UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

**Matematización de artesanías en el telar Kumihimo**

**Jeisson Sneyder Torres Rodríguez**

**Universidad Distrital Francisco José De Caldas**

**Facultad de Ciencias y educación, Colombia**

**2019**

**Matematización  de artesanías en el telar Kumihimo**

Jeisson Sneyder Torres Rodríguez

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:

**Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas**

**Director:**

Edwin Alfredo Carranza Vargas

**Universidad Distrital Francisco José De Caldas**

**Facultad de Ciencias y educación, Colombia**

**2019**

***Dedicatoria***

*Desearía que en vida mi padre y mi hermano hubiesen vivido este gran momento junto a mí, pero las circunstancias de la vida no lo permitieron.*
*Gracias madre mía por todo el apoyo incondicional, por guiarme desde que nací y dar siempre lo mejor de sí misma para garantizarme un bienestar digno y permitir crear mi propia autonomía, por haberme enseñado a construir un camino para lograr mis metas, sin importar las dificultades, errores y obstáculos que se me presenten.*

*Acá se refleja un poco de la lucha social, el enriquecimiento del saber, la recompensa y sacrificio que he logrado para que me supere día tras día. También dedico esto a mis demás familiares, compañeros, a mi gran amor y compañera de vida  para que seamos ejemplo de las futuras generaciones que luchen día a día por enriquecer su saber.*

**Agradecimientos**

Agradezco a toda la comunidad estudiantil de LEBEM ahora LEMA por haber depositado su voto de confianza en mí, para representarlos en diferentes escenarios académicos, de movilización estudiantil y del movimiento social colombiano. Al docente Edwin Carranza, asesor de este trabajo, que con su gran creatividad, conocimiento y dedicación contribuyó significativamente a mi crecimiento personal y profesional. Incentivando siempre una excelente calidad humana y disposición para recrear el saber de la educación matemática. También quiero resaltar un agradecimiento al docente Alberto Forero por haber creído en mí y haberme hecho creer en mí mismo, cuando presente la mayor dificultad académica de mi formación como docente. También agradezco a todo el cuerpo de docentes de la licenciatura y a las secretarias del proyecto curricular, por aportar con sus conocimientos a mi formación académica. Finalmente agradezco al evaluador de este trabajo de grado, por brindarme el apoyo necesario para desarrollar y reflexionar respecto a la educación matemática en los espacios de formación académica que compartimos.

## Resumen

En este trabajo se presenta la matematización de tejidos artesanales que se obtienen por medio del telar redondo de origen japonés llamado Kumihimo. El cual tiene como base el estudio del concepto de trenzas y enredos, a través del cual se emplean algunas generalizaciones obtenidas de estas. Estableciendo la identificación de algunas propiedades de los números reales, que son la propiedad asociativa, conmutativa, inversos y permutaciones. Sustentados en los niveles de matematización de Freudhental de donde se obtienen conjeturas y generalizaciones de trenzas y manillas de tipo redondo con el telar utilizado. Aquí además se describen procesos de la matematización que se obtienen de manera empírica, lo cual permite visualizar las matemáticas escondidas en esta artesanía.

## PALABRAS CLAVE:

Trenzas, telar, álgebra, generalizar, inversos.

## Abstract

In this work we present the mathematization of artisan fabrics obtained through the round loom of Japanese origin called Kumihimo. Which is based on the study of the concept of braids and knots, through which some generalizations obtained from these are used. Establishing the identification of some properties of the real numbers that are the associative, commutative property; inverses and associated permutations. Sustained in the levels of Mathematization of Freudhental where conjectures and generalizations of braids and handles of round type are obtained with the loom to be used. Where processes are also described mathematization that are obtained empirically, which allows to visualize the hidden mathematics in this craft.

## KEYWORDS:

Braids, generalize, loom, algebra, inverses.

# Contenido

**Tabla de Ilustraciones**

## Justificación

Esta iniciativa tiene origen en la clase extensiones numéricas que se cursa en sexto semestre de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, de la cual se origina la ponencia titulada “Trenzas, hacer matemáticas” en la que se abordó de manera didáctica la enseñanza del álgebra abstracta, que contiene temáticas como grupo, campo, anillo y asociatividad ejemplificadas por medio de trenzas.

En aras de ahondar este trabajo, se presenta este documento que permitirá dar a conocer las matemáticas que se esconden detrás de las artesanías. En un telar específico que en este caso es el telar redondo, de origen japonés llamado Kumihimo. Presentando también la etapa transitoria de los niveles de matematización, vertical y horizontal, sustentados desde la teoría de la fenomenología didáctica propuesta por Freudenthal (1983).

## Planteamiento del problema

La enseñanza de las matemáticas escolares, no deben volverse un proceso tedioso, ni complejo y mucho menos la del álgebra abstracta, esta debe ser dinámica, hacerse visible y manipulativa si se quiere.

La enseñanza de las matemáticas puede llegar a ser algo visible, manipulativo y tangible. Pues la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas enfatiza su modelo de enseñanza por medio de la resolución de problemas, un caso específico es el de la asignatura denominada extensiones numéricas, allí se habla del concepto de función y una introducción al álgebra abstracta, el docente que dirigió la asignatura, plantea una forma creativa de hacer visible algunas propiedades de los números reales, como lo es la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente, las cuales se visualizaron por medio de la creación de trenzas con hilo macramé y lazo.

Posteriormente, con el fin de profundizar y exteriorizar la aplicación del trenzado, surgió la pregunta acerca de: ¿Cómo matematizar tejidos artesanales? entendiendo matematizar como una forma de dotar de significado matemático, quehaceres prácticos en alguna actividad dentro o fuera de la matemática, además se identifican procesos y conceptos de manera organizada.

Esta pregunta es bastante amplia, la cual conllevó a realizar una exploración acerca de si la matematización se realizaría ¿para cualquier tejido o para cualquier telar? Estas inquietudes dieron paso a realizar una observación de cómo se elaboran los tejidos de forma manual, con máquina o algún telar en específico.

Se percibe que en cada elaboración de un tejido, existe una forma de conservar la manipulación, la cual permite crear una forma visual o figurativa en lo que se teje. Como existen diversos telares y formas de tejer, se realiza un bosquejo en trenzar con una notación propia como la que se presenta en los antecedentes, se observan formas de tejer en telares Hindúes, egipcios y otros, pero se buscaba también la comodidad de llevar el telar que se escogiera a cualquier aula de clase de cualquier nivel educativo.

Después de las observaciones realizadas, el planteamiento del problema se redujo a ¿Cómo matematizar tejidos artesanales que se obtienen del telar redondo llamado Kumihimo? Se escogió el Kumihimo ya que no es un telar convencional en la educación matemática, su origen es japonés.

## Antecedentes

A continuación se presentan actividades previas que contribuyeron a implementar el desarrollo del presente documento, las cuales permitieron darle una estructura y enfoque teórico-práctico respectivamente. Ya que se presentaron ponencias de tipo distrital y latinoamericano en eventos académicos de educación matemática, también se presentaron talleres en instituciones de educación básica y media en la ciudad de Bogotá D.C.

### Trenzas: hacer matemáticas

Esta actividad fue una ponencia realizada en el IV encuentro distrital de educación matemática, que se realizó en la ciudad de Bogotá D.C. durante los días 7, 8, 9 de septiembre de 2017. Cuyos objetivos se centraron en:

- Propiciar un ambiente en el cual los participantes del taller experimenten y relacionen términos matemáticos asociados a las trenzas.
- Fomentar en los participantes el desarrollo de conjeturas y demostraciones alrededor de las experiencias y procesos realizados sobre las trenzas.

Respecto a lo que se sistematizó, se resalta que los participantes relacionaron a través de la visualización, representaciones geométricas, propiedades y generalizaciones que se establecen en el concepto matemático de grupo, el cual se reflejó en la construcción de n-hebras (Trenzas), las cuales se elaboraron con las siguientes instrucciones:

A=1 bajo 2
a=1 sobre 2
B= 2 bajo 3
b=2 sobre 3
C= 3 bajo 4
c= 3 sobre 4


*Ilustración 1. Esquema trenzas. Hacer matemáticas. Fuente propia*

Con base en la instrucción se construyeron las siguientes trenzas:

$$a * b * c$$

$$b * A * C$$

$$B * a * b * c$$

$$a * c * b * c * c$$

$$A * A * c * A * A * b$$

Donde * simboliza que existe una operación entre cada elemento. Una vez realizada la actividad, se dio paso a evidenciar propiedades de los números reales, donde se cumple la propiedad asociativa.

También se cumple la propiedad conmutativa, pero uno de los aspectos que más se resalta de esta presentación es la pregunta ¿Qué trenzas deshacen las trenzas propuestas? ya que el desenredar de manera ordenada obligó a los participantes a pensar un orden estricto para desenredar utilizando únicamente las instrucciones dadas.

Después de institucionalizar la actividad y hacer evidente el uso de inversos que refiere a generar los movimientos opuestos, se pudo hablar de ciclo, equivalencia de que cuatro trenzas, es similar a hablar de un grupo en T4, entonces el número que acompañe a T hace referencia al número de hebras a utilizar. Se resaltó que si se pueden armar trenzas, también se pueden desarmar utilizando los mismos movimientos, lo cual refiere al papel de la igualdad más allá de utilizar un signo.

## Taller a Docentes de primaria colegio Alpes: Destrezas y horizontalidad.

**Fecha de aplicación:** Marzo 07 de 2018.

Este taller, como su título lo indica, correspondió a trabajar con docentes con el fin de promover el uso de recursos en la clase de matemáticas para estudiantes entre primer y tercer grado respectivamente, por tanto se utilizó el trabajo de trenzado para abordar las temáticas de horizontalidad y destrezas corporales.

Este espacio permitió generar un acercamiento para realizar trenzas utilizando el telar Kumihimo, por tanto la actividad estuvo orientada a desarrollar la direccionalidad y orientación en los estudiantes de primaria, a través de indicaciones de las palabras, arriba, abajo, derecha e izquierda.

La sistematización obtenida se refleja en el uso de la técnica de tejidos y trenzas que permiten vincular aspectos culturales, se explicó el significado de la palabra Kumihimo, la cual hace referencia a una técnica Japonesa que compone trenzas o tejidos artesanales. El uso matemático de este elemento permitió trabajar nociones de horizontalidad y direccionalidad. En este caso se trabajó sobre el telar circular (ver imagen). Con trenzas de dos hebras es decir se trabajó en T2

La actividad se desarrolló de la siguiente manera: una vez se tenía el objeto circular con sus respectivas divisiones, se procede a amarrar dos tiras de lana de diferente color estas se colocan entrando por el orificio de la mitad del disco redondo. Una vez realizado lo anterior, se emplea un ángulo de 90 grados como se muestra a continuación:

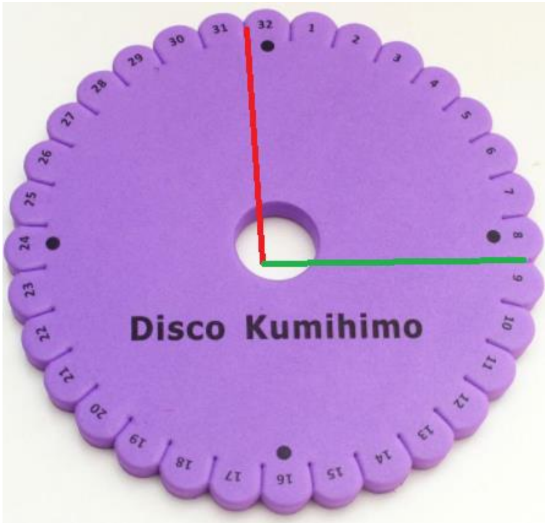



*Ilustración 2 Disco Kumihimo. Fuente propia*

Posteriormente se generó  una secuencia de movimientos, la lana de color rojo solo se mueve de arriba hacia abajo y viceversa, la lana de color verde se mueve únicamente de derecha a izquierda.

Los movimientos deben ser intercalados de la siguiente manera abajo, izquierda, arriba, derecha y así sucesivamente, de estos movimientos se va a obtener una trenza en forma de manilla, de esta manera se va a incentivar el aprendizaje de los estudiantes y que éste a su vez sea significativo.

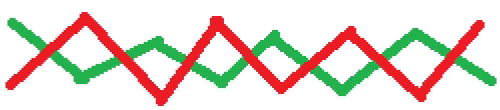


*Ilustración 3Tejido en Kumihimo dos hebras. Fuente propia*

## TALLER: TRENZAS, MATEMÁTICAS ESCONDIDAS EN NUDOS Y ARTESANÍAS RELME 32

En aras de profundizar el presente trabajo, se elige participar con una ponencia de carácter latinoamericano en la reunión  latinoamericana de matemática educativa RELME 32, realizada en la ciudad de Medellín, Colombia, durante el 02 al 06 de Julio de 2018 donde principalmente  las actividades propuestas en el taller tienen como base el estudio de la teoría de nudos y trenzas en matemáticas, así como profundizar e institucionalizar algunas generalizaciones obtenidas en el desarrollo del taller.

El objetivo giró en torno a propiciar un ambiente en el cual los participantes del taller experimenten, relacionen varios objetos matemáticos asociados a la elaboración de trenzas y el álgebra abstracta que hay detrás de estas.

Para este taller se estableció un grupo de n-trenzas, T4 y T5 respectivamente, se elaboraron trenzas con la notación A, a,B,b,C,c, D,d  donde las letras mayúsculas significaron tejer sobre la hebra que se tenía al lado derecho de la hebra inicial, se teje de izquierda a derecha. Una vez construidas las trenzas se sistematizó en dos sesiones: propiedades de los números reales como la propiedad asociativa, conmutativa.

Además al destrenzar, se hizo referencia al uso de inversos y permutaciones. Posteriormente se construyeron conjeturas y generalizaciones, las cuales serán concebidas por el grupo de participantes de manera empírica. Dichas conjeturas se desbordaron a poner en debate que lo que se teje son nudos o enredos, para lo cual el consenso fue que eran enredos dado que la definición matemática de nudo especifica que este debe ser cerrado y continúo, las hebras que se tejieron en este taller quedaban sueltas. En ningún caso se representó el término de cerrado.

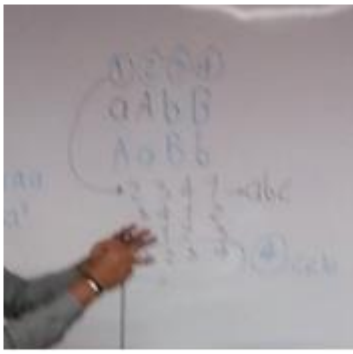
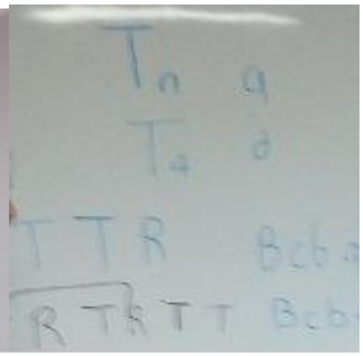
 

*Ilustración 4 Notación 2 Relme. Fuente propia*

*Ilustración 5 notación 1 Relme. Fuente Propia*

## Trenzas: hacer matemáticas parte 2

El objetivo de la segunda parte del taller de trenzas del EDEM V tuvo como objetivo plantear a los participantes una manera alternativa de la enseñanza y aprendizaje del álgebra abstracta, no solo como el trenzado, si no tener un acercamiento al Kumihimo.

