



GÉNESIS INSTRUMENTAL: DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS
PROCESOS DE INSTRUMENTALIZACIÓN EN LA
ENSEÑANZA DE DIVISIÓN Y TEORÍA DE NÚMEROS
MEDIADO CON EL INSTRUMENTO “CAJA
MACKINDER”.

BRYAN EDUARDO RODRÍGUEZ DÍAZ



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

GÉNESIS INSTRUMENTAL: DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS PROCESOS DE
INSTRUMENTALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE DIVISIÓN Y TEORÍA DE
NÚMEROS MEDIADO CON EL INSTRUMENTO “CAJA MACKINDER”.

BRYAN EDUARDO RODRÍGUEZ DÍAZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2017

GÉNESIS INSTRUMENTAL: DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS PROCESOS DE
INSTRUMENTALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE DIVISIÓN Y TEORÍA DE
NÚMEROS MEDIADO CON EL INSTRUMENTO “CAJA MACKINDER”.

BRYAN EDUARDO RODRÍGUEZ DÍAZ

TRABAJO DE GRADO BAJO LA MODALIDAD DE MONOGRAFÍA PARA OPTAR POR
EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

DIRECTOR:

EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS
MAGISTER EN EDUCACIÓN Y TIC

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2017

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

DEDICATORIA

Iniciaba el día miércoles 14 de marzo del año 2018 cuando, en épocas de información moderna, las redes sociales se invadían con mensajes, imágenes y noticias de la muerte de uno de los mayores científicos que ha tenido la historia de la humanidad. Stephen Hawking muere a los 76 años de edad en su casa en Cambridge.

Recuerdo que ese día, algunos de mis estudiantes más destacados se acercaban a comentarme sobre la muerte de Hawking. Por fortuna, decido llevar al colegio un ejemplar del libro “The Grand Design” que Hawking escribió junto con Leonard Mlodinow. Ese día, leí algunos apartes del libro que me parecieron interesantes. Logramos opinar sobre agujeros negros, viajes en el tiempo, creación del universo y los aportes de algunos filósofos también al campo científico.

Dado lo anterior, y a lo mucho que aprendí y sigo aprendiendo de mis estudiantes este trabajo también los involucra. Por sus constantes preguntas y preocupaciones por saber el estado de mi monografía. A los 39 estudiantes de mi curso 10°B. Quienes insistían en su deseo por asistir a la sustentación de mi trabajo y de quienes tuve que despedirme, un día cualquiera por los nuevos horizontes. Porque Hawking decía “me he dado cuenta que incluso las personas que dicen que todo está predestinado y que no podemos hacer nada para cambiar nuestro destino, igual miran antes de cruzar la calle”. Y porque soy fiel creyente que el destino presenta infinitas bifurcaciones por las que transitamos.

A mis compañeros y amigos del alma. Con los que fuimos 2K*2BJ. Porque viajamos, aprendimos, sufrimos, nos desvelamos. A Kelly de Arco con quien trabajamos en Investigación I y desde ahí forjamos una bonita amistad. A David Gómez, Karen Vallejo, Carolina Cedeño, Jhon Jairo Getial. El apoyo fue de suma importancia para estar culminando este ciclo. Porque vamos por más en este inmenso y expectate camino de ser profesores.

Por último, pero lo más importante. A mi mamá y a mi hermana. Por considerar mis espacios de estudio y avance de este trabajo. Por apoyarme y sobretodo por soportarme, porque eso no es sencillo. A mi mamá abuela por su ayuda y consejos. A las 3 mujeres de mi vida por siempre creer en mí y porque gracias a ellas y únicamente a ellas pude culminar con todo y lo que eso implica.

Y a Juan, porque todos los días a las 6:00 pm desde un día cualquiera hasta el final estuvo pendiente de mis avances, de que culminara. A él por ser todo.

AGRADECIMIENTOS

*De manera especial al profesor Edwin Carranza,
por dirigirme y confiar en mi propuesta,
por fortalecer mi trabajo con sus apreciaciones.
Mil gracias por el apoyo fundamental en este camino,
en este trabajo y en mi carrera.*

*A la IED República de China,
a la profesora Milena y a los estudiantes de grado cuarto (2016)
por ser protagonistas de este trabajo, por su actitud y compromiso
en cada una de las sesiones de mi práctica.*

*Al Colegio Pedagógico Inglés,
a la profesora Nohora Melo por brindarme el espacio sin problema.
Y por último, a mis estudiantes del Énfasis en Ingeniería del grado undécimo (2017),
quienes fueron fundamentales con su ayuda y colaboración.*

¡A todos, gracias infinitas!

EL AUTOR.

RESUMEN

Quizá uno de los contenidos en matemáticas con mayores dificultades, tanto para estudiantes como para profesores, es la enseñanza y el aprendizaje de la división. Es por esta razón que el presente Trabajo de Investigación pretende describir de forma concreta y juiciosa, algunos procesos de instrumentalización para la enseñanza de la división mediado con un instrumento. Un análisis que se sale de la forma tradicional de enseñar en el aula de matemáticas y se desborda al uso del Instrumento de la Caja Mackinder, donde de forma natural, también se logran formalizar conceptos introductorios de la Teoría de Números. Un Trabajo de Investigación que da cuenta de aspectos históricos, didácticos e innovadores para la enseñanza de la división considerando sus diferentes interpretaciones a partir de una secuencia de actividades aplicadas a estudiantes de cuarto grado en dos Instituciones Educativas, donde se analizan sus argumentos, procesos y se concluye si en efecto el Instrumento potencia su aprendizaje y, además, le genera un aprendizaje significativo.

PALABRAS CLAVE: Enseñanza de la División, Instrumentalización, Instrumento, Caja Mackinder, Aprendizaje, Didáctica de las Matemáticas, Teoría de Números, Interpretaciones de la División.

ABSTRACT

Perhaps one of the contents in mathematics with greater difficulties, both for students and teachers, is the teaching and learning of the division. It is for this reason that the present research work described as a concrete and judicious form, some instrumentalization processes for the teaching of the division mediated with an instrument. An analysis that is sold in the traditional way of teaching in the classroom of mathematics and overflows to the use of the Instrument of the Mackinder Box, where in a natural way, it is also possible to formalize introductory concepts of the Theory of Numbers. A research work for the account of historical, didactic and innovative aspects for the teaching of architecture, considering different readings in a sequence of activities for fourth grade students in two educational institutions, where their arguments, processes and concludes if in effect, the Instrument enhances their learning and, in addition, generates significant learning.

KEY WORDS: Division Teaching, Instrumentalization, Instrument, Mackinder Box, Learning, Math Teaching, Number Theory, Interpretations of the Division.

INTRODUCCIÓN.

Una de las mayores falencias en matemáticas que presentan los estudiantes a la hora de solucionar diversas situaciones radica en no saber dividir. Se argumenta que la complejidad del algoritmo y la poca comprensión de las formas de la división son razones por las cuales se presenta este problema.

La descontextualización de la división y los recursos con los que se presenta no generan un aprendizaje significativo.

¿Cómo considerar que un proceso de enseñanza es exitoso o, en el mismo sentido, genera un aprendizaje significativo? son muchas las preguntas que se generan al pensar sobre el impacto que está teniendo la enseñanza de las matemáticas. Ahora, para estudiar los procesos de Instrumentalización se hace necesario un aporte didáctico y teórico sobre lo que representa nuevas propuestas de enseñanza en el aula de matemáticas. Es así como se cuestiona el proceso de enseñanza y aprendizaje de la división y se propone como un proceso mediado con un instrumento. Esta descripción y análisis estará orientado por los aspectos instrumentales en un contexto educativo que se proponen en la Aproximación Instrumental, la cual expone dos miradas, por un lado, la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard (1999) y por el otro, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011).

Dado lo anterior, este trabajo de investigación se encuentra centrado en describir los procesos de instrumentalización en la enseñanza de la división con el instrumento Caja Mackinder en estudiantes de grado cuarto y como, poco a poco, las conclusiones de ellos mismos llegan al plano de la Teoría de Números, caracterizando cuándo un número es par, impar y también cuándo un número es divisible por otro.

El instrumento de la Caja Mackinder permitirá algunas ideas intuitivas (en primera medida) de la división como repartición en grupos iguales. Seguido de esto, las nociones de la división exacta y no exacta y conceptos de la introducción a la Teoría de Números.

Se escoge como base teórica el *Enfoque Instrumental* de Rabardell (1995) que sirve para sustentar algunos términos que se manejarán en este trabajo de investigación, de la misma forma, elementos teóricos referenciados por Carlos Maza en libros como *Multiplicar y Dividir* y *Enseñanza de la Multiplicación y la División*. Se usará una metodología descriptiva cuyo objetivo es llegar a conocer los procesos de enseñanza y cómo se dan en determinadas situaciones o contextos, en este caso, para la enseñanza de la división.

CONTENIDO

CAPÍTULO I: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.	11
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	12
2. JUSTIFICACIÓN	13
3. OBJETIVOS	14
3.1 OBJETIVO GENERAL	14
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
4. ORIENTACIONES GENERALES	14
4.1 ¿POR QUÉ?.....	14
4.2 ¿PARA QUÉ?.....	15
4.3 ¿CUÁNDO?.....	16
4.4 ¿DÓNDE?.....	16
4.5 ¿CÓMO?.....	16
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	18
1. APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL.	19
1.1 DIMENSIÓN INSTRUMENTALIZACIÓN	21
1.2 DIMENSIÓN INSTRUMENTACIÓN.	21
2. SOBRE EL INSTRUMENTO.	24
2.1 CARACTERÍSTICAS DEL INSTRUMENTO	27
2.2 EL PROBLEMA DE LA DIVISIÓN	28
2.3 MUESTRA POBLACIONAL.....	31
2.4 ¿EN QUÉ SE BASAN LAS CATEGORÍAS DE LA GÉNESIS?	32
CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO.....	34
1. FASES DE TRABAJO	35
1.1 FASE DE FUNDAMENTACIÓN	35
1.2 FASE DE PLANEACIÓN Y DISEÑO DE ACTIVIDADES.....	35
1.3 FASE DE OBSERVACIÓN Y RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	36
1.4 FASE DE ANÁLISIS DE DATOS	37

1.5 FASE DE RESULTADOS	38
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS.....	39
1. INSTRUMENTO DE ANÁLISIS	40
2. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD	42
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	51
CONCLUSIONES	52
BIBLIOGRAFÍA	54
ANEXOS	55
SITUACIÓN FUNDAMENTAL.....	56
ACTIVIDAD 1	57
ACTIVIDAD 2	58
ACTIVIDAD 3	59
ACTIVIDAD 4	61
ACTIVIDAD 5	62
ACTIVIDAD 6	64
ACTIVIDAD 7	65

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Concepto de Instrumento.....	20
Ilustración 2 Proceso de génesis instrumental Ilustración propuesta por pedreros (2012).....	21
Ilustración 3 Proceso de Génesis Instrumental	24
Ilustración 4 Génesis Instrumental.....	25
Ilustración 5 Sistema Didáctico	26
Ilustración 6 Caja Mackinder 1	27
Ilustración 7 Caja Mackinder 2.....	27
Ilustración 8 Caja Mackinder 3.....	28
Ilustración 9 Tipos de División.....	30
Ilustración 10 Desarrollo de la Actividad 1	35
Ilustración 11 Desarrollo de Actividad 2	36
Ilustración 12 Familiarización con el Instrumento 1	36
Ilustración 13 Familiarización con el Instrumento 2	37
Ilustración 14 Familiarización con el Instrumento 3	37
Ilustración 15 Aproximación de los estudiantes con el instrumento	42
Ilustración 16 Abordaje de la situación.	43
Ilustración 17 Repartición uno a uno.	43
Ilustración 19 Argumentación sobre no poder repartir la cantidad.....	44
Ilustración 18 Argumento del estudiante	44
Ilustración 20 Argumento del estudiante	45
Ilustración 21 Argumento sobre la posibilidad de repartir la cantidad	45
Ilustración 22 Argumento sobre no poder repartir 13 gafas	46
Ilustración 23 Consulta sobre la característica del número 13	47
Ilustración 24 Conclusión de las formas de solución de las situaciones.....	49
Ilustración 25 Comparación de las formas de solución de las situaciones	49
Ilustración 26 Conclusión repartición uno a uno	50
Ilustración 27 Conclusión agrupamiento de bolitas.....	50

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Categorías de Análisis	32
Tabla 2 Componentes Instrumento de Análisis	40
Tabla 3 Análisis de la construcción del instrumento y familiarización	41
Tabla 4 Análisis Actividad.....	50

CAPÍTULO I: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el desarrollo de los espacios del eje de Práctica de la licenciatura, los estudiantes se enfrentan a diferentes escenarios que ponen en juego sus capacidades y donde es necesario realizar un trabajo fuerte de investigación de fuentes didácticas y conceptuales frente a determinado contenido matemático que está por desarrollarse en los colegios distritales. Estos contenidos representan la formación académica que se debe asumir como futuros profesores. Justamente, el problema central de este Trabajo de Investigación nace en una de esas prácticas docentes.

