



**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ANÁLISIS DE PATRONES EN LA
EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA HACIENDO USO DE LA MÚSICA COMO
RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**Sol Daniela Rojas Quintana
Laura Daniela Chaves Castelblanco**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, ABRIL DE 2019**



**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ANÁLISIS DE PATRONES EN LA
EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA HACIENDO USO DE LA MÚSICA COMO
RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**Sol Daniela Rojas Quintana
Laura Daniela Chaves Castelblanco**

**Directora:
Claudia Cecilia Castro Cortés
Magister en Docencia e Investigación Universitaria**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, ABRIL DE 2019**



AGRADECIMIENTOS

En primer lugar expreso mis agradecimientos a Dios, por haberme permitido llegar hasta este momento tan importante de nuestra formación profesional. A mi padre y madre, por ser mi pilar más importante y apoyo incondicional. A mi hermana por complementar este núcleo familiar que siempre ha creído en mí y ha apoyado cada decisión que he tomado a lo largo de mi formación profesional, el estudiar esta licenciatura es el acierto más grande que he tenido en mi vida.

Agradezco a mi pareja, la persona que coincidió conmigo en esta carrera y que desde ese momento se ha convertido en mi más grande ayuda y modelo a seguir, quien ha motivado mis más grandes logros y que siempre me impulsa a ser mejor persona y mejor profesional.

Además, quiero expresar mi agradecimiento a más que mis compañeras, mis amigas Nicolle y Rous que desde el primer momento me brindaron solo enseñanzas y la mejor época de toda mi vida. Asimismo, a la persona incondicional en todas mis prácticas y más, Alejandro fue más que suerte poder aprender contigo en todo este proceso.

Asimismo, a la compañera que hizo posible esta monografía, Sol gracias por esta gran experiencia, por permitirme aprender cosas de otros campos, con tu nobleza, con tu paciencia. Todas las experiencias que nos trajo este trabajo nos ha permitido crecer y darnos cuenta del potencial que poseemos, deseo siempre tu progreso y constante mejoramiento.

Además, quiero expresar agradecimiento a la directora de esta monografía, Profesora Claudia Castro, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a nuestras sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor que ha facilitado a las mismas. Gracias por la confianza ofrecida desde que se emprendió este proyecto.

Por último, a todos los docentes y compañeros participes de nuestra formación, de nuestra labor docente y de todo lo aprendido en nuestra educación universitaria. A todos ellos debemos gran parte de nuestro proyecto, teniendo en cuenta que un trabajo de investigación es siempre fruto de ideas, proyectos y esfuerzos previos.

Daniela Chaves



MIL GRACIAS

Agradezco a Dios por brindarme esta oportunidad de estudiar, de descubrir un mundo tan increíble como el ser docente; el poder enseñar, compartir, aconsejar, inspirar, emocionar y miles de cosas que como maestra puedo realizar.

Doy gracias a mi padre por su apoyo en el transcurso de toda mi vida, por el impulso que me ha brindado día a día y por cada momento en el que me ha aconsejado. A mi madre, por sus oraciones, por su amor incondicional, por siempre motivarme a perseverar en todo lo que me he propuesto.

A mi hermano, por cada momento compartido, por aconsejarme y ayudarme en cada una de las decisiones que he tomado; por ser quien me guio para presentarme a la licenciatura en matemáticas, por sacarme una sonrisa en medio del estrés de los trabajos y el trasnocho. A mi novio y su familia, por brindarme un gran apoyo, un abrazo, un consejo y sus oraciones.

A nuestra directora de trabajo, Profesora Claudia Castro, por su apoyo incondicional en todo el proceso de este trabajo, su tiempo y por aprender con nosotras y apoyarnos para sacar este proyecto adelante. *¡Muchas gracias!*

A mis amigos Luz (de mi días), Martina (ñeñe) y Alejandro (Ruge) por acompañarme en el transcurso de la carrera, por brindarme su apoyo, su tiempo, por compartir momentos increíbles que marcaron mi vida; gracias a Dios por colocarlos en mi vida. Los quiero, *¡no se pierdan!*

A mi amiga y compañera de trabajo de grado Dani, por su paciencia, ayuda, amor, dedicación, confianza y por todo lo que logramos juntas, por seguirme la corriente con esta idea, por aprender conmigo sobre el maravilloso mundo de la música. *Mil gracias por ser parte del TEAM Dani & Dani.*

A mi familia LEBEM-LEMA (Docentes y compañeros) por brindarme los mejores cinco años de muchos aprendizajes; por cada risa, por cada sueño, por el apoyo, por las fotos, por cada momento de locura, deporte, música que de alguna manera aportaron a mi crecimiento académico y personal. *¡Gracias!*

A mi familia por estar pendiente durante todo este tiempo, por sus buenos deseos, por cada consejo, ayuda. A mis hermanos en Cristo por sus oraciones, por sus consejos, palabras de ánimo y buenos deseos.

Es pues la fe la sustancia de las cosas que se esperan, la demostración de las cosas que no se ven.

Hebreos 11:1

Sol Rojas



RESUMEN

La presente monografía tuvo como objetivo investigar sobre la identificación y análisis de patrones por medio de la música como recurso didáctico para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica y media. Para ello se realizó una investigación cualitativa en enfoque de análisis documental que incluyó documentos enmarcados en las categorías: matemáticas, música, documentos legales y documentos que relacionan ambas ciencias en cuanto a la enseñanza, estos últimos, los cuales permitieron identificar conceptos matemáticos relacionados con la música, también direccionaron los intereses, avances y documentos que aportaron para esta investigación. El análisis documental propició la construcción de una propuesta de actividades para los diferentes grados de educación básica y media, estas actividades están vinculadas con los estándares básicos de competencias matemáticas y los lineamientos curriculares de la educación artística con el fin de crear elementos dinámicos para la enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional (patrones, regularidades, entre otros).

El diseño de la propuesta de actividades se validó por dos expertos, lo que permitió hacer los ajustes correspondientes para entregar una propuesta idónea para el campo del pensamiento variacional. Como resultado de esta construcción se pudo conocer que la apuesta educativa en la que este está monografía está apuntado tiene varios caminos para trabajar la relación matemática-música, como los transformaciones en el plano, probabilidad, conteo, fractales, etc.

Palabras Clave: Música, matemática, pensamiento variacional, generalización, patrones, secuencias.



TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO I	10
Planteamiento del problema.....	10
Estado del arte	11
OBJETIVOS	14
Objetivo General	14
Objetivos Específicos.....	14
JUSTIFICACIÓN	15
CAPÍTULO II	16
Marco Teórico	16
Conceptos musicales básicos	17
Conceptos matemáticos (pensamiento variacional)	24
Teoría de las inteligencias múltiples	30
Teoría de la aproximación instrumental.....	32
Marco legal	35
CAPÍTULO III	38
Metodología de investigación	39
Desarrollo metodológico:	39
ANÁLISIS DEL DISEÑO DE LA PROPUESTA	72
CONCLUSIONES	76
BIBLIOGRAFIA	78
ANEXOS	83



LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Partitura de Bach.	12
Ilustración 2. Muestra de tipo de simetría	12
Ilustración 3. Pieza musical Kuusi de Ville Pulkki- Música. Fuente	13
Ilustración 4: Representación de un compás.	18
Ilustración 5: Escala Diatónica.	18
Ilustración 6: Unidad para esta tabla la negra	19
Ilustración7: Equivalencia entre notas.	20
Ilustración 8 Ejemplo de puntillo	20
Ilustración 9: Nota con su respectiva frecuencia Fuente: Construcción propia	20
Ilustración 10: Grafica musical- Representación del ritmo y melodía	21
Ilustración 11: Valor de las figuras musicales.....	22
Ilustración 12: Duración de las figuras musicales.	22
Ilustración 13: Ejemplo métrica equivalente a 4/4	23
Ilustración14: Ejemplo métrica equivalente a 3/4	23
Ilustración 15 Quinta de Do, es Sol.	23
Ilustración 16. Quinta de Sol, es Re.	23
Ilustración 17. Quinta de Re, es La.	23
Ilustración 18. Quinta de La, es Mi.	24
Ilustración 19. Quinta de Mí, es Si.	24
Ilustración 20. Quinta descendente de Do, es Fa.	24
Ilustración 21. Circulo de quintas.	24
Ilustración 22: Patrón Rítmico.	25
Ilustración 23. Generalización patrón geométrico.	27
.....	27
Ilustración 24. Patrón de números triangulares	27
Ilustración 25. cuadro-resumen de la teoría de 1M (1° PARTE)	31
.....	31
Ilustración 26. Estructuras de los estándares de matemáticas.	37
Ilustración 27. Ejemplo estándares de música grados preescolares, 1°, 2° y 3°	38
Ilustración 28. Tabla de figuras rítmicas y sus silencios.	58
Ilustración 29. Valores relativos de las figuras rítmicas.....	63
Ilustración 30. Partitura al son de los números triangulares.....	66
Ilustración 31 SEQ Ilustración * ARABIC 7 Imagen propia. Barras de herramientas del programa MAM2006 PLAYER.....	68
Ilustración 32. Esquema de la actividad.	68
Ilustración 33. Ejemplo al escuchar el audio.	70
Ilustración 34. Ejemplo para la actividad.....	71



LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Descripción de categorías de análisis.....	40
Tabla 2 Revisión documental.	41
Tabla 3 Selección documental.	50



INTRODUCCIÓN

La necesidad de esta investigación es crear elementos dinámicos para el proceso de enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional, sin centrar el trabajo en un ciclo específico de escolarización de los educandos, sino mostrando que es posible potencializar este pensamiento a lo largo de la educación básica y media; incentivando una alternativa de llevar las matemáticas al aula, el cumplimiento de las competencias matemáticas, la interdisciplinariedad en los ámbitos educativos y la búsqueda constante por el mejoramiento de la enseñanza de la matemática.

Así, en este caso hemos utilizado la música, con base a la teoría antropológica de lo didáctico, la cual plantea entre sus definiciones que un **recurso didáctico**, considerado por Pedreros (2012), desde el enfoque instrumental, es un artefacto a disposición de un profesor y susceptible de evolución, en la medida que el profesor se apropie del recurso y lo ponga en práctica. De ahí que la concepción de un recurso sea una tarea compleja y un único profesor no pueda gestionar todos los recursos pedagógicos necesarios en el aula de clase de matemáticas.



CAPÍTULO I

En este primer capítulo se realiza el planteamiento de la problemática identificada en la enseñanza del pensamiento variacional y su carencia de elementos en el aula dinámicos para su efectivo aprendizaje. De allí se parte a la construcción del estado del arte en cuanto a las investigaciones encontradas de acuerdo al desarrollo a lo largo de la historia de las posibles relaciones entre la matemática y la música. Con base a lo anterior, se plantean los objetivos correspondientes a esta investigación y la justificación de la misma.

Planteamiento del problema

Partiendo de la interacción activa correspondiente al ejercicio de aprendizaje y enseñanza del pensamiento matemático, en el que nos vemos inmersos como educadores matemáticos, se implementa y utilizan diferentes variables, intencionales o no, que pueden causar ciertos errores, obstáculos y dificultades en los estudiantes.

Ubicando esta problemática en el pensamiento variacional, se encuentra como principal dificultad la enseñanza en relación con el cambio, movimientos y demás elementos implícitos en el área de estudio de los sistemas algebraicos. En este proceso, las herramientas que se utilizan suelen ser estáticas y esto ocasiona una incoherencia entre lo que se quiere poner en juego en el ambiente de aprendizaje y lo que se presenta a los estudiantes. Así, la falta de instrumentos dinámicos obstaculiza la comprensión de los objetos matemáticos desarrollados en el mismo.

Lo anterior está estrechamente relacionado con una formación tradicional, en el sentido de no permitir la entrada en el ambiente de aprendizaje a otros recursos y mucho menos a otras metodologías, bien sea por su desconocimiento, o perspectiva de inutilidad y/o eficiencia, evitándose la flexibilidad en los procesos de enseñanza.

Por otra parte, en la enseñanza de las matemáticas, siendo constantemente considerada una ciencia rígida y abstracta, se tiende a desligar el contexto de los estudiantes, olvidando que este es un medio por el cual se puede generar un aprendizaje significativo y aplicable.

De allí damos cabida a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se puede utilizar la música como recurso didáctico para desarrollar el reconocimiento de patrones y regularidades en estudiantes de educación básica y media?



Estado del arte

Desde épocas antiguas la música y las matemáticas se han categorizado como disciplinas abstractas. Ambas presentan características en común; son las bases de tradiciones culturales y son de gran importancia en el mundo, ¿por qué? ¿Qué disciplinas no necesitan de algunas bases de las matemáticas? por lo tanto, ¿qué tan viable es estudiar la matemática mediante algunas herramientas pertenecientes a la música? y de ser así ¿qué relaciones se presenta entre estas dos disciplinas?

Según Martínez (2012) en el año 1980 se crea la teoría matemática de la música, esta teoría se encarga de estudiar la musicología mediante una estructura algebraica. De igual manera se ha planeado distintas investigaciones sobre “música-matemática”, determinando qué aplicaciones se podría realizar de las matemáticas a la música, resolviendo alguna problemática mediante un cierto algoritmo matemático. Para este caso, una de las aplicaciones que se podría realizar en este aspecto es: el componer melodía mediante el uso de las matemáticas, teniendo en cuenta la escala de Do a Do, lo que implica que cada nota musical estará correlacionada con un número natural de 1 al 7, asimismo se podría realizar distintos patrones, los cuales serán analizados matemáticamente para después intervenir con un instrumento, como el piano, la guitarra o con el oído musical (empíricamente), para demostrar que el patrón arroja una melodía coherente.

Acerca de la relación que presentan estas dos disciplinas; los contenidos de las matemáticas y los contenidos musicales, es posible evidenciarla en algunos aspectos:

- El tiempo se asocia con relaciones numéricas, proporciones racionales y proporción irracional (Ferreira, 2005, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015)).
- La duración de las notas (figuras musicales) y sonidos, se relaciona con múltiplos enteros, relaciones numéricas (Scimemi, 1999, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015).
- Los compases están vinculados con relaciones numéricas (Nisbet, 1991, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015).
- El ritmo se asocia con relaciones numéricas y proporciones (Ferreira, 2005, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015).
- La nota musical, el sonido, la frecuencia, la altura del sonido, se vincula con operaciones aritméticas, funciones y logaritmos. (Benson, 2008, Everest & Pohlmann, 2015, Howard & Angus, 2009; Wright, 2009, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015).
- La intensidad y la sensación de intensidad se relaciona con patrones geométricos y musicales, los musicales clasificados por sus simetrías. (Bahr & Christensen, 2000; Benson, 2008, citado por Dos santos, Monico, Campelos, & Fernandes, 2015),

Por otra parte, siguiendo con la dualidad de las matemáticas y la música en este caso la música y el juego de azar, se componen de la siguiente forma: en efecto, en el caso de las matemáticas existe una teoría, que trabaja la probabilidad de estos tipos de juegos, pero habría relación entre la música y la probabilidad, quizás algunos se preguntarán, ¿pero cómo? es aquí donde interviene la teoría



matemáticas de la música. Cuando un músico quiere componer alguna pieza musical puede tomar reglas y conceptos de la teoría de la probabilidad, ¿eso sí puede pasar? Y ¿por qué con esta teoría? esta teoría es aplicada a los juegos de azar, modelos estocásticos, entre otros.

Se puede generar algunos tipos de composiciones mediante computadoras programadas con ciertas reglas. Además, para la modelación matemática de la composición se requiere de números aleatorios en la computadora, pero estos números se pueden generar a partir de lo anteriormente dicho, por los juegos de azar como: los dados, la pirinola, los sorteos, etc.. Como ejemplo de esto se tiene el “Vals de Mozart”, es decir, el Juego de dados de W.A. Mozart.

En el año 1926 Guido de Arezo desarrolló una técnica para generar una melodía asociando sonidos a las vocales de un texto, de tal forma que la melodía variaba de acuerdo con el número de vocales en el mismo (Martínez, 2012).

No solo podemos hablar de probabilidad-música, también de fractales-música, los cuales se explicará brevemente qué son:

Según Maldelbrot (1988, 1997) los fractales se caracterizan por dos propiedades:

- Autosemenjanza (o autosimilitud): está implica invariancia de escala, es decir, el objeto fractal presenta la misma apariencia independiente del grado de ampliación con que lo miremos.
- Autorreferencia: ésta determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo, con lo que la forma de generar el fractal necesita algún tipo de algoritmo recurrente. (Citado por Rodríguez, 2016, p.295).

Por más que se amplíe cualquier zona de un fractal, siempre hay una estructura infinita. Entonces, el objeto fractal inicial está contenido dentro de sí mismo. Para este caso, se presenta la relación entre música y matemáticas en la pieza del músico-compositor Bach.

Según Liern (2009) Bach alcanza su cénit con el contrapunto y la fuga, composiciones en las que la estructura geométrica es incuestionable. Se parte de uno o varios temas y se les somete

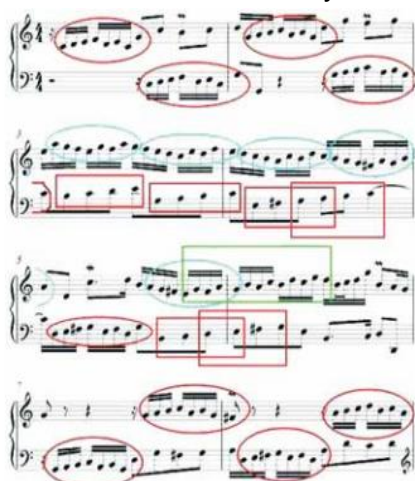
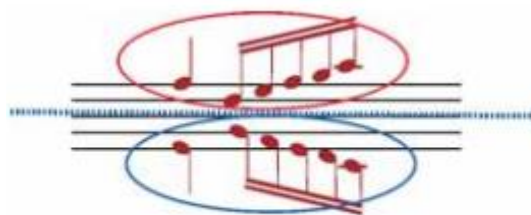


Ilustración 1. Partitura de Bach. Fuente: Liern (2009)



Muestra del tipo de simetría utilizada por Bach

Ilustración 2. Muestra de tipo de simetría utilizada por BACH. Fuente: Liern (2009)

transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema: traslaciones, giros y simetrías que confieren a la obra una estructura muy rígida, pero en la que el compositor encontró una fuente de inspiración. Se planteaba las fugas con el mismo rigor estructural que un geómetra, pero les añadía una velocidad y brillantez en la improvisación, que resultaron admirables. Lo que aparecen encerrado en la elipse, significa que Bach



realizó una traslación (transposición) del tema principal subiendo o bajando un intervalo.

Además, no solo músicos clásicos si no también personas en la actualidad están trabajando en programas o asistiendo a cursos, donde le enseñan sobre música

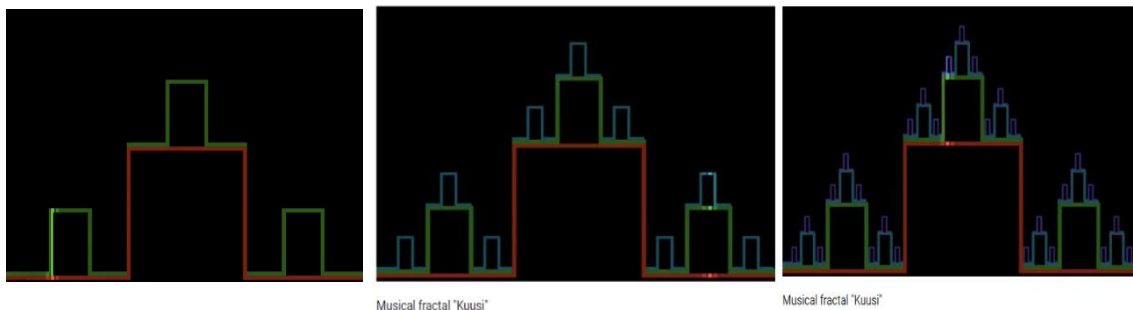


Ilustración 3. *Pieza musical Kuusi de Ville Pulkki- Música. Fuente:*
<https://www.youtube.com/watch?v=GVK5N7HQf8Y&t=16s+Fractal>

fractal, estos realizan proyectos cómo es el caso de Ville Pulkki, el cual nos muestra una de sus piezas, con el fin de poder visualizar y escuchar la música fractal y cómo esta se desarrolla.

Por otra parte, aparece el concepto de música serial, la cual estuvo encabezada por Arnold Schönberg, Alban Berg y Anton von Webern. Este tipo de música hizo uso de un modelo científico para crear un sistema radicalmente nuevo, como ya ocurriese de algún modo con los cubistas en la pintura.

En la Geometría Axiomática se parte de unos elementos primarios que se definen indirectamente mediante una lista de axiomas tomados como verdaderos. De igual modo, Arnold Schönberg partió de la noción de serie definiéndola mediante los cuatro axiomas siguientes para determinar su geometría serial:

1. La serie consta de las doce notas de la escala cromática.
2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.
3. La serie puede ser expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: aspecto básico, inversión, retrogradación e inversión retrogradada.
4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala. (Domínguez, 2004, p. 1)

Ahora bien, este tipo de música permite identificar cierto tipo de patrones creados a partir de las doce notas de escala cromática, utilizando los aspectos lineales mencionados anteriormente para crear regularidades entre las mismas, fácilmente identificables.

Lo anterior es tomado como una breve introducción a todo el ámbito de estudio que puede encontrarse dentro de la relación Matemática-Música, es decir, el hecho de que sean disciplinas abstractas no implica que esta correspondencia no sirva para enseñar de manera dinámica competencias básicas en el desarrollo del pensamiento variacional, como afirma el MEN (1998), este proceso de enseñanza aprendizaje presupone la construcción de un campo conceptual,



[...] que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (p.49)

Dicho campo conceptual, debe ser utilizando, a partir de una transposición didáctica, entorno a los procesos generales, conocimientos básicos y el contexto mismo de los estudiantes, donde dicha estructura de procedimientos y conceptos construya un aprendizaje significativo y no aislado a las expectativas de aprendizaje.

OBJETIVOS

Objetivo General

Plantear una serie de actividades que vincule la música como recurso didáctico en el proceso de identificación y análisis de patrones que favorezcan el desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica y media.

Objetivos Específicos

- Realizar un análisis documental que permita la creación de categorías de análisis que permitan identificar los elementos necesarios para el desarrollo y justificación de la propuesta.
- Identificar los conceptos matemáticos relacionados con la música que potencien el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la educación básica y media.
- Analizar elementos y procesos inmersos en la didáctica del pensamiento variacional partiendo de la relación entre la música y las matemáticas.
- Fomentar el uso de herramientas tecnológicas para trabajar la relación matemática – música.



JUSTIFICACIÓN

Se reconoce el vínculo de las Matemáticas con todos los aspectos prácticos de la vida y como un conocimiento necesario y útil para el desarrollo integral de los estudiantes. Las Matemáticas involucran distintos tipos de desarrollo lógico y ayudan entre otros aspectos, a la toma de decisiones informadas, que favorecen de manera directa a la construcción de proyectos de vida de cada uno de los estudiantes. Uno de esos aspectos que se debe fortalecer en la escuela, teniendo como base el conocimiento matemático, es la enseñanza del pensamiento variacional, conforme a un contexto casi inmediato en el cual pertenecen los estudiantes.

De esta forma, es preciso reconocer que el uso de algunos elementos concernientes al ámbito musical favorece la modelación matemática en otras ciencias, e involucran el análisis y organización de situaciones habituales en las prácticas cotidianas de los hombres.

Asimismo, por medio de la relación Matemática-música es posible desarrollar algunos de los núcleos conceptuales, como los planteados por los lineamientos curriculares de matemáticas, (MEN, 1998) pertenecientes a este pensamiento matemático:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función;
- Las magnitudes;
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

A partir de esto, es preciso evidenciar la importancia de utilizar un recurso didáctico como la música para cobrar cierto sentido y significancia al concepto de la variación misma y el dinamismo necesario en la enseñanza del cambio en diferentes ámbitos matemáticos.



CAPÍTULO II

En este segundo capítulo se desarrolla el marco teórico de acuerdo con cuatro elementos fundamentales: La teoría implícita en los conceptos musicales básicos, así mismo teoría que presenta elementos básicos del pensamiento variacional, la teoría de las inteligencias múltiples y la teoría antropológica de lo didáctico. Por otra parte, se presenta un marco legal construido con algunos documentos base en la enseñanza de las matemáticas y la educación artística en Colombia.

Marco Teórico

El siguiente apartado tiene como finalidad presentar todo un constructo teórico-práctico a partir del desarrollo del pensamiento variacional por medio de la relación existente entre las matemáticas y la música, enmarcado en la educación básica y media. Para ello, lo anterior está sustentado desde los Estándares Básicos de competencias Matemáticas (MEN, 2006), donde se explicita textualmente que:

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. (p.6)

Complementando lo anterior, en la Educación Básica Secundaria, las representaciones utilizadas en la validación de variaciones están estrechamente ligadas al sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo, elementos claves en la construcción de este documento.

