Sistematización de un proceso de Matematización de las Transformaciones Geométricas Lineales

Alberto Sánchez Fernández

Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Notas de Autor

Alberto Sánchez Fernández, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Francisco José de Caldas.

Universidad Distrital, Facultad de Ciencias y Educación, Bogotá

Contacto: bogoaltur@gmail.com

TABLA DE CONTENIDO

Tabla de Figuras

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

1. INTRODUCCIÓN

En esta sistematización se presenta un conjunto de exploraciones de diferentes transformaciones geométricas lineales a través de la interacción y exploración de éstas en el programa de geometría dinámica Geogebra utilizando elementos de la educación matemática realista de Hans Freudenthal.

Bajo la Educación Matemática Realista (EMR) se reconocen y descubren características comunes para dar con la solución de un problema que estén conectadas con la realidad, esa capacidad de resolver un problema Freudenthal lo llama matematización, y lo establece en diferentes niveles: situacional, referencial, general y formal.

En el transcurso de la sistematización se desmenuzan las fases de la matematización a través de las exploraciones, descubrimientos y relaciones de las transformaciones geométricas lineales con la función lineal.

En las primeras tres transformaciones lineales se identifica la matriz de transformación aplicada a distintas figuras geométricas, generando un nuevo polígono, identificando el efecto que genera la matriz a este. Se proponen y generan distintos deslizadores dentro de la matriz para acentuar y visualizar los cambios y efectos que producen en los polígonos generados.

En la exploración con la cuarta y quinta transformación, y gracias a la actividad y manipulación con el programa de geometría dinámica (Geogebra) se visualiza y se descubren conexiones entre estas transformaciónes y la función lineal y la representación de la función lineal $y=x$.

En la sexta transformación se explora y se identifica el signo que presenta el determinante de la matriz de transformación de acuerdo a los diferentes valores que toman los deslizadores. Se da una mayor relevancia cuando el determinante es igual a cero porque produce un efecto al polígono generado, donde se visualiza mucho más la relación entre la transformación y función lineal. Por medio de la matematización se aplica la fase de generalización sobre lo que conlleva tener una matriz de transformación cuando su determinante es igual a cero.

Producto de la sistematización, de la exploración y búsqueda de elementos y características presentes en las transformaciones lineales, pero en muchas ocasiones ocultas, se identifica y reconoce la proporcionalidad que existe en la expresión del determinante $ad - bc = 0$, el cual se conecta y relaciona con la proporcionalidad de la pendiente de la función lineal $y=mx$.

Gracias a las exploraciones con las transformaciones lineales se resalta y manifiesta las propiedades y cualidades que tiene una función lineal, que trasciende mucho más allá de una definición y una representación algebraica

Este proceso de sistematización es una invitación para encontrar nuevos elementos que permitan dar una mirada diferente e innovadora el cual resalta cualidades que pueden no encontrarse a simple vista sino por medio de una búsqueda e inquietud por hallar cosas nuevas en el mundo de las matemáticas y su enseñanza.

2. Justificación

En el proyecto de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas se desarrolló el espacio de formación electivo, en el cual se estudiaron diferentes tópicos y temas que involucraron transformaciones y tipos de funciones desde un punto de vista algebraico.

Justamente fue este tópico el más llamó la atención, al analizar que una función lineal trasciende de la idea de una ecuación de primer grado, cuya representación y notación es una línea recta que pasa por el origen, sino que es un conjunto de transformaciones que tienen la capacidad de conservar la adición y la multiplicación por escalar.

El motivo para realizar este proyecto es ahondar y profundizar el concepto de función lineal a través de la exploración de las transformaciones geométricas lineales, identificando la relación y conexión que existe entre éstas transformaciones y la función lineal. La intención es reconocer las características de la función lineal, que trasciende más allá de su notación algebraica tradicional y su representación como una línea recta; además se pretende ampliar y entender el concepto de linealidad, como elemento digno de ser resignificado en la formación de profesores y el uso de la geometría para observarla desde otra óptica.

Al aplicar a diferentes objetos geométricos una transformación lineal, se pretende con ayuda de Geogebra, determinar los cambios y efectos desde una perspectiva geométrica (expansión, contracción, simetría) que tienen en algunos polígonos; así como identificar el cambio y conservación en la estructura de la ecuación lineal y la ecuación de una transformación lineal.

3. Objetivos

3.1 Objetivo General

Sistematizar un proceso de matematización de las trasformaciones geométricas lineales desde el estudio de la matriz asociada a ésta, manifestando las relaciones entre las representaciones de la matriz y la transformación.

3.2 Objetivos específicos

- Ahondar y profundizar más sobre las transformaciones geométricas lineales, y sus aplicaciones a diferentes objetos y figuras geométricas.
- Utilizar la teoría de Freudenthal sobre educación matemática realista como una forma para resignificar y sistematizar la matematización del concepto y el significado de función lineal.
- Realizar un documento que reporte el desarrollo, el proceso, fases y los avances de la sistematización.
- Hacer uso de geogebra como una herramienta que permita evidenciar, reflejar y visualizar los cambios y nuevos significados que permiten dar las transformaciones geométricas lineales al concepto e idea de función lineal.

4. Marco Teórico

4.1 Educación Matemática Realista

El proceso de sistematización de las transformaciones geométricas lineales se ha realizado bajo las ideas de la educación matemática realista con el fin de tener un registro detallado sobre los descubrimientos y hallazgos que se van presentando con las exploraciones de las transformaciones lineales dentro del software de geometría dinámica (Geogebra).

Estos hallazgos van permitir reconocer conexiones y relaciones las cuales se especificarán más adelante, entre las transformaciones lineales y el concepto de función lineal. Los hallazgos registrados en el proceso de sistematización están conectados y bajo las características y niveles de esta teoría de educación matemática.

La educación matemática realista es una corriente didáctica nacida a comienzo de la década de los 70 con el propósito de dar un enfoque diferente a la enseñanza de las matemáticas, de tal manera que estén conectadas con la realidad, y los estudiantes puedan aprender matemáticas mediante el desarrollo y la aplicación de conceptos matemáticos dentro de los problemas cotidianos y de la vida diaria. Esta teoría reconoce como fundador a Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán que desarrollo investigaciones en Holanda.

En la Educación Matemática Realista (EMR) el uso de contextos no implica que estos no están necesariamente restringidos a situaciones del mundo real, incluso el mundo formal de las matemáticas pueden ser adecuados contextos para plantear y proponer una situación o problema para los estudiantes.

De hecho, la capacidad y actividad para plantear y resolver un problema, de manera que se pueda organizar y relacionar contextos reales con las matemáticas es lo que Freudenthal denominó *matematización*, que es la base de la EMR, una propuesta diferente para la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Para Freudenthal (1987) citado en Bressan (2016) para hacer un proceso de matematización es necesario:

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismo;
- Ejemplificar ideas generales;
- Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales que se puedan esquematizar, simbolizar y tener algoritmos; y
  - Reflexionar acerca de la actividad de matematización.

El autor también enfatiza que a los estudiantes se les debe ofrecer un ambiente de aprendizaje en el cual puedan construir conocimiento matemático. Para el autor las matemáticas se aprenden mejor al hacerlas, Freudenthal no pretende limitar la matematización a una actividad de bajo nivel, el retomó el trabajo de Treffers donde propone dos formas de matematización en un contexto educativo

- La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático: basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva
- La de matemátización vertical: ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigor

(limitando interpretaciones y validez), con el objetivo de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En este proceso de matematización progresiva, la EMR reconoce que los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión. Freudenthal (1987) establece que son: situacional, referencial, general y formal; estos niveles ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada. Bressan, Perez, Gallego y Zolkower (2016) retoman las ideas de Freudenthal y definen los niveles:

I. En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

II. En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

III. El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.

Estos niveles no son continuos ni se requieren uno para acceder al otro, se puede presentar un salto o adelanto por parte de los estudiantes.

Para Freudenthal (1991) matematizar verticalmente significa “moverse en el mundo de los símbolos, hacer atajos y descubrir conexiones entre conceptos y estrategias, y hacer uso de esos hallazgos”.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Para la EMR los estudiantes pasan por diferentes niveles de matematización, desde vislumbrar soluciones informales conectadas al contexto, hasta alcanzar algún nivel de esquematización y comprensión de principios generales.

4.2 Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales son aquellas funciones que respetan la suma vectorial y el producto por escalar. A cada transformación se asocia una matriz donde es posible visualizar elementos para el trabajo y abordaje de la función lineal en matemáticas y su enseñanza en el aula. Se parte desde reconocer las diferentes transformaciones geométricas lineales que se pueden representar en el plano cartesiano con ayuda de una matriz, aplicadas a diferentes objetos geométricos

Una función $T: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal si se cumple:

Para todo $X, Y \in R^n$, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;

Para todo $X \in R^n y\ \alpha \in R, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

La notación T: $R^n \rightarrow R^m$ indica que el dominio de T es R^n y el codominio es R^m. Para cualquier elemento x que $\in a\ R^n$, el vector $T(x)\ en\ R^m$ es la imagen de x bajo la acción de T. El conjunto de todas las imágenes T(x) es el rango de T.

4.2.1 Matriz Asociada a la Transformación

Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal. Existe una única matriz A tal que

$T(X) = Ax$ para toda x en R^n

Para la transformación T, la matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} . \ . \ . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Que tiene m filas y n columnas, Siendo $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede escribir como vector columna y se denota:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces se define el producto de la matriz A por la columna X como el valor de $T(x)$, colocado como columna. Ecuación que se escribe:

$$T(X) = AX$$

Esta asociación (a cada transformación lineal de una matriz) es biunívoca pues recíprocamente, si A es una matriz de orden $m\ x\ n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{22} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces A define una transformación lineal T_A así:

$$T_A: R^n \to R^m$$

Definida por:

$$T_A(X) = AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

La matriz A_{mxn} denota la familia la familia de todas las matrices de orden $m\ x\ n$ con componentes reales.

Esta asociación como lo dice Isaacs y Sabogal (2009) da una interpretación al problema de hallar todas las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales, en donde resolver un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es encontrar todos los $X \in R^n$ tales que:

$$T(X) = B$$

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Donde $T: R^n \to R^m$ es una transformación lineal cuya matriz es la matriz del sistema y B es un vector columna de R^m formado por los términos constantes de las ecuaciones. En términos de matrices, si A es la matriz de T, resolver el sistema es resolver la ecuación matricial:

$AX = B$

Para el caso particular de transformaciones en el plano en si mismo, es útil e interesante, interpretar el efecto geométrico de la transformación, es decir, describir que les hace la transformación a determinados objetos en el plano.

5. Inicio de Matematización

La estructura de este trabajo esta cobijado bajo la teoría de Educación Matemática Realista que propone Hans Freudenthal, se realiza una matematización en donde se presentara descubrimientos y reflexiones sobre la idea y el concepto de función lineal a partir de la exploración en el software de geometría dinámica (Geogebra) de algunas transformaciones geométricas lineales.

Esta matematización está conformada en niveles, éstos niveles permiten conocer los momentos que tiene el proceso de matematizar, el cual evidencia el avance y desarrollo que se va presentando en la exploración con el software.

5.1 Nivel Situacional

El contexto del que parte este trabajo es mi experiencia como estudiante de educación básica y media, incluyendo algunos semestres dentro de la universidad. En la universidad he tenido la idea y el concepto de función lineal como una función que representa una línea recta que pasa por el origen, sin embargo, he tenido espacios de reflexión y cuestionamiento frente a este concepto e idea.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Esta situación reúne dos elementos: primero, remover la idea que ha perdurado en diferentes niveles de la formación académica (Media y superior) sobre la representación de un concepto matemático; en este caso de la función lineal. Segundo, usar el conocimiento formal de la matemática, particularmente el de las transformaciones lineales, para proveer un significado y representación diferente de la función lineal.

Como se había dicho anteriormente, hay dos formas de matematización, para el desarrollo de este trabajo, se ha elegido la matematización vertical porque plantea organizar y relacionar conocimientos desde la matemática misma, al igual que esta sistematización. Una de las reflexiones con las que se inicia esta matematización vertical surgen de preguntas como: ¿Es posible encontrar una función que sea una función lineal y su representación no sea una línea recta que pase por el origen? ¿Es posible que una función lineal se represente como una función a trozos, como la gráfica de una función parte entera? ¿Qué significa que una función sea lineal?

Si una función no se representa como una línea recta entonces ¿no se considera una función de primer grado con una pendiente?, se usa una línea recta como una representación, sucesión o secuencia de puntos que tiene un orden en particular. Incluso algunos críticos de cine en sus comentarios dicen que una película es buena porque el guion y la historia de los personajes no es lineal. Es decir que ¿lo lineal tendrá que ver con un orden, en una secuencia que primero tenga que pasar esto y luego aquello?

Las ideas y cuestionamientos sobre el significado de función lineal la encontré en el mismo mundo formal de las matemáticas gracias a algunos temas vistos en la universidad como la conservación y preservación de la suma y la multiplicación, estos hicieron que comenzara a indagar sobre nuevos elementos que conforman una función de primer grado.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Se busca elementos diferentes que permitan dar nuevas ideas y significado de la función lineal pero no a través de conceptos ya conocidos, repetitivos y clásicos que se encuentran en diferentes libros de texto.

5.2 Nivel Referencial

En este nivel se encuentran algunos esquemas, representaciones y conceptos que hacen parte de la matemática como disciplina, como es el concepto de transformación lineal; con el propósito de explorar, descubrir y reflexionar a partir de ella propiedades y cualidades que presenta la función lineal, y que no se encuentran e identifican a primera vista, y que en muchos casos se desconocen.

Se toman definiciones y conceptos del algebra lineal para el desarrollo de esta sistematización, para ello se consultan algunas fuentes de información como Grossman (1998) e Isaacs y Sabogal (2009) que son libros de algebra lineal, en donde se toma la definición de transformación lineal, al igual que su representación y notación.

Se toma la definición de transformación lineal:

Una función $T: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal si se cumple:

a) Para todo $X, Y \in R^n, f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;
b) Para todo $X \in R^n y\ \alpha \epsilon R, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

Los conocimientos previos sobre matrices al iniciar este proceso de sistematización fueron muy escasos, para ello debo recurrir a diferentes libros de algebra lineales, luego establecer e identificar la matriz asociada a la transformación.

5.3 Inicio de Sistematización y Exploración en Geogebra

Aquí inicia una parte de la matematización muy importante porque empieza el proceso de sistematización donde se hace el registro de hallazgos y descubrimientos al explorar a través del software (geogebra) algunas transformaciones geométricas lineales, aplicadas a algunos polígonos.

En la sistematización están elementos de la matematización vertical tales como la reflexión y esquematización, en la exploración con las transformaciones lineales. También se encuentran las diferentes matrices asociadas a la transformación, en el cual se reconozcan las características y propiedades de cada transformación lineal y el efecto que tiene al momento de aplicarlas a algunas figuras geométricas.