La mayoría de personas presentan dificultades en el análisis de situaciones que requieran de la división para su solución. Los estudiantes de educación básica y media no identifican los conceptos de división y se centran únicamente en la aplicación o desarrollo de un algoritmo por métodos manuales o ayudados por calculadoras. Sin hablar de la apropiación del algoritmo, puesto que son pocas las personas que logran solucionar divisiones desarrollando el algoritmo de forma manual y, aunque lo puedan hacer, no logran distinguir las concepciones de división que presentan diversas situaciones. El problema se agudiza cuando, por algunas prácticas de los docentes de matemáticas, el concepto de la división no es trabajado sino que por el contrario, la concentración se centra en el desarrollo y ejercitación del algoritmo.

Entonces, el problema principal radica en la complejidad del algoritmo, en su ejercitación sin contexto y en la interpretación errónea de las situaciones que la requieran sumado con el aprendizaje poco significativo dado la ausencia de recursos para su trabajo en el aula de matemáticas. En otras palabras, la división no se puede presentar únicamente como un algoritmo, sino que por el contrario, sustenta un panorama amplio de trabajo que requiere de distintas formas de acercamiento y profundización.

2. JUSTIFICACIÓN

Considerando el problema que mueve este trabajo de investigación, nace la pregunta ¿cómo enseñar el concepto de división? Teniendo esto en cuenta es como se da inicio a una serie de consultas y fundamentación acerca de cuál es la mejor forma para enseñarla. En primer paso, se detallan documentos didácticos que reflejan las dificultades y errores que presentan los docentes al momento de enfrentar su enseñanza: el simple y vacío desarrollo de un algoritmo. La primera decisión sería alejar la idea de imponer el concepto de división considerando únicamente una serie de pasos para la solución de problemas e intentar una alternativa de enseñanza más enriquecedora. Más allá de querer llegar a imponer el desarrollo del algoritmo de la división en los estudiantes de grado cuarto, el objetivo es buscar y proponer una alternativa de enseñanza que generara un aprendizaje significativo y que además comprendieran las interpretaciones que se desprenden de este concepto. Luego de leer y reflexionar algunos documentos de didáctica de las matemáticas cuyo eje es la enseñanza de la división, nace entonces el ideal de hacer uso de un instrumento que permita poner en juego las interpretaciones de la división. Esto, ya que el dominio del algoritmo no garantiza reconocer sus ocasiones de empleo en distintos tipos de problemas (Sadovsky, 2000). Además, los estudiantes están en capacidad de resolver distintos problemas de partición o cuotición antes de dominar las diferentes estrategias de cálculo.

Es entonces como se hace necesario describir algunos procesos de instrumentalización para su enseñanza mediado con un instrumento. Autores como Carlos Maza señalan que existen errores didácticos a la hora de enseñar la multiplicación y la división. Que este proceso no se puede limitar a la aplicación del algoritmo y que tampoco debe estar descontextualizado. Analizar los procesos de instrumentalización dejará ver la forma en la que los estudiantes desarrollan algunos conceptos, en primera medida intuitivos, pero también formales. Luego, las distintas apreciaciones de los estudiantes harán que haya una formalización de conceptos propios de la Teoría de Números y que se genera gracias al uso y las potencialidades del instrumento.

Y es que ¿cuál es la mejor forma de potenciar esas capacidades para resolver distintos problemas si no es haciendo uso de un material manipulable-tangible? Ahora, considerando que una de las mejores alternativas para la enseñanza del concepto debía darse con un material manipulativo-tangible entonces la cuestión era decidir cuál era el mejor. Se consultan referentes teóricos y se encuentra que la Caja Mackinder ayuda a dar solución a situaciones de reparto, luego el reto era potenciar ese instrumento en beneficio de la apropiación de los conceptos. Es de esa forma, como nace este Trabajo de Investigación donde, de forma natural, también se pueden lograr avances de conceptos introductorios de la Teoría de Números que inicialmente no se había pensado pero que, de la misma forma, se expone en los análisis de los resultados.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Describir los procesos de instrumentalización de estudiantes de grado cuarto en la enseñanza de la división mediada con el instrumento Caja Mackinder.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Interpretar las formas en la que los estudiantes entienden las ideas iniciales de la división como repartición en grupos iguales.
- Determinar los procesos presentes en la enseñanza de la división mediada con el instrumento Caja Mackinder.
- Identificar las potencialidades del instrumento para la enseñanza de la división en relación con la mediación semiótica.
- Clasificar, en categorías y momentos de aprendizaje, los desarrollos de la instrumentación y la instrumentalización de la génesis instrumental.

4. ORIENTACIONES GENERALES

4.1 ¿POR QUÉ?

El problema de que los estudiantes jóvenes y aún los adultos presenten dificultades con la división yace en la escuela primaria. El aprendizaje poco significativo y la aplicación de un algoritmo confuso son raíces del problema.

Según Orús y Fregona (2012) expresan que la división es un tema problemático en la escuela, algunos de esos problemas van relacionados con los materiales que se utilizan para su enseñanza, la gestión del docente y hasta el tratamiento empírico de procesos descontextualizados para llegar al algoritmo propio de la división que, de forma errónea, se considera la meta de la enseñanza.

La Revista “*La Educación en nuestras manos*” en su edición N° 15 2004 realiza un reportaje a la profesora Patricia Sadovsky de la Universidad de Buenos Aires, donde ella expone que la enseñanza de dividir es transmitir cultura. Frente a la pregunta del periodista de esta revista sobre qué tener en cuenta a la hora de enseñar la división, Sadovsky plantea que:

“En primer lugar es necesario definir qué entendemos por división. Hace cien años era prioritario enseñar el algoritmo de la división, porque disponer del mismo era una necesidad para los ciudadanos. Hoy esto cambió sustancialmente, la sociedad cambió y este cambio produce una transformación en los saberes que circulan en la sociedad.”

Esto supone la necesidad de proponer una enseñanza distinta, donde se pueda distinguir los procesos relevantes del estudiante al interactuar con un instrumento cuyo fin es comprender la noción de la división como repartición en grupos iguales más allá del desarrollo del algoritmo.

4.2 ¿PARA QUÉ?

Se debe comprender que el algoritmo de la división es una tarea secundaria donde al dejar de ser la cuestión central, se da un paso a una actividad mucho más rica desde el punto de vista de la conceptualización (Sadovsky, 2004). Es necesaria entonces una tarea didáctica donde los estudiantes consideren el hecho de saber para qué y porqué deben dividir en situaciones con contexto más no se limiten a la aplicación del algoritmo. La profesora Sadovsky (2004) también expresa que fuera de las escuela son muy pocas las personas que recurren al a dividir tomando papel y lápiz o incluso las manos, la mayoría de las personas acuden a una calculadora para solucionar un problema que así lo requiera. En este sentido, el objetivo debe ser que los estudiantes comprendan el concepto de la división que va más allá de su algoritmo.

Orús & Fregona (2012) exponen en su documento *“Cómo enseñar la división en la escuela primaria”* que la concepción del saber enseñar en matemática requiere un campo más contextualizado y diferenciado a partir de las significaciones que el docente desarrolla en contexto y que van a otorgar sentido a toda situación o acción. De esta manera, este trabajo de investigación también pretende realizar una crítica a la manera cómo algunos profesores enseñan la división en la básica primaria, pues se dejará de lado el desarrollo del algoritmo para ahondar en su conceptualización. Hoy todavía el algoritmo de la división sigue siendo una marca cultural de lo que es avanzar en el conocimiento de las matemáticas en la escuela. En grado cuarto los estudiantes van a aprender "división por dos cifras" y eso tiene

una connotación cultural muy fuerte: los estudiantes piensan que si no aprenden la división van a repetir el grado (Sadovsky, 2004).

Luego, describir los procesos de instrumentalización permitirá observar una forma distinta de enseñanza de la división y por tanto, permitirá al lector tomar posición sobre la importancia del desarrollo del algoritmo o la comprensión de los conceptos.

4.3 ¿CUÁNDO?

El presente trabajo de investigación se desarrollará en el transcurso del primer semestre del año 2017.

4.4 ¿DÓNDE?

Tendrá un carácter experimental con estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Distrital República de China ubicado en la localidad de Engativá de la ciudad de Bogotá y el Colegio Pedagógico Inglés ubicado en el municipio de Madrid, Cundinamarca.

4.5 ¿CÓMO?

El trabajo de investigación será desarrollado por fases donde se dejarán ver los alcances, paso por paso, de algunos procesos de instrumentalización en la enseñanza de la división mediada con un instrumento como el descubrimiento, la personalización y la transformación del artefacto.

La forma en la que se desarrollará el trabajo estará guiado así:

- **Socialización con los docentes titulares:**

En esta fase, se dará a conocer a los docentes titulares los objetivos del trabajo de investigación y la actuación que ellos tendrán en el mismo. Así como también mostrar las formas metodológicas en las cuales se llevará a cabo.

- **Construcción del instrumento:**

Se construirá el Instrumento Caja Mackinder junto con los estudiantes. Se hará uso de materiales reciclables y de fácil acceso en sus entornos.

- **Conformación de grupos de trabajo:**

Se organizará a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo conformados de forma aleatoria, esto como estrategia de la resolución de problemas y como medio de socialización de los procesos de ellos mismos.

- **Planteamiento de la situación:**

Se propondrá situaciones en un contexto real y cercano a su cotidianidad y según sus intereses personales. Esto con el fin de lograr un acercamiento y comodidad en el trabajo que van a desarrollar.

- **Registro de procesos:**

Se tomará registro de respuestas, procedimientos, discusiones grupales y sucesos que puedan enriquecer la investigación y por tanto, formalizar los conceptos. Los estudiantes tendrán que dar cuenta de sus desarrollos frente a la situación en formatos de registro.

- **Validación de procesos:**

Con el formato de registro de procesos que deben desarrollar los estudiantes, se validará y analizará por medio del instrumento sus procesos de instrumentalización.

- **Institucionalización de procesos y conceptos:**

Como última fase del desarrollo en el trabajo con los estudiantes, se procederá a institucionalizar los conceptos que nacen de los procesos que entre los grupos se hayan dado y posteriormente socializado y validado con el docente investigador.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

1. APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL.

¿Cómo considerar que un proceso de enseñanza es exitoso o, en el mismo sentido, genera un aprendizaje significativo? son muchas las preguntas que se generan al pensar sobre el impacto que está teniendo la enseñanza de las matemáticas. Ahora, para estudiar los procesos de Instrumentalización se hace necesario un aporte didáctico y teórico sobre lo que representa nuevas propuestas de enseñanza en el aula de matemáticas. Es así como se cuestiona el proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional de la división (desarrollo algorítmico únicamente) y se propone como un proceso mediado con un instrumento. Esta descripción y análisis estará orientado por los aspectos instrumentales en un contexto educativo que se proponen en la Aproximación Instrumental, la cual expone dos miradas, por un lado, la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard (1999) y por el otro, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011). La primera de éstas hace alusión al análisis sistémico de técnicas, conceptos y herramientas. La segunda está ligada a cuestiones instrumentales.

La Aproximación Instrumental tiene su origen en la década de los 90 cuando las calculadoras y los programas computacionales empezaban a abrirse paso en el aprendizaje de las matemáticas. Y lleva unas clasificaciones importantes en el marco del lenguaje y sus definiciones.

A continuación, se exponen los conceptos que se van a manejar en esta investigación:

SUJETO: Estudiante o grupo de estudiantes escogidos (cuarto grado) para realizar el estudio.

ARTEFACTO: Según Rabardel (2011) se llama artefacto a un objeto susceptible de uso y que se propone o se construye con un ideal o para algún efecto en la actividad matemática.

ESQUEMA DE UTILIZACIÓN: Pérez (2014) dice que los esquemas de utilización fueron desarrollados por Rabardel (2011) a partir de la Teoría de Piaget y las Nociones de Esquema de Vergnaud. Un Esquema de Utilización es un constructo que da cuenta de un pensamiento organizado y estructurado.

INSTRUMENTO: Comprendidas las anteriores definiciones, se establece que un Instrumento es la relación que guardan las 3 anteriores, el sujeto en su esquema de utilización para el que pone en juego el artefacto. Dicho en otras palabras, las habilidades del sujeto (sus esquemas de utilización) más el artefacto es lo que se considerará un Instrumento.