La sistematización obtenida de este taller fue, en principio realizar trenzas con la notación propia de A, a, B, b, C, c  de estas trenzas se resaltó que se cumplen las propiedades de los números reales como la asociativa y conmutativa respectivamente. Posterior a ello se dan indicaciones para tejer en el telar redondo de Kumihimo: Hebra roja  posición 1, hebra verde posición 8

Los participantes realizaron la secuencia de movimientos de la siguiente manera:

1  se desplaza a 16, 8 se desplaza a 24, 16 a 1, 24 a 8 y así sucesivamente. Figura 2: Posición de las hebras. Fuente propia (anexar).

Luego, se  plantearon los mismos cuestionamientos, en telar redondo ¿también se cumplen los cuestionamientos empleados en las trenzas iniciales? De lo cual se concluyó que si se cumple la propiedad asociativa (ab)c=a(bc) si se aplica T3 en el Kumihimo, se reafirma el cumplimiento de la propiedad conmutativa a*=b*a
De esta manera se visualizan las matemáticas escondidas en esta artesanía y la aplicación de conceptos abstractos en material tangible.

*Ilustración 6 Trenzado a mano. Fuente propia*

*Ilustración 7 Flor Kumihimo. Fuente propia*

## Objetivo

- Sistematizar la matematización presente en el estudio de tejidos artesanales, que se obtienen por medio del telar redondo japonés Kumihimo.

## Objetivos específicos

- Describir procesos de manipulación del telar Kumihimo, para sistematizar y matematizar tejidos asociados a la introducción del álgebra abstracta.
- Sistematizar el proceso de matematización obtenido del telar a trabajar, con una propia notación matemática (patrones, expresiones algebraicas, características cualitativas y cuantitativas).
- Presentar un documento final que describa la construcción del proceso de matematización desde sus primeros abordajes y alcances matemáticos bajo los cuales está orientado.

## Marco teórico

En el presente trabajo se realizan procesos de matematización que se extraen del telar Kumihimo, motivo por el cual es indispensable describir tres temas en los cuales se desarrolla dicha matematización.

En primer lugar se realiza una caracterización de que es el telar Kumihimo, junto a breves apuntes históricos, también algunas características de estructura y forma que se obtienen al trabajar en este telar. La caracterización concluye presentando apuntes de la manipulación del telar escogido. En segundo lugar, se describen definiciones de los niveles de matematización horizontal y vertical, propuestos por Freudenthal (1983). En tercer lugar se presentan las matemáticas que están presentes en el proceso de matematización como la teoría de grupos, permutaciones, propiedades de los números reales.

## ¿Cómo se escoge el Kumihimo?

El telar se escoge teniendo en cuenta el antecedente de elaborar trenzas en superficies planas sin un telar definido, de la cual se resalta el uso de una notación propia, creada para hacer entendible los conceptos y definiciones matemáticas que hay detrás de estos.
En el paso de tejer en lo plano a lo redondo, se realiza una larga observación de diferentes telares, de donde surge escoger un telar que tenga forma redonda, que arroja un tejido de carácter redondo con diferentes figuras visuales, llamado Kumihimo. Su origen es Japonés, según indican algunos apuntes históricos surge en la era de los Samurái como necesidad de crear técnicas para tejer un objeto que les permitiera guardar sus espadas. Sin embargo, en el desarrollo de la historia, este telar ha tenido diferentes transformaciones y técnicas en su forma de tejer. Por tanto en el actual trabajo se toma únicamente el telar redondo de 32 divisiones presentado previamente en los antecedentes.

Una vez escogido este telar, se da paso a entender el paso de lo plano a lo redondo, primero se indaga en qué consistían los movimientos del telar, que permiten crear un tejido, ya que se deben realizar rotaciones, en algunos casos.

También se debe tener en cuenta que para tejer en el Kumihimo, se debe elegir el número de hebras que se quieran tejer en el telar redondo. Luego, por medio de ensayo y error, se visualizó la tensión que genera tejer en el disco redondo siempre y cuando se emplee una secuencia ordenada en las 32 divisiones que posee.

## Manipulación del telar Kumihimo:

El proceso de manipulación del telar se desarrolla a partir de los movimientos que permiten crear tejidos que forman diferentes figuras como: rombos, flores, corazones, entre otros. Las funciones que cumple el telar en el desarrollo del trabajo, es que se resaltan atribuciones de propiedades matemáticas y de sistematización en todo el proceso desarrollado.

Reconociendo en primera medida que a través de la observación, se da un acercamiento a sistematizar los niveles de matematización que plantea Freudenthal (1988) los cuales se desarrollan en el disco redondo del Kumihimo, entonces la manipulación del telar está dada de la siguiente manera:

*La observación y/o forma de tejer:* En este apartado se vinculan algunos aspectos de carácter situacional, que abarca las rotaciones que se emplean en el telar redondo, formas de tejer. Este telar cuenta con 32 divisiones numeradas, es de forma redonda, se pueden utilizar desde 1 hasta 32 hebras de distintos colores, el telar tiene puntos marcados en los números 1, 8, 16, 24, 32 dichos puntos en este trabajo se asumen como ejes de referencia para construir tejidos y ubicar las hebras con las que se trabaje. Para tejer, se debe amarrar todas las hebras escogidas y posteriormente se deja fijo el enredo obtenido en el centro del disco redondo para empezar a tejer.

Para tejer, inicialmente se ubica cada hebra (o el número de hebras con el que se quiera trabajar) en un posición con su respectivo número. Seguido de ello, las hebras se mueven de una posición a otra, las cuales determinan un patrón que le da una forma específica al tejido. Una vez se cambian dos hebras de posición, al disco redondo se le aplica un giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Las técnicas para elaborar tejidos se divide en etapas que son nivel principiante, avanzado y experto, para generar los diferentes tejidos.

Los niveles dependen de la forma y agilidad que se tenga para ejecutar el respectivo trenzado, es decir primero se define el número de hebras, sus colores y la forma o figura que se quiera obtener en las 32 divisiones en el disco redondo, a cada hebra se le asocia una posición inicial. Un nivel principiante teje con 2 o 16 hebras, un nivel medio teje hasta con 32 o ayuda de alguna máquina y un nivel experto puede ser capaz hasta de modificar el telar o usar más de uno para constituir un tejido.

EL nivel escogido para la matematización es nivel principiante, de allí es importante resaltar que según el número de hebras escogidas para tejer, se aplica el giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj, excepto cuando se utilizan únicamente dos hebras.

La manipulación del telar genera un tejido rígido. La rigidez del tejido depende de las divisiones en el telar, solo se necesita que el telar contenga divisiones entre 0 a 32. Pues sus divisiones sin importar el número, garantizan la fortaleza que se genera en el tejido que se obtiene.

*Elementos que hacen parte de lo situacional:* **Pinterest** aparece cuando se inicia el trabajo con el Kumihimo*,* para entender el funcionamiento del telar no bastaba con realizar visualización o descripciones meramente teóricas, el mundo actual exige una relación directa con programas de carácter digital, en el caso de la enseñanza de las matemáticas no es ajeno a esto, Pinterest como canal web permitió visualizar algunas formas que pueden obtenerse del telar Kumihimo, con las características descritas anteriormente, donde se especifica el nivel de uso y justificación del telar.

Es Pinterest una referencia inicial que permitió visualizar formas que se obtienen en el telar Kumihimo. Como flores, rombos, corazones, entre otros. También permitió observar la acomodación inicial de las hebras y el número de hebras para obtener una figura en específico, pero en ningún momento este referente describe patrones o algún manejo de tejer en el disco redondo de Kumihimo. Con base en la visualización, se fortalece el proceso de instrumentalización, para generar la escritura y conexión con aspectos matemáticos descritos en el marco teórico y referencial respectivamente.

*Elementos que hacen parte de lo referencial:* Los modelos gráficos que se utilizan en el telar, en principio son de carácter visual, donde se pueden encontrar figuras como cuadros, flores, rombos, corazones, allí lo que se ejecuta son acomodaciones específicas de cada hebra con su respectivo color para determinar los movimientos de la figura que se quiere obtener. También es este aspecto se resalta el uso de tablas de datos donde se especifica el color de las hebras el total de hebras, la descripción ordenada de cada movimiento que se emplea.

*Generalidades matemáticas*: una vez se teje, para obtener una forma específica en la creación del tejido, bien sea una flor, un diamante, entre otros y sistematizada la existencia de un patrón en la forma de tejer, el cual establece un orden para tejer.

Lo que se realiza es por medio de ese patrón de movimientos identificado, documentado se le asocia elementos matemáticos; en este caso la del álgebra como el uso de una operación donde esté presente la propiedad asociativa o conmutativa.

*Formalización:* teniendo en cuenta que se trabaja en los niveles de matematización propuestos por Freudenthal. Este apartado se asemeja al nivel formal, ya que después de identificar patrones, formas, visión del tejido que se quiere obtener, lo que se hace es escribir una notación propia donde se ejecutan operaciones, se describen elementos de generalización asociados a conceptos matemáticos.

En segundo lugar se presenta las definiciones de matematización sobre las cuales se va a trabajar.

## Fenomenología y fenomenología didáctica

Se debía definir una estrategia didáctica que permitiera matematizar una actividad que emerge del medio y caracterizarla desde el formalismo de las matemáticas; por tanto, se decide vincular dicho proceso a uno de los principios de la matemática realista, que es la fenomenología didáctica, que según Hans Freudenthal (1983) plantea la matematización de los objetos matemáticos como una actividad matemática elaborada con fenómenos que emergen de la realidad de un contexto dado, es decir, sin dar sus definiciones. Esto se obtiene a través de ejemplos desde una perspectiva asociada al término de fenómeno, caracterizando este como el medio de organización, llámese figura, longitud, número, entre otros. Que en últimas terminan siendo un objeto matemático a desarrollar.

También, es importante resaltar que para Freudenthal las matemáticas se conciben como la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó matematización (Freudenthal, 1983); es decir, que la forma de aprender matemáticas debía ser a través de la interacción, ejecutándola, siendo la matematización el propósito de la educación matemática.

En ese orden de ideas se plantea que: "los seres humanos deben aprender matemáticas a través de una actividad que les permita matematizar la realidad" (Freudenthal, 1983, p.7). Freudenthal se refería a la matematización de la realidad como la marera de organizar la matemática a partir de los fenómenos, a lo que llamo análisis fenomenológico, que tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Para Freudenthal, la "Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica,..." (1985, p. 9)

## Niveles de matematización

El trabajo se desarrolla por medio de los niveles de matematización que plantea Freudenthal (1970). Donde se plantea la matematización horizontal que hace referencia a la apropiación del telar escogido, en este caso la justificación de porqué se escogió ese telar y la manipulación que se realiza en este para evidenciar un uso matemático con el tejido que se obtenga.

Sin embargo, existen aportes teóricos como los de Teffers (1987) que definen la matematización horizontal y vertical como:

*"La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva."*

"La de matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización. Es un proceso más complejo y abstracto que un individuo logra, cuando logra organizar y realizar operaciones dentro de un sistema matemático formal.”

En conclusión lo que plantea Freudenthal (1983) es que “la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos matemáticos”.

El proceso de matematización transita por diferentes niveles de comprensión de situaciones; donde los niveles no constituyen alguna jerarquía estrictamente ordenada. Dentro de esos niveles se encuentra:

***Nivel Situacional:*** Este nivel hace parte de la matematización horizontal, donde está presente la interpretación de una situación problema, el uso de estrategias utilizadas para desarrollar la misma, está ligada al contexto que se plantee en la misma. El resolutor de la situación se apoya, en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia. Para identificar y describir la matemática que visualice, por medio de esquemas o el planteamiento desde otras perspectivas de conocimiento.

También puede descubrir relaciones y/o regularidades y relacionarlas con otros problemas pero sin un análisis profundo.

Por otro lado, los niveles que constituyen la matematización vertical son:

***Nivel Referencial:*** En este nivel se usan las representaciones, modelos gráficos, materiales, notaciones, descripciones, uso de conceptos o procedimientos que permitan plantear un esquema en la situación problema.

***Nivel General:*** A partir de este nivel la exploración, reflexión y generalización empleada en el nivel referencial, permite plantear elementos de la matemática formal de acuerdo a las estrategias planteadas en el desarrollo de un problema. Que generalmente terminan siendo utilizables en otras situaciones problema, dando lugar a modelos para la resolución de los mismos.

***Nivel Formal:*** En este nivel ya se comprende e interactúa con los conceptos, procedimientos y notaciones propias de la rama de la matemática con la que se esté trabajando.

Con base en lo anterior, en el presente trabajo, el proceso de matematización emerge de la elaboración de tejidos como algo situacional, que después permitió dar paso a constituir aspectos generales, con el fin de evidenciar el uso de la matematización horizontal y matematización vertical respectivamente.

Sistematización: La sistematización de los conceptos, es una condición necesaria para realizar una aplicación a la solución de la pregunta planteada, donde se resaltan propiedades y características que son válidas para un concepto. Analizando diferentes casos del objeto matemático escogido, asociándolo siempre a alguna definición conceptual.

Por tanto, la sistematización de conceptos matemáticos destaca sus propiedades, sus diferencias y analogías con otros conceptos u objetos matemáticos. También se resalta el uso de diagramas, en los cuales se muestra la relación de diferentes conceptos. Para categorizar o clasificar elementos fundamentales que constituyen el concepto.

Otros términos y definiciones que se utilizaran en el desarrollo del trabajo son:

Sistematizar: En este trabajo se asume dicho término como el proceso para evidenciar de manera ordenada la matematización a elaborar, la cual está dada por relaciones, evidencias, paso a paso, categorías.

Descripción situacional: En este caso se asume como descripción situacional, al suceso o proceso de trenzado que hace parte de la elaboración de un tejido en el telar Kumihimo y su relación con la formalización y/o institucionalización dada.

El aspecto situacional en el desarrollo del trabajo, está dado por cada esquema construido por medio de la realización de trenzas en el telar Kumihimo. Para luego dotar de significado matemático lo elaborado y asociarlo a alguna definición matemática.

Sin embargo, para dar el paso a definir elementos conceptuales que hacen parte del proceso de matematización, es importante mencionar definiciones de elementos que se utilizan en dicho proceso, las cuales se presentan a continuación:

Simbolizar: asociar elementos de la matemática formal o procesos matemáticos que involucran secuencias y/o patrones.

Notación matemática: Creación de escritura de símbolos propios o formales de la matemática para dar explicación de un concepto a trabajar. Para así establecer una relación entre lo que se denomina lenguaje matemático con el lenguaje matemático formal.

Acciones que están involucradas con el álgebra: Dentro de las acciones, se encuentran elementos de la teoría con sus respectivas definiciones como lo es operación, estructura algebraica, grupo. Pero estas son ampliadas en el marco de referencia.