Para el desarrollo de la sistematización se hace uso del software de Geometría Dinámica llamada Geogebra, en él se realiza la exploración para hallar y encontrar elementos nuevos dentro de la sistematización.

Una de las primeras actividades fue identificar la matriz que está relacionada con las diferentes transformaciones.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ -x + y \end{pmatrix}$

Para establecer la matriz de la transformación 1, se utiliza la definición de multiplicación entre la matriz y un vector, estableciéndose una igualdad entre los términos

$$ax + by = y$$
$$cx + dy = x$$

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Una vez planteada esta dos ecuaciones, se determina los valores de a, b, c y d para que se cumpla las igualdades, y se reconoce que los valores deben ser, $a = 0, b = 1, c = 1$ y d =0

De esta manera se tiene la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que corresponde a la matriz 1. Para establecer la matriz de la transformación 2 se utiliza el mismo procedimiento

$ax + by = x + y$

$cx + dy = x - y$

Los valores para que se cumpla la igualdad son $a = 1, b = 1, c = 1, d = -1$

Con lo que se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Para la transformación 3 se realiza de forma similar a la transformación 1 y 2

$$ax + by = x - y$$
$$cx + dy = -x + y$$

Generando la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Una de las primeras acciones que se realizo fue insertar las matrices de transformación y aplicarlas a diferentes polígonos, por ejemplo, para ingresar la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en el software primero, se inserta en la bandeja de entrada entre doble paréntesis y separado por una coma los valores de la matriz, como se presenta en la figura 1.

Figura 1. Bandeja de Entrada para Insertar Matriz.

Fuente: Elaboración propia

Al oprimir enter, la matriz se presenta en la parte superior izquierda del software en vista algebraica, ahora se construye el cuadrado ABCD, que es el polígono al que se desea aplicar la matriz de transformación, como se observa en la figura 2.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

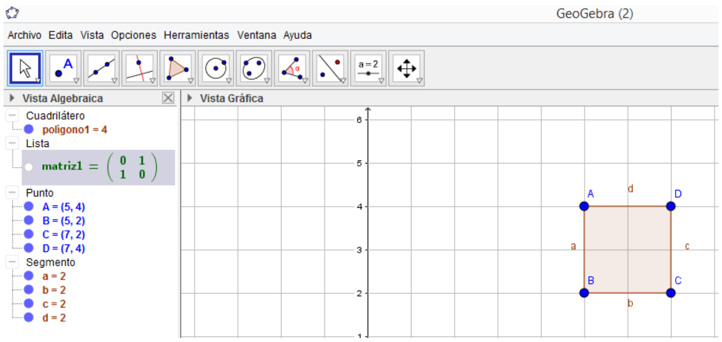

Figura 2. Matriz 1 de Transformación

***Fuente**:* Elaboración Propia

Ahora para aplicar la matriz a un objeto, (en este caso un cuadrado), se escribe nuevamente en la bandeja de entrada el comando, el cual tiene como datos de entrada a la matriz y el objeto al que se desea aplicar, ver la figura 3.

Figura 3. Bandeja de Entrada para Aplicar Matriz

***Fuente**:* Elaboración Propia

Para distinguir el objeto al que se aplica la matriz, se debe escribir entre paréntesis y separados por una coma los puntos que conforman el polígono, como se evidencia en la figura 4.

***Figura 4**.* Bandeja de Entrada para Aplicar Matriz a Polígono

***Fuente**:* Elaboración Propia

Al oprimir enter se genera el polígono 2 establecido como la aplicación de la matriz 1 al polígono {A, B, C, D} como se aprecia en la figura 5.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

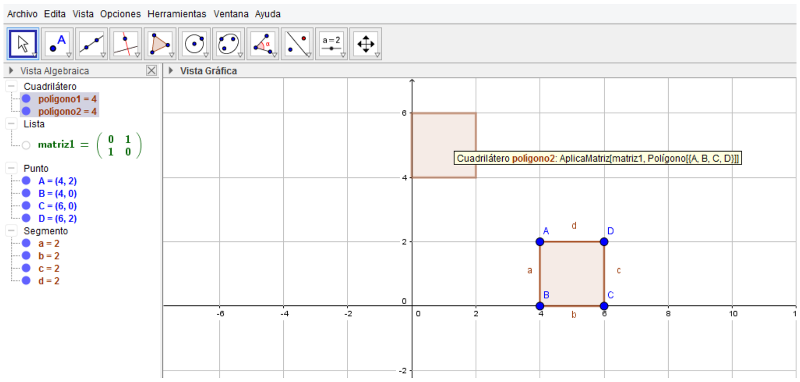

Figura 5. Polígono Generado al Aplicar Matriz 1

Fuente: Elaboración Propia

Una de las exploraciones que se va a realizar es con las transformaciones aplicadas a diferentes objetos o figuras geométricas, ésta permitirá visualizar la simetría de las figuras con respecto al plano cartesiano. Considero importante explorar y manipularlas porque se puede reconocer e intuir algunas particularidades que presentan los objetos al aplicarles la matriz y desplazarlas en el plano R^2.

Como el escenario en donde se va a explorar las transformaciones lineales insertadas a figuras geométricas son del plano cartesiano, bajo el uso de coordenadas cartesianas, creo que el trabajar con las siguientes transformaciones propiciará y ayudara a identificar cualidades y características que existen al explorar y trabajar en R^2 como la simetría con respecto al origen, al eje *x*, al eje *y*, y a la recta *y=x*.

Transformaciones a explorar

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x - y \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

5.4 Nivel General

La exploración inicia en el nivel referencial donde se toman conceptos y esquemas matemáticos presentados anteriormente como la definición de transformación lineal y la matriz asociada a la transformación, pero se hace un tránsito hacia el nivel general porque se dan reflexiones, descubrimientos y estrategias del nivel anterior.

5.4.1 Exploración Transformación 1

Se presenta el triángulo ABC y la matriz asociada a la transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ que es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a continuación se inserta en la bandeja de entrada y se aplica al triángulo ABC generando el triángulo A´, B´, C´. Al manipular el triángulo original se puede evidenciar que éste tiene con el triángulo A´, B´, C´ una conservación de la distancia o simetría con respecto a la recta $y = x$. Es decir que siempre que mueva el triángulo ABC sobre el plano cartesiano, los dos triángulos se van a mover y van a tener la misma distancia uno del otro con respecto a la recta. Si se acerca uno de los vértices del triángulo ABC hacia la recta, por ejemplo cuando el vértice A se acerca a la recta $y = x$, el otro vértice A´ también se acerca de manera que al llegar a la recta se sobreponen uno del otro, como se evidencia en la figura 6.

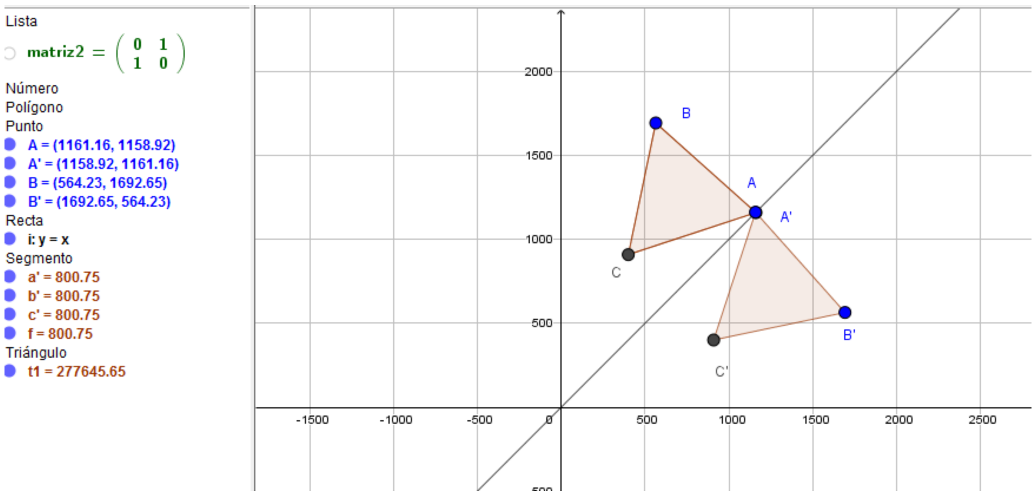

Figura 6. Simetría de los Triángulos con Respeto a la Recta.

Fuente: Elaboración propia

Si se alejan los vértices y los triángulos, la distancia entre ellos se mantiene teniendo siempre con referencia la recta.

La manipulación en geogebra permite visualizar lo que sucede si se desplaza el triángulo ABC hacia el origen (se desplaza simultáneamente también hacia el origen el triángulo A´B´C´), al mover, estirar y alargar el triángulo ABC también lo hace el triángulo A´B´C´, tal como se evidencia en la figura 7.

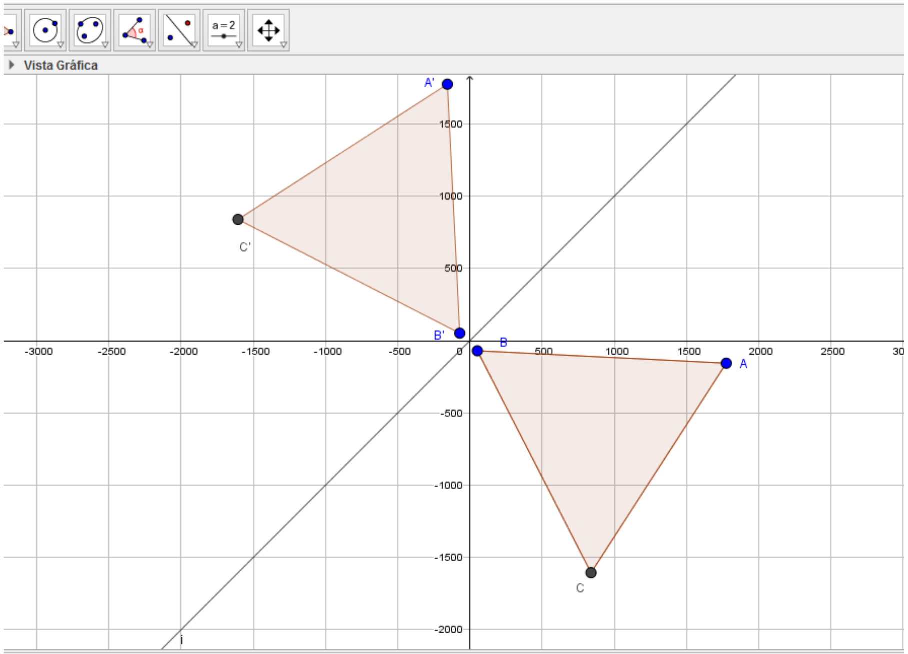

Figura 7. Triángulos acercándose al origen

Fuente: Elaboración Propia

5.4.2 Exploración Transformación 2

Ahora con la transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

Es aplicada la matriz de transformación $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ al cuadrado DEGF generando el cuadrado E´D´F´G´. Los dos cuadrados son semejantes y tienen la misma área. Cada vértice del cuadrado original tiene la misma ordenada, pero las abscisas tienen diferente signo, esto genera un reflejo entre los dos cuadrados sobre el eje y.

Al dejar el cuadrado original sobre el eje x, en el primer cuadrante del plano cartesiano y desplazando cada vez más lejos del origen, el cuadrado E´D´F´G´ se desplaza sobre el segundo cuadrante alejándose también del origen. Si se alarga o estira el cuadrado DEGF también lo hace el otro cuadrado, como se observa en la figura 8.

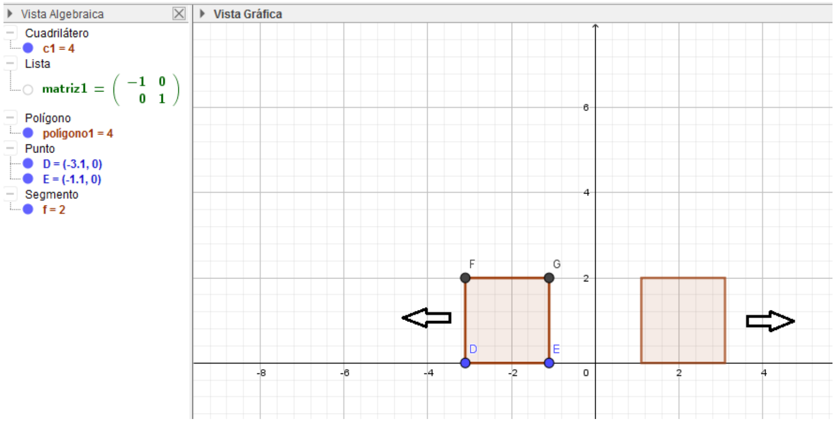

Figura 8. Cuadrado DEFG Alejándose del origen

Fuente: Elaboración Propia.

Al ser aplicados la matriz de transformación a los polígonos se ha utilizado las representaciones y notación de las transformaciones lineal que hacen parte del nivel referencial de matematización, pero al identificar que los dos cuadrados conservan la misma distancia con respecto al eje de las ordenadas, esto es una propiedad que no se puede visualizar sino se explora con el software de geometría, a simple vista es más difícil identificar la simetría entre los dos cuadrados con respecto al eje y.

Si se acerca el cuadrado DEFG que se desplaza sobre el eje de las abscisas hacia el origen, el cuadrado D´E´F´G´ (cuadrado azul) también se acerca a ese punto, hasta que se sobreponen uno sobre otro, como se ilustra en la figura 9.

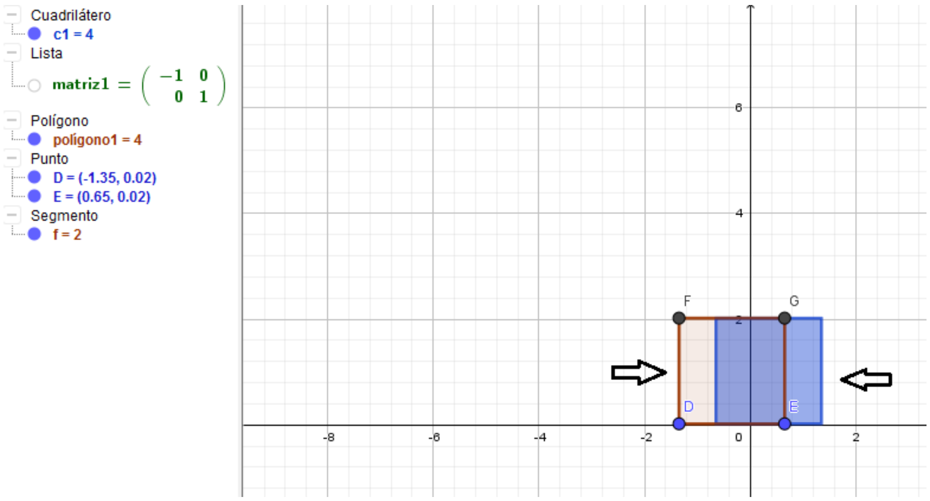

Figura 9. Cuadrado DEFG y D´E´F´G´ Sobreponiéndose

Fuente: Elaboración propia

5.4.3 Exploración Transformación 3

Ahora tomando la transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ se aplica la matriz relacionada con esta transformación $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al pentágono HILJK. El resultado de aplicar esta matriz ha generado el pentágono H´I´L´J´K´, en donde los dos pentágonos conservan la misma distancia con respecto al eje *x*. Aquí inicia un abordaje diferente a las dos primeras transformaciones; se establece un deslizador el cual evidencie y visualice, los cambios, modificaciones y novedades que se presentan en el pentágono generado, lo que implica avanzar hacia el nivel general, cuando el deslizador toma diferentes valores.