Respecto a la definición de Instrumento, Rabardel (1999) dice que:

“En realidad, el instrumento es una entidad mixta que comprende de una parte, el artefacto material o simbólico y de otra parte, los esquemas de utilización, las representaciones que forman parte de las competencias del usuario y son necesarias para la utilización del artefacto.” (p. 8)

De forma visual, se propone la siguiente ilustración:

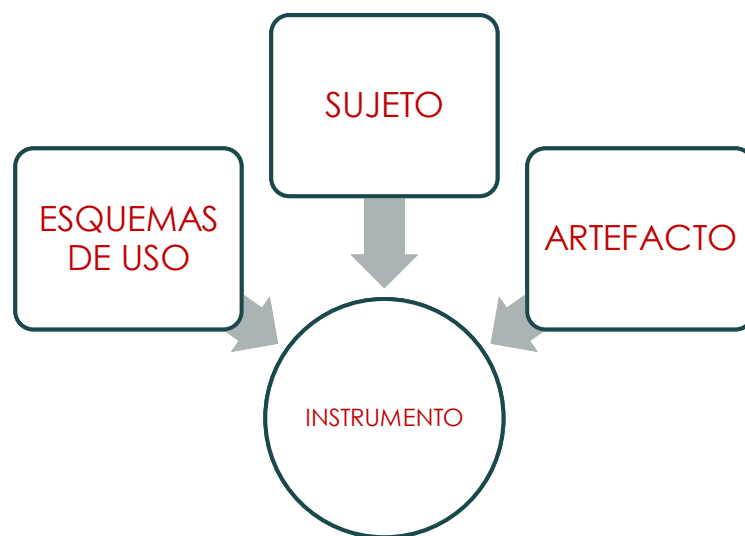


ILUSTRACIÓN 1: CONCEPTO DE INSTRUMENTO.

La evolución de artefactos relacionada con la actividad del sujeto y el surgimiento de los esquemas de utilización, concierne a dos dimensiones, dos orientaciones diferentes y a la vez conjuntas: la instrumentalización dirigida hacia el artefacto y la instrumentación dirigida hacia el sujeto mismo (Chumpitaz, 2013). En el documento *La actividad mediada por instrumentos en didáctica de las Matemáticas* escrito por Marisol Santacruz de la Universidad del Valle, se expone que esa evolución del artefacto y el uso que le da el sujeto conforma la acción mediada y que, con el fin de analizar estos procesos, nace lo que se llama la Génesis Instrumental que está presentada en dos dimensiones:

1.1 DIMENSIÓN INSTRUMENTALIZACIÓN

Esta dimensión se encuentra fijada en las potencialidades del artefacto. Es un proceso referido al surgimiento y evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción, institución de funciones, atribución de propiedades, transformación del artefacto (Chumpitaz, 2013). Pérez (2014) la propone como la dimensión que corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan hacia el artefacto, es el conocimiento del estudiante el que guía la manera como la herramienta es usada y en un sentido, da forma al artefacto

1.2 DIMENSIÓN INSTRUMENTACIÓN.

El correcto uso del artefacto (entiéndase por correcto uso la accesibilidad y mediación del mismo) junto con las habilidades del sujeto y el conocimiento forman esta dimensión. Es un proceso relativo al surgimiento y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos (Chumpitaz, 2013). En el mismo sentido, corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan al sujeto, las cualidades y restricciones de la herramienta influyen las estrategias de resolución de problemas del estudiante y las concepciones emergentes (Pérez, 2014).



ILUSTRACIÓN 2 PROCESO DE GÉNESIS INSTRUMENTAL
ILUSTRACIÓN PROPUESTA POR PEDREROS (2012)

Es de esta forma que nace un cuestionamiento, ¿es el instrumento lo mismo que la herramienta?

Según la TAD de Chevallard (1999) todo esto se puede establecer como una cuádrupla que resulta:

Tareas: Son aquellas que se expresan en términos de verbos y por ende requieren una acción.

Técnicas: Es la forma en la que se lleva a cabo la tarea.

Tecnologías: Es el discurso o la justificación de la aplicación de la técnica.

Teorías: Es el afianzamiento y formalización de las Tecnologías.

Así bien, Medina (2014) señala un conflicto entre lo epistémico y lo pragmático y de cómo eso se confronta en las instituciones educativas, es decir, no se profundiza o se ignora el apoyo que la herramienta pueda brindar en el conocimiento.

Por el lado de la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011) se define como aquello que brinda o da herramientas para analizar el rol de las tecnologías digitales y la cual permite una distinción entre el objeto tecnológico, el artefacto y el instrumento. Propone el paso del artefacto al instrumento como el reconocimiento de la herramienta y su objetivo de aplicación.

Los objetos matemáticos emergen de prácticas institucionales, en donde generalmente el discurso teórico se ve debilitado por la rutinización de algunas técnicas y por una naturalización o internalización del conocimiento que tiende a ser transparente, perdiéndose la naturaleza del conocimiento matemático como constructo social y convirtiéndose en actos simples (Artigue, 2002).

Pero a lo anterior también se le tiene que agregar el valor pragmático y el valor epistémico de las técnicas. El valor pragmático tiende a la eficacia o el campo de aplicación y el valor epistémico implica el papel que las técnicas tienen a facilitar para la comprensión de las matemáticas (Artigue, 2002; Lagrange, 2005b; citado por Monaghan, 2005).

Tanto Chevallard como Rabardel exponen que la génesis instrumental cuenta con una metodología que busca explicar la estructura de la lógica y que llaman Praxeología. En este sentido, refieren que la Instrumentalización carga al artefacto de potencialidades y lo transforma para usos específicos, se da a través de diferentes momentos:

Funciones Pertinentes, describe restricciones internas, la organización del diseño y restricciones de comando que refiere al artefacto.

Personalización, donde el individuo escoge el artefacto que sea más conveniente o se ajuste mejor a sus necesidades.

Transformación del artefacto, es la explicación de la accesibilidad y rendimiento que tenga el artefacto.

No obstante, la instrumentalización tiene restricciones las cuales se pueden entender de la siguiente manera:

Las restricciones internas, las cuales identifica como las restricciones de modo de existencia propuesta por Rabardel (1995, citado por Trouche, 2005a).

Las restricciones de comando vinculadas a la existencia y naturaleza de comandos específicos.

Todas las restricciones son realmente pre-estructuradas por la actividad del usuario y no solamente la restricción de organización.

En el caso de la Instrumentación, está relacionada con el sujeto y lleva al desarrollo o apropiación de esquemas de acción instrumentadas, que son técnicas que permiten dar respuesta a una tarea dada (artefacto-usuario). Además la utilización de la instrumentalización requiere una organización mental que incluye habilidades, técnicas y conceptuales a la hora de usar el artefacto. (Drijvers & Gravemeijer, 2005) distinguen dos tipos de esquemas de utilización:

Esquemas de uso, están orientados hacia la realización de tareas secundarias que corresponden a las acciones y actividades específicas vinculadas directamente con el artefacto.

Esquemas de acción instrumentada, lo que caracteriza estos esquemas según (Drijvers & Gravemeijer, 2005) está en mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de la actividad, que en nuestro caso son los objetos matemáticos como las fórmulas, gráficos, etcétera. Su importancia es dada por el acto global que apunta llevar a cabo las transformaciones sobre dichos objetos de la actividad. Después de considerar cada una de los componentes que conforman la Instrumentación y la Instrumentalización, la siguiente ilustración sintetiza el proceso de Génesis Instrumental:



ILUSTRACIÓN 3 PROCESO DE GÉNESIS INSTRUMENTAL

2. SOBRE EL INSTRUMENTO.

En Didáctica de las Matemáticas, las discusiones respecto al uso de instrumentos en un determinado saber, ha tenido su estudio y análisis. Por ejemplo, Rabardel (1999) hace una reflexión que comprende miradas instrumentales en el uso de instrumentos para el aprendizaje de las matemáticas.

Allí, se observa las formas en la que los profesores de matemáticas perciben los instrumentos en sus clases. Algunos de ellos, afirman que estos instrumentos no son más que objetos auxiliares cuyo fin único es hacer lúdica una clase y que no interviene en el proceso de aprendizaje por parte del estudiante.

En el documento “La actividad mediada por instrumentos en didáctica de las matemáticas” (Santacruz, 2006) expone lo que Trouche (1996) pudo comprobar, el uso de calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, tanto profesores como estudiantes opinan que su uso no requiere aprendizaje y por consecuencia, son consideradas neutrales en su proceso.

Esta Génesis Instrumental está dividida en dos dimensiones que se sintetizan en la siguiente imagen:

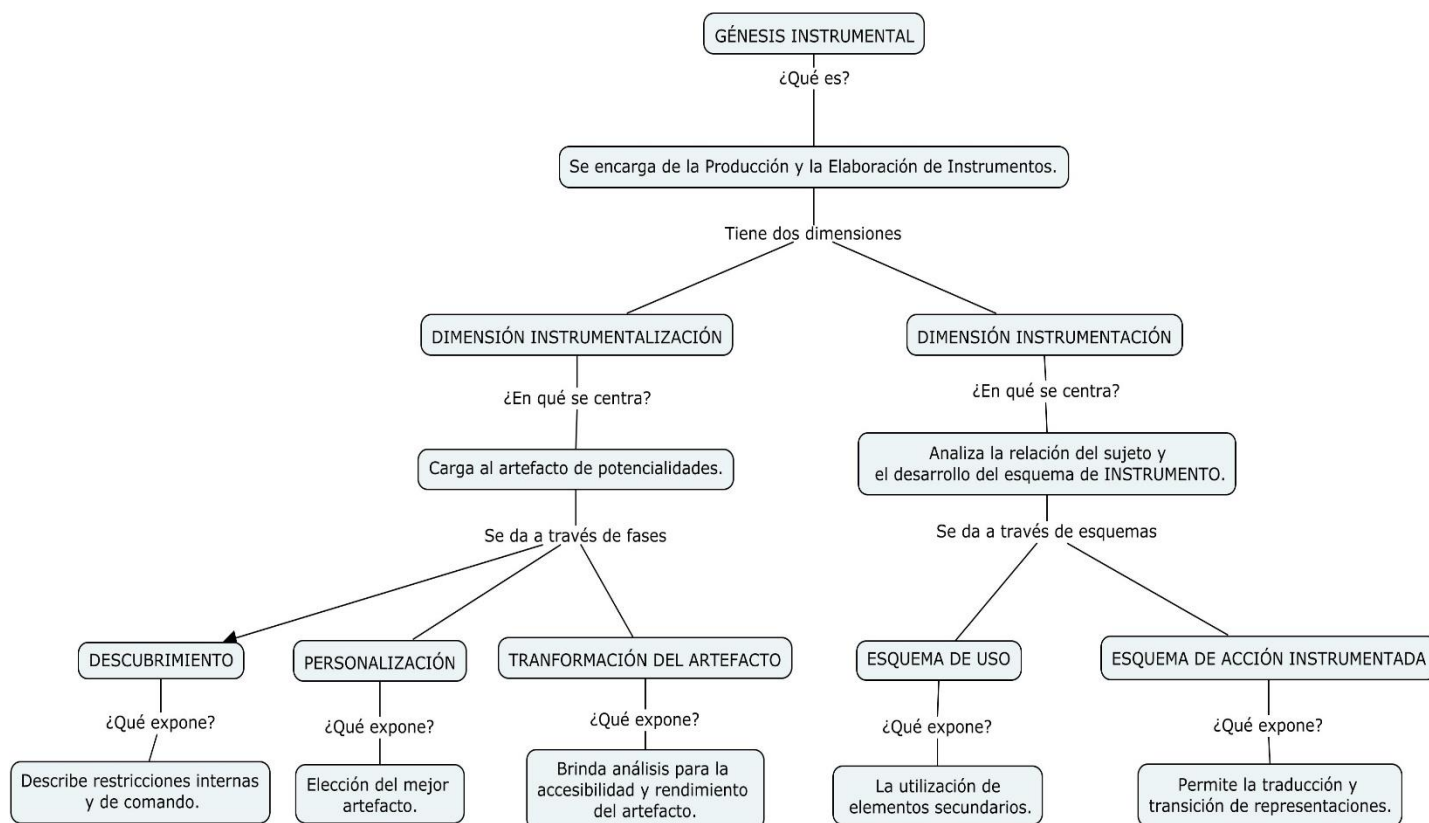


ILUSTRACIÓN 4 GÉNESIS INSTRUMENTAL

Luego, Rabardel (1999) expone que los profesores no son conscientes del papel que el instrumento representa en el aula de clase con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Deja ver que, contrario a las afirmaciones de estudiantes y profesores, los instrumentos presentan un objetivo fundamental en el proceso cognitivo del estudiante. Otro argumento que precisa la importancia de los instrumentos, refiere al campo de la psicología. Piaget y Vigotsky han dejado ver que la relación entre el sujeto y su acción es fundamental en la construcción de su conocimiento, en tanto, se encuentre estrechamente relacionado con su historia social y cultural. El contexto en su aprendizaje.