Para desarrollar un componente histórico, en primer lugar, según Chunga (2012, citado por Pérez, 2013, p.10) las manifestaciones comenzaron a partir de elementos sonoros que permitieron ser herramientas de comunicación. Ya que determinaban ciertos sonidos para la agrupación de los rebaños, para la sincronización de caza, para el reconocimiento de los familiares, imitando animales, después con el tiempo se comenzó a utilizar para dormir a los niños, para entretener, para curar enfermedades, para realizar entrenamiento militar, etc. Entonces se comenzó a considerar la música y el hacer música como una actividad cuyo objetivo es influir en el ánimo del auditor.

La escuela pitagórica, buscaba comprender la armonía del universo a través de los números, esta escuela estableció ciertos modelos astronómicos, acústicos y musicales, hasta el punto de que música y aritmética eran estudiadas en forma conjunta (Pérez, 2013, p.14). También creó una división del currículo en



quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) y trivium (gramática, retórica y dialéctica), esta clasificación se mantuvo durante siglos y la música permaneció como una ciencia igual de importante a las matemáticas durante la Edad Media (SUMA, s.f, p.1), de allí se empieza a evidenciar la necesidad de relación entre dichas disciplinas.

En cuanto al estudio que realizó la escuela pitagórica sobre la música, estos se basaron en los sonidos que generaba al tañer la única cuerda de un instrumento monocorde, en donde la longitud de su cuerda se podía modificar, como se haría con la cuerda de una guitarra en la actualidad, entonces al variar la longitud de la cuerda, se generaba una variedad de notas musicales, ya que cuanto más corta fuera la cuerda, la nota resultaba más aguda (más alta) y si estaba más larga la cuerda esta generaba una nota más grave (más baja), esto permitió relacionar las longitudes expresadas con números pequeños, de los cuales salían sonidos agradables (Pérez, 2013, p.14).

Ahora bien, hablando del pensamiento variacional, comúnmente relacionado con lo algebraico, según Vergel (2014) se considera como una forma particular de reflexionar matemáticamente y que en tanto al saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos históricamente y culturalmente. De acuerdo con Radford (citado por Vergel, 2014) el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores) estrechamente relacionados.

- El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos. (p.78).

Se considera además de estos elementos, la importancia de que se involucre en las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y a las figuras mismas, la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización (MEN, 2006, p.67). Es decir, el desarrollo de los tres elementos anteriormente expuestos puede estar subordinado a procesos generales propiciados por el propio estudiante implícita o empíricamente.

Conceptos musicales básicos

Empezando con la premisa de que “La música es una ciencia que debe tener unas reglas establecidas; estas reglas deben derivarse de un principio evidente, y este principio no puede revelarse sin la ayuda de las matemáticas.” *Traité de l'harmonie réduite à son principe naturel* (1722) Jean Philippe Rameau, este aparatado pretende dar cabida a ciertos conceptos básicos en el campo de la música en relación con las matemáticas como ciencia de estudio.



En búsqueda de la relación entre las matemáticas y la música, es importante reconocer algunos conceptos musicales básicos que pueden dar cabida a la enseñanza del pensamiento variacional. De allí, Evans (2005) y Moncada (1995) presenta los siguientes conceptos musicales básicos:

Música: Reunión de sonidos emitidos por un instrumento o voz humana con arreglo a un método basado en la melodía, la armonía y el ritmo. Notas. Son los siete monosílabos DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI.

Acorde: Se produce cuando dos notas suenan simultáneamente.

Armonía: Producción de sonidos simultáneos.

PENTAGRAMA: Conjunto de cinco líneas horizontales, paralelas y equidistantes, donde se escriben los signos musicales. Estas líneas se cuentan de abajo hacia arriba.

COMPÁS: Espacio entre dos barras divisorias. En el pentagrama, este está separado por medio de una línea vertical. De línea a línea hay la misma unidad de tiempo.

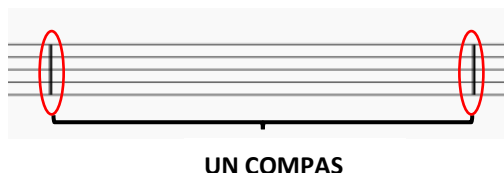


Ilustración 4: Representación de un compás.
Fuente: Construcción propia.

ESCALA DIATÓNICA:

Sucesión de siete sonidos. Cada escala presenta un grado según su función tonal, estos se llaman: 1) Tónica (primer sonido), 2) Supertónica, 3) Mediente, 4) Subdominante, 5) Dominante, 6) Superdominante, 7) Sensible, 8) Tónica y se repite teniendo en cuenta que cada uno de estos grados corresponde a una respectiva nota.

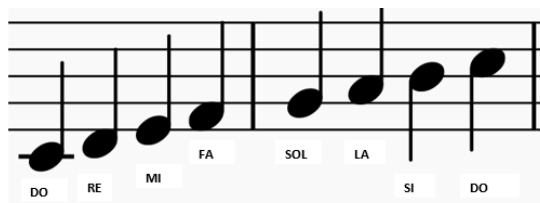


Ilustración 5: Escala Diatónica. Fuente: Construcción propia.

INTERVALO: diferencia o distancia que separa una nota musical de otra en una determinada escala musical. Los hay ascendentes, cuando va el sonido grave al sonido agudo y descendente, cuando un sonido agudo al sonido grave.

TONO: Es la distancia más grande que hay entre los dos grados (función tonal) de la escala diatónica.

SEMITONO: Distancia más pequeña que hay entre los dos grados (función tonal) de la escala diatónica.

MELODÍA: Concurrencia de sonidos sucesivos.

SONIDO: Resultado de varias vibraciones de un cuerpo sonoro, este tiene tres cualidades:

- a) La primera cualidad se relaciona con el número de vibraciones que ejecuta el cuerpo sonoro en un segundo.
- b) La segunda cualidad se debe a la amplitud de las vibraciones.



c) La Tercera cualidad se debe a la forma de las vibraciones.

Estas tres cualidades se relacionan con la altura, intensidad y timbre. ¿De qué manera? de la siguiente:

Altura: “viene dada por la frecuencia de oscilación... a una baja frecuencia de oscilación le corresponden tonos graves, y a una alta frecuencia de oscilación, tonos agudos”; **Intensidad** “energía acústica que desarrolla una onda longitudinal por unidad de tiempo, depende de la amplitud... a mayor volumen, mayor amplitud de la onda” es decir, permite distinguir un sonido fuerte de un sonido suave ; **Timbre** “otorga personalidad al sonido...permite discriminar los sonidos emitidos por instrumentos diferentes, aunque éste tenga la misma intensidad y la misma altura”. (Arbonés & Milrud citado por Cedeño y De arco, 2016, p.10).

Por otro lado, tenemos como tres principales elementos de la música; **MELODÍA** como aquella sucesión de sonidos de diferente altura, animados por el ritmo. **ARMONIA** está encargada de estudiar la formación y combinación de los acordes en la música. **RITMO** es el orden y la proporción en que se agrupan los sonidos en el tiempo.

FIGURAS RITMICAS:




NOMBRE	TIEMPOS	FIGURA	FIGURA DE SILENCIO
Redonda	Cuatro tiempos		
Blanca	Dos tiempos		
Negra	Un tiempo		
Corchea	$\frac{1}{2}$ de tiempo		
semicorchea	$\frac{1}{4}$ de tiempo		
Fusa	$\frac{1}{8}$ de tiempo		
Semifusa	$\frac{1}{16}$ de tiempo		

Ilustración 6: Unidad para esta tabla la negra *Fuente: Construcción propia.*

EQUIVALENCIAS ENTRE NOTAS: En la ilustración 7 se evidencian los diferentes tipos de notas en correspondencia a su valor y asimismo los valores de cada uno de los silencios utilizados en música.



	REDONDA	BLANCA	NEGRA	CORCHEA	SEMICORCHEA	FUSA	SEMIFUSA
NOTAS							
VALOR		2 =	4 =	8 =	16 =	32 =	64
SILENCIOS							
VALOR		2 =	4 =	8 =	16 =	32 =	64

Ilustración7: Equivalencia entre notas. Fuente: Construcción propia

PUNTILLO: es un punto que se coloca a la derecha de la figura rítmica aumentándole la mitad de su valor de la siguiente manera:

Figura + puntillo	Sumatoria de tiempos	Duración total
	1 tiempo + $\frac{1}{2}$ tiempo	$1\frac{1}{2}$ tiempos
	4 tiempos + 2 tiempos	6 tiempos
	2 tiempos + 1 tiempo	3 tiempos

Ilustración 8 Ejemplo de puntillo Fuente: Construcción propia.

FRECUENCIA: Representa la rapidez con la que se producen las vibraciones en un medio, como, por ejemplo, en una cuerda de guitarra, de violín, en un diapasón, etc., y se mide por el número de vibraciones por segundo (Hz, hertzios).

Entonces al hablar de frecuencias, hablamos de la aritmética de la música, ya que cada nota tiene su propia frecuencia o su propio valor musical, esto permitirá restar, dividir, multiplicar, sumar frecuencias o los valores de las figuras musicales. Según Liern & Queralt (2008) la *diferencia de frecuencia* entre dos sonidos recibe el nombre de **intervalo**, en este caso al hablar de diferencia, esta no está ligada a una resta, ya que la percepción del sonido **no** es lineal.

NOTA	DO	DO#	RE	MIB	MI	FA
HZ	261,6265	277,1826	293,6648	311,127	329,6275	349,2282
NOTA	FA#	SOL	SOL#	LA	SIB	SI
HZ	369,9944	391,9954	415,3047	440	466,1638	493,8833

Ilustración 9: Nota con su respectiva frecuencia Fuente: Construcción propia

También en el caso de la altura, intensidad y timbre, esto se puede trabajar a partir del concepto de función y de sus características, es decir; al realizar la función se tendrá en cuenta tres variables: altura, timbre e intensidad modelando



las gráficas que generan ciertos programas al visualizar las ondas de cualquier tipo de canción (música).

Pérez (2013) relaciona la música con las matemáticas en cuanto a la representación gráfica del ritmo y la melodía, representando el tiempo (ritmo) en el eje de las abscisas y la altura de sonidos (melodía) en el eje de las ordenadas. De esta manera el pentagrama funciona, en cuanto a la ubicación de notas, como un plano cartesiano (Pág.24).

En relación al ritmo este tiene 3 elementos que lo componen;

Según Cooper y Meyer (citado por Jiménez & Montoya, 2017, p.21) “Un **pulso** es cada uno de los estímulos exactamente equivalentes, **una serie que se repite en una serie regular**”. Es decir, son como palpitaciones regulares que permiten saber la duración del sonido, como el metrónomo que siempre lleva un patrón para que el músico pueda guiarse al tocar, también se presenta en nuestro cuerpo con los latidos del corazón, el tic tac del reloj.



Ilustración 10: Gráfica musical- Representación del ritmo y melodía. Fuente: Construcción propia.

Según Jiménez & Montoya (2017) **el acento** es la mayor fuerza con que se ejecuta uno de los pulsos, y tiene cierta periodicidad, es una marca en la partitura, en donde se indica que la nota debe ser interpretada con mayor intensidad, es decir; la marca le da a conocer al interprete, que la nota, o figura debe ser interpretados con mayor intensidad a comparación de las otras notas o figuras, ya sea su duración altura o timbre. Según Cooper y Meyer (citado por Jiménez & Montoya, 2017, p.22) para que una nota parezca acentuada debe ser diferenciada de alguna manera de las otras notas o figuras de la serie. La nota acentuada debe estar relacionada con otras notas o si no sería una nota aislada, si todas las notas están iguales, es porque no hay acento.

El compás, este se encuentra formado de tiempos, los cuales dividen en partes de tiempo. Este se indica con dos números en forma de fracción al principio de una obra musical (**también conocido por la métrica del compás**), después de la clave y la armadura (esta dos no se tendrán en cuenta como tal, porque se trabajará con patrones). Al hablar de **la métrica del compás** está presenta una cierta estructura; el **numerador del compás** indica el número de tiempos que debe haber en cada compas, por otro lado **el denominador del compás** indica la figura de nota que debe haber en cada tiempo del compás (ver ilustración 13 y 14).

Ejemplo de cuando hablamos de la figura de la nota:

- ✓ El 1, indica unidad representada por la redonda,
- ✓ El 2, este indica la mitad y se representa con la blanca.
- ✓ El 3, indica cuarto, se representa con la negra.



- ✓ El 4, este indica octavo y se puede representar con la corchea, y así sucesivamente.

METRICA es el estudio de la estructuración del ritmo, por medio de la unidad de medida que es el compás.

Diferencia entre ritmo y métrica

- ✓ En que el ritmo NO representa siempre una regularidad en la sucesión de los acentos en cambio la métrica si es una **sucesión regular** de acentos basados en los tiempos del compás, sus divisiones y subdivisiones (tomado del libro amarillo).

Numerador de la métrica

- ✓ Presenta la cantidad de figuras musicales que se necesitan para completar un compás. Este número no se refiere a cualquier figura musical, sino a una en específico que es dada en el denominador de la métrica.

Denominador de la métrica

- ✓ Presenta la cantidad de figuras que se necesitan para completar una redonda. Entonces se conoce como la fracción comparada con la redonda, es decir, la blanca se le llama mitad de nota por ser la mitad de una redonda, entonces, se puede pensar en cuantas figuras musicales se necesitan para completar una redonda.

A continuación, se muestra en las ilustraciones 11 y 12 el valor de las figuras musicales tomando como unidad la redonda:

FIGURA MUSICAL	SÍMBOLO	VALOR EN TIEMPO
Redonda		1 tiempo
Blanca		$\frac{1}{2}$ tiempo
Negra		$\frac{1}{4}$ tiempo
Corchea		$\frac{1}{8}$ tiempo
Semicorchea		$\frac{1}{16}$ tiempo
Fusa		$\frac{1}{32}$ tiempo
Semifusa		$\frac{1}{64}$ tiempo

Ilustración 11: Valor de las figuras musicales *Fuente: Construcción propia.*

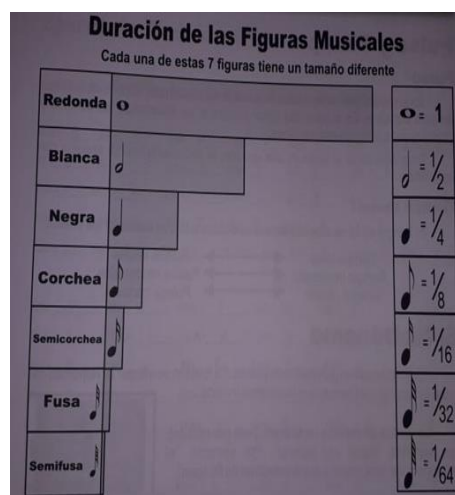


Ilustración 12: Duración de las figuras musicales. *Fuente: Libro IAM Academy Music de Víctor Di Lorenzo.*

Nota de aclaración: Los únicos números que pueden aparecer en el denominador de la métrica son: 1,2, 3, 8,16, 32 y 64 para saber la figura base del compás.

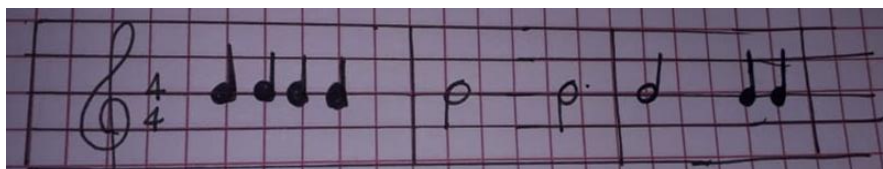


Ilustración 13: Ejemplo métrica equivalente a 4/4 *Fuente: Construcción propia.*

Como se puede observar en el siguiente ejemplo, hay una métrica equivalente a 4/4, lo que significa que cada compás del pentagrama debe tener 4 tiempos y que la figura base sería la negra. En el primer compás se hizo uso de 4 negras, en el segundo compás se utilizaron dos blancas y en el último compás, una blanca y una negra; todos estos muestran una equivalencia entre sí.

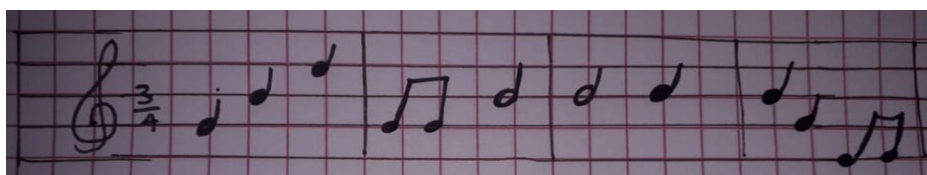


Ilustración14: Ejemplo métrica equivalente a 3/4 *Fuente: Construcción propia.*

En el segundo ejemplo se presenta una métrica de $\frac{3}{4}$, de modo que cada compás debe tener 3 tiempos y que la figura musical base es la negra. En el primer compás se utilizaron tres negras, en el segundo dos corcheas junto a una blanca, en el tercero una blanca y una negra y finalmente, en el cuarto compás, dos negras y dos corcheas; como en el primer ejemplo, en los cuatro compases se maneja una equivalencia de las figuras musicales.

CIRCULO DE QUINTAS

Según Arbonés & Milrud (2010) parte de un *do* como un ejemplo para explicar este concepto.

En primer lugar, se calcula la relación de la primera quinta ascendente, partiendo desde *Do*, es decir se obtiene un *sol*:



Ilustración 15 Quinta de Do, es Sol. *Fuente: Construcción propia.*

La quinta de la nota *Sol*, es la nota *Re*:

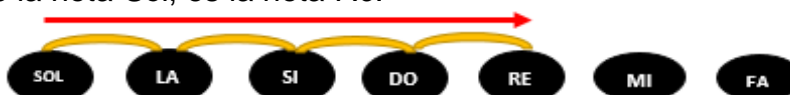


Ilustración 16. Quinta de Sol, es Re. *Fuente: Construcción propia.*

La quinta de la nota *Re*, es la nota *La*:



Ilustración 17. Quinta de Re, es La. *Fuente: Construcción propia.*



La quinta de la nota *La*, es la nota *Mi*:



Ilustración 18. Quinta de *La*, es *Mi*. Fuente: *Construcción propia*.

La quinta de la nota *Mi*, es la nota *Si*:



Ilustración 19. Quinta de *Mi*, es *Si*. Fuente: *Construcción propia*.

Ahora se toma, una quinta descendente desde el *Do* inicial, se consigue el *Fa*.



Ilustración 20. Quinta descendente de *Do*, es *Fa*. Fuente: *Construcción propia*.

De este modo, se obtienen los siete sonidos de la escala:

Fa -> do -> sol -> re -> la -> mi -> si

Por otro lado, Moncada (1995) presenta el siguiente esquema para entender este concepto:

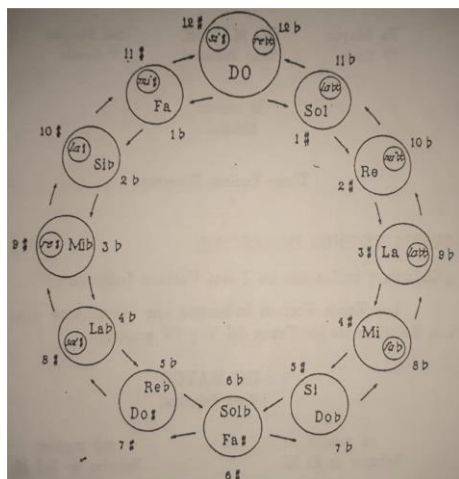


Ilustración 21. Círculo de quintas. Fuente: (Moncanada G, 1995).

De igual manera, se destaca lo siguiente:

- Las tonalidades con sostenidos van apareciendo hacia la derecha y con bemoles, hacia la izquierda.
- Las tonalidades que están dentro de un mismo círculo son enarmónicas; una con sostenidos y otras con bemoles, donde estos designan ajustes de un semitono inferior y superior, respectivamente.
- La suma de las alteraciones de ambas tonalidades enarmónicas siempre da 12.

Conceptos matemáticos (pensamiento variacional)

Un **patrón** es una sucesión de signos orales de fenómenos naturales, gráficos, numéricos, entre otros, que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia. Los patrones se observan en la vida real y pueden responder a un modelo matemático (Quiñonez, 2012, p.10).



Según Radford (citado por Vergel 2015, p.197) la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela, Vergel indica que esta posibilita el acercamiento por parte de los estudiantes a situaciones de variación que se erigen con importancia para el desarrollo del pensamiento algebraico. El desarrollo de dicho concepto será manejado de manera progresiva por algo que llamamos momentos, así:

a) Momento de Identificación de elementos

Se reconoce la naturaleza de los elementos sobre los cuales se realizaron las generalizaciones. Pueden ser elementos numéricos de ciertos conjuntos o también objetos geométricos.

Además, identificar la naturaleza de estos, activa una estrategia de generalización o de identificación de patrones. Teniendo en cuenta las características y diferencias entre patrón y regularidad:

Patrón: un algo en común

Regularidad: Un conjunto de cosas con un patrón.

Mason (1985), nombra este momento como la etapa en que se pueden presentar actividades con secuencias de figuras o de números, donde se busca la observación de la figura o el número siguiente. Se espera que el sujeto observe lo que está pasando de una figura a la otra, o de un número al siguiente y en esta observación el alumno perciba la regularidad.

Este momento se constituye a partir de definir las características esenciales que permiten identificar si un elemento dado pertenece o no a dicha clase, la cual se configura en sí misma en un objeto matemático, las regularidades que caracterizan a sus componentes permiten dar una respuesta común a todos ellos, reaccionando ante la clase y no ante cada uno de sus miembros en particular.

Luego, las cualidades comunes que han sido abstraídas a partir de un determinado conjunto de objetos o situaciones específicas permiten responder similarmente a una clase entera de objetos o situaciones relacionadas a través de una generalización consistente con la identificación de la propia clase. Como se evidencia en la siguiente imagen, planteamos un patrón rítmico, que permite evidenciar si algún objeto (Nota musical en este caso), pertenece al conjunto o a la situación misma para crear cierta melodía.

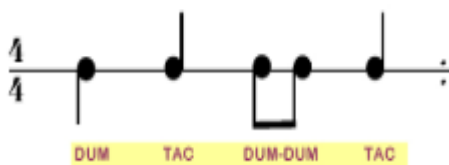


Ilustración 22: Patrón Rítmico. Fuente: <https://bit.ly/2JB7Fom>



Una segunda idea en el desarrollo de la identificación de elementos, la idea de la interpretación de las letras que se utilizarán posteriormente, van de la mano de con los universos números que se puedan utilizar, o si al contrario ya están estipulados, como plantea Rojas (2010, p.120).

Cuando se inicia el trabajo escolar en álgebra, con cierta frecuencia se propone a los estudiantes realizar un repaso sobre los conjuntos numéricos (como conjuntos, no como sistemas), privilegiando el trabajo sobre lo operativo en términos de reglas para utilizar ciertos algoritmos sobre sus elementos; iniciando con números naturales, pasando por los enteros y racionales, para concluir con la presentación de algunos números irracionales como π , ϕ , etc., aunque induciendo la identificación con sus aproximaciones decimales.

Posteriormente, y al hacer su aparición las letras, ya no de manera ocasional para representar cierta generalidad (en cuanto a nombrar elementos o expresar propiedades) o en fórmulas donde toman un valor específico dado, sino en el sentido de operacionalidad, tomadas como representantes de números arbitrarios de un cierto sistema numérico (visto como estructura), no se hace referencia explícita, o no se hace énfasis, en qué conjunto se está trabajando, pues se espera que, vistos ya los conjuntos numéricos, el estudiante no sólo esté en capacidad de manejarlos, sino de asimilar que, en el que se está trabajando es el más amplio posible: el conjunto de los números reales, como posiblemente lo asume el profesor, sin verificar si entre las significaciones de los estudiantes aparece esta noción.

Hay que tener en cuenta el tipo de patrón que se ha de identificar, Villa (2006, p. 143) los clasifica de acuerdo con la diferenciación entre patrones geométricos y aritméticos teniendo en cuenta las siguientes pautas:

- La generalización en patrones geométricos: Tiene unas características particulares y significativamente diferentes a la generalización en patrones aritméticos. Algo para resaltar es que genera unas posibilidades de identificaciones más fáciles por medio de “variables visuales” que en los patrones aritméticos usualmente no existen. Algunas de estas variables son el agrupamiento y la distribución:
 1. Agrupamiento: existen varias formas de asociar o agrupar los diferentes elementos de un patrón geométrico, de las cuales se tomarán como punto de partida del proceso de generalización.
 2. Distribución: al encontrar diferentes tipos de patrones es común que, al momento de generalizarlos, puedan llevar a una misma expresión simbólica.

En el ejemplo clásico que se encuentra en la siguiente imagen, se puede apreciar considerablemente las dos variables implícitas en la generalización de patrones geométricos. El primero de ellos, el agrupamiento se podría distinguir en la cantidad de triángulos que se encuentra en cada una de las posiciones y así, por otra parte, la distribución se evidencia que de una posición a otra hay 3 triángulos de diferencia, lo que permite convertirse en una expresión simbólica de tipo multiplicativo.