Representación de diseño: Esto involucra movimientos empleados en el telar Kumihimo y la notación asignada a dichos movimientos que generan un patrón. Entre los movimientos se tuvo en cuenta en algunos casos rotación del telar y número de los hilos que formaban el patrón.

De acuerdo a lo anterior se da paso presentar elementos teóricos que justifican el empleo de la matematización utilizada en el desarrollo del trabajo.

## Marco de referencia

El presente marco de referencia, articula elementos teóricos existentes ya definidos en las matemáticas, que permitieron relacionar y evidenciar aspectos conceptuales que se pueden encontrar en la elaboración de enredos y trenzas, presentados en los antecedentes y lo que se matematizó con el telar Kumihimo. Además también se presentan fuentes de información que sirvieron para referenciar la visualización de lo que se obtiene al trabajar con el telar escogido.

En seguida, se da paso a describir definiciones conceptuales de las matemáticas que son utilizadas en el proceso de matematización, también tratando de resolver una cuestión de ¿Qué hacer para manejar un lenguaje común y hacer de lo abstracto algo manipulativo y tangible? Es allí donde se plantea referenciar conceptos matemáticos, que permitieron posteriormente relacionar el trenzado y la visualización de los movimientos con una operación matemática y algunas propiedades de las operaciones como la propiedad asociativa y conmutativa, siendo dicha relación la justificación de las matemáticas escondidas detrás de la elaboración de trenzas y los tejidos del telar Kumihimo. En consecuencia, se presenta lo siguiente:

## Operación

Es una función de A en B.  Además es cerrada y clausurada.

$$f: A \to B$$

## Función

Es una relación, entre dos conjuntos. Dados dos conjuntos no vacíos $A$ y $B$, una función $f$ de $A$ en $B$:

$$f : A \to B$$

Un subconjunto de $A \times B$ o una relación de $A$ en $B$ cumple:

- Para todo elemento $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que la pareja $(a, b) \in f$ . Como es único el elemento $b$ relacionado con $a$, se escribe
$$f\ (a) = b$$

- Si
$$f : A \to B$$
Se llama el Dominio de $f$ .
- se llama el Condominio de $f$ $\{b \in B \mid existe\ a \in A\ tal\ que\ f\ (a) = b\}$

- Se llama el Rango de f o el Recorrido de f o la Imagen de $f$ .

## Operación binaria

Operación $A \neq \emptyset$

$(A,*)$ Siendo * una operación binaria de A

$$*: A\ x\ A \ \to A$$
$$a, b \in A \qquad * (a, b) \in A$$
$$a * b \in A$$

## Propiedades

La operación * es propiedad asociativa en el conjunto $A$

- Para todo $a, b, c \in A$

$$(a * b) * c = a * (b + c)$$

$Si\ (A,*) *$ es asociativa; $(A,*)$ se llama semigrupo

$*$ es conmutativa en $A$, Si para todo $a, b \in A$ se cumple

$$a * b \ = b * a$$

- $e \in A$, se llama elemento neutro o elemento identico o modulo de $*$ si para todo $a \in A$

$a * e = e * a = a$ neutro es el conjunto

Puede pasar que solo exista, elemento neutro a un lado.

$(A,*)$ $*$ es asociativo y existe elemento neutro y semigrupo con cantidad.

Por lo tanto un **semigrupo** solo debe ser asociativo .

## Inverso

- Si para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que

$$a * b = b * \quad a = e$$

$b$ se llama inverso, reciproco, opuesto de $a$ inverso del elemento.

## Grupo y tipos de grupos

Sea $G$ un conjunto no vacío y * una operación binaria definida en $G$. Se dice que $*$ da a $G$ una estructura de grupo, si $*$ cumple las siguientes propiedades:

- $*$ es asociativa.
- En $G$ existe un elemento identidad $e$ respecto de $*$.
- Cada elemento de $G$ es invertible

- $(A,*)$ conjunto con operación
- Grupo ($*$ es asociativo existe elemento neutro todos tienen inverso)
- Grupo que es conmutativo se llama **GRUPO ABELIANO.**

Todos son de composición interna

$(\mathbb{Z}, +)$ Grupo Abelino $\quad -a$ es opuesto de $a$ no es el negativo

Semigupo con identidad
$(\mathbb{N}, +)$ monoide conmutativo $\quad -$ de resta y $(-)$ de signo

$(\mathbb{N},\cdot)$ monoide conmutativo $\quad (\mathbb{Z} \ - \{\circ\},\cdot)$
Algebra $\rightarrow$ Estructura

$(\mathbb{Q}, +)$ inverso aditivo; abeliano

$(\mathbb{Q}^* , \ \cdot)$ neutro es 1

$\mathbb{Q} - \{\circ\} = \ \mathbb{Q}^*$

($\mathbb{R}, +$) Grupo Abeliano

($\mathbb{R}^*$, $\cdot$) Grupo Abeliano

## Permutación

Una permutación de un conjunto $X$ es una función biyectiva de dicho conjunto en sí mismo. Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez, por lo tanto cumple que:

- Una función $f$ es inyectiva o uno a uno si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el Codominio y no existen dos elementos en el dominio con una misma imagen. Es decir, para dos valores $x_1 \ y \ x_2$ se cumple que: $x1 \neq x2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Una función $f$ es sobreyectiva si el rango de la función es igual al Codominio, es decir, todo elemento del Codominio es imagen de algún elemento del dominio. $R_f = C_f$

- Por tanto $f: X \rightarrow X$

## Ciclos

Sea $f$ un elemento de $S_n$. Se dice que $f$ es un ciclo de longitud $m$, ($1 \leq m \leq n$), si existen:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ Elementos diferentes de $l_n$

Tales que:

- $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{m-1}) = a_m, f(a_m) = a_1$
- $f(x) = x \ para \ x \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$.
- $Se \ denota \ a \ f \ por$

$$f = (a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_2 a_3 \cdots a_m a_1) = (a_3 a_4 \cdots a_m a_1 a_2) = \cdots$$
$$= (a_m a_1 a_2 \cdots a_{m-1})$$

Las definiciones conceptuales descritas anteriormente son parte de un margen global que se reconoce en el mundo de las matemáticas. Una vez referenciados, se plantea entonces la necesidad de resignificar los simbolismos y/o definiciones que suelen ser de carácter abstracto, a través de la matematización obtenida del Kumihimo.

# Desarrollo del trabajo

A continuación se presentan formas de trenzado en lo plano, sin ningún telar, donde se elaboran esquemas de generalización y notación propia en relación de propiedades y otros conceptos formales de la matemática.

Luego se presentan formas de elaborar tejidos en el telar Kumihimo, en los cuales se realiza el paso de tejer en lo plano a lo redondo junto a la elaboración de esquemas de generalización y notación, que como producto permiten sistematizar la matematización vertical y horizontal de los tejidos resultantes del telar redondo Kumihimo.

## Trenzar en lo plano y sin telar.

Como se referenció en los antecedentes, la elaboración de trenzas y su respectiva notación se origina en una clase, donde se debe asignar una posición a cada hebra, el total de hebras se denota con la letra T, si son 2 hebras se llamará T2, si son 3 hebras se llamará T3, en este caso la notación está dada por T4 (4 Hebras) y en estas se establecen movimientos, teniendo en cuenta la posición que ocupa cada una. Los movimientos se realizan de izquierda a derecha; donde las letras mayúsculas significan cruzar una hebra por encima de otra hebra, las letras minúsculas significan cruzar una hebra por debajo de otra hebra.

A= 1 sobre 2

A= 1 bajo 2

b= 2 sobre 3

B= 2 bajo 3

c= 3 sobre 4

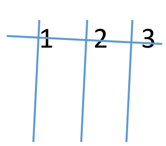
C= 3 bajo


*Ilustración 8 Esquema trenzas 1.2.Hacer matemáticas Fuente propia*

***Caracterización de tejer en lo plano antes de pasar a lo redondo***

**Trenzas y combinaciones**

Dado es siguiente gráfico:



Se decidió trabajar en T5, las indicaciones parten de que se debe tejer de izquierda a derecha y además se debe tener en cuenta las siguientes indicaciones, que representan movimientos en las trenzas:

$$
\begin{aligned}
a &= 1\, sobre\, 2 \\
A &= 1\, bajo\, 2 \\
b &= 2\, sobre\, 3 \\
B &= 2\, bajo\, 3 \\
c &= 3\, sobre\, 4 \\
C &= 3\, bajo\, 4 \\
d &= 4\, sobre\, 5 \\
D &= 4\, bajo\, 5
\end{aligned}
$$

Con base en estas indicaciones se realizaron los siguientes tejidos:

$$aB$$
$$a^2B$$

$$aBa$$
$$aba$$
$$abA$$
$$aBA$$
$$BabA$$
$$aBa\ diferente\ de\ aba$$
$$abA = aBA$$
$$aBcDa$$

La notación empleada determina formas, orden y un patrón que orienta la actividad manipulativa de las hebras para obtener una trenza. Posteriormente se da inicio a relacionar la actividad matemática inicial con conceptos definidos de manera teórica y formal en el área de las matemáticas, como se presenta a continuación.

Este tipo de combinaciones fueron asociadas a las permutaciones inicialmente, definidas como:

$$f: A \to A$$

La función biyectiva de A en A

$$(1\ 2\ 3\ 2\ 3\ \ 4\quad 4\ 5\ \ 5\ 1\ )\ aBcD$$

$$(aBcD)^2\text{=}(1\ 2\ 3\ 3\ 4\ \ 5\quad 4\ 1\ \ 5\ 2\ )$$

$$(aBcD)^3 = (45123)$$

$$(aBcD)^4 = (51234)$$

$$(aBcD)^5 = (12345)$$

Lo anterior fue realizado trabajando en T5, en el tejido realizado por medio de un dibujo se obtuvo:

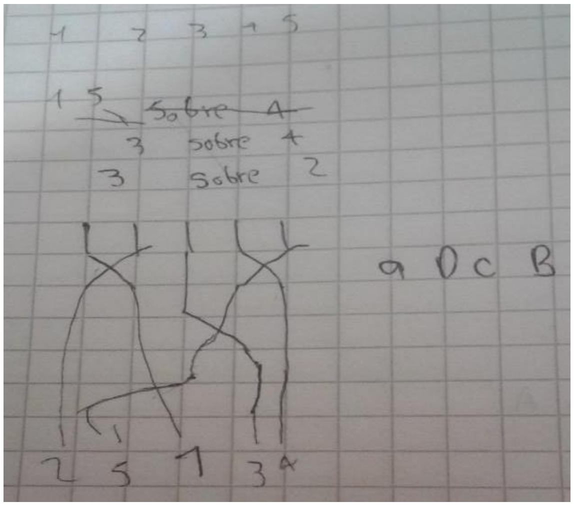



*Ilustración 9 Gráfico trenzas a lápiz. Fuente propia*

En la etapa de formalización se hacen explícitos los aspectos que estaban inmersos en ese proceso:

- Se definió la letra para trabajar T5
- Conjunto: se asume como conjunto de trenzas
- Operación: "cruzar", "combinar", "trenzar"

**Permutaciones**

- Una función $f$ es sobreyectiva si el rango de la función es igual al Codominio, es decir, todo elemento del Codominio es imagen de algún elemento del dominio. $R_f \; = \; C_f$

- Por tanto $f\colon X \rightarrow X$

$$a(bc) \rightarrow abc$$

Letras asociadas con las permutaciones:

$$abc \rightarrow (\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 4 \quad 4\ 1 \quad )$$

$$CBA \rightarrow (\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2 \quad 4\ 3 \quad )$$

$(\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3 \quad 4\ 4 \quad ) \rightarrow$ Si se diera esta combinación en un solo paso se podría decir que el ciclo corresponde al ciclo 1.

Teniendo en cuenta la forma como se expresaron las permutaciones, se planteó una generalidad, para empezar a hablar con más detalle acerca de los ciclos donde se repiten las combinaciones.

$$f = (\ 1\,2\,3\,2\,3\,4 \quad 4\,1 \quad) \rightarrow palabra\ asociada\ ABC - abc$$

$$g = (\ 1\,2\,3\,3\,4\,2 \quad 4\,1 \quad)$$

$$fg = (\ 1\,2\,3\,4\,2\,1 \quad 4\,3 \quad)$$

$$f^2 = (\ 1\,2\,3\,3\,4\,1 \quad 4\,2 \quad)$$

$$f^3 = (\ 1\,2\,3\,4\,1\,2 \quad 4\,3 \quad)$$

$$f^4 = (\ 1\,2\,3\,1\,2\,3 \quad 4\,4 \quad)$$

Dado que en esta instancia se repite la posición inicial, se puede decir cada cuanto se repite el procedimiento o ciclo y así saber cuántas combinaciones realizar.

Esta caracterización está constituida para formar palabras en T4 y T5 respectivamente.

Respecto a la relación con los demás aspectos formales, se caracteriza que T4 y T5 es un grupo finito, teniendo en cuenta las permutaciones y los ciclos en esta instancia no crean una extensión numérica aún.

Luego se dio paso a indagar acerca de qué estructura matemática tienen estas combinaciones, ($T_n$) donde n son las hebras, pero también se verifica si al trenzar se cumplen las propiedades:

-Asociativa a*(b*c)=(a*b)*c
-Elemento neutro.
-Todos tienen inverso.
-conmutativa.

**Caracterización de Inversos**

En la caracterización de los inversos, se quiso comprobar si éstos cumplían propiedades de un grupo algebraico, en este caso la conmutación. Pero que en lo manipulativo los inversos hacen referencia a destrenzar.

Se tiene que para cada letra existe un único inverso:

$$a^{-1} = A$$

$$b^{-1} = B$$

$$c^{-1} = C$$

$$A^{-1} = a$$

$$B^{-1} = b$$

$$C^{-1} = c$$

Por lo tanto el inverso de cualquier palabra será el inverso correspondiente a cada letra, pero escribiéndose de atrás hacia adelante dependiendo de la palabra.

Ejemplo:

| Palabra | Inverso |
|---|---|
| $aBCbbA$ | $aBBcbA$ |
| $abcbABC$ | $cbaBCBA$ |

A partir de lo anterior y de la manipulación de las trenzas se identifican algunas categorías y se pudo obtener:

- Cuando las trenzas únicamente la conforman las tres letras "abc"

| Palabra | Inverso | Inverso Conmutado | |
|---|---|---|---|
| Abc | cBa | Bca | caB |
| aBC | cbA | bcA | cAb |
| Abc | CBa | BCa | CaB |
| abc | CBA | BCA | CAB |
| caB | bAC | AbC | bCA |
| CaB | bAc | Abc | bcA |
| cbA | aBC | BaC | aCB |
| CbA | aBc | Bac | acB |
| ACB | Bca | cBa | Bac |
| aCB | bcA | cbA | bAc |
| Acb | BCa | CBa | BaC |
| acb | BCA | CBA | BAC |
| ABC | Cba | bca | Cab |
| BAC | Cab | acb | Cba |
| Bac | CAb | ACb | CbA |
| BAc | Cab | aCb | Cba |

| | | | |
|---|---|---|---|
| BaC | cAb | Acb | cbA |
| bCA | Acb | cab | abc |
| bca | ACB | CAB | ABC |
| bCa | AcB | cAB | ABc |
| bcA | aCB | CaB | aBC |

Las celdas de color amarillo indican que el inverso conmuta con la palabra de dicha celda. Las celdas que no tienen color indican que dichas palabras no conmutan con el inverso.

