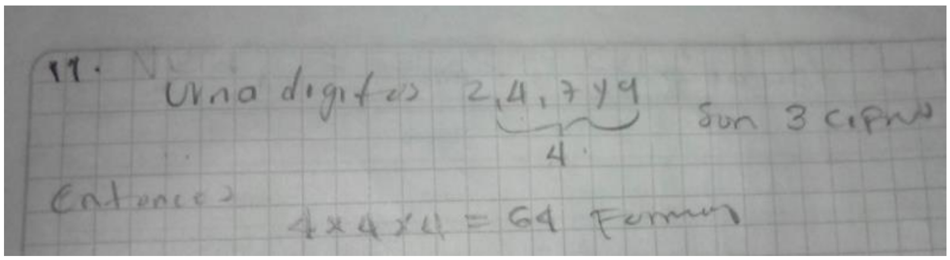


Figura 4.11.2

Por otro lado, hay 3 estudiantes que no tienen en cuenta las condiciones implícitas presentes en la tarea, por lo tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones correctas (ver figuras 4.11.3).

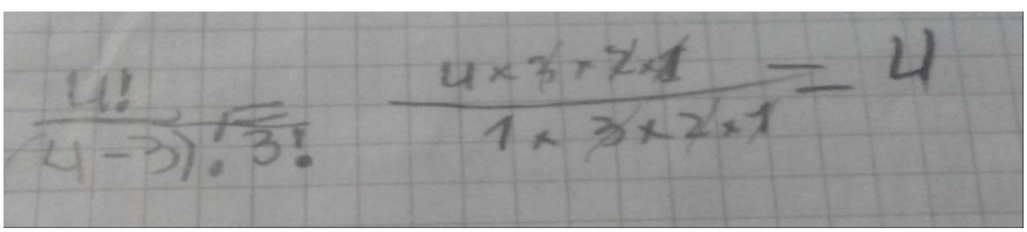


Figura 4.11.3

Dado esto, con respecto a la tarea 11 tenemos que la mayoría de los estudiantes que dan respuesta a la tarea alcanzan un nivel 2 de comprensión.

Análisis tarea 12

Tabla 4.12 análisis tarea 12

Tarea Nº 12: colocar 5 cartas							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
8	50%	3	18.75%	0	0%	5	31.25%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	5	31.25%		

Se observa que 5 estudiantes hacen uso de la operación combinatoria adecuada para dar respuesta a la tarea (ver figura 4.12.1).

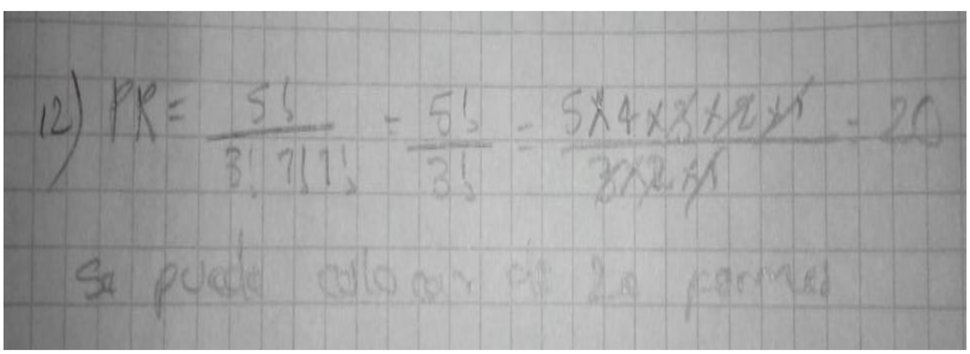


Figura 4.12.1

Por otro lado, hay 3 estudiantes que no tienen en cuenta las condiciones implícitas presentes en la tarea, por lo tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones correctas (ver figura 4.12.2).

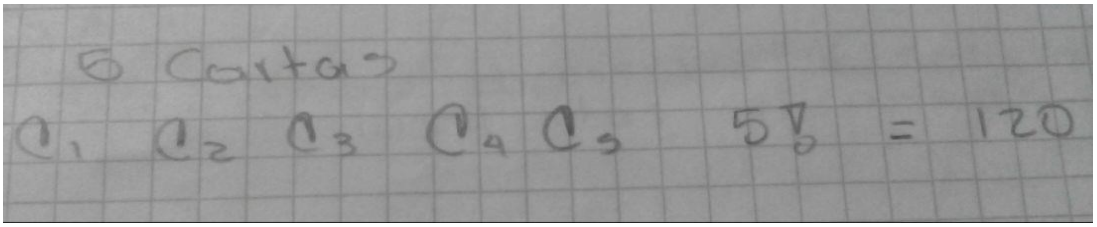


Figura 4.12.2

Dado esto, con respecto a la tarea 12 tenemos que la mayoría de los estudiantes que dan respuesta a la tarea alcanzan un nivel 2 de comprensión.

Análisis tarea 13

Tabla 4.13 análisis tarea 13

Tarea Nº13: Elegir un comité de 3 personas.							
Número de estudiantes que no dan respuesta a la tarea.		Número de estudiantes dan una respuesta incorrecta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de técnicas básicas para dar respuesta a la tarea.		Número de estudiantes que hacen uso de la fórmula combinatoria correspondiente a la tarea.	
10	62.5%	5	31.25%	0	0%	1	6.25%
Número de estudiantes que hacen uso del lenguaje para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que hace uso de gráficos para justificar la técnica realizada.		Número de estudiantes que no dan justificación de la técnica realizada.			
0	0%	0	0%	1	6.25%		

Se observa que solo 1 estudiantes hace uso de la técnica combinatoria correspondiente y da respuesta a la tarea (ver figura 4.13.1).