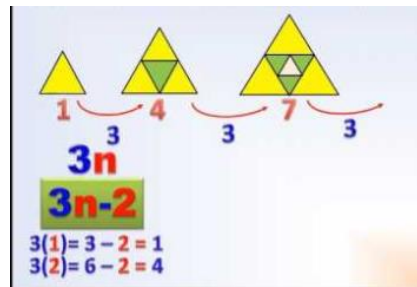


Ilustración 23. Generalización patrón geométrico. Fuente: <https://bit.ly/2JqvcZh>

- La generalización de patrones aritméticos: Es el desarrollo de un encadenamiento de capacidades en relación con un grupo de números determinados, en los cuales se identifican unas series o sucesiones de acuerdo con algunas características o regularidades que estos presenten.

Para ello, Radford (1996, p.110) explicita la idea de que toda generalización y nos lleva a una conclusión, comenzando por una secuencia de “hechos observados”, dichos hechos son interpretados de acuerdo con unas maneras del pensamiento que dependen del conocimiento y los propósitos del observador.

En el siguiente ejemplo (Los números triangulares), se evidencia el uso de los “hechos observados”, por medio del conteo mismo y el mostrar que el incremento (número que se incrementa en cada posición) será siempre la suma de números consecutivos.

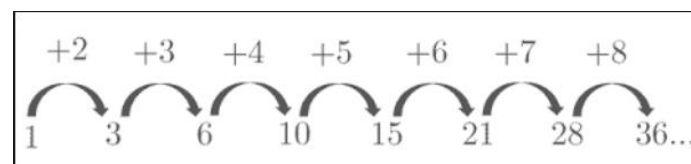


Ilustración 24. Patrón de números triangulares. Fuente: <https://bit.ly/2Py6yse>

b) Momento de Identificación de la regularidad

Este momento está caracterizado por la identificación mental de una regularidad, con esto hace referencia a la imagen que muchas veces evocamos para plantear la secuencia que nos permita encontrar la regularidad. Para ello se presentan Según Fonseca (2015) acciones cómo:

Identificar secuencias, cambios, relaciones transformaciones entre elementos de un conjunto.

Define los elementos de un conjunto de los cuales identificará si tienen una regularidad. Para ello se proponen configuraciones entre elementos, estas configuraciones están en un abanico de posibilidades que se aprenden de la experiencia y se toman como analogía. Pueden ser de tipo:

- Identificar configuraciones a partir de regularidades entre elementos por ejemplo las configuraciones entre los números pares, múltiplos de 5, etc.



- Transformar los elementos del conjunto para darles una regularidad deseada.

De lo cual el grupo Pretexto (1996,1990), afirma que se caracteriza por:

Aparece siempre haciendo parte de una expresión que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de un universo, es decir que la regularidad está presente y es dependencia uno del otro. (p 34).

Por otra parte, el MEN (1998), sugieren que en el proceso de generalización se debe analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de números figuras o letras.

Este mismo proceso de identificación del patrón, lo podemos ver reflejado en Mason (1999) cuando asegura que la generalización se presentan etapas, en especial la primera refiere a este momento:

- La visión de la regularidad, la diferencia, la relación.
- Su exposición verbal
- Su expresión escrita.

Este momento según Radford (1996) se pueden identificar las variables visuales, agrupamiento por “hechos observables”.

c) Momento de Validación de la regularidad

Este momento está caracterizado por la identificación mental de una regularidad, con esto hace referencia a la imagen que muchas veces evocamos para plantear la secuencia que nos permita encontrar la regularidad. Para ello se presentan Según Fonseca (2015) acciones cómo:

- Ejecutar estrategias para verificar si la regularidad se cumple.
- Verificar que la regularidad es para todos los elementos del conjunto.
- Verificar que la regularidad se cumple en los primeros elementos, en otros mucho mayores y en otros aún mayores.

De lo cual inicialmente el grupo Azarquiél (1993, p.43) dice que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes. Precisamente esta equivalencia es la que se puede colocar de manifiesto y servir de demostración.

d) Momento de Establecimiento del patrón matemático

Se entiende por patrón matemático como “algo” que se repite con regularidad tanto en el plano geométrico como en el plano aritmético (Corredor, Pineda & Roa, 2013, p.327), la identificación de un patrón es una forma de generar una “generalización de un fenómeno”.

Según Fonseca (2015) la generalización de un patrón, requiere que el estudiante proponga una expresión verbal o verbal gestual con la que se exprese el patrón identificado y validado, con el cual se considere tal regularidad; esta expresión debe ser clara, concisa para definir el patrón entre los elementos del conjunto,



como lo expresan English y Warren (citados Ávila, López & Luna, 2010, p.35) la generalización de un patrón proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones para registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación simbólica.

De acuerdo con Radford (citado por Vergel, 2015, p.197), la generalización algebraica de patrones comporta las siguientes ideas.

Capturar o identificar una característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$).

La generalización o aplicación de esta particularidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($p_k + 1, p_k + 2, p_k + 3, \dots$).

La capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia. La generalización de la comunalidad a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de la cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010).

Se puede hablar según Radford (citado por Vergel, 2013, p.274) que existen los siguientes tipos de generalización:

Generalización factual: los medios de expresión usados son los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras. Por ejemplo, un estudiante señala con su mirada, con su índice, realiza un movimiento con el lápiz, dice “aquí”, vuelve a señalar y dice “más dos”.

Generalización contextual: los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios de expresión como frases “clave”. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura menos uno”

Generalización simbólica: las frases “clave” son representadas por símbolos. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$.

e) Momento de Demostración del modelo (Validación).

Realizar un argumento con el cual se verifique el modelo para todos los casos. Se identifica un esquema de demostración para validar el modelo: inducción, directo, por reducción al absurdo. Así, se trata de evidenciar lo que ocurre en el patrón (justificación del modelo: desde la manera en que se observa y describe el patrón, justifica ciertas relaciones entre las variables y su matematización.

f) Momento de Demostración por inducción

Deducción del modelo: se emplean sistemas de ecuaciones o interpolación de polinomios para producir y demostrar un modelo.

Una **función** es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes, y puede presentarse a través de varios aspectos complementarios. Un ejemplo habitual de función numérica es la relación entre la posición y el tiempo en el movimiento de un cuerpo. Llevando ese concepto a una concepción más formal, tenemos:



Sean A y B conjuntos, y sea R una relación de A en B . Se dice que R es una función cuando todo elemento $a \in A$ está relacionado con algún $b \in B$, y este elemento b es único. Es decir: $\forall a \in A, \exists b \in B: a R b$. (Farfán y García 2005, p.490).

Un objeto o valor genérico a en el dominio A se denomina la variable independiente; y un objeto genérico b del dominio B es la variable dependiente. También se les llama valores de entrada y de salida, respectivamente. Esta definición es precisa, aunque en matemáticas se utiliza una definición formal más rigurosa, que construye las funciones como un objeto concreto.

Para el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, se inicia con el estudio de regularidades y de los criterios que las rigen, de esta manera, se presenta la unidad la cual se repite con regularidad dando lugar a un patrón, el cual se identifica por las repeticiones periódicas que se presentan. Este se evidencia en secuencias o sucesiones que se demuestra a través de sucesos, formas, objetos o sonidos. Al investigar sobre en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se despliega la capacidad para establecer en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

En cuanto a los patrones, afirma Sánchez y Rivera (2012) que estos se deben establecer como una herramienta necesaria para el inicio de estudio sobre la variación desde la primaria, esto permitirá que se pueda realizar una propuesta de actividades acorde a la relación entre el pensamiento variacional y la música.

Teoría de las inteligencias múltiples

Según Gardner (1994) en su libro **ESTRUCTURAS DE LA MENTE - la teoría de las inteligencias múltiples** presenta los cimientos biológicos de la inteligencia, sobre prerrequisitos de la inteligencia, criterios de una inteligencia, delimita el concepto de una inteligencia, entre otros. Todo esto permite un nuevo enfoque al concepto de inteligencia para convertirse en un concepto funcional que se va desarrollando en la vida de los individuos, De igual manera presenta la teoría de las diferentes inteligencias, las cuales son; 1) inteligencia lingüística, 2) inteligencia musical, 3) inteligencia logicomatemática, 4) inteligencia espacial, 5) inteligencia cinestesicocorporal, 6) las inteligencias personales.

Para este trabajo de investigación hablaremos de dos tipos de inteligencias y de la relación que se presenta:

INTELIGENCIA MUSICAL:

Gardner (Citado por Armstrong, 2000) presenta esta inteligencia musical como;

“la capacidad de percibir (como un aficionado a la música), discriminar (críticos musicales), transformar (compositores) y expresar (intérpretes) las formas musicales. Esta inteligencia incluye la sensibilidad al ritmo, el tono o la melodía, y al timbre o color de una pieza musical. Se puede entender la música desde una perspectiva figural o «de arriba hacia



abajo» (global, intuitiva), formal o «de abajo hacia arriba» (analítica, técnica), o ambas” (, p.19).

INTELIGENCIA LOGICOMATEMÁTICA

Gardner (Citado por Armstrong, 2000) presenta esta inteligencia como;

“La capacidad de utilizar los números con eficacia (matemáticos, contables, estadísticos) y de razonar bien (científicos, programadores informáticos, especialistas en lógica). Esta inteligencia incluye la sensibilidad a patrones y relaciones lógicas, afirmaciones y proposiciones, funciones y otras abstracciones relacionadas. Los procesos empleados en la inteligencia lógico-matemática incluyen: categorización, clasificación, deducción, generalización, cálculo y prueba de hipótesis” (p.19).

A continuación, se presenta la ilustración 25, en la cual se encuentra el resumen de la trayectoria del desarrollo de la inteligencia musical y de la inteligencia logicomatemática.

Tabla 1.1. Cuadro-resumen de la teoría de las IM (1ª parte)			
<i>Musical</i>	Capacidad de producir y apreciar ritmos, tonos y timbres; valoración de las formas de expresión musical.	Sistemas de notación musical, código Morse.	Compositor, intérprete (por ejemplo, Stevie Wonder, Midori).
<i>Lógico-matemática</i>	Sensibilidad a los patrones lógicos o numéricos y capacidad de discernir entre ellos; capacidad para mantener largas cadenas de razonamiento.	Lenguajes informáticos (por ejemplo, Basic).	Científico, matemático (por ejemplo, Madame Curie, Blaise Pascal).

Ilustración 25. cuadro-resumen de la teoría de 1M (1ª PARTE) Fuente: <https://bit.ly/2QEWCVz>

RELACIÓN ENTRE LA INTELIGENCIA MUSICAL Y LA INTELIGENCIA LOGICOMATEMÁTICA

Según Gardner (1994) la relación que se presenta entre estas dos inteligencias está determinada por:

- “El estudio cuidadoso de la música compartía muchas características con la práctica de las matemáticas, como el interés en **las proporciones**, relaciones especiales, patrones recurrentes y otras series detectables” (p.165).
- “**Los patrones formales** que son la razón de ser de un matemático son para los músicos un ingrediente útil, pero no esencial para los propósitos



expresivos a los que se dirigen sus propias capacidades en forma **regular**" (p.166).

- "Una pista a este acertijo proviene del hecho de que, en tanto que los individuos con talento matemático a menudo se sienten intrigados por el **orden o patrones** que se encuentran en áreas en apariencia remotas" (p.221).

De acuerdo con el pensamiento variacional específicamente, Radford (2006, p.18) establece los procesos de generalización como: la capacidad que se tiene para agarrar una homogeneidad que se encuentra en algunos de los elementos de una secuencia cualquiera S , siendo conscientes de que esta similitud se aplica a todos los términos de esa secuencia y que se puede utilizar para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S , es decir, reinterpretar dicha similitud o regularidad por medio de una nueva expresión que acobije a todos los términos pertenecientes a ella.

Como mencionamos anteriormente, en relación a lo musical, el ritmo tiene 3 elementos que lo componen: el pulso, el acento y compás; así, en las definiciones de estos tres elementos se encuentran a la vez, palabras claves como regularidad y periodicidad, y que en términos de Radford (citado por Jimenez G. & Montoya G., 2017) corresponderían a patrones que están presentes en una secuencia, en este caso en una canción.

En dicha relación entre música y matemáticas, se presenta una cita de Vergel (como se cita por Vergel, 2015) en la que se asegura que existen dos tipos de generalización: la generalización pre-simbólica (factual y contextual), que en la música estaría ligada a la percepción auditiva de los ritmos y que como menciona Arbonés & Milrud, (citado por Jimenez G. & Montoya G., 2017) hacer que surja en el oyente la necesidad de mover alguna parte de su cuerpo, un pie, la cabeza, los dedos y hasta en el baile; la otra corresponde a la generalización simbólica que está ligada a los procesos de análisis y escritura de matemática formal, situando aquí el análisis no sólo audioperceptivo si no también el análisis de la escritura musical o el uso mismo de símbolos.

Teoría de la aproximación instrumental

Pérez (2014) expone cuatro enfoques teóricos sobre la integración de las tecnologías en el aula, para la enseñanza particularmente de las matemáticas (Patrones y regularidades). Se exhibe para esta investigación únicamente en la aproximación instrumental la cual emplearemos como marco para estudiar el aprendizaje por medio de recursos didácticos, aunque esté diseñada para el aprendizaje por medio de las tecnologías como se verá a continuación:

Aproximación instrumental (AI).

Esta teoría tiene el fin convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil, debido a la relación presente entre sujeto-instrumento-artefacto-aprendizaje significativo. Pérez (2010), señala que "...se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte de un sujeto en un contexto educativo" (p.30). Esto implica el resultado de la



unión de dos teorías: Ergonomía cognitiva y Teoría Antropológica de lo Didáctico las cuales permiten dar “Legitimidad educativa” y buscar un equilibrio entre lo epistémico y pragmático de las técnicas.

A continuación se presentan especificidades de la aproximación instrumental, como base conceptual para el ejercicio de investigación acerca de la música como mediador entre el conocimiento matemático y los estudiantes, pues proporciona relaciones fundamentales para analizar el papel de las notas musicales como instrumento, artefacto-herramienta- estudiante y aprendizaje.

Los dos fundamentos teóricos permiten a la teoría de aproximación instrumental ser implementada en la educación y explicar la relación entre el objeto de conocimiento, el sujeto y las herramientas utilizadas para acercarnos a este objeto matemático.

1. Teoría antropológica de lo didáctico:

Desarrollada por Chevallard (1999) la cual permite el análisis de las prácticas matemáticas, a través de:

Praxeología: la cual se apoya en el hecho de que todo conocimiento surge a partir de la práctica, existen tres clases:

Praxeología puntual: Refiere a las prácticas matemáticas realizadas en las instituciones.

Praxeología local: Prácticas que pasan a ser unificadas que se convierten en tecnología.

Praxeología regional: Refiere a “las prácticas unificadas que se convierten en teorías” (Chevallard, 1999, p.221-226).

Del mismo modo, la teoría antropológica de lo didáctico no solo propone un trabajo desde la práctica, es más una combinación entre la praxis y el logos, es decir, entre la práctica que conlleva el tipo de:

Tarea: Entendida por Artigue (2002) como los ejercicios y/o problemas propuestos en el aula de clases para ser resueltos por los estudiantes con la ayuda de instrumentos

Técnica: Es entendida como una manera de llevar a cabo, de realizar o de resolver una tarea. Chevallard (1992).

Tecnología: Puesta en juego como los discursos racionales sobre las técnicas, que conlleva tres funciones:

- Justificar de manera racional la técnica.
- Explicar de manera inteligible y esclarecer la técnica.
- Producir nuevas técnicas; y la teoría que se debe tener en la utilización de las tecnologías. (Artigue, 2002, p.19)

Teoría: Como aquella que trata de un nivel superior de justificación-explicación-producción, las cuales retoman el discurso tecnológico, que justifican el uso de las técnicas que permiten llevar a cabo una tarea. Artigue (2002).

Además de las teorías que fundamentan la aproximación antropológica, se encuentran los siguientes referentes y conceptos que permiten



estructurar, comprender y entender la relación Sujeto-Herramienta-Conocimiento, tales como:

Artefactos: Pueden ser materiales o simbólicos y estar producidos con fines sociales, es decir, cosa susceptible de uso, que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales. (Rabardel, 1995)

Instrumentos: Involucran tanto a los objetos físicos o simbólicos (artefactos) como a los esquemas de utilización, es decir, para ser considerado como instrumento es necesario tener en cuenta el artefacto mismo junto con las habilidades del sujeto en su utilización. (Rabardel, 1995)

Recurso pedagógico: según Pedreros (2012) desde el enfoque instrumental un recurso pedagógico es un artefacto a disposición de un profesor y susceptible de evolución, en la medida que el profesor se apropie del recurso y lo ponga en práctica. De ahí que la concepción de un recurso sea una tarea compleja y un único profesor no pueda ser el autor de todos los recursos pedagógicos necesarios en el aula de clase ponga en práctica.

Esquema: Sitio psicológico de la relación de la dialéctica entre los gestos y los invariantes operativos, es decir entre la actividad y el pensamiento. (Trouche, 2003). A la vez, esta es la manera de relacionar los fenómenos internos (instrumento, instrumentación e instrumentalización) de los fenómenos externos (técnicas, técnicas instrumentadas y orquestación instrumental), de este concepto se derivan los esquemas de utilización como una organización mental estable que incluye habilidades técnicas y conceptuales como una forma de usar el *artefacto* en una clase de actividades dadas, de estas Drijvers & Gravemeijer, (2005) proponen dos tipos:

- *Esquemas de uso:* Están orientados hacia la realización de tareas secundarias que corresponden a las acciones y actividades específicas vinculadas directamente con el artefacto.
- *Esquemas de acción instrumentada:* Se basa en mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de la actividad, que en nuestro caso son los objetos matemáticos como las fórmulas, gráficos, etcétera.

En la actualidad como bien lo proponen Vargas & Guzmán (2012), la aproximación instrumental se ha de fortalecer mediante el uso de la resolución de problemas, desde una metodología de situaciones didácticas, en donde la interacción con la herramienta sea necesaria para la solución de una problemática. Esto hace posible, como lo estipula Artigue (2007), la investigación por parte del docente en el dominio de la tecnología y el marco teórico sobre el saber a enseñar, promoviendo así una génesis instrumental institucional que sustentaría las génesis individuales de los estudiantes, por medio de la combinación de los saberes matemáticos y los saberes artefactuales.

Acorde a lo anterior, justificamos el uso de la música como *recurso didáctico*, ya que es tenido en cuenta, en primer lugar, como un artefacto pero que a su vez es apto elemento de perfeccionamiento de acuerdo a la planeación y disposición



misma que el docente le provea en el aula y en el proceso de enseñanza-aprendizaje mismo.

Marco legal

El desarrollo de las diferentes normas, decretos, leyes y en especial los lineamientos propuestos por el MEN son los elementos base en la organización curricular en las diferentes áreas de conocimientos dispuestas para la educación básica y media. En esta investigación se utilizan los documentos legales de matemáticas y de educación artística propuestos por el MEN, en relación con el desarrollo de habilidades necesarias para la construcción de esta propuesta.

En primer lugar, de acuerdo al desarrollo de normatividad educativa, en el país se tiene la Ley 115 de 1994 -Ley General de Educación- que concibe que la educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes. Bajo esa óptica, señala las normas generales para regular este Servicio Público que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad, estableciendo mecanismos que garanticen su prestación y calidad. Por ejemplo, al hablar de los fines de la educación (Art. 5), es de resaltar que *el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones*. Acorde a ello, en el desarrollo de la educación básica y media se presentan a su vez los artículos 21 y 22 que estipulan:

ARTICULO 21. Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria. Los cinco (5) primeros grados de la educación básica que constituyen el ciclo de primaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes:

- l) La formación artística mediante la expresión corporal, la representación, la música, la plástica y la literatura;

ARTICULO 22. Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria. Los cuatro (4) grados subsiguientes de la educación básica que constituyen el ciclo de secundaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes:

- k) La apreciación artística, la comprensión estética, la creatividad, la familiarización con los diferentes medios de expresión artística y el conocimiento, valoración y respeto por los bienes artísticos y culturales;

En lo concerniente al campo matemático, se conciben en primer lugar los Lineamientos Curriculares, en los cuales se expresa que: “El conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan la colectividad, que sirven de argumento, de justificación” (MEN, 1998; p.12). Desde esta visión es una construcción humana, en la cual, prevalece los cuestionamientos que al ser resueltos transforman el entorno y la sociedad. De acuerdo con su estructura se



presentan tres elementos principales, dispuestos en una organización curricular, así:

Los *Procesos generales*, que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los *conocimientos básicos*, que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros. Los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

Resaltando el pensamiento al que se quiere dar cabida, el Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Se presenta así:

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias, y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, 1998, p.49)

Y por último, *el contexto* tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Estas tres dimensiones no se dan de forma aislada o secuencial, al contrario, estos toman significado en cualquier momento del acto educativo.

En concordancia con lo escrito anteriormente, el MEN (2006) propone los Estándares básicos de competencias en matemáticas, concebidos como niveles de avance en procesos graduales. Estos sustentan una estructura basada en los cinco pensamientos y sistemas asociados, los cuales se presentan en columna y son cruzados por algunos de los cinco procesos generales, sin excluir otros procesos que contribuyan a superar el nivel del estándar.

Los estándares están distribuidos en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, y décimo a undécimo) con la intención de dar flexibilidad a la distribución de las actividades en el tiempo, apoyar la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativas y comprensivas. (p.76).

En este sentido, el MEN (2006) asegura: “Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de la matemática y entre el conocimiento conceptual y el procedimental” (pp. 77-78).



La estructura de los Estándares básicos de competencia presenta una coherencia vertical y horizontal.

La primera está dada por la relación que hay entre un estándar y los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grado. La segunda está establecida por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados. (MEN, 2006, p.78-79).

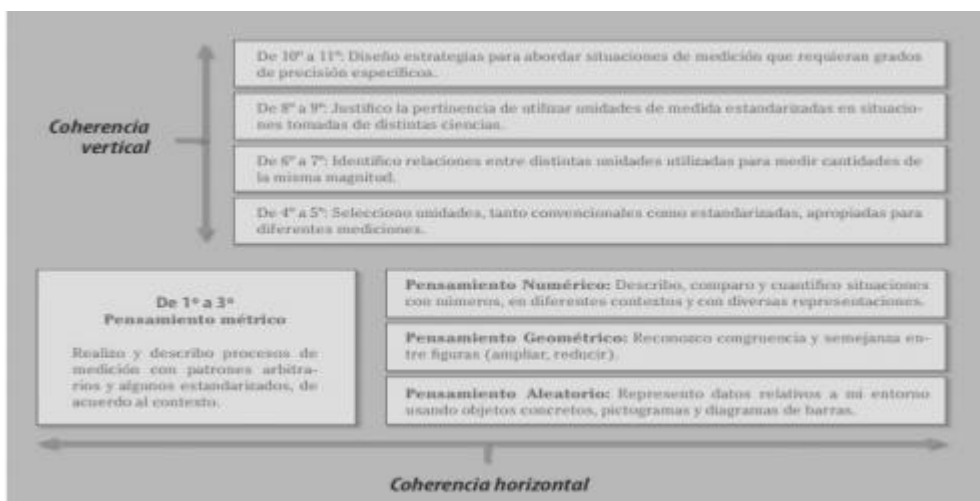


Ilustración 26. Estructuras de los estándares de matemáticas. Fuente: <https://bit.ly/2UMK5pZ>

Por otra parte, en relación al campo artístico, se encuentra un documento denominado lineamientos de educación artística, en el cual La Educación Artística es un área del conocimiento que estudia,

(...) la sensibilidad mediante la experiencia (experiencia sensible) de interacción transformadora y comprensiva del mundo, en la cual se contempla y se valora la calidad de la vida, cuya razón de ser es eminentemente social y cultural, que posibilita el juego en el cual la persona transforma expresivamente, de maneras impredecibles, las relaciones que tiene con los otros y las representa significando la experiencia misma (MEN, 2000, p. 25).

Además, como afirma el MEN (2000),

...el aprendizaje de las artes en la escuela tiene consecuencias cognitivas que preparan a los alumnos para la vida: entre otras el desarrollo de habilidades como el análisis, la reflexión, el juicio crítico y en general lo que denominamos el pensamiento holístico; justamente lo que determinan los requerimientos del siglo XXI. Ser "educado" en este contexto significa utilizar símbolos, leer imágenes complejas, comunicarse creativamente y pensar en soluciones antes no imaginadas. De hecho, las artes sirven de punto de encuentro, integrador de la historia, las matemáticas y las ciencias naturales, así podemos pensar en cualquier pintura como testimonio de un período histórico, o una escultura de Calder como analogía visual de ecuaciones algebraicas. (p.2)



A su vez, estos lineamientos presentan unas orientaciones curriculares por medio de apoyos pedagógicos para: Educación en Artes Plásticas y Visuales, Diseño Gráfico, Audiovisuales, Música, Danza y Teatro. Los textos fueron elaborados por los equipos de trabajo referenciados en las páginas de agradecimientos de este documento y conservan una organización interna autónoma, como modelos particulares de investigación.