Una apreciación importante de Rabardel (1999) señala que:

“La Mediación Instrumental aparece en las propuestas de Vigotsky como un concepto para pensar y analizar las modalidades por las cuales los instrumentos influyen en la construcción del saber.” (p. 2)

Dado lo anterior, Santacruz (2006) propone una representación que merece ser descrita y que está compuesta por:

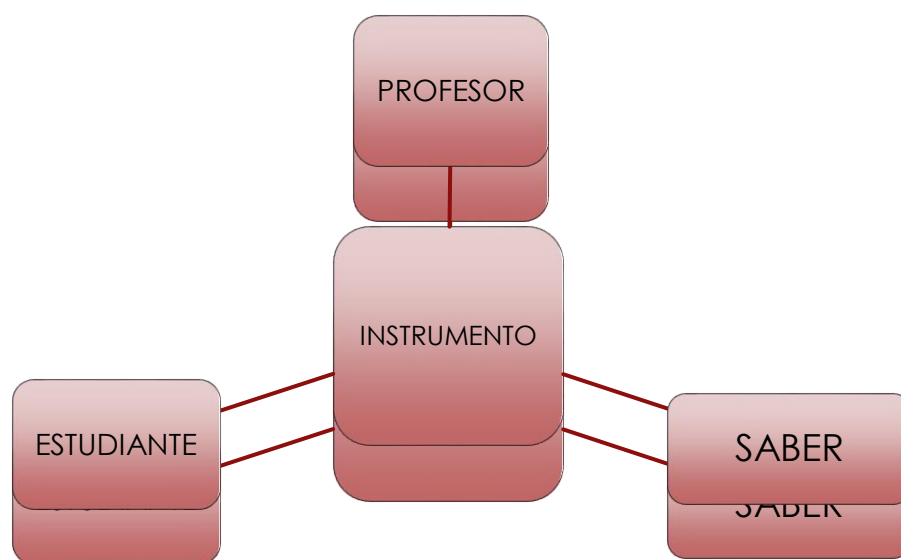


ILUSTRACIÓN 5 SISTEMA DIDÁCTICO

Santacruz (2006) sustenta que, por ejemplo, los instrumentos presentan una fuerte influencia en la construcción del saber y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo, es ostensible la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica, haciendo viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar las acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales, lo cual hace que la génesis instrumental y la mediación del instrumento sean dimensiones susceptibles a un análisis a priori. Y es justamente lo que pretende este trabajo de investigación, hacer una descripción de esos procesos que están relacionados con la mediación instrumental por parte de la Caja Mackinder.

Sin ahondar en la definición propia de Instrumento, se puede definir que la Caja Mackinder es un instrumento que permite el desarrollo de conceptos de las operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).

2.1 CARACTERÍSTICAS DEL INSTRUMENTO

La Caja Mackinder está compuesta por una caja principal y unas cajas auxiliares. La caja principal es la más grande y se encuentra ubicada en el centro de la base que puede ser en cartón o madera. Las cajas auxiliares son en total 10 y deben ser del mismo tamaño y están ubicadas alrededor de la caja principal.

Como se muestra en las siguientes ilustraciones:



ILUSTRACIÓN 6 CAJA MACKINDER 1



ILUSTRACIÓN 7 CAJA MACKINDER 2



ILUSTRACIÓN 8 CAJA MACKINDER 3

El instrumento Caja Mackinder fue utilizado para empezar a observar los argumentos de los estudiantes en torno a la división y la Teoría de Números. Es sabido que el tema de la división es bien conocido y tratado en la didáctica de las matemáticas, pero resulta paradójico que muchas de esas ideas y estudios no lleguen al aula. Hablar de división no significa, únicamente, ser capaz de desarrollar un algoritmo sino de comprender los conceptos (partición y cuotición).

2.2 EL PROBLEMA DE LA DIVISIÓN

EL principal problema en la enseñanza de la división radica en desarrollar una serie de pasos que componen su algoritmo, aprender las partes de la misma y se deja por último, la comprensión de su significado.

En el blog “*Más ideas, menos cuentas. Un blog sobre educación matemática*”, Pedro Ramos (2013) plantea dos problemas que, en primer momento, pareciera que están referidos al mismo procedimiento: problemas de división.

- Miguel lleva 30 caramelos al colegio, y los quiere repartir por igual entre sus 5 amigos. ¿Cuántos caramelos debe darle a cada uno?

- Miguel lleva 30 caramelos al colegio y los reparte por igual entre sus amigos. Si le da a cada amigo 5 caramelos, ¿cuántos amigos tiene?

Ramos (2013) expone que la respuesta para ambos es la misma:

“Son “problemas de dividir”. Sin embargo, el significado de la división es diferente en cada caso. Creo que la forma más sencilla de darse cuenta es pensar en cómo resolvería la situación Miguel si se le planteara a los 5 años, sin ningún conocimiento de los algoritmos tradicionales de la aritmética. Lo que haría en el primer caso, seguramente, sería ir dando caramelos a sus amigos, de uno en uno y por turnos, hasta que se acabaran. Sin embargo, en el segundo caso haría grupos de 5 caramelos, hasta averiguar que le salen 6 de tales grupos.”

Este tipo de problemas fueron estudiados por Vergnaud (1983) creando la idea de campo conceptual y sustentando que para su tratamiento era necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos (Maza, 1991).

Así, entonces, el primer problema está centrado en repartir una cantidad en un determinado número por partes iguales, este concepto es el que se conoce como *División-Partición*. En el segundo problema, se puede observar que el fin no es la repartición, sino que por el contrario, es el número de grupos que se pueden formar, este concepto es el que se conoce como *División-Agrupamiento*. Estos conceptos los define Vergnaud, que para el caso del *agrupamiento* el término más conveniente es *cuotición*.

Sin embargo, para otros autores los términos pueden variar pero la idea sigue siendo la misma. Por ejemplo, la división para Freudenthal (1983) tiene, desde el punto de vista fenomenológico, tres fuentes: restar sucesivamente, distribuir –o repartir– en partes iguales e invertir una multiplicación. La resta sucesiva y el reparto en partes iguales proporcionan dos imágenes distintas de la división, que se pueden llamar división razón y división distributiva, respectivamente (Puig & Cerdán, 1988).

Para tener un mejor panorama de los conceptos de la división y de las formas de los problemas que se pueden usar para su tratamiento, Puig & Cerdán (1988) proponen la siguiente representación:

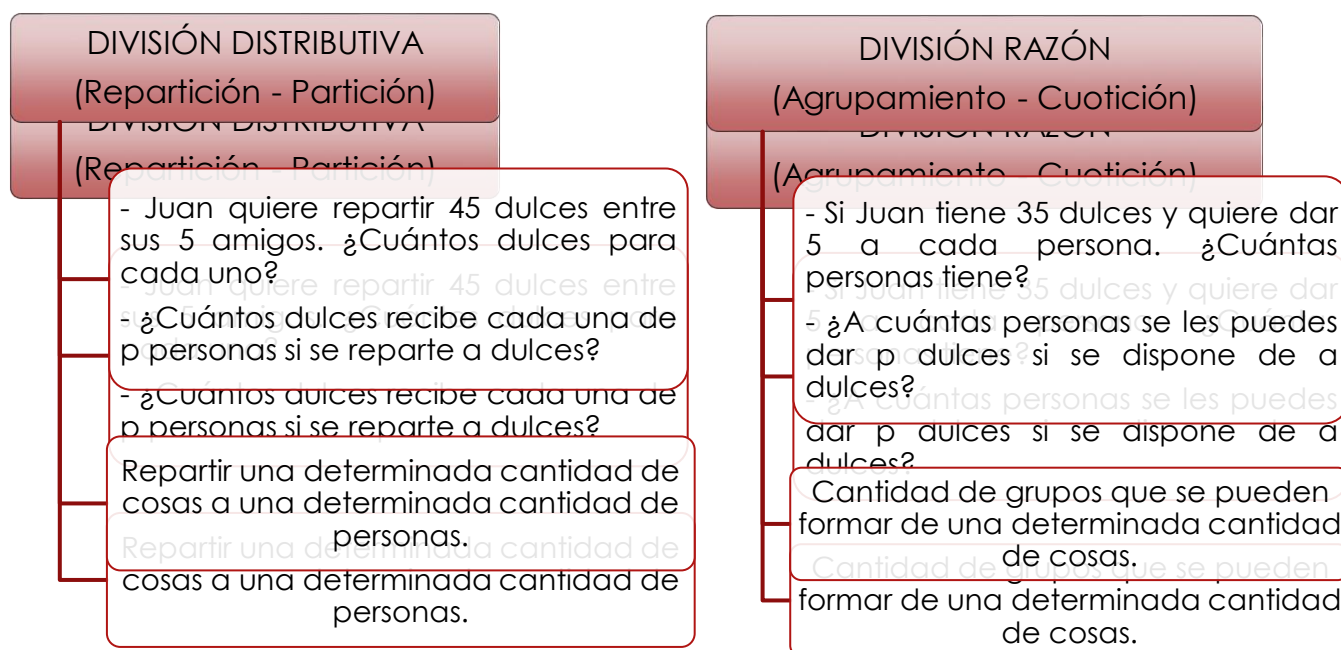


ILUSTRACIÓN 9 TIPOS DE DIVISIÓN

Si bien, se ha trabajado en algunos países, en mayor o menor grado también se ha podido observar dificultades conceptuales en los estudiantes al tratar de resolver estas situaciones (Maza, 1991). Esto se da por el hecho de no ahondar en un concepto que se debe estudiar y profundizar.

Cuando el estudiante es capaz de comprender el concepto detrás de los tipos de división y argumenta sobre cantidades que al dividirlos por otras son o no son exactas (referidos al residuo) entonces inicia la fase de aproximación con los conceptos introductorios de la Teoría de Números.

Hablar de conceptos introductorios de la Teoría de Números refiere a analizar argumentos de los estudiantes que tienen que ver con criterios de divisibilidad, que una cantidad sea par o impar.

2.3 MUESTRA POBLACIONAL

Se toma como población estudiantes de grado cuarto de primaria del Colegio Pedagógico Inglés ubicado en Madrid, Cundinamarca y algunos análisis con estudiantes del mismo grado de la Institución Educativa Distrital República de China de la localidad de Engativá de la ciudad de Bogotá.

Expuesto entonces los referentes teóricos que limitan este trabajo de investigación, ahora nace el cuestionamiento por la forma como se debe relacionar el ejercicio práctico del aula con los estudiantes, el instrumento y esos mismos referentes. De esta manera, se proponen a continuación dos tablas que servirán de instrumento de análisis dadas las categorías de la Génesis Instrumental.

Así pues, la primera tabla sustenta cada una de las categorías de la Génesis Instrumental dependiendo de la Dimensión (Instrumentación e Instrumentalización) mientras que en la segunda tabla se relaciona las categorías de análisis de la Génesis Instrumental para un proceso de enseñanza en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, donde la Tarea, Técnica, Tecnología y Teoría ayudan a sustentar y analizar los datos y resultados.

2.4 ¿EN QUÉ SE BASAN LAS CATEGORÍAS DE LA GÉNESIS?

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE LA GÉNESIS INSTRUMENTAL	INSTRUMENTALIZACIÓN	FUNCIONES PERTINENTES: Según Santacruz (2006) refiere al conjunto de funciones y potencialidades que son socialmente atribuidas al artefacto, es decir, a los verdaderos usos sociales del artefacto, a partir de las génesis instrumentales de los sujetos que son llevadas en diferentes situaciones.
		PERSONALIZACIÓN: Momento en el cual el usuario escoge el artefacto que se ajuste mejor a sus necesidades. Así, puesta en juego en el salón de clase facilita responder a las preguntas ¿Cuáles artefactos pueden ser propuestos a los estudiantes teniendo en cuenta el desarrollo de las distintas génesis instrumentales en la evolución y equilibrio de los sistemas de instrumentos de la clase? ¿Para cuáles actividades de aprendizaje y alrededor de qué saberes matemáticos?
		TRANSFORMACIÓN DEL ARTEFACTO: Refiere a las distintas modificaciones o renovaciones que realiza el sujeto sobre el artefacto para poder realizar ciertas tareas dependiendo la situación planteada.
	INSTRUMENTACIÓN	ESQUEMAS DE USO: Según Ballesteros (2007) hace referencia a las construcciones representativas del instrumento que le permiten al sujeto elaborar estructuras que organizan su acción en distintas situaciones; además de ello son considerados como las invariantes representativas y las operaciones correspondientes a las distintas situaciones de actividad con instrumentos.
		ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA: Refiere a la apertura del campo de acciones posibles, por su parte, corresponde a la variación de las posibilidades de acción que los instrumentos ofrecen a los sujetos y los recursos nuevos que pone a su disposición, pero igualmente, las restricciones de uso y limitaciones propias del instrumento (Santacruz, 2006, p.3).