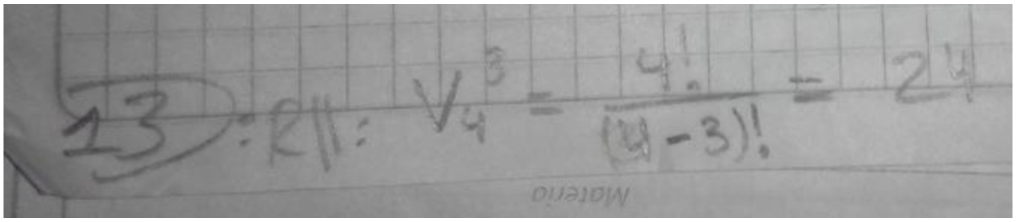
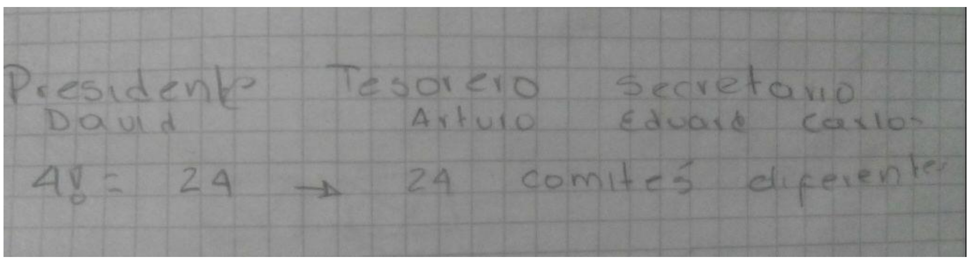


Figura 4.13.1

Por otro lado, hay 5 estudiantes que no tienen en cuenta las condiciones implícitas que presenta la tarea, por lo tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no les permite encontrar la cantidad de configuraciones correctas (ver figura 4.13.2).



4.13.2

Dado esto, con respecto a la tarea 13 tenemos que la mayoría de los estudiantes que dan respuesta a la tarea no alcanzan un nivel adecuado de compresión ya que estos estudiantes en su gran mayoría no distinguen las condiciones que presenta la tarea para poder determinar el tipo de operación combinatoria que requiere la tarea, por tanto hacen uso de operaciones combinatorias que no dan respuesta a la tarea.

Fase 4: conclusiones.

En esta fase se describen los resultados obtenidos de la prueba puesta en acto, comenzando con un análisis cuantitativo de los resultados arrojados en esta, luego se hace un análisis detallado de las técnicas que han usado los estudiantes al momento de resolver cada una de las tareas propuestas, y así de este modo poder determinar el nivel de comprensión que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas combinatorios y finalmente se presentan las conclusiones que nos brindan los respectivos análisis.

Resultados.

En la tabla 4.14 se muestra el análisis cuantitativo de los resultados obtenidos en la prueba, este se hace en términos de: respuesta correcta, incorrecta y no da respuesta, esta tabla también contiene tanto la frecuencia absoluta como los porcentajes de cada una de las tareas.

Al analizar la tabla se puede observar cierta dificultad en las tareas, ya que el porcentaje de respuestas correctas varía de un 0% (pregunta 5) a un 43% (pregunta 2 y 3), además es notable la dificultad que se les presento a los estudiantes al momento de resolver las tareas puesto que ninguna de ella se alcanzó un 50% de respuestas correctas e incluso hay tareas como la 5 que no se dio ni una respuesta correcta y otras como la 1 y la 4 que las respuestas incorrectas alcanzan un 75%.

Tabla 4.14 Frecuencias y porcentajes en cuanto a respuestas correctas, incorrectas y no da respuesta

Tarea	R. Correcta	R. Incorrecta.	No da respuesta
1	1(6.25)	12(75.0)	3(18.75)
2	7(43.75)	9(56.25)	0(0.0)
3	7(43.75)	7(43.75)	2(12.5)
4	3(18.75)	12(75. 0)	1(6.25)
5	0(0)	9(56.25)	7(43.75)
6	3(18.75)	7(43.75)	6(37.5)

7	2(12.5)	6(37.5)	8(50.0)
8	6(37.5)	6(37.5)	4(25.0)
9	6(37.5)	5(31.25)	5(31.25)
10	5(31.25)	7(43.75)	4(25)
11	6(37.5)	3(18.75)	7(43.75)
12	5(31.25)	3(18.75)	8(50)
13	1(6.25)	5(31.25)	10(62.5)
Total	52 (25.0)	90 (43.27)	66 (31.73)

Relación entre las tareas propuestas

Para analizar la relación entre las tareas se presenta la tabla 4.15 donde se encuentran las operaciones combinatorias y el grupo de tareas donde se ve desarrollado, a su vez la tabla 4.16 presenta la cantidad de respuestas correctas, incorrectas y no dadas para cada una de las operaciones combinatorias.

Tabla 4.15 tipo de operación combinatoria según la tarea

Operación combinatoria	Tareas
C	3, 7, 8 y 10
PR	2 y 12
VR	4, 6 y 11
V	9 y 13
Compuesta	1 y 5

Tabla 4.16 porcentaje de respuestas según operación combinatoria

Operación combinatoria	R. correcta	R. incorrecta	No da respuesta
C	31.25%	40.625%	28.125%
PR	37.5%	34.375%	28.125%
VR	25%	45.833%	29.166%
V	21.875%	31.25%	46.875%
Compuestas	3.125%	65.625%	31.25%

Las tareas resueltas correctamente por la mayor cantidad de estudiantes fueron: la 2, 3, 8, 10 y 11, donde se pudo observar que 3 de estas 5 tareas hacen referencia a la operación combinatoria: combinaciones sin repetición.

Las tareas resueltas correctamente por la menor cantidad de estudiantes fueron la 13 y la 1, mencionado que ambas tareas están asociadas a operaciones combinatorias distintas, ya que la tarea 1 hace referencia a operaciones compuestas, mientras que la tarea 13 involucra la utilización de una variación sin repetición.

Sin embargo cabe añadir que la tarea 1 se relaciona un poco con la tarea 13 al ser una operación compuesta que en su tratamiento también se trabaja las variaciones sin repetición.

Ahora bien la mayor cantidad de tareas resueltas de forma incorrecta fueron: la 1, 2, 4 y 5, de las cuales la tarea 2 se refiere a una permutación con repetición, la tarea 4 a una variación con repetición y la tarea 1 y 5 se asocian con operaciones compuestas. La menor cantidad de respuestas incorrectas se da en las tareas: 11 (variación con repetición), 12 (permutación con repetición), 7 y 8 (combinaciones sin repetición).