En cuanto a la educación en música el MEN (2000) de acuerdo a los logros obtenidos en este documento, se esbozan los estándares correspondientes a los diferentes ciclos de enseñanza, los cuales tienen como premisa:

El quehacer artístico es una experiencia sensible y creativa de interacción con el mundo natural, social y cultural, en la cual se disfruta, se transforma, se reconoce, se significa y se valora, la calidad de la vida de la que se es parte. Esta metodología se estructura, como se presenta en los cuadros anunciados, en un sistema de coordenadas en el que se cruzan procesos curriculares con dimensiones de la experiencia del educando”. (p.60)

La estructura de los cuadros muestra como ejemplo lo correspondiente al grado preescolar, primero, segundo y tercero, como se muestra en la ilustración 20, en la cual se organiza por medio de dimensiones de la experiencia en procesos, dimensión personal, interacción con la naturaleza, dimensión interpersonal y la interacción con la producción artística y cultural y con la historia misma.

CUADRO 7 MUSICA PARA PREESCOLAR Y LOS GRADOS 1° - 2° - 3°				
Dimensiones de la Experiencia Procesos	Dimensión Intrapersonal	Interacción con la Naturaleza	Dimensión Interpersonal	Interacción con la Producción Artística y Cultural y con la Historia
Proceso Contemplativo, Imaginativo, Selectivo Logros Esperados: - Desarrollo perceptivo de las propias evocaciones y fantasías sonoras, de las cualidades sonoras de las propuestas musicales de los otros y de la producción musical del contexto particular. - Apertura al diálogo pedagógico, cambios y generación de actitudes hacia el mundo sonoro y musical.	- Evoca y expresa experiencias sonoras y musicales que ha vivido relativas a su interacción con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. - Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.	- Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Interactúa con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. - Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.
Proceso de Transformación Simbólica de la Interacción con el Mundo Logros Esperados: - Desarrollo expresivo de sensaciones, sentimientos e ideas a través de metáforas y símbolos musicales mediante la expresión corporal, vocal, instrumental, gráfica y tecnológica. - Desarrollo de habilidades musicales comunicativas y auditivas que impliquen dominio técnico y tecnológico.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Interactúa con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. - Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.
Proceso Reflexivo Logros Esperados: - Construcción y reconocimiento de elementos propios de la experiencia sonora, musical y del lenguaje musical. - Desarrollo de habilidades conceptuales.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Interactúa con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. - Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.
Proceso Valorativo Logros Esperados: - Formación del juicio apreciativo de la significación de la producción musical propia, del grupo al que se pertenece, de otros pueblos, en una perspectiva histórica. - Comprensión de los sentidos estético y de pertenencia cultural.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Dialoga con confianza con sus compañeros y con el profesor; participa en juegos musicales en los que transmite sus intuiciones, sentimientos y fantasías musicales. Aporta expresiones corporales, vocales, instrumentales, gráficas y mixtas al juego musical. - Expresa su gusto por las actividades musicales experimentando (producción de ruidos, sonidos, cambios de velocidad, de altura, de intensidad...) con la voz hablada, con las posibilidades sonoras de diferentes objetos y materiales, con la entonación y la expresión corporal, instrumental, gráfica y/o tecnológica. Experimenta con instrumentos de la región, de fabricación propia u otros elegidos por él o ella, la grabadora y otras herramientas tecnológicas a su alcance. - Ejecuta e improvisa ejercicios básicos de ritmo en el acompañamiento de formas sonoras y musicales de su propia inventiva y/o rítmico-melódicas tradicionales que denotan incremento del oído musical y de la entonación.	- Interactúa con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. - Escucha y disfruta silencios, ruidos y sonidos de su cuerpo y de la naturaleza alrededor (viento, agua, animales...), expresiones de los demás (compañeros, familia, amigos) y el entorno sonoro y musical en general. - Imagina juegos rítmicos y composiciones rítmico-melódicas sencillas, silencios, ruidos, sonidos y melodías retomando los sonidos de la naturaleza y al entorno social y cultural (en el aula, en la casa, en la calle). Explora materiales e instrumentos sencillos para expresar sus evocaciones, observaciones y fantasías sonoras y musicales. - Denota progresivo interés por sus propias evocaciones, percepciones e imaginación sonoras y las de los otros.

Ilustración 27. Ejemplo estándares de música grados preescolares, 1°, 2° y 3° Fuente:

Cabe destacar que los documentos anteriormente mencionados no son los únicos dispuestos por las políticas educativas y curriculares de Colombia, pero estos presentan los elementos necesarios para la justificación misma de la propuesta, en cuanto a las competencias básicas que deben cumplirse en cada uno de los casos.

CAPÍTULO III

En el presente capítulo se realiza una contextualización de la investigación cualitativa y asimismo cómo se desarrolla en un análisis documental. De acuerdo a lo anterior, se definen y desarrollan unas fases de aplicación de acuerdo a la



construcción teórica, revisión y selección documental y por último, la construcción de la propuesta de actividades.

Metodología de investigación

Como menciona Stake (citado por Castro, 2010) el objetivo de la investigación cualitativa es la comprensión, centrada en la indagación en los hechos; mientras que la investigación cuantitativa fundamentará su búsqueda en las causas, persiguiendo el control y la explicación". A partir de esto, se define que el enfoque de esta investigación será cualitativo, ya que la finalidad de la misma es un proceso, una construcción que en el tiempo se va superando, a la cual se accede mediante interpretaciones sucesivas sobre el objeto indagado.

Así, los estudios cualitativos, como afirma Luvezute, Scheller y Bonotto (2015) se caracterizan como aquellos que buscan comprender un fenómeno en el ambiente natural donde estos ocurren. Para ello el investigador es el instrumento principal por captar la información, interesándose más por el proceso que por el producto (Bogdan & Biklen, 1994, citado en Luvezute, 2015). La información o los datos recopilados pueden obtenerse y analizarse varias maneras dependiendo del objetivo que se desea alcanzar. En un estudio cualitativo la búsqueda de datos en la investigación lleva al investigador a recorrer caminos diversos, es decir, utiliza una variedad de procedimientos e instrumentos de constitución y análisis de datos. Los instrumentos para la constitución de datos generalmente utilizados son: cuestionarios, entrevistas, observación, grupos focales y análisis documental (siendo este último, el elegido por nuestra investigación).

A favor del análisis documental, este es tenido en cuenta como un procedimiento para la comprensión de la realidad social y la producción de conocimiento a través del análisis de diversos tipos de documentos, en este documento se plantea cuatro fases, definidas así:

FASE 1: Construcción teórica de acuerdo al estado del arte y el marco teórico.

FASE 2: Revisión documental detalla de elementos fundamentales de la investigación:

- **C1.** La relación entre la Matemática y la música.
- **C2.** Referentes legales para la enseñanza de la matemática y la música en el país.
- **C3.** Enseñanza de la matemática utilizando como recurso didáctico la música.

FASE 3: Selección documental, seleccionando los documentos que permitían la construcción de la propuesta de enseñanza en cada categoría.

FASE 4: Construcción de la propuesta de carácter secuencial en términos macro curriculares.

Desarrollo metodológico:

FASE 1. Construcción teórica



La realización del marco teórico y del estado del arte, de acuerdo a los intereses de esta investigación, presentamos las categorías de análisis y revisión documental propuestas para la construcción de la propuesta de enseñanza, las cuales son:

Tabla 1 Descripción de categorías de análisis.

C1.	La relación entre las matemáticas y la música , se presenta documentos en los cuales se desglosan en la conceptualización del pensamiento variacional, de acuerdo a patrones, regularidades y generalizaciones. Por otra parte, se presenta documentos que involucran los conocimientos básicos de la música.
C2.	Referentes legales para la enseñanza de la matemática y la música en el país. Se presentan los documentos curriculares base, que permite una contextualización en el ámbito educativo de las matemáticas y la música vistas como ciencias en el desarrollo del aprendizaje-enseñanza en la educación básica y media de Colombia.
C3.	Enseñanza de la matemática utilizando como recurso didáctico la música. Se presentan dos tipos de documentos: 1) Documentos en los cuales desglosan una de las dos ciencias en cuanto a la enseñanza. 2) Documentos en los cuales se involucra la relación matemática-música en el desarrollo del pensamiento variacional.

Fuente: construcción propia

FASE 2. Revisión documental

En la búsqueda de documentación requerida para la justificación y sustentación de nuestro trabajo de investigación, se realiza una exploración exhaustiva de diferentes fuentes, que permitieron fijar los intereses secundarios de acuerdo a las categorías anteriormente nombradas.



Tabla 2 Revisión documental.

	Titulo	Autor	Descripción	Link
C1	Las regletas de patrones rítmicos: experiencias de aprendizaje lúdico creativo.	Helen Roxana Valverde Limbrick (2010).	Los patrones rítmicos constituyen una experiencia de aprendizaje innovador que la educación infantil.	https://bit.ly/2TgW5OW
	La música como estrategia dinamizadora para facilitar los procesos de aprendizaje en la educación inicial	Andrea Calderón Diaz (2015).	La música como estrategia dinamizadora para facilitar los procesos de aprendizaje.	https://bit.ly/2FI6LZ6
	El juego la escalera como dispositivo para la formulación de patrones aritméticos.	Gloria Esperanza Rodríguez Pedraza (2018).	La expresión corporal entendida como medio de comunicación de saberes, el desarrollo de lengua de señas desde la generalización de patrones y el juego la escalera.	https://bit.ly/2FaGonA
	Los secretos del círculo de quintas.	ComunidAd Musinetwork (s.f)	Teoría, ejemplos, ejercicios referidos al círculo de quintas.	https://bit.ly/2ObjNv6
	Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria.	María Isabel Ramírez Garzón, Mónica Pineda Ballesteros, Solange Roa Fuentes (2013).	El desarrollo del proceso de generalización de estudiantes entre 9 y 12 años, a partir del estudio de situaciones sobre patrones en diferentes representaciones.	https://bit.ly/2Ocsgy9
	El método Kodály y su adaptación en Colombia	Alejandro Zuleta (2004).	El Método Kodály es un método de educación musical basado en el canto coral que parte de la música tradicional como “lengua materna” a partir de la cual un niño aprende a leer y escribir su propio idioma musical.	https://bit.ly/2TgaY4b
	La metodología Kodály aplicada a la escuela primaria.	Marco Lucato (1996).	La necesidad de la formación permanente del profesorado de Educación musical para aprender nuevos conceptos y técnicas.	https://bit.ly/2F6BGHa





Análisis interpretación de patrones musicales.	Néstor Abidy García Fragoso (2013).	Método computacional para poder identificar características simples de la música.	https://bit.ly/2XK59iN
Usamos patrones al entonar canciones, en nuestra vida diaria.	Sin autor (s.f)	Una sesión con actividades, donde se espera que los niños y las niñas construyan patrones de repetición usando sonidos y movimientos.	https://bit.ly/2Y5ue85
Identificación automática de acordes musicales.	Luis I. Ortiz Berenguer (2002).	La identificación automática de acordes musicales es un eslabón en la cadena de la transcripción automática.	https://bit.ly/2UDSIDf
Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.	Artigue Michele (2001).	Se habla del enfoque antropológico en la didáctica iniciado por Chevallard y la teoría de la instrumentación desarrollada en ergonomía cognitiva.	https://bit.ly/2UEziOp
La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas.	Mario Silvino Ávila Sandoval, Carlos López Ruvalcaba, Juan Luna González (2010).	Una investigación que explora las habilidades de generalización de patrones cuadráticos de estudiantes del nivel intermedio de la carrera de matemáticas.	https://bit.ly/2Ce18d9
Ideas y actividades para enseñar álgebra.	Azarquiel, G. (1993).	Conjunto de reflexiones sobre los problemas que plantea la didáctica del álgebra, especialmente en educación secundaria.	https://bit.ly/2uhMRYH
Instrumentos psicológicos y la teoría instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos.	Ballester, A. E. (2007).	Se presentan los principales aspectos que caracterizan a las teorías de los instrumentos psicológicos de Vygotsky y la teoría de la instrumentación desarrollada por Verillon y Rabardel.	https://bit.ly/2FfLQ8K
Music: A mathematical offering. The Mathematical Intelligencer	Benson, D. J. (2008).	Por medio de la naturaleza, se hace una reflexión de la relación entre la música y los elementos matemáticos inmersos.	https://bit.ly/2Wfmizn





Valor pragmático y epistémico de técnicas en la Resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo.	Verónica Vargas-Alejo José Guzmán-Hernández (2012).	Se muestra cómo esa interacción de los estudiantes con el artefacto (Excel) posibilitó el surgimiento de nuevas técnicas, cada vez más sofisticadas, y de teoría, lo que les permitió explicar los resultados obtenidos al resolver problemas. El marco conceptual que sustenta esta investigación es conocido como Tarea Técnica-Teoría (T-T-T) y fue propuesto por Artigue (2002).	https://bit.ly/2TMi5pS
Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).	Rodolfo Vergel Causado (2014).	La emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones.	https://bit.ly/2HtZ7hy
Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques	Chevallard, Y (1991).	Aportes de acuerdo a la teoría antropológica de lo didáctico.	https://bit.ly/2FpIJfv
El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques.	Chevallard, Y (1999).	Propone una presentación lineal de los conceptos clave del enfoque antropológico de la enseñanza de las matemáticas.	https://bit.ly/2HxzLz8
Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria.	Xiomara Corredor Santos, Mónica Pineda Ballesteros, Solange Roa Fuentes. (2013).	En este escrito se analiza el desarrollo del proceso de generalización de estudiantes entre 9 y 12 años, a partir del estudio de situaciones sobre patrones en diferentes representaciones.	https://bit.ly/2TeLtiB
Cómo leer MÚSICA.	Roger Evans (2005).	El libro cuenta con conceptos básicos en cuanto a la música, es un método para principiantes.	Editorial-España: EDAF.





Routes to Algebra, Roots of Algebra.	Mason, J. (1985).	Refleja la importancia de la generalización para las matemáticas y el cómo el estudiante debe generar las propias.	https://bit.ly/2OfGFto
Patrones y representaciones de alumnos 5º de educación primaria en una tarea de generalización.	Eduardo Merino Cortés (2012).	En este trabajo se indaga el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto curso de educación primaria (10-11 años). Para ello, los estudiantes participantes en el estudio respondieron una prueba escrita elaborada por los investigadores.	https://bit.ly/2HG8FFI
La más sencilla, útil y práctica. TEORIA DE LA MUSICA.	Francisco Moncada García (1995).	Un libro útil para la enseñanza de conceptos musicales de manera más práctica.	Ediciones FRAMONG
Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental.	Maritza Pedreros Puente (2012).	Esta propuesta combina fundamentalmente dos referentes teóricos. De una parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) a partir de la cual se fundamenta la modelización de situaciones de movimiento y por otro lado el Enfoque Instrumental permite fundamentar la integración de Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) ¹ en tanto instrumento central para la creación, representación y manipulación de funciones.	https://bit.ly/2Fb29Ui
La transición aritmética-álgebra.	Pedro J. Rojas G. Jorge Rodríguez B. Jaime H. Romero c. Eugenia Castillo E. Luis O. Mora v. Grupo pretexto (1999).	Se presenta tanto algunas consideraciones en torno a dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, como resultados parciales de un estudio realizado con estudiantes de octavo grado.	https://bit.ly/2TOClqr
Formas, patrones y relaciones actividades de la vida.	A.Quiñónez (2012).	Se presentan actividades, como apoyo a los docentes, les permitan en una escuela por grados trabajar sobre formas, patrones y relaciones.	https://bit.ly/2Thuj4S
Les hommes et les technologies, approche cognitive des	P.Rabardel (1995).	Se habla de objetos o sistemas antropotécnicos de acuerdo al inicio de la	https://bit.ly/2FfU4O6





instruments contemporains. Paris, Armand Colin.		tecnología y el aprovechamiento cognitivo de los mismos.	
La emergencia de los enfoques de la complejidad en América Latina	Leonardo G. Rodríguez Zoya (2016).	Permite visibilizar experiencias prácticas, proyectos de investigación y programas de acción sustentados en los enfoques de la complejidad y orientados a intervenir sobre problemáticas concretas.	https://bit.ly/2TM0Chx
Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el Aula.	Pedro Javier Rojas Garzón (2010).	Son varios los problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar, algunas de cuyas manifestaciones, pueden ser referidas a aspectos generales.	https://bit.ly/2HGKDtH
Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos.	Elizabeth Rivera Muñoz, Luisa Fernanda Sánchez Chaverra (2012).	El siguiente trabajo presenta los resultados de una secuencia de actividades aplicada a los estudiantes del grado tercero (B) de una entidad privada, relacionada con la generalización de patrones.	https://bit.ly/2Tiw3L3
La actividad mediada por instrumentos en didáctica de las matemáticas.	Marisol Santacruz Rodríguez (2006).	Presenta un aporte importante en cuanto al enfoque instrumental en el campo de la didáctica de las matemáticas es mostrar la influencia que tiene la emergencia de instrumentos, la mediación instrumental y los sistemas de instrumentos, en la construcción del saber matemático.	https://bit.ly/2W8FNcQ
Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations.	Trouche, L. (2003).	Se plantea la importancia de la orquestación instrumental en el uso y conocimiento de instrumentos matemáticos	<i>Edición del IREM. Montpellier: Université Montpellier.</i> https://bit.ly/2UiZKAz
El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación.	Jhony Alexander Villa Üchoa (2006).	El presente documento intenta plantear algunas reflexiones en torno a esta última perspectiva, la de la generalización, en lo referente a sus procesos de validación.	https://bit.ly/2UOi7ud
Función matemática.	Wikipedia (s.f).	Sobre el concepto de función.	https://bit.ly/2ubTdsH





	PALÍNDROMOS de Gödel, Escher, Bach y... Mozart. Un Eterno y Grácil Bucle... Móvil.	Anónimo (s.f).	En ella, encontramos un diálogo (Canon Cangrejo) que se repite terminando igual que empieza, es un curioso "palíndromo".	https://bit.ly/2HGdNJw
	Teoría de ondas de Elliot.	Pablo Desiderio (2002).	Habla sobre La Teoría de Onda de Elliot, sus antecedentes, principios y particularidades y, a continuación, las posibilidades de aplicar exitosamente la misma a la negociación de los contratos operados en Rofex.	https://bit.ly/2TiOq2w
	La teoría de fractales: aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia.	Raúl Rodríguez Miranda (1995).	Es una tesis que tiene por objetivo demostrar que los objetos fractales son consecuencia de la matemática de finales del siglo pasado.	https://bit.ly/2VdaUDV
C2.	Ley 115 –ley general de Educación.	MEN (1994).	Es la ley que establece el congreso de la república de Colombia en cuanto a todo lo relacionado con la educación tanto formal como informal, en todos los niveles.	https://bit.ly/2BxYhbU
	Lineamientos curriculares de matemáticas.	MEN (1998).	Presentan tres elementos importantes en la organización curricular, como lo son; los procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.	https://bit.ly/2r9w8EV
	Estándares curriculares de competencias matemáticas.	MEN (2006).	Este documento presenta los cinco pensamientos y sistemas asociados, de igual manera se presenta los cinco procesos generales.	https://bit.ly/2tOnn7P
	Lineamientos curriculares de educación artística	MEN (1998).	Este documento presenta la importancia del desarrollo cognitivo en la educación básica y media en áreas como el teatro, diseño, danza y música entre otros. Planteando estándares de acuerdo a cada una de estas.	https://bit.ly/2ugBSPc
C3.	La armonía es numérica RBA.	Javier Arbonés Pablo Milrud (2011).	La relación que existe entre la música y algunos aspectos de las matemáticas. Compositores que han utilizado las matemáticas en algunas de sus obras.	Sello: RBA Artículo: Libro ISBN: 9788498679434 País de impresión: España





¿A qué le suenan las matemáticas?	Leidy Ximena López Roa (2015).	Propuesta donde se explora cómo una sucesión de sonidos a través del tiempo combinando alturas y ritmo (melodía).	https://bit.ly/2Fc0m1b
Matemáticas y música de 0 a 3.	Mercedes López Rodríguez (2016).	Varias propuestas que pueden utilizarse para conectar el conocimiento matemático con la música con niños de 0 a 3 años.	https://bit.ly/2TY2TW4
El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas.	María Cecilia Tomasini (s.f).	Fundamentos matemáticos de la música, estudiados y enunciados por los pitagóricos, constituyeron la base de todos los manuales de música que se elaboraron.	https://bit.ly/2TkPao8
El ritmo del pasillo colombiano: un factor musical para el desarrollo de procesos de generalización.	Ana Elizabeth Jiménez Gil. Alejandro Augusto Montoya (2017).	Propuesta para provechar aquellas cosas que los alumnos disfrutan como lo es la música para realizar procesos de enseñanza matemáticos.	https://bit.ly/2CpTaOc
La metáfora geométrica en la música: una transferencia de experiencias de pensamiento entre dos disciplinas	Myriam Arroyave (2012)	Una metáfora geométrica, una transferencia de experiencias de pensamiento entre geometría y música.	https://bit.ly/2JvQKDE
Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía.	Carlos Pérez de la Cruz (2013).	Usar las cualidades más favorables de una de estas materias, en términos de enseñanza – aprendizaje, para ser aplicadas en la otra.	https://bit.ly/2TVmJkQ
Música y Matemática. Modelos compositivos a partir de geometrías fractales.	Carlos Satué Ros, Carlos Frías (s.f).	Adaptación de algunos modelos matemáticos (geometrías fractales) al ámbito musical.	https://bit.ly/2TQoqiD
Música y Matemáticas La armonía de los números.	Vicente Liern Carrión, Tomás Queralto Llopis (2008).	La relación entre música y matemáticas, ejemplos, actividades, etc.	https://bit.ly/2LbcDrE
Música y Matemáticas.	María del Carmen Bertos (s.f).	Teorías matemáticas sobre la música y las teorías que sostiene un origen común a música.	https://bit.ly/2TKSEoQ
Los fractales en la música.	María Nieves Venegas Acuña (s.f).	Composición musical algorítmica, música fractal en la historia, ¿cómo se crean los sonidos fractales? Ejemplo.	https://bit.ly/2TKrKH7





Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais	Carlos dos Santos, Luiz Lisete Mónico, Sandra Campelos, Carlos Fernandes da Silvaiv (2015).	Matemáticos e físicos foram encontrando ao longo dos tempos analogías entre matemática e música.	https://bit.ly/2HuOScl
Sistematización del diagrama musical a partir de la experimentación con instrumento (piano).	Carolina Cedeño Niño, Kelly de Arco Jiménez (2016).	Se pretende identificar la relación entre las figuras musicales y la matemática, haciendo todo un análisis proporcional de los conceptos utilizados en la música para comprender y manejar dichas figuras (Piano).	https://bit.ly/2HEey5X
Janeiro a Proporções na música da Antiguidade e Medieval	Ferreira, M. P. (2005).	Relación entre las proporciones que se encuentran en la música en la antigüedad y medieval.	<i>Revista de Educação Musical</i> , 121-123, 5-23.
Estructuras de la mente la teoría de las inteligencias múltiples.	Howard Gardner. (1994).	Presenta la teoría de que la inteligencia no es una, es múltiple: lingüística, musical, lógica-matemática, espacial, corporal, personal.	México- editorial: Fondodeculturaeconomica .
Las matemáticas y la música.	María del mar González (2015)	Un blog donde presenta el domino musical.	https://bit.ly/2TPeszB
Las matemáticas de Johann Sebastián Bach	SUMA+ (2009).	Recopila una serie de información sobre la relación matemáticas-música con ejemplos.	https://bit.ly/2Y54VTG
¿Las matemáticas en la música?	Gabriel Martínez Ramos (2012).	Presenta información sobre la teoría matemática de música, la cual fue creada alrededor de 1980 y que se encarga del estudio de la musicología mediante una estructura algebraica.	https://bit.ly/2Ct3d58
Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía.	Carlos Pérez de la Cruz (2013).	Establece una relación entre la música y las matemáticas parte de un interés didáctico que busca como objetivo principal poder usar las cualidades más favorables de una de estas materias, en términos de enseñanza – aprendizaje, para ser aplicadas en la otra. Ambas pueden compartir esta simbiosis.	https://bit.ly/2TVmJkQ





Bach y la fascinante relación entre la música y las matemáticas.	Alejandro Mar (2018).	Artículo sobre: La música de Bach y su relación con las matemáticas.	https://bit.ly/2HrNLdP
Guía didáctica: música-matemática.	Florian Vlashi, María Remedios Cruz Araújo (s.f).	La historia de la música y su relación con las matemáticas, es un libro lleno de está relación con ejemplos.	https://bit.ly/2OcXJQN
Matemática en la Música I.	Sin autor (s.f).	Presenta está relación entre las matemáticas-música a lo largo de la historia.	https://bit.ly/2ue55dF
Las matemáticas escondidas en las grandes obras de arte.	Marcus du Sautoy (2016).	Un artículo sobre las matemáticas y el arte y como se presenta en distintas obras de arte alrededor del mundo.	https://bbc.in/2Y2Wx74
Las Matemáticas en el serialismo musical.	Manuel Domínguez Romero (2004).	Se presenta la relación de las matemáticas con el serialismo musical, en donde se presentan cuatro axiomas para componer la música de esa época.	https://bit.ly/2FiifeK
Inteligencias múltiples en el aula.	Thomas Amrstrong	Es una guía práctica para educadores, en donde se presenta todo sobre las inteligencias múltiples que habla Howard Gardner en su teoría.	https://bit.ly/2QEW CZy

Fuente: construcción propia





FASE 3. Selección documental

De acuerdo a la exploración realizada en la fase dos, se hizo necesarios abstraer los documentos más significativos para nuestra investigación, es decir, aquellos documentos utilizados en esta propuesta, de acuerdo a las diferentes categorías anteriormente mencionadas.