TABLA 1 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

MOMENTO DE UN PROCESO DE ENSEÑANZA TAD						
CATEGORÍAS DE ANÁLISIS GÉNESIS INSTRUMENTAL	INSTRUMENTALIZACIÓN		TAREA	TÉCNICA	TECNOLOGÍA	TEORÍA
		FUNCIONES PERTINENTES	Los usos sociales que tiene el artefacto en el momento de la tarea refieren al trabajo con la repartición e igualdad entre dos cantidades, puesto que esencialmente se parte del reconocimiento de la distribución equitativa entre las partes.	La manera de llevar a cabo el problema, se referencia cuando el uso atribuido socialmente acerca de la enseñanza de la división se relaciona con este, se está señalando implícitamente la división como repartición equitativa en grupos.	El discurso racional que se puede dar frente al problema no solo cabe al artefacto sino a los demás procesos cognitivos construidos anteriormente, los cuales llevan a que se “explique” el proceso mediante el uso social de la repartición equitativa que componen la caja Mackinder vistas desde los procesos de construcción o el razonamiento de la división.	Se hace necesaria la documentación de referentes teóricos que explicitan las distintas interpretaciones de la división. Estos referentes como el libro “Enseñanza de la División y la Multiplicación” de la Editorial Síntesis muestran orientaciones necesarias y pertinentes para el trabajo con los estudiantes.
		PERSONALIZACIÓN	En la tarea, la personalización no puede ir mas allá de la manipulación del material que tienen a la vista, en este caso caja Mackinder, y al no tener más posibilidades es al primero que recurrirán, en este momento no es necesario la solución del problema pero quizá si la manipulación del mismo.	El elegir el artefacto adecuado para llevar a cabo la tarea se centra en la variedad, en este caso, solo contaba con una, la caja Mackinder. Al ser un material manipulativo tangible y el único artefacto puesto en acción en ese momento, el estudiante se apropia de inmediato como método de solución. Aquí se ejemplifica la técnica, la validación en la tecnología y la demostración de la teoría.		
	TRANSFORMACIÓN DEL ARTEFACTO	Frente a este aspecto, las renovaciones se pueden tomar como distintas interpretaciones a la tarea.	La manera de abordar la tarea se puede tornar diferente, pero recurrirán al artefacto en si con sus propias características, no se atreverán a modificar el material, es decir agregarle espacios, cambiar la distribución de los espacios, puesto que perdería el nivel de dificultad de la tarea e inclusive no permitir que sus compañeros validen.	Para el discurso, talvez sea necesario el agregar o cambiar el orden de los espacios para la repartición, con el fin de explicar que pasó o cómo lo hicieron, pero más allá de ello, no será posible, puesto que como se mencionó anteriormente los estudiantes deben argumentar su proceso.	Para asociar o utilizar alguna demostración con el fin de validar y justificar el proceso, el estudiante necesariamente debe utilizar el material conforme se plantee, puesto que no es posible encontrar referentes que consideren modificaciones que, dado el caso, los estudiantes propongan.	
	INSTRUMENTACIÓN	ESQUEMAS DE UTILIZACIÓN	Al momento de identificar la tarea, es importante reconocer que el estudiante tiene conocimientos que pondrá en juego a la hora de solucionar su tarea.	En la técnica el estudiante debe evocar todas sus acciones y conceptualizaciones desarrolladas o conocidas en el transcurrir de sus vivencias, las organizara y reconocerá cuales características deben siempre estar para que el artefacto sea único.	En la tecnología, es importante identificar que los procesos desarrollados en la técnica se pueden considerar como invariantes y así por ejemplo, considerarlos como parte del razonamiento del cómo y porqué de la técnica.	A partir de los invariantes y las estructuras mentales propuestas anteriormente, si es posible el estudiante puede evocar algunas demostraciones ya propuestas, evocándolas y asociándolas a lo trabajado anteriormente para así construir una nueva en base a otra.
ACCIÓN INSTRUMENTADA		En la tarea, el estudiante puede identificar rápidamente qué de sus experiencias omitirá, pues no se asocian o no tiene relación a esta situación, además que es un proceso apoyado o guiado por el docente para su culminación.	El estudiante identificara mediante la solución de la situación que posibles acciones no son generalizables, puesto que solo se usa en caso particular y con ello reconocerá las invariantes operatorias y representativas del artefacto en esa.	Si ha reconocido las acciones posibles e imposibles, el estudiante puede justificar los procesos de su técnica mediante la acción del artefacto en la situación y las generalizaciones y conclusiones.	En la teoría, es el momento donde el estudiante comprende el porqué de sus acciones para la solución de la tarea propuesta.	

TABLA 2 MOMENTO DE UN PROCESO DE ENSEÑANZA TAD

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO.

1. FASES DE TRABAJO

1.1 FASE DE FUNDAMENTACIÓN

Teniendo en cuenta estas características generales, se inicia con el planteamiento de la investigación. Este planteamiento del problema tiene como foco la utilización de algún instrumento para el aprendizaje de un conocimiento matemático, en este caso la división partitiva, puesto que el instrumento que se pensaba aplicar era la caja Mackinder. Seguido, se centró la atención en una población con unas necesidades de aprendizaje especiales por un interés particular y personal sobre dicha población teniendo en cuenta que esa limitación puede ser tanto visual, auditiva, cognitiva o motriz, conjuntamente se identifica un vacío sobre el análisis y estudio de los procesos de aprendizaje de los estudiantes con estas limitaciones, puesto este campo de análisis es un poco nuevo en la investigaciones en el campo de la Educación Matemática.

1.2 FASE DE PLANEACIÓN Y DISEÑO DE ACTIVIDADES

Luego de la Fase de Fundamentación se hizo necesario planear y diseñar actividades donde se tuviera en cuenta el contexto y las edades de los estudiantes. De esta forma, se creó una situación fundamental donde se desprenden las diferentes actividades que fueran aplicadas.

En los Anexos, se presenta la situación fundamental y los cuadros que exponen el diseño y planeación para cada una de las actividades.

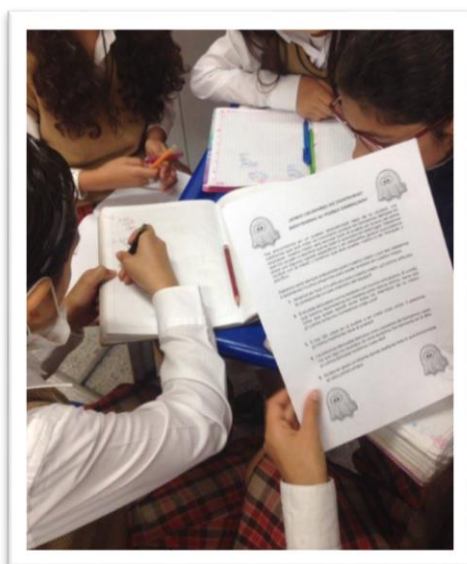


ILUSTRACIÓN 10 DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 1



ILUSTRACIÓN 11 DESARROLLO DE ACTIVIDAD 2

1.3 FASE DE OBSERVACIÓN Y RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

La observación que se realiza para poder obtener los datos se centra principalmente en el acompañamiento-guiado, puesto que el investigador al momento de recoger los datos es también docente y la utilización del instrumento requiere de su acompañamiento. A esto se suman las circunstancias de la población, el manejo del instrumento hace necesaria la intervención del docente con preguntas, apoyo en el conteo de las bolitas para poder realizar la acción y la ubicación de espacios que componen la caja Mackinder.



ILUSTRACIÓN 12 FAMILIARIZACIÓN CON EL INSTRUMENTO 1

Esta observación permitió obtener la información necesaria a través de videos, donde se observa la manera de cómo la población procede según las indicaciones del problema.



ILUSTRACIÓN 13 FAMILIARIZACIÓN CON EL INSTRUMENTO 2



ILUSTRACIÓN 14 FAMILIARIZACIÓN CON EL INSTRUMENTO 3

1.4 FASE DE ANÁLISIS DE DATOS

Luego de obtener la información se inicia el análisis partiendo de una categorización macro de las acciones que realiza la población para poder cumplir con la tarea propuesta por el docente investigador; estas son:

- La instrumentación
- La instrumentalización

Estas categorías son planteadas por la génesis instrumental caracterizadas por instrumentalización e instrumentación por Medina (2014), Vargas & Guzmán (2012) y

Artigue (2010). Posteriormente, se realiza una categorización micro, teniendo en cuenta los resultados y las acciones específicas de los resultados de la categorización macro.

Esta categorización micro se realiza teniendo en cuenta una serie de subcategorías que emergen de la instrumentación y la instrumentalización.

Respecto a la categoría la instrumentalización se presentan las siguientes subcategorías:

Funciones pertinentes que se centra en los usos sociales que tiene el artefacto.

Personalización no puede ir más allá de la manipulación del material que tienen a la vista.

Transformación del artefacto que se centra en las renovaciones se pueden tomar como distintas interpretaciones a la tarea.

Por otro lado la instrumentación aparecen las siguientes subcategorías que abarcan:

Esquemas de utilización que se centra en reconocer lo que el individuo tiene antes de afrontarse a la tarea.

Acción instrumentada que se centra en identificar la tarea de una manera rápida con ayuda de las experiencias vividas además de que este proceso tiene que estar apoyado y guiado por el docente.

1.5 FASE DE RESULTADOS

En este apartado se expresan y se analizan de una manera más puntual los resultados de las dos anteriores fases correspondientes al análisis y a la observación y recolección de información. Este análisis se realiza con ayuda de referentes teóricos para dar justificación a lo que la estudiante realiza a la hora de ejecutar la tarea que se le es asignada por parte del docente.

Teniendo claro el proceso metodológico usado en esta investigación, procedemos a presentar los resultados.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS.

Para el estudio de los diferentes argumentos de los estudiantes, se crea un Instrumento de Análisis que está compuesto por 3 columnas, que permite relacionar la descripción literal de lo que se le solicita al estudiante y de lo que éste hace, su categorización en la Génesis Instrumental y la interpretación de sus argumentos y acciones. Cada una de estas columnas cumple un objetivo necesario para el estudio de sus argumentaciones y que se explican en la siguiente tabla:

1. INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

INSTRUMENTO DE ANÁLISIS		
VIDEO		
Descripción	Categoría	Interpretación
<p>En la descripción se plasma la acción concreta que se le solicita realizar al estudiante, esta indicación puede estar presentada de manera escrita oral cuando haya sido necesario y que se explicará en el Instrumento de Análisis.</p>	<p>En esta columna, se presentará la Categoría de Análisis en la cual, dada la interpretación y el contraste con los referentes teóricos, se ubica el argumento o el desarrollo que el estudiante realizó en el marco de la Génesis Instrumental y que pueden ser:</p> <p>Instrumentalización:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Funciones Pertinentes. - Personalización. - Transformación del Artefacto. <p>Instrumentación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Esquema de Utilización. - Acción Instrumentada. <p>Todas las anteriores situándolas también en torno a Tarea, Técnica, Tecnología o Teoría.</p>	<p>En contraste con los referentes teóricos en el marco de la Génesis Instrumental se interpretará los argumentos y acciones de los estudiantes. De esta forma, se logra ubicar sus construcciones en torno al concepto de la división y algunos de la Teoría de Números.</p>

TABLA 2 COMPONENTES INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

INSTRUMENTO DE ANÁLISIS



CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO Y FAMILIARIZACIÓN.		
DESCRIPCIÓN	CATEGORÍA	INTERPRETACIÓN
<p>Con ayuda de algunos estudiantes de grados superiores, los estudiantes de grado cuarto deben construir la Caja Mackinder. Los muchachos de grado once les ayudarán indicándoles las posiciones en las que deben ir las cajas pequeñas y en ayudarlos a personalizar las mismas.</p> <p>Se propone a los estudiantes un trabajo de reconocimiento y aproximación, donde dada la situación fundamental, deben repartir las bolitas (fríjoles, lentejas, shakiras, etc) entre ellos.</p> 	<p>I</p> <p>FUNCIONES PERTINENTES ESQUEMAS DE UTILIZACION</p>	<p>Uno de los procesos fundamentales para la enseñanza de los conceptos de la división mediado con un instrumento es la construcción del mismo. Esta construcción permite que los estudiantes se sientan dueños de su instrumento y por ende, se logra un acercamiento a su uso. Esto con el fin de que sean ellos quienes vean que desde el inicio del trabajo deben prestar especial atención y responsabilidad para su trabajo. Y está referido al esquema de uso o de utilización ya que corresponde a una acción vinculada directamente con el instrumento.</p>
<p>Como ejercicio de introducción se les propone situaciones de repartición de bolitas en cajas y se iniciaría con el reparto de ocho de ellas en dos cajas.</p> <p>Con el reconocimiento de la cantidad (8 bolitas) que tiene que repartir el grupo de estudiantes ahora procede a identificar las cajas en que debe depositar las bolitas.</p> 	<p>FUNCIONES PERTINENTES – ESQUEMAS DE UTILIZACION</p>	<p>Analizar la tarea. Las posibilidades de uso del artefacto en la solución de la tarea. Este artefacto tiene la posibilidad de ayudar al estudiante a comprender las nociones de (agrupamiento, números pares e impares, división, multiplicación, conteo y modelares). Restricciones internas y de comando En la tarea, la personalización no puede ir más allá de la manipulación del material que tienen a la vista, en este caso Caja Mackinder, y al no tener más posibilidades es al primero que recurrirán, en este momento no es necesario la solución del problema pero quizá si la manipulación del mismo.</p>

TABLA 3 ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO Y FAMILIARIZACIÓN

2. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD

DESCRIPCIÓN	CATEGORÍA	INTERPRETACIÓN
<p>Cada uno de los grupos conformados cuenta con su propio instrumento que fue construido con anterioridad y en la misma sesión de clase.</p> <p>Los estudiantes deben responder a la primera pregunta de la Actividad I (ver anexos):</p> <p>Tenemos 24 linternas. ¿Cuántas linternas nos toca a cada integrante del equipo?</p> <p>Los estudiantes se asignan (de forma autónoma) una caja para cada uno de ellos.</p>	<p>PERSONALIZACIÓN</p>	<p>Este momento se centra en la Personalización dado que los estudiantes escogen el artefacto que se ajuste mejor a sus necesidades, en este caso, el único del que tienen acceso como material manipulativo tangible.</p> <p>Una vez ya personalizada la Caja Mackinder de cada grupo de estudiantes, ellos de forma natural se asignan las cajas de su instrumento, de tal forma que cada uno tenga representación en la repartición de las bolitas.</p> <p>El estudiante personaliza el instrumento de acuerdo con sus necesidades.</p>



ILUSTRACIÓN 15 APROXIMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES CON EL INSTRUMENTO

Los estudiantes empiezan a repartir cada una de las bolitas, que simulan ser linternas, alguno de ellos dice:

- Una linterna para ti. Otra para ti. Otra para ti... Otra para mí.