En cuanto a la cantidad de respuestas no dadas más altas están las tareas 5, 7, 12 y 13 entre un 50% y un 60% y es significativamente bajo en las tareas 2, 3 y 4 con un porcentaje entre el 0% y el 12.5%.

Dado lo anterior podemos deducir que las tareas más sencillas para los estudiantes fueron en las que trabajaban con combinaciones sin repetición y a su vez los problemas más complicados para los estudiantes fueron los que requerían el uso de dos operaciones combinatorias de esta forma confirmando una de las dificultades más recurrentes planteadas por Batanero, et al. (1996)

Cantidad de respuestas correctas por estudiante.

La tabla 4.1.4 muestra la cantidad de respuestas correctas que se dieron por cada uno de los estudiantes en la prueba. El número de problemas resueltos correctamente por cada estudiante oscila entre 0 y 8, dando a entender que ningún estudiante completó de forma correcta toda la prueba.

Tabla 4.17 cantidad de respuestas correctas por cada uno de los estudiantes.

Respuestas correctas.	Número de estudiantes.
0	2
1	3
2	2
3	2
4	2

5	1
6	2
7	1
8	1

Se observa que solo el 12.5% de los estudiantes responde correctamente más de la mitad de la prueba, otro 12.5% no responde correctamente ninguna de las tareas y en promedio las tareas resueltas correctamente por todos los estudiantes son 4, esto indica que menos de la mitad del cuestionario fue resuelto de forma correcta por parte de todos los estudiantes.

Conclusiones generales

A lo largo de todo el trabajo se ha presentado la investigación sobre los niveles de comprensión de los estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la universidad del valle los cuales estaban finalizando sexto semestre, en el periodo agosto-diciembre del 2016 al momento de solucionar tareas que requieren el uso de distintos tipos de operaciones combinatorias

Para finalizar el trabajo, se presenta a continuación unas conclusiones a nivel general de lo ocurrido en toda la investigación.

La conclusión más relevante de este trabajo es en cuanto a la dificultad presentada por parte de los estudiantes al momento de resolver tareas que involucran el uso de 2 tipos de combinatoria, es tanto así que de las 13 tareas 2 requerían la utilización de dos operaciones combinatorias solo se presentó una sola respuesta correcta, lo cual es un porcentaje demasiado bajo.

Esto indica que al haber usado las dos operaciones este estudiante fue el único en alcanzar el nivel 3 por ese medio, sin embargo cabe añadir que otra forma de alcanzar el nivel de generalización es mediante la resolución de todas las preguntas que involucren un tipo de combinatoria en específico, en este sentido, hubo 2 estudiantes que lograron alcanzar el nivel 3 respecto al tipo de combinatoria combinaciones sin repetición.

Además, hubo 3 estudiantes que alcanzaron el nivel 3 respecto a la permutación con repetición. Por otra parte el caso más llamativo fue el de un estudiante que alcanzó en dos operaciones combinatoria el nivel 3 (permutación con repetición y variación sin repetición).

Ahora bien, se observó que el nivel 2 no es alcanzado por una cantidad significativa de estudiantes, ya que en la mayoría de las tareas solo un poco más del 30% de los estudiantes que da cuenta de las tareas logra llegar a tal nivel.

En cuanto al nivel 1, en este se vio un porcentaje entre 18,75% y 25%, sin embargo cabe mencionar que en muchos casos algunos estudiantes estuvieron a punto de alcanzar este nivel, ya que les hacía falta tener en cuenta una o dos condiciones de la tarea.

Por otro parte, el nivel 4 no fue alcanzado por ningún estudiante, es decir, no fueron capaces de alcanzar la parte teórica de la estructura matemática combinatoria.

Se puede decir que el nivel de comprensión que presentaron los estudiantes no fue el esperado. De cierta manera se esperaba unos resultados más satisfactorios, ya que los estudiantes al momento de presentar la prueba ya contaban con unos conocimientos previos que les permitiría tener un mejor desempeño, sin embargo esto no fue así, debido que los resultados arrojaron que un 25% de los estudiantes dieron respuestas correctas, un 43.27% de los estudiantes no dieron respuestas correctas y por último un 31.73% de los estudiantes no da ningún tipo de respuesta.

Además, los resultados obtenidos evidencian un nivel de comprensión muy bajo con respecto a la combinatoria por parte de este grupo de estudiantes, dado que en la gran mayoría de respuestas incorrectas se presenció el mismo error por parte de ellos (hacen uso de operaciones combinatorias incorrectas) y esto se debe posiblemente a la dificultad que tienen los estudiantes al momento de comprender las condiciones implícitas dentro de los problemas combinatorios.

Lo anterior se puede evidenciar al momento de comparar las respuestas correctas y las respuestas incorrectas donde se observa que los estudiantes hacen una mala interpretación de los datos del problema, pero esto no solo sucede con aquellos estudiantes que hacen uso de las operaciones combinatorias, sino que también sucede con aquellos estudiantes que hacen uso de técnicas básicas.

Cabe aclarar que son muchas las condiciones implícitas que se deben tener en cuenta cuando se lee el enunciado de un problema combinatorio (Si los elementos entran todos o no, si los elementos se pueden repetir o no y si el orden de los elementos importa o no), en el momento que un estudiante no distinga una de estas condiciones dentro de la tarea su interpretación va a ser errónea y esta situación se hace aún más complicada en las tareas que pertenecen al grupo de problemas compuestos ya que se deben separar los elementos en conjuntos diferentes.

Por otro lado los problemas combinatorios no necesariamente pueden ser resueltos mediante el uso de la fórmula. Sino que se pueden establecer diferentes estrategias para su desarrollo, lo cual no pudo ser apreciado por parte de este grupo de estudiantes, ya que en su gran mayoría se remitieron al uso exclusivo de la fórmula, sin dar explicación alguna del motivo que los llevo a plantear tal solución.

Dado lo anterior hay una clara evidencia que este grupo de estudiantes no tienen una apropiación de la combinatoria, lo cual es un poco llamativo, debido a que siendo estudiantes en formación docente se esperaba un nivel de apropiación muy superior, ya que eventualmente serán docentes y si continúan con este nivel posiblemente al momento de enseñar la combinatoria van a generar las mismas dificultades y errores aquí evidenciados.