Tabla 3 Selección documental.

	TÍTULO DEL DOCUMENTO	JUSTIFICACIÓN
C1.	La música como estrategia dinamizadora para facilitar los procesos de aprendizaje en la educación inicial.	La música se desarrolla como una estrategia dinamizadora que se desarrolló con el ánimo de dar solución a las situaciones que se presentan respecto a la falta de motivación e interés de los infantes en las actividades escolares, pues estas son rutinarias. Presentando una estrategia de intervención innovadora.
	Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.	En el desarrollo de la teoría de la instrumentación y el enfoque antropológico, se centra en los siguientes puntos: la complejidad inesperada de la génesis instrumental, las necesidades matemáticas de la instrumentación, el estado de los instrumentos, técnicas, los problemas derivados de su conexión con las técnicas de papel y lápiz, y su gestión institucional.
	La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas.	Una investigación que explora las habilidades de generalización de patrones cuadráticos de estudiantes del nivel intermedio de la carrera de matemáticas
	Ideas y actividades para enseñar álgebra.	Este documento analiza la práctica docente en educación secundaria, de acuerdo a actividades del pensamiento variacional, posibles problemáticas y alternativas de las mismas.
	Instrumentos psicológicos y la teoría instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos.	De acuerdo a las teorías de los instrumentos psicológicos de Vygotsky y la teoría de la instrumentación desarrollada por Verillon y Rabardel, se presenta un análisis que evidencia los principales elementos comunes y las diferencias entre ambas teorías, así como la relevancia y pertinencia de estas cuando se desea determinar el impacto de la tecnología dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
	Valor pragmático y epistémico de técnicas en la Resolución de problemas verbales algebraicos en	Se muestra cómo esa interacción de los estudiantes con el artefacto (Excel) posibilitó el surgimiento de nuevas técnicas, cada vez más sofisticadas, y de teoría, lo que les permitió explicar los resultados obtenidos al



ambiente de hoja electrónica de cálculo.	resolver problemas. El marco conceptual que sustenta esta investigación es conocido como Tarea Técnica-Teoría (T-T-T) y fue propuesto por Artigue (2002).
Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématique	Se presenta una primera introducción al enfoque antropológico aquí en el análisis de la didáctica. Luego viene la presentación de la teoría y sus conceptos principales, tal como se desarrollaron a partir de las primeras formulaciones del proceso de transposición didáctica.
Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria.	En este escrito se analiza el desarrollo del proceso de generalización de estudiantes entre 9 y 12 años, a partir del estudio de situaciones sobre patrones en diferentes representaciones.
Cómo leer MÚSICA.	El libro cuenta con conceptos básicos en cuanto a la música, es un método para principiantes. El cuál se usó para dar algunas definiciones en el marco teórico con respecto a los conceptos musicales.
Janeiro a Proporções na música da Antiguidade e Medieval.	Relación entre las proporciones que se encuentran en la música en la antigüedad y medieval. Se usó para el estado del arte.
Patrones y representaciones de alumnos 5º de educación primaria en una tarea de generalización.	En este trabajo se indaga el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto curso de educación primaria (10-11 años). Para ello, los estudiantes participantes en el estudio respondieron una prueba escrita elaborada por los investigadores.
La más sencilla, útil y práctica. TEORIA DE LA MUSICA.	Un libro útil para la enseñanza de conceptos musicales de manera más práctica.
Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental.	Esta propuesta combina fundamentalmente dos referentes teóricos. De una parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) a partir de la cual se fundamenta la modelización de situaciones de movimiento y por otro lado el Enfoque Instrumental permite fundamentar la integración de Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) ¹ en tanto instrumento central para la creación, representación y manipulación de funciones.
La transición aritmética-álgebra.	Se presenta tanto algunas consideraciones en torno a dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, como resultados parciales de un estudio realizado con estudiantes de octavo grado.
FORMAS, PATRONES Y RELACIONES actividades de la vida.	Se presentan actividades, como apoyo a los docentes, les permitan en una escuela por



		grados trabajar sobre formas, patrones y relaciones.
	Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris, Armand Colin.	El documento permite realizar una revisión de acuerdo a las conceptualizaciones tecnológicas que permiten analizar objetos y los sistemas antropotécnicos desde el punto de vista tecnológico.
	La emergencia de los enfoques de la complejidad en América Latina	El documento permite problematizar los paradigmas, teorías y métodos de la complejidad, a través del análisis crítico de los fundamentos lógico-epistemológicos, los supuestos ontológicos, las consecuencias metodológicas y las implicancias ético-políticas que estos enfoques plantean.
	Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el Aula.	Son varios los problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar, algunas de cuyas manifestaciones, pueden ser referidas a aspectos generales.
	Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos.	El siguiente trabajo presenta los resultados de una secuencia de actividades aplicada a los estudiantes del grado tercero (B) de una entidad privada, relacionada con la generalización de patrones.
	La actividad mediada por instrumentos en didáctica de las matemáticas.	Presenta un aporte importante en cuanto al enfoque instrumental en el campo de la didáctica de las matemáticas es mostrar la influencia que tiene la emergencia de instrumentos, la mediación instrumental y los sistemas de instrumentos, en la construcción del saber matemático.
	Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations.	El artículo propone un enfoque para analizar la integración de herramientas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este enfoque trata de articular varios marcos teóricos, algunos clásicos para la didáctica de las matemáticas (la teoría de situaciones o el enfoque antropológico), otros menos habituales, como el enfoque instrumental, pero que resultaron ser fructíferos para los estudios.
	El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación.	El presente documento intenta plantear algunas reflexiones en torno a esta última perspectiva, la de la generalización, en lo referente a sus procesos de validación.
C2.	Ley general de educación 115	Se pretende de este documento extraer los fines de la educación y aquellos artículos que hablan de los elementos concernientes a la educación básica y media.



	Lineamientos curriculares de matemáticas.	Se hace un enfoque hacia los procesos generales, conocimientos básicos y el contexto mismo, principalmente en el desarrollo del pensamiento variacional.
	Estándares curriculares de competencias matemáticas.	De acuerdo a la coherencia vertical y horizontal de los estándares básicos de competencias, se pretende organizar las disposiciones de la propuesta acorde a los objetivos del diseño.
	Lineamientos curriculares de educación artística.	De acuerdo a la educación musical se desarrolla la conceptualización y estrategia metodológica utilizada en el planteamiento de los estándares generados por ciclos.
C3.	La armonía es numérica RBA.	La relación que existe entre la música y algunos aspectos de las matemáticas. Compositores que han utilizado las matemáticas en algunas de sus obras.
	¿A qué le suenan las matemáticas?	Propuesta donde se explora cómo una sucesión de sonidos a través del tiempo combinando alturas y ritmo (melodía).
	El ritmo del pasillo colombiano: un factor musical para el desarrollo de procesos de generalización.	Propuesta para provechar aquellas cosas que los alumnos disfrutaban como lo es la música para realizar procesos de enseñanza matemáticos.
	Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía.	Usar las cualidades más favorables de una de estas materias, en términos de enseñanza – aprendizaje, para ser aplicadas en la otra. Fue una guía importante para pensar las actividades.
	Música y Matemáticas La armonía de los números.	La relación entre música y matemáticas, ejemplos, actividades, etc.
	Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais	Matemáticos e físicos foram encontrando ao longo dos tempos analogias entre matemática e música.
	Sistematización del diagrama musical a partir de la experimentación con instrumento (piano).	Se pretende identificar la relación entre las figuras musicales y la matemática, haciendo todo un análisis proporcional de los conceptos utilizados en la música para comprender y manejar dichas figuras (Piano).
	Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).	El documento permite identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.



Janeiro a Proporções na música da Antiguidade e Medieval.	Relación entre las proporciones que se encuentran en la música en la antigüedad y medieval.
Estructuras de la mente la teoría de las inteligencias múltiples.	Presenta la teoría de que la inteligencia no es una, es múltiple: lingüística, musical, lógica-matemática, espacial, corporal, personal.
Las matemáticas y la música.	Un blog donde presenta el domino musical.
Las matemáticas de Johann Sebastian Bach.	Recopila una serie de información sobre la relación matemáticas-música con ejemplos.
¿Las matemáticas en la música?	Presenta información sobre la teoría matemática de música, la cual fue creada alrededor de 1980 y que se encarga del estudio de la musicología mediante una estructura algebraica.
Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía.	Establece una relación entre la música y las matemáticas parte de un interés didáctico que busca como objetivo principal poder usar las cualidades más favorables de una de estas materias, en términos de enseñanza – aprendizaje, para ser aplicadas en la otra. Ambas pueden compartir esta simbiosis.
Bach y la fascinante relación entre la música y las matemáticas.	Artículo sobre: La música de Bach y su relación con las matemáticas.
Guía didáctica: música- matemática.	La historia de la música y su relación con las matemáticas, es un libro lleno de esta relación con ejemplos.
LAS MATEMÁTICAS EN EL SERIALISMO MUSICAL.	Se presenta la relación de las matemáticas con el serialismo musical, en donde se presentan cuatro axiomas para componer la música de esa época.
Inteligencias múltiples en el aula.	Es una guía práctica para educadores, en donde se presenta todo sobre las inteligencias múltiples que habla Howard Gardner en su teoría.

Fuente: construcción propia



Fase 4: PROPUESTA DE ACTIVIDADES

JUSTIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

La importancia de esta propuesta de actividades radica en que será un aporte para los docentes en formación y docentes en ejercicio, ya que es innovadora en relación con las formas de enseñar las matemáticas para lograr aprendizajes significativos de las mismas a través de la música. Asimismo la propuesta está ligada a un sitio web que permitirá tener al alcance los recursos utilizados en cada una de ellas.

Link Pagina Web

<https://musicmathlearn.wixsite.com/musicmathlearn>

Estas actividades están pensadas a partir de lo que se determina en la Ley general de educación 115 (1994), los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares básicos de competencia en matemáticas (2006) y en los Lineamientos curriculares de educación artística (1998), y se plantean con el propósito de trabajar la relación matemáticas-música, para alcanzar algunos conocimientos relacionados con la música, y cómo se podría crear ciertos tipos de patrones rítmicos, usando el valor numérico de cada figura rítmica y su representación, para reconocer conceptos de carácter matemático.

Según Gardner (1999) para apreciar la operación de los ritmos en la obra musical, es necesario que el individuo posea ciertas competencias numéricas básicas, ya que las interpretaciones requieren sensibilidad a la regularidad y a las relaciones, que a veces pueden ser complejas” (p.165). En este sentido, es pertinente que el docente sepa que las actividades planteadas en esta propuesta para los grados inferiores se podrán utilizar en los grados superiores, esto implica que el estudiante podrá adquirir ciertos conocimientos básicos en cuanto a la música, en cualquier grado, sabrá que es una métrica, cuáles son las figuras rítmicas, cuál es la equivalencia de las figuras rítmicas en cuanto a lo numérico y entre ellas mismas, todo esto con el fin de trabajar patrones musicales

Para Pólya (1966) “el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La idea básica de la noción de patrón es que surgen a partir de la repetición de una situación con regularidad” (como se cita en Merino, 2012, p.17). Pero esto no quiere decir, que la música se torna a ser siempre generalizada, lo que se quiere mostrar es que la propuesta creada permita por medio de las actividades para cada bloque de grados, puede utilizarse como medio para generalizar ciertos patrones, de igual manera permitirán darle una introducción al objeto matemático que se quiere trabajar. Lo que explica que la música como las matemáticas no está estrictamente ligadas, sino que comparte ciertos procesos y conceptos, lo que permite vincularlas en la enseñanza de estas áreas. A continuación, se presenta las distintas actividades.

A continuación se presenta las distintas actividades:



ACTIVIDAD GRADOS 1°, 2° y 3°

NOMBRE DE ACTIVIDAD	CANTANDO Y APRENDIENDO
ESTÁNDAR DE MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none">● Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).● Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
PROCESO DE MÚSICA	<ul style="list-style-type: none">● Evoca y expresa experiencias sonoras y musicales que ha vivido relativas a su interacción con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural.
OBJETIVO	Reconocer y relacionar figuras musicales con imágenes en la creación de secuencias rítmicas.
RECURSOS	Video musical
JUSTIFICACIÓN	<p>Esta actividad permite que los estudiantes identifiquen distintos patrones en un contexto musical y a su vez desarrollen la noción de cambio de acuerdo con los elementos inmersos en la canción. Esto fortalecerá su argumentación acorde a los diferentes tipos de percepción utilizados: auditivo, visual, kinestésico, etc., como afirma Vergel (2015), se reconoce la naturaleza de los elementos sobre los cuales se realizaron las generalizaciones. Pueden ser elementos numéricos de ciertos conjuntos o también objetos geométricos, en nuestro caso, elementos musicales.</p> <p>Además, identificar la naturaleza de estos, activa una estrategia de generalización o de identificación de patrones., y como lo indica Arbonés y Milrud (citado por Cedeño y De arco, 2016, p.10), expresa el concepto de melodía como aquella sucesión de sonidos de diferente altura, animados por el ritmo. Esta melodía permitirá identificar el cambio y el patrón inmerso en la canción.</p>

ACTIVIDAD DE INICIO

El docente promueve la interacción con la canción de la actividad "Sol día, luna noche" en repetidas ocasiones para que los niños memoricen el ritmo, la letra de la canción, los elementos gestuales o coreográficos, según iniciativa adicionales que proponga el profesor a partir del video, (Ver el link <https://www.youtube.com/watch?v=5Q6dUAbpUnw>). Después se sugiere realizar el ejercicio desde el minuto 1:05 sin silencio para que se identifique el patrón correspondiente y los niños lo repitan, varias veces, incluso luego de un tiempo, sin mirar los símbolos de la secuencia, de acuerdo con el grado de escolaridad, se puede realizar únicamente con dos filas.

ACTIVIDAD DE DESARROLLO

Se les indica en una nueva ronda como se va a cantar, a cada uno de los niños se les entrega un dibujo que hace parte de la canción y este debe cantar esa



parte, haciendo así una secuencia entre todos (los elementos serán: sol, luna, noche, día y silencio).

ACTIVIDAD FINAL

Se les pide a los niños que organicen los dibujos o imágenes (correspondientes a la noche, al sol, al día, a la noche y al silencio, de acuerdo a como ellos crean que empieza y termina el apartado del video (se sugiere realizar solo una parte del mismo), el docente observa si se cumple con la actividad, diciéndoles que canten de la manera cómo organizaron las imágenes. Al finalizar el ejercicio se pregunta a los niños ¿Qué imagen se repite más?, evocando nuevos tipos de secuencias identificados y ampliando la reflexión de la actividad.



(Ver [Anexo 1. Solución de la actividad para 1°, 2° y 3°](#))



ACTIVIDAD GRADOS 4º y 5º

NOMBRE DE ACTIVIDAD	MUSICALMENTE CONTANDO
ESTÁNDAR DE MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none"> Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
PROCESOS DE MÚSICA	<ul style="list-style-type: none"> Demuestra atención, interés y placer al escuchar los aportes lúdicos, sonoros y musicales propios y de los otros.
OBJETIVO	Reconocer patrones rítmicos, figuras rítmicas y métrica.
RECURSOS	Video
JUSTIFICACIÓN	<p>Esta actividad se plantea para trabajar la relación matemáticas-música, en la que los estudiantes adquirirán nuevos conocimientos, en este caso conceptos básicos de la música como ciertos tipos de patrones rítmicos, usando el valor numérico de cada figura rítmica y su representación. Esta actividad trabajará los patrones de variación en una secuencia, a partir de patrones ritmos, esto permitirá identificar qué es una métrica, cuáles son las figuras rítmicas, sus equivalencias numéricas y entre las mismas figuras.</p> <p>Según Jacobson (2006, citado por Calderón A., 2015, p.17) "Los niños sienten atracción hacia los patrones y estructuras musicales. Lo demuestran de muchas maneras, como aplaudiendo al finalizar una canción o haciendo movimientos con las manos durante partes especiales"</p>

ACTIVIDAD INICIAL

El docente en un primer momento debe explicarles a los estudiantes qué es una métrica (ver p.21), se aconseja que se trabaje bastante con la de $\frac{4}{4}$, ya que existe $\frac{2}{4}, \frac{3}{4}$; cómo se compone; para qué se usa; etc. Seguido a esto debe visualizar y hablar con los estudiantes la siguiente tabla:







Figura rítmica	Silencio de figura	Valor de tiempo	Nombre de figura rítmica
		1 Tiempo	Negra
		2 Tiempos	Blanca
		4 Tiempos	Redonda

Ilustración 28. Tabla de figuras rítmicas y sus silencios. Fuente: Construcción propia.

El docente puede considerar como material de apoyo algunos videos, páginas web, entre otros, para que los estudiantes tenga más claros ciertos conceptos musicales, se sugiere que se hagan ciertos ejemplos o ejercicios donde muestren comprensión por parte de los estudiantes, ya que esto permitirá que las siguientes actividades se les facilite para su desarrollo. En este caso se aconseja hacer ejercicios de patrones con las figuras rítmicas como se encuentra a continuación:

Ejemplo:



El patrón que se muestra; negra, blanca, redonda, y así sucesivamente, es un patrón se podría realizar con ejercicios de palmas de manos, también se podría cantar con palabras, es decir: para la negra sería con la palabra **ya**, con la figura blanca sería la palabra **ya-a** y con la figura redonda sería la palabra **ya-a-a-a**.

ACTIVIDAD DESARROLLO

En esta parte el estudiante utilizará lo aprendido, preguntará si tiene alguna duda con respecto a la actividad, el docente debe estar preparado para responder.

El docente presentará un video a los estudiantes para que entre todos, puedan hacer las indicaciones que presenta el video, ya que es interactivo, ya que mientras escuchas la canción te va mostrando las figuras para hacer el patrón.

Video: <https://musicmathlearn.wixsite.com/musicmathlearn>

Con este video el docente podrá hablar con los estudiantes sobre el patrón que se presenta, algunas preguntas que podrían surgir son, ¿qué figuras se encuentran?, ¿si les pareció fácil o difícil?, ¿cuál fue su parte favorita?

Luego proponga a los estudiantes una actividad en donde deberán completar los patrones rítmicos, partiendo de un ejercicio de observación y visualización, en este caso deberán seguir con la secuencia presentada.

Enunciado de la actividad: Completa los siguientes patrones rítmicos y realiza el ejercicio con tus palmas.

Para este caso en la página web creada para esta propuesta actividad, en la parte de actividad de 4º y 5º se presenta los diferentes patrones, cada uno con un video en donde se escucha, el metrónomo, el sonido del piano, y la voz pronunciando las palabras; ya para la negra, ya-a para la blanca y finalmente ya-a-a-a para la redonda (esto de la voz varía dependiendo de las figuras musicales que se presenten en el patrón).





Posteriormente, se presenta un espacio libre para que los estudiantes establezcan su propio patrón teniendo en cuenta las figuras rítmicas, sus respectivos silencios y su valor numérico.

Enunciado de la actividad: Ahora haciendo uso de la creatividad, construye tus propios patrones rítmicos.

Se recomienda trabajar esta actividad con metrónomo (este se puede utilizar en una aplicación con piano, o buscarlo directamente por google, y esté estará en la primera opción de búsqueda).

- a. Realiza con dos figuras rítmicas diferentes con métrica de $\frac{4}{4}$:

- b. Realiza el patrón con tres figuras rítmicas diferentes con métrica de $\frac{4}{4}$:

A continuación, se da el espacio para realizar los patrones rítmicos con las palmas, como en las anteriores actividades, se debe tener en cuenta el valor numérico de cada una de las figuras, los cuales se establecieron en la *ilustración 28* que se presentan la actividad inicial (Pág. 58).

Para la siguiente actividad, esta se puede realizar con la parte corporal, es decir, con las manos, pies o tocar en la mesa. Para esto es necesario llevar un silabeo bien sea en la mente o cantado de la siguiente manera: Con la figura de la negra se diría "ta", con la blanca se diría "ta-a" y con la redonda "ta-a-a-a", haciendo también los respectivos silencios de negra, blanca, redonda y demás figuras musicales. Finalmente, para ejecutar el ejercicio, se debe tener en cuenta que el golpe (con manos, pies o en una mesa) se debe realizar en cada "ta" del silabeo.

Enunciado de la actividad: Sigue las instrucciones del profesor (a) para realizar los siguientes patrones rítmicos.

Patrones rítmicos a realizar en grupo:



ACTIVIDAD FINAL

Para finalizar, se encuentra la actividad “la llamada de dulcinea”, en esta se debe trabajar con las figuras rítmicas sumando, restando o multiplicando, el valor numérico de cada una de ellas para que así se genere un resultado numérico, es decir; esto permitirá representar con las figuras rítmicas y sus silencios los números del 1 al 10.

LA LLAMADA DE DULCINEA

Situación: Dulcinea necesita llamar a su abuela Roberta, pero para llamarla deberá resolver unas pistas, las cuales consisten en sumar, restar o multiplicar el valor numérico de cada figura musical, ayuda a Dulcinea a resolver las pistas para hallar el número de su abuela.

Resuelve las siguientes operaciones:



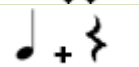
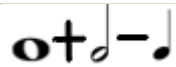
OPERACIÓN	RESULTADO (valor numérico)	OPERACIÓN	RESULTADO (valor numérico)
		Ninguna figura rítmica	

Con base a la anterior tabla realizada, se descubrieron que ciertas operaciones entre figuras rítmicas, daban un valor numérico llamado resultado, estos resultados serán parte importante para descubrir el número telefónico de la abuela Roberta, por lo tanto deberá completar la siguiente tabla, en donde encontraran algunas pistas importantes para hallar este número.

A continuación, se darán las pistas para hallar el número telefónico:

	OPERACIÓN	RESULTADO		OPERACIÓN	RESULTADO
A			F		
B			G		
C			H		



D			I		
E			j		

Número del teléfono de la abuela de Dulcinea:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Finalmente se da paso a la socialización, en donde el docente podrá abarcar los resultados que presentaron los estudiante o también lo temas que se presentaron durante las actividad en donde vinculan la relación música-matemáticas, se responde las preguntas que surjan en este momento.

(Ver [Anexo 2. Solución de la actividad para 4° y 5°](#))



ACTIVIDAD GRADOS 6º y 7º

NOMBRE DE ACTIVIDAD	CREANDO UN NUEVO SISTEMA DE NUMERACIÓN MUSICAL
ESTANDAR DE MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none"> Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
PROCESO DE MÚSICA	<ul style="list-style-type: none"> Muestra que ha enriquecido su sensibilidad y su imaginación creativa hacia sus propias evocaciones, invenciones y percepciones sonoras y musicales, hacia los diferentes ruidos y sonidos de la naturaleza, hacia las expresiones musicales del medio al expresarse de manera autónoma y libre en improvisaciones, juegos, etc.
OBJETIVO	Reconocer el uso de figuras musicales en correspondencia a su representación visual y auditiva al momento de establecer patrones numéricos.
MATERIALES	Guía gráfico textual, domino musical, MuseScore.
JUSTIFICACIÓN	<p>La presente actividad pretende fomentar el uso de las figuras musicales de acuerdo con dos elementos: el primero de equivalencia con el símbolo numérico, permitiendo hacer la correspondencia, y el segundo, el uso de los símbolos como sistema de numeración, para que posteriormente se utilicen en la descripción de secuencias numéricas en relación con lo visual y lo auditivo.</p> <p>Para ello, Radford (1996, p.110) explicita la idea de que toda generalización lleva a una secuencia de “hechos observados”, dichos hechos son interpretados de acuerdo con unas maneras del pensamiento que dependen del conocimiento y los propósitos del observador. Por otra parte, Gardner (1999b), habla de la inteligencia musical como la capacidad de producir y apreciar los ritmos, tonos y timbres. Partiendo de las diferentes formas de expresión musical.</p>

ACTIVIDAD INICIAL

El docente presenta a los estudiantes el criterio de suma de tiempos o del valor relativo de las figuras musicales. Una vez establecida la equivalencia entre el cardinal y las figuras musicales, las reglas del dominó son las habituales, como se muestra en el anexo.