ILUSTRACIÓN 17 REPARTICIÓN UNO A UNO.



ILUSTRACIÓN 16 ABORDAJE DE LA SITUACIÓN.

ESQUEMA DE UTILIZACIÓN

Según Ballesteros (2007) hace referencia a las construcciones representativas del instrumento que le permiten al sujeto elaborar estructuras que organizan su acción en distintas situaciones; además de ello son considerados como las invariantes representativas y las operaciones correspondientes a las distintas situaciones de actividad con instrumentos.

Este momento se centra en Esquema de Utilización o de Uso dado que los estudiantes le dan el uso que creen más conveniente. Además, asumen la repartición uno a uno hasta agotar las 24 linternas. Se esbozan varias consideraciones:

- Para los grupos cuya cantidad de integrantes es divisible por 24, consideran el reparto como exacto dado que no sobra y/o falta ninguna bolita y además todos quedan con la misma cantidad. Aquí se pueden analizar cuestiones de divisibilidad y de por qué no sobran o faltan bolitas. Primeras construcciones de divisibilidad y Teoría de Números puesto que se hace uso de los argumentos que presentan los estudiantes y se centra la atención en construir el concepto de que ser divisible implica que el residuo de la división sea 0.
- Para los grupos cuya cantidad de integrantes no es divisor de 24, argumentan que les faltan bolitas (para quedar todos con las mismas) o que les sobran bolitas (para quedar todos con las mismas) pues es la interpretación de un reparto no exacto.
- Para los grupos cuya cantidad de integrantes es divisor de 24, emplean la noción de la división distributiva (repartición) hasta agotar las bolitas totales. En otras palabras, hacen uso de repartir una determinada cantidad de cosas a una determinada cantidad de personas.

En uno de los grupos, conformado por 5 estudiantes, se dan cuenta que luego del cuarto reparto, las linternas sobrantes no alcanzan a todos y que para que todos queden con una (y en la caja central no quede ninguna bolita) haría falta una.

El profesor indica “Si no les alcanzan las 24 linternas para que todos puedan quedar con la misma cantidad de bolitas, entonces ¿qué podríamos hacer?”

ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

El Esquema de Acción Instrumentada refiere a la apertura del campo de acciones posibles, por su parte, corresponde a la variación de las posibilidades de acción que los instrumentos ofrecen a los sujetos y los recursos nuevos que pone a su disposición, pero igualmente, las restricciones de uso y limitaciones propias del instrumento (Santacruz, 2006, p.3). Para este caso es necesaria la intervención del docente para generar cuestionamientos a los estudiantes y hacer comparaciones sobre porqué en algunos grupos si hay una repartición completa (o exacta) y en otros grupos no.

Los estudiantes analizan un poco la situación y afirman:

- “No nos podemos repartir las bolitas porque no nos alcanzan para quedar todos igual”

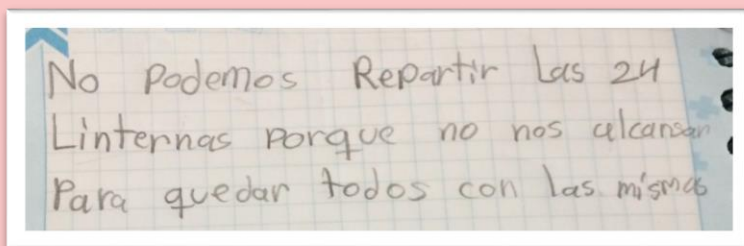


ILUSTRACIÓN 19 ARGUMENTO DEL ESTUDIANTE

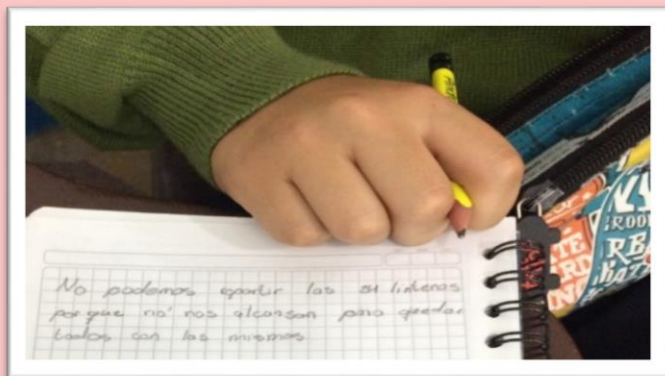


ILUSTRACIÓN 18 ARGUMENTACIÓN SOBRE NO PODER REPARTIR LA CANTIDAD.

ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

Considerando lo que Santacruz (2006) refiere como Esquema de Acción Instrumentada, los estudiantes concluyen que el problema por el cual no pueden quedar todos con la misma cantidad de bolitas es que la cantidad total no les alcanza.

En términos de las partes de la división, los estudiantes aunque no distinguen el nombre, interpretan que el dividendo no les es suficiente para repartir de forma exacta entre el divisor.

De la misma forma, se van iniciando consideraciones sobre la no divisibilidad del divisor para el dividendo.

Gómez (1988) considera que resolver problemas de dividir con estrategias de reparto distributivo o substractivo (repartir un botín o empaquetar caramelos) deben dar cuenta de la estructura profunda del algoritmo y que, a la vez que ayudan a la progresiva esquematización de éste, preparan para dividir como procedimiento más económico en situaciones en que los escolares mayoritariamente usan las estrategias anteriores.

Considerando que un número es divisible por otro cuando la división entre ellos es exacta. Los divisores de un número son finitos y siempre van a ser menores o iguales que ese número. Dado lo anterior, los estudiantes van aproximando al concepto de divisibilidad de un número.

Se pide a los estudiantes que anoten cada una de las afirmaciones que tienen frente al problema de las 24 linternas.

Algunas de sus respuestas y argumentos fueron:

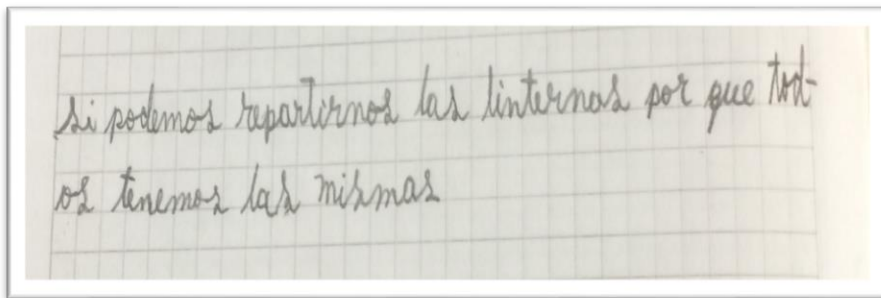


ILUSTRACIÓN 20 ARGUMENTO DEL ESTUDIANTE

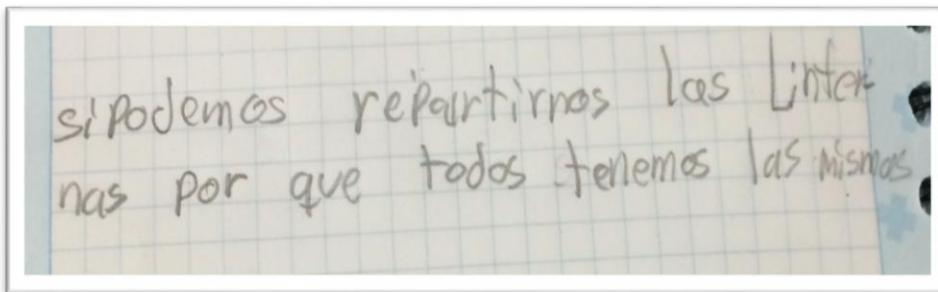


ILUSTRACIÓN 21 ARGUMENTO SOBRE LA POSIBILIDAD DE REPARTIR LA CANTIDAD

ESQUEMA DE UTILIZACIÓN

Los niños escriben sus argumentos “si podemos repartirnos las linternas porque todos tenemos las mismas” frente a esto:

Los estudiantes hacen uso del instrumento para solucionar la situación. El concepto de división que manejan es el de división distributiva (repartición – partición).

Puig & Cerdan (1988) dicen que aunque la destreza algorítmica es necesaria a veces para poder obtener la respuesta de algunos problemas, ésta sólo interviene en la fase de cálculo y no en la de traducción, por lo que los profesores deberían no centrarse en ella sino más bien, propender en el desarrollo propio del concepto.

De esta forma, podemos apreciar que los estudiantes no están haciendo uso del algoritmo para dar solución al problema del reparto de las linternas, sino que a través de la manipulación de la Caja Mackinder los estudiantes van entendiendo el concepto de la división como forma distributiva.

Además, por medio de sus argumentos se puede afirmar que comprenden que el hecho de que todos los integrantes del grupo queden con la misma cantidad de elementos y que en la caja principal no queden bolitas, representa que el problema sí se puede solucionar dado el carácter de divisibilidad de las linternas entre los integrantes del grupo.

Centrado en la relación existente entre la división y la Teoría de Números, y considerando que el conjunto numérico en el que se está trabajando es el de los números naturales y teniendo como a (dividendo) y b (divisor), llamaremos división exacta entre ellos a la operación de encontrar otro número q (cociente) tal que se cumpla:

$$a = b \cdot q$$

Si esta operación es posible, diremos que b es divisor de a , o bien que a es múltiplo de b .

<p>Los estudiantes pasan al siguiente problema donde deben dar respuesta a la repartición:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tenemos 13 gafas para ver en la oscuridad. ¿Cuántas gafas nos corresponden a cada integrante del equipo? <p>Nuevamente, los estudiantes toman 13 bolitas que las ubican en la caja principal y se reparten las cajas (algunos de ellos deciden tomar otra caja) para dar inicio a la repartición.</p>	<p>PERSONALIZACIÓN – ESQUEMA DE UTILIZACIÓN</p>	<p>En este momento de la actividad, los estudiantes se enfrentan a un problema que, nuevamente, debe solucionarse por medio de la división distributiva. Sin embargo, las 13 gafas se han puesto de forma intencional, dado que 13 es número primo y ninguno de los grupos conformados es igual a 13, entonces los estudiantes no podrán realizar el reparto de forma exacta.</p> <p>Luego, se centra en la personalización porque los estudiantes deciden escoger otra caja para dar inicio al reparto.</p>
<p>Dado que el número 13 es un número primo, ningún grupo puede realizar una repartición exacta, pues ninguno de los grupos es igual a 13 y no hay estudiantes trabajando de forma individual.</p> <p>Algunos de ellos intentan repetir una y otra vez el ejercicio esperando que quizá la repartición no haya sido correcta.</p> <p>Dado que ninguno de los grupos está conformado por 13 estudiantes, entonces ningún grupo puede realizar la repartición.</p> <p>Los estudiantes, empiezan a argumentar a nivel general:</p> <ul style="list-style-type: none"> - “No podemos repartirnos las 13 gafas porque nos sobran” - “No podemos repartirnos las 13 gafas porque nos faltan”. <div data-bbox="149 966 989 1117" data-label="Image"> </div> <p>ILUSTRACIÓN 22 ARGUMENTO SOBRE NO PODER REPARTIR 13 GAFAS</p> <p>Se les pide entonces, que intenten repartir 17, 19 o 23 gafas.</p>	<p>TRANSFORMACIÓN DEL ARTEFACTO – ESQUEMA DE UTILIZACIÓN</p>	<p>Los estudiantes argumentan que “No podemos repartirnos las 13 gafas”.</p> <p>Respecto a esto en muchos problemas es necesario saber si el reparto de varios elementos en diferentes grupos se puede hacer equitativamente, es decir, si el número de elementos dividido entre el número de grupos sería una división entera con residuo o sin residuo.</p> <p>Sin embargo, la intención es que los estudiantes se enfrenten al problema de que, dado el carácter de cantidades primas que tienen los números propuestos para la repartición es generar la pregunta de cuál es la característica por la cual esas cantidades de gafas no se pueden repartir en ningún grupo de estudiantes.</p> <p>Luego, este momento se centra en Transformación del Artefacto ya que refiere a las distintas modificaciones o renovaciones que realiza el sujeto sobre el artefacto para poder realizar ciertas tareas dependiendo la situación planteada.</p>

Se decide dejarles de consulta a los estudiantes, si quizá el número 13 tiene alguna característica especial, donde se les dice de forma literal:

- “Si no pudimos repartir las 13 gafas en este grupo que tiene 5 integrantes, ni en el grupo que tiene 6 estudiantes o en el que tiene 7 estudiantes, entonces es quizá porque el número 13 tenga alguna característica especial”.

