

**CAMBIO DEL RAZONAMIENTO VARIACIONAL Y  
COVARIACIONAL A PARTIR DE LOS DIVERSOS TIPOS DE  
REPRESENTACIÓN A UN PROBLEMA MATEMÁTICO**

**ANDRÉS SEBASTIÁN SOTO SARAY  
MIGUEL ÁNGEL PINZÓN BUITRAGO**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, MARZO DE 2019**

**CAMBIO DEL RAZONAMIENTO VARIACIONAL Y  
COVARIACIONAL A PARTIR DE LOS DIVERSOS TIPOS DE  
REPRESENTACIÓN A UN PROBLEMA MATEMÁTICO**

**ANDRÉS SEBASTIÁN SOTO SARAY  
MIGUEL ÁNGEL PINZÓN BUITRAGO**

**Directora  
Claudia Cecilia Castro Cortes  
Mg. En Docencia e Investigación Universitaria**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, MARZO DE 2019**

*“Un hombre es como una fracción cuyo numerador corresponde a lo que él es,  
en tanto que el denominador es lo que cree ser.”*

*León Tolstoi*

La Universidad no será responsable de las ideas expuestas por el graduando en el trabajo de grado.

Artículo 117, Capítulo 15. Reglamento Estudiantil

## **Agradecimientos**

Este trabajo de investigación, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación, no hubiese sido posible su finalización sin la colaboración desinteresada de todas y cada una de las personas que nos acompañaron en el recorrido laborioso de este trabajo y muchas de las cuales han sido un soporte muy fuerte durante todo nuestro proceso de formación. Primero y antes que todo, damos gracias a Dios, por haber puesto en nuestro camino a aquellas personas que han sido soporte y compañía durante todo el proceso de formación tanto académica como personal, A nuestros padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes hemos logrado llegar hasta aquí y convertirnos en lo que somos. A nuestros hermanos por estar siempre presentes, acompañándonos y por el apoyo moral, que nos han brindaron a lo largo de nuestras vidas. A nuestra directora Claudia Cecilia Castro Cortes que con su amplia paciencia, experiencia y conocimientos nos orientó en el desarrollo y culminación de este trabajo de investigación y a todos aquellos docentes que fueron parte de nuestro proceso de formación. Mil gracias.

## RESUMEN

La presente investigación aborda el estudio del pensamiento variacional y covariacional, a partir de los desarrollos construidos por un grupo de estudiantes, a un problema de cálculo que involucra en su resolución, establecer relaciones de cambio entre las variables que componen la situación, este estudio y análisis se realiza a partir de identificar cómo cambia el razonamiento y abordaje del problema, cuando se presenta de diferentes formas la situación.

En un primer momento, se realiza un abordaje relacionado con el impacto que han tenido los procesos de enseñanza de las matemáticas, por las dificultades que se presentan en relación al pensamiento variacional, por medio de este aspecto, se construye la pregunta de investigación, la cual como principal finalidad tiene identificar la influencia que adquiere presentar de diversas formas un problema de matemáticas. A partir de esto, se establece el objetivo general y los objetivos específicos, los cuales pretenden identificar las acciones mentales y niveles de razonamiento mentales que presentan los estudiantes al momento de abordar de diversas formas una situación problema, por otro lado, poder conocer la relación que se puede llegar a establecer entre los tipos de desarrollos producidos con relación a las representaciones que se le pueden dar al problema.

Para dar alcance a los objetivos, se realiza una indagación teórica que permite identificar qué se entiende en educación matemática por pensamiento variacional y covariacional y poder determinar algunos elementos que se ven involucrados en este tipo de procesos cognitivos, de allí se generan los niveles de razonamiento y las acciones mentales, también se indagó desde el marco teórico sobre los tipos de representación que se le pueden dar a una situación, de lo cual se pudo determinar que existen dos clasificaciones globales, las de tipo cualitativo y las de tipo cuantitativo.

El desarrollo de la investigación se enmarca en una metodología cualitativa con enfoque descriptivo, abordado en cinco fases. A partir de la construcción de categorías e instrumentos de investigación y su aplicación en dos grupos de estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemáticas, se obtiene como principal resultado que cada una de las presentaciones implementadas ayuda a establecer diversas relaciones entre los elementos que componen la situación y de tal forma genera una manera diferente de abordaje.

### Palabras Clave

Pensamiento variacional y covariacional, Presentación del problema, formas de representación, Niveles y acciones mentales de razonamiento.

## Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN .....	9
CAPÍTULO I .....	10
Planteamiento del problema .....	10
Pregunta de investigación .....	11
Justificación .....	11
Objetivos .....	12
Objetivo general .....	12
Objetivos específicos .....	12
Antecedentes .....	12
CAPÍTULO II .....	15
Marco teórico .....	15
Formas de representación .....	16
Sobre el pensamiento variacional y covariacional .....	19
CAPÍTULO III .....	22
Metodología .....	22
DESARROLLO METODOLÓGICO .....	23
• Fase 1: Indagación teórica .....	23
• Fase 2: Construcción de categorías de análisis e instrumentos .....	24
• Fase 3: Trabajo de campo .....	31
• Fase 4: Sistematización y análisis .....	33
• Fase 5: Resultados .....	42
Conclusiones .....	44
Bibliografía .....	46
ANEXOS .....	47
Anexo 1. Tipo de presentación oral .....	47
Anexo 2. Tipo de presentación Escrita .....	48
Anexo 3. Tipo de representación Analítica .....	49
Anexo 4. Tipo de representación Geométrica y Sistemas de Simulación .....	50
Anexo 5. Sistematización y análisis .....	51

## **Lista de tablas**

Tabla 1 Formas de representación cualitativa .....	16
Tabla 2 Formas de representación cuantitativa .....	17
Tabla 3 Formas de representación según Azcarate y Deulofeu (1996) .....	18
Tabla 4 Acciones mentales del razonamiento. Carlson (1998) .....	19
Tabla 5 Niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación .....	20
Tabla 6 Propuesta Acciones mentales Carlson (1998) e investigadores (2019).....	24
Tabla 7 Malla de instrumentos de investigación .....	25
Tabla 8 Tipo de presentación oral .....	27
Tabla 9 Tipo de representación escrita .....	28
Tabla 10 Tipo de representación analítica.....	29
Tabla 11 Tipo de representación geométrica o de simulación .....	30
Tabla 12 Muestra .....	31
Tabla 13 Sistematización y análisis representación oral .....	33
Tabla 14 Sistematización y análisis representación escrita.....	36
Tabla 15 Sistematización y análisis representación geométrica o de simulación .....	38
Tabla 16 Sistematización y análisis representación simbólica.....	40

## INTRODUCCIÓN

Se ha podido observar que el aprendizaje del cálculo en la escuela se ha encontrado limitado a la solución mecánica de ejercicios por medio del uso de algoritmos. Desde la reflexión como estudiantes para profesor de matemáticas (EPPM) consideramos que la enseñanza del cálculo debe estar asociada a potenciar el razonamiento covariacional (Carlson, Hsu, Jacobs, Coe y Larsen, 2003) en donde desde las estructuras cognitivas, los estudiantes puedan observar la forma en que interactúan las variables y los refinamientos que se dan en el cambio, de tal manera que se deje a un lado la visión estática de las matemáticas y se pueda ver unas matemáticas mucho más dinámicas y representativas.

Desde la posición del profesor, uno de los desafíos que se presentan a la hora de enseñar cálculo, es el diseño de problemas que permitan que el estudiante evidencie y contemple lo que representa las variables en una situación y la manera en la cual estas varían de acuerdo con la relación que tienen en la situación. Por tanto, en el presente trabajo se analizaron las diferentes formas en que abordaron la situación y los desarrollos generados por estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en relación con el pensamiento variacional y la covariación según las formas de presentación que se le dé a la situación y el uso de los diferentes registros de representación.

Sobre la producción y desarrollos realizados por los estudiantes, se responde a interrogantes como: ¿Influye la presentación del problema en el abordaje y producción del estudiante?, ¿Cuál de las formas de presentación de los problemas, es más óptima para evidenciar el razonamiento del estudiante?

# CAPÍTULO I

En el siguiente apartado se abordan elementos que se encuentran relacionados al planteamiento del problema, en donde se realiza una descripción de los elementos y dificultades que se identifican en el desarrollo del pensamiento variacional. Por otro lado, a partir de los elementos que se discuten en el planteamiento del problema se construye la pregunta de investigación que fundamentó la construcción del presente trabajo de investigación. Se realiza una justificación, en la que se discute la importancia que tiene el abordar, discutir e investigar a cerca del pensamiento variacional y covariacional; posteriormente se establecen unos objetivos y por último se encuentran los antecedentes, este apartado tiene como finalidad identificar trabajos de investigación que se han realizado con relación a la temática en común que se está desarrollando.

## Planteamiento del problema

A lo largo del proceso de enseñanza de las matemáticas escolares, se han evidenciado dificultades relacionadas con el pensamiento variacional, éstas no son ajena a las dificultades que atraviesa el aprendizaje de las mismas, por tanto, la investigación en educación matemática ha intentado encontrar la génesis de las dificultades con el fin de poder llegar a superar estas.

En las aulas escolares se ha podido evidenciar problemas que se encuentran relacionados al desarrollo pleno del pensamiento variacional, entre estos están, por ejemplo:

- Cuando se trabajan procesos del desarrollo del pensamiento variacional, estos se centran en la ejercitación y solución de ecuaciones. Esto se debe a que el instrumento más inmediato que tiene el maestro es el texto escolar y en la gran mayoría hay exceso de ecuaciones. Por tanto, los docentes se convierten en reproductores de lo que propone el texto como propuesta para desarrollar este pensamiento.
- Se hace una implementación mínima de la resolución de problemas en el aula. Los estudiantes en muy pocas oportunidades se enfrentan a situaciones en las que logren mostrar de formas distintas de representación (verbal, escrita, etc.), lo que saben y las dudas que surgen en relación con el pensamiento variacional.
- Hay una seria dificultad de identificar elementos de variación en situaciones cotidianas, esto se debe a que cuando se comienza a trabajar con los procesos para el desarrollo del pensamiento variacional, se recae en el concepto y los estudiantes difícilmente logran relacionar conceptos matemáticos con su utilidad práctica.