De esta manera observamos que las palabras que conmutan con el inverso, son aquellas que intercambian únicamente sus letras a y c, en mayúscula o minúscula. Cuando la palabra tiene en sus extremos las letras a y c, ésta no conmutará con ninguna palabra debido a que estas letras no podrán cambiar entre sí su posición. Por lo tanto, este inverso que tiene a y c consecutivos será conmutativos con él y tendrá un único inverso conmutable. Entonces decimos que, cuando una palabra está conformada por las tres letras "abc", tendrá dos inversos si éste tiene a y c consecutivos.

- Cuando las trenzas la conforman cuatro letras, es decir, cuando se repite una letra. Por ejemplo: "ABcB"

| Palabra | Inverso | Inverso Conmutado | | |
|---|---|---|---|---|
| abca | ACBA | CABA | ABCA | ACAB |
| abcA | aCBA | CaBA | aBCA | aCAB |
| AbCa | AcBa | cABa | ABca | AcaB |
| ACba | ABca | BAca | AcBa | ABac |
| ACbA | aBca | Baca | acBa | aBac |
| aCBA | abcA | bacA | acbA | abAc |
| CBaB | bAbc | Abbc | bbAc | bAcb |
| cbAb | BaBC | aBBC | BBaC | BaCB |
| cbAB | baBC | abBC | bBaC | baCB |
| CbAb | BaBc | aBBc | BBac | BacB |
| BCAC | cacb | accb | Ccab | Cabc |
| bCAc | CacB | aCcB | CcaB | CaBc |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| bCAb | BacB | aBcB | BcaB | BaBc |
| bcaB | bACB | AbCB | bCAB | bABC |
| BCaB | bAcb | Abcb | bcAb | bAbc |
| BcAb | BaCb | aBCb | BCab | BabC |
| bacB | bCAB | CbAB | bCAB | bCBA |
| bACb | BcaB | cBaB | BacB | BcBa |
| BaCB | bcAb | cbAb | cAbb | cbbA |

Para esta categoría se sigue cumpliendo que las palabras que conmutan con el inverso, son aquellas que intercambian únicamente sus letras a y c, en mayúscula o minúscula. Y cuando el inverso no tiene las letras a y c consecutivas, éste no será conmutativo. Pero en este caso, nos damos cuenta que algunos inversos pueden conmutar con dos palabras. Esto es cuando se repiten únicamente las letras a y c, y éstas también son consecutivas, conmutaran con dos palabras.

Entonces decimos que, cuando una palabra está conformada por cuatro letras es decir, cuando se repite una letra, por ejemplo: “AcBc” tendrá dos inversos si éste tiene a y c consecutivos, o tendrá tres inversos si las letras que se repiten son a o c y están consecutivas las tres.

- Cuando la trenza la conforman 5, 6 o 7 letras, es decir, cuando se repiten más de dos veces una letra o se repiten todas las letras.

| **Palara** | **Inverso** | **Inverso Conmutado** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| AcAbb | BBaCa | BaBCa | BBCaa | BBaaC | |
| cbAAB | baaBC | abaBC | baBaC | baaCB | |
| bbaCCA | accABB | cacABB | acAcBB | accBAB | |
| CbcbAA | aaBCBc | aBaCBc | aaCBBc | aaBBCc | aaBCcB |
| AAAbbCC | ccBBaaa | cBcBaaa | ccBaBaa | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| ACCAbba | ABBacca | BABacca | ABaBcca | ABBcaca | ABBacac |

Comprobamos que se cumple la conmutación de inversos únicamente cuando intercambian de posición las letras a y c, (deben ser consecutivas) y dependiendo del número y repeticiones de las letras en las palabras se determina también el número de inversos que pueda tener una palabra. Comprobamos cuando la trenza tiene tres letras “abc”, cuando tiene cuatro letras “ABcB”, cuando tiene cinco, seis y letras.

**Ciclos**

Sea $f$ un elemento de $S_n$. Se dice que $f$ es un ciclo de longitud $m$, $(1 \leq m \leq n)$, si existen:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ Elementos diferentes de $l_n$

Con esta definición se da paso a determinar los ciclos, se realizó con varias trenzas realizadas con las lanas y con números respectivamente:

Distintos cruces y mismas posiciones.

123456 123456
123456 123456

Ciclos a partir de a,b,c

abc abc abc abc abc abc
acb bac cba acb cab abc ciclos en parejas de 3 letras.

Igualaciones:

bab=aba
cdc=dcd

ac=ca
bd=db

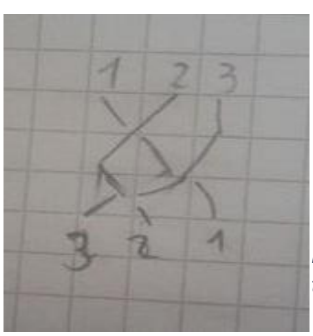


*Ilustración 10 Dibujo, ciclo de trenzas a lápiz. Fuente propia*

Ciclos y permutaciones para trenzas:

A,a,b,C,c,D,d

T4

bab=aba
cdc=dcd

ac=ca
bd=db

Si se asignan valores:

| a | A | b | B |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |

La permutación que se obtiene equivale a la siguiente operación 4x3x2x1=24, por lo tanto el ciclo será 24.

**Ciclos segundo abordaje**

| **Cuando se repite una letra 2 veces.** | | | |
|---|---|---|---|
| **Palabra** | **Ciclo** | **Palabra** | **Ciclo** |
| aab | 2 | abca | 3 |
| abb | 2 | abcb | 3 |
| aAB | 2 | abcc | 3 |
| aBB | 2 | aBcB | 3 |
| Bab | 2 | BcAA | 3 |
| aba | 2 | CaCb | 3 |
| bab | 2 | bcba | 3 |

| Cuando se repite una letra 3 veces. | |
|---|---|
| **Palabra** | **Ciclo** |
| abcaa | 4 |
| abcbb | 4 |
| abccc | 4 |
| abcAA | 4 |
| abcBB | 4 |
| BacBB | 4 |
| CbaCC | 4 |

| Cuando se repite una letra 4 veces. | |
|---|---|
| **Palabra** | **Ciclo** |
| abcaaa | 3 |
| abcbbb | 3 |
| abcccc | 3 |
| cabaaa | 3 |
| BACBBB | 3 |
| BacBBB | 3 |
| CbaCCC | 3 |

| Cuando se repite una letra 5 veces. | |
|---|---|
| **Palabra** | **Ciclo** |
| abcaaaa | 4 |
| abcbbbb | 4 |
| abccccc | 4 |
| cabaaaa | 4 |
| BACBBBB | 4 |

| | |
|---|---|
| BacBBBB | 4 |
| bCaCCCC | 4 |

Con lo anterior se establece lo siguiente

- Cuando se repita 2 veces una letra- Palabra de orden cuatro

Ciclo 3

- Cuando se repita 3 veces una letra- Palabra de orden cinco

Ciclo 4

- Cuando se repita 4 veces una letra- Palabra de orden seis

Ciclo 3

- Cuando se repita 5 veces una letra- Palabra de orden siete

Ciclo 4

Sin embargo, hay ciertas palabras que no cumplen estos criterios, esto se da ya que depende de la posición de la letra repetida dentro de la palabra.

- Cuando la letra repetida es B o b y está en las posiciones 1 y 4 en palabras de orden 4.

| Palabra | Ciclo |
|---|---|
| bcab | 2 |
| BacB | 2 |
| bacb | 2 |
| BcaB | 2 |

- Cuando la letra repetida es C o c y está en las posiciones 1 y 5 en palabras de orden 5

| Palabra | Ciclo |
|---|---|
| cabccc | 3 |
| CabCCC | 3 |
| cbaccc | 3 |

| | |
|---|---|
| CbaCCC | 3 |

Con respecto a los ciclos se hizo un análisis del comportamiento de las permutaciones en palabras de orden 4, teniendo en cuenta las posiciones de la letra repetida. Es importante aclarar que las posiciones se mantienen alternas, es decir que se manejan los lugares 1 y 3, 2 y 4.

**Formas de deshacer las trenzas**

Una forma de deshacer las trenzas es con algunas conmutaciones o aplicar el movimiento inverso las trenzas.

Una vez recopilado lo anterior, se dio paso a estudiar cruces específicos de las trenzas (formas de combinarlas), ya que en cada cruce se asociaba una palabra y una permutación dada con números como se mostró anteriormente, estos movimientos permitieron deducir y encontrar nuevas conjeturas, llegando hasta los Movimientos de **Reidemeister** de manera natural, como se muestra a continuación:

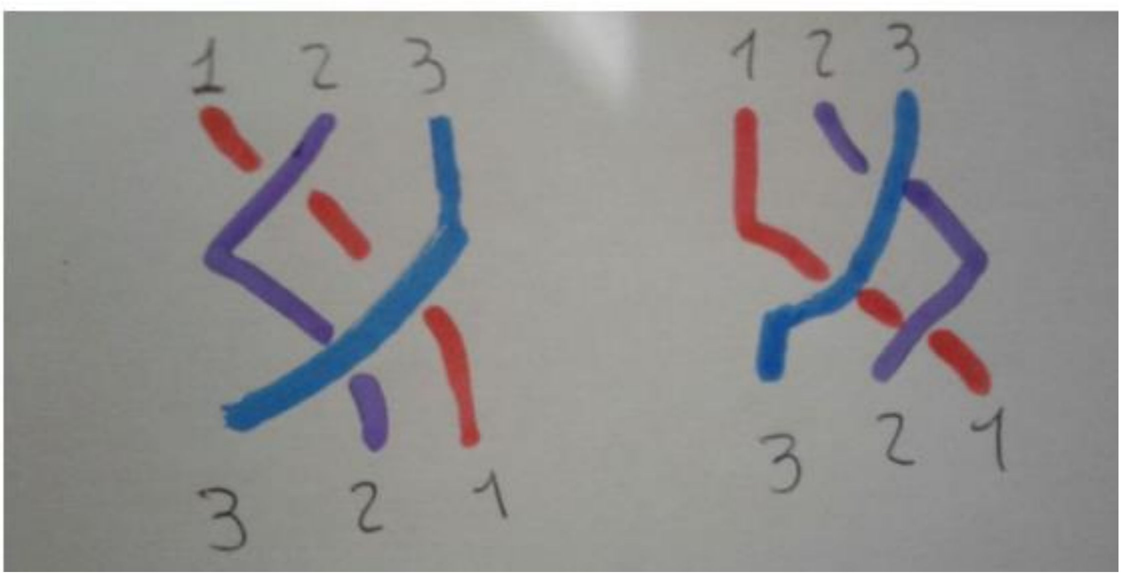



*Ilustración 11Dibujo trenzas Reidemeister. Fuente propia*

Los movimientos **Reidemeister** son aquellos en los que se generan diferentes movimientos para realizar formas de trenzado que al final dejan la misma forma de una trenza o en ocasiones la deshace.

Esta fue la forma como se empezaron a ver los cortes en cada trenza para ver los cambios de posición de cada una:

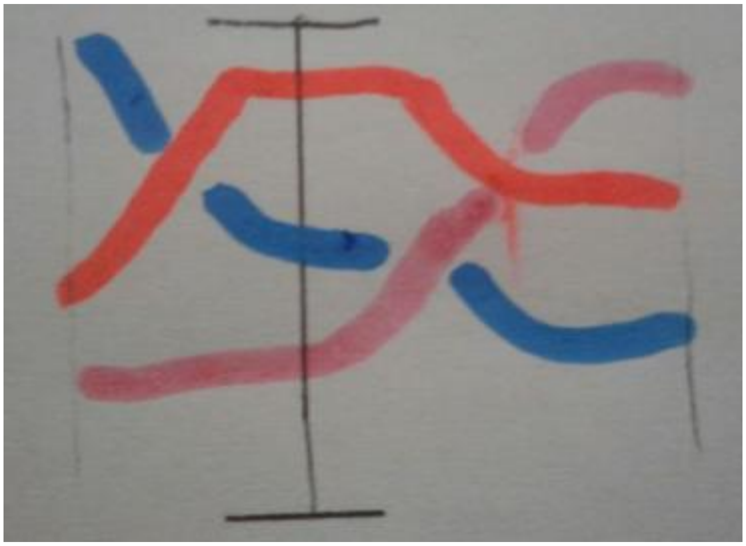


*Ilustración 12 Dibujo de trenza, Cambio de posición. Fuente propia.*

De manera similar se combinó con 5 trenzas para mirar los cambios en los movimientos y lo que se obtenía al final:

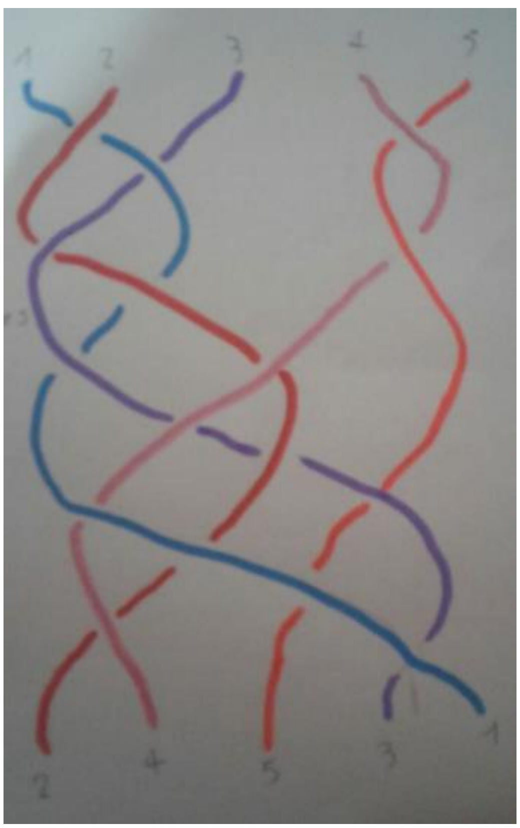



*Ilustración 13 Enredos y Reidemeister 1.0 con marcador. Fuente propia*

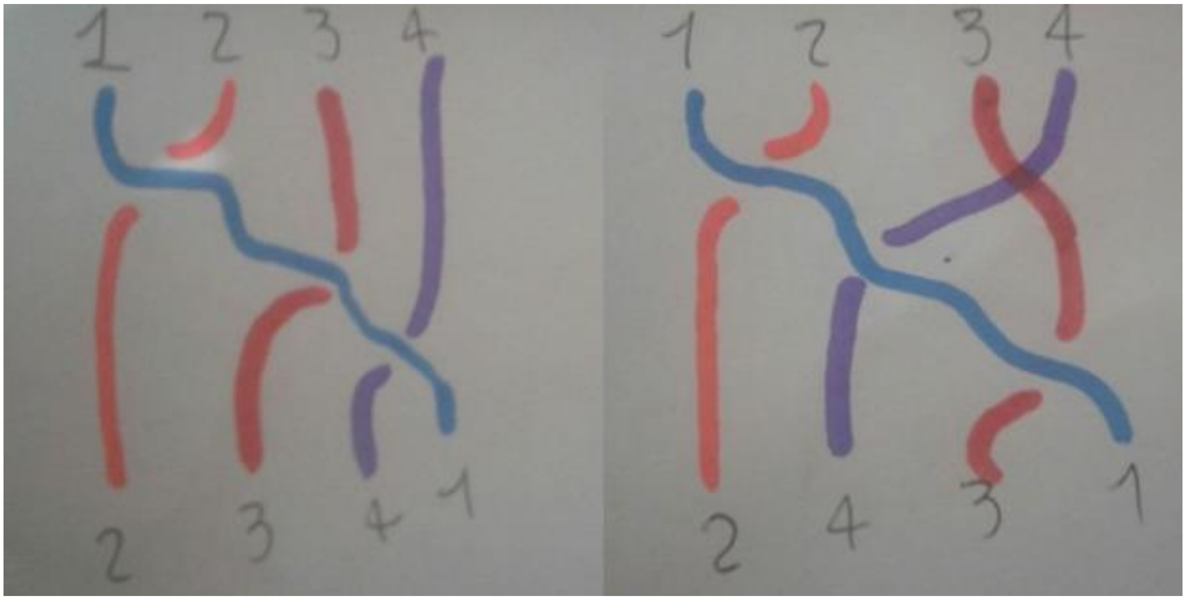


*Ilustración 14Enredos y Reidemeister 1.1 con marcador. Fuente propia*

Se realizaron las trenzas como se muestra en la imagen, de las cuales se infiere que con distintos movimientos se puede llegar a obtener la misma posición final de cada una de estas a partir de diferentes movimientos.