Los estudiantes afirman que lo consultarán para la próxima sesión.

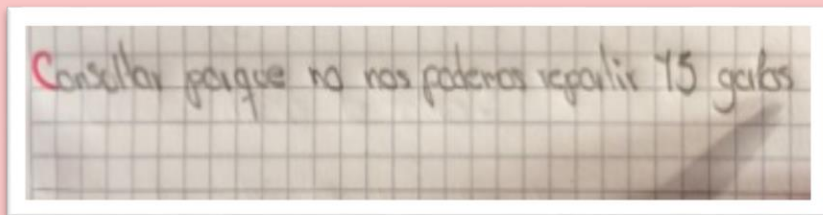


ILUSTRACIÓN 23 CONSULTA SOBRE LA CARACTERÍSTICA DEL NÚMERO 13

ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

Este momento se centra en el esquema de acción instrumentada dado que refiere a la apertura del campo de acciones posibles, por su parte, corresponde a la variación de las posibilidades de acción que los instrumentos ofrecen a los sujetos y los recursos nuevos que pone a su disposición, pero igualmente, las restricciones de uso y limitaciones propias del instrumento (Santacruz, 2006, p.3).

Entonces, el docente al notar que los estudiantes no encuentran solución ni argumento para el problema, decide guiarlos hacia el cuestionamiento de qué característica tendría el número 13 ya que no se pudo hacer la repartición entre los distintos grupos aun cuando estos no tienen la misma cantidad de estudiantes.

Los estudiantes pasan al siguiente punto donde se les solicita:

- En caso que llueva, debemos estar preparados con nuestras capas, si tenemos 18 y cada uno quedamos con 3 capas. ¿Cuántos integrantes en el equipo somos?

Los estudiantes tienen complicaciones al momento de entender el problema.

ESQUEMA DE UTILIZACIÓN - PERSONALIZACIÓN

Según Ballesteros (2007) el Esquema de Utilización hace referencia a las construcciones representativas del instrumento que le permiten al sujeto elaborar estructuras que organizan su acción en distintas situaciones. Sin embargo, los estudiantes al no entender el problema se hace necesario para el docente ser más explícito en la situación, ejemplificando con otra con el objetivo que los estudiantes comprendan y sean capaces de abordar la situación.

Puig & Cerdan (1988) señalan que en otros desarrollos curriculares más habituales para la presentación o construcción de conceptos se utilizan distintos contextos que funcionan como modelos. Así, termómetros, o debe y haber, para los números enteros; tartas, pasteles o división del todo en partes iguales para las fracciones.

Y ese es el principal objetivo con este problema, ahora construir el concepto de división razón como agrupamiento – cuotición.

Es necesario poner otro problema más sencillo y realizarlo junto con ellos:

- Supongamos que tengo 6 bom bom bunes y cada uno de los integrantes de mi equipo quedamos con 2 bom bom bunes. Necesito averiguar cuántos integrantes hay en mi equipo.

FUNCIONES PERTINENTES – TRANSFORMACIÓN DEL ARTEFACTO

Se hace necesario ejemplificar la nueva situación paso por paso con los estudiantes de tal forma que lo que se logró fue:

- Los estudiantes organizados en grupos determinados, saben que en la caja principal deben ubicar 6 bolitas que representan los dulces.
- Se hace énfasis en **“si cada uno de los integrantes queda con 2 dulces de los 6”** como lo estudiantes ya tienen ubicadas 6 bolitas en la caja principal entonces van comprendiendo lo que deben hacer.
- A la pregunta, “cuántos integrantes somos” los estudiantes comienzan a argumentar que lo que deben hacer es repartir de a dos bolitas en cada caja con el fin de agotar las 6 principales y así dar respuesta de la cantidad de integrantes que hay.

Es por esta razón, que la orientación por parte del docente es fundamental para que los estudiantes puedan dar respuesta de abordar e a la situación y de esa forma empezar a formalizar el concepto de división como razón.

Los estudiantes logran entender el objetivo del problema y deciden poner 18 bolitas en la caja principal. Después de esto, toman grupos de 3 bolitas y los van ubicando en cada caja.

TRANSFORMACIÓN DEL ARTEFACTO – ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

Una distinción entre estas dos formas de considerar los contextos es que en la segunda se está tratando de construir un concepto, el de número entero, p. e., y los contextos tienen la función de proporcionar el modelo sobre el cual se construye el concepto de forma que el modelo representa el significado matemático del concepto (Puig & Cerdan, 1988).

En este momento se inicia la construcción del concepto de la división como razón dado que los estudiantes argumentan que lo que hacen es agrupar según el contexto y empezar a responder cuántos son los integrantes del grupo.

Luego de tomar grupos de 3 bolitas y repartirlos en las cajas hasta agotar las 18 bolitas, los estudiantes argumentan:

- “Somos 6 personas en el equipo”

Se les pide, que anoten sus apreciaciones.

De la misma forma se les pregunta cuál es la diferencia entre las situaciones anteriores y este problema, para lo que escriben:

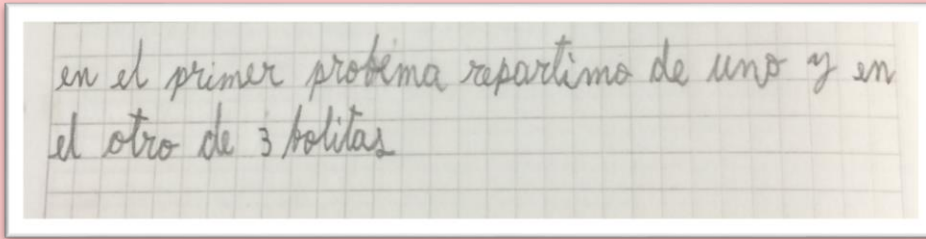


ILUSTRACIÓN 24 CONCLUSIÓN DE LAS FORMAS DE SOLUCIÓN DE LAS SITUACIONES

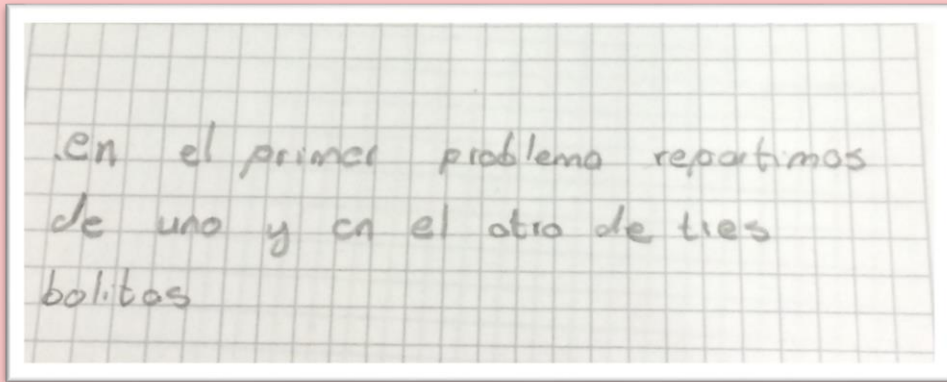


ILUSTRACIÓN 25 COMPARACIÓN DE LAS FORMAS DE SOLUCIÓN DE LAS SITUACIONES

ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

Los estudiantes argumentan que: “en el primero problema repartimos de uno (bolitas) y en el otro de a 3 bolitas”.

Sánchez (2008, p7) señala que las situaciones ideales para introducir la división son las llamadas de Agrupamiento-Razón o divisiones cuotitivas, por su sencillez de planteamiento y de trabajo mediante situaciones manipulativas, enmarcadas en contextos significativos para el alumnado y porque se pueden resolver mediante estrategias que ya figuran dentro de los conocimientos previos posibles en la mente del alumnado.

Sin embargo, para el trabajo con los estudiantes presentaron más facilidad al desarrollo de las situaciones de la división distributiva o de repartición, y por el contrario alguna dificultad en la división razón o cuotitivas.

La respuesta que dan los estudiantes en sus cuadernos deja ver que comprenden que las primeras situaciones deben repartir de uno en uno hasta agotar. Mientras que la segunda situación deben agrupar y luego agotar los grupos.

Didácticamente se pueden hacer conclusiones respecto al trabajo de las cantidades que están detrás de cada una de las situaciones, sin embargo el análisis va referido a las argumentaciones de los estudiantes y la comprensión del concepto.

Luego, este momento está referido al Esquema de Acción Instrumentada porque Santacruz (2006, p.3) refiere que la apertura del campo de acciones posibles, por su parte, corresponde a la variación de las posibilidades de acción que los instrumentos ofrecen a los sujetos. Los estudiantes al escribir sus apreciaciones están relacionando el uso del instrumento con la construcción del concepto.

Aquí se puede notar que el instrumento es potente para la construcción de los conceptos, pues permite a los estudiantes estar concretizados en un contexto, desarrollarlo con el instrumento y generar sus argumentos.

Una vez terminada la sesión de clase, se les pide a los estudiantes que anoten en sus cuadernos para qué les sirvió la actividad. Algunas apreciaciones fueron:

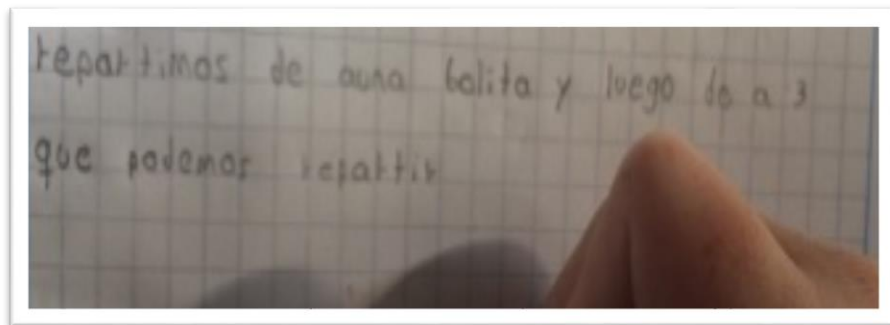


ILUSTRACIÓN 26 CONCLUSIÓN REPARTICIÓN UNO A UNO

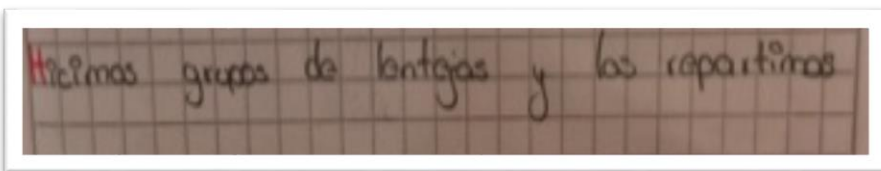


ILUSTRACIÓN 27 CONCLUSIÓN AGRUPAMIENTO DE BOLITAS

ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA

Los estudiantes argumentan que:

- Repartimos de una bolita y luego de a 3 que podemos repartir.
- Hicimos grupitos de lentejas y las repartimos.

Frente a sus argumentos se puede decir que:

Puig & Cerdan (1988) señalan que al aprendizaje y automatización de los algoritmos de las operaciones aritméticas se dedica una parte no desdeñable de la actividad escolar. Aunque la destreza algorítmica es necesaria a veces para poder obtener la respuesta de algunos problemas, ésta sólo interviene en la fase de cálculo y no en la de traducción, por lo que no vamos a entrar en ella. Es por esto, que este trabajo se centró en la construcción del concepto. La ejercitación del algoritmo que, aunque es necesaria en algunas situaciones, no responde a la formación del docente ni al objetivo de este trabajo.

Lo que se puede concluir con este trabajo es cómo los estudiantes logran dar el salto de la manipulación del instrumento a la construcción del concepto.

Cuando el estudiante es capaz de escribir lo que hizo y dar cuenta como se muestra en la imagen, se puede afirmar que es consiente que las dos situaciones no se pueden abordar de la misma forma y que, en efecto, representan conceptos distintos aunque ambos se centren en la división.

TABLA 4 ANÁLISIS ACTIVIDAD

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

La enseñanza de la división resulta compleja en la escuela primaria, esto llevó a pensar formas alternativas de enseñanza que logran mostrar una relación juiciosa entre las variantes didácticas, conceptuales y metodológicas. Este Trabajo de Investigación permite concluir que:

El contexto de las situaciones, enmarcadas en una situación fundamental que está relacionada con los gustos de los estudiantes, permitió una cercanía importante con ellos ya que se aprovechó su capacidad de asombro para generar hipótesis, preguntas, cuestionamientos, dudas y cuestionamientos importantes para la construcción de los conceptos. Esta capacidad de asombro, como en algún momento precisó Aristóteles es de suma importancia dado que tiene por consecuencia la pregunta del porqué de las cosas. A veces se encuentran respuestas y a veces no, pero hay cuestionamientos que van más allá de la clase de matemáticas y que asocia la realidad del estudiante, sus gustos y sus propias construcciones. Permite profundizar en lo que los niños argumentaban y en sus apreciaciones, valerse del contexto de la situación y dar cumplimiento a los objetivos de este trabajo de investigación. Por ejemplo, en la descripción de los procesos de instrumentalización se precisaron sus argumentos, formas de abordar las situaciones y se validaron de la mano de los referentes conceptuales.