Finalmente, este trabajo permitió comprender que las investigaciones en torno a la combinatoria y todas sus potencialidades esta aun empezando, que son necesarias más investigaciones en cuanto a las dificultades, errores y obstáculos y sus posibles soluciones que puede tener la combinatoria, para que de este modo en cualquier nivel educativo se logre alcanzar una apropiación total de este.

Recomendaciones

Este trabajo permitió conocer que en el campo de la combinatoria aún hay un camino extenso por recorrer y por esto son necesarias más investigaciones. Investigaciones que se podrían enfocar en los estudiantes en formación docente, con el fin de poder determinar la compresión que tienen estos sobre aquellos conceptos que eventualmente enseñaran al momento de ejercer su profesión.

Asimismo, este trabajo saca a relucir algunos interrogantes, tales como:

¿Lo enseñado en toda la carrera es suficiente para que los estudiantes en formación docente alcancen un nivel de comprensión significativo respecto a la combinatoria?

¿Los problemas didácticos que se presentan al momento de comprender un concepto en un nivel educativo superior son diferente a los presentados en un nivel educativo básico o medio?

Por otro lado, una recomendación para los profesores que dictan el curso análisis exploratorio de datos, es que no se queden en los mismos tipos de tareas que se usan para enseñar la combinatoria, sino que busque tareas más complejas, tareas que hagan que los estudiantes exploren, analicen y justifiquen sus procesos.

BIBLIOGRAFÍA

Basulto, J., & Camúñez, J. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma*, *56*, 43-54.

Batanero, C., Godino, J, & Navarro, V (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*.

Batanero, C., Cañizares, J.., Godino, J, & Roa, R (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. Epsilon, 36, 433-446.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística. *Blaix*, *15*, 2-13. Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Cañizares, J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada).

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*, 7-34.

Grupo L.A.C.E (1999). *Introducción al estudio de casos*. Universidad de Cádiz.

Martínez, H. (2014). *Diseño de una estrategia didáctica para que se facilite la apropiación de la conceptualización de la teoría combinatoria en los estudiantes del grado décimo, en la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del municipio de Medellín.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Meel, D (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión de la matemática y la Teoría APOE. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 6(3), 221-278.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencia en matemática.* Bogotá.

Mosquera, G, & Sánchez, M (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos básicos de la probabilidad y técnicas de conteo en noveno grado*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Parra, D (2015). *Análisis histórico – epistemológico de la iniciación de la combinatoria.* (Tesis de pregrado) Universidad del Valle, Cali.

Roa, R. (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Unpublished Doctoral dissertation). Universidad de Granada.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function , En E. DUBINSKI and G.HAREL (eds.), The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58. Mathematical Association of América, Washington, DC. Traducción al castellano: sobre la comprensión de la noción de función. Delgado C., Universidad del Valle, documento interno, 1999.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Zapata, L., Quintero, S., & Morales, S. (2010). La enseñanza de la combinatoria orientada bajo la teoría de situaciones didácticas.

ANEXOS

Anexo 1

Programa del curso análisis exploratorio de datos

Instituto de educación y pedagogía

Licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas

Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca

Curso: Análisis Exploratorio de datos

Semestre: sexto

Periodo académico: Agosto - diciembre 2016

Enfoque de la línea: Encontrar la regularidad de los fenómenos de masas o colectivos con finalidades descriptivas o de predicción. Las técnicas estadísticas, por su carácter cuantificador y al mismo tiempo sintetizador, constituyen el instrumento idóneo para aproximarse al conocimiento de la realidad, requisito necesario para la toma de decisiones.

El estudio teórico de la estadística y de su aplicación, intenta que los estudiantes transfieran sus conocimientos a situaciones cotidianas, lo que le permite planificar y ejecutar acciones.

La estadística contribuye ostensiblemente en la formación investigativa. De este modo, la estadística se consolida como una herramienta fundamental en posibles proyectos de investigación relacionados con sus futuros trabajos de grado

Propósito del curso

Potenciar en los estudiantes aspectos tales como: el análisis, aplicación e interpretación de datos asociados a problemas y situaciones.

Analizar e inferir con la ayuda de herramientas estadísticas, situaciones problemas inmersas dentro de la cotidianidad.

Fomentar una nueva actitud en los futuros docentes de las matemáticas que les permita abordar algunos problemas de la enseñanza con un enfoque más integral, y en donde, de las matemáticas, se rescate su relación con el mundo de la experiencia.

Contenidos

Unidad uno: Estadística descriptiva

Obtención y clasificación de los datos, datos e información, tabulación y graficación de los datos, medidas de centralización, medidas de dispersión, inferencias sobre un grupo de datos.

Unidad dos: Probabilidad

Experimentos, eventos y espacios muestrales, cálculo de la probabilidad de un evento, técnicas de conteo de espacios muestrales, probabilidad condicional, leyes probabilísticas, composición de eventos y teorema de Bayes.

Unidad tres: Variables aleatorias y distribución probabilísticas

Distribución de variables discretas, valor esperado de una variable aleatoria, distribución binomial, distribución geométricas, distribución hipergeométrica, distribución de Poisson, distribución binomial negativa.

Distribución de variables continuas, valor esperado, distribución uniforme, distribución normal, distribución exponencial, distribución gamma, distribución beta, teorema de Tchebysheff.

Sesiones

Cada semana habrá dos sesiones, éstas tendrán una duración de dos horas y media

Función del docente

Promover, organizar y conducir actividades que permitan el cumplimiento del propósito del curso

Facilitar la construcción de conocimientos, que contribuyan a la formación de los estudiantes

Brindar asesorías a los estudiantes que presenten dificultad con el aprendizaje de algunas temáticas.

Función del docente-estudiante

Participación activa

Trabajo individual y en equipo

Responsabilidad

Respecto a los acuerdos

Asistencia y puntualidad

Permanencia

Evaluación

Participación, talleres individuales y en grupo   20%

Evaluación individual escrita   30%

Examen final individual   30%

Trabajo de campo en grupo 20%

Metodología de la clase

El profesor presentará las ideas teóricas del tema a abordar y los estudiantes consolidarán sus conocimientos a partir de situaciones problemas.

Talleres individuales y en grupo.