Finalmente para llegar a la forma de **Reidemeister** hubo un caso particular el cual permitió visualizar que en el cambio de movimiento de las trenzas quedaban únicamente grupos de dos combinaciones:

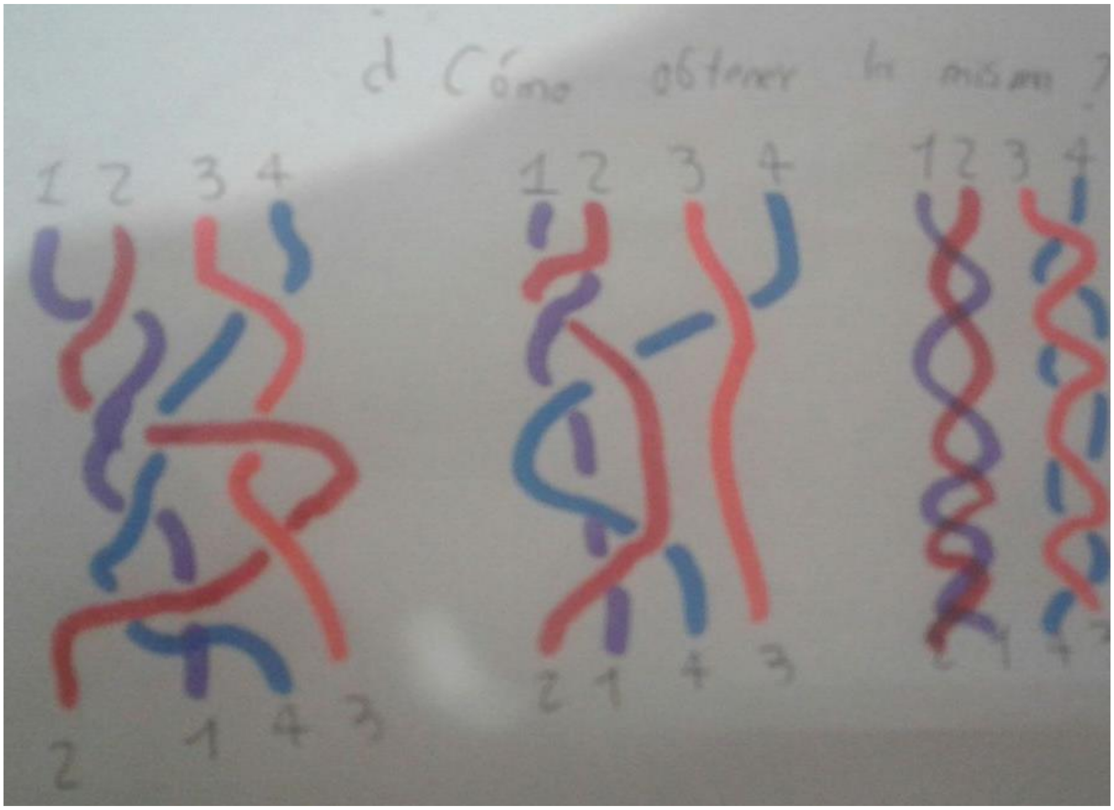


*Ilustración 15 Misma forma,  diferente trenzado. Fuente propia*

Lo cual nos llevó a pensar que si en cada corte que realizábamos las nuevas combinaciones de trenzas permitían expresarlo como una suma de trenzas y que en estas el orden de los factores no alteraba el producto.

La suma seria la unión de diferentes combinaciones de una misma cantidad de hilos que como producto final arroja una trenza y gráficamente lo representamos así:


*Ilustración 16 Combinación de Trenzas elaboradas a lapiz.*

En el caso de las combinaciones que quedan cuatros hilos en dos grupos se hace referencia a sumar 0.

También se pensó en generalizar este procedimiento y hasta pensar en la hipótesis grafica de una multiplicación:

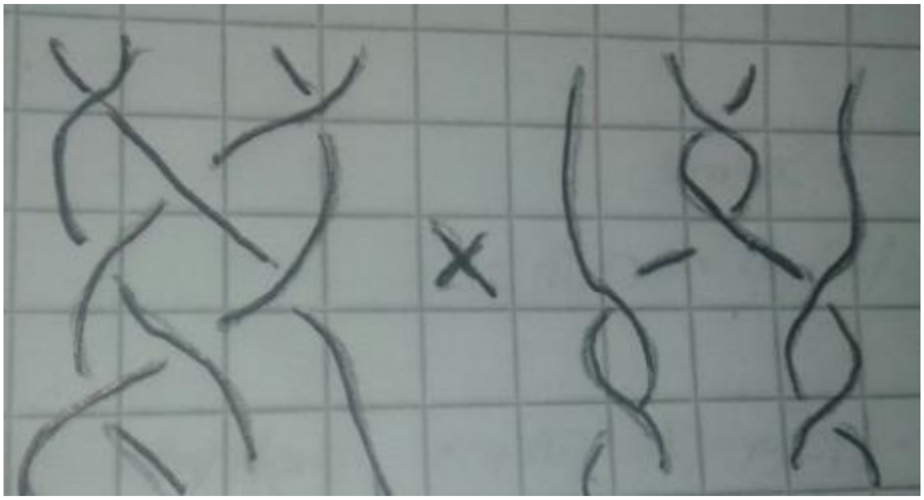



*Ilustración 17 Multiplicación de Trenzas. Fuente Propia.*

Sin embargo nos detuvimos a pensar en los comportamientos y permutaciones, para poder hablar de igualdad.

Luego se caracterizaron distintas combinaciones con las indicaciones de las letras A,a, b, B, C, c , D,d con el fin de obtener igualdades a partir de T3 y T4 respectivamente.

$$bab = aba$$
$$cdc = dcd$$

$$ac = ca$$
$$bd = db$$

Al combinar las letras a,A,b,B se comprobaba una vez más el planteamiento inicial acerca de la permutación 4x3x2x1=24

| a | A | b | B |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |

Otros procedimientos utilizados fueron:

Combinar todas las letras A,a, b, B, C, c , D,d donde cada una representaba un hilo diferente y la combinación de esos seis hilos equivalía a las siguientes combinaciones:

8x7x6x5x4x3x2x1= 40320

Y cuando se tomaba con seis letras equivalía a 6x5x4x3x2x1=720

Sin embargo para que el ejercicio fuera más enriquecedor se debía analizar qué pasaba si se agregaba o quitaba una letra y así poder encontrar igualdad entre las trenzas, entonces para evitar sumar 0 o realizar pasos innecesarios y concluir la relación de igualdad y de poder deshacer las trenzas se llegó al siguiente planteamiento:

1. Para hablar de las igualdades y los desenredos de las trenzas, se parte de la hipótesis "repetir pasos enreda"

En la siguiente notación se aclara que los colores de las letras representan la igualdad.

Lo cual equivale a decir que:

C

CBA

CABAb

caBAB

2. El orden importa:

**A**

**AC=BAb**

-ABC*bAcb

ABC*bcAb

**Por lo tanto** ABCABabcb

Equivale a cancelar A~~BCABcab~~c obteniendo asi **AC** y para soltarlo se utilizara **BAb**

Para soltar **ABCAcb** equivaldría a soltar **ABA** de distintas maneras:

ABA -----> abcBA

ABA -----> acbac

ABA -----> cBabc

ABA -----> CabcA

Sin embargo donde se encuentra **ac** se evitara realizar pasos incensarios:

Para finalizar se concluyó con las propiedades de Igualación y de cancelación:

| Propiedad de Igualdad | Propiedad de cancelación |
|---|---|
| ac=ca<br>AC=CA<br>Ac=cA | B~~aC~~*Acb --> ~~Bb~~<br>- ~~aCA~~<br>- acA<br>- Aca<br>ACa |

De esta manera se obtienen trenzas de en un contexto plano, presentando esquemas de generalización y el uso de conceptos matemáticos formales, como: operación, el uso la propiedad asociativa, conmutativa, los ciclos y permutaciones que están presentes en la elaboración de las trenzas, evidenciadas en imágenes, tablas y esquemas. Por otro lado, el paso a generar tejidos de forma redonda, se obtienen por medio del telar Kumihimo. Donde se caracterizan formas y figuras que se obtienen de la elaboración de tejidos. Y además se implementa el proceso de sistematización de la matematización evidenciado en sus diferentes niveles.

## Formas redondas, matematización Esquemas Kumihimo.

En el uso realizado con el telar redondo Kumihimo, se tiene en cuenta que a cada hebra, se le asigna una posición. Ya que dicho telar está enumerado desde el número 1 al número 32 respectivamente. Entonces en el telar se procede a escoger la forma que se quiere obtener, elegir número de hebras, fijar posición inicial para aplicar un patrón de movimientos que permite crear una forma o figura específica del tejido. Posteriormente se procede a caracterizar y formalizar la sistematización de la matematización inmersa en el tejido elaborado con el Kumihimo.

El siguiente esquema será el que direccione la sistematización de los niveles de matematización elaborados en el uso del telar redondo Kumihimo.

| **Niveles de matematización** | **Acciones que describen lo realizado.** |
|---|---|
| Nivel situacional | • Identificar los elementos matemáticos pertinentes que puedan estar inmersos en el telar.<br>• Realizar esquemas, expresar y visualizar técnicas de trenzado de diferentes maneras en ese único telar.<br>• Constituir un tejido de acuerdo con conceptos matemáticos y plantear supuestos.<br>• Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje a la hora de tejer y el lenguaje formal (notación propia) y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos, en la elaboración de cada tejido.<br>• Evidenciar regularidades y patrones en cada figura que se elabore en el Kumihimo.<br>• Reconocer los aspectos similares respecto de otros problemas conocidos, en este caso la elaboración de trenzas en lo plano. |
| Nivel referencial | • Utilizar diferentes tipos de representación gráfica, visual de la elaboración de tejidos artesanales en el Kumihimo.<br>• Representar una relación mediante una fórmula matemática bien sea desde la notación empleada para realizar movimientos en el telar o desde algún concepto matemático en específico.<br>• Utilizar operaciones, un lenguaje simbólico y/o formal asociado al telar con el que se está trabajando. |
| Nivel general | • Generalizar los aspectos mencionados del nivel referencial, además de validar, explicar y justificación de los resultados obtenidos. Siempre en relación de lo que se haga con el Kumihimo. |

| | |
|---|---|
| Nivel formal | • Hacer uso de procedimientos convencionales con notación propia de la rama de la matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente. |

De cada caso de la elaboración de tejido, se resaltarán características de los niveles de matematización horizontal y vertical a la hora de trabajar desde el telar. Porque la elaboración de tejidos en este telar, permite dotar de intuiciones y un sentido común el mundo de las matemáticas, donde se busca deducir de una situación real (tejer en el Kumihimo) elementos matemáticos, donde se logren establecer estrategias de reflexión, generalización, simbolización y construcción de esquemas que den paso a realizar formalización matemática. Así, la situación real, busca que la elaboración de diferentes casos de tejido transiten por los cuatro niveles de matematización (situacional, referencial, general y formal).

Finalmente de acuerdo a las características que más sobresalgan de la sistematización de la matematización, se le asigna a cada caso, un nivel de matematización en el que se encuentra la actividad realizada.

**Caso de tejer con 2 Hebras**: En este caso, la notación en principio va estar denotada por números, debido a las características específicas del telar, pero al final se crea un esquema general que permite elaborar cualquier forma o figura con su respectiva operación.

***Elaboración de tejido***

Se inicia en la construcción de casos específicos, para posteriormente plantear una generalización de diversas formas que se obtienen en este telar.

***Caso dos hebras:*** se eligen dos hebras únicamente, se indican las posiciones de desplazamiento de cada uno.

Por ejemplo: Se elige una hebra de color negro, se asigna una posición inicial correspondiente al número 1, la otra hebra escogida es de color rojo, se fija en la posición 8.

**Esquema de movimientos**

Se inicia una caracterización un esquema general de cómo se realizan los movimientos con las hebras escogidas en el telar Kumihimo.


*Ilustración 18 Disco redondo Kumihimo. Fuente propia*

Para el siguiente esquema, el color rojo representa los números de las posiciones en las que se desplaza la hebra de color rojo.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Movimientos hebra color negro:* | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16... |
| *Movimientos hebra color rojo:* | 8 | 24 | 8 | 24 | 8 | 24... |

Elaborando los movimientos descritos se genera la secuencia general $1 \longrightarrow 16, 8 \longrightarrow 24, 16 \longrightarrow 1, 24 \longrightarrow 8, 1 \longrightarrow 16, 8 \longrightarrow 24$ ...; hasta que se decida terminar la respectiva manilla generada.

Una observación que se resalta en esta elaboración es que en este caso en el telar redondo, no se realizan rotaciones.

*Ilustración 19Imagen tejer con Hebra de color rojo y negro en Kumihimo. Fuente propia*

**Tipo de movimientos:** Los movimientos que se aplican en este caso son los siguientes: la hebra de color negro fijada en la posición 1 se desplaza hasta la posición 16. Una vez realizado este movimiento la hebra de color rojo fijada en la posición 8 se desplaza a la posición 24.