En la realidad de las instituciones de educación básica y media, se ha evidenciado que el pensamiento variacional se le ha atribuido solo la habilidad de resolver ejercicios de cálculo y solución de ecuaciones sin hacer simetría con un contexto cercano a la realidad del resolutor. Por tanto, se considera importante que se pueda desarrollar el pensamiento variacional a partir de propuestas distintas de la presentación de problemas o actividades (gráficas, verbal, escrita, etc.) para que sirva de insumo para poder verificar lo que ha aprendido y desarrollado el estudiante.

En las aulas, de la forma en que se encuentra los procesos evaluativos, se omiten las habilidades cognitivas que implican la covariación, es decir, las acciones mentales y niveles que están detrás de la solución de alguna situación problema poniendo en juego, razonamientos intuitivos relacionados con la variación (Carlson y otros, 2003).

## **Pregunta de investigación**

¿Cómo influye el tipo de presentación que se da a un problema, en relación con los niveles de razonamiento covariacional a partir de los desarrollos producidos por un grupo de estudiantes?

## **Justificación**

Se considera que es de suma importancia, tanto para los docentes como para los estudiantes, el abordar y trabajar con diversos tipos de representación que se les puede proporcionar a los problemas, no solo porque estas representaciones permiten la comprensión de los objetos matemáticos, sino porque en cierta medida los desarrollos y producciones realizadas por los estudiantes, pueden depender de la manera en la cual se realice la presentación del problema, en relación con dichas representaciones.

En los procesos de enseñanza en las instituciones educativas, se observa que lo que concierne al pensamiento variacional, se restringe a que los estudiantes solucionen procesos algebraicos. Por tanto, observar otras formas de trabajar los procesos que desarrollan el pensamiento variacional, van a dotar a los docentes de elementos para analizar qué saben y qué habilidades tienen los estudiantes. En el caso específico de la propuesta que se plantea, cobra importancia en la medida que propone formas diferentes para trabajar el pensamiento variacional y que sirven para que los docentes puedan analizar lo aprendido por los estudiantes a partir de distintas presentaciones de un problema.

Uno de los objetivos de la educación en las instituciones, específicamente en la enseñanza de las matemáticas, es que los estudiantes alcancen habilidades cognitivas, ya que estas son las que los van a acompañar en su cotidianidad y es allí en donde las ponen en juego. La importancia de trabajar el razonamiento covariacional yace en que es el que se ocupa de que los estudiantes potencien sus habilidades mentales, con el propósito de identificar elementos de variación en problemas o situaciones, es decir, que los estudiantes logren identificar la forma en que dos variables interactúan y observar las características de dicha

variación, por ejemplo, saber que la relación entre el precio del barril del petróleo y el costo del dólar, es inversamente proporcional.

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

Interpretar la influencia que tiene presentar de distintas formas un problema que involucra el razonamiento covariacional en las producciones de un grupo de estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

### **Objetivos específicos**

- Identificar las acciones y niveles mentales que presentan los estudiantes en la solución de una situación problema que se presenta de diferentes formas.
- Conocer la relación que se establece entre los tipos de desarrollos realizados por los estudiantes con respecto a las representaciones dadas para abordar una situación problema.

## **Antecedentes**

Al realizar un recorrido histórico en relación al surgimiento del pensamiento variacional en el diario vivir del hombre, se puede identificar que a partir de la época prehistórica es que empiezan a surgir las primeras nociones e ideas matemáticas, Collette (2000) asegura que el pensamiento variacional se relaciona con las actividades de las personas, cuando estas implican por ejemplo; “realizar un desplazamiento de un lugar a otro para las labores de recolección; el desarrollo de las técnicas y herramientas de caza, lo observación del cambio en la posición de las ramas de los arboles por la influencia del viento, la sucesión del día a la noche y su relación con el cambio de la posición del sol, la luna y las estrellas, el vínculo entre la posición de los astros y los procesos de producción agrícola; los aspectos cambiantes de la vegetación y el tamaño de los rebaños de animales domesticados; el desarrollo de rituales colectivos con largas procesiones de participantes”, lo cual permite concluir que el hombre se hizo observador y sensible, y se ha cuestionado siempre, sobre los fenómenos que involucraban aspectos de cambios constantes.

Según Carlson (1998), Monk y Nemirovsky (1994) y Thompson (1994), citados por (Carlson, Hsu, Jacobs, Coe y Larsen, 2003, p. 122-123) mencionan que:

Investigaciones recientes acerca de la comprensión que sobre el tema de funciones tienen los estudiantes de nivel de pregrado, han documentado que

incluso estudiantes académicamente talentosos tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable. (p.122)

Por otro lado,

Se considera que en la educación básica primaria y secundaria es de suma importancia cultivar y construir el pensamiento variacional a partir de distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la educación media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas MEN, (2006, P.66)

A razón de esto, nuestro espíritu para seleccionar este problema de investigación tiene génesis en que los problemas de optimización requieren un tratamiento que plantea modelos y estrategias, los cuales son ricos en mostrar aspectos relacionados con cambio entre variables, como lo expresa Thompson y Saldanha, (citado por Carlson, Hsu, Jacobs, Coe y Larsen, 2003). En el pensamiento variacional se involucran aspectos relacionados a la razón, donde el problema genera la necesidad de establecer relaciones de coordinación entre dos o más cantidades, propiciando así una idea de variación y covariación entre las variables del problema.

Se han identificado algunos de los motivos de las dificultades que atraviesan los estudiantes en el momento de interactuar con problemas que conciernen pensamiento variacional, uno de ellos es el escaso trabajo con la construcción de modelos para poder mostrar las formas de comportamientos de fenómenos cercanos a su contexto, en este sentido, Villa-Ochoa (2012) afirma que “el estudio de la variación representa una vía para atender algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el establecimiento de conexiones entre aquellos conceptos de fuertes componentes dinámicos, sus representaciones gráficas”. Por otro lado, de acuerdo a lo expresado por Posada (2006) tomado de MEN (2006),

el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos gráficos o algebraicos. (P. 11)

Por tanto, se vuelve fundamental para los procesos del desarrollo del pensamiento variacional, el trabajo con diferentes registros de representación, ya que se puede

identificar la dificultad que se presenta desde las aulas escolares para potencializar el razonamiento covariacional, por los estudiantes para identificar características esenciales del pensamiento variacional.

Otra de las dificultades que atraviesan los docentes dentro del aula es la falta de recursos y objetos para el trabajo con los procesos del desarrollo del pensamiento variacional, Acevedo (2013) afirma en relación con los materiales que usualmente el docente cuenta en el aula de matemáticas, que “el libro de texto se considera como el principal referente del trabajo propuesto en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores” (P.130). En concordancia con lo anterior, a los docentes se les dificulta identificar diferentes tipos de presentaciones de problemas que les permita potenciar el pensamiento variacional de sus estudiantes.

## CAPÍTULO II

En el siguiente capítulo se abordan elementos que se encuentran relacionados a los objetos teóricos que sustentan la investigación. En un primer instante es posible evidenciar las diversas formas de representación que se pueden realizar y lo que las caracteriza. Posteriormente se encuentra la concepción del pensamiento variacional y covariación, a partir de diferentes propuestas teóricas, además se presentan los niveles y las acciones mentales que se adjudican a este tipo de pensamiento.

### Marco teórico

Como se ha podido evidenciar hasta el momento, se pretende abordar elementos que se encuentran relacionados al pensamiento variacional y covariacional, por medio de la implementación de un problema, implementación que se caracterizará por estar representada con diferentes registros, por ende, para el sustento teórico de este proyecto es necesario tener presentes las concepciones que se tienen y con las cuáles estamos a fin del pensamiento variacional y covariacional, además de identificar los niveles y acciones mentales que realizan los estudiantes, al abordar situaciones que involucran este tipo de pensamiento matemático, por otro lado, es pertinente trabajar los diferentes tipos de representación que se le pueden dar a un problema matemático, de tal forma, que es necesario abordar la idea de la representación matemática desde una perspectiva semiótica.

Desde lo trabajado por Duval, (citado por Rico, 2003) las representaciones son el resultado del procesamiento de la información, sensorial o conceptual que realizan módulos cognitivos especificados genéticamente. Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. De tal forma Radford; (1998) establece que mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas.

Es así como se hace necesario bordar la idea de representación desde un enfoque semiótico puesto que las representaciones semióticas se caracterizan por ser relativas, pues dependiendo del sistema particular de signos: lenguaje, escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones en otro sistema semiótico, pero pudiendo con posibilidades de tener significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. Según Duval; (1999), las representaciones semióticas son a la vez conscientes y externas, pues permiten una mirada del objeto a través de puntos, trazos, caracteres, sonidos, que tienen el valor de significantes. Hay allí una gran variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas.

## Formas de representación

Duval (1999) considera que existen varios tipos de representación y las define como representaciones mentales “internas” y “externas”. Las representaciones internas son aquellas que permiten mirar el objeto en ausencia de significante perceptible. Incluyen ellas no sólo las llamadas imágenes mentales (relacionadas con la percepción), sino también los conceptos, las nociones, las ideas, las creencias y fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos. Por otro lado, se encuentran las representaciones externas, las cuales cumplen la función de comunicación. Pero también cumplen otras funciones cognitivas, como lo es la función de objetivación y la función de tratamiento, las representaciones externas son esenciales para la función de transformación, pues estas se encuentran ligadas a la utilización de un sistema semiótico.

Dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes familias de sistemas: representaciones simbólicas (que llamaremos más adelante como representaciones cuantitativas) y representaciones gráficas (representaciones cualitativas).

Según el MEN (2006) las representaciones que se pueden dar a un problema se encuentran categorizadas según dos aspectos: lo cualitativo y lo cuantitativo.

Tabla 1 Formas de representación cualitativa

Escrita	Pictórica	Modelos físicos que simulen la situación.
Para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación se debe disponer de sistemas de representación que sean familiares para el grupo de estudiantes. Uno de estos sistemas es el lenguaje escrito. El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.	Los dibujos y gráficos son medios de representación en las situaciones de variación ya que muestran de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos en un comienzo pueden ser muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio. Por ejemplo, dibujos del balde mostrando diferentes alturas del nivel de agua. De todas formas, estos dibujos y gráficos deberían ir acompañados de explicaciones verbales. Estos dibujos y gráficos ayudarán a darle sentido a las gráficas cartesianas de las funciones que describen las situaciones de cambio.	Algunas situaciones de cambio, sobre todo las presentadas por medio de un texto, son susceptibles de ser recreadas mediante maquetas con movimiento lo que permite tener un entendimiento más concreto de la situación de cambio. Hablar sobre los modelos y hacer preguntas sobre los mismos ayudan en la identificación de magnitudes presentes.