Aspectos conceptuales de los documentos referentes

- Probabilidad y estadística, aplicaciones y métodos. (George Canavo)
- Introducción a la probabilidad y a la estadística. (William Mendenhall)

instituto de educación y pedagogía

Universidad del Valle

Anexo 2

Prueba aplicada

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE NORTE DEL CAUCA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Prueba de Razonamiento Combinatorio[7]

Nombre: ____

Semestre: ____

[7] Esta prueba es una modificación del cuestionario presentado por Rafael Roa en su tesis de doctorado en el 2000.

A continuación encontrara 13 problemas con una tarea específica, lea cuidadosamente cada uno de ellos, resuélvalos y justifique los procesos que realice. Al final de cada problema se presenta un ejemplo para su orientación.

- **Problema** 1: Seleccionar 4 cartas diferentes y colocarlas en posiciones diferentes, teniendo en cuenta unas condiciones dadas

Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: K, Q y J. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras?

Ejemplo: K, Q, J. 1.

- **Problema 2**: Seleccionar 4 fichas de colores

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas?

Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

- **Problema 3**: Colocar 3 cartas en 4 sobres

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?

Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema

- **Problema 4**: Repartir 4 coches entre 3 hermanos

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos?

Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

- **Problema 5**: Seleccionar 5 dígitos con reemplazamiento y colocarlos posteriormente para formar un número de 5 cifras

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?

Ejemplo: 8 8 1 2 4

- **Problema 6**: Colocar un grupo de 4 amigos en dos habitaciones

Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche en la casa de su abuela. La casa tiene dos habitaciones diferentes (salón y estudio) donde pueden ubicarse a dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía).

Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

- **Problema 7**: Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Juan, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Ciencias. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?

Ejemplo: Andrés-Juan puede hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Ciencias.

- **Problema 8**: Elegir 3 estudiantes de entre 5 voluntarios

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos?

Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

- **Problema 9**: Estacionar 3 carros en 5 lugares

El hotel “Corona Real” tiene un garaje con cinco lugares, en este hotel solo tres de sus huéspedes tienen carro; Luis, Manuel, Augusto, que pueden colocar cada día el carro en el lugar que prefieran. Los lugares del garaje están ubicados de la siguiente manera 1, 2, 3, 4 y 5.

¿De cuantas formas pueden Luis, Manuel y Augusto estacionar sus carros en el garaje? Ejemplo:

Luis puede estacionar su coche en el Lugar número 1, Manuel en el número 2 y Augusto en el número 4.

- **Problema 10**: Repartir 4 muñecas entre 2 niñas

María y Carmen tienen cuatro muñecas enumeradas del 1 al 4. Deciden repartírselas entre las dos en cantidades iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir las muñecas?

Ejemplo: María puede quedarse con las muñecas 1 y 2 y Carmen con las muñecas 3 y 4.

- **Problema 11**: Seleccionar números de 3 cifras

En una urna hay cuatro esferas enumeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una esfera de la urna, anotamos su número y la devolvemos a la urna. Se elige una segunda esfera, se anota su número y la devolvemos a la urna. Finalmente se elige una tercera esfera y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?

Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2

- **Problema 12**: Colocar 5 cartas

Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C, C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera?

Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma A C B C C.

- **Problema 13**: Elegir un comité de 3 personas.

Se quiere elegir un comité formado por tres personas: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Eduard, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?

Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario

Anexo 3

Solución ideal

<table>
<tr><td>Tarea 1</td><td colspan="2">Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: K, Q y J. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras?
Ej: K, Q, J, 1</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula

Fijando un número se obtiene que cada configuración queda formada por la selección ordenada, sin repetición, de 4 objetos de un conjunto de 4 (J, K, Q, #).
Estas condiciones corresponden a las permutaciones sin repetición de 4 objetos distintos
$P_4 = 4! = 24$
Pero el número que interviene en cada configuración anterior se puede seleccionar, sin repetición, entre 9 posibles.
Esto corresponde a las variaciones sin repetición de 9 objetos tomados de 1 en 1
$V_{9,1} = \frac{9!}{(9-8)!} = 9$
El número total de configuraciones se obtiene:
$P_4\ x\ V_{9,1} = 216$</td><td>Uso de cajas

Cada configuración está formada por las letras: K, Q, J y un número (1 - 9), independientemente del orden.
Una vez elegido un número, para colocar la primera carta hay 4 posibilidades, para la segunda hay 3 posibilidades y así sucesivamente.
Por lo tanto obtenemos:
$\overline{4}\ \ \overline{3}\ \ \overline{2}\ \ \overline{1}\ \ = 24$
Cabe mencionar que cada una de estas 24 posibilidades puede variar con cada una de las 9 posibilidades de seleccionar un número.
Por tanto, el número total de configuraciones es:
$24\ x\ 9\ =\ 216$</td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación</td></tr>
</table>

	El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea: - Si tienen en cuenta que se debe hacer uso de las 12 cartas presentes en el enunciado de la tarea para poder sacar el número total de configuraciones pedidas. - Si tiene en cuenta que no se puede repetir cartas en las configuraciones finales. - Si tiene en cuenta que la configuración JQK1 es distinta a la configuración JKQ1. De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo de operación combinatoria requiere esta tarea, pero no necesariamente hace uso de alguna fórmula. En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de operación combinatoria es necesaria para resolver la tarea propuesta, es decir, fue capaz de reconocer las condiciones de cada tipo de combinatoria que la tarea requiere de dos operaciones combinatorias para poder dar respuesta a esta. Por tal, sabiendo los tipos de combinatorias requerida, el estudiante hace uso de las fórmulas necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico.

	Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o en este caso, que la tarea requiere de la combinación entre una permutación sin repetición y una variación sin repetición. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 2	En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja,

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas?
Ej: se pueden seleccionar en el siguiente orden Blanca, Azul, Rojal y Azul.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula
La selección sucesiva de las 4 fichas produce como configuración una de las ordenaciones posibles de las fichas.
Al cambiar el orden de extracción de una ficha se obtiene una configuración diferente, excepto cuando cambian de lugar entre si las dos azules.
Este modo de generar las configuraciones corresponde al modelo de las permutaciones de 4 objetos entre los cuales 1 se repite 2 veces.
Por tanto, corresponde a una permutación con repetición
$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$</td><td>Tanteo
Tenemos en total cuatro fichas: dos azules (A, A), una blanca (B)y una roja (R)
A partir de esto se empieza a formar las distintas maneras que se puede seleccionar las fichas
AABR, AARB,
ABAR, ABRA,
ARAB, ARBA,
BAAR, BARA,
BRAA, RAAB,
RABA, RBAA.</td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación
El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:
- Si tiene en cuenta que todos los elementos (fichas) se debe usar para realizar las configuraciones.</td></tr>
</table>

	- Si tiene en cuenta que hay un elemento (ficha de color azul) que se repite 2 veces. - Si tiene en cuenta que la configuración AABR es distinta a la configuración AARB. De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo de operación combinatoria requiere esta tarea para ser resuelta, pero no necesariamente hace uso de alguna fórmula. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica que esta tarea hace referencia a una permutación con repetición y de este modo el estudiante podrá hacer uso de la operación para resolverla. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una

	colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 3	Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ej: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otro en el crema.		
Técnica	Fórmula Una configuración está formada por el modo de seleccionar 3	Uso de cajas Si las 3 cartas a colocar fueran distintas, la primera tendría 4	Tanteo Sea A, B, C, D los sobres.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>sobres entre 4 posibles.
Además en cada sobre se pone una sola carta y los sobres no se pueden repetir.
Seguido de ello, las cartas son iguales, el orden de selección de los sobres no produce nuevas configuraciones, es decir, el orden de colocación no influye en la formación de estas.
Por ello, estas son las condiciones de formación de las combinaciones de 4 objetos tomados de 3 en 3.
$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\ 3!} = 4$</td>
<td>posibilidades, la segunda tendría 3 posibilidades, la tercera y última carta tendrían 2 posibilidades.
Por tanto habría:
$\overline{\ 4\ }\ \ \overline{\ 3\ }\ \ \overline{\ 2\ } = 24$
Pero seleccionados los 3 sobres, las configuraciones que se forman al cambiar de sobre las cartas no se distinguen, es decir que una vez seleccionados 3 sobres se pueden formar 6 ordenaciones iguales.

Por tanto el número total de configuraciones será
$\frac{24}{6} = 4$</td>
<td>Sea 1, 2, 3 las cartas

A partir de esto se empieza a formar las distintas maneras de colocar las cartas en los sobres

1A, 2B, 3C
1B, 2C, 3D
1C, 2D, 3A
1D, 2A, 3B</td>
</tr>
<tr>
<td>Nivel alcanzado</td>
<td colspan="3">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:

- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (sobres) se debe usar para realizar las configuraciones.</td>
</tr>
</table>

	- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir los sobres. - Si tiene en cuenta que las 3 cartas son iguales, por tal juegan un factor importante en cuanto al orden de las configuraciones. De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea , pero no necesariamente hace uso de una fórmula En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué la operación combinatoria que permite resolver esta tarea es una combinación sin repetición y hace uso de su respectiva fórmula. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una

	colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 4	Un niño tiene cuatro carros de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ej: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.	
Técnica	Fórmula Se debe entregar los cuatro carros a las tres personas, teniendo en cuenta que a uno solo de los hermanos se le pueden dar los cuatros, es decir, que puede	

<table>
<tr><td></td><td>repetirse la persona al momento de repartir los coches.
Dada tal condición la configuración combinatoria más eficiente es la formación de grupos de 4 personas, entre un conjunto de 3 elementos (personas), con repetición, en las que el orden de los elementos en los grupos influye, ya que supone la recepción de carros diferentes.
$$VR_{3,4} = 3^4 = 81$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:
- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (hermanos) se debe usar para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que los 4 carros se le pueden asignar a un solo hermano.
De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo de operación combinatoria requiere esta tarea, pero no necesariamente hace uso de alguna fórmula.
En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico.
Nivel 2: Discriminación</td></tr>
</table>

	El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué la operación combinatoria necesaria para resolver esta tarea es una variación con repetición y por tanto hace uso de su fórmula. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales

	da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 5	¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos? Ej: 88124	
Técnica	Fórmula Una de las condiciones en el número de cinco cifras es aparecer dos veces el número 8. Dado esto, van a quedar tres casillas restantes para los otros números. Además como los números 1, 2, 4, 6 se pueden repetir, quiere decir que al momento de elegir los números van a ver cuatro posibilidades: $VR_{4,3} = 4^3 = 64$ Como el número 8 ocho debe aparecer en el número de cinco cifras, va a variar en las cinco posiciones, por tanto obtenemos: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\ 2!} = 10$ Entonces, obtenemos la cantidad total de números posibles de cinco	

	cifras al multiplicar los dos datos anteriores. $$64\,x\,10\ =\ 640$$	
Nivel alcanzado	Nivel 1: Identificación El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea: - Si tiene en cuenta que no todos los números entran en las configuraciones finales. - Si tiene en cuenta que en la configuración debe aparecer siempre dos número 8 y que los demás números pueden repetirse. - Si tiene en cuenta que la configuración 88124 es distinta a la configuración 88142. De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no necesariamente hace uso de alguna fórmula En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica el tipo de operación combinatoria que requiere esta tarea. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización	

	El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o en este caso hace uso de los dos operaciones combinatorias (primero una variación con repetición y luego una combinación sin repetición) requeridas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 6	Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche en la casa de su abuela. La casa tiene dos habitaciones diferentes (salón y estudio)

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">donde pueden ubicarse a dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía).
Ej: Alicia y Berta pueden dormir en el salón y Diana en el estudio.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula
Cada configuración consiste en la realización de 4 selecciones de las habitaciones en que se pueden colocar los niños.
Además las habitaciones se pueden repetir y el orden influye, ya que determina el niño que se colocará.
Por lo tanto, estas son las condiciones de formación de las variaciones con repetición de 2 objetos tomados de 4 en 4.
$VR_{2,4} = 2^4 = 16$</td><td></td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación
El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:
- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (habitaciones) se usan para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que en una habitación pueden quedarse todos los niños.
De este modo el estudiante tiene una mínima idea de qué tipo operación combinatoria requiere esta tarea, pero no necesariamente hace uso de alguna fórmula.</td></tr>
</table>