Posteriormente se van a replicar los movimientos de forma intercalada entre cada hebra. Es decir:

- La hebra de color negro que está en la posición 16 vuelve a pasar a la posición 1.
- Mientras que la hebra de color rojo que está en la posición 24 pasa de nuevo a la posición 8, una vez se ha movido la hebra de color negro.

**Notación para aplicar posteriormente una operación:** La notación escogida para este caso va a ser $T_2$ teniendo en cuenta que el número que acompaña a T va a ser referencia al número de hebras que se utilizan. En este caso las letras que representan las hebras para una operación serán **a** representará hebra color negro, **b** representará hebra color rojo.

**Matematización y fo*rmalización matemática.***

En el tejido a dos hebras de distinto color, se identifica una noción de horizontalidad, ya que en el telar únicamente se teje en dos direcciones que podrían enunciarse e interpretarse como: tejer hacia arriba cuando se realiza el movimiento de la posición 16 a la posición 1 o tejer de arriba hacia abajo, cuando el desplazamiento de la hebra roja es desde la posición 1 hasta la posición 16. Para el caso de la hebra de color rojo, la secuencia es derecha e izquierda, en la posición de desplazamiento desde el numero 8 hasta la posición del número 24 y viceversa. Solo que la elaboración correcta, debe ser intercalada.

**Operación:** Si se origina una notación para traducir al lenguaje matemático formal, este se constituye de la siguiente manera:

a= representa los movimientos de la hebra de color negro

b= representa los movimientos de la hebra de color rojo

Entonces para elaborarla operación inmersa en este caso, estaría dada de la siguiente manera:

$$a * b = b * a$$

Donde * significa que existe una operación, lo cual se lee como $a$ operado $b$. Pero es lo mismo operar $b$ por $a$, según esa notación. ¿Cómo se visualiza eso? Es allí donde se retoma el instrumento manipulativo, donde a través de una observación visual bien detallada, se puede manifestar que no importa si se inicia con el hilo rojo o negro, siempre y cuando se respete el patrón de tejer de manera intercalada cada color de hebra. Cabe resaltar que la operación que se utiliza en este caso permite trabajar sobre la propiedad conmutativa.

En este caso se utilizan dos hebras de diferente color, negro y rojo.

**Inversos:** Dadas dos hebras de distinto color, para deshacer lo que se obtiene, se opta por utilizar notación de letras mayúsculas A, B las cuales indican que se debe aplicar el movimiento contrario a los que se generan aplicando la letra minúscula, es decir:

**a:** genera movimiento de pasar la hebra de color negro de la posición 1 a la posición 16 entonces **A:** significa que si la hebra de color negro, está en la posición 16 debe pasar a la posición 1.

Para el caso de la letra b y B

**b:** genera movimiento de pasar la hebra de color rojo de la posición 8 a la posición 24 entonces **B:** significa que si la hebra de color rojo, está en la posición 24 debe pasar a la posición 8.

**Ciclo asociado a este caso:** El ciclo asociado es 2 ya que solo se utilizan dos hebras y cada dos movimientos las hebras regresan a su posición inicial.

**Esquema general formas de tejer dos hebras.**

Si se aplica vueltas al telar redondo en contra de las manecillas del reloj, cada 90 grados, no trenzaría nada.

| Número de hilos | vuelta en grados | Posiciones | operación asociada | equivale a trenzar |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 180 | 1 | a | 0 |
| 2 | 180 | 1;8 | ab | 0 |
| 2 | 90 | 16;24 | ab | 0 |
| 1 | 300 | 1;8 | ab | 0 |
| 4 | 180 | 16;24 | ab | 0 |

| Número de hilos | vuelta en grados | Posiciones | operación asociada | equivale a trenzar |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1;8 | a*b | Hebra de un color sobre una hebra de color diferente. |
| 2 | 0 | 16;8 | a*b | primer cruce a, b. |
| 2 | 0 | 16;24 | a*b | segundo cruce a, b. |
| 2 | 0 | 1;24 | a*b | Hebras vuelven a su posición inicial. Se ejecuta el movimiento inicial. |
| 2 | 0 | 1;8 | a*b | Replica de movimientos anteriores… |

De esta manera se finaliza el esquema del caso específico con dos hebras, donde no se realizan movimientos del telar Kumihimo en contra de las manecillas del reloj, pero aun asi se plantea un esquema asociado con una operación correspondiente, donde se comprueba el uso de la propiedad conmutativa.

| Matematización caso de tejer con dos hebras. | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipo de matematización** | **Nivel** | **Acciones que describen lo realizado.** | **¿Cómo se trabaja desde el telar?** |
| Horizontal | Situacional | • Identificar los elementos matemáticos pertinentes que puedan estar inmersos en el telar. | Recién se empieza a tejer lo notable en este nivel son las instrucciones de arriba o abajo, que se relacionan con las nociones de horizontalidad y verticalidad. Por tanto existe una noción del objeto mental a desarrollar. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | • Realizar esquemas, expresar y visualizar técnicas de trenzado de diferentes maneras en ese único telar. | La realización de esquemas, se realiza con imagen del disco redondo de Kumihimo. La técnica de trenzado se expresa de manera escrita con la descripción de la ubicación, de cada hebra y las especificaciones de instrucción documentadas del desplazamiento de cada hebra. |
| | | • Constituir un tejido de acuerdo con conceptos matemáticos y plantear supuestos. | Se construye el tejido que se expresa en la ilustración 16, los supuestos que se plantean inicialmente es que la caracterización de movimientos posiblemente permita deducir la existencia de alguna operación. |
| | | • Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje a la hora de tejer y el lenguaje formal (notación propia) y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos, en la elaboración de cada tejido. | Respecto al lenguaje utilizado, se trata de diferenciar todo el tiempo el significado de cada expresión, letra o palabra expuesta en las descripciones de tejer con dos hebras. Ya que en ocasiones se emplea lenguaje para denotar movimientos, posiciones, operaciones o definiciones resultantes de la elaboración del tejido de dos Hebras. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | • Evidenciar regularidades y patrones en cada figura que se elabore en el Kumihimo.<br>• Reconocer los aspectos similares respecto de otros problemas conocidos, en este caso la elaboración de trenzas en lo plano. | La regularidad se evidencia acudiendo a la repetición de movimientos que se genera al mover cada hebra de manera intercalada e incluso se denota con colores distintos la visualización del patrón generado.<br>En cuanto a reconocer similitud con otros problemas conocidos, lo único que se aborda es la operación que cumpla la propiedad asociativa, pues no se resalta aun la forma de tejer ab en lo plano con tejer ab en lo redondo. |
| Vertical | Nivel referencial | • Utilizar diferentes tipos de representación gráfica, visual de la elaboración de tejidos artesanales en el Kumihimo.<br>• Representar una relación mediante una fórmula matemática bien sea desde la notación empleada para realizar movimientos en el telar o desde algún concepto matemático en específico.<br>• Utilizar operaciones, un lenguaje simbólico y/o formal asociado al telar con el que se está trabajando. | Se emplea una imagen del tejido que se obtiene en la ilustración 16.<br>La relación que se establece con las fórmulas matemáticas, es a través de la notación empleada para verificar la propiedad conmutativa.<br>Se evidencia uso de tablas de datos para especificar las hebras que se utilizan, sus desplazamientos. |
| | Nivel general | • Generalizar los aspectos mencionados del nivel referencial, además de validar, explicar y justificación de los resultados obtenidos. Siempre en relación de lo que se haga con el Kumihimo. | La generalidad que se resalta en este tejido es la del uso de la operación conmutativa.<br>La generalidad que dadas dos hebras el disco no se debe girar ni a favor, ni en contra de las manecillas del reloj. |
| | Nivel formal | • Hacer uso de procedimientos convencionales con notación propia de la rama de la | Este nivel solo llega a la utilización formal de la propiedad conmutativa. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente. | |

**Caso de tejer tres colores y ocho Hebras.**

| Colores | Cantidad de hebras | Posiciones iniciales. |
|---|---|---|
| **Blanco** | 2 | **15,23** |
| **Morado** | 3 | **31,32,8** |
| **Negro** | 3 | **7,16,24** |

Como se observa en el esquema anterior, el número de hebras a utilizar en este caso es de ocho, también se especifica los colores y la posición que ocupa cada color. También se referencia una imagen de la forma que se obtiene en la elaboración de movimientos del disco redondo.

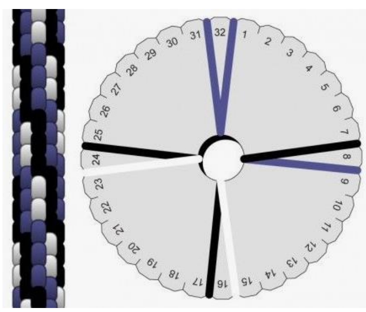


*Ilustración 20 Coca, E. (2017).Tablero.[Figura]recuperado de https://co.pinterest.com/pin/536772849322692006/*

**Tipo de movimientos**

- Para el tipo de movimientos, es necesario especificar que en el proceso de matematización que se desarrolla en este caso, se toman cuatro ejes de referencia, de la siguiente manera:


*Ilustración 21 Ejes Kumihimo. Fuente propia*

De allí se plantean deducciones como:

- Se va a denominar ejes de referencia, los puntos 32, 8, 16, 24 marcados en el telar redondo Kumihimo, también se aclara que con los cuatro ejes, se establece lo siguiente:

| Eje 1 | Eje 2 | Eje 3 | Eje 4 |
|---|---|---|---|
| Posiciones que integran el eje son: 32,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. | Posiciones que integran el eje son: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. | Posiciones que integran el eje son: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23. | Posiciones que integran el eje son: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. |

Esto es con el fin de generalizar la secuencia que resulta de la elaboración de la forma, que se quiere obtener. Por tanto, cada eje tiene dos hebras en posiciones diferentes, siendo estas, las que determinan la forma de la figura. Pero la forma no la determina solo la posición inicial, sino que la secuencia que se realice con los movimientos que genera el telar, utilizando giros en contra de las manecillas del reloj, garantizan que se forme, la figura.

Posición 32 se desplaza a posición 14.
Posición **16** se desplaza a posición a 30.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 8 se desplaza a posición 22.
Posición **24** se desplaza a posición a 6.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **16** se desplaza a posición 30.
Posición **32** se desplaza a posición a 14.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **23** se desplaza a posición 5.
Posición **7** se desplaza a posición a 21.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **30** se desplaza a posición 13.
Posición **15** se desplaza a posición a 28.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

**Matematización y formalización matemática**

Generalidades

- Se aplica giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj cada dos movimientos.
- El ciclo de este tejido es de 8, para 8 hebras, en este caso depende los colores empleados, no del número de Hebras.
- La secuencia de movimiento empleada es la siguiente:

Los primeros pares de hebra que se ubica en el eje 1, pasan de manera intercalada al eje 2. Es decir por cada hebra del eje 1 que pase al eje 2, una hebra del eje 2 pasa al eje 1. Y este proceso se repite, para cada movimiento empleado.
El segundo par de hilos pasan al eje 3. El tercer par de hilos pasan al eje 4. Cumpliendo lo que se describió anteriormente.

- En cada eje el número de hebras que debe existir debe ser en 2, antes de emplear un giro.

**Notación y operación.**

La notación para este caso se modifica, pues si se sigue trabajando como lo plano, donde T determinaba el número de hebras para construir una operación, en este caso al existir diferentes hebras del mismo color, podría haber redundancia o fallos en la operación si se sigue manejando de esa manera. Para las operaciones si se observa la secuencia de movimientos. Se evidencia que el conjunto de T hebras, no cumple con la propiedad conmutativa, pues los giros afectan que se teja de una manera distinta que garantice. En el caso de la propiedad asociativa se puede probar, pero no a partir del número de hebras, si no de los colores y las posiciones, que van ocupando.

Para abordar la operación propuesta se prueba entonces de acuerdo a los movimientos pero la notación de los términos estará dada como:

$$a = color\ morado$$

$$b = color\ negro$$

$$c = color\ blanco$$

$$(a * \boldsymbol{b}) * c = a * (\boldsymbol{b} * c)$$

Se opera a izquierda inicialmente

$$(a * \boldsymbol{b}) * c$$

$$\boldsymbol{b} * a * c$$

$$c * \boldsymbol{b} \ * a$$

$$\boldsymbol{b} * c * a$$

$$a * \boldsymbol{b} * c$$

Ahora se verifica a derecha

$$a * (\boldsymbol{b} * c$$

$$\boldsymbol{b} * c * a$$

$$c * \boldsymbol{b} \ * a$$

$$a * \boldsymbol{b} * c$$

$$a * \boldsymbol{b} * c$$

Visualmente se obtiene:

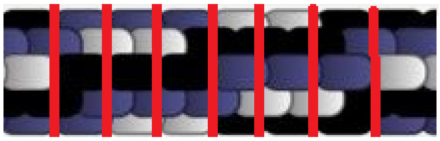


*Ilustración 22 Coca, E. (2017). Modificación Tablero.[Figura]recuperado de https://co.pinterest.com/pin/536772849322692006/*

Los ocho cortes con línea roja, permiten identificar el ciclo. Y su lado opuesto permite verificar la propiedad descrita anteriormente.

**Inversos.**

En este caso los inversos están dados por replicar las hebras de manera ordenada, al eje de donde proviene, se cumple $T^{-1}$ me indica que cada hebra tiene inverso, sin importar en la posición en la que se ubique.

Por ejemplo en la hebra inicial de color morado que se ubica en la posición 32, al aplicar el movimiento que le corresponde, pasara a la posición 14, su $T^{-1}$asociado en este caso seria 32 el cual indica la posición en la que se encontraba.