Fuente: Construcción propia, basada en (MEN, 2006)

El pensamiento variacional está relacionado con los pensamientos numérico (tablas, patrones numéricos), geométrico (mecanismos geométricos y gráficas cartesianas),

algebraico (expresiones y ecuaciones), métrico (medición de magnitudes en situaciones de variación y cambio) y estadístico (tratamiento de datos y regresiones), a través de las formas de representación cuantitativas de las situaciones de variación y cambio.

Tabla 2 Formas de representación cuantitativa

Representación geométrica	Representación tabular	Representación gráfica	Representación algebraica
<p>Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con objetos geométricos. Esta identificación no es una mera forma de representación gráfica sino un reconocimiento del comportamiento de la magnitud en cuestión. Es decir, se reconocen propiedades comunes de comportamiento algebraico y continuidad (El comportamiento algébrico y las propiedades de continuidad comunes a las magnitudes continuas son las que dan origen a la definición formal de número real y a su representación geométrica como punto de un eje numérico). Este acercamiento al estudio de las situaciones de variación y cambio permite modelar mediante el uso de programas de geometría dinámica.</p>	<p>Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Las tablas de datos numéricos se pueden producir también con sensores conectados a calculadoras o a partir de expresiones algebraicas. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen. Por ejemplo, en el caso del llenado del balde, podríamos por medio de una graduación actual del balde y un reloj, producir diferentes valores del volumen de agua en el balde en diferentes momentos de tiempo.</p>	<p>Se hace mediante la representación en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla. Tradicionalmente, la introducción de las funciones numéricas en el aula de clase se ha hecho desde un principio de acuerdo con la complejidad de su expresión algebraica. Es decir, se estudiaban primero las variaciones lineales, luego las cuadráticas, las cúbicas, y así sucesivamente. Quedaba la impresión en muchos estudiantes que las únicas funciones que existían eran las lineales y las cuadráticas, lo que se pretende cambiar con el enfoque que presenta las situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo primero. Esto no quiere decir que a partir de un cierto momento no se haga un acercamiento</p>	<p>De acuerdo con los patrones de regularidad encontrados en la tabla se pueden establecer expresiones algebraicas que condensen toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio. Conocer las propiedades de las expresiones algebraicas y poder manipularlas. El estudio de expresiones algebraicas en el contexto de la variación contribuye de manera significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico, para extraer información sobre el comportamiento de las variables involucradas en la expresión, contribuirá con la comprensión del fenómeno en estudio y será una herramienta para la solución de problemas. La tabla sirve como herramienta para mostrar los datos gráficamente, lo que permite descubrir patrones y hacer predicciones. Por ejemplo, los valores de las variables para los cuales una expresión o formula se anula dan información acerca de los intervalos donde la expresión es positiva o negativa.</p>

		sistemático al estudio de los fenómenos mediante una clasificación de los modelos de acuerdo con la complejidad de su representación algebraica.	
--	--	--	--

*Fuente: Construcción propia basada en (MEN, 2006)*

Por otro lado, Azcarate y Deulofeu (1996) consideran que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas el lenguaje en el que estas se trabajan es un elemento fundamental para la adquisición de conceptos matemáticos, por ende, establece que los objetos matemáticos se pueden abordar a partir de cinco formas de representación.

*Tabla 3 Formas de representación según Azcarate y Deulofeu (1996)*

<b>Modelo físico o simulación</b>	<b>Descripción verbal</b>	<b>Tabla de valores</b>	<b>Gráfica</b>	<b>Formula o ecuación</b>	
Aparece al realizar un experimento o al simularlo con un ordenador.	Utiliza el lenguaje común para dar un visión descriptiva y generalmente cualitativo de la relación funcional.	Permite establecer una visión cuantitativa, fácilmente interpretativa desde la óptica de una correspondencia, es decir de la identificación de pares de valores, pero en la mayoría de los casos parciales es insuficiente puesto que de ella difícilmente se pueden establecer características globales de la situación.	Permiten obtener una visión general y completa del objeto que se estudia, tanto de manera cualitativa como cuantitativa, además son posibilitadoras de la creación de modelos.	Permite ver las características globales de la función, (variaciones y períodos constantes, crecimientos, continuidad, concavidad, máximos, mínimos, periodicidad, etc.).	La ecuación permite determinar los valores de ambas variables con precisión, siempre que se conozca el algoritmo de resolución de la ecuación correspondiente.

*Fuente: Construcción propia basada en (Azcarate y Deulofeu, 1996)*

Se debe tener en cuenta que la calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones. Para lograr esto se pueden proponer diferentes representaciones de una situación de cambio para que sean contextualizados e interpretados por los estudiantes, teniendo en cuenta que el estudiante puede hacer uso de una representación a partir de otra.

## Sobre el pensamiento variacional y covariacional

Según MEN (1998)

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos; El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. Teniendo en cuenta esto y lo propuesto por (Vasco, 2003) el pensamiento variacional se puede llegar a describirse como “una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covarién en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (P.8)

Por otra parte, en relación con lo propuesto por Carlson (1998) y Carlson, Jacobs y Larsen (2001), se define el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación; sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea. (P.133)

A continuación, se encuentran descritas las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y los comportamientos asociados a cada una de estas acciones propuestas por Carlson (1998).

Tabla 4 Acciones mentales del razonamiento. Carlson (1998)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la conciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la conciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

*Fuente: Tomada de Villa-Ochoa. J. A. (2012)*

Un estudiante se clasifica en un determinado nivel de acuerdo con la imagen, (Entendiendo imagen de acuerdo a lo desarrollado por Thompson (1994), el cual define por imagen: “Se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales” (P.231) es decir, a medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.) Global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea. El marco conceptual para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo. Decimos que la habilidad de razonamiento covariacional de alguien ha alcanzado un nivel dado de desarrollo cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y a las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo.

### **Niveles del razonamiento Covariacional, Carlson (1998)**

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

*Tabla 5 Niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación*

<b>Nivel 1 (N1). Coordinación</b>	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
<b>Nivel 2 (N2). Dirección</b>	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
<b>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</b>	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

<b>Nivel 4 (N4). Razón promedio</b>	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
<b>Nivel 5 (N5). Razón instantánea</b>	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la conciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

*Fuente: Tomado de Villa-Ochoa. J. A. (2012)*

Este capítulo es el encargado de realizar la sustentación y fundamentación teórica del trabajo de investigación, ya que por medio de estos elementos teóricos que se exponen, es que se pretenden identificar comportamientos que involucran el pensamiento variacional y covariacional en los desarrollos producidos por los estudiantes en relación con la situación.

## CAPÍTULO III

La construcción de este capítulo se encuentra relacionada con la metodología de carácter cualitativo que se implementó en el desarrollo de la investigación, para ello se establecieron 5 fases metodológicas, la primera se encuentra relacionada a la indagación teórica, la segunda fase corresponde a la construcción de categorías de análisis y las construcciones de los instrumentos que se aplicaron para la recolección de datos, la fase tres corresponde a la metodología que se implementó en el trabajo de campo, la fase cuatro a la recolección de datos y el respectivo análisis de estos, por último la fase cinco que corresponde a las conclusiones que se establecieron a partir del análisis que se realizó de la información que se recolectó.

### Metodología

La metodología cualitativa pone su énfasis en comprender el comportamiento humano, por tanto, la realización de esta investigación permitió observar y analizar la comprensión de los fenómenos para realizar una interpretación de las representaciones mentales de los estudiantes para la resolución de problemas matemáticos de variación. Desde esta perspectiva, se desarrolló una investigación de tipo cualitativo con enfoque descriptivo, como resultado se muestran las producciones de los estudiantes, este proceso tuvo una serie de momentos secuenciados en donde se abarcó un proceso de documentación en su inicio y se finalizó con la entrega de resultados logrados.

Según Stake, (citado por Monje, 2011), el objetivo de la investigación cualitativa es la comprensión centrando la indagación en los hechos; se pretende la comprensión de las complejas interrelaciones que se dan en la realidad y es de destacar el papel personal que adopta el investigador desde el comienzo de la investigación, interpretando los sucesos y acontecimientos desde sus inicios.

El método de investigación cualitativa de enfoque descriptivo nos permite mostrar las particularidades que van a atravesar la acción de campo que realicemos, permitirá que el lector pueda ver con detalle, la estructura que tiene el trabajo realizado bajo este método de investigación. Las fases que se desarrollaron en el trabajo tienen como función, mostrar un orden que clarifica la forma en que se va describiendo con un nivel de precisión, los resultados obtenidos en la investigación.

Por otro lado, la metodología de la investigación, además de caracterizarse por ser de tipo cualitativo y de enfoque descriptivo, también es de carácter interpretativo, puesto que lo que se realiza es una interpretación de los desarrollos producidos por los estudiantes, y estas interpretaciones que se realizan, son las que permiten identificar y contrastar con el marco teórica el nivel y acción mental en el que se encuentran los estudiantes.

Stake, (citado por Monje 2011), considera que, en este tipo de investigación, el investigador no descubre, sino que construye el conocimiento. La investigación se

desarrolló a partir de una fase de indagación teórica, la fase de construcción de categorías de análisis e instrumentos, la fase de trabajo de campo; la fase de sistematización y análisis; y por último, la fase de resultados. A continuación, se describen las acciones que se llevaron a cabo en cada una de estas.

## DESARROLLO METODÓLOGICO

### • Fase 1: Indagación teórica

En esta fase se realizó un trabajo de recolección de antecedentes documentados sobre el problema que se identificó, los investigadores señalan el problema a investigar a partir de su experiencia en el contexto donde se refiere la investigación, naturalmente emerge de manera empírica. Además, se realiza una documentación teórica que se utiliza como plataforma para desarrollar el trabajo de construcción del instrumento que permitió la recolección de información.

Dos aspectos teóricos sobresalen en esta indagación y fundamentan la construcción de categorías e instrumentos. El principal, tiene que ver con el razonamiento covariacional, que según Carlson (1998) y Carlson, Jacobs Larsen (2001), se define a partir de las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Estos autores describen las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y los comportamientos asociados a cada una de estas acciones.

1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
3. Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
4. Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
5. Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

A estas acciones, se asocian los siguientes niveles de razonamiento covariacional: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, razonamiento promedio y razón instantánea.