Consecuente con lo anterior, se ha remplazado el valor de 1 de la matriz de transformación por k que es el nombre del deslizador y que va tomar valores dentro del intervalo $[0,7]$. Así se tiene la matriz $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que al tener *k* diferentes valores permite visualizar los cambios que en el pentágono generado por la transformación. Aquí empieza la exploración para una generalización, dentro del nivel general de matematización. Como se evidencia en la figura 10, cuando el deslizador $k = 0.5$ el pentágono se ha contraído y mucho más pequeño que el pentágono original.

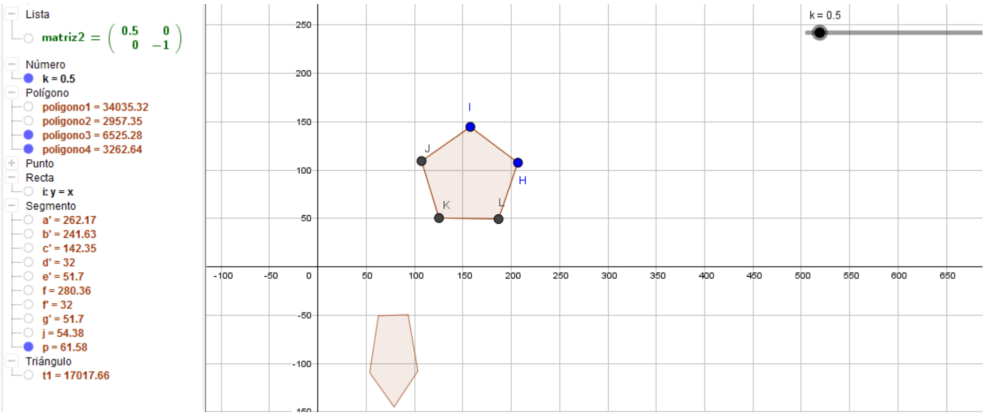

Figura 10. Pentágono H´I´L´J´K´ Contraído

Fuente*:* Elaboración Propia

Si $0 < k < 1$ el pentágono H´I´L´J´K´ tiene menor área que el pentágono HILJK. Cada vez que el valor del deslizador se acerca a cero, el pentágono H´I´L´J´K´ se estira, cuando k se acerca a 1, el área del pentágono H´I´L´J´K´ se aproxima al área del pentágono HILJK, como se observa en la figura 11. Cuando el valor de *k=1* los dos pentágonos tienen la misma área.

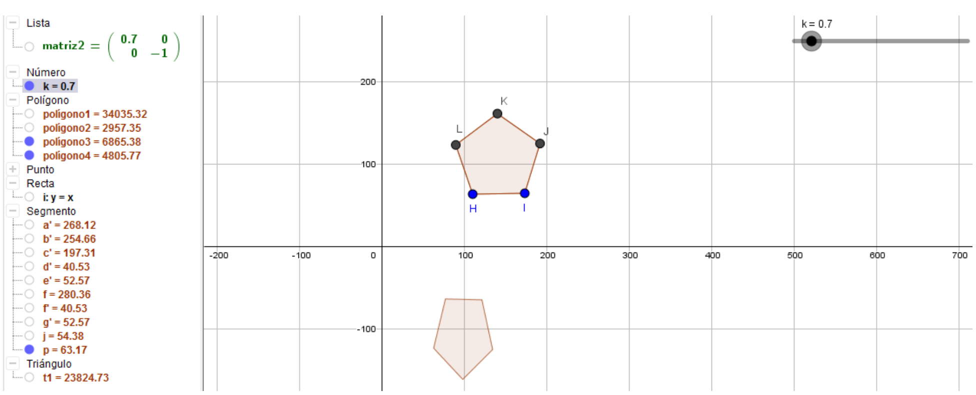

Figura 11*.* Pentágono HILJK y H´I´L´J´K´

Fuente*:* Elaboración Propia

Hecha la exploración en este intervalo y teniendo en cuenta las evidencias de las ilustraciones, se concluye que la variable k de la matriz de transformación en el intervalo descrito, permite contraer y minimizar el polígono generado, en comparación con el polígono original, es decir que al tener esta matriz, transformara cualquier polígono, sin importar su tamaño o número de lados, en otro polígono con menor área.

Ahora cuando la variable está $1 < k < 7$ el pentágono generado se estira, se expande y se desplaza, como se aprecia en la figura 12. Además aumenta también su área de acuerdo al valor que tenga el deslizador, por ejemplo si el deslizador $k = 3$, el área del pentágono generado es tres veces el área del pentágono original.

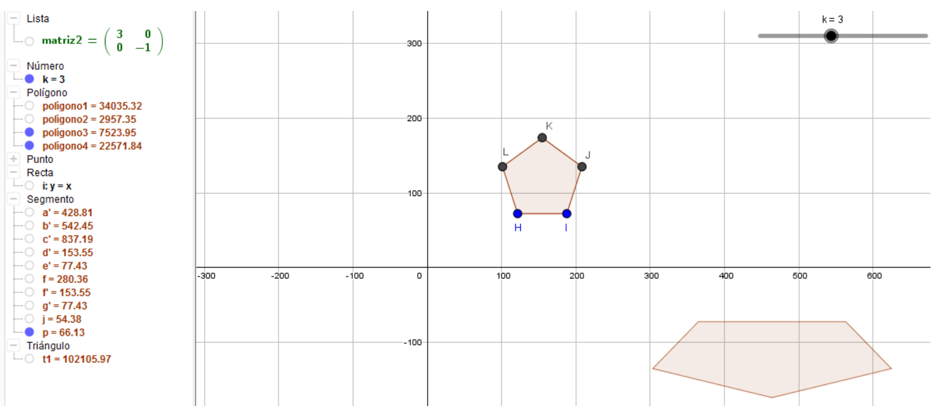

Figura 12. Pentágono Generado Estirado y Expandido

Fuente: Elaboración Propia

De acuerdo con lo anterior, si la variable cambia el área del pentágono también cambia, la longitud de los lados y la apotema. Se concluye que el efecto que genera el deslizador dentro de la matriz y en el intervalo señalado es alargar, contraer y dilatar el polígono generado en contraste con el polígono original.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

A continuación, se hacen reflexiones sobre la estrategia realizada con el deslizador, elementos que hacen parte aún del nivel general. La matriz de transformación paso de expresarse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Se ha generado un cambio en los valores de la primera columna de la matriz, pero no en la transformación como tal, la transformación se mantiene, pero el valor de *a* de la matriz ha cambiado. Esto quiere decir que los valores *a y d* en esta matriz de transformación pueden modificarse, siempre y cuando se respete su estructura. esto pasó al establecer la variable *k* en la primera columna de la matriz, que es multiplicar *a* por el deslizador *k.*

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ -y \end{pmatrix}$$

En la matemática formal una transformación lineal está conectada con una matriz, como las propiedades de las matrices también satisfacen las propiedades que tiene la transformación lineal, es posible relacionar plenamente una transformación lineal con una matriz.

La matriz de transformación permite realizar un cambio o "efecto" a diferentes figuras, polígonos, valores y vectores al que se desee aplicar la matriz. Se establece otra notación de la transformación y su matriz correspondiente, como una función T de coordenadas cartesianas y rectangulares definida como $T(x, y) = (x, -y)$ que actúa sobre cualquier valor del plano cartesiano.

Si se expresa la transformación como la función T aplicada al par ordenado (3,5)

$T(3,5) = (3, -5)$

Si se aplica la matriz de transformación al mismo par ordenado (3,5)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1) + (0)5 \\ 3(0) + (-1)5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Al utilizar las dos notaciones, tanto la notación de la transformación como la función T de la pareja ordenada y el "aplicar" la matriz de transformación a ésta se obtuvo el resultado de (3,-5).

La primera notación enfatiza mostrar la transformación como una aplicación de una función T a la pareja ordenada $(3,5)$ al que se le asigna la pareja $(3,-5)$, la segunda muestra la transformación en una notación matricial al que se llega al mismo resultado.

Es decir que se pueda utilizar cualquiera de las dos notaciones para hablar de transformación lineal, en el caso de la función T es importante conocer cuáles son las condiciones y características para que esta función obtenga el mismo resultado que se hizo con la matriz de transformación aplicada al par ordenado (3,5).

5.4.4 Exploración Transformación 4

Se propone la siguiente transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

En geogebra, la matriz asociada a esta transformación es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al aplicar la matriz al rectángulo ABCD se genera el rectángulo A´B´C´D´ congruente, con la misma área y simétrico con respecto al origen. Con el objetivo de visualizar e identificar los cambios que genera en el polígono, al proponer diferentes valores diferentes a -1 en la primera columna de la matriz, se establece el deslizador g que toma valores entre $[-6,6]$ para visualizar y analizar el efecto que tiene el deslizador en la matriz de transformación.

A partir de este momento, la exploración en geogebra ha pasado del nivel referencial al general, porque se conoce lo que genera el deslizador dentro de la matriz, también porque se realiza una generalización ampliando diferentes valores dentro del intervalo, que no se visualiza a primera vista, es a través del abordaje con el software que se puede visualizar.

En la figura 13 se observa que, cuando $g = -3$. El rectángulo A´B´C´D´ es mayor en área, expandiéndose la base, manteniendo su altura, y el área es tres veces el área del rectángulo original. Si el deslizador está entre $-6 < g < -1$ el rectángulo generado es mayor, así como su área, cuando $g = -1$ el rectángulo generado es congruente y tiene la misma área que el rectángulo original.

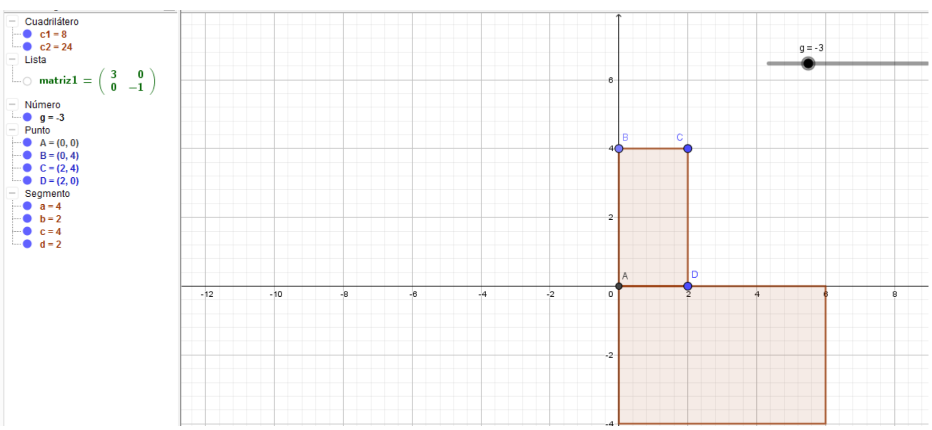

Figura 13. Rectángulo Generado mayor en longitud.

Fuente: Elaboración Propia

Si se multiplica el valor del área del polígono original por el valor del deslizador *g* se obtiene el área del polígono generado. Esto modifica la variable en la matriz de transformación, es decir, que el efecto que tiene deslizador g es cambiar la longitud de la base B´C´ del rectángulo A´B´C´D´ obteniendo un rectángulo mayor en área que el rectángulo ABCD, pero la longitud de la altura A´B´ del rectángulo A´B´C´D´ se mantiene, siempre y cuando el valor del deslizador g este entre -6 y -1.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Cuando el deslizador es $-1 < g \leq 0$ el rectángulo generado es más pequeño que el rectángulo original, por ende su área es más pequeña y el ancho es mucho más corto, como se evidencia en la figura 14.

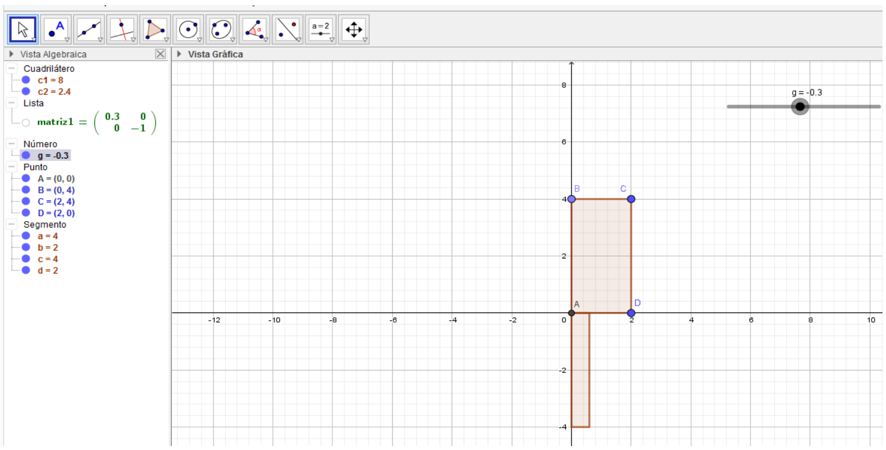

Figura 14. Rectángulo generado menor en longitud

***Fuente**:* Elaboración Propia

Cuando el deslizador se aproxima a cero, el rectángulo va desapareciendo; al momento de tomar el deslizador $g = 0$ el rectángulo generado desaparece, manteniendo solo la longitud de la altura, como se aprecia en la figura 15.

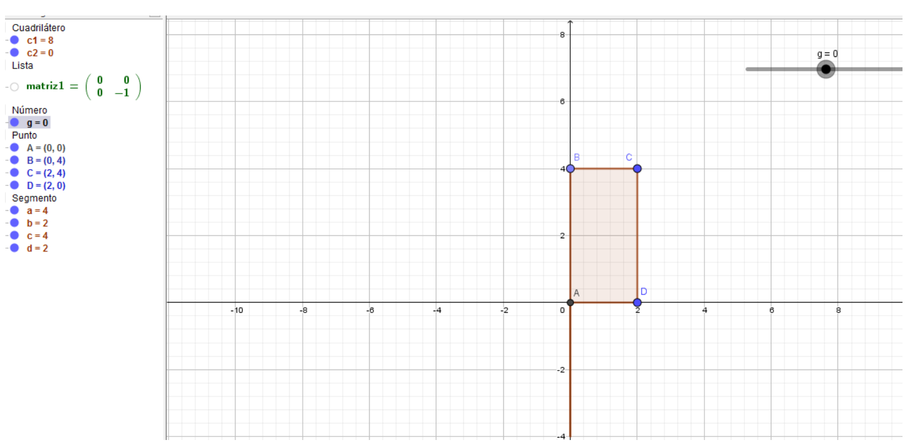

Figura 15. Segmento igual a la altura del rectángulo original

Fuente: Elaboración Propia

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Ahora en geogebra, se establece otro deslizador h, y define la variable h en la posición 2,2 de la matriz $\begin{pmatrix} -g & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}$. Antes de aplicar la matriz a un polígono, se podrá intuir que el deslizador h, va a generar un cambio sobre la otra altura del polígono.