El caso general que aporta este tejido en cuestión de inversos se denota como: $T_2^{-1}$=$T_1$

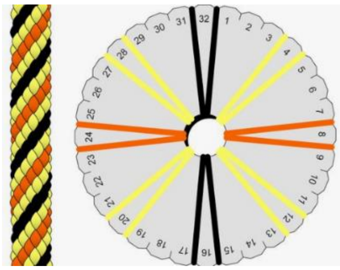
Entonces $T_n$ indica que $T$ denota la hebra sobre la que se quiere ver el inverso y $n$ es el eje donde se encuentra la hebra. Por tanto $T_n^{-1}$ denota el inverso de cualquier hebra en este caso, de forma general.

| **Matematización caso de tejer tres colores y ocho Hebras.** | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipo de matematización** | **Nivel** | **Acciones que describen lo realizado.** | **¿Cómo se trabaja desde el telar?** |
| Horizontal | Situacional | • Identificar los elementos matemáticos pertinentes que puedan estar inmersos en el telar. | Este nivel es exploratorio, ya que no se teje de manera en que se tejen dos hebras y tampoco se tiene claridad sobre los movimientos. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | • Realizar esquemas, expresar y visualizar técnicas de trenzado de diferentes maneras en ese único telar. | La realización de esquemas, se realiza con imagen del disco redondo de Kumihimo. La técnica de trenzado se expresa de manera escrita con la descripción de la ubicación, el movimiento de cada hebra. Se espera, que la elaboración de ese esquema permita formalizar lo que se está tejiendo en relación del contenido matemático. |
| | | • Constituir un tejido de acuerdo con conceptos matemáticos y plantear supuestos. | Se tiene una imagen guía de que es lo que se quiere obtener. Y una noción de los movimientos que se deben emplear. |
| | | • Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje a la hora de tejer y el lenguaje formal (notación propia) y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos, en la elaboración de cada tejido. | Respecto al lenguaje utilizado, se construye una notación propia denominada ejes, para intentar desarrollar de manera general la forma en que se teje. |
| | | • Evidenciar regularidades y patrones en cada figura que se elabore en el Kumihimo.<br>• Reconocer los aspectos similares respecto de otros problemas conocidos, en este caso la elaboración de trenzas en lo plano. | La regularía evidenciada se distingue entre el movimientos que se emplea para tejer, y la combinación de colores que se genera en cada cambio de posición de una hebra. |
| Vertical | Nivel referencial | • Utilizar diferentes tipos de representación gráfica, visual de la elaboración de tejidos artesanales en el Kumihimo.<br>• Representar una relación mediante una fórmula matemática bien sea desde la notación empleada para realizar movimientos en el telar o desde algún concepto matemático en específico.<br>• Utilizar operaciones, un | Se utilizan como medios de representación gráfica una tabla donde se indica el color, número de hebras las posiciones que debe ocupar, cada una. En lo visual se cuenta con una figura del tejido que se quiere obtener.<br><br>En la representación de fórmulas o notaciones |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | lenguaje simbólico y/o formal asociado al telar con el que se está trabajando. | empleadas se tiene el uso de la propiedad asociativa y una notación propia para determinar inversos.<br><br>El planteamiento para visualizar inversos en este caso funciona, pero no es general para más telares.<br><br>Se introduce el término de visualizar los ciclos en un tejido de Kumihimo redondo, es decir cuántos movimientos o giros debe emplear cada hebra para regresar a su posición inicial, pero no se plantea de forma general. |
| | Nivel general | • Generalizar los aspectos mencionados del nivel referencial, además de validar, explicar y justificación de los resultados obtenidos. Siempre en relación de lo que se haga con el Kumihimo. | Se generaliza el uso de la propiedad asociativa de una operación establecida para ese caso específico.<br>Se plantea también una generalización para identificar los inversos en el telar. |
| | Nivel formal | • Hacer uso de procedimientos convencionales con notación propia de la rama de la matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente. | Los procedimientos empleados se asemejan a la demostración de la operación de la propiedad asociativa. Hasta esta instancia llega el nivel formal.<br><br>Pues la propuesta de inversos en este nivel aun no es general, sino un caso específico para verificar su generalidad. |

**Caso de tejer figura secuencial.**




| Colores | Cantidad de hebras | Posiciones iniciales. |
|---|---|---|
| **Amarillo** | 8 | 3,4,11,12,19,20,27,28 |
| **Naranja** | 4 | **7,8,23,24** |
| **Negro** | 4 | **31,32,15,16** |

*Ilustración 23 Salazar, M. (2017).Tablero. [Figura] recuperado de https://co.pinterest.com/pin/302163456231952580/*

**Tipo de movimientos**

Dada la posición inicial, se asume de nuevo el esquema constituido en la construcción anterior, donde se conserva la forma de trenzar que es mover dos una hebra hacia su lado opuesto o 14 posiciones en el primer movimiento y luego aplicar giro en contra de las manecillas del reloj.

Posición **32** se desplaza a posición 14.
Posición **16** se desplaza a posición a 31.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **3** se desplaza a posición 18.
Posición 20 se desplaza a posición a 2.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

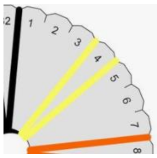
Posición 8 se desplaza a posición 22.
Posición 24 se desplaza a posición a 7.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.
Posición **12** se desplaza a posición 26.
Posición 28 se desplaza a posición a 10.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **15** se desplaza a posición 29.
Posición **31** se desplaza a posición a 13.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

**Matematización y formalización matemática**

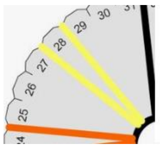
En este caso se cumple la propiedad conmutativa, es posible aplicarla respecto a los ejes, ya que si se observa el eje 1 inicia con la hebra de color negro y termina con el movimiento de la hebra naranja. El eje 4 cumpliría el papel de espejo o simetría del eje 1, pues en este eje se inicia tejiendo con la hebra de color naranja y se termina con el movimiento de la hebra de color negro.

Por tanto  se verifica el uso de la propiedad $a * b = b * a$



Donde $a$ =iniciar tejiendo con las Hebras del eje 1, cuyo orden es el de mover Hebra negra, hebra amarilla, hebra amarilla, hebra naranja.

*Ilustración 25 Salazar, M. (2017). Modificación Tablero. [Figura] recuperado de https://co.pinterest.com/pin/302163456231952580/*



$b$ =Iniciar tejiendo con las hebras del eje 3, cuyo orden es el de mover Hebra naranja, hebra amarilla, hebra amarilla, hebra naranja.

*Ilustración 24Salazar, M. (2017). Modificación Tablero. [Figura] recuperado de https://co.pinterest.com/pin/302163456231952580/*

Esta aplicación también se cumple si $a$ asume las hebras del eje 1 y 2, y se opera con las hebras del eje 3 y 4.

$$a * b = b * a$$

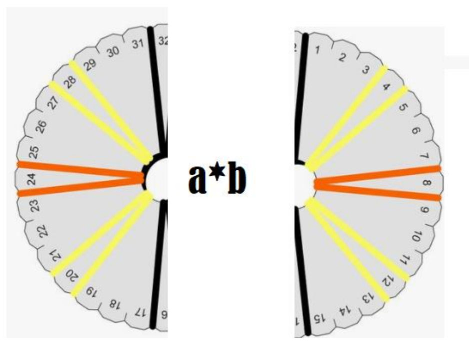



*Ilustración 26 Salazar, M. (2017). Modificación Tablero. [Figura] recuperado de https://co.pinterest.com/pin/302163456231952580/*

Si quiere verse una composición interna en a esta sería el elemento neutro de la opera $a$ ya que en los cuatro ejes conserva su ubicación en inicio y el proceso de trenzado.

La propiedad asociativa no es posible, ya que este tejido es secuencial  y su acomodación inicial es cíclica y garantiza la forma expuesta en la imagen.

Es ciclo es de 8 para las 16 hebras.

**Inversos**

Se verifica y comprueba el postulado de la elaboración anterior donde $T_n$ indica que $T$ denota la hebra sobre la que se quiere ver el inverso y $n$ es el eje donde se encuentra la hebra. Por tanto $T_n^{-1}$ denota el inverso de cualquier hebra en este caso, de forma general.

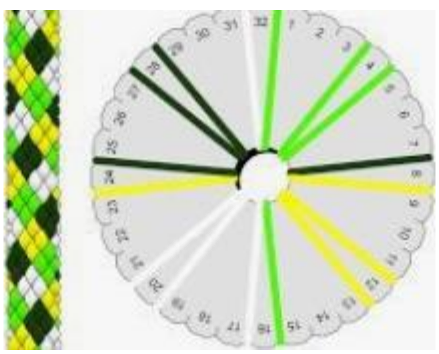
| **Matematización  Caso de tejer figura secuencial.** | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipo de matematización** | **Nivel** | **Acciones que describen lo realizado.** | **¿Cómo se trabaja desde el telar?** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Horizontal | Situacional | • Identificar los elementos matemáticos pertinentes que puedan estar inmersos en el telar. | Se identifica de entrada el tipo de movimientos a emplear en el telar. |
| | | • Realizar esquemas, expresar y visualizar técnicas de trenzado de diferentes maneras en ese único telar. | La realización de esquemas, se realiza con imagen del disco redondo de Kumihimo, que permite visualizar de manera específica la figura de tejido que se quiere obtener. La técnica de trenzado se expresa de manera escrita con la descripción de la ubicación, el movimiento de cada hebra. En este caso los movimientos no cambian en relación del tejido anterior. |
| | | • Constituir un tejido de acuerdo con conceptos matemáticos y plantear supuestos. | También se tiene una imagen guía y se propone verificar si en este tipo de tejido es posible abarcar las propiedades conmutativa y asociativa.<br>Además de resaltar que este tejido visualmente permite describir una forma de secuencia. |
| | | • Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje a la hora de tejer y el lenguaje formal (notación propia) y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos, en la elaboración de cada tejido. | Respecto al lenguaje utilizado, se implementa la notación propia denominada ejes, también se efectúa y resalta el uso de cada dos movimientos realizados con dos hebras diferentes el telar redondo gira 90 grados en contra de las manecillas del reloj. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | • Evidenciar regularidades y patrones en cada figura que se elabore en el Kumihimo.<br>• Reconocer los aspectos similares respecto de otros problemas conocidos, en este caso la elaboración de trenzas en lo plano. | La regularía evidenciada se distingue entre el movimientos que se emplea para tejer, y la combinación de colores que se genera en cada cambio de posición de una hebra.<br>Existe una regularidad entre la forma en que se acomodan los colores de este tejido. |
| Vertical | Nivel referencial | • Utilizar diferentes tipos de representación gráfica, visual de la elaboración de tejidos artesanales en el Kumihimo.<br>• Representar una relación mediante una fórmula matemática bien sea desde la notación empleada para realizar movimientos en el telar o desde algún concepto matemático en específico.<br>• Utilizar operaciones, un lenguaje simbólico y/o formal asociado al telar con el que se está trabajando. | Se utilizan como medios de representación gráfica una tabla donde se indica el color, número de hebras las posiciones que debe ocupar, cada una. En lo visual se cuenta con una figura del tejido que se quiere obtener.<br><br>En la representación de fórmulas o notaciones empleadas se tiene el uso de la propiedad conmutativa con una propuesta de desarrollo no convencional.<br>Se plantea la generalidad propuesta para los inversos para deshacer el tejido.<br>se menciona el ciclo de 16 hebras como ciclo 8. |
| | Nivel general | • Generalizar los aspectos mencionados del nivel referencial, además de validar, explicar y justificación de los resultados obtenidos. Siempre en relación de lo que se haga con el Kumihimo. | Se generaliza el uso de la propiedad conmutativa de una manera no convencional donde influye la propuesta de ejes, y la acomodación de las hebras.<br>Se plantea también una generalización para identificar los inversos en el telar y que estos deshagan cualquier tejido |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | elaborado.<br>Se generaliza el ciclo para 16 hebras que corresponde a un valor numérico de 8 movimientos de todas las hebras para que vuelvan a su sitio inicial. |
| | Nivel formal | • Hacer uso de procedimientos convencionales con notación propia de la rama de la matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente. | Se inicia formalización de notación propia para describir los movimientos de tejer en el telar. Y la notación propia empleada de ejes, e inversos.<br><br>Pues la propuesta de inversos en este nivel si es general, sino un caso específico para verificar su generalidad.<br><br>El uso de la propiedad conmutativa se evidencia pero de manera no convencional. |

**Caso de tejer rombos**



| **Colores** | **Cantidad de hebras** | **Posiciones iniciales.** |
|---|---|---|
| **verde** | 4 | 32,3,4,15 |
| **verde oscuro** | 4 | **7,24,27,28** |
| **Amarillo** | 4 | **8,11,12,23** |
| **Blanco** | 4 | 16,19,20,31 |

*Ilustración 27 Taller bisutería. (2017).Tablero Kumihimo. [Patrones] recuperado de https://co.pinterest.com/pin/312296555395953792/*

**Tipo de movimientos**

La forma de emplear los movimientos en este caso son similares a los anteriores, cada dos hebras se genera un giro en contra de las manecillas del reloj, en el telar redondo, algo característico para resaltar de aquí es la figura que se quiere obtener, que en este caso visualmente se asemeja a un rombo. La forma de acomodación es la que determina construir la figura. Por ejemplo, en la construcción anterior, se maneja el mismo número de hebras, diferente cantidad de colores, pero las posiciones son las mismas. Por tanto, los movimientos son los mismos. Habría que observar que pasa con las operaciones.

Posición **32** se desplaza a posición 14.
Posición **16** se desplaza a posición a 31.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **3** se desplaza a posición 18.
Posición 20 se desplaza a posición a 2.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 8 se desplaza a posición 22.
Posición 24 se desplaza a posición a 7.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.
Posición **12** se desplaza a posición 26.
Posición 28 se desplaza a posición a 10.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición **15** se desplaza a posición 29.
Posición **31** se desplaza a posición a 13.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

**Matematización y formalización matemática.**

Respecto a la matematización de esta elaboración son 4 colores, 16 hebras, su ciclo es 8. En este caso se cumple la propiedad conmutativa, pero de otra manera, en primera medida si se aplica la operación $a * b$ y replicarla 4 veces equivale a armar los 4 rombos resultantes de la manilla. Es decir que:

$a =$ Es construir un rombo de un color de los cuatro posibles.

$b =$ Es construir el rombo a partir de un color inicial en una hebra y las tres siguientes deben ser mismo color.

Por cada 3 hebras consecutivas del mismo color existe una de color diferente. Por cada 1 hebra existen tres hebras consecutivas del mismo color.

Es decir que al aplicar la operación $a * b = b * a$ lo que cambia en el tejido es el color del rombo.