El segundo aspecto tiene que ver con las formas de representación y su caracterización. La investigación en este sentido se basa en la propuesta de Duval (1999) y el MEN (2006), obtenido así, la representación verbal, la representación gráfica, la representación tabular, la representación algebraica. Cada una de ellas, presentadas en forma escrita y oral.

## • Fase 2: Construcción de categorías de análisis e instrumentos

En esta fase de la investigación se construyeron los instrumentos de indagación, que permitieron realizar la recolección de la información. Para cumplir con este propósito se construyeron las categorías de análisis fundamentadas en el referente teórico.

### Categorías de análisis

Es así como la indagación teórica, proporcionó elementos para la construcción de las categorías de análisis, los cuales partieron de:

- Las Acciones mentales propuestas por Carlson (1998), complementadas a partir de una propuesta de los investigadores, dadas las necesidades del contexto.
- Las formas de representación Duval (1999) y MEN (2006).
- En la tabla 5 se puede evidenciar las acciones propuestas por Carlson (1998) y la propuesta de los investigadores, (cada acción mental se convierte para esta investigación en una categoría).

Tabla 6 Propuesta Acciones mentales Carlson (1998) e investigadores (2019)

Carlson (1998)	Investigadores (2019)
----------------	-----------------------

Acción Mental o categoría	Descripción de la acción mental	Comportamientos	
		Carlson (1998)	Investigadores (2019)
AM0	Identifica cuáles son los elementos de variación en la situación.		Identifica las variables, sin necesidad de adjudicar o establecer un valor numérico.
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).	Comprende que las variables que ha establecido se encuentran relacionadas, es decir, determinan la relación de dependencia.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la conciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	Establece la relación de cambio entre las variables, es decir, si una aumenta la otra debe tener un comportamiento en relación a esa acción, pues puede que aumente o disminuya.
AM 2,5	Establece por medio de una representación simbólica la relación entre los elementos		Realiza una expresión analítica que permita establecer la relación de

	que varían.		las variables de acuerdo a los comportamientos que estas tienen en la situación.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	Identifica la razón de cambio, con relación a los cambios que presentan las variables.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.	
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la conciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).	

Fuente: *Construcción propia basada en (Villa-Ochoa. J. A. (2012)*

Para este momento en la investigación, se planteó una hipótesis frente a lo que podía acontecer en la implantación del instrumento de investigación.

## Instrumentos de investigación

La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes presentaciones. Para lograr esto, se proponen diferentes presentaciones de una situación de cambio, en las que se hace uso de los diferentes registros de representación, para que sean contextualizados e interpretados por los estudiantes. Se plantearon también, problemas para que el estudiante pudiera producir una representación a partir de otra. En este sentido se construyen los siguientes instrumentos de investigación:

Tabla 7 Malla de instrumentos de investigación

formas de presentación cualitativa	Instrumento 1	Tipo de presentación oral (ver Anexo 1)
	Instrumento 2	Tipo de presentación escrita (ver Anexo 2)

formas de presentación cuantitativa	Instrumento 3	Tipo de presentación analítica <a href="#">(ver Anexo 3)</a>
	Instrumento 4	Tipo de presentación geométrica y sistemas de simulación <a href="#">(ver Anexo 4)</a>
Sistematización y análisis	Instrumento 5	Sistematización y análisis por tipo de presentación <a href="#">(ver Anexo 5)</a>

Fuente: *Construcción propia.*

## Formas de presentación cualitativa

Para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación, se debe disponer de tipo de presentaciones que sean familiares para el grupo de estudiantes. Por tanto, la característica principal de este tipo de presentación es que sea dado como una situación que casi no involucre lenguaje matemático.

Entre las formas de presentación se tiene: la oral, la escrita, la analítica y la geométrica o de simulación. Cabe aclarar que la situación que se construyó para cada una de estas no es única y que es posible tener otras formas de presentación. De esta manera se presenta:

Oral	Escrita	Analítica	Geométrica
<p>Se hace lectura de la situación, tal cual está en la representación escrita:</p> <p>Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.</p> <p>¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?</p>	<p>Se presenta al estudiante en una hoja la situación:</p> <p>Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.</p> <p>¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?</p>	<p>Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.</p> <p>La longitud de los cables está dada por las siguientes ecuaciones</p> $C_1 = \sqrt{20^2 + (30 - m)^2}$ $C_2 = \sqrt{15^2 + (m)^2}$ <p>¿Cuál debe ser la magnitud de <math>m</math> para gastar la menor cantidad de cable posible?</p>	<p>REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA SITUACIÓN</p> <p>En dónde se deberá fijar el punto A, para que la suma de <math>c_1</math> y <math>c_2</math> sea lo menor posible?</p>
<p>Se opta por leer la situación ya que se cuenta con un escrito de la situación y suponemos que le</p>	<p>El escrito planteado se usa porque consideramos que cumple con los parámetros para que sea un tipo de</p>	<p>Se determinó este tipo de lenguaje simbólico en términos de una variable, otra opción hubiera sido ponerlo</p>	<p>Se usó este tipo de presentación porque es conveniente para su aplicación, en el aula de clase, esperamos que los estudiantes rápidamente señalen los</p>

da más precisión, otra opción posible era comentar la situación en un lenguaje más cotidiano.	presentación escrita, tiene un texto en el que se muestra la situación.	en términos de una función con la notación “ $f(x)$ ”.	elementos que varían en la situación.
---	---	--	---------------------------------------

Una vez se toma la decisión sobre las formas de presentación que se aplicarán en clase, los posibles caminos que tome el estudiante se verán contrastados con el marco teórico de las acciones mentales de Carlson (1998). Los cuales están especificados en las siguientes tablas:

Tabla 8 *Tipo de presentación oral*

<b>Tipo de presentación</b>	<b>Oral</b> (se presenta a los estudiantes a modo de lectura oral) Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo. ¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?	
<b>Descripción</b>	La situación dada al estudiante tiene la particularidad de no tener algún tipo de presentación más de lo que se le lee al estudiante, por tanto se supone que es en la que más rápido emerge la necesidad de pasar a otro tipo de recrear el problema y poder decir algo sobre éste	
<b>Acción mental asociada</b>	<b>Carlson</b> <b>AM1:</b> Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. <b>AM2:</b> Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	<b>Investigadores</b> <b>AM0:</b> Determinación de los elementos que varían, sin importar su valor.
<b>Posibles acciones</b>	<b>Cambio de representación</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Verbalización de la conciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.</li> <li>El estudiante recurrirá a un tipo de representación gráfica, la cual pueda observar de qué manera la cantidad de cable aumenta o disminuye.</li> <li>al momento de intentar aproximarse a la solución, los datos serán obtenidos a partir de ensayo y error, es decir, se calculará la solución en varios posibles puntos.</li> </ul>	<b>Posibles estrategias para la solución</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Escribirá los datos relevantes de la situación que se le verbaliza.</li> <li>El estudiante tendrá la necesidad de hacer una representación gráfica la situación.</li> <li>La solución la determinara a partir de ensayo y error.</li> </ul>

Fuente: *Construcción propia, basada en (Villa-Ochoa. J. A. (2012).*

Tabla 9 Tipo de representación escrita

<b>Tipo de presentación</b>	<b>Escrita</b> Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo. ¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?	
<b>Descripción</b>	La situación dada al estudiante se presenta en forma escrita. El estudiante debe dar solución a partir de lo que está sucediendo en la situación de cambio al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.	
<b>Acción mental asociada</b>	<b>Carlson</b> <b>AM1:</b> Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. <b>AM2:</b> Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	<b>Investigadores</b> <b>AM0:</b> Determinación de los elementos que varían, sin importar su valor.
<b>Posibles acciones</b>	<b>Cambio de representación</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Verbalización de la conciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.</li> <li>El estudiante realizará una forma en la que pueda matematizar lo que está leyendo, ya sea, buscando una forma de calcular la cantidad de cable en un punto cualquiera. (teorema de Pitágoras)</li> <li>Emergerá la hipótesis de que el punto medio del suelo, será donde se gaste la menor cantidad de cable, ignorando la altura de los postes.</li> </ul>	<b>Posibles estrategias para la solución</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante tendrá la necesidad de hacer una representación gráfica la situación.</li> <li>La solución la determinara a partir de ensayo y error.</li> <li>Determinará una expresión analítica que le permite modelar la situación.</li> </ul>

Fuente: Construcción propia, basada en (Villa-Ochoa. J. A. (2012).

## Formas de presentación cuantitativa

En la situación presentada, se involucra valores y expresiones que conciernen a un rigor matemático a diferencia de las presentaciones cualitativas. Se espera que los estudiantes puedan moverse en otro tipo de representaciones para señalar la variación que involucra la situación.

Tabla 10 Tipo de representación analítica

<b>Tipo de presentación</b>	<b>Analítica</b> Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo. La longitud de los cables está dada por las siguientes ecuaciones $C_1 = \sqrt{20^2 + (30 - m)^2}$ $C_2 = \sqrt{15^2 + (m)^2}$ <p>¿Cuál debe ser la magnitud de <math>m</math> para gastar la menor cantidad de cable posible?</p>	
<b>Descripción</b>	La situación se presenta con enunciado verbal y algebraico. La introducción de las funciones numéricas en el aula de clase se ha hecho desde un principio de acuerdo con la complejidad de su expresión algebraica, es decir, se debe tener un mínimo de conocimiento de funciones para poder decir algo sobre la situación en el contexto que se plantea y sus herramientas.	
<b>Acción mental asociada</b>	<b>Carlson</b> <b>AM4:</b> Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada. <b>AM5:</b> Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	<b>Investigadores</b>
<b>Posibles acciones</b>	<b>Cambio de representación</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Se trasladará a las representaciones en donde el cambio se pueda ver representado en una función (al menos en su representación cartesiana)</li> <li>Verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.</li> <li>Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.</li> </ul>	<b>Posibles estrategias para la solución</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>A partir de la expresión analítica generará una tabulación que le permita establecer unos rangos en relación a la solución</li> <li>Derivar la ecuación, para hallar la ubicación del punto</li> <li></li> </ul>

Fuente: Construcción tomada de (Villa-Ochoa. J. A. (2012).