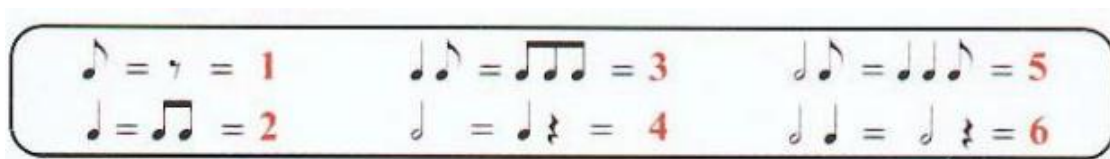


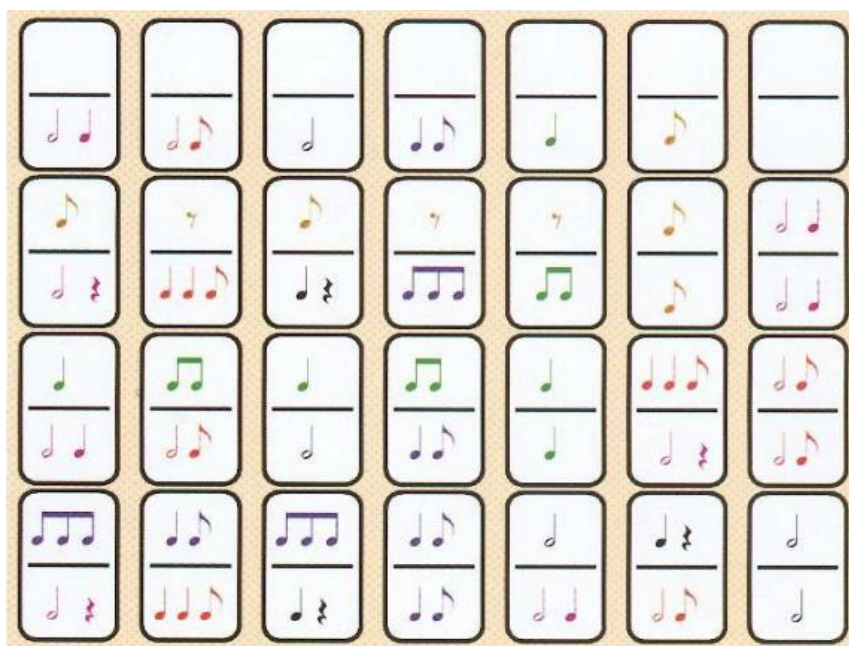
Ilustración 29. Valores relativos de las figuras rítmicas. Fuente: <http://musimates.blogspot.com/2015/04/dominio-musical.html>

Posteriormente los estudiantes utilizan las equivalencias a partir de la dinámica del dominó por parejas, esto permitirá el manejo y uso de la nueva simbología implicada. Reconociendo los números, se les pide a los estudiantes crear un nuevo sistema de numeración, donde cada número pueda escribirse con un número mínimo de símbolos. Para ello los estudiantes deben escoger solo una de las equivalencias de cada número.

1	2	3	4	5	6



Dominó musical:



ACTIVIDAD DE DESARROLLO

Se les proporciona a los estudiantes un conjunto numérico de 10 elementos con características en común (número pares, triangulares, múltiplos de 5, etc.) lo que permitirá identificar en cada caso ¿Cuál es el patrón que siguen estos números?, es preciso que los estudiantes puedan evidenciar la variación de manera verbal.

- a. [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]
- b. [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50]
- c. [4,11,18,25,32,39,46,53,60,67]
- d. [3,9, 15, 21,27, 33, 39, 45, 51, 57]

ACTIVIDAD FINAL

Reconociendo las características planteadas de cada una de las secuencias, se les brindará a los estudiantes un video que presenta las figuras rítmicas y el comportamiento de las mismas. Por equipos, los estudiantes deben intentar rehacer el sonido y los demás deben identificar la secuencia utilizada. Para finalizar el docente deberá proporcionar nuevos tipos de secuencias musicales, utilizando los símbolos anteriormente seleccionados y ellos deberán describir la variación o cambio, similitudes y diferencias que se presentan en el ejercicio.

(Ver [Anexo 3. Solución de la actividad para 6° y 7°](#))



ACTIVIDAD GRADOS 8º y 9º

NOMBRE DE ACTIVIDAD	AL SON DE LOS NÚMEROS TRIÁNGULARES- CIRCULANDO ARMONICAMENTE
ESTANDAR DE MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none">• Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.• Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica
PROCESO DE MÚSICA	<ul style="list-style-type: none">• Comunica espontáneamente los aportes de la clase de música a su vida cotidiana y viceversa.
OBJETIVO	Reconocer patrones rítmicos y numéricos, figuras rítmicas, variación de métricas, existencias de diferencias métricas, círculo de quintas, generalización y métrica.
MATERIALES	Programa MAM player. Video, MuseScore
JUSTIFICACIÓN	Esta actividad es importante porque pretende trabajar lo relacionado a la generalización (geométrica y musical), se hará con un programa donde los estudiantes pueden visualizar geométricamente y al mismo tiempo ir escuchando lo que se va presentando. Según Arroyave (2012), “la metáfora geométrica abre un campo de transiciones conceptuales en música”, el cual materializa el pasaje del registro auditivo al registro visual. Para el caso de la educación matemática se ha hablado sobre ciertos registros, como el verbal, tabular, gráfico, y algebraico, pero lo que propone está actividad es el de usar otros tipos de registros como; el registro auditivo al registro visual.

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIÁNGULARES

ACTIVIDAD INICIAL

El docente deberá observar con los estudiantes el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=mOMLRMfIYf0&t=9s>

Seguido a esto el docente les indicará a los estudiantes que deberán realizar el patrón que se presenta en el video de manera corporal (manos y pies) o con instrumentos hechos por los estudiantes (claves, maracas, otros).

- Enunciado de la actividad:** Realizar el patrón de manera corporal (manos y pies) o con algunas claves (se pueden realizar con palos de escoba) en los primeros compases.

Después de esto, deberán analizar el patrón que presentó (esta actividad puede ser individual o grupal), en este caso se puede dejar las preguntas que se propone u otras que el docente quiera plantear o que surjan durante la actividad. Permitiendo así, socializar lo que los estudiantes plantean con respecto a las preguntas, de esta manera se resolvería dudas y se compartiría cada punto de vista.

- Enunciado de la actividad:** Analiza el patrón en cuanto: ¿qué tipo de métrica tiene?, al ver y escuchar ¿Identifica el patrón geométricamente tanto al verlo como al oírlo? ¿Qué figuras rítmicas se presenta en la partitura del video?



ACTIVIDAD DESARROLLO

En esta parte el docente presentará la partitura “al son de los números triangulares” (anexo 8), esta partitura tendrá sonido para que después se deba escuchar la partitura con los estudiantes con el fin de analizar ciertos temas, tanto visual como auditivo. Antes de realizar esta actividad se debe acudir a la actividad de 4º y 5º

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES

Música -Matemáticas

Daniela Chavez & Sol Rojas



Ilustración 30. Partitura al son de los números triangulares. Fuente: Construcción propia.

Enunciado de la actividad: A continuación se presentará una partitura con el patrón de los números triangulares, después de esto deberás responder las siguientes preguntas:

Se responderá las preguntas de la guía, estas se relacionan a lo que se puede concluir con la partitura;

- ✓ En cuanto a la métrica,
- ✓ la variación que hay en la métrica para cambiar en cada compas,
- ✓ sobre el cambio que se escucha auditivamente,



- ✓ si se presenta algún tipo de regularidad en la partitura,
- ✓Cuál sería la variación que se presentaría en la música (auditivamente y visualmente) si se cambia por blancas, negras, redondas o con silencios la partitura presentada.

Enunciado de la actividad: Escucha y observa la partitura, luego analiza lo siguiente, tanto visual como auditivo:

- a) ¿Qué métrica o métricas tiene la partitura? ¿Hay alguna variación en la métrica? ¿Qué figuras rítmicas se presentan?
- b) Al escuchar la partitura y verla ¿se presenta algún cambio? Y si es así ¿qué cambio se presenta?
- c) ¿Se podría considerar esta partitura como un patrón o una regularidad? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa cuál sería el siguiente compas y qué métrica tendría?
- d) ¿Cómo podrías realizar esta partitura utilizando más figuras musicales (corcheas, negras, blancas y redondas y sus respectivos silencios)?
- e) Representa ambas partituras con tus manos, vamos a ver como suenan los números triangulares (en este caso, con anterioridad se deberá hablar de los diferentes patrones que se presentan en las matemáticas, como pasa con el triángulo de pascal y otros ejemplos).

Nota: Esta partitura tienes la estructura de los números triangulares.

ACTIVIDAD FINAL

Ya para finalizar, se institucionaliza lo que respondieron los estudiantes, permitiendo dar una conclusión en general, se pregunta que si esta actividad se podría hacer con otro tipo de patrón numérico, si la respuesta es afirmativa: ¿cuál sería ese patrón?, se responde las preguntas que surjan en caso de confusión de los estudiantes, se aclaran y se hace un tipo de reflexión por parte del profesor recogiendo todo lo que se presentó en clase.

ACTIVIDAD Nº 2 CIRCULANDO ARMÓNICAMENTE

ACTIVIDAD INICIAL

El docente deberá guiar la actividad, en un primer momento se deberá mostrar el programa MAM PLAYER, dejar que los estudiantes interactúen con la barra de herramientas que presenta.

Después de eso se dará unas indicaciones (el docente pedirá que agreguen el archivo GeoMúsica, el cual está en formato MIDI para abrirlo en el programa MAM PLAYER) para que los estudiantes puedan visualizar de qué se trata el archivo MIDI (se debe aclarar a los estudiantes sobre este formato), ya que al visualizarlo el estudiante comprenderá el papel que cumple el archivo, al tener el archivo en el programa, se buscará la opción para colocar en el formato, (instrucciones: view-> display type -> intervals DYAD), que se quiere visualizar.

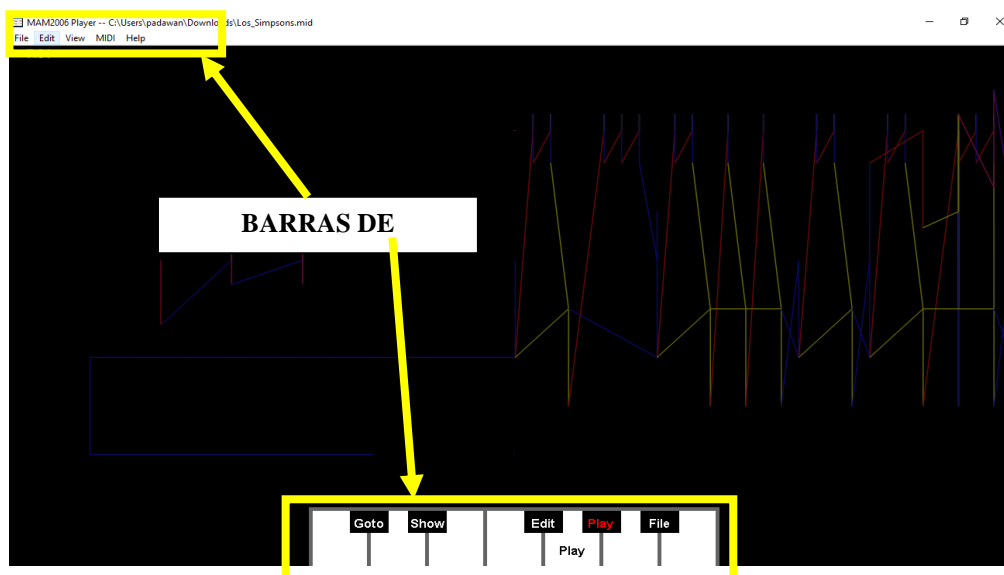


Ilustración 31 SEQ Ilustración * ARABIC 7 Imagen propia. Barras de herramientas del programa MAM2006 PLAYER. Fuente: Construcción propia.

ACTIVIDAD DESARROLLO

Al tener el archivo MIDI (GeoMúsica), el estudiante deberá visualizar que es lo que sucede con el archivo y las representaciones que presenta el programa (MAM PLAYER).

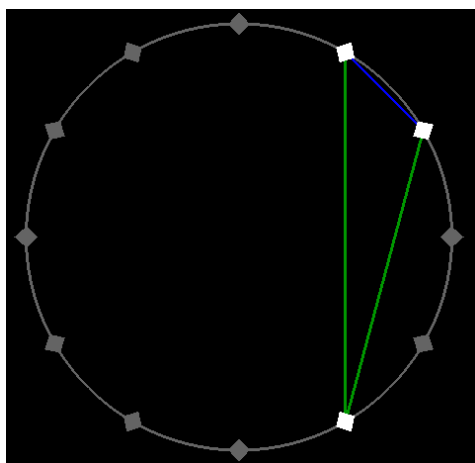


Ilustración 32. Esquema de la actividad. Fuente: Construcción propia.

1. **Enunciado de la actividad:** Visualiza la secuencia que se presenta en la aplicación MAM PLAYER (Music Animation Machine MIDI player), archivo GeoMúsica.

Seguido a esto el estudiante tomará el papel de investigador, ya que deberá consultar sobre la representación que presenta el programa (en este caso, estamos hablando del círculo de quintas) se sugiere que se pueda dejar de tarea o que si tiene manera de buscar información en la sala de computo o con algún medio electrónico. En este caso el estudiante debe

reconocer que la representación visual es del círculo de quintas y que existe una proporción entre cada nota (Ver Pag.24).

Preguntas:

2. Identifique qué es la representación que presenta el programa. ¿Por qué se presenta en forma de circunferencia?



3. ¿Se presenta algún patrón o regularidad que nos permita saber por qué se presenta las divisiones en la representación?

A partir de lo que surja, se socializará lo que consultaron y las respuestas de las dos preguntas anteriores, dependiendo de hilo que lleven con esta parte, se deberá involucrar las preguntas 4,5 y 6, ya que esta parte tiene relación con lo que se pudo visualizar, permitiendo así generalizar.

Preguntas:

4. ¿Qué relación tiene la representación visual con lo que usted está escuchando?
5. Teniendo en cuenta los puntos anteriores, y lo que se haya investigado con el grupo, analice el patrón que se presenta de forma de triángulo. ¿Qué es lo que representa el triángulo? ¿Qué puntos toca cada triángulo?
6. Si al tocar tres puntos de la circunferencia forma un triángulo, ¿Qué pasaría si en la representación en vez de triángulos se hicieran cuadrados? ¿musicalmente que sucedería? ¿Se podría generalizar con más polígonos?

ACTIVIDAD FINAL

Proponga un nuevo patrón que se podría hacer con la representación de programa. Se da el espacio del punto 7 para que los estudiantes sean creativos y propongan un nuevo patrón usando la representación (círculo de quintas) del programa, en este caso se deberá hacer de manera manual (haciendo la representación, usando colores y demás materiales para simular ese patrón en el cuaderno).

7. Proponga un nuevo patrón que se podría hacer con la representación de programa.

Aclaración: Si ya desea hacer un tipo de actividad parecida a la anterior, se deberá realizar una partitura, en este caso se recomienda con un programa (MuseScore, el cual permite crear partituras), en donde se trabaja con términos musicales, y al tener la partitura realizada, se deberá descargar en formato MIDI, para que el programa MAM PLAYER lo pueda leer y de paso mostrar la visualización.

Se da paso a la socialización, en la cual se puede llegar a conclusiones generales, de igual manera se aclara dudas sobre algún punto. Y se presenta los patrones de cada estudiante o de algunos, para que los otros compañeros evidencien la creatividad de cada estudiante.

Nota: Estas actividades se pueden hacer de manera individual, pero se aconseja que sea en grupos de 2 o 3 personas, ya que al hablar de este tema de la música, patrones, generalización, es bueno que se pueda compartir ideas o discutir sobre algunos términos o investigaciones.

(Ver [Anexo 4. Solución de la actividad para 8° y 9°](#))



ACTIVIDAD DE GRADO 10º y 11º

NOMBRE DE ACTIVIDAD	MODELANDO AL SON DE BOHEMIAN_RHAPSODY
ESTANDAR DE MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none"> Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
PROCESO DE MÚSICA	<ul style="list-style-type: none"> Denota sensibilidad y atención auditivas en su quehacer cotidiano y musical con la naturaleza, con las manifestaciones de los otros y con las expresiones musicales de su cultura.
OBJETIVO	Realizar un reconocimiento de las variables inmersas en una función y sus posibles representaciones, por medio de un proceso dinámico musical.
RECURSOS	MAM player. (Programa), video y audios.
JUSTIFICACIÓN	<p>Como afirma Vasco (citado por Rojas, 2010) El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covarien en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad.</p> <p>En correspondencia a lo anterior, la música permite reflejar el proceso dinámico necesario para hacer visibles en cualquier momento las variables implícitas en la situación, así, la música permite identificar cierto tipo de patrones creados a partir de las doce notas de escala cromática, utilizando los aspectos lineales mencionados anteriormente para crear regularidades entre las mismas, fácilmente identificables. (Domínguez, 2004, p.1).</p>

ACTIVIDAD INICIAL

Se les pide a los estudiantes que escuchen detenidamente el audio (Bohemian_Rhapsody_for_Piano) y reconozcan el sonido inmerso en el mismo. Posteriormente, con los ojos cerrados, cada estudiante debe seguir la canción y dependiendo de sus tonos alto se haría un trazo ascendente, y de sus tonos bajos se haría un trazo descendente, esto con el fin de formar una función donde el tiempo es la variable independiente y la altura de la melodía como variable dependiente, debe trazar una representación sobre una hoja, es posible que ésta se presente una onda en el tipo de representación utilizada, en forma recta, trazos con picos, etc.

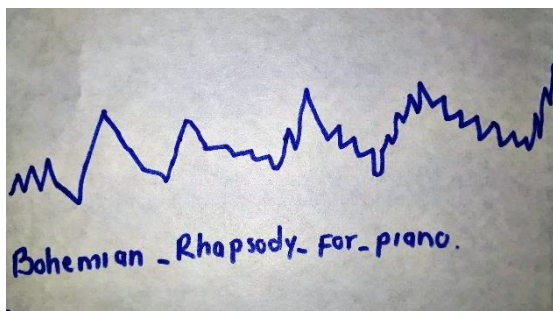


Ilustración 33. Ejemplo al escuchar el audio. *Fuente: Construcción propia.*

Después de realizar esta actividad, se pedirá a los estudiantes que abran los ojos, y revisen el trazo que realizaron, a partir de lo que haya generado el docente será el que guíe la socialización, les preguntará, qué forma tiene, si al escuchar la canción sentía algún tipo de movimiento, o qué se iban imaginando al escuchar

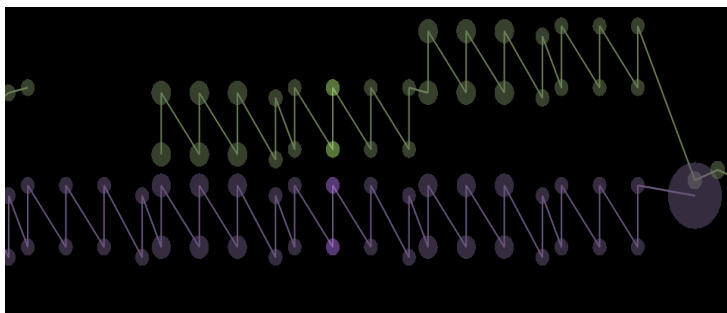


(podrán surgir más preguntas dependiendo de lo que se presente como respuestas por parte de los estudiantes).

En este caso también, se puede pedir a los educandos que realicen la misma actividad, pero con los ojos abiertos, en donde los estudiantes deberán escuchar e ir trazando lo que ellos consideren que ese trazo represente lo que están escuchando (opcional).

ACTIVIDAD DESARROLLO

A continuación, se les mostrará la modelación realizada por el programa MAM player (revisar todo el proceso que se debe hacer para visualizar esta modelación), así, ellos deberán elegir un apartado de la canción como el que



se muestra a continuación, teniendo en cuenta que deben intentar modelar la función que puede ser obtenida teniendo en cuenta como sistema de referencia el eje cartesiano.

ACTIVIDAD FINAL

Para encontrar la función modelada, obtenida del apartado del audio, se sugiere hacer uso de softwares como Geogebra, que permiten anexar la imagen al programa y trabajar sobre ella, para así utilizar herramientas como Split, regresión lineal, interpolación, etc. Se recomienda en cualquiera de los casos mencionados realizar puntos notables sobre la gráfica que permitan suavizar la función. Al finalizar el ejercicio se pretende realizar un análisis entre las variables que usa el software, bien sea el acento, ritmo o el tiempo mismo implicado (está actividad queda de manera abierta para el docente, puesto que cada uno tendrá diferentes herramientas o estrategias para trabajar con este tipo de grafica).

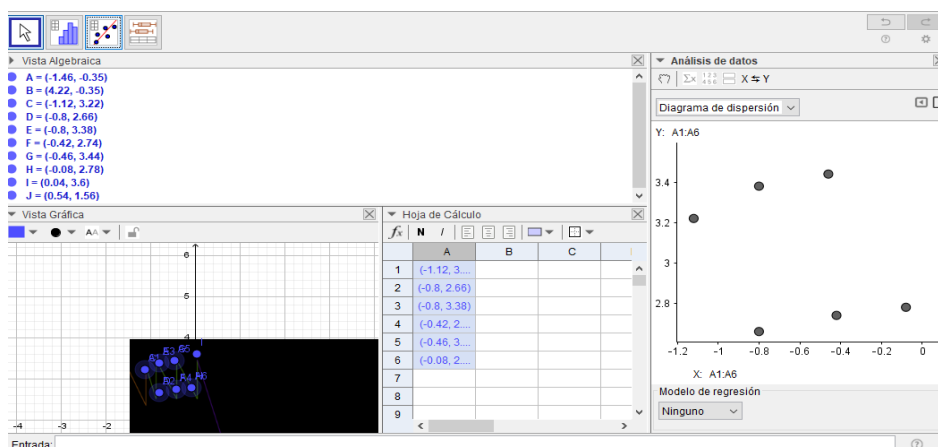


Ilustración 34. Ejemplo para la actividad. Fuente: Construcción propia.

(Ver [Anexo 5. Solución de la actividad para 10° y 11°](#))



ANÁLISIS DEL DISEÑO DE LA PROPUESTA

La propuesta de actividades fue construida a través de varios elementos:

Un análisis documental que permitió realizar la búsqueda documental suficiente para reconocer los elementos que eran necesarios para su coherencia de acuerdo al desarrollo del pensamiento matemático conforme a la música como recurso didáctico, que permita desarrollar los elementos claves por los referentes legales.

En este caso, una de las bases en el área de matemáticas, es definida por los lineamientos curriculares, que nos permitieron desarrollar una idea más amplia del pensamiento variacional y su desarrollo en la educación básica y media de acuerdo a un objetivo fundamental que:

presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas” MEN (1998, p.49).

Con esta premisa se busca diseñar estas actividades de forma tal que, en primer lugar estén conectadas (siendo las de cursos inferiores posibles actividades introductorias de las siguientes) que permitan guiar el proceso hacia posibles modelaciones matemáticas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de patrones en los diferentes grados de la educación básica y media.

Asimismo, la disposición de las actividades planteadas es acorde a la distribución por ciclos, planteada por los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas,

los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, ojalá, a ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados. MEN (2006, p.31).

Por otra parte, de acuerdo a la parte musical, el documento de los lineamientos de educación artística permite afinar el proceso de esta propuesta partiendo de que el aprendizaje del lenguaje musical, permite formar personas sensibles, críticas, analíticas y solidarias que construyan espacios de convivencia fundamentados en valores que los lleven a querer su propia persona y a los otros



y a cuidar y enriquecer el patrimonio tangible e intangible de sus comunidades y del país.

Estas cinco actividades son desarrolladas de acuerdo a las siguientes especificaciones, en cuanto a la enseñanza de estas ciencias, en primer lugar el desarrollo matemático variacional se desarrolla a partir de lo planteado por los estándares y lo musical sobre lo cual se asegura:

Los lineamientos de educación artística, en donde se concluyen con unos cuadros en los cuales se explicitan procesos que fomentan la educación artística y manifestaciones o indicadores progresivos de los avances logrados. Los cuatro primeros cuadros son generales del área y los restantes son específicos MEN (1998, p.4).