**Inversos**

Los inversos acá no cambian, porque aunque estén las hebras ubicadas de diferente manera, los movimientos en el telar, son los mismos. Se verifica y comprueba el postulado en las elaboraciones anteriores donde $T_n$ indica que $T$ denota la hebra sobre la que se quiere ver el inverso y $n$ es el eje donde se encuentra la hebra. Por tanto $T_n^{-1}$ denota el inverso de cualquier hebra en este caso, de forma general.

| **Matematización Caso de tejer rombos.** | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipo de matematización** | **Nivel** | **Acciones que describen lo realizado.** | **¿Cómo se trabaja desde el telar?** |
| Horizontal | Situacional | • Identificar los elementos matemáticos pertinentes que puedan estar inmersos en el telar. | Se identifica el tipo de movimientos no cambia, y al no cambiar debe existir al menos una operación y/o propiedad que se pueda verificar en el telar. |
| | | • Realizar esquemas, expresar y visualizar técnicas de trenzado de diferentes maneras en ese único telar. | La realización de esquemas, es la misma en relación de los demás tejidos, se realiza con imagen del disco redondo de Kumihimo, que permite visualizar de manera específica la figura de tejido que se quiere obtener. La técnica de trenzado se expresa de manera escrita con la descripción de la ubicación, el movimiento de cada hebra. En este caso los movimientos no cambian en relación del tejido anterior. No cambia lo manipulativo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | • Constituir un tejido de acuerdo con conceptos matemáticos y plantear supuestos. | Como se tiene una imagen guía y se propone verificar si en este tipo de tejido es posible abarcar las propiedades conmutativa y asociativa. Siendo este el elemento matemático a verificar.<br>Además de resaltar que este tejido visualmente permite construir rombos de diferente color. |
| | | • Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje a la hora de tejer y el lenguaje formal (notación propia) y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos, en la elaboración de cada tejido. | El lenguaje utilizado, recoge la notación propia empleada en la construcción de los anteriores tejidos denominada ejes, la notación para efectuar una operación que permita verificar la propiedad asociativa o conmutativa. También se verifica que los movimientos realizados en el telar no cambian y que el telar redondo gira 90 grados en contra de las manecillas del reloj, cada que se muevan dos hebras a diferentes posiciones. |
| | | • Evidenciar regularidades y patrones en cada figura que se elabore en el Kumihimo.<br>• Reconocer los aspectos similares respecto de otros problemas conocidos, en este caso la elaboración de trenzas en lo plano. | La regularidad evidenciada es que los movimientos en el telar no cambian cuando emplea tejer, y la combinación de colores que se genera en cada cambio de posición de una hebra, en este caso la regularidad de ese cambio de posición es generar rombos. |
| Vertic al | Nivel referencial | • Utilizar diferentes tipos de representación gráfica, visual de la elaboración de tejidos | Se utilizan como medios de representación gráfica una tabla donde se indica |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | artesanales en el Kumihimo.<br>• Representar una relación mediante una fórmula matemática bien sea desde la notación empleada para realizar movimientos en el telar o desde algún concepto matemático en específico.<br>• Utilizar operaciones, un lenguaje simbólico y/o formal asociado al telar con el que se está trabajando. | el color, número de hebras las posiciones que debe ocupar, cada una. En lo visual se cuenta con una figura del tejido que se quiere obtener, que en este caso es un rombo.<br><br>En la representación de fórmulas o notaciones empleadas se tiene el uso de la propiedad conmutativa con una propuesta de desarrollo muy parecida a la utilizada en la elaboración de tejer con dos hebras.<br><br>Se verifica la generalidad propuesta para los inversos para deshacer el tejido.<br>Se ratifica el ciclo de 16 hebras como ciclo 8. |
| | Nivel general | • Generalizar los aspectos mencionados del nivel referencial, además de validar, explicar y justificación de los resultados obtenidos. Siempre en relación de lo que se haga con el Kumihimo. | Se generaliza la verificación de la propiedad conmutativa.<br><br>Se generaliza la propuesta de los ejes.<br>Se generaliza el tipo de movimientos que se realizan en el Kumihimo, no cambia.<br><br>Se ratifica la generalización para identificar los inversos en el telar y que estos deshagan cualquier tejido elaborado.<br><br>Se generaliza el ciclo para 16 hebras que corresponde a un valor numérico de 8 movimientos de todas las hebras para que vuelvan a |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | su sitio inicial. |
| | Nivel formal | • Hacer uso de procedimientos convencionales con notación propia de la rama de la matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente. | Se formaliza la notación propia para describir los movimientos de tejer en el telar. Y la notación propia empleada de ejes, e inversos.<br><br>El planteamiento de inversos se vuelve general en este nivel si es general.<br><br>Se generaliza que en cada tejido debe existir al menos una operación que se pueda trabajar con la propiedad conmutativa y/o asociativa. |

**Caso de tejer corazón.**

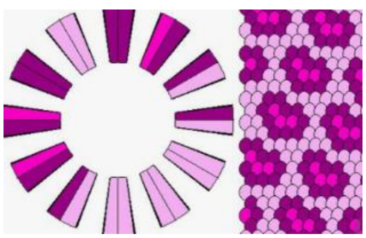


*Ilustración 29 Zarate M. (2018).Riendeship.[bracelets]recuperado de https://co.pinterest.com/pin/340866265527690687/*

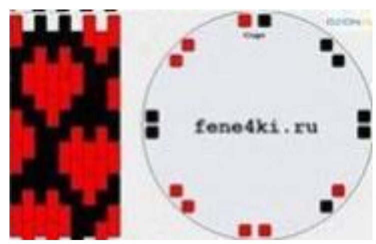



*Ilustración 28 Mallmann E. (2017).Jewerly Kumihimo.[photos] https://co.pinterest.com/pin/195132596340996354/*

| Colores | Cantidad de hebras | Posiciones iniciales. |
|---|---|---|
| **Fucsia** | 3 | 1,22,25 |
| **Rosado** | 11 | **5,8,10,11,13,14,16,17,19,31,32** |
| **Morado** | 10 | 31,32,2,4,19,21,24,27,28 |

Los movimientos que se emplean en este caso, son los mismos que en las construcciones anteriores, en los ejes de referencia con una diferencia, en este caso solo hay 3 espacios libres en cada eje.

El espacio que ocupa la hebra 32 generalmente se desplaza hacia el espacio que este vacío, o su opuesto en el eje 2. Y asi sucesivamente con cada hebra siguiendo la secuencia.

El comportamiento y ubicación de la imagen de hilo rojo y negro, recoge réplicas de los movimientos anteriores. Este nunca cambia en ninguna de las formas trabajadas, pero el tipo de operación que se pueden crear allí, si cambian.

**Matematización y formalización matemática**

En el caso de los corazones  se puede visualizar la propiedad asociativa de la siguiente manera:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

A izquierda la operación de la notación empleada es:

a=color rosado

$b$= color morado

C=color fucsia

Con base en esta notación lo que sucede al emplear los movimientos es que a va enrollando a b y estos juntos dejan en el centro a c, lo cual permite determinar la forma del tejido de corazón.

En el caso de los corazones de color rojo y blanco solo cambia la distribución de colores y la propiedad que se cumple es la propiedad conmutativa idéntica a la planteada en la construcción de los rombos.

A derecha la operación de la notación empleada es la misma, solo que b significa tejer dos hebras consecutivas sobre el color del centro que en este caso es c.

**Inversos**

Los inversos en este caso son más fáciles de ver, ya que en cada eje solo hay  3 espacios disponibles, por tanto, al querer deshacer algún movimiento con la hebra, inmediatamente se devuelve el movimiento teniendo en cuenta la posición en el eje donde se encuentre donde $T_n$ indica que $T$ denota la hebra sobre la que se quiere ver el inverso y $n$ es el eje donde se encuentra la hebra. Por tanto $T_n^{-1}$ denota el inverso de cualquier hebra en este caso, de forma general. En el caso de los corazones rojo y negro el comportamiento es el mismo.

Para este caso, no hay avance en las descripciones  de los niveles de matematización que se han planteado, salvo el procedimiento de trabajar con la propiedad asociativa, por el contrario, este caso permite ratificar una posible generalidad para cualquier tipo de tejido.

El nivel de este caso es situacional.

**Caso de tejer una flor**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **color de fondo** | **1** | **2** | **14** | **17** | **18** | **21** | **22** | **25** | **29** |
| **color pétalos** | **5** | **6** | **10** | **13** | **26** | **30** | | | |
| **color centro de flor** | **9** | | | | | | | | |

El esquema presentado anteriormente indica las posiciones iniciales y el color de cada Hebra escogida para elaborar una figura de flor en el telar redondo Kumihimo.

*Tejer en forma de flor (caso específico):* Se escoge un número determinado de hebras, este caso son 6 hebras de color naranja para los pétalos, la posición de cada una es 5,6, 10, 13, 26, 30 respectivamente.

El centro de la flor va ocupar la posición 9 y la hebra escogida es de color verde.

Posiciones color de fondo del tejido, en este caso es el color fucsia, sus posiciones son: 1, 2, 14, 17, 18, 21, 22, 25 y 29.

**Forma de trenzado:**

- La ubicación inicial queda como se presenta en la imagen.


*Ilustración 30 Posición inicial. Flor Kumihimo. Fuente propia*

- Antes de aplicar los movimientos, es necesario especificar que en el proceso de matematización se toman cuatro ejes de referencia. En los números 32, 8, 16, 24.

  De allí se sacan deducciones como las siguientes:
- Se va a denominar ejes de referencia, los puntos marcados en el telar redondo Kumihimo, también se aclara que con los cuatro ejes, se establece lo siguiente:

| Eje 1 | Eje 2 | Eje 3 | Eje 4 |
|---|---|---|---|
| Posiciones que integran el eje son: 32,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. | Posiciones que integran el eje son: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. | Posiciones que integran el eje son: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23. | Posiciones que integran el eje son: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. |

Esto es con el fin de generalizar la secuencia que resulta de la elaboración de la respectiva flor. Por tanto, cada eje se compone de ocho posiciones diferentes, de las cuales solo cuatro se utilizan para establecer la posición inicial, que determina la forma de la figura. Pero la forma no la determina solo la posición inicial, sino que también se tiene en cuenta la secuencia de movimientos que genera el telar al girarlo en contra de las manecillas del reloj.

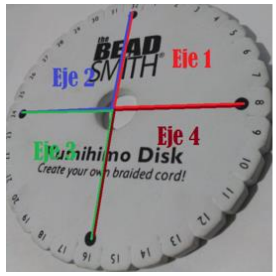



*Ilustración 31 Hebras flor Kumihimo. Fuente propia*

*Ilustración 32 Ejes disco redondo Kumihimo. Fuente propia.*

Posición 2 se desplaza a posición 15.
Posición 17 se desplaza a posición a 32.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 6 se desplaza a posición 20.
Posición 22 se desplaza a posición 4.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 10 se desplaza a posición 24.
Posición 26 se desplaza a posición a 8.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 14 se desplaza a posición 28.
Posición 30 se desplaza a posición a 13.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 18 se desplaza a posición 31.
Posición 1 se desplaza a posición a 15.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 21 se desplaza a posición 3.
Posición 5 se desplaza a posición a 19.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 25 se desplaza a posición 7.
Posición 9 se desplaza a posición a 23.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Posición 29 se desplaza a  posición 11.
Posición 13 se desplaza a  posición a 27.
Aplico giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Generalidades

- Se aplica giro de 90 grados en contra de las manecillas del reloj cada dos movimientos.
- El ciclo de este tejido es de 8, para 16 hebras.
- Para cualquier figura de 16 hebras, solo cambia la posición y acomodación de colores para crear la figura, la secuencia de movimientos siempre va a ser la misma.
- En ese orden de ideas la secuencia de movimiento empleada es la siguiente:
  Los primeros pares de hebra que se ubica en el eje 1, pasan de manera intercalada al eje 2. El segundo par de hilos pasan aleje 3.
- En cada Eje el número de hebras que debe existir debe ser divisible en 4.
- En el caso de la flor la acomodación permite trabajar de manera más manipulativa la propiedad asociativa de la siguiente manera:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

- A izquierda la operación de la notación empleada es:

a=color fucsia
$b$= color naranja
C=centro de la flor

Con base en esta notación lo que sucede al emplear los movimientos es que a va enrollando a b y estos juntos dejan en el centro a c, lo cual  garantiza la forma de flor.

A derecha la operación de la notación empleada es la misma, solo que a permite tejer el fondo de la figura, b significa tejer dos hebras  consecutivas, que armar el pétalo  sobre el color del centro que en este caso es c.

La idea de inverso no cambia para nada, se reafirma nuevamente como generalidad para cualquier tipo de tejido.

**Nivel del caso de la flor es de carácter formal:**
Teniendo en cuenta el ítem empleado:

- Hacer uso de procedimientos  convencionales con notación propia de la rama de la matemática en la que se está trabajando, que en este caso es el uso de operaciones con la propiedad asociativa y conmutativa respectivamente.

Este caso permite amplificar la generalidad para tejer cualquier forma en el telar redondo Kumihimo, pues uno de esos procedimientos con notación propia  fue emplear la propiedad asociativa.
El registro de posiciones iniciales, asi como la verificaron de inversos, el ciclo, los giros del disco redondo y el orden.

**Matematización en relación de lo planteado en el marco teórico:**
Los niveles expuestos por medio de caracterizaciones, formas de tejer, propiedades matemáticas que hay detrás de cada figura corresponden a uno de los principios de matemática realista planteados por Freudenthal (1970) como se especificó en el marco teórico. Donde se plantea niveles de matematización horizontal y vertical respectivamente. Estas definiciones se recogen en

la matemática realista como una teoría global, siendo uno de sus fines pensar la matemática como una actividad humana. Lo descrito en este párrafo se consolida en la presentación de un esquema general.

En cada caso se resaltaron características de cada nivel a la hora de trabajar con el telar, sin embargo es importante ubicar cada caso en un nivel específico y justificar porque se encuentra en ese nivel.

| **Casos** | **Nivel en el que se encuentra** | **¿Por qué se encuentra en ese nivel?** |
|---|---|---|
| Caso tejer 2 hebras | Situacional | Porque es una introducción a trabajar con el telar y los esquemas empleados son un acercamiento por medio de nociones de operación que se pueden trabajar en el Kumihimo. |
| Caso de tejer tres colores y ocho hebras. | Referencial | Porque se involucran gráficas, representación del material a utilizar y se introducen notaciones matemáticas propias y existentes en el caso de la propiedad conmutativa. |
| Caso tejer secuencial. | Referencial | Porque plantea una representación bien elaborada en términos de un esquema no solo para los movimientos sino el uso de un modelo de operación para la propiedad conmutativa en el que influye como se acomodan los colores de las hebras. |
| Caso de tejer rombos | General | Porque generaliza aspectos referenciales de las formas de tejer y plantea un modelo de solución que recoge generalidad del primer caso que se encontraba en un nivel situacional. |
| Caso de corazones | Situacional | Porque se vuelve replica de los casos que ya se han ejecutado, las estrategias de abordaje en la situación parecen que estuviese iniciando a tejer el Kumihimo. |
| Caso de la flor | Formal | Porque cumple con el ítem propuesto y desarrolla concepto, procedimientos y notaciones propias convencionales de la rama de las matemáticas. |

## MOVIMIENTOS QUE SE DEBEN REALIZAR EN EL TELAR INDEPENDIENTEMENTE DE LA FORMA QUE SE QUIERA OBTENER.

- El telar siempre se debe girar en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- La operación que se encuentre en cada diseño, se mantiene de inicio a fin, pero se debe clarificar si las letras a, b, c designan un color o hacen referencia al grupo de números por el que pasa cada hilo.
- Cada movimiento de una hebra siempre busca su posición opuesta en los ejes definidos.
- Los ejes definidos garantizan el orden a la hora tejer con cualquier color o número de hebras.

- En la creación de cada figura se debe caracterizar la notación y simbolismo empleado, para denotar una operación.

## CASOS GENERALES PARA TEJER CUALQUIER FORMA

**Movimientos:** Por cada dos hebras que cambien de desplazamiento, el disco debe girar siempre en contra de las manecillas del reloj o de lo contrario no se teje nada, se podrían generar enredos.

**Operación:** Cualquier operación que se quiera efectuar en el telar debe elegir si se trabaja sobre las hebras, sobre el color de las hebras o sobre una mezcla entre ambas, importante tener en cuenta la figura, sobre la cual se va a trabajar.

La operación depende de la ubicación que se le asigne a cada hebra, en cada eje y determinar donde inicia el tejido.

**Operación con propiedad asociativa:** solo funciona conservado el orden de las hebras, lo cual permite afirmar que en el Kumihimo se trabaja con conjuntos ordenados, ya que si se cambian las posiciones, lo que cambia en la operación es su forma o notación, que puede estar ligada a los ejes.

**Operación con propiedad conmutativa:** siempre se cumple cuando se