Como la matriz inicial de transformación ya está insertada en el programa, al aplicar esta matriz ahora al cuadrado ABCD, no cambia la forma de la figura generándose el cuadrado A´B´C´D´. El deslizador *h* toma valores entre $[-7,\ 7]$ donde se observan los dos cuadrados son iguales y tienen la misma área, siempre y cuando el valor de los deslizadores g y h es igual a 1, tal como se aprecia en la figura 16.

Al cambiar y modificar el deslizador *h* la altura aumenta, se desplaza verticalmente, convirtiendo el cuadrado en un rectángulo. Esto ocurre cuando $-7 \leq h < -1$ y también cuando $1 < h \leq 7$, como se ilustra en la figura 17.

Esta matriz de transformación permite convertir un cuadrado en un rectángulo, en las exploraciones de las transformaciones 1,2 y 3 al aplicar la matriz de transformación, el polígono generado conserva y mantiene la forma con respecto al polígono original.

Gracias a los deslizadores se visualiza los cambios y modificaciones de los polígonos generados por el efecto de la matriz, al tomar valores diferentes a 1, esta estrategia y abordaje con los deslizadores, permite visualizar los cambios en la base y la altura del cuadrado y del rectángulo respectivamente. Existen diferentes valores que pueden tomar los deslizadores *g* y *h* en la posición 1,1 y 2,2 en la matriz de transformación cuyo efecto se mantiene sobre el polígono, que es el de cambiar y modificar la base y la altura del polígono generado al aplicar la matriz de transformación.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

El proceso de generalización hace parte del nivel general de matematización y trasciende del nivel referencial porque permite identificar en cuales valores del deslizador g aumenta, disminuye o se mantiene igual, la longitud de la base del rectángulo A´B´C´D´ con respecto a la longitud de la base del rectángulo ABCD.

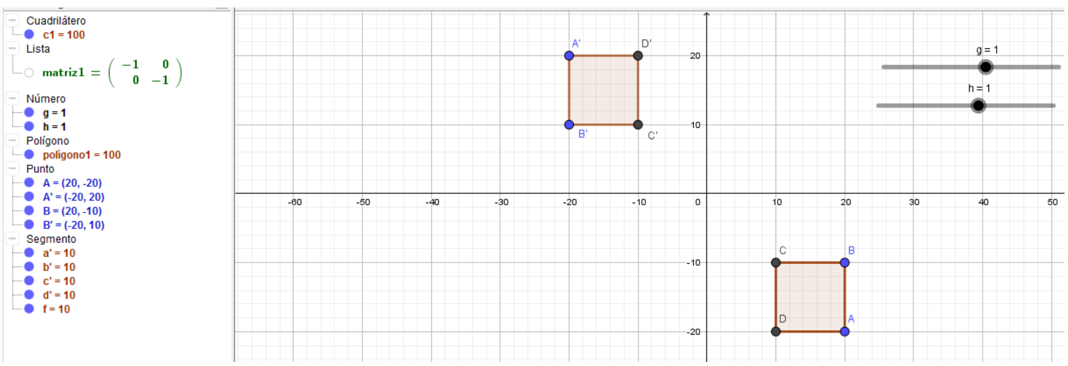

Figura 16. Cuadrado ABCD Congruente al Cuadrado A´B´C´D´

Fuente: Elaboración Propia

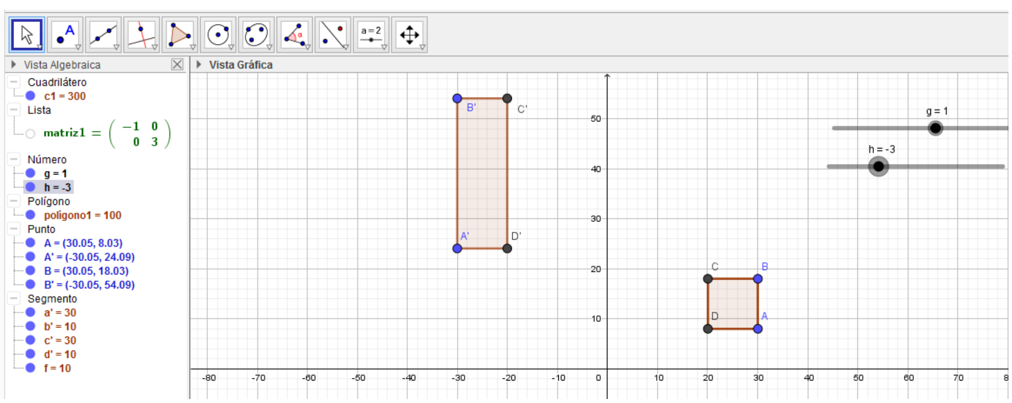

Figura 17. Rectángulo A´B´C´D´

Fuente: Elaboración Propia

Cuando $-1 < h < 1$. la altura del rectángulo es menor que la altura del cuadrado original. Si cambia la altura del rectángulo, también cambia el valor de área del rectángulo A´B´C´D´ es menor que el área del cuadrado ABCD, lo anterior se muestra en la figura 18, en donde se muestra que el área del cuadrado es igual a 100 y del rectángulo es igual a 50.

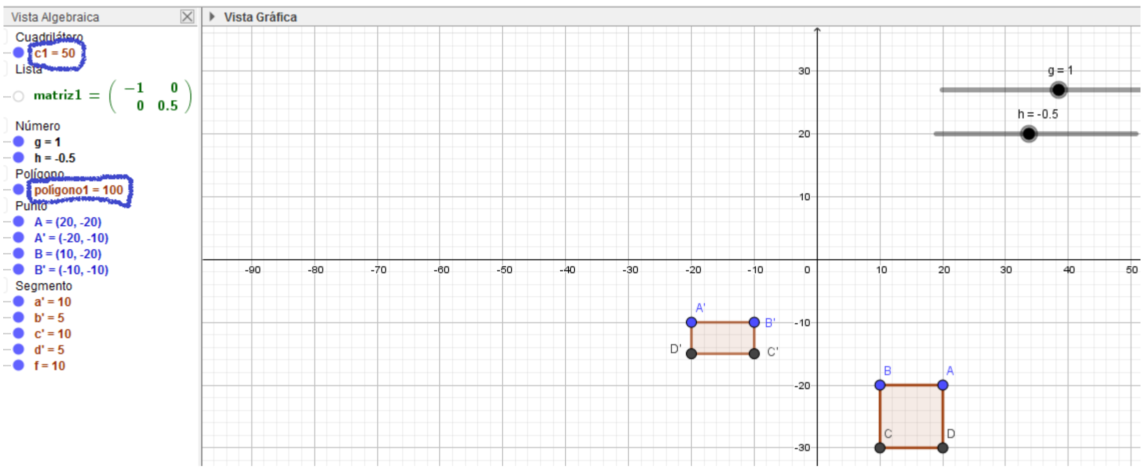

Figura 18. Área del Rectángulo A´B´C´D´ Mitad del Área del Cuadrado ABCD

Fuente: Elaboración Propia

Cuando la altura del rectángulo A´B´C´D´ es más grande que la altura del cuadrado ABCD, su área también aumenta y es mayor que el área del cuadrado ABCD, el valor del área del rectángulo generado será el valor del deslizador h multiplicado por el valor del área del cuadrado. Es decir que si por ejemplo el área del cuadrado es 400, y el valor de $h = 3$, el área del rectángulo es igual a 1200.

Cuando los deslizadores tienen el mismo valor, los dos polígonos son dos cuadrados semejantes, no son congruentes y no tienen la misma área, excepto cuando los dos deslizadores toman los valores de -1 y 1.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

En la exploración de esta matriz de transformación se realiza una descripción del efecto de los dos deslizadores sobre el polígono generado, la descripción de lo que genera el aplicar la matriz con dos deslizadores ha sucedido cuando $g \neq h$, ahora se hace una exploración y descripción del efecto de los deslizadores cuando $g = h$ en el intervalo propuesto, él establecer y distinguir el efecto que tienen éstos en el polígono generado también hace parte del nivel general de lo propuesto por Freudenthal.

Cuando los deslizadores tienen el valor de -2.5, los dos cuadrados son diferentes, el cuadrado generado A´B´C´D´ tiene mayor área que el cuadrado ABCD, como se aprecia en la figura 19, los dos cuadrados son diferentes, porque los valores de cada uno de los deslizadores multiplican a cada punto del cuadrado ABCD cuyo resultado generan los puntos del cuadrado A´B´C´D´.

Si los deslizadores tienen el mismo valor dentro del intervalo, excepto 1 y -1, el cuadrado A´B´C´D´ que surge al aplicar la matriz de transformación al cuadrado ABCD es diferente, tiene mayor o menor área que el cuadrado original.

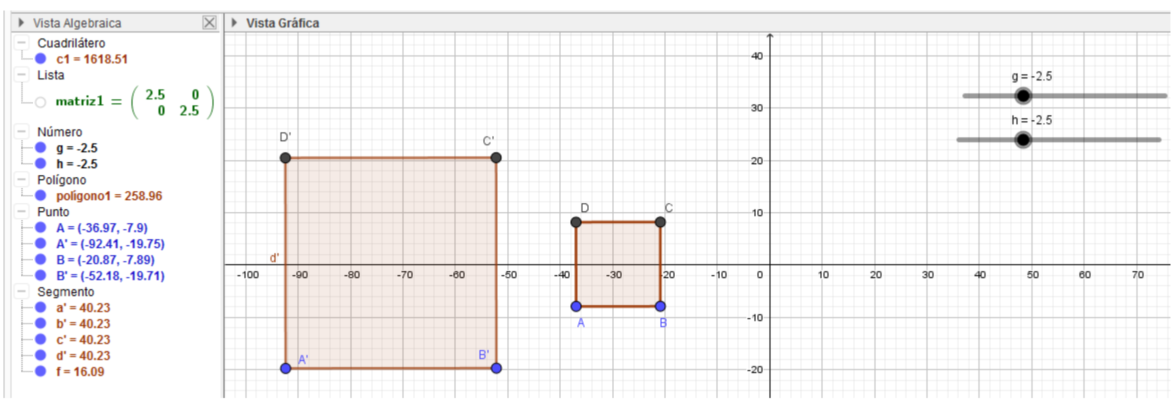

Figura 19. Cuadrado A´B´C´D´ Mayor que el Cuadrado ABCD

Fuente: Elaboración Propia

Se concluye que el efecto que tiene esta matriz en el polígono, es generar otro polígono congruente y simétrico con respecto al origen, además el efecto que realizan los dos deslizadores dentro de la matriz es aumentar y disminuir la base y altura del cuadrado, así como los lados de cualquier figura geométrica al que se quiera aplicar.

5.4.5 Exploración Transformación 5

Ahora se analizara la transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$

La matriz asociada a la transformación es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y se aplica al triángulo ABC generando el triángulo A´B´C´, el cuál es semejante con el triángulo inicial. Aquí se hace una importante exploración, reflexión y descubrimiento sobre el efecto de la matriz, todas éstas hacen parte del nivel general y formal de la matematización.

Al desplazar y mover uno de los vértices del triángulo ABC hacia la derecha sobre el eje x, el triángulo A´B´C´ se desplaza diagonalmente con respecto al eje cartesiano, alejándose cada vez más del origen, como se puede apreciar en la figura 20.

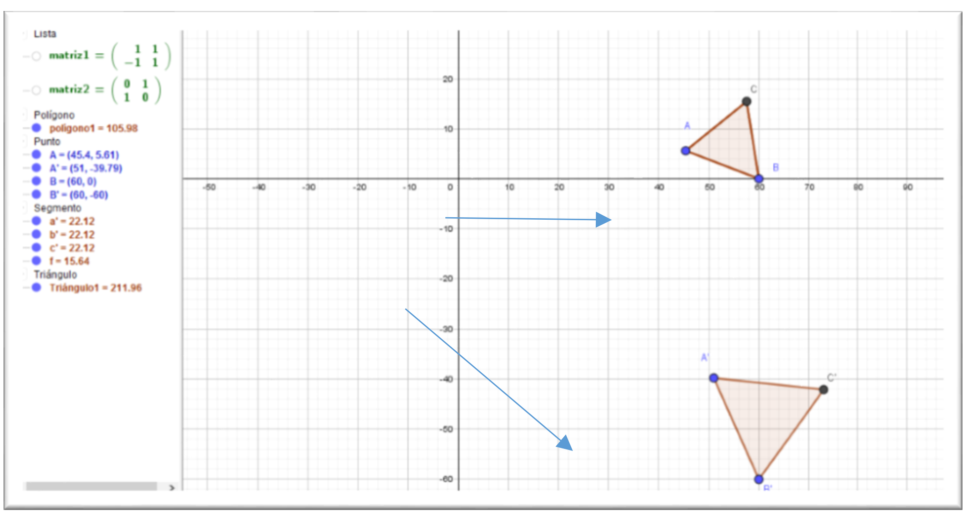

Figura 20. Movimiento del Triángulo A´B´C´

Fuente: Elaboración Propia

Cada vez que se aleja cualquier vértice del triángulo ABC (azul) que se mueve sobre el eje x positivo o negativo, se encuentra con el triángulo generado A´B´C´ (rojo) en algún punto, el único momento donde los triángulos encuentran es cuando el triángulo ABC se dirige y se aproxime al origen, es decir en el punto (0,0) como se evidencia en la figura 21.

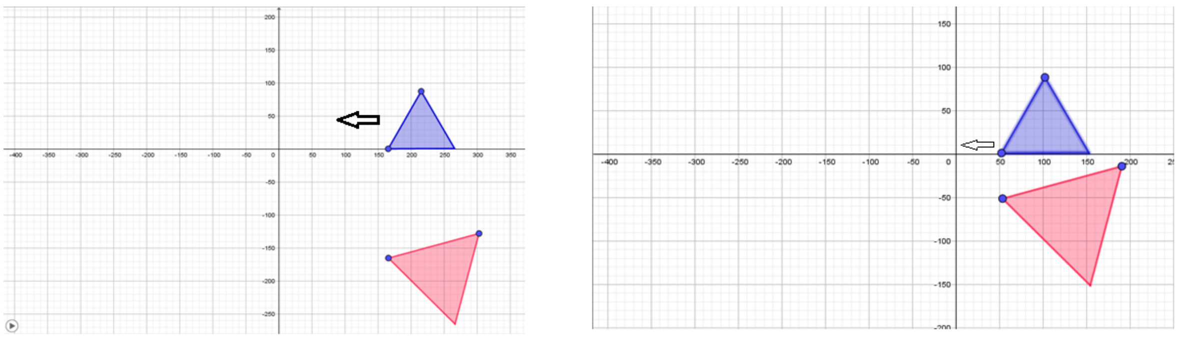

Figura 21. Desplazamiento del Triángulo Azul Hacia el Origen

Fuente: Elaboración Propia

En las exploraciones de las transformaciones anteriores se presentaba la situación en donde al acercar el polígono original hacia el punto donde se interceptan el eje de las abscisas y las ordenadas (origen), el polígono generado por la matriz también se desplaza hacia ese punto.