A partir de esto estándares y procesos surge lo siguiente:

ACTIVIDAD GRADOS 1°, 2° y 3°	CANTANDO Y APRENDIENDO
	<p>¿Qué se trabaja en matemáticas? Se maneja el reconocimiento y descripción de regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). De allí se parte a describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y/o gráficas. Al lograr lo anterior, se busca el reconocimiento y generación de equivalencias entre expresiones numéricas y descripción de cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual. Por último, se busca una construcción de secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.</p>
ACTIVIDAD GRADOS 4° y 5°	<p>¿Qué se trabaja en música? El estudiante evocará y expresará las experiencias sonoras y musicales que ha vivido relativas a su interacción con la naturaleza, con los demás y con la producción musical del contexto cultural. En este caso, se trabajará con una canción interactiva, en donde los estudiantes identificarán, las figuras musicales y sus silencios, el patrón que se presenta en la canción, la equivalencia de cada figura musical con su respectiva imagen.</p>
	MUSICALMENTE CONTANDO
ACTIVIDAD GRADOS 6° y 7°	<p>¿Qué se trabaja en matemáticas? En primer lugar se busca la descripción e interpretación de variaciones representadas en gráficos. Asimismo, se busca realizar predicciones de posibles patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Por otra parte, se busca la representación y relación de patrones numéricos con tablas y reglas verbales.</p>
	<p>¿Qué se trabaja en música? Se busca que el estudiante demuestre atención, interés y placer al escuchar los aportes lúdicos, sonoros y musicales propios y de los otros. Por eso, esta actividad tiene como propósito de que se identifiquen las figuras musicales, las equivalencias entre las figuras musicales y su valor numérico, de igual manera el reconocimiento de los patrones rítmicos y la métrica.</p>
ACTIVIDAD GRADOS 6° y 7°	CREANDO UN NUEVO SISTEMA DE NUMERACIÓN MUSICAL
	<p>¿Qué se trabaja en matemáticas? Primero se desarrolla el reconocimiento del conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). En correspondencia se desarrolla el uso de métodos informales</p>



	<p>(ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. Por último se busca la identificación de las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.</p> <p>¿Qué se trabaja en música? Se busca que se han enriquecido su sensibilidad y su imaginación creativa hacia sus propias evocaciones, invenciones y percepciones sonoras y musicales, hacia los diferentes ruidos y sonidos de la naturaleza, hacia las expresiones musicales del medio al expresarse de manera autónoma y libre en improvisaciones, juegos, etc. Entonces al trabajar esta actividad, se reconoce las figuras musicales, la equivalencia entre cada figura musical y su respectivo valor numérico (cardinal), reconocimiento y construcción de patrones o secuencias, y como se presenta la variación de manera verbal.</p>
ACTIVIDAD GRADOS 8° y 9°	<p>AL SON DE LOS NÚMEROS TRIÁNGULARES- CIRCULANDO ARMONICAMENTE</p> <p>¿Qué se trabaja en matemáticas? En primer lugar, se busca incentivar el uso de procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Asimismo el modelar situaciones de variación con funciones polinómicas y a su vez, identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.</p> <p>¿Qué se trabaja en música? Comunica espontáneamente los aportes de la clase de música a su vida cotidiana y viceversa. Se trabaja con esta actividad la generalización geométrica y musical, en este caso se podrá visualizar diferentes patrones, uno relacionado con los números triangulares (matemáticamente) y el otro patrón sería con los acorde musicales (música), se hace uso de los diferentes conceptos en las anteriores actividades, como; métrica, figuras musicales, equivalencias, etc.</p>
	<p>MODELANDO AL SON DE BOHEMIAN_RHAPSODY</p> <p>¿Qué se trabaja en matemáticas? Se busca realizar una interpretación de la noción de funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Asimismo, el análisis de las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas, racionales y de sus derivadas. Por último, se pretende realizar modelaciones de situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.</p> <p>¿Qué se trabaja en música? Se busca que el estudiante presente sensibilidad y atención auditivas en su quehacer cotidiano y musical con la naturaleza, con las manifestaciones de los otros y con las expresiones musicales de su cultura. En este caso, se quiere presentar la variación como algo dinámico, en donde se podrá visualizar una canción, y a partir de lo que se pudiera observar se identificaría diferentes patrones o la relación entre tiempo y altura de las notas por medio de la gráfica, de igual manera, se haría uso de los diferentes conceptos musicales trabajados en las actividades de los grados inferiores</p>

Después de elaborada la propuesta de actividades se realiza un proceso de validación, por medio de dos docentes expertos tanto en música como en matemáticas.

El primer validador es la Docente Dolly Espinosa, Licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Especialista en enseñanza de las



matemáticas de Pontificia Universidad Javeriana. Posee 15 años de experiencia como docente de matemáticas, a su vez, 10 años de experiencia como jefe de área de matemáticas en colegios privados de Bogotá. Adicionalmente acredita estudios en música de solfeo, piano y canto.

El segundo evaluador es el Docente José Torres, Licenciado en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bachiller con énfasis en artes, modalidad música. Actualmente estudiante de curso de extensión en Guitarra, Parroquia La Consolata.

El instrumento de validación se realiza de acuerdo a cada actividad, teniendo en cuenta el siguiente formato:

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.		
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.		
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.		
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.		
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.		
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.		
Observaciones:		

De acuerdo a lo anterior, la evaluación realizada por el primer evaluador se encuentra en el [Anexo 6](#) y del segundo evaluador en el [Anexo 7](#).

Ahora bien, acorde a las observaciones reflejadas por los dos evaluadores se identifican deficiencias de redacción, de acuerdo a la comprensión misma de las instrucciones de las actividades y por otra parte, es necesario afinar la manera en que se usan los términos musicales y la manera en que son utilizados para el desarrollo de las mismas. De esta manera, la propuesta que se presenta en este trabajo, es la correspondiente a la realizada de acuerdo al mejoramiento obtenido por los ajustes a groso modo mencionados.

En general, se realizó una modificación de los objetivos, teniendo en cuenta lo matemático y musical mencionado en cada una de las observaciones; el uso únicamente de los estándares de matemáticas, ya que en el aspecto musical se trabaja es por medio de procesos; la estructura general de la definición de cada una de las actividades haciendo más explícito las indicaciones propuestas.



CONCLUSIONES

De acuerdo al cumplimiento de los objetivos específicos, evidenciamos que el desarrollo de esta investigación se realizó por medio de un análisis documental, el cual ha permitido comprobar tres elementos fundamentales, relacionados con los demás objetivos:

- el primero, la relación natural que se da en cualquier contexto entre la matemática y la música, que puede ser desarrollada por elementos tales como frecuencias, escalas y demás elementos que en el estudio de estos elementos se vuelven fácilmente perceptibles y relacionables, como se evidencia en el marco teórico;
- el segundo, la relación que es dispuesta por los referentes legales en el país, dado que, la educación artística, es tenida en cuenta como un punto de encuentro de las otras ciencias, bien sea por su carácter histórico, estético, armónico, crítico y demás, propuesto en el marco legal;
- el tercero, de acuerdo a la apuesta educativa que es dispuesta por la enseñanza de la matemática desde diferentes posturas y para los diferentes pensamientos, por ejemplo la simetría en el pensamiento espacial, el conteo mismo en los silencios o tiempos de una canción para el pensamiento numérico, entre otros, evidenciado tanto en el estado del arte como en el marco teórico.

Teniendo en cuenta que el desarrollo de la presente monografía es la presentación de una propuesta de actividades, desarrollado para cada grupo de grados (de 1° a 3°, de 4°a 5°, de 6°a 7°, de 8° a 9°, y 10°a 11°). Este documento queda como base para quien deseen seguir desarrollándolo en la aplicación y/o modificación de la propuesta, utilizando los elementos propuestos en el marco teórico, específicamente en la teoría de la orquestación instrumental y la teoría antropológica de lo didáctico; dado que los elementos de estas teorías parten a evaluarse de acuerdo al desarrollo que se presente por parte de los estudiantes como del docente, partiendo de la premisa que la música es el elemento fundamental de esta propuesta y en su papel de recurso didáctico el docente está en la capacidad de adaptarlo según las necesidades del medio.

Asimismo, en el desarrollo de cada una de las actividades fue evidente la manera en que facilita el trabajo el uso de la tecnología y las TIC, en el reconocimiento de una partitura, una onda sonora, la disposición misma de las notas musicales y demás por medio de softwares como GeoGebra, MAM Player, MuseScore entre otros.

De acuerdo al objetivo general, fundamentado por la creación de una propuesta de actividades que nos ha permitido relacionar la matemática y la música, de acuerdo a la disposición de la música como recurso didáctico en la enseñanza misma del pensamiento variacional, teniendo en cuenta que es necesario crear procesos dinámicos para dejar de enseñar de manera tradicional y por otra parte, el hecho de potenciar cognitivamente a los estudiantes por medio de la educación artística, ya que permite el desarrollo de habilidades como el análisis,



la reflexión, el juicio crítico y en general el desarrollo de un pensamiento holístico o global, siendo la educación artística un punto de encuentro de las otras ciencias, partiendo de la idea que las artes promueven a su vez la idea de que la gran misión de la escuela no es solamente enseñarle al alumno a ganarse la vida, sino a vivirla plenamente.

Ahora bien, dando respuesta a la pregunta de investigación: **¿Cómo se puede utilizar la música como recurso didáctico para desarrollar el reconocimiento de patrones y regularidades en estudiantes de educación básica y media?** Presentamos estas actividades que han permitido, en primer lugar mostrar desde otra perspectiva la enseñanza del pensamiento variacional proporcionando al docente una idea del cómo abordar este pensamiento en el aula, y al ser la música un recurso didáctico, de acuerdo a la aproximación instrumental, el docente proveerá el avance que tenga el mismo en el desarrollo de la clase. Por lo tanto, las actividades hasta cierto punto se dejan abiertas para la adaptación de cada sujeto, sin dejar lugar a un posible abordaje que es dado en cada una de ellas. Vale la pena resaltar, que las actividades de los grados anteriores pueden tomarse como actividades introductorias, ya que a medida que avanzan los grados se ha de complejizar tanto los conocimientos matemáticos como los conceptos musicales mismos.



BIBLIOGRAFIA

- Anonimo. (s.f.). *PALÍNDROMOS de Gödel, Escher, Bach y... Mozart. Un Eterno y Grácil*.
Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/historia_02.pdf
- Arbonés, J., & Milrud, P. (2010). *LA ARMONÍA ES NUMÉRICA* RBA. RBA. Colección el mundo es matemático.
- Armstrong, T. (2000). *Inteligencias múltiples en el aula*. Obtenido de <https://www.primercapitulo.com/pdf/2017/3381-inteligencias-multiples-en-el-aula.pdf>
- Arroyave, M. (13 de Septiembre de 2012). *La metáfora geométrica en la música: una transferencia de experiencias de pensamiento entre dos disciplinas*. Obtenido de <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/c14/article/view/3782>
- Artigue, M. (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*.
- Avila, M., Lopez, C., & Luna, J. (2010). *LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES CUADRÁTICOS: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS*. Obtenido de [file:///C:/Users/user/Downloads/Dialnet-LaGeneralizacionDePatronesCuadraticos-3739187%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/user/Downloads/Dialnet-LaGeneralizacionDePatronesCuadraticos-3739187%20(1).pdf)
- Azarquiel, g. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis. .
- Ballester, A. E. (2007). *Instrumentos psicologicos y la teoria instrumentada: fundamento teorico para el estudio del papel de los recursos tecnologicos en los procesos educativos*. . Obtenido de Cuadernos de investigacion y formacion en educacion matematica.
- Benson, D. J. ((2008)). *Music: A mathematical offering. The Mathematical Intelligencer, 30(1)*,. Obtenido de Benson, D. J. (2008). *Music: A mathematical offering. The Mathematical Intelligencer, 30(1)*,
- cálculo, V. p. (2012). *Vargas, Veronica; Guzman, Jose*. Obtenido de https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2012m11v30n3/edlc_a2012m11v30n3p89.pdf
- Calderon D, A. (10 de Julio de 2015). *LA MÚSICA COMO ESTRATEGIA DINAMIZADORA PARA FACILITAR LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE EN LA EDUCACIÓN INICIAL*. Obtenido de <http://repository.ut.edu.co/bitstream/001/1536/1/RIUT-JCDA-spa-2015-La%20m%C3%BAsica%20como%20estrategia%20dinamizadora%20para%20facilitar%20los%20procesos%20de%20aprendizaje-1.pdf>
- Cañadas, M. C., & Molina, M. (2012). *PATRONES Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA GENERALIZACIÓN*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf>
- Carmen B., M. (s.f.). *Música y Matemáticas*. Obtenido de www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/MesaRedondaPDF/BertosMesaRedonda.pdf
- Castro F, W., & Godino, J. D. (2011). *Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010)*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/277836390_Metodos_mixtos_de_investigacion_en_las_contribuciones_a_los_simposios_de_la_SEIEM_1997-2010



- Causado, R. V. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/4054/1/Vergel2014Formas.pdf>
- Cedeño N., L. C., & De arco J., K. J. (10 de Junio de 2016). *Sistematización del Diagrama Musical a partir de la Experimentación con Instrumento(Piano)*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/11349/5002>
- Chevallard, Y. (1992). *oncepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques* .
- Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. Recherches en Didáctique des Mathématiques*.
- Corredor, X., Pineda, M., & Roa, S. (2013). *Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria*. Obtenido de <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7067>
- Desiderio, P. (2002). *Teoría de ondas de Elliot*. Obtenido de http://www.bcr.com.ar/Publicaciones/investigaciones/ondas%20elliot_desiderio.pdf
- Domínguez R., M. (Mayo de 2004). *LAS MATEMÁTICAS EN EL SERIALISMO MUSICAL*. Obtenido de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_24/6_Serialismo_musical.pdf
- Dos santos, C., Monico, L., Campelos, S., & Fernandes, C. (2015). *Dos santos, C; Monico, Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais*. Obtenido de <http://www.scielo.mec.pt/pdf/rpe/v28n2/v28n2a14.pdf>
- Dos santos-luiz, C., Mónico, L., Campelos, S., & Fernandes da silva, C. (14 de Diciembre de 2015). *Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais*. Obtenido de <https://revistas.rcaap.pt/rpe/article/view/7742>
- Du Sautoy, M. (22 de Marzo de 2016). *Las matemáticas escondidas en las grandes obras de arte*. Obtenido de https://www.bbc.com/mundo/especial/vert_cul/2016/03/160317_vert_matemat_ica_en_obras_de_arte_yv
- Evans, R. (2005). *Cómo leer MÚSICA*. España: EDAF.
- Ferreira, M. P. (2005). janeiro a Proporções na música da Antiguidade e Medieval. *Revista de Educação Musical*, 121-123, 5-23.
- García F., N. A. (2013). *ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE PATRONES MUSICALES*. Obtenido de <https://docplayer.es/18837680-Universidad-nacional-autonoma-facultad-de-ingenieria-analisis-e-interpretacion-de-patrones-musicales-tesis-profesional.html>
- Gardner, H. (1994). *ESTRUCTURAS DE LA MENTE LA TEORÍA DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES*. México: Fondodeculturaeconomica.
- Gonzalez, M. (2015). *Las Matemáticas y la Música*. Obtenido de <http://musimates.blogspot.com/2015/04/domino-musical.html>



- Jimenez G., A. E., & Montoya G., A. A. (Junio de 2017). *El Ritmo del Pasillo Colombiano: Un Factor Musical para el Desarrollo de Procesos de Generalización*. Obtenido de <http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/6699>
- Lien. ((2009)). Las matemáticas de Johann Sebastian Bach,. *Revista Suma*, 113-118. Obtenido de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/113-118.pdf>
- Liern C., V., & Queralto L., T. (12 de Mayo de 2008). *Música y Matemáticas La arominía de los números*. Obtenido de https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf
- López R., L. X. (2015). *¿A qué le suenan las matemáticas?* Obtenido de funes.uniandes.edu.co/9866/1/Lopez2015A.pdf
- López R., M. (24 de Junio de 2016). *Matemáticas y música de 0 a 3*. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5560416.pdf>
- Lucato, M. (5,6,y 7 de Junio de 1996). *La metodología Kodály aplicada a la escuela primaria*. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2786659.pdf>
- Mar, A. (6 de Octubre de 2018). *Bach y la fascinante relación entre la música y las matemáticas*. Obtenido de <http://www.musicaantigua.com/bach-y-la-fascinante-relacion-entre-la-musica-y-las-matematicas/>
- Martinez, G. (2012). *¿Las matemáticas en la música?!* obtenido de: <https://es.slideshare.net/Musicmathdr/music-math-15577403>.
- Mason, J. (1985). *Routes to Algebra, Roots of Algebra*.
- MEN. (08 de Febrero de 1994). *Ley 115*. Obtenido de Ley general de educación: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf
- MEN. (s.f.). *Serie lineamientos curriculares Educación en Artística*. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf2.pdf
- MEN, M. D. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*.
- MEN, M. D. (2003). *Estandares curriculares de competencias matemáticas*.
- Merino, E. (2012). *PATRONES Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf>
- Moncanada G, F. (1995). *La más sencilla, útil y práctica. TEORIA DE LA MUSICA*. México: Framong.
- musinetwork, C. (s.f.). *LOS SECRETOS DEL CIRCULO DE QUINTAS*. Obtenido de <http://foros.musinetwork.com/index.php?action=dlattach;topic=1435.0;attach=2653>
- Ortiz B., L. (2012). *IDENTIFICACIÓN AUTOMÁTICA DE ACORDES MUSICALES*. Obtenido de oa.upm.es/158/1/LUIS_I_ORTIZ_BERENGUER_2.pdf
- Pedreros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental*. Obtenido de Universidad del Valle, Cali, Colombia.: <http://funes.uniandes.edu.co/11565/1/Pedreros2013Modelaci%C3%B3n.pdf>



- Perez de la Cruz, C. (Junio de 2013). *EDUCACIÓN, MÚSICA Y MATEMÁTICAS: UN TRIÁNGULO AFINADO EN ARMONÍA*. Obtenido de <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/3221/1/TFG-B.236.pdf>
- Pérez, C. (Junio de 2013). *TRABAJO FIN DE GRADO*. Obtenido de EDUCACIÓN, MÚSICA Y MATEMÁTICAS, UN TRIÁNGULO AFINADO EN ARMONIA: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/3221/1/TFG-B.236.pdf>
- Quiñónez, A. (2012). DIGEDUCA, 2012, Pág.10). En A. Quiñónez, *FORMAS, PATRONES Y RELACIONES actividades de la vida cotidiana* (pág. 10). Guatemala: DIGEDUCA, Ministerio de educación de Guatemal.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Armand Colin.
- Ramirez G., M. I., Pineda B, M., & Roa F, S. (Agosto de 2013). *Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/6653/1/Roa2013Patrones.pdf>
- Rodriguez M, R. (Agosto de 1995). *LA TEORÍA DE FRACTALES: APLICACIÓN EXPERIMENTAL E IMPLICACIONES EN LA METODOLOGIA DE LA CIENCIA*. Obtenido de <http://eprints.uanl.mx/377/1/1020114994.PDF>
- Rodriguez Pedraza, G. E. (16 de Agosto de 2015). *El Juego La Escalera Como Dispositivo Para La Formulación De Patrones Aritméticos*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/11349/14310>
- Rodríguez. (noviembre de 2016). *La emergencia de los enfoques de la complejidad en America Latina*. Obtenido de <http://comunidadeditora.org/wp-content/uploads/2017/03/Libro-La-emergencia-de-la-complejidad-TomoI-ISBN-978-987-45216-7-5.pdf>
- Rojas G., P. J., Rodriguez B., J., Romero C., J. H., Castillo E., E., Mora V., L. O., & Grupo pretexto. (1996). *La transición aritmetica-álgebra*. Obtenido de http://maestriaeducacion.udistrital.edu.co:8080/documents/117925/3474081/LibroTransicion+Aritmetica-Algebra_Grupo+MESCUUD_U_Distrital_1999.pdf
- Rojas, P. J. (2010). *Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el aula*. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1168/1/115_Iniciacin_al_lgebra_Escolar_Elementos_para_el_Trabajo_en_el_Aula_Asocolme2010.pdf
- Sánchez , L., & Rivera, E. (Agosto de 2012). *DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA: GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS*. Obtenido de Biblioteca digital univalle: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co:8080/bitstream/10893/4599/1/CB-0472509.pdf>
- Santacruz, M. (2006). *LA ACTIVIDAD MEDIADA POR INSTRUMENTOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*. Obtenido de <https://docplayer.es/77035904-La-actividad-mediada-por-instrumentos-en-didactica-de-las-matematicas.html>
- Satué R, C., & Frías, C. (s.f.). *Música y matemáticas. Modelos compositivos a partir de geometrías fractales*. Obtenido de www.ehu.es/~mtwmastm/BizBAK_carlos.pdf



- Sin Autor. (s.f.). *Matemática en la Música*. Obtenido de <https://www.sectormatematica.cl/musica/matematica%20en%20la%20musica.pdf>
- Sin autor. (s.f.). *Usamos patrones al entonar canciones, en nuestra diaria*. Obtenido de www.perueduca.pe/recursosedu/sesiones/primaria/matematica/sesion_mat_2g_06.pdf
- SUMA. (Junio de 2009). *Las matemáticas de Johann Sebastian Bach*. Obtenido de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/113-118.pdf>
- Tomasini, M. C. (s.f.). *El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas*. Obtenido de <https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf>
- Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Edición del IREM. Montpellier: Université Montpellier.
- Valverde L, H. R. (09 de Septiembre de 2010). *Las regletas de patrones rítmicos: experiencias de aprendizaje lúdico creativo*. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5181324.pdf>
- Vargas A, V., & Guzmán H, J. (2012). *Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambientes de hoja electrónica de calculo*. Obtenido de https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2012m11v30n3/edlc_a2012m11v30n3p89.pdf
- Venegas A., M. N. (s.f.). *Los fractales en la música*. Obtenido de <https://docplayer.es/52005278-Las-fractales-en-la-musica.html>
- Vergel C., R. (Mayo de 2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuartos y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/4054/1/Vergel2014Formas.pdf>
- VILLA, J. A. (2006). *EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA: ALGUNAS REFLEXIONES EN TORNO A SU VALIDACIÓN*. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/3442/344234272008.pdf>
- Vlashi, F., & Cruz A., M. R. (s.f.). *Guía didáctica: MÚSICA o MATEMÁTICAS*. Obtenido de http://www.edu.xunta.gal/centros/iesterradesoneira/system/files/Didactica_Musica_oMatematicas.pdf
- Wikipedia. (12 de octubre de 2012). *Función matemática*. Obtenido de http://aprendeonlinea.udea.edu.co/lms/men_udea/file.php/435/Funcion_matematica_1_.pdf
- Zuleta, A. (Octubre-Marzo de 2004-2005). *EL MÉTODO KODÁLY Y SU ADAPTACIÓN EN COLOMBIA*. Obtenido de <https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/cma/article/view/6420/5100>



ANEXOS

Anexo 1. Solución de la actividad para 1º, 2º y 3º

CANTANDO Y APRENDIENDO

La canción presenta en un momento inicial por medio de melodías y ritmos secuenciales, la representación auditiva y visual de sol, día, luna, noche, en relación con las figuras de negra, corchea, y silencio de negra.

Lo que se plantea en primer lugar es el reconocimiento de las imágenes como se ve en el video, realizando el respectivo sonido:

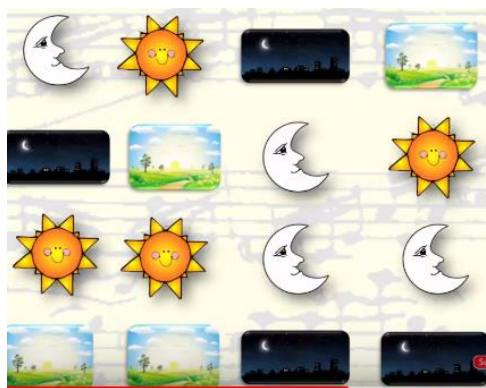


Esto permitirá que en el momento que los estudiantes vean la imagen, recreen al mismo tiempo el sonido, relacionando diferentes tipos de representaciones en una secuencia.

El video a su vez permite que mientras se va nombrando cada elemento, se desaparece uno a uno, hasta que se terminan completamente la secuencia que se visualiza en la pantalla.

Posteriormente, se presenta la imagen que se ve a continuación, realizando una nueva secuencia que se genera sin silencios, después de escucharla, se le pide a los estudiantes realizar la respectiva melodía siguiendo el ritmo que presenta en cada imagen.

Por último, cada estudiante representará alguno de los símbolos y en ese caso, únicamente harán el sonido que le corresponde.











Anexo 2. Solución de la actividad para 4º y 5º

MUSICALMENTE CANTANDO

Las soluciones estarán señaladas en **ROJO**

ACTIVIDAD INICIAL

Socialización de la Tabla 1

Figura rítmica	Silencio de figura	Valor de tiempo	Nombre de figura rítmica
		1 Tiempo	Negra
		2 Tiempos	Blanca
		4 Tiempos	Redonda

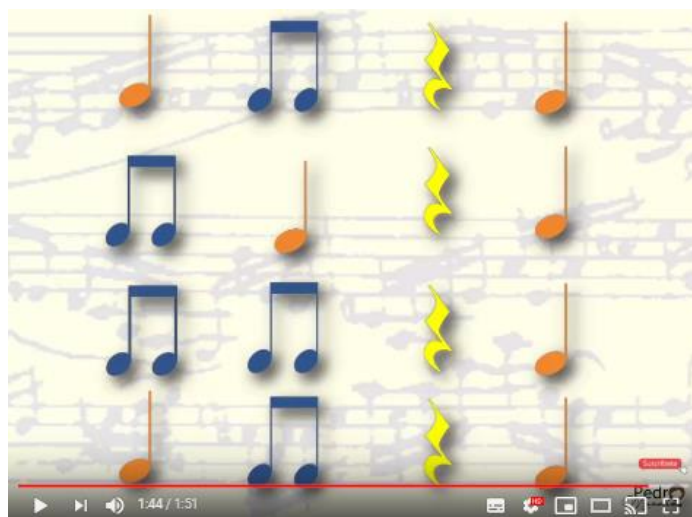
- Video que hable sobre la métrica en YouTube, por ejemplo:
<https://www.youtube.com/watch?v=t75d0RLjnc0>
- Definición de métrica en el marco teórico (ver p.21 de esta investigación), utilice otras fuentes de información.