Tabla 11 Tipo de representación geométrica o de simulación

<b>Tipo de presentación</b>	<b>Representación geométrica o de simulación</b> ¿En dónde se deberá fijar el punto A, para que la suma de $c_1$ y $c_2$ sea lo menor posible?	
<b>Descripción</b>	La situación se presenta a los estudiantes a partir de una pregunta que se plantea con una representación gráfica asociada a la misma. Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con longitudes de segmentos. Esta identificación no es una mera forma de presentación gráfica sino un reconocimiento del comportamiento de la magnitud en cuestión como el de la longitud de un segmento	
<b>Acción mental asociada</b>	<b>Carlson</b> <b>AM3:</b> Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable. <b>AM4:</b> Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	<b>Investigadores</b>
<b>Posibles acciones</b>	<b>Cambio de representación</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Localización de puntos/construcción de modelo que permita observar cómo cambia una variable a partir de que la otra disminuya.</li> <li>Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada</li> <li>Señalización del cambio a partir de la apreciación de la altura de los postes, es decir. Observar cuál es la relación del cambio de la cantidad de cable con el poste más corto.</li> </ul>	<b>Posibles estrategias para la solución</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>La solución la determinara a partir de ensayo y error.</li> <li>Determinará una expresión analítica que le permite modelar la situación.</li> </ul>

Fuente: Construcción propia, basada en (Villa-Ochoa. J. A. (2012)).

El instrumento de Sistematización y Análisis de la información permite, inicialmente, organizar la información de cada tipo de presentación de acuerdo con las acciones mentales que se establecen para cada una de ellas junto con las evidencias del trabajo obtenidas en cada uno de los grupos. Posteriormente, y a luego del paso anterior, se realiza el análisis en contraste con las formas de representación utilizadas por los estudiantes, las acciones mentales y los niveles de covariación.

Se empleará un instrumento para cada tipo de presentación (ver [Anexo 5](#)).

- **Fase 3: Trabajo de campo**

Esta fase es el tiempo que se destinó durante la investigación para realizar la aplicación de los elementos que se consultaron, indagaron y los instrumentos que se construyeron en el transcurso de las dos fases anteriores y sobre lo cual se encuentra fundamentada la investigación, pues la aplicación de estos instrumentos son los que permiten realizar la recolección de datos y posteriormente su análisis.

#### **Población:**

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo con estudiantes de primer semestre del proyecto curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el espacio académico de Didáctica de la Aritmética I.

Se realizó con estudiantes de primer semestre, ya que en esos momentos de su formación académica tienen muy recientes los fundamentos de la educación básica y media. Por tanto, para efectos de resultados en la investigación, se intuye que usarían estrategias similares a las que usarían los estudiantes de educación media, para dar solución a la situación problema que se aplicó. Esto implica una selección por conveniencia, de acuerdo a lo propuesto por Salamanca y Martin-Crespo (2007) indican que el muestreo por conveniencia “se suele utilizar cuando la muestra con la cual se trabaja es por voluntarios, y esta se denomina como muestra de voluntarios, y se utiliza si el investigador necesita que los posibles participantes se presenten por sí mismos” (p.2).

Los estudiantes de primer semestre la Licenciatura están distribuidos en tres grupos (881, 882, 883), para un total de 78 estudiantes.

#### **Muestra:**

La muestra con la que se trabajó en la investigación, fueron los estudiantes de los grupos 882 y 883, lo que implica una muestra significativa.

La implementación de los instrumentos de investigación se realizó el día 21 de febrero de 2019 en dos espacios diferentes así:

*Tabla 12 Muestra*

Hora de implementación	Curso	Cantidad de estudiantes	Total de grupos conformados
8:00 am – 10:00 am	882	21	7
6:00 am – 8:00 am	883	15	5

*Fuente: construcción propia*

Con el total de los 12 grupos que se conformaron en las dos sesiones de trabajo, se logró organizar que hubiera 3 grupos de cada una de las formas de presentación:

- 3 grupos con presentación verbal escrita.
- 3 grupos con presentación oral.
- 3 grupos con presentación gráfica.
- 3 grupos con presentación analítica.

La evidencia de la clase se compiló con videoclips de los grupos de trabajo, en el momento en el que los investigadores se les acercaba a preguntarles sobre lo que se había desarrollado. Además, se contó con la evidencia física de las producciones de los estudiantes, hay que aclarar que se les pidió que no borraran algo de lo que intentaran hacer, ya que hasta algunos errores de los estudiantes fueron claves para lograr decir cosas en los resultados.

Cada una de las presentaciones de la situación construida, se aplicó en 3 grupos distintos, lo cual es el insumo para la sistematización y análisis del trabajo que se realizó y se expone en el presente documento.

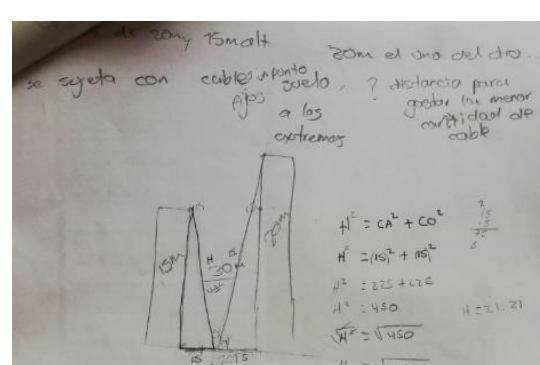
- **Fase 4: Sistematización y análisis.**

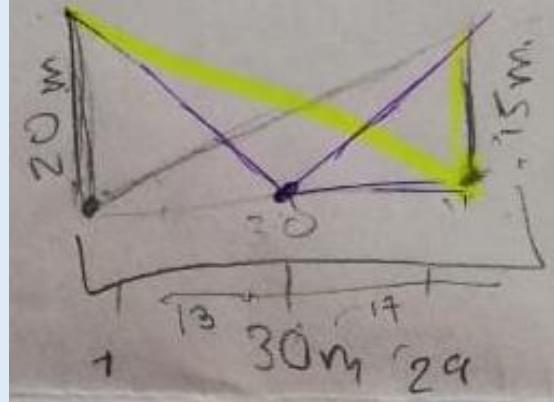
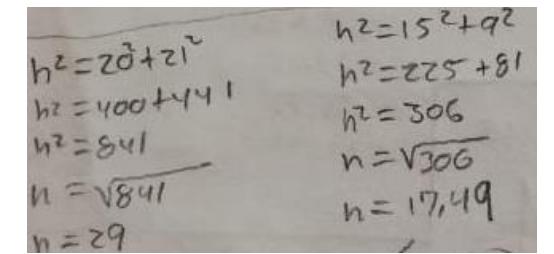
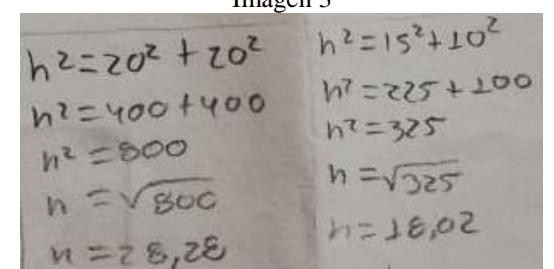
En esta fase se sistematizó la información obtenida en la fase 3 y posterior a esto, se estableció un paralelo entre la información que se recogió en la aplicación del instrumento, los referentes teóricos y las categorías de análisis que se construyeron durante la fase 1 y 2.

### Sistematización y análisis

En el siguiente fragmento se hará una descripción y organización de los análisis recogidos a lo largo de la fase de trabajo de campo. Para cada tipo de presentación aplicada, se realizaron tablas donde se expone la sistematización de los datos, contrastado con el marco de referencia de las acciones mentales (AM), cada una de las tablas, contiene una sección de análisis general de lo aplicado y lo producido por los grupos de trabajo que se utilizaron a lo largo de la fase anterior.

Tabla 13 Sistematización y análisis representación oral

Presentación Oral	
Acción mental	Sistematización y Evidencias
<b>AM0: Determinación de los elementos que varían, sin importar su valor.</b>	<p>Realizan una representación gráfica, para determinar los elementos que conforman el problema, a partir de estos empiezan a identificar las variables (se evidenció en los 3 grupos).</p> <p>En la imagen 1, se evidencia que el grupo logra identificar y realizar una comprensión adecuada de la situación, puesto que comprenden que a medida que van moviendo el punto sobre el piso, este movimiento va tener una consecuencia sobre las longitudes de los cables que se encuentran desde los extremos de los postes hasta el punto sobre el piso.</p>  <p>Imagen 1</p>

<p><b>AM1: Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.</b></p>	<p>Efectúan una prueba con las variables involucradas, llevan la situación a sus dos puntos extremos para observar el valor mínimo y máximo de cada variable. (se evidenció en los 3 grupos).</p> <p>En la imagen 2, se puede observar que los estudiantes llevan las variables hasta su máximos y mínimos respectivamente, en la gráfica se ve el trazo de las líneas desde la altura máxima del poste, hasta la base del otro poste, por tanto, los estudiantes identifican valores distintos en las dos pruebas que realizan. Con esto, logran reconocer que a medida que una aumenta, la otra disminuye.</p>	 <p>Imagen 2</p>
<p><b>AM2: Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.</b></p> <p><b>AM 2.5: Por medio de una expresión simbólica establece la relación entre los elementos que varían.</b></p>	<p>En este momento de la producción de los estudiantes, se caracteriza porque comienzan a intuir en dónde podría estar el punto mínimo en el que gastarían la menor cantidad de cable. Para esto, utilizan el teorema de Pitágoras como elemento simbólico para determinar la medida en diferentes puntos sobre el suelo en el contexto de la situación.</p> <p>Los 3 grupos partieron desde el punto medio de la longitud del suelo. Como se observa en el tratamiento algebraicos que se observa en la imagen 3, los estudiantes calculan varios puntos que varían sobre la horizontal (el suelo).</p> <p>A partir de pruebas de “ensayo y error” logran establecer intervalos dentro de la longitud del piso, sobre el cual empiezan a determinar hacia dónde tiende el punto mínimo. (se evidenció en los 3 grupos).</p>	 <p>Imagen 3</p>  <p>Imagen 4</p>

**Análisis:**

En un primer momento, se observa la necesidad de cambiar el sistema de representación sobre el cual están trabajando, lo que implica según Duval (citado en Castro y Suavita, 2011), realizar una conversión, es decir transformar la representación en un registro distinto al inicial, ya que partir de la descripción oral de la situación, no es fácil construir una idea de la situación, para lograrlo los estudiantes identifican, a partir de la representación escrita de la situación, los elementos que les otorga el problema, es decir, los que conocen y determinan los que no conoce o los que debe hallar. Con los datos identificados, realizan una representación geométrica de la situación y sobre esta empiezan a abordar el problema. En concordancia con el MEN (2006) los estudiantes utilizan esta representación cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con objetos geométricos, o como les llama Azcárate y Deulofeu (1996) hacen uso de un modelo físico, que posteriormente les permitirá hacer uso de una gráfica o de una expresión algebraica.