Si uno de los vértices del triángulo ABC se desplaza ahora sobre el eje positivo de las ordenadas con dirección hacia el origen, el triángulo A´B´C´ hace un movimiento diagonal hacia la derecha, como se aprecia en la figura 22. Si el vértice se desplaza sobre el eje negativo de las ordenadas el triángulo A´B´C´ se mueve diagonalmente desde el cuarto cuadrante del plano cartesiano hasta el segundo cuadrante.

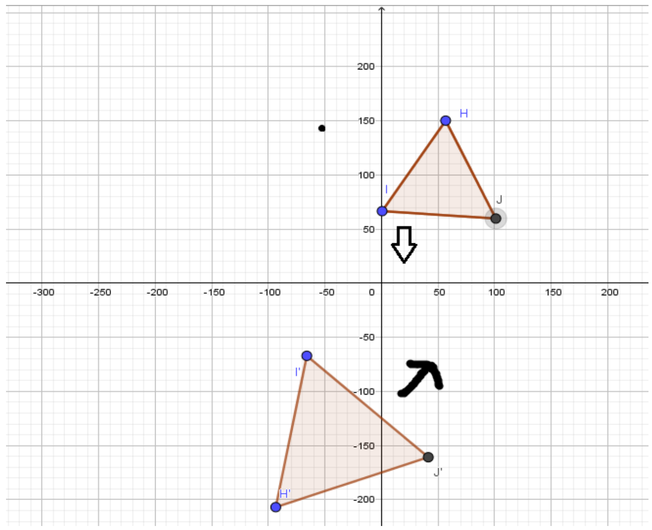

Figura 22. Desplazamiento del Triángulo A´B´C´

Fuente: Elaboración Propia

Teniendo en cuenta que, al explorar la incidencia de esta matriz de transformación sobre el triángulo ABC, surgen algunas preguntas que son resueltas más adelante en la exploración de esta matriz, tales como: ¿Por qué cuando el triángulo ABC o alguno de sus vértices se dirigen y desplazan hacia el origen, aparece y se visualiza también el triángulo A´B´C´ en ese mismo punto? ¿Será que importa que suceda o no, en una transformación lineal?

Estas preguntas son importantes porque proporciona elementos que caracterizan a las matrices y transformaciones, y su repuesta son muy importantes para este trabajo.

Cuando se afirma que uno de los vértices del triángulo ABC se encuentra sobre el eje x y se desplaza sobre el mismo, (ver figura 20) el vértice y punto B del triángulo ABC tiene como coordenada B= (60,0) que se muestra en la parte superior izquierda de la vista algebraica en geogebra. Si el punto B se mueve sobre el eje de las abscisas, el valor de la ordenada del vértice B del triángulo ABC siempre será igual a cero.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Si no se había mencionado antes la palabra ni el número cero en las otras matrices de transformación, no significa que tengan poca importancia, al contrario, el cero tiene una trascendencia e importancia dentro de las transformaciones lineales, la cual se destacará en esta etapa del trabajo.

Cuando se examinó esta transformación, como se observa en la figura 19, el vértice A se encuentra sobre el eje de las abscisas, tiene como coordenada (60,0) y el vértice A´ que surge de haber aplicado la matriz de transformación al triángulo ABC, tiene como coordenada (60,-60).

Es decir que la matriz transforma la coordenada (60,0) en la coordenada $(60,-60)$. Entonces con la exploración hecha en geogebra se identifica y se descubre que el efecto que tiene la matriz en la coordenada (60,0) donde el cero es el segundo componente es generar otra coordenada cuya abscisa es la misma pero su ordenada es el inverso aditivo de la abscisa.

Se representa el efecto de la matriz como la aplicación de una función que incide en la pareja ordenada, como se había mencionado anteriormente. Se puede expresar el efecto que realiza la matriz de transformación en la coordenada (60,0) con una notación de una función T, expresada como: $T(60,0) = (60,-60)$

Estas ideas y reflexiones surgen a partir de la exploración en geogebra sobre las representaciones, modelos y esquemas de las transformaciones lineales y que hacen parte del nivel referencial de matematización, donde estas ideas y descubrimientos no se logran visualizar a simple vista, que están presentes, pero no se pueden reconocer ni identificar sin la interacción con el programa. Es por medio de esta exploración donde al proponer esta estrategia de abordaje de identificar y reconocer el efecto que genera la matriz de transformación en un vértice del polígono, en este caso un triángulo que se encuentra en algún punto del eje de las abscisas.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Igualmente dar una notación a través del uso de coordenadas cartesianas el cual registra el mismo efecto que tiene la matriz, es decir que se ha establecido dos registros, tanto el matricial con una matriz de *2x2* como el propuesto con coordenadas cartesianas. Por eso estos descubrimientos de la exploración hacen parte del nivel referencial pasando al nivel general de matematización.

Al tomar cualquier punto a que pertenezca al eje de las abscisas, el punto a tiene como coordenada $(a, 0)$, donde aplicándole la matriz de transformación surge otra coordenada teniendo nuevamente a $a\ como\ abcisa$ y su inverso aditivo $-a$ como ordenada

$T(a, 0) = (a, -a)$

Se identifica que el efecto que tiene esta matriz de transformación en su notación matricial y como arreglo de columnas y de filas de *2x2* es el mismo si se denota como una función T en R^2, el efecto de esta matriz sucede siempre y cuando la ordenada sea igual a 0. Es una importante distinguir en la transformación, lo que sucede cuando ésta hace efecto en una coordenada cartesiana donde $b \neq 0$, y $b = 0$.

$T(a, 0) = (a + 0, 0 - a) = (a, -a)$

Explorando y moviendo los triángulos en el programa geogebra, se visualiza y descubre nuevas ideas muy importantes que recogen los abordajes, las exploraciones anteriores, que enlaza el nivel referencial con el general y formal de la sistematización, que muestra una conexión entre los abordajes y las exploraciones hechas hasta ahora, a través de las matrices aplicadas a los polígonos con la representación con la notación gráfica más usual de la función lineal.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Si se toma ahora no uno, sino dos vértices del triángulo ABC sobre alguno de los ejes del plano cartesiano, primero sobre el eje x, si el vértice A y B se desplazan sobre el eje de las abscisa, el triángulo A´B´C´ realiza también un desplazamiento, para tener una visualización diferente y más detallada del efecto y el moviendo del triángulo generado A´B´C´ se propone activar el rastro del desplazamiento del vértice A´ y B´, el cual está registrado en la figura 23 y 24 al mover el triángulo ABC sobre el eje x.

Lo que se observa es que los vértices A´ y B´ del triángulo A´B´C´ hacen el trazado de una línea recta que pasa por el origen. Cuando se había dicho anteriormente que al desplazar uno de los vértices del triángulo ABC (azul) hacia la izquierda o derecha sobre el eje x, (ver figura 20 y 21) el triángulo A´B´C´ (rojo) se desplaza diagonalmente desde el cuarto cuadrante del plano cartesiano, pasando por el origen hasta el segundo cuadrante.

Gracias a la activación del rastro del movimiento del triángulo A´B´C´ se pude visualizar lo que en verdad sucede con este triángulo, el triángulo A´B´C´ está haciendo el trazado y recorrido de la recta $y = -x$, como se observa en la figura 23 y 24.

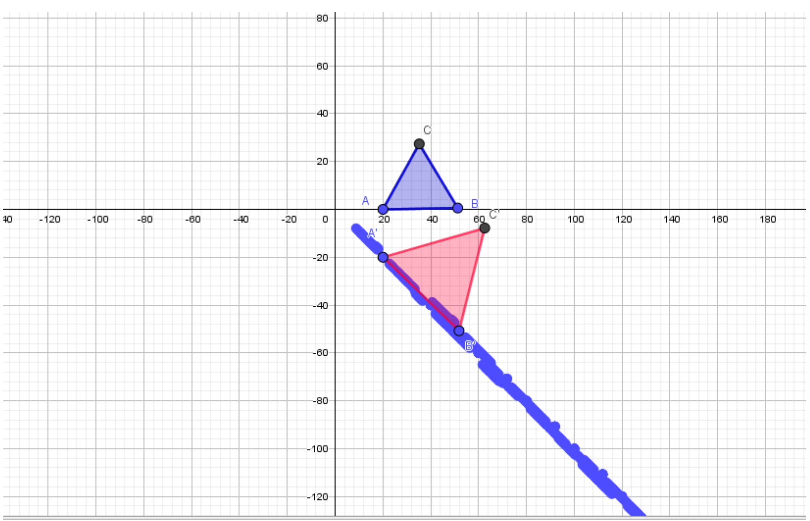

Figura 23. Inicio del Trazado de la recta por el Triángulo A´B´C´

Fuente*:* Elaboración Propia

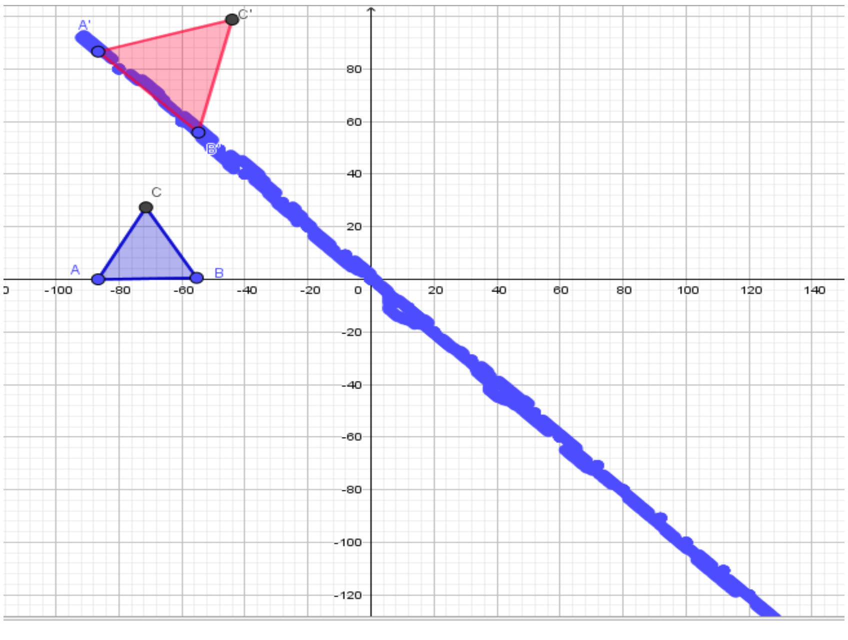

Figura 24. Trazado de la Recta Hecha por el Triángulo A´B´C´

Fuente: Elaboración Propia

Al desplazar ahora los dos vértices del triángulo ABC sobre el eje y, el triángulo A´B´C´ realiza el trazo de la gráfica $y = x$, como se observa en la figura 25, el desplazamiento que tiene el triángulo por todo el eje positivo y negativo de las ordenadas no solo genera el movimiento del triángulo A´B´C´ desde el tercer al primer cuadrante del plano cartesiano, sino que el triángulo A´B´C´ describe el trazado de la función identidad, el cual representa la gráfica de la función lineal.

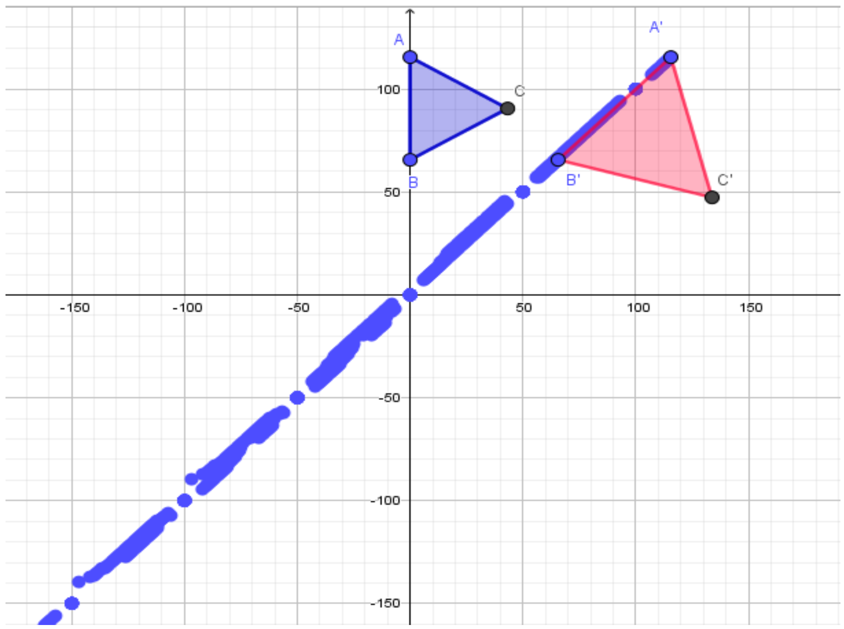

Figura 25. Trazado de la recta $y = x$ Hecha por el Triángulo A´B´C´

Fuente: Elaboración Propia

Al hacer la exploración con las transformaciones y los triángulos, moviéndolos de un lado a otro sin activar ningún rastro de alguno de sus vértices, si se afirma que ahí se presenta una función lineal, cualquier persona podría dudar o cuestionar esa afirmación porque en ningún momento observa la representación y definición tradicional de este concepto matemático, como una línea recta que pasa por el origen. Sin embargo, se ha descubierto que, sí está presente la línea recta, y esta oculta y no se visualiza inmediatamente.

5.4.6 Exploración Transformación 6

Ahora se analizara la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x - y \end{pmatrix}$

La matriz asociada a la transformación es $\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -1 - 1 \end{pmatrix}$ la cual se aplica al triángulo HIJ generando el triángulo semejante H´I´J´. Como se había dicho en el análisis de la matriz anterior, si se desplaza uno o dos de los vértices del triángulo original sobre el eje de las abscisas, el triángulo generado realiza el trazo de una línea recta que pasa por el origen.

Con el triángulo HIJ y el triángulo H´I´J´ sucede de la misma manera, al mover el triángulo HIJ sobre el eje x, el triángulo H´I´J´ realizar el trazado de la línea recta $y = -x$, ahora si se desplaza el triángulo HIJ sobre el eje de las ordenadas, el triángulo H´I´J´ realiza la representación de la línea recta $y = x$, como se aprecia en la figura 26.