En relación con las situaciones trabajadas y de cómo hacer para mostrar el significado del concepto, de cómo puede ser construido éste, se precisa que el contexto de las situaciones fue de gran importancia puesto que permitió interpretar y formalizar las argumentaciones de los estudiantes dado que estas situaciones tratan de reflejar la esencia del concepto relacionado con sus gustos y generando un aprendizaje significativo.

El Instrumento Caja Mackinder consolidó los conceptos de la división por encima del algoritmo. Además de ser un recurso manipulativo tangible y de dinamizar las sesiones de clase con trabajo en grupo de discusión y construcción, logró dejar ver que los conceptos de división razón y distributiva detrás de cada una de las situaciones propuestas. La Caja Mackinder resultó potente en el ejercicio de construir conceptos de división y algunos de Teoría de Números como divisibilidad y cantidades primas.

El diseño metodológico utilizado para este trabajo de investigación sirvió como estructura facilitadora para planear, diseñar, consultar y poner en ejercicio los objetivos planteados y, en efecto, se pudiera describir los procesos de instrumentalización. Dentro del mismo diseño metodológico se dio cuenta de fases de trabajo sustentadas y que pretendía dejar ver un trabajo organizado, segmentado y cuidadoso.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. París, Francia. Université Paris Diderot. (Laboratoire de Didactique André Revuz Francia)

Chumpitaz, L. (2013). Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de Instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Fregona D & Orús P. (2012). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente. Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

Puente, M. (2012). Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Rabardel, P. (1995). Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Université Paris.

Rabardel, P. (2011). Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. (Trad. Por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Maza, C. (1991). Multiplicar y Dividir a través de la resolución de problemas. Serie de Matemáticas. Editorial Síntesis.

ANEXOS

SITUACIÓN FUNDAMENTAL

¡SOMOS CAZADORES DE FANTASMAS!

Nos encontramos en un pueblo abandonado lejos de la ciudad. Los habitantes que acá vivían se marcharon porque los fantasmas siempre los asustaban. Nuestra misión será recorrer todo el pueblo en busca de pistas que nos ayuden a descifrar qué es todo lo que pasa en este lugar. Debemos pasar por algunos lugares específicos y en pequeños grupos buscaremos acabar con el miedo y haremos que este pueblo vuelva a ser tranquilo y pacífico.

ACTIVIDAD 1

RECONOCIMIENTO DEL MEDIO Y DIAGNÓSTICO “FULANITO SE COMIÓ UN PAN EN LAS CALLES DE SAN JUAN”		
META		Reconocer los gustos e intereses de los estudiantes que permita un acercamiento asertivo para el inicio de la práctica. Identificar las bases conceptuales de los estudiantes para planear la situación fundamental.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none"> - Analizar los diferentes gustos de los estudiantes. - Observar el contexto social y cultural de los estudiantes.
DESCRIPCIÓN		Se inicia con la presentación por parte de la docente titular del docente practicante. Seguido de ello empieza una dinámica para “romper el hielo” con los niños. Esto con el fin de conocer sus nombres y sus edades. Se procede a la entrevista grupal como medio para conocer sus gustos e intereses deportivos y culturales.
MATERIALES	Y	Dinámica “Fulanito se comió un pan en las calles de San Juan”.
RECURSOS		
TIPOS	DE	Grupo general.
AGRUPAMIENTO	DE	Esto con el fin de tener el control permanente sobre las discusiones de los estudiantes.
ESTUDIANTES		

ACTIVIDAD 2

“LLEGANDO AL PUEBLO FANTASMA” (ACCIÓN)		
META		Situar a los estudiantes en una situación que les permite poner en juego conceptos adquiridos para la resolución de 5 situaciones que requieren de la división para su resolución.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none"> - Observar el grado de desarrollo del algoritmo de la división por una cifra. - Proponer una situación de división por dos cifras para su solución. - Detallar posibles falencias en el desarrollo del algoritmo.
DESCRIPCIÓN		<p>Se proponen 5 situaciones iniciales de contexto donde los estudiantes deben hacer uso de la división para solucionarlas. Eso se propone en forma grupal y ya enmarcada en la situación fundamental de <i>“Somos Cazadores de Fantasma”</i>. Los estudiantes deben analizar la situación y discutir sobre qué procedimiento deben usar para solucionarla.</p> <p>Al final de la sesión, se discutirán los abordajes de cada grupo y se realizará un sondeo de opiniones acerca del porqué se debe dividir para llegar a una respuesta.</p>
MATERIALES RECURSOS	Y	Situaciones de contexto que permiten relacionar el algoritmo de la división con hechos de la vida cotidiana.
TIPOS AGRUPAMIENTO ESTUDIANTES	DE DE	<p>Por grupos de 4 o 5 personas.</p> <p>Esto con el fin que los estudiantes puedan generar discusiones en su grupo sobre los procedimientos a realizar y seguido de ello las defiendan cuando se discutan delante de todo el curso como metodología de la resolución de problemas.</p>

ACTIVIDAD 3

BUSCANDO EN LA GRANJA DEL TÍO SAM” (ACCIÓN)	
META	Construir la Caja Mckinder con la que se explicará las nociones de división según el libro “Enseñanza de la Multiplicación y la División” de la Editorial Síntesis y de esta forma realizar una clase de inclusión que permita el aprendizaje de los estudiantes en condición de discapacidad además de observar el avance de los niños.
OBJETIVO	<ul style="list-style-type: none">- Construir un instrumento que permita el refuerzo de la división como repartición.- Generar un trabajo en equipo propositivo y agradable.- Incluir a los estudiantes con necesidades educativas especiales al trabajo grupal con la colaboración de sus compañeros de grupo.- Concienciar sobre la importancia del trabajo en equipo para la resolución de las situaciones próximas sobre división.
DESCRIPCIÓN	Una sesión previa a la construcción del instrumento, se le solicita a los estudiantes materiales que son reciclables o que de cierta forma son fáciles y gratuitos de conseguir (tubos de papel, laminas o pedazos de tablas, cinta y demás). Los estudiantes organizados por grupos deberán construir su propio instrumento que servirá para la resolución de sus situaciones en las próximas sesiones. La sesión no contempla un avance en el contenido matemático a desarrollar pero si permite fomentar el trabajo en equipo para un buen desempeño en las demás sesiones de clase.

MATERIALES RECURSOS	Y	Tubos de Papel higiénico, Cartón paja, cinta, pegante, tijeras, marcadores y colores.
TIPOS AGRUPAMIENTO ESTUDIANTES	DE DE	Los estudiantes están organizados en grupos de 4 o 5 personas. Esto con el fin de fomentar el trabajo en equipo y de establecer equipos de trabajos para las próximas sesiones de clase y para repartir a cada miembro del grupo un material específico para la Caja Mackinder.

ACTIVIDAD 4

“BUSCANDO EN LA GRANJA DEL TÍO SAM” (ACCIÓN)		
META		Reforzar las nociones de la división con la ayuda de la Caja Mackinder además de proponer situaciones donde los estudiantes establezcan criterios para decir cuándo un número es divisible por otro como parte de la Introducción a la Teoría de Números.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none"> - Proponer situaciones de contexto donde los estudiantes puedan ver la repartición en la división. - Generar discusiones grupales y luego generales sobre el proceso de repartir una cantidad en otra. - Establecer algunas ideas intuitivas de cuando una división es exacta y cuando es inexacta. - Analizar qué tiene que ver el residuo en una división para que esta sea exacta o no exacta.
DESCRIPCIÓN		Una vez construido el instrumento de la Caja Mackinder se proponen situaciones de contexto con cantidades pequeñas donde los estudiantes deben discutir en primera medida el porqué de sus procesos y posteriormente explicar y defender o refutar argumentos delante de los demás grupos de trabajo.
MATERIALES	Y	Caja Mackinder.
RECURSOS		Situaciones de Contexto.
TIPOS	DE	Por equipos de trabajo de 4 o 5 estudiantes. Esto con el fin de
AGRUPAMIENTO	DE	que los estudiantes primero discutan sus procesos de forma
ESTUDIANTES		grupal y posteriormente validen o refuten dentro de la metodología de la resolución de problemas.

ACTIVIDAD 5

EL PARQUE DE DIVERSIONES EMBRUJADO (FORMULACIÓN)		
META		Afianzar los criterios construidos por los estudiantes sobre divisibilidad llevándolos a que propongan situaciones a los demás grupos donde sea necesario tener en cuenta dichos criterios para su solución.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none">- Institucionalizar cuando una división es exacta o no exacta considerando su residuo.- Exponer primeras ideas intuitivas propias de la introducción a la Teoría de Números.- Establecer primeros criterios de cuando una cantidad tiene mitad exacta.- Definir qué significa ser divisor y múltiplo de un número.- Construir argumentos de cuándo una cantidad puede dividirse por otra cantidad.
DESCRIPCIÓN		Se propone una cuadrícula de cantidades donde los estudiantes deben validar si la cantidad se puede dividir por el número que aparece en la celda principal. Para esto deberán hacer uso del algoritmo de la división. Luego de esto, y con un ejercicio guiado por preguntas orientadoras por parte del profesor, los estudiantes deben caracterizar las cantidades que sí se pueden dividir por la cantidad principal. Proponer otras que cumplan estas mismas características e intentar argumentar criterios para la misma.
MATERIALES	Y	Caja Mackinder.
RECURSOS		Cuadrícula de cantidades.

TIPOS AGRUPAMIENTO ESTUDIANTES	DE DE Pro grupos de trabajo de 4 o 5 personas. Esto con el fin de generar una observación más amplia y que pueda ser discutida primero de forma grupal y luego exponer los criterios a los demás grupos dentro de la metodología de la resolución de problemas y buscando reforzar la argumentación y formalización del lenguaje matemático y sus definiciones.
-----------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ACTIVIDAD 6

EL PARQUE DE DIVERSIONES EMBRUJADO (VALIDACIÓN)		
META		Orientar las discusiones de los estudiantes en pro de ir formalizando en lenguaje matemático y consolidando las conclusiones que se presenten en el grupo.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none"> - Validar e institucionalizar los argumentos que no se alcanzaron a exponer la sesión anterior. - Formalizar los argumentos de las ideas de criterios de divisibilidad. - Establecer de forma grupal (todo el salón) definiciones unitarias para cada criterio de divisibilidad. - Proponer otras cantidades un poco más grandes donde el proceso del algoritmo de la división sea tedioso y por ende deban acudir a las características de la cantidad para establecer si es o no divisible por la cantidad principal.
DESCRIPCIÓN		Se exponen los argumentos que quedaron pendientes de la sesión anterior. Se validan o refutan según sea el caso y se procede a unificar el lenguaje manejado por los estudiantes, es decir, formalizar los argumentos y exposiciones y establecer de forma grupal una sola caracterización o definición para cada criterio de divisibilidad básico.
MATERIALES	Y	Cuadrícula de números.
RECURSOS		
TIPOS	DE	En esta sesión no se organiza a los estudiantes por grupo dado que el objetivo principal es la formalización de los argumentos, razón por la cual todos los estudiantes debían estar atentos y tomando nota de las discusiones y acuerdos a los que llegábamos.
AGRUPAMIENTO	DE	
ESTUDIANTES		

ACTIVIDAD 7

LOS MISTERIOS DEL CASTILLO (INSTITUCIONALIZACIÓN)		
META		Profundizar y afianzar las definiciones establecidas con cantidades más grandes de tal forma que los estudiantes necesariamente deban aplicar las caracterizaciones de cada criterio para responder sobre la divisibilidad de esa cantidad.
OBJETIVO		<ul style="list-style-type: none"> - Ahondar sobre los criterios de divisibilidad con cantidades más grandes. - Profundizar las definiciones de los estudiantes aplicándolos a actividades cotidianas. - Afianzar los criterios de divisibilidad con situaciones de contexto que involucren cantidades más grandes.
DESCRIPCIÓN		Se proponen situaciones de contexto con cantidades grandes (precio de un lote, grandes sumas de dinero, entre otras) donde los estudiantes deben hacer uso de los criterios dado que la división se torna tediosa y larga para poder establecer si la cantidad es divisible por una cantidad específica. Esto se propone de forma individual para poder evaluar mediante un quiz al finalizar la clase pasando a cada uno de los estudiantes al tablero a que explique porqué cierta cantidad es divisible o no es divisible por otra.
MATERIALES RECURSOS	Y	
TIPOS AGRUPAMIENTO ESTUDIANTES	DE DE	Trabajo individual que buscaba observar falencias de los estudiantes frente al proceso.