	En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica la operación combinatoria necesaria para poder dar respuesta a esta tarea, en este caso una variación con repetición. Por tal, sabiendo que el tipo combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver no solo esta tarea sino tareas similares que involucren un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis

	Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

<table>
<tr><td>Tarea 7</td><td colspan="2">Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Juan, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Ciencias. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?
Ej: Andrés-Juan puede hacer el trabajo de matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de ciencias.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula

Las 2 personas que harán el trabajo de matemáticas se pueden elegir entre un grupo de 4 amigos.
Una vez elegidos estos dos, los otros dos restantes se asignan al trabajo de ciencias.
Cabe mencionar que las personas no se pueden repetir; el orden de elección de las 2 personas no influye en la configuración.</td><td>Tanteo

Tenemos a cuatro amigos (Andrés, Juan, Clara y Daniel) para realizar dos trabajos (matemáticas, ciencias)

La condición es que cada trabajo debe ser realizado por dos personas.

De acuerdo a ello, haremos las parejas que pueden salir de las cuatro personas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Por tanto, se trata de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\ 2!} = 6$$</td><td>Andrés- Juan, Andrés – Clara
Andrés – Daniel, Juan – Clara
Juan – Daniel, Clara – Daniel.</td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:

- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (amigos) se debe usar para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir el nombre de uno de los amigos.
- Si tiene en cuenta que la pareja Andrés y Juan es la misma que la pareja Juan y Andrés, por tal ambas solo cuentan como una configuración.

De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula.
En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico.
Nivel 2: Discriminación

El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria, en este caso una combinación sin repetición, es decir, fue capaz de reconocer las condiciones de dicho ella.</td></tr>
</table>

	Por tal, sabiendo el tipo combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las

	propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 8	Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ej: Elisa, Fernando y María.	
Técnica	Fórmula Se pide seleccionar grupos de 3 personas de un conjunto de 5 sin que se puedan repetir, y sin que influya el orden de selección en formar nuevas configuraciones. Dado esto, tales condiciones de aplicación exige el uso de un modelo de las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = 10$	Tanteo Tenemos cinco personas Elisa (E), Fernando (F), Germán (G), Jorge (J) y María (M) y se debe elegir tres: (EFG), (EFJ), (EFM), (EGJ), (EGM), (EJM), (FGJ), (FGM), (FJM), (GJM).
Nivel alcanzado	Nivel 1: Identificación El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea: - Si tiene en cuenta que no todos los elementos (estudiantes) se debe usar para realizar las configuraciones.	

	- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir el nombre de uno de los estudiantes. - Si tiene en cuenta que el trio Elisa, Fernando y German es el mismo trio que German, Elisa y Fernando, por tal ambas solo cuentan como una configuración. De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula. En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria, en este caso una combinación sin repetición, es decir, fue capaz de reconocer las condiciones de dicha operación combinatoria. Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas.

	En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 9	El hotel “Corona Real” tiene un garaje con cinco lugares, en este hotel solo tres de sus huéspedes tienen carro; Luis, Manuel, Augusto, que pueden colocar cada día el carro en el lugar que prefieran. Los lugares del garaje están ubicados de la siguiente manera 1, 2, 3, 4 y 5. ¿De cuantas formas pueden Luis, Manuel y Augusto estacionar sus carros en el garaje?

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Ej: Luis puede estacionar su coche en el lugar número 1, Manuel en el número 2 y Augusto en el número 4.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula

Se requiere que se seleccionen 3 lugares entre 5 posibles, además no es posible repetir el lugar, y el orden influye en producir nuevas configuraciones, ya que los carros son diferentes y también las plazas. Por tal estas condiciones son de una variación sin repetición:
$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:
- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (lugares para estacionar) se debe usar para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir el numero de una de los lugares para estacionar.
- Si tiene en cuenta que la configuración donde Luis se estaciona en el lugar 1, Manuel en el 2 y Augusto en el 3 es distinta a que se estacione Luis en el 1, Manuel en el 3 y Augusto en el 2. configuración.

De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula.</td></tr>
</table>

	En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria, en este caso una variación sin repetición, es decir, fue capaz de reconocer las propiedades de ellas y todas sus condiciones dadas. Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis

	Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

<table>
<tr><td>Tarea 10</td><td colspan="2">María y Carmen tienen cuatro muñecas enumeradas del 1 al 4. Deciden repartírselas entre las dos en cantidades iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir las muñecas?
Ej: María puede quedarse con las muñecas 1 y 2 y Carmen con las muñecas 3 y 4.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula

Una vez entregada 2 muñecas a una de las niñas quedan fijos los que corresponden a la otra niña.
Para esto se debe elegir 2 objetos entre un conjunto de 4; no hay repetición y el orden no influye.
De acuerdo a lo anterior, tales condiciones exige la aplicación del modelo de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2:</td><td>Tanteo

Tenemos las muñecas (1, 2, 3, 4)
Las dos niñas (María (M), Carmen (C))
A partir de eso se formar las distintas maneras de repartir las muñecas:

(M1, M2), (C3, C4)
(M2, M3), (C4, C1)
(M3, M4), (C1, C2)
(M4, M1), (C2, C3)
(M1, M3), (C2, C4)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\ 2!} = 6$$</td><td>(M2, M4), (C1, C3)</td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:

- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (muñecas) se debe usar para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir las muñecas.
- Si tiene en cuenta que la pareja M1 y C2 es la misma que la pareja C2 y M1, por tal ambas solo cuentan como una configuración.

De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula.

En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico.

Nivel 2: Discriminación

El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria es requerida, en este caso una combinación sin repetición, es decir, fue capaz de reconocer las propiedades de cada una de ellas y sus condiciones.

Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria.