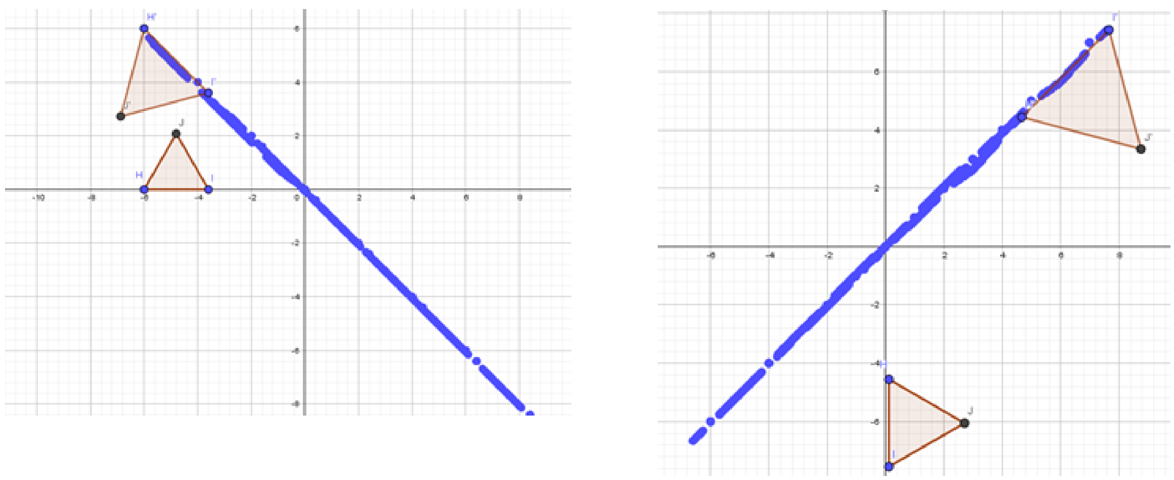

Figura 26. Trazado del Triángulo A´B´C´ de la Recta de la Función Identidad

Fuente*:* Elaboración Propia

Se proponen dos deslizadores *p* y *w* para evidenciar mucho más lo que sucede con los dos triángulos. Los deslizadores están en el intervalo $(-6,6)$. Si se deja el deslizador en $w = 1$ y el deslizador p $1 < p \leq 6$, el triángulo H´I´J´ tiene mayor área que el triángulo HIJ.

Cuando *p=1* y *w=1*, el triángulo H´I´J´ es equilátero, si $p \neq 1$ y $w \neq 1$, el triángulo H´I´J´ es escaleno, como se muestra en la figura 27.

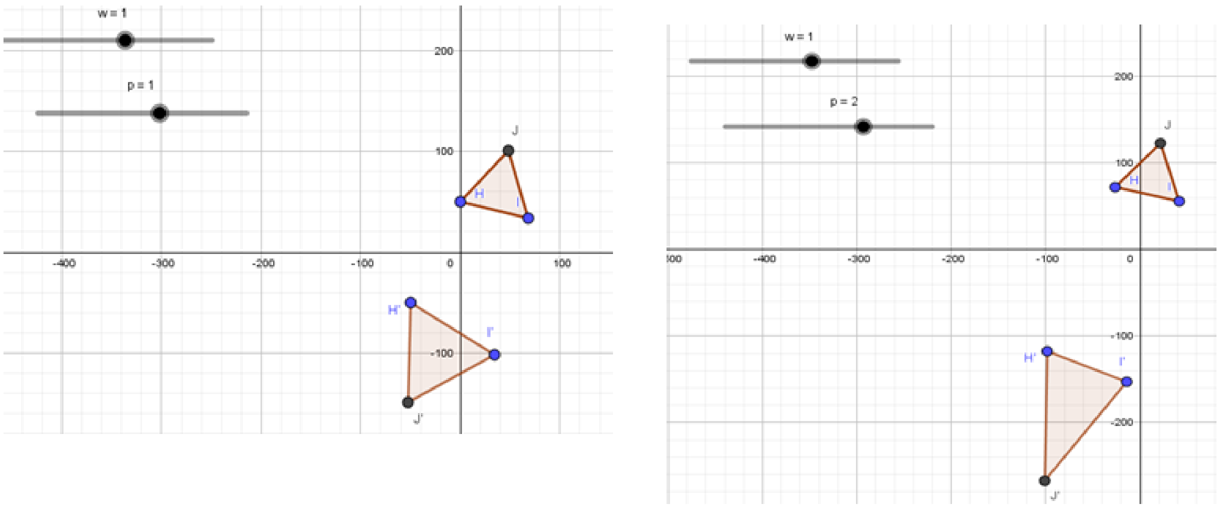

Figura 27. Triángulo Equilátero H´I´J´ se Convierte en Escaleno

Fuente: Sánchez F. A., 2018

Ahora cuando el deslizador $-1 < p < 1$ el lado H´J´ del triángulo H´I´J´ cambia de tamaño y disminuye su longitud, cada vez que el valor del deslizador p disminuye y se aproxima a -1, como se observa en la figura 28. Se presenta la relación entre el efecto que tiene en el triángulo generado al tomar diferentes valores dentro del intervalo, además de establecer en él una generalización que pertenece al nivel general de sistematización porque a través de los dos deslizadores se identifica las modificaciones y cambios que realiza la matriz de transformación en el triángulo H´I´J´.

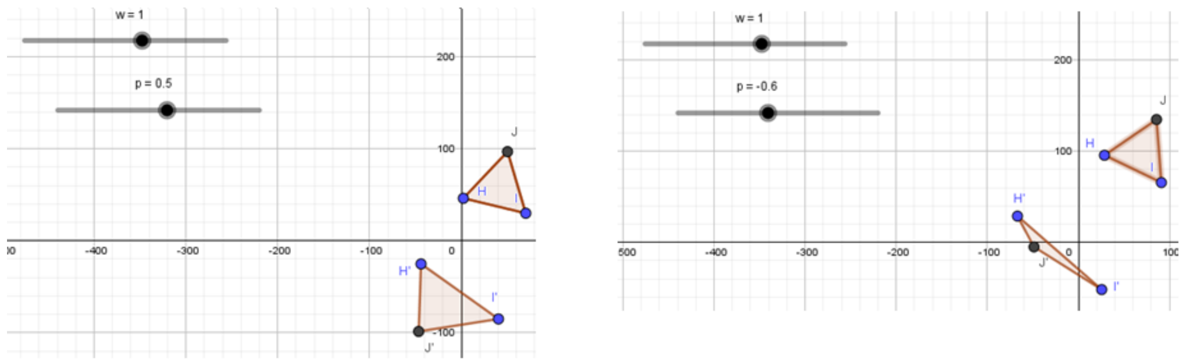

Figura 28. Cambio de la Longitud del Triángulo H´I´J´

Fuente*:* Elaboración Propia

Cuando el deslizador $p = -1$, el triángulo H´I´J´ se transforma en un segmento de línea recta, como se muestra en la figura 29, la conversión del triángulo a un segmento hace parte también de la exploración e interacción en geogebra, que en muy pocas ocasiones, documentos y libros se contempla o se aborda este tópico en el álgebra, porque solo es posible visualizar esto por medio del software de geometría dinámica.

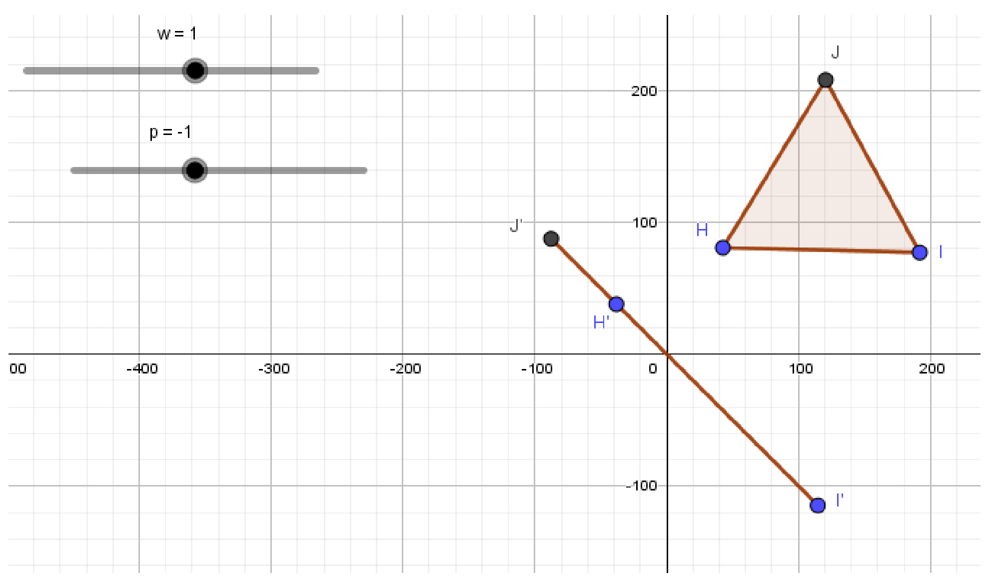

Figura 29. Conversión del Triángulo H´I´J en un Segmento de Línea Recta

Fuente: Elaboración Propia

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Para que el triángulo se haya convertido en un segmento, tiene que haber unas condiciones o características especiales dentro de la matriz. El descubrir e identificar las condiciones para que esto suceda, hace parte también del nivel general de sistematización porque se establece una conexión y una relación entre la exploración hechas de las transformaciones lineales y la función lineal, al hacer las exploraciones se generó una visualización de una línea recta que pasa por el origen, que es precisamente una representación de una función lineal, más adelante se abordará esas condiciones de la matriz.

Igual sucede al mover el deslizador p dentro del intervalo, el triángulo H´I´J´ se desplaza verticalmente y la ubicación de las ordenadas de los vértices cambian y toman diferentes valores, mientras que las abscisas conservan el mismo valor. Como se muestra en la figura 30, el deslizador toma $p = -1.7\ y\ p = 1.4$ los vértices H´, I´ y J´ cambian de valor las ordenadas, cambiando la forma del triángulo, mientras que el valor de las abscisas de los vértices son iguales.

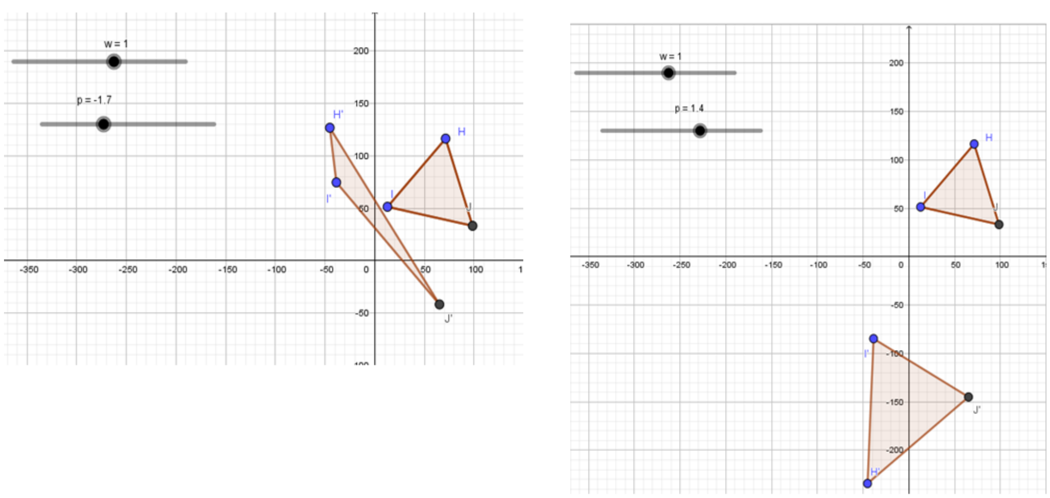

Figura 30. Cambio de las ordenadas de los Vértices del Triángulo H´I´J´

Fuente*:* Elaboración Propia

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Lo anterior da elementos para afirmar que la matriz de transformación junto con los deslizadores modifican los tres lados del triángulo H´I´J´, pero teniendo en cuenta que el deslizador p hace que existan múltiples valores en las ordenadas, manteniendo siempre el valor de las abscisas, mientras que al utilizar y mover el deslizador w ocurre lo opuesto; el triángulo cambia de tamaño manteniendo el mismo valor para las ordenadas y teniendo diversos valores para las abscisas.

5.4.7 Exploración Transformación 7

Se analizará la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

La matriz de transformación es $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ la cual se aplica al triángulo ABC, el cual genera el triángulo A´B´C´ que es congruente con el triángulo ABC, para visualizar el efecto de la matriz se define el deslizador $\theta\ que\ es\ un\ \acute{a}ngulo\ que\ esta\ entre\ 0\ a\ 180°$, la figura 31 evidencia lo que sucede con el triángulo A´B´C´ si el $\acute{a}ngulo\ \theta > 0$, el efecto de la transformación es una rotación, cuando el deslizador $\theta = 10°\ y\ \theta = 46°$. El triángulo generado va rotando en sentido contrario al de las manecillas del reloj, hasta hacer el recorrido completo de la rotación, en la figura 32, se ve cuando $\theta = 134°\ y\ \theta = 220°$, hasta que finalmente el triángulo generado quede sobrepuesto al triángulo original.