Seguido de un ejemplo o varios, de igual manera al hacerlos se podría cantar con las palabras que se definieron para cada figura rítmica.

										
ta	Ta-a	Ta-a-a	ta	Ta-a	Ta-a-a	ta	Ta-a	Ta-a-a	ta	Ta-a

Se presenta el siguiente video

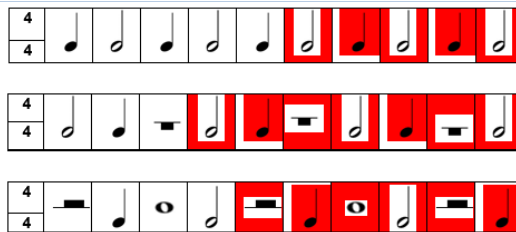
Video: <https://musicmathlearn.wixsite.com/musicmathlearn>



Algunas preguntas que podrían surgir; ¿qué figuras se encuentran?, ¿si les pareció fácil o difícil?, ¿cuál fue su parte favorita, entre otras preguntas?

Eso ya depende de lo que suceda en la clase, y de la manera en cómo se trabaja.

Completa los siguientes patrones rítmicos y realiza el ejercicio con tus manos.

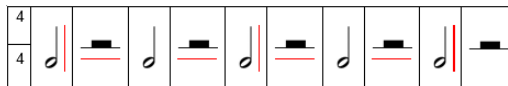


Ahora se creativo y establece tus propios patrones rítmicos.

- a. Realiza con dos figuras rítmicas diferentes con métrica de $\frac{4}{4}$:



- b. Realiza el patrón con tres figuras rítmicas diferentes con métrica de $\frac{4}{4}$:



Sigue las instrucciones del profesor (a) para realizar los siguientes patrones rítmicos.

Patrones rítmicos a realizar en grupo:

ta	Un tiempo en silencio	ta	ta	ta-a	ta	Un tiempo en silencio	ta	ta	ta-a
ta	ta	Cuatro tiempos en silencio	ta	ta	Cuatro tiempos en silencio	ta	ta	Cuatro tiempos en silencio	ta
ta-a	ta	ta-a	ta	ta	ta-a	ta	ta-a	ta	ta

LA LLAMADA DE DULCINEA

Dulcinea necesita llamar a su abuela Roberta, pero para llamar a su abuela deberá resolver unas pistas, las cuales consisten en sumar, restar o multiplicar el valor numérico de cada figura musical según el tiempo que representa, ayuda a Dulcinea a resolver las pistas para hallar el número de su abuela.

Resuelve las siguientes operaciones:

OPERACIÓN	RESULTADO (valor numérico)	OPERACIÓN	RESULTADO (valor numérico)
	1		6
	2		7
	3		8
	4		9
	5	Ninguna figura rítmica	0

A continuación se darán las pistas para hallar el número telefónico:



	OPERACION	RESULTADO		OPERACION	RESULTADO
A		3	F		9
B		1	G		2
C		3	H		8
D		8	I		1
E		2	J		5

Número del teléfono de la abuela de Dulcinea:

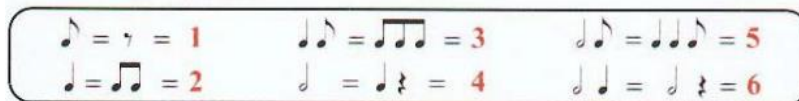
3	1	3	8	2	9	2	8	1	5
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J



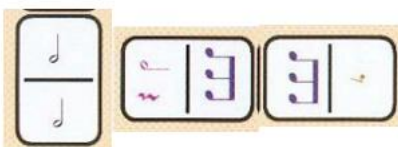
Anexo 3. Solución de la actividad para 6° y 7°

CREANDO UN NUEVO SISTEMA DE NUMERACIÓN MUSICAL

En un primer momento se presentan las equivalencias de los tiempos de acuerdo a la siguiente ilustración:



Así mismo se reproduce el sonido de cada una de ellas, para realizar una representación musical de las mismas, esto facilitará que los estudiantes relacionen dichos sonidos de los diferentes números utilizados. En el juego puede plantearse como regla inicial: “*sin reconocer el sonido, no se pueden poner las fichas*”, a continuación se presenta un ejemplo de la disposición de unas fichas jugadas, así, el sonido facilitará relacionar correctamente las equivalencias y el uso correcto de símbolos.



En la creación del sistema de numeración se realiza la equivalencia y se pretende formar los números mayores al 6, de acuerdo a la tabla de equivalencias, ya que por la suma de los otros números se pueden reescribir.

....	7	8	9	10
....				

Por último, se plantean unas secuencias numéricas, que se realizarán musicalmente y así mismo ver el patrón que se forma, de acuerdo con los elementos que pueden ser recurrentes o el orden de los mismos, si miramos por ejemplo, el literal b, que se encuentra a continuación, se puede recrear con el o los símbolos correspondientes al número 5, y así mismo al manejar únicamente los silencios correctamente se reconocerá fácilmente la secuencia.

b. [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50]

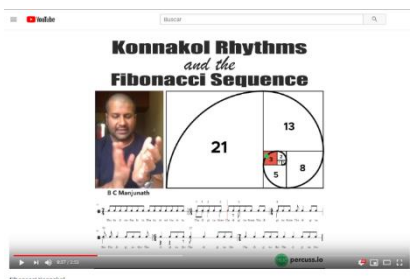


Anexo 4. Solución de la actividad para 8º y 9º

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES- CIRCULANDO ARMONICAMENTE

El docente deberá observar con los estudiantes el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=mOMLRMfIYf0&t=9s>



1. Se realiza el patrón de manera corporal (manos y pies) o con algunas claves (se pueden realizar con palos) en los primeros compases.

2. 8. Analiza el patrón en cuanto:

¿Qué tipo de métrica tiene? Pues presenta una variación a medida que se va presentando con respecto a la sucesión de Fibonacci (Está

respuesta puede variar, dependiendo de cómo los estudiantes lo vean).

Al ver y escuchar ¿Identifica el patrón geométricamente tanto al verlo como al oírlo? si se puede percibir el patrón tanto auditivamente como geométricamente (la respuestas pueden variar dependiendo de lo que los estudiantes identifiquen).

¿Qué figuras rítmicas se presenta en la partitura del video?

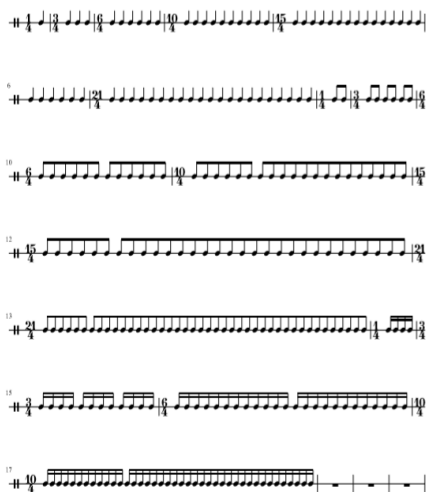
Se presentan negras, negras unidad (corcheas, tresillos...) en este caso si no las identifica, el docente podría intervenir o dejar para que averigüen los estudiante.

A continuación, se presentará una partitura con el patrón de los números triangulares, después de esto deberás responder las siguientes preguntas:

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES

Música - Matemáticas

Daniel Chavez & Sol Rojas



Escucha y observa la partitura, luego analiza lo siguiente, tanto visual como auditivo:

3. ¿Qué métrica tiene? ¿Hay alguna variación en la métrica? ¿Qué figuras rítmicas se presentan? Si hay algunas variaciones, cada vez se vuelve más rápida. Corcheas, negras, blancas...

4. Al escuchar la partitura y verla ¿se presenta algún cambio? Y si es así ¿qué cambio se presenta? Si se presenta algún cambio, comienza lento y resulta muy rápido...

5. ¿Se podría considerar esta partitura como un patrón o una regularidad? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa cuál sería

el siguiente compas y qué métrica tendría?

6. Si, se presenta un patrón puesto que tiene una forma muy peculiar de cambiar la métrica, tiene forma de números triangulares, el compás siguiente es de 15/4.

7. ¿Cómo podrías realizar esta partitura utilizando más figuras rítmicas (corcheas, negras, blancas y redondas y sus respectivos silencios)? Depende de la equivalencias entre las figuras, y si los estudiantes tienen conocimientos de ellas, etc.

Representa ambas partituras con tus manos, vamos a ver como suenan los números triangulares. Es un ejercicio de concentración, de compartir con los compañeros...



Estas preguntas pueden variar, también depende de cómo se trabaje con los estudiantes, cuales son los conocimientos que presenta cada estudiante.

Nota: Esta partitura tiene la estructura de los números triangulares.

Ya para finalizar, se institucionaliza se pregunta que si esta actividad se podría hacer con otro tipo de patrón numérico, si la respuesta es afirmativa, **¿cuál sería ese patrón? o ¿cuáles serían?**

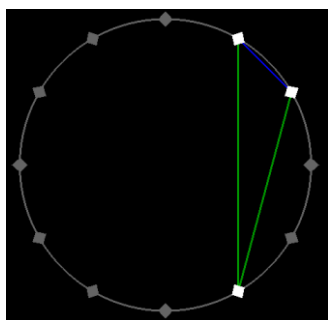
Se responde las preguntas que surjan en caso de confusión de los estudiantes, se aclaran (**el docente debe tener preparado un tipo de exposición, o tener claro los conceptos para este caso de preguntas**) y se hace un tipo de reflexión por parte del profesor recogiendo todo lo que se presentó en clase.

ACTIVIDAD Nº 2. CIRCULANDO ARMÓNICAMENTE

Se experimentara con el programa MAM PLAYER, y seguido a esto se trabajara con un archivo en específico.



Al tener el archivo MIDI (secuencia sorpresa), el estudiante deberá visualizar que es lo que sucede con el archivo y las representaciones que presenta el programa (MAM PLAYER).



1. Enunciado de la actividad:

Visualiza la secuencia que se presenta en la aplicación MAM PLAYER (Music Animation Machine MIDI player), archivo GeoMúsica.

Preguntas:

- Identifique qué es la representación que presenta el programa. ¿Por qué se presenta en forma de circunferencia?
- ¿Se presenta algún patrón o regularidad que nos permita saber por qué se presenta las divisiones en la representación?

En este caso, si hay la posibilidad de averiguar a través de internet sobre esta representación y por qué se relaciona con la música (en este caso si el docente ya sabría que es el círculo de quintas). Si no sucede ese caso, se puede dejar como tarea, en donde los estudiantes lleguen a clase con la idea de que lo que visualizo es el círculo de quintas, datos curiosos...

En este caso si se presenta un tipo de patrón puesto

A partir de lo que surja, se socializará lo que consultaron y las respuestas de las dos preguntas anteriores, dependiendo de hilo que lleven con esta parte, se deberá involucrar las preguntas 4,5 y 6, ya que esta parte tiene relación con lo que se pudo visualizar, permitiendo así generalizar.

Preguntas:

- ¿Qué relación tiene la representación visual con lo que usted está escuchando? **Esto depende de lo que perciban los estudiantes.**
- Teniendo en cuenta los puntos anteriores, y lo que se haya investigado con el grupo, analice el patrón que se presenta de forma de triángulo. ¿Qué es lo que representa el triángulo? **El triángulo representa la unión de tres vértices, los cuales**



son un tipo de nota. En este caso se está relacionando tres tipos de notas, y en cada caso están variando (al ver la representación en el programa)

¿Qué puntos toca cada triángulo?

A continuación, las notas que representa cada triángulo:

Primer triángulo: Representan el acorde de las notas DO-MI-SOL-DO, en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.	Segundo triángulo: Representan el acorde de las notas RE-FA-LA-RE, en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.	Tercer triángulo: Representan el acorde de las notas MI-SOL-SI-MI en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.
Cuarto triángulo: Representan el acorde de las notas FA-LA-DO-FA en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.	Quinto triángulo: Representan el acorde de las notas SOL-SI-RE-SOL en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.	Sexto triángulo: Representan el acorde de las notas LA-DO-MI-LA en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.
	Relaciones de equivalencia que se deben tener en cuenta para esta actividad: DO # (sostenido) = Reb (Bemol) RE# (sostenido) = Mib (Bemol) FA# (sostenido) = Solb (Bemol) SOL # (sostenido) = Lab (Bemol) LA# (sostenido) = Sib (Bemol)	
Septimo triángulo: Representan el acorde de las notas SI-RE-SI-FA#-SI, en este caso se vuelve a tomar la nota de partida como otra nota del final.	Esta equivalencia permitirá que junto a los estudiantes puedan resolver dudas en cuanto a las notas que se presenta en el esquema de la ilustración 21 de este mismo documento, en la página 24.	

9. Si al tocar tres puntos de la circunferencia forma un triángulo, ¿Qué pasaría si en la representación en vez de triángulos se hicieran cuadrados? **Se trabajaría en ese caso con cuatros notas...**
10. ¿musicalmente que sucedería? ¿Se podría generalizar con más polígonos? **Esto depende de la imaginación, percepción de cada estudiante en cuanto a la actividad...En este caso puede llegar a generalizar cada polígono con su vértice, y cada vértice una nota musical.**
1. Proponga un nuevo patrón que se podría hacer con la representación de programa (círculo de quintas).

Los estudiantes propondrán un nuevo patrón usando la representación (círculo de quintas) del programa, en este caso se deberá hacer de manera manual (haciendo la representación, usando colores y demás materiales para simular ese patrón en el cuaderno) o cualquier otro abordaje.

Aclaración: Si ya desea hacer con el programa, se tendría que trabajar en un programa (MuseScore) de creación de partitura, en donde se trabaja con términos musicales, y esté forma una partitura en formato MIDI.



Circuitos de Quintas

Daniela Chaves & Sol Rojas



Se presenta los patrones de cada estudiante o de algunos, para que los otros compañeros evidencien la creatividad de cada estudiante.

En esta ilustración se muestra el formato con el que se trabajó para esta actividad, esto se realiza en el programa (MuseScore) y se guarda en formato MIDI para abrirlo en el programa de MAM player

Se da paso a la institucionalización, en donde se puede llegar a conclusiones generales, de igual manera se aclara dudas sobre algún punto.



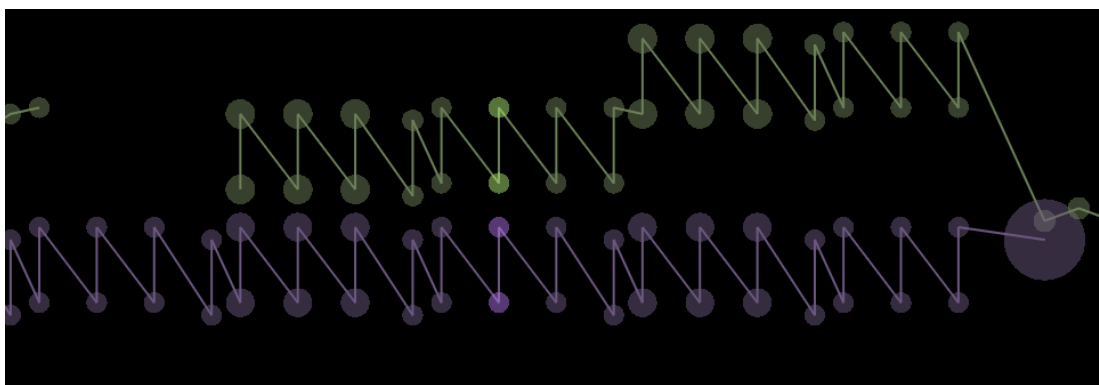
Anexo 5. Solución de la actividad para 10º y 11º

MODELANDO AL SON DE BOHEMIAN_RHAPSODY

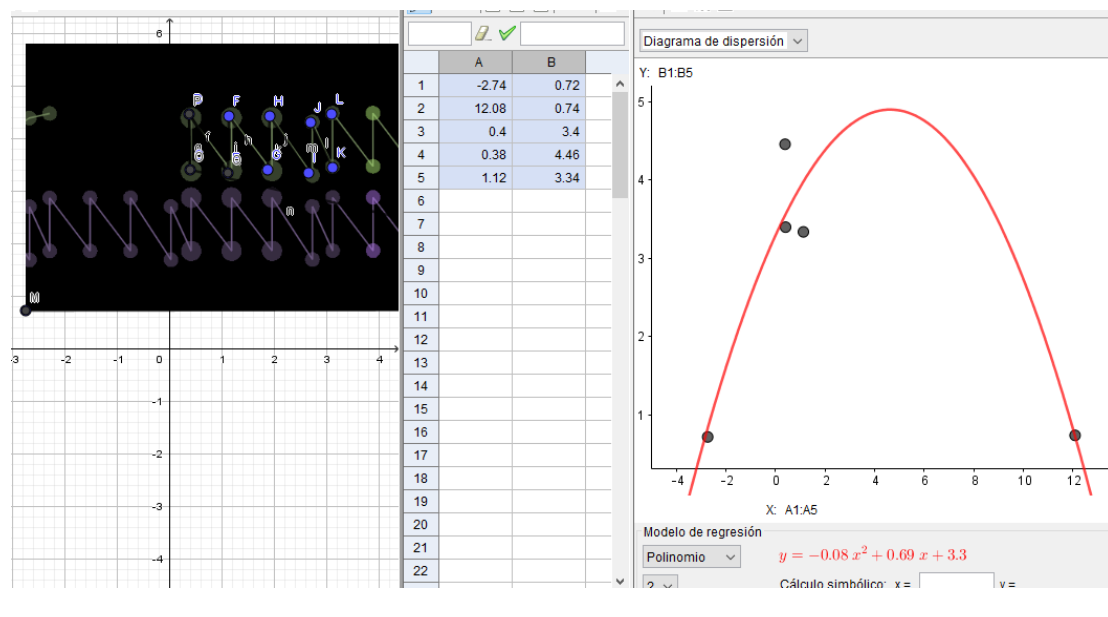
En primer lugar se le pide a los estudiantes realizar un trazo de acuerdo al sonido de las canciones, generando de forma implícita una función entre el tiempo como variable independiente y la altura de la melodía como variable dependiente, de manera intuitiva, como se muestra en la imagen:

Posteriormente se realiza el ejercicio con los ojos abiertos, en el sentido de mejorar el trazo e identificar de una mejor manera la gráfica y la magnitud de cambio implícita en la misma.

Ahora bien, de acuerdo a la modelación presentada por el programa MAM Player, en una de las diferentes representaciones se puede encontrar algo como la siguiente:



Y así mismo, en la intención de modelarlo, como sugerencia se puede utilizar excel o geogebra mismo para realizar una posible función. Por ejemplo, en geogebra se realiza el análisis de dos variables de acuerdo a las abscisas y a las ordenadas de cada uno de los puntos cercanos a los vertices de la representación anterior. Por ejemplo, al realizar una representación polinómica el programa arroja una posible curva, como la siguiente:





Dependiendo a la fracción de canción obtenida por cada grupo se darán diferentes tipos de representaciones, siendo una de segundo grado la más cerca al identificar cada pico o altura misma y así mismo si existe algún tipo de regularidad en la misma. Así mismo se pretende hacer un análisis de las variables relacionadas, como fue escrito anteriormente la relación entre el tiempo mismo y la altura.

Por otra parte, se podría ampliar el ejercicio al hablar de funciones continuas o discontinuas, ya que en este caso, por los silencios mismos, no se puede establecer toda la canción como una función continua.



ANEXO 6. PRIMER EVALUADOR

INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN

Estimado profesor, a continuación, encontrará unas rellenas de evaluación para cada una de las 5 actividades que se diseñaron en el marco de la propuesta de investigación. Se le solicita que responda marcando con una X si considera que la actividad responde al descriptor que se requiere validar. Si tiene observaciones adicionales sobre la actividad, puede consignarlos en la última fila de la tabla. Al final del instrumento, encontrará un espacio para escribir comentarios adicionales sobre la propuesta en general.

Por último, se requiere que escriba un breve perfil de su formación y firme. Una vez esté diligenciado, convierta a PDF y envíe en adjunto como respuesta al correo recibido.

ACTIVIDAD GRADOS 1°, 2° y 3°

CANTANDO Y APRENDIENDO

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	X	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	X	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.		X
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	X	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	X	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	X	
Observaciones: En la actividad no se realizan trazos, se utilizan dibujos que se entregan a los estudiantes.		

ACTIVIDAD GRADOS 4° y 5°

MUSICALMENTE CONTANDO

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	X	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	X	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	X	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	X	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.		X



Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	X	
Observaciones:		

ACTIVIDAD GRADOS 6° y 7°

CREANDO UN NUEVO SISTEMA DE NUMERACIÓN MUSICAL

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.		X
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.		X
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	X	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.		X
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	x	
Observaciones: El objetivo de la actividad se refiere a notas musicales, pero realmente se utilizan figuras musicales, puesto que no hay pentagrama.		

ACTIVIDAD GRADOS 8° y 9°

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIÁNGULARES: CIRCULANDO ARMONICAMENTE

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.		X
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.		X
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.		X
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.		X
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.		X
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.		X
Observaciones:		



ACTIVIDAD DE GRADO 10° y 11°

MODELANDO AL SON DE BOHEMIAN RHAPSODY

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.		X
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.		X
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.		X
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	X	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.		X
Los recursos: gráficas, videos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	X	
Observaciones:		

Comentarios adicionales:

PERFIL DE LA DOCENTE EXPERTA

Licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.
Especialista en enseñanza de las matemáticas Pontificia Universidad Javeriana.

15 años de experiencia como docente de matemáticas, 10 años de experiencia como jefe de área de matemáticas en colegios privados de Bogotá.

Estudios en música, solfeo, piano y canto.

DOLLY ESPINOSA
cc 51820990



ANEXO 7. SEGUNDO EVALUADOR

INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN

Estimado profesor, a continuación, encontrará unas rejillas de evaluación para cada una de las 5 actividades que se diseñaron en el marco de la propuesta de investigación. Se le solicita que responda marcando con una X si considera o No que la actividad responde al descriptor que se requiere validar. Si tiene observaciones adicionales sobre la actividad, puede consignarlos en la última fila de la tabla. Al final del instrumento, encontrará un espacio para escribir comentarios adicionales sobre la propuesta en general.

Por último, se requiere que escriba un breve perfil de su formación y firme. Una vez esté diligenciado, convierta a PDF y envíe en adjunto como respuesta al correo recibido.

ACTIVIDAD GRADOS 1º, 2º y 3º CANTANDO Y APRENDIENDO

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	x	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	x	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	x	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	x	
Observaciones:		

ACTIVIDAD GRADOS 4º y 5º MUSICALMENTE CONTANDO

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	x	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	x	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	x	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son	x	



pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.		
Observaciones:		

ACTIVIDAD GRADOS 6º y 7º

CREANDO UN NUEVO SISTEMA DE NUMERACION MUSICAL

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	x	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	x	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	x	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	x	
Observaciones:		

ACTIVIDAD GRADOS 8º y 9º

AL SON DE LOS NUMEROS TRIANGULARES: CIRCULANDO ARMONICAMENTE|

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	x	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	x	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	x	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	x	
Observaciones:		



ACTIVIDAD DE GRADO 10º y 11º MODELANDO AL SON DE BOHEMIAN_RHAPSODY

Descriptor	SI	NO
Los estándares propuestos para matemáticas se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
Los estándares propuestos para música se evidencian en el diseño de la actividad.	x	
El diseño de la actividad responde al objetivo planteado.	x	
La actividad se encuentra en el marco conceptual de los grados para la cual está diseñada la actividad.	x	
El lenguaje que se utiliza es claro para cualquier profesor que quiera acceder a esta actividad.	x	
Los recursos: gráficas, vídeos, situaciones, software son pertinentes y sirven como herramienta para lograr procesos de comprensión y construcción de saberes.	x	
Observaciones:		

Comentarios adicionales:

La propuesta es bastante buena y creativa, se vale de las relaciones entre matemáticas y música para organizar una propuesta de enseñanza en varios niveles que resulta interesante por la combinación de aspectos didácticos de las matemáticas y música. Es una propuesta con una estructura interesante, con ayudas tecnológicas y con graduación de complejidades según los niveles. Felicitaciones.

PERFIL DEL DOCENTE EXPERTO |

JOSÉ TORRES DUARTE

Licenciado en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bachiller con énfasis en artes, modalidad música. Actualmente estudiante de curso de extensión en Guitarra, Parroquia La Consolata



ANEXO 8. PARTITURA AL SON DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES.

AL SON DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES

Música -Matemáticas

Daniela Chavez & Sol Rojas

The musical score is written on a single staff with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The time signature is 4/4. The score is divided into measures by vertical bar lines. Above the staff, the triangular numbers 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, and 55 are placed above specific measures, indicating the sequence of notes. The notes are primarily eighth and sixteenth notes, often beamed together in groups. The score ends with a double bar line and a repeat sign.

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55