Lo que se identificó en los desarrollos en términos de acercamientos a la solución, es que los 3 grupos, avanzaron hasta encontrar el punto mínimo a través del teorema de Pitágoras, lo que nos permite decir que los estudiantes necesitan articular otro tipo de representación que los lleve a dar resultados más precisos en términos del pensamiento variacional.

Con respecto a los niveles de covariación, se observó que los estudiantes alcanzan un nivel 2 respecto a marco de Carlson (1998) ya que los grupos de trabajo logran señalar la coordinación de los cambios de una variable respecto a la otra (mientras un cable aumenta, el otro disminuye) y que ese cambio no se da de forma lineal.

*Fuente: Construcción propia*

Tabla 14 Sistematización y análisis representación escrita

Presentación Escrita	
Acción mental	Sistematización y Evidencias
AM0: Determinación de los elementos que varían, sin importar su valor.	<p>Los desarrollos producidos por estos grupos se vieron caracterizados por que generan un cambio de representación de la situación, es decir, realizan una representación geométrica con el fin de que por medio de ésta puedan efectuar una aproximación a la situación en relación con los elementos que les da el problema y de acuerdo con estos hallar lo que deben solucionar.</p> <p>Aunque no se presentó en todos los abordajes, uno de los grupos establece los elementos de la situación a partir de identificar las variables (como se puede evidenciar en los cables sujetados a las torres).</p>
AM1: Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	<p>Por medio de las variables identificadas (las líneas señaladas con diferentes colores) se establecen relaciones de coordinación, en relación con los cambios que se obtienen al mover el punto sobre el piso, de esta forma identifican que, se puede establecer indicios de hacia dónde se encuentra el punto mínimo.</p> <p>Cabe resaltar que los estudiantes, en la mayoría de los casos, toman los puntos extremos y el punto medio para observar su valor, desde allí es en donde se intenta determinar la dirección del cambio.</p>
AM2: Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los	<p>Uno de los grupos identifica que los comportamientos “medidas de los cables” representados por las hipotenusas de los triángulos, van variando en relación con los movimientos que se realizan del punto sobre el piso; para esto utilizan como modelo simbólico el teorema de Pitágoras, para</p>

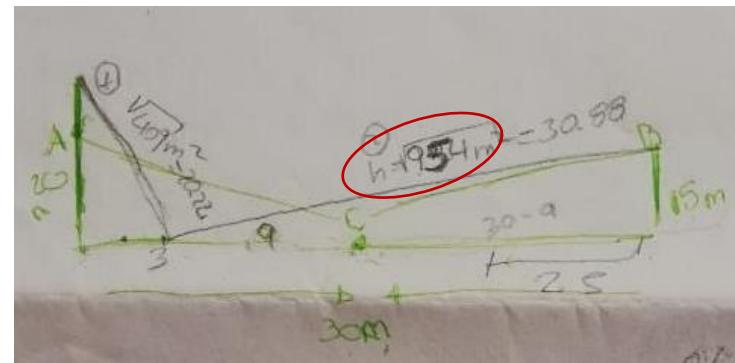


Imagen 5

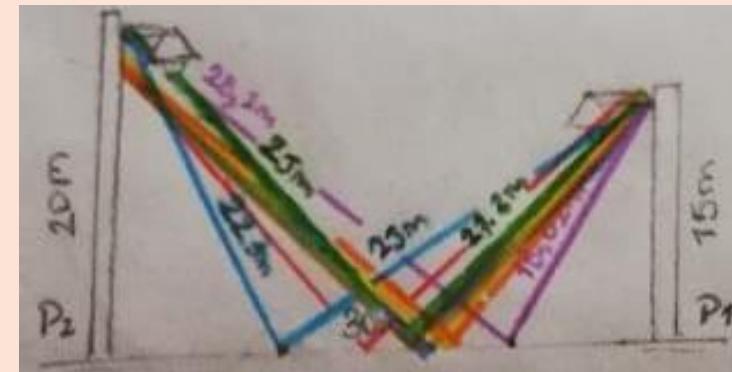


Imagen 6

**cambios en la otra variable.**  
**AM 2.5: Por medio de una expresión simbólica establece la relación entre los elementos que varían.**

los dos triángulos que siempre se generan, independientemente de los movimientos que se realizan sobre el suelo.

A partir de estos dos modelos, generan una expresión algebraica que les permite hallar la suma de las variables (medida de los cables) en un punto determinado.

En este nivel de acción mental, los estudiantes con la estrategia de ensayo y error intentan buscar la dirección hacia donde se encuentra el punto mínimo, reconocen que los cambios que se dan no son de forma lineal. Sin embargo, los estudiantes hacen conciencia que el método no les permite observar en todos los puntos porque la cantidad de puntos posibles es infinita.

Imagen 7

#### Análisis:

El tipo de presentación escrita nos permite ver que es donde los grupos de trabajo muestran una necesidad de cambiar de sistema de representación de manera casi instantánea; esto se debe a que los estudiantes recurren a contextos más cercanos a la matemática para justificar sus producciones y estrategias de solución. Pasar a las representaciones geométricas (ya que se forma a partir de figuras geométricas como los triángulos) o en palabras de Azcarate y Deulofeu (1996) modelos físicos o de simulación. Lo realizado, permite que los estudiantes señalen los elementos que varían (cables), además, dan cuenta que el cambio entre las variables no se da de forma lineal. De igual manera pasa cuando recurren al teorema de Pitágoras para calcular los valores de la suma de los cables en un punto específico, lo que ayudó a fomentar la idea del tratamiento de “x” como una variable y no como una incógnita, como sí pasó en un grupo de trabajo del tipo de presentación simbólica. Es decir, que al menos en el contexto de esta situación, no se necesitó de un lenguaje formal, para que los estudiantes dieran cuenta de significado que tiene “x” en el problema y así darle un tratamiento adecuado.

Con respecto a los niveles de covariación, se observó que los estudiantes alcanzan un nivel 2 respecto a marco de Carlson (1998) aunque los grupos de trabajo logran llegar a la AM2.5 ya que consolidan una expresión algebraica que le permite ver el valor de la suma de los dos cables, en un punto determinado.

Fuente: Construcción propia

Tabla 15 Sistematización y análisis representación geométrica o de simulación

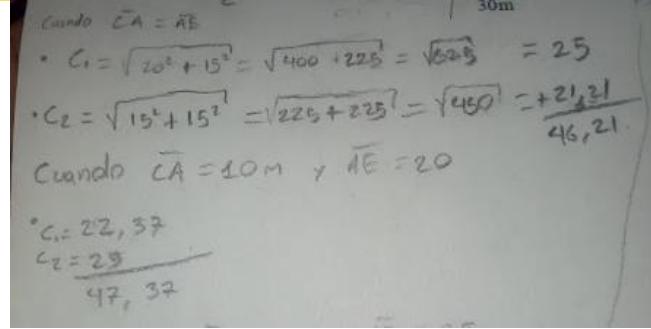
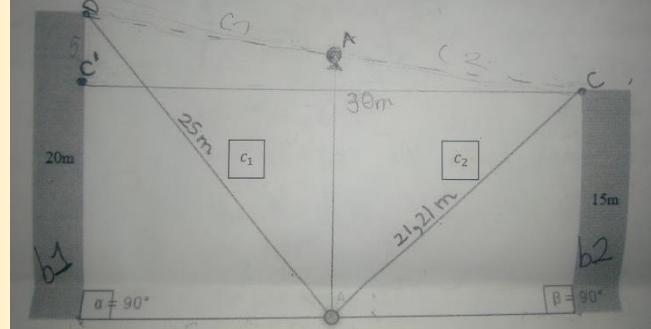
Acción mental y evidencia	Presentación Geométrica o de simulación	Sistematización y Evidencias
<b>AM 2.5:</b> Por medio de una expresión simbólica establece la relación entre los elementos que varían	<p>Dos de los tres grupos de trabajo optaron por cambiar de sistema de representación haciendo uso del teorema de Pitágoras, establecen la relación entre las variables (los cables de la situación). Como se observa en la imagen 8, el grupo usó la representación geométrica o de simulación, solo como referencia para construir las dos ecuaciones que les arrojaría el valor de la suma de los dos cables en un determinado punto.</p>	 <p>Cuando <math>\overline{CA} = \overline{AB}</math></p> $C_1 = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$ $C_2 = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{225 + 225} = \sqrt{450} = 21,21$ <p>Cuando <math>\overline{CA} = 10m</math> y <math>\overline{AE} = 20</math></p> $C_1 = 22,37$ $C_2 = 25$ $47,37$
<b>AM3:</b> Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	<p>Solo uno de los grupos optó por tratar de encontrar una construcción geométrica, en donde se creía que el punto mínimo se podía dar a través de los elementos que proporciona la geometría plana.</p> <p>Los estudiantes tuvieron conciencia que el cambio que se produce en ambas variables no se daba de forma lineal, por tanto, tomaron el piso como una especie de dominio.</p>	 <p>Diagram showing a horizontal line with two vertical walls of height 20m and 15m. A point A is on the floor between the walls. Two cables, <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, are attached from A to the top of each wall. The distance between the bases of the walls is 30m. The length of <math>C_1</math> is 25m and the length of <math>C_2</math> is 21.21m. Angles <math>\alpha = 90^\circ</math> and <math>\beta = 90^\circ</math> are marked at the base of each wall.</p>

Imagen 8

Imagen 9

**AM4: Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.**

Uno de los dos grupos que optó por usar el teorema de Pitágoras en un primer momento, continuó verbalizando sus conjeturas. Por tanto, se ubican en este nivel de acción mental porque desde un cambio de representación, dan cuenta que el cambio que se da entre las variables no es de forma uniforme y que el método de ensayo y error se queda corto en términos de encontrar el punto donde la suma de los cables es mínima.

2. Si "A" sólo puede moverse sobre la base y sabemos que también es punto medio entre el bloque 1 y el bloque 2 entonces:

$b_1 A = 15\text{cm}$  y  $A b_2 = 15\text{cm}$ , podemos hallar las hipotenuses de los respectivos triángulos.