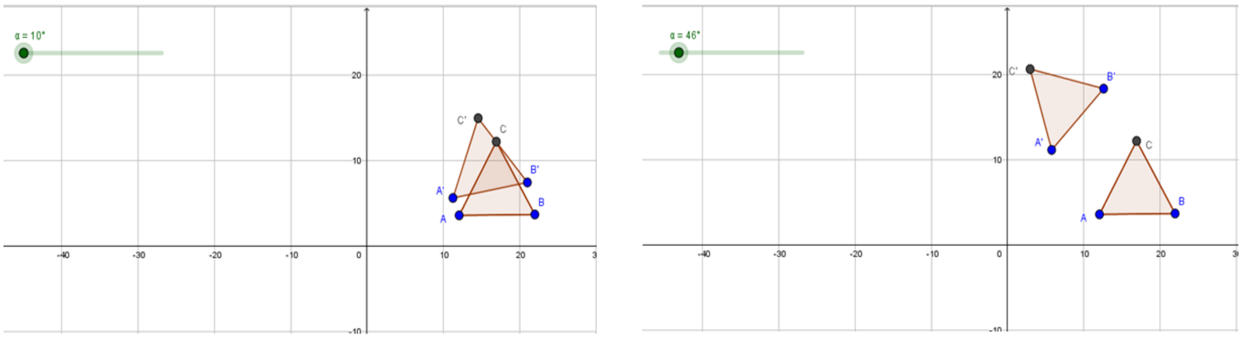

Figura 31. Rotación del Triángulo A´B´C´ si $0 < \theta < 90°$

Fuente: Elaboración Propia

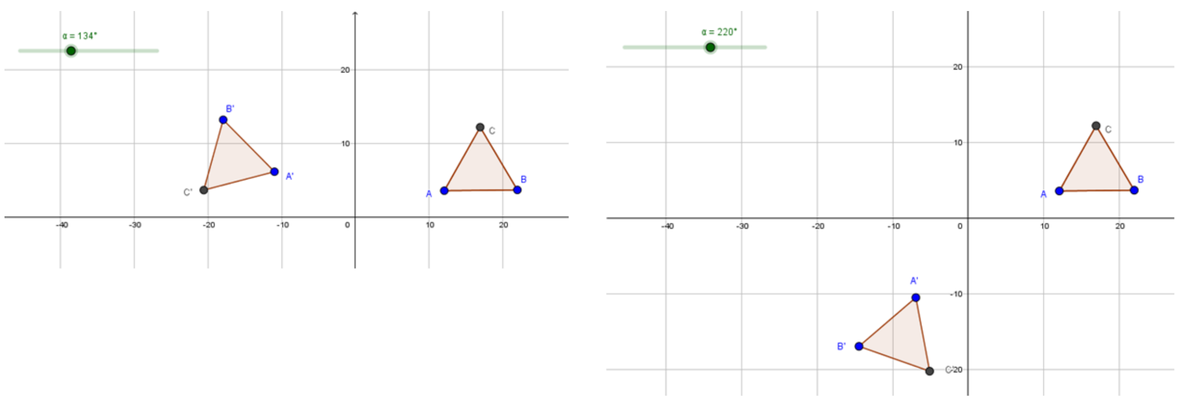

Figura 32: Rotación del Triángulo A´B´C´ si $90° < \theta < 360°$

Fuente*:* Elaboración Propia

Es importante resaltar que existen diferentes tipos de transformaciones lineales, en esta sistematización se hace énfasis en transformaciones registradas en las coordenadas rectangulares y en el plano cartesiano, sin desmeritar las otras representaciones. En esta última matriz se exploró una matriz diferente a las vistas anteriormente.

5.5 Determinante de la matriz en la sistematización

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2 x 2. Entonces se define

Determinante de A=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

El cual se denota por det A.

De acuerdo a lo dicho anteriormente, esta sistematización quiere identificar cuáles son las condiciones y requisitos que debe presentar una matriz de transformación, para que convierta cualquier polígono o figura generada en una línea recta. Para eso se presenta esta transformación:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Al aplicar la matriz de transformación $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ al triángulo ABC generando el triángulo semejante A´B´C´. Se pretende visualizar lo que sucede con el determinante de la matriz al igual que con el triángulo generado A´B´C´, para eso se proponen el deslizador *a*, el cual se ubicará en la fila uno y en la columna uno; y el deslizador *b* el cual se ubicará en la fila dos y en la columna dos, obteniendo la matriz de transformación $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ los dos deslizadores toman valores del intervalo $[-10,10]$.

Cuando $a = 2\ y\ b = -2$, se genera la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en donde el triángulo generado se ha expandido y es mayor que el triángulo ABC, como se muestra en la figura 33. El determinante de la matriz es $(2)(-2) - (-1)(1) = -4 + 1 = -3$, es decir que el determinante es menor que cero. Al examinar el determinante, el efecto de la matriz se mantiene y no cambia

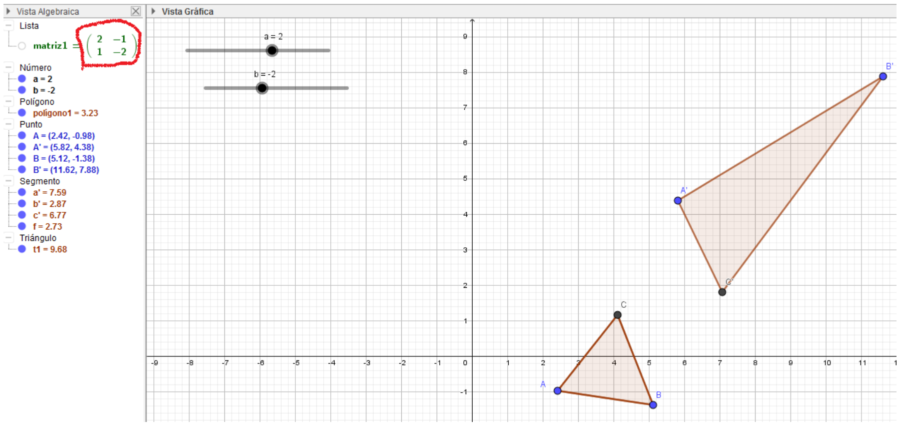

Figura 33. Triángulo A´B´C´ de Mayor Longitud que el Triángulo ABC

***Fuente**:* Elaboración Propia

Ahora si $a = 2$ y $b = -1$ se tiene la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ el triángulo A´B´C´ se ha contraído más que el triángulo generado de la matriz anterior, como se evidencia en la figura 34. El determinante de la matriz es $(2)(-1) - (1)(-1) = -1$

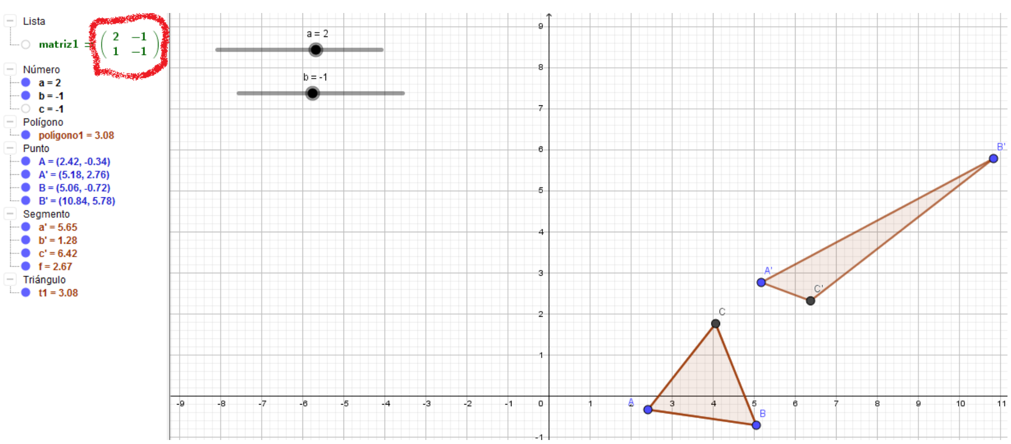

Figura 34. Triángulo A´B´C´ alargado

Fuente: Elaboración Propia

Ahora cuando $a = 2$ y $b = 0.5$ se tiene la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$, el triángulo A´B´C´ se ha transformado en un segmento de línea recta, como se observa en la figura 35. El determinante de la matriz es $(2)(-0.5)-(-1)(1) = -1+1 = 0$. Si se mantiene el valor del deslizador $a = 2$ y si el deslizador $b > 0.5$ el determinante de la matriz es mayor que cero.

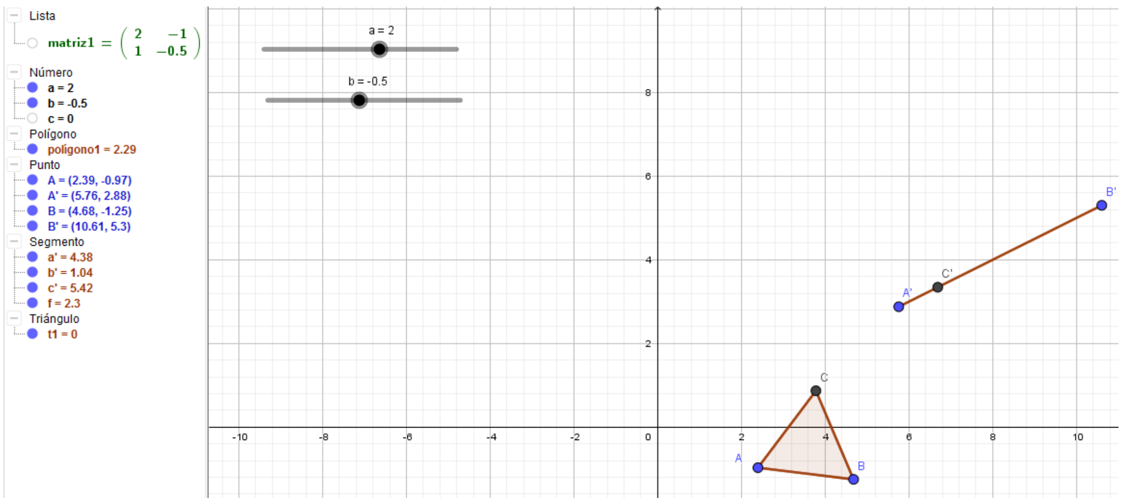

Figura 35. Transformación del Triángulo A´B´C´ en un Segmento de Línea Recta

***Fuente**:* Elaboración Propia

5.6 Signo del Determinante

Como parte del trabajo realizado en la exploración de las matrices, es importante distinguir y reconocer dentro de la matriz, el determinante. Al igual reconocer el efecto de la matriz de transformación en el polígono generado cuando el determinante es igual, menor y mayor que cero. Cuando el signo del determinante es mayor que cero los lados A´C´ y C´B´ del triángulo A´B´C´ aumentan su longitud y a la vez el triángulo se aleja y desplaza, como se muestra en la figura 36. Esto ocurre si el deslizador $a = 1\ y\ b > 1$ y sus valores van aumentando y cambiando cada vez más.

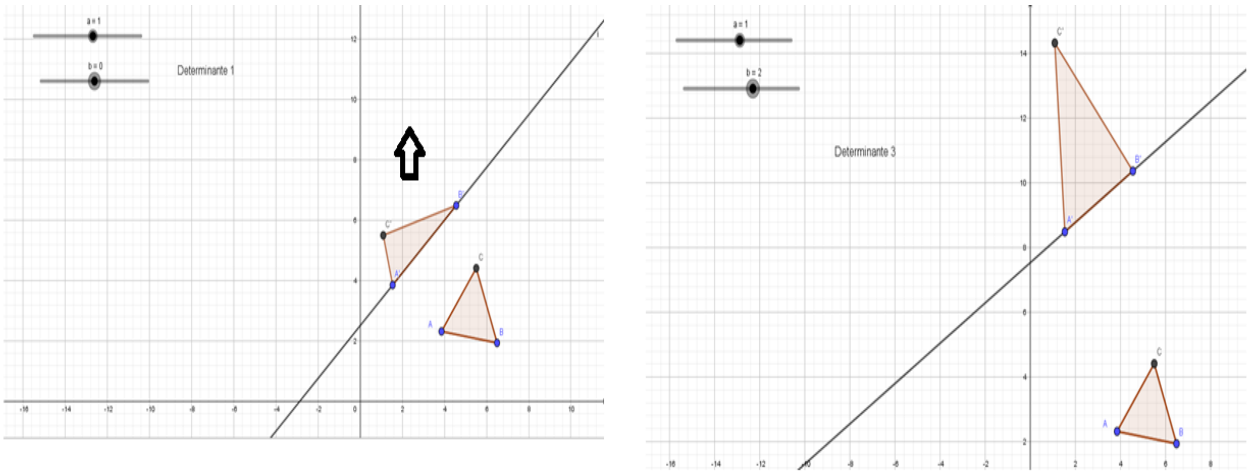

Figura 36. Aumento de la Longitud del Triángulo A´B´C´

Fuente: Elaboración Propia

Se visualiza que el valor de las abscisas de las coordenadas de los puntos A´ y B´ se mantienen igual. Cuando el valor del determinante es 101 el valor del deslizador $a = -10, b = -10$ y es el máximo valor que puede tomar el determinante en el intervalo $[-10,10]$, al igual es el mayor tamaño que puede tener el triángulo generado, como se observa en la figura 37, el polígono generado se ha invertido y expandido con respecto al triángulo original ABC.

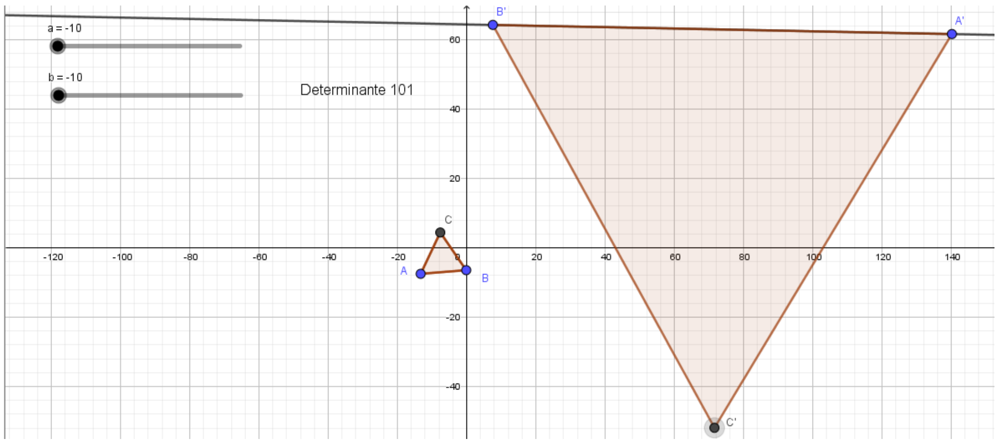

Figura 37. Triángulo A´B´C´ de Mayor Longitud al Triángulo ABC

Fuente: Elaboración Propia

Si los valores de los dos deslizadores son iguales, el determinante es mayor que cero. También cuando $a = 0\ y\ b \geq 0$ o viceversa, el determinante es positivo y siempre tendrá el valor de 1. Es decir que, para que el determinante de esta matriz sea igual a 1, es necesario que uno de los dos deslizadores sea igual a cero, sin importar que valor tenga el otro deslizador.

Para que el determinante sea menor que cero, los valores de los deslizadores $a\ y\ b$ deben ser opuestos, es decir deben tener signos diferentes. Si el determinante $ad - bc > 0$ se debe cumplir que $ad > bc$ y si el determinante $ad - bc < 0$ entonces $ad < bc$.

5.7 Determinante Cero

Anteriormente se ha identificado las condiciones para que el signo del determinante sea mayor o menor que cero. Ahora se desea conocer las características que debe tener la matriz de transformación para que el determinante sea igual a cero. La razón por la que se desea conocer, es porque existe una relación estrecha entre la matriz de transformación cuando su determinante es cero, con la representación algebraica de la ecuación de la función lineal.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Esta relación está enmarcada dentro del nivel general y formal de matematización porque son elementos nuevos que surgen como producto de la estrategia de exploración de las transformaciones lineales en el programa Geogebra.

Se tiene la transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + y \\ -x - yh \end{pmatrix}$ cuya matriz de transformación es $\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & -h \end{pmatrix}$ donde *k* y *h* son dos variables que se encuentran en el intervalo $[-10,10]$, se desea conocer la relación entre las variables, lo que implica examinar detenidamente los distintos valores de $k\ y\ h$ para que el determinante sea igual a cero.