En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico.</td></tr>
</table>

	Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

Tarea 11	En una urna hay cuatro esferas enumeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una esfera de la urna, anotamos su número y la devolvemos a la

	urna. Se elige una segunda esfera, se anota su número y la devolvemos a la urna. Finalmente se elige una tercera esfera y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ej: se puede obtener el número 222	
Técnica	Fórmula Se debe seleccionar muestras de 3 de un conjunto de 4 objetos. Se pueden repetir los objetos y el orden influye en formar un número distinto, ya que la selección con reemplazamiento y el cambio de orden al extraer se traducen en la obtención de números diferentes. Dada estas condiciones de formación, se habla de una variación con repetición de 4 elementos tomando de 3 en 3 $VR_{4,3} = 4^3 = 64$	Uso de cajas Para elegir el primer número tenemos 4 posibilidades, igual ocurre para el segundo y tercero, debido a que los números se pueden repetir. Como cada forma de elegir el primer número se puede componer con cada forma de obtener el segundo y el tercero, obtenemos: ___ ___ ___ 4 4 4 = 64
Nivel alcanzado	Nivel 1: Identificación El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea: - Si tiene en cuenta que no todos los elementos (dígitos) se debe usar para realizar las configuraciones. - Si tiene en cuenta que en las configuraciones se puede repetir los dígitos. - Si tiene en cuenta que el número de tres cifras 247 es distinto al numero 472.	

	De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea pero no hace uso de ninguna fórmula. En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria, en este caso una variación con repetición, es decir, fue capaz de reconocer las propiedades de ella y todas sus condiciones. Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso

	particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

<table>
<tr><td>Tarea 12</td><td colspan="2">Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C, C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera?
Ej: pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula

Se debe formar configuraciones de 5 letras en la cual una de estas se repite 3 veces.

Por consiguiente, estas son las condiciones de aplicación de una permutación con repetición:</td><td>Uso de cajas y fórmula

Una condición es que en las cinco cartas debe aparecer tres veces la letra C, por tanto va a quedar dos casillas restantes para las demás letras (A, B). Como estas letras restantes no se pueden repetir, quiere decir que en el primer momento de escogerla tiene</td></tr>
</table>

	$PR_5^{3,\,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$	dos posibilidades y en el segundo momento tiene una posibilidad: ___ ___ 2 1 = 2 Además como la letra C va aparecer tres veces en las cinco cartas, éstas van a variar en las cinco posiciones, por lo tanto obtenemos: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = 10$ Entonces obtenemos el resultado final, multiplicando los dos datos anteriores $10\, x\, 2 = 20$
Nivel alcanzado	Nivel 1: Identificación El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea: - Si tiene en cuenta que todos los elementos (cartas) se debe usar para realizar las configuraciones. - Si tiene en cuenta que hay un elemento (carta con la letra C) que se repite 3 veces. - Si tiene en cuenta que la configuración CCCAB es distinta a la configuración CCCBA. De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula. En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico. Nivel 2: Discriminación	

	El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria en este caso una permutación con repetición, es decir, fue capaz de reconocer las propiedades de ella y todas sus condiciones. Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones

	relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.

<table>
<tr><td>Tarea 13</td><td colspan="2">Se quiere elegir un comité formado por tres personas: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Eduar, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?
Ej: Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>Fórmula
Se debe seleccionar 3 personas entre un conjunto de 4, teniendo en cuenta que no hay repetición porque los cargos son desempeñados por personas diferentes y el orden influye ya que determina el cargo que se desempeñará cada uno.
Estas son las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las variaciones sin repetición de 4 objetos tomados de 3 en 3
$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$</td><td>Tanteo
De las cuatros personas (Arturo (A), Eduar (E), Carlos (C) y David (D)) se hacen grupos de tres.
AEC AED ACD ECD
Como en cada grupo formado anteriormente cualquiera puede ser ya sea presidente, tesorero o secretario, quiere decir que cada grupo puede variar de seis formas diferente.
por ejemplo:
Tomamos el grupo conformado por Arturo (A), Eduar (E), Carlos (C)
Los cargos (presidente (P), tesorero (T), secretario (S))
AP ET CS</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>AT ES CP
AS EP CT
AP ES CT
AS ET CP
AT EP CS
Esto mismo sucede con los otros tres grupos.
Por lo tanto, tenemos 4 x 6 = 24</td></tr>
<tr><td>Nivel alcanzado</td><td colspan="2">Nivel 1: Identificación

El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de distinguir de la tarea:

- Si tiene en cuenta que no todos los elementos (candidatos) se debe usar para realizar las configuraciones.
- Si tiene en cuenta que en las configuraciones no se puede repetir el nombre de uno de ellos.
- Si tiene en cuenta que la configuración Arturo, Eduar y Carlos es la misma que la configuración Eduar, Carlos y Arturo.

De este modo el sujeto tiene una mínima idea de qué tipo de combinatoria requiere esta tarea, pero no hace uso de ninguna fórmula.
En este nivel el argumento dado corresponde a la explicación en el lenguaje natural de lo desarrollado. No se presenta ningún argumento teórico.
Nivel 2: Discriminación
El estudiante alcanza este nivel cuando identifica qué tipo de combinatoria, en este caso una variación sin repetición, es decir, fue capaz de reconocer las propiedades de ella y todas sus condiciones.</td></tr>
</table>

	Por tal, sabiendo el tipo de combinatoria requerida, el estudiante hace uso de la fórmula necesaria. En este nivel se presenta un argumento tecnológico más formal, en el que se da cuenta del papel que cumplen las variables que participan en la fórmula, pero no se llega a un nivel teórico. Nivel 3: Generalización El estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de resolver distintas situaciones en diversos contextos que involucran un tipo de combinatoria en específico, o situaciones que involucran más de un tipo de combinatoria para su solución, es decir situaciones compuestas. En este caso, el argumento tecnológico, involucra además de considerar el orden y la posibilidad o no de repetir los elementos de una colección de objetos, la construcción de las fórmulas desde la identificación de las condiciones dadas y las propiedades que se presentan en cada caso particular. De este modo, es posible asegurar que hay un acercamiento al campo teórico de la combinatoria. Nivel 4: Síntesis Este nivel es el más al alto que un estudiante puede alcanzar. Se alcanza este nivel cuando el estudiante es capaz de determinar qué tipo de combinatoria requiere cada tarea y además dar solución a todas las situaciones relacionadas con la combinatoria sean simples o compuestas, a través de dos o más técnicas que involucran también el uso de fórmulas, en las cuales da cuenta del tamaño de la colección y subcolecciones a construir, de las

	propiedades y relaciones presentes en cada situación pero a través de demostraciones formales, es decir que se alcanza la teorización.