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 \\ (C_1)^2 &= 20^2 + 15^2 \\ (C_1)^2 &= 400 + 225 \\ (C_1)^2 &= 625 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 \\ (C_2)^2 &= 15^2 + 15^2 \\ (C_2)^2 &= 225 + 225 \\ (C_2)^2 &= 450 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sqrt{(C_1)^2} &= \sqrt{625} \\ C_1 &= 25\text{m} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sqrt{(C_2)^2} &= \sqrt{450} \\ C_2 &= 21,21\text{m} \end{aligned}$$

Imagen 10

**Análisis:**

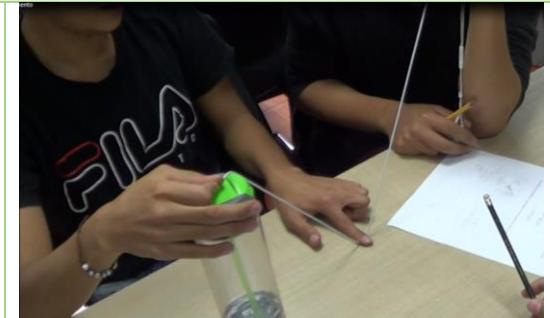
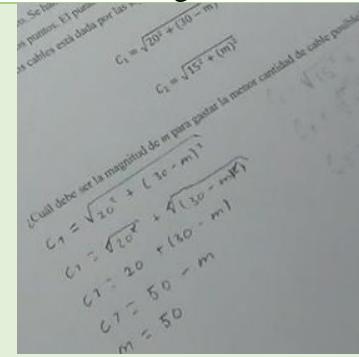
El tipo de presentación geométrica o de simulación, mostró que es la que ayuda a que los estudiantes puedan interpretar y señalar las variables involucradas de manera efectiva. A diferencia de las otras presentaciones, los estudiantes señalaron las dos variables ( $C_1$  y  $C_2$ ) y que el cambio que se daba en estas no era de forma lineal.

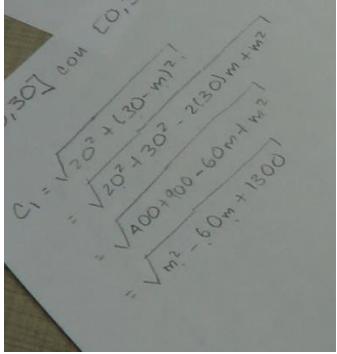
Un grupo optó por usar una construcción (imagen 9) para hallar el punto mínimo, lo cual consistía en crear una perpendicular a DC por un punto A, como se puede apreciar en la imagen. Lo cual, consideramos, no hubiera aparecido en los otros tipos de presentación del problema.

El grupo que se ubicó en AM5 a partir del marco de covariación el cual contiene acciones mentales señaladas por Carlson (1998), ya que los estudiantes cambian de sistema de representación y logran verbalizar conjeturas que nos ayuda a ver el potencial del tipo de presentación geométrica o de simulación. Los estudiantes lograron decir que usar varias veces el método del teorema de Pitágoras, no funcionaría, porque tendrían que probar todos los puntos del piso. Por tanto, son conscientes de que hay infinitos puntos para mirar la suma de las distancias. Esa apreciación hecha por los estudiantes, creemos que es apoyada por el tipo de presentación que se les proporcionó.

*Fuente: Construcción propia*

Tabla 16 Sistematización y análisis representación simbólica

Presentación Simbólica		
Acción mental y evidencia	Sistematización y Evidencias	
<b>AME: Acción mental emergente.</b> <b>Determinación de la variación a través de objetos físicos.</b>	<p>En un primer momento, uno de los 3 grupos de estudiantes afirmó, que la suma de las dos distancias siempre iba a ser una constante, por tanto no observaban variación en estas. Por tanto, recurrieron a realizar una representación física de la situación para observar la variación (se evidenció en un grupo).</p> <p>La representación emergente les permite cumplir con un nivel 0 del razonamiento covariacional, en donde determinan los elementos que varían sin importar su valor de cambio.</p>	 <p>Imagen 11</p>
<b>AM4: Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.</b>	<p>Con respecto a esta acción mental, un grupo de estudiantes encaminó su producción a intentar encontrar un valor de <math>x</math>, siendo así, <math>x</math> una incógnita. La forma de presentación simbólica, hizo que los estudiantes le dieran un tratamiento meramente algebraico a la situación. Al momento de dar cuenta que no podían expresar la ecuación en términos de <math>x</math>, optaron por realizar el ensayo y error con las ecuaciones dadas.</p> <p>Se ubica este grupo en este nivel de acción mental, porque desde la representación dada, verbalizan la conciencia de la razón de cambio, pero al momento de plasmar eso en una sola expresión algebraica, no tienen el dominio de ese nivel de tratamiento algebraico.</p>	 <p>Imagen 12</p>

<b>AM5: Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función</b>	<p>El último de los 3 grupos se ubica en la AM5, porque como se observa en la imagen, los estudiantes realizan un tratamiento algebraico, tratando de sumar las dos expresiones dadas para unificarlas en una sola. A diferencia con el grupo que se encuentra en AM4, los estudiantes le dan un sentido de variable a <math>x</math>, le asignan un intervalo, sin embargo, la estrategia no logra aproximarse a un valor mínimo de <math>x</math>, ya que el grupo no cuenta con la habilidad de mostrar una expresión en donde hallen puntos críticos.</p> <p>El grupo que se ubica en esta acción mental no cambia de sistema de representación, por tanto, se considera que esto pudo haber sido un obstáculo para que los estudiantes mostraran más de sus razonamientos.</p>	 <p>Imagen 13</p>
<p><b>Análisis:</b>      La acción mental emergente que se generó (propuesta por los investigadores), nos permite decir que a pesar de lo precisa que pueda ser algún tipo de presentación de una situación que se le proporcione a un grupo de estudiantes, hay cosas que no son obvias para ellos, sin embargo, la representación física de la situación, realizada por el grupo de trabajo, no se debió por el tipo de representación dada. Es decir, hubiera podido pasar con cualquiera de los 4 tipos de presentación del problema, lo verdaderamente fundamental en lo que se evidenció con el grupo, es que un cambio de representación de la situación sí ayuda a comprender los elementos de variación que se encuentran involucrados en la situación.</p> <p>Con respecto al tipo de presentación simbólica de la situación, se observó que los estudiantes se apoyan en la representación dada y muy poco, se apoyan en otras representaciones para respaldar sus producciones y/o estrategias de solución. Dos grupos de trabajo intentaron buscar una sola expresión algebraica que les permitiera dar con una solución que sería la más precisa en un contexto meramente matemático, sin embargo, como nuestro propósito es ver el potencial de las presentaciones en términos del desarrollo del pensamiento variacional, el hecho que los estudiantes no se apoyen en otro tipo de representación, nos deja esbozar muy poco sobre el razonamiento que utilizan.</p> <p>Con respecto a la covariación, desde el modelo de acciones mentales de Carlson (1998) el grupo que más avanzó en dichos niveles, intentan realizar un modelo matemático, en el cual toman a “<math>x</math>” como una variable, además, la restringen dentro de un rango y hacen conciencia que, en ese modelo, involucran las variables (la medida de los cables, sin embargo, <math>x</math> está en términos de la posición del punto a sobre el suelo) de la situación dada.</p>		

*Fuente: Construcción propia*

## • Fase 5: Resultados

A partir de los análisis obtenidos con la aplicación de los instrumentos, se esbozan los resultados que se obtienen de las acciones de los estudiantes, generadas por el tipo de presentación de una situación, en relación con el pensamiento variacional y covariacional.

### Tipos de presentaciones aplicadas

En la mayoría de las producciones analizadas, se logró pronosticar las representaciones en las que los estudiantes se moverían a partir del tipo de presentación dado a cada grupo, ya que, para lograr comprender las características de la situación, los grupos de trabajo debían establecer relaciones con diferentes formas de representación (Azcárate y Deulofeu, 1996).

En el análisis se tuvo en cuenta las representaciones emergentes que pudieran surgir cuando los estudiantes están explorando las características de una situación dada. Ya que, como surgió en el proceso de experimentación, los grupos de trabajo lograron mostrar diferentes formas de evidenciar aspectos que conciernen al pensamiento variacional.

En el caso específico del trabajo con el pensamiento variacional, los estudiantes tienen que identificar los elementos que varían, es decir, las variables involucradas. En los libros de texto utilizados cotidianamente por los docentes en las aulas escolares, es común ver que las representaciones más usadas en problemas de tipo variacional son las representaciones simbólicas. Por tanto, se observó en el caso de la situación que se propuso a los estudiantes, que ellos lograron señalar los elementos que varían, cuando pasaron a una representación geométrica o de simulación.

Lo anterior no quiere decir que exista una representación idónea, solo que las relaciones que los estudiantes realizan con los problemas de tipo variacional, se pueden potenciar si se usa más de un tipo de presentación, ya que los estudiantes podrán ver cosas que no vieron en el tipo de presentación proporcionada, sin embargo, se pretende realzar el papel que juega el tipo de representación geométrica o de simulación, porque fue en la que los estudiantes más rápido señalaron los elementos que variaban en la situación.

### Niveles de covariación y acciones mentales

En el experimento realizado, se observaron los niveles de covariación (Carlson, 1998) que lograron alcanzar los grupos de trabajo, por otro lado,

En las presentaciones en que las que se proporcionó muy poco el lenguaje matemático, como la oral y la escrita, se observó que se les dificultades para llegar a los niveles N4 y N5 del marco de niveles de covariación de Carlson (1998), por las características de los estudiantes a los que se les realizó el experimento, pues se evidenció, que no dominan un sistema de expresiones algebraicas más complejo. Sin embargo, los grupos a los que se

les entregó un tipo de presentación simbólica con dificultad lograron establecer relación con los elementos del problema, su comprensión se acotó a encontrar un valor de “ $x$ ”.

Con respecto al marco de Acciones Mentales (AM) de Carlson (1998) a lo largo del proceso investigativo, consideramos pertinente agregarle un nivel 0 (N0) el cual consiste en señalar que un estudiante logra establecer, cuáles o cuál es la variable de una situación, sin importar el valor de cambio o alguna otra característica de su valor. Desde las producciones analizadas, observamos que, para algunos grupos de trabajo a primera vista, no lograban hallar los elementos que variaban en la situación, por tanto, la importancia de nivel N0 propuesto por los investigadores, tuvo efecto cuando los grupos tuvieron que acudir a representaciones emergentes para comprender las variables del problema. Es decir, en el marco de niveles y acciones de covariación de Carlson (1998) se asume desde el nivel N1 que los estudiantes ya determinan qué es lo que varía sin importar su valor, por tanto se realizó un aporte al marco de razonamiento covariacional, ya que los investigadores asumen que la covariación existe desde que los estudiantes comienzan a intentar construir relaciones con un tipo de representación, que los lleve a determinar los elementos que varían en cualquier situación relacionada con el pensamiento variacional.