Cuando $k = 2\ y\ h = -0.5$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ el determinante es $2(-1/2) - 1(-1) = -1 + 1 = 0$. En la figura 38 se muestra como el cuadrado D´E´G´F´ se transforma en el segmento de recta E´G´. Se puede tener cualquier polígono o figura de *n-lados* al aplicar la matriz de transformación, y el determinante sea siempre igual a cero, la figura generada se transforma en una línea recta que pasa por el origen.

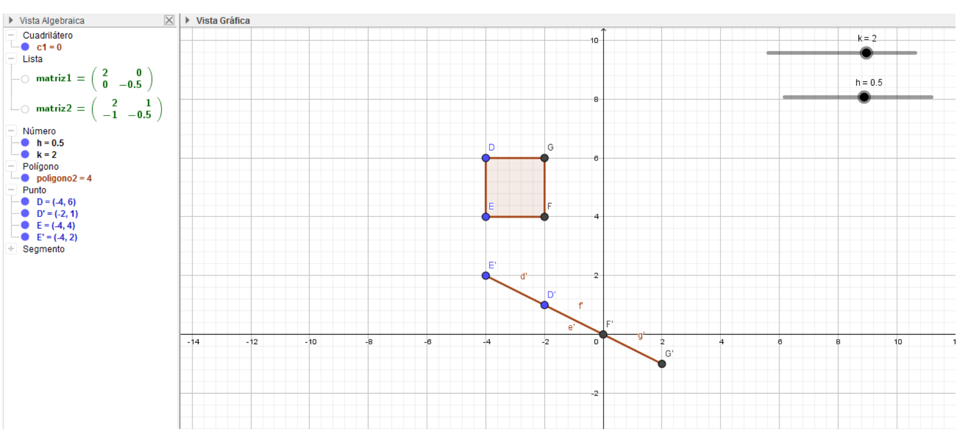

Figura 38. Conversión del Cuadrado D´E´G´F´ en un Segmento de Línea Recta

Fuente: Elaboración Propia

En esta matriz existen distintos valores de los deslizadores dentro del intervalo en los que el determinante es cero. Como se evidencia en la figura 39, si $k = 10 \; y \; h = {}^{1}/_{10}$ el cuadrado nuevamente se convierte en un segmento, con la matriz $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -{}^{1}/_{10} \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $(10)(-{}^{1}/_{10}) - (1)(-1) = -1 + 1 = 0$.

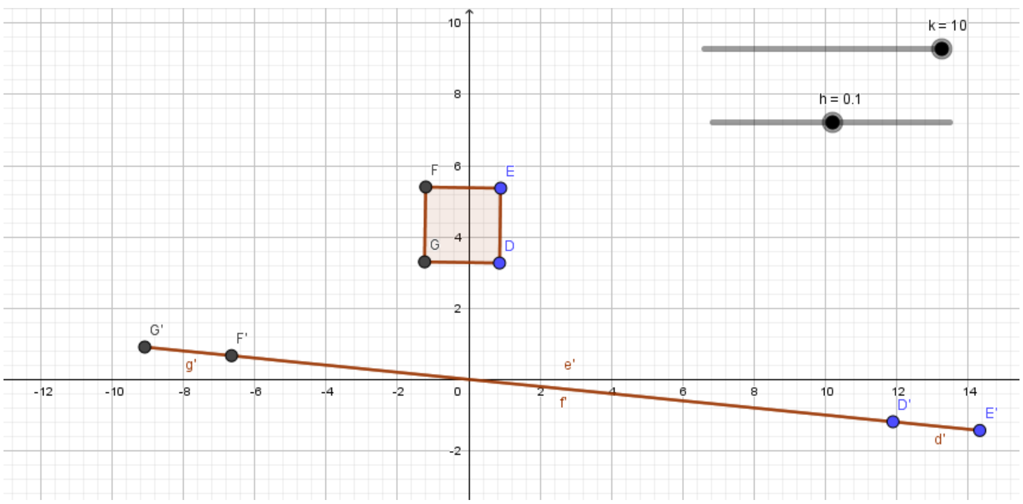

Figura 39. Valores de los Deslizadores para que el Determinante Sea Igual a 0.

Fuente: Elaboración Propia

Al establecer casos particulares, es importante conocer la condición general de los deslizadores en esta matriz de transformación para que el determinante sea cero.

Retomando la matriz de transformación $\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & -h \end{pmatrix}$, si se sabe que el determinante debe ser cero, entonces: $(k)(-h) - (1)(-1) = 0$, que equivale a decir que: $(k)(-h) = -1$. Significa que para que esta matriz , el determinante sea igual a cero, el producto entre los deslizadores *k* y *h* debe ser igual a -1, o que $k = {}^{1}/_{h}$

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Lo anterior hace parte del nivel general de sistematización porque, a partir de casos particulares, se identifica para que valores de los deslizadores el determinante es cero, luego se plantea la generalización y se identifica las condiciones que debe cumplir para cualquier valor *k y h*.

Ahora, que pasa con cualquier matriz de transformación en R^2, el cual tiene la estructura
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Como se había afirmado anteriormente para que una matriz de transformación aplicada en algún polígono convierta al polígono generado en una línea recta, el determinante $ad - bc = 0$ implica que $ad = bc$. Esta igualdad genera la proporción entre a, b y c, d, expresándose como:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ó $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Para identificar si el determinante de una matriz de transformación de $2x2$, es cero, el producto entre ad debe *ser múltiplo* de b y c , además el producto entre bc debe *ser múltiplo* de a y b.

Esta misma proporción que se presenta cuando el determinante es cero, existe en la pendiente de la ecuación de la función lineal $y = mx$ donde *m*, se expresa como el cociente entre las diferencia entre las abscisas y ordenadas. Toda transformación lineal T tiene la estructura $T = A(X)$ siendo *A* la matriz de transformación y *X* un vector columna, esta misma estructura se presenta en la ecuación $y = mx$.

Para identificar la relación y el vínculo que existe entre la matriz de la transformación cuando el determinante es cero, y la pendiente *m* de la ecuación lineal $y = mx$, se toman las coordenadas de los puntos D y E que son dos vértices del cuadrado DGEF, al aplicarle la matriz de transformación a esos puntos, se generan los puntos D´ y E´. Si las coordenadas son: D= (-4,6) y E= (-4,4) entonces al aplicarles la misma matriz de transformación

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/_{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-4) + (1)(6) \\ (-4)(-1) + (\frac{-1}{2})(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+6 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/_{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-4) + (1)(4) \\ (-1)(-4) + (\frac{-1}{2})(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con las coordenadas de los puntos $D' = (-2,1)\ y\ E' = (-4,2)$ se halla la pendiente entre estas dos parejas coordenadas:

$$m = \left(\frac{2-1}{-4-(-2)}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Está pendiente es igual a la pendiente de la recta *f* con ecuación $x + 2y = 0$ que pasa por los puntos D´ y E´ que son puntos del segmento al que ha convertido la matriz, como se evidencia en la figura 40.

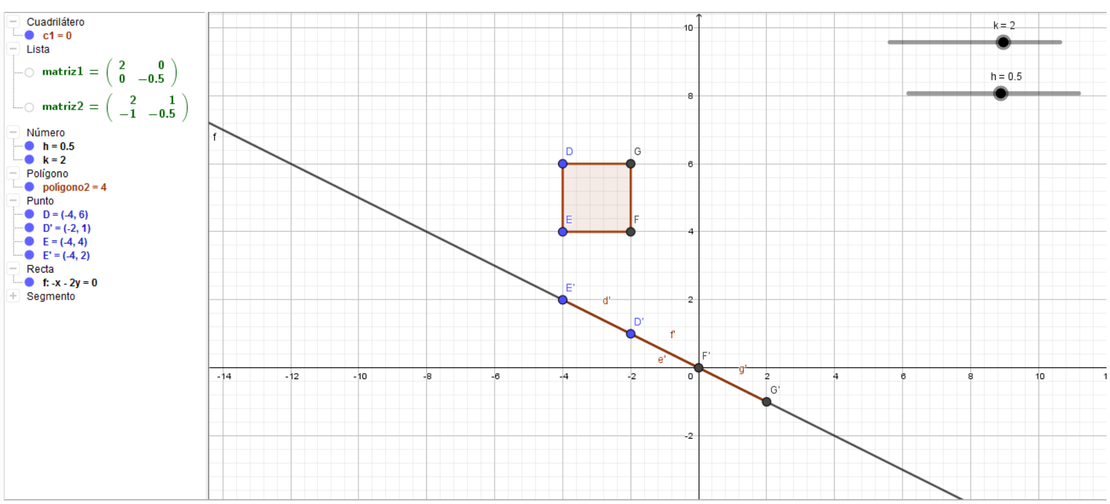

Figura 40. Recta *f* que Pasa por los Puntos del Segmento E´G´

Fuente: Elaboración Propia

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Interactuando con los elementos y valores de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ se encuentra que haciendo una razón entre dos de los elementos de la matriz, $-1/2 \div 1$ y $-1/2$ tienen la misma pendiente de la recta $x + 2y = 0$.

Entonces de manera general. La ecuación de la recta, que pasa por el segmento, se puede expresar como:

$$y = \frac{d}{b}x$$

o

$$y = \frac{c}{a}x$$

La relación entre la pendiente de la recta y la matriz de transformación es, que a partir de la matriz de trasformación cuyo determinante sea igual a cero, se puede hallar la pendiente de la recta que pasa por el segmento, sin necesidad de conocer y utilizar los valores de las abscisas y ordenadas, igualmente para todos los pares ordenados de R^2 por los que se mueva y desplace el polígono original.

Por medio de la sistematización se establece una estrategia de abordaje diferente con respecto a la pendiente de la recta que pasa por el origen, y se presenta una representación de la función lineal a través del uso de la matriz de transformación.

6. Conclusiones Generales

El desarrollo de la sistematización permitió identificar algunas cualidades y características que tienen las matrices de transformación. Algunas matrices no afectan la estructura y la forma del polígono generado con respecto al polígono original, porque a través del software de geometría se logró mover, desplazar la figura original y visualizar que se podía sobreponer una sobre la otra.

Al aplicar la matriz de transformación a un cuadrado, y teniendo en cuenta la variación de los deslizadores, se visualizó como se transformó en un rectángulo, pero fue debido a que dentro de la matriz se propuso dos deslizadores, los cuales cambiaban las dimensiones, tanto la base y la altura del polígono, mientras que, al haber un solo deslizador en la matriz, la figura generada se conservaba, e iba cambiando de tamaño, o haciéndose más grande o más pequeño.

Las matrices de transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ al que se aplicó a algunas figuras geométricas, la figura que emerge es congruente, además las dos figuras conservan la misma distancia con respecto a la recta $y = x$ y con respecto al eje de las ordenadas respectivamente. En la tercer matriz de transformación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ también el polígono generado es congruente al original, pero con la aparición del primer deslizador, la figura no se mantiene congruente con respecto a la original, salvo cuando toma el valor de 1. A pesar que el pentágono generado se dilate y se contrae, éste aún es simétrico al pentágono original con respecto al eje de las abscisas.

Con la propuesta de los dos deslizadores dentro de la cuarta matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, se identificó que, si los deslizadores tienen diferente valor, la figura generada es un rectángulo, por ende, no es igual al cuadrado.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

El rectángulo vario de tamaño al manipular un deslizador, cuando los dos deslizadores tienen el mismo valor, el polígono generado ya no es un rectángulo sino es un cuadrado con mayor área que el original.

En la quinta $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$ y sexta matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x-y \end{pmatrix}$, los triángulos generados al aplicar las matrices respectivas, no son congruentes, pero si son semejantes a los triángulos originales, gracias al arrastre y la activación del rastro del desplazamiento de los triángulos sobre el eje de las abscisas y las ordenadas se halla una conexión entre la transformación lineal y la representación tradicional de la función lineal. Sin duda es un hallazgo importante dentro de la sistematización porque se visualiza lo que sucede si la matriz de transformación tiene efecto en alguna pareja ordenada donde alguna de sus compones es igual a cero, ya que la unión de todos esos puntos donde la matriz hace efecto, forman la representación de la función lineal $y = x \; o \; y = -x$.

El identificar y encontrar las condiciones para que el polígono generado se convierta en un segmento o línea recta, valora y resalta la importancia que una matriz tenga el determinante igual a cero, ya que se reconoce una característica fundamental como es la proporción entre los elementos de la matriz, proporción que también existe en el cociente de las ordenadas y abscisas en la representación usual de la pendiente *m* en la expresión *y=mx*, además, permite conocer la pendiente de la línea recta que pasa por el segmento, sin necesidad de conocer los demás vectores que interactúan con la matriz de transformación, y porque prácticamente no se menciona en ningún libro de texto. Al contrario, se da más crédito al determinante que es diferente de cero por que cumple otras propiedades diferentes.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS LINEALES

Con las transformaciones lineales se realizó un registro de los avances y descubrimientos que se tenían, se reconoció el vínculo entre las matrices, por medio de sus propiedades con las transformaciones lineales, y luego identificar la matriz asociada a la transformación. Igualmente reconocer la función lineal, como una función que cumple con las mismas propiedades y características de una trasformación lineal.

Bajo la teoría de Freudental y su propuesta de educación matemática realista se dio forma a la idea de cambiar y dar una mirada más profunda sobre la función lineal, por medio de los niveles de la matematización vertical en donde se tomó representaciones, definiciones y conceptos de la matemática formal, que constituyen el nivel referencial en aras de encontrar y descubrir características particulares, conexiones y descubrimientos sobre ellos, y así pasar al nivel general y dar elementos para actuar con los conocimientos formales y convencionales.

A través del programa Geogebra se visualizó e identificó las características, las similitudes, y las diferencias entre cada una de las matrices de transformación. El uso de este programa de geometría dinámica permitió descubrir cualidades que están ocultas y no se pueden ver a primera vista con el solo uso de regla y compas. El poder mover, arrastrar y desplazar las figuras geométricas permite una mirada diferente y más detallada de las transformaciones lineales.

Como profesor en formación este trabajo no solo enriqueció mis conocimientos sobre tópicos que no había abordado antes, sino que me permitió también ahondar y profundizar sobre un tema tan importante como es la función lineal, conocer sus características y cualidades. Al igual que su importancia y valor dentro de la matemática, pienso que la labor de un profesor es buscar estrategias diferentes y no tradicionales, de diferentes conceptos, y este trabajo es una invitación para que se pueda abordar la enseñanza de la función lineal de una manera distinta más amplia y reflexiva.

Referencias

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Peréz S., & Zolkover, B. (2016). *Educación Matemática Realista* Bases Teóricas. *Publicación Interna del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM).* Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting Mathematics Education*: *China Lectures*, Kluwer, Dordrech, Reidel Publishing Co.

Grossman, S. I. (1998) *Álgebra Lineal.* (3a ed.) Estados Unidos: Grupo Editorial Iberoamericana.

Isaacs, Rafael., Sabogal Sonia. (2009) Aproximación al Álgebra Lineal: Un Enfoque Geométrico. Bucaramanga, Colombia. Ediciones UIS.