El siguiente nivel que se construye a partir de las consultas a referentes teóricos y antecedentes de los investigación, es el nivel (N2.5) que responde a una acción mental (AM2.5) en la cual se menciona que los estudiantes logran construir una expresión algebraica para establecer el valor de cambio que tiene una variable con respecto a otra. En el caso específico de la situación propuesta a los estudiantes, se evidenció que usaron una expresión para calcular el valor de las variables en un punto determinado. La razón de generar este nivel intermedio, surge por la necesidad de caracterizar la representación que se usa como método para hallar valores en la situación. En la situación propuesta por los investigadores, era predecible que los estudiantes acudieran a un lenguaje simbólico para calcular medidas, por tanto, fue esencial caracterizar esta acción como un nivel intermedio entre N2 y N3.

A modo de conclusión, se observó el potencial que tiene cada una de las presentaciones propuestas, en términos de ayudar a establecer relaciones y los elementos de variación y covariación de cualquier situación, ya que, usando diferentes tipos de presentaciones, hará que los estudiantes, logren análisis desde otro punto de vista (Duval, 1999) sobre los problemas y situaciones relacionados con el pensamiento variacional.

Al momento de general material para trabajar variación con los estudiantes se debe considerar a priori las posibles relaciones que los estudiantes puedan hacer con el material y cómo ellos logran caracterizar cada uno de los elementos de variación involucrados.

## Conclusiones

En el siguiente apartado, se mencionará los alcances de la investigación en términos de cumplimiento de sus objetivos generales y específicos. Posteriormente, las conclusiones que deja todo el proceso investigativo y los aportes que deja para la formación como docentes de los investigadores.

En el desarrollo del trabajo, se tuvo en cuenta el marco de razonamiento covariacional propuesto por Carlson (1998) y que se caracteriza a partir de unos niveles que responden a unas acciones mentales. La importancia del referente teórico yace en que sería la estructura principal del análisis de las producciones de los estudiantes. Por tanto, se identificaron las acciones mentales y los niveles de covariación en que se ubicaban los estudiantes respecto a la presentación proporcionada. El análisis es un contraste entre lo que produjeron los grupos de trabajo y el referente teórico que lo sustenta.

Para lograr señalar la relevancia de cada una de las presentaciones proporcionadas al grupo de trabajo, se necesitó saber cuáles fueron las relaciones que los estudiantes establecieron con el tipo de presentación y desde allí, qué evidenciar que formas de representación emergen para facilitar la comprensión de la situación. En el desarrollo del análisis, se observó que la forma en que los estudiantes logran consolidar una comprensión de los elementos que varían en una situación, es trasladándose de un registro de representación a otra, el cual les deje ver elementos que tal vez, en la presentación dada no lograron ver. Por tanto, los docentes deben suponer, cuáles podrían ser esas posibles relaciones que los estudiantes realicen con el material que se lleva al aula escolar.

Por lo mencionado anteriormente, se logró caracterizar la influencia que tiene las diferentes presentaciones dadas a los estudiantes, teniendo el marco de razonamiento covariacional de Carlson (1998). Se observó que el tipo de presentación que se utilice en el aula de clase, determina algunos de los caminos que pueda tomar el estudiante para buscar la solución.

Con respecto a intentar responder la pregunta de investigación. Cuando se usan presentaciones que involucran muy poco lenguaje matemático, emergen varias representaciones de esa situación, ya que se les dificulta comprender los elementos de variación involucrados. Sin embargo, cuando se les proporciona una presentación que involucre un lenguaje matemático formal, se les dificulta usar otro tipo de representación para que verbalicen o señalen los elementos que varían en la situación. Por tanto, la influencia que tiene el tipo de presentación es amplia en términos de lo que puedan señalar los estudiantes con respecto al pensamiento variacional.

En el proceso de investigación surgió la necesidad de referencia o buscar, investigaciones que pudieran justificar y encaminar el presente trabajo, las cuales sirvieron para enfocar el tipo de metodología, por lo cual, se escogió la cualitativa con enfoque descriptivo, que normalmente se usa para este tipo de investigaciones. Fue de gran importancia la elección

del tipo de metodología y sus fases, ya que fue la estructura de todo el desarrollo de la investigación. Después de general los instrumentos de aplicación, se trató de operar respecto a las fases que se consolidaron al momento de escoger el tipo de metodología, lo cual tiene como resultado el documento que el lector posee en este momento.

El trabajo realizado deja aportes al proceso como educadores matemáticos de los investigadores. Por un lado, la importancia de contemplar los posibles caminos que los estudiantes tomen al momento de solución de cualquier tipo de situación o problema que se plantee en las aulas de clase. Por tanto, en las aulas de matemáticas, es de gran importancia que los docentes tengan en cuenta las relaciones que los estudiantes posiblemente establezcan, con el tipo de representación que se les proporcione. Por otro lado, uno de los aportes de deja la investigación en la formación como docentes, es que se refina la forma en que se analiza los avances de los estudiantes cuando se trabaja con actividades que involucran el pensamiento variacional, ya que hay aspectos que los estudiantes señalan sobre la variación que no están plasmados en una hoja, por tanto, se amplía las formas en que se verifica el proceso que se realiza con los estudiantes en las aulas de matemáticas.

## Bibliografía

- Azcárate, C., Deulofeu, J., (1996). Funciones y gráficas. Editorial síntesis S.A., Valle hermoso, España.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. EMA, 8 (2), pág. (121-156).
- Castro, C., Suavita S., (2011). Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor. XIII Conferencia interamericana de educación matemática. Recife, Brasil.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Cali: Univalle Ministerio de Educación Nacional MEN (2004). Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Enlace Editores Ltda. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (2006), Estándares básicos de competencias, Bogotá; magisterio
- Monje, C (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa, guía didáctica. Universidad Sur Colombiana. Neiva.
- Posada, F y Villa-Ochoa, J. A (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. tesis de maestría no publicada, Medellín: Universidad de Antioquia.
- Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, 35(1), 277-302.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Rojas Damaso (2008). Problemas de máximos y mínimos. Gobierno Bolivariano de Venezuela, ministerio de poder popular para la educación superior, pág. (329-330).
- Salamanca, A., Crespo C. (2007). El muestreo en la investigación cualitativa. Departamento de investigación de FUDEN., pág. (1-4).
- Vasco, C. E. (2003). “El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías”. En: *Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas* (págs. 68- 77). Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista TED-Tecné, Episteme y Didaxis*, 0(31), pág. (9-25).

## ANEXOS

### Anexo 1. Tipo de presentación oral

Para este tipo de presentación, la metodología que se implementa consiste en que al estudiante se le hace entrega de una hoja en blanco, luego el docente lee detenidamente la situación a los estudiantes cuantas veces sea necesario.



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.

¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?

## Anexo 2. Tipo de presentación Escrita



**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**  
**FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN**  
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.

¿A qué distancias de los postes se debe fijar el punto para gastar la menor cantidad de cable?

### Anexo 3. Tipo de representación Analítica



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Dos postes de 20 y 15 metros de altura respectivamente, se encuentran a 30 metros de distancia el uno del otro. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los puntos. El punto solo se puede mover sobre el suelo.

La longitud de los cables está dada por las siguientes ecuaciones

$$C_1 = \sqrt{20^2 + (30 - m)^2}$$

$$C_2 = \sqrt{15^2 + (m)^2}$$

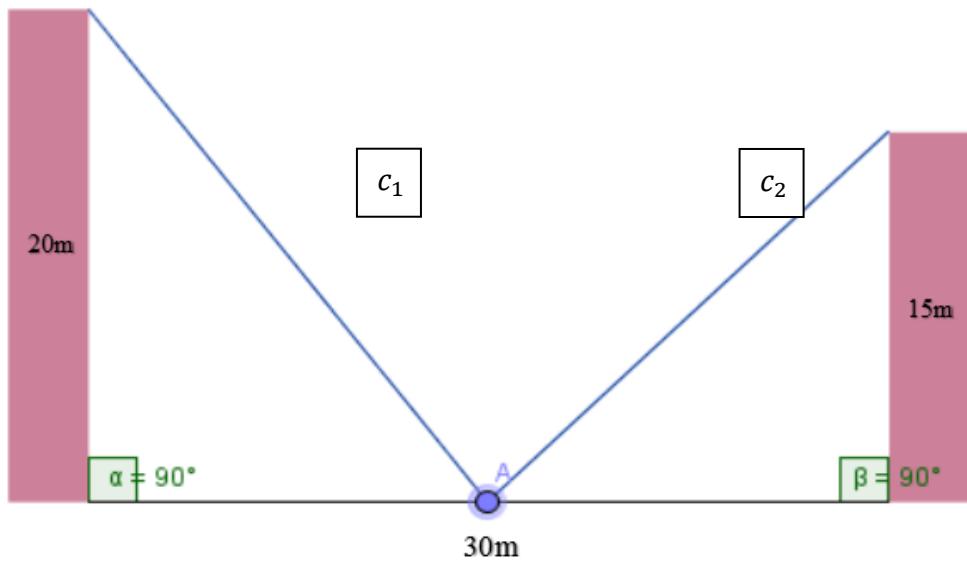
¿Cuál debe ser la magnitud de  $m$  para gastar la menor cantidad de cable posible?

#### Anexo 4. Tipo de representación Geométrica y Sistemas de Simulación



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

¿En dónde se deberá fijar el punto A, para que la suma de  $c_1$  y  $c_2$  sea lo menor posible?



## Anexo 5. Sistematización y análisis

<b>Forma de presentación: indique aquí la forma de presentación de la cual se hace la sistematización y Análisis (oral, escrita, gráfica y analítica)</b>	
<b>Acción mental y evidencia</b>	<b>Sistematización</b>
(En este espacio se analiza cada una de las AM que se relacionan en los instrumentos que se construyeron para las formas de representación cualitativa y cuantitativa)	La sistematización implica la recolección de información obtenida en el trabajo de campo, es una forma de conteo de las acciones evidencias con la implementación de la situación
Análisis: implica el contraste entre las acciones de los estudiantes y el referente teórico (Acciones mentales y formas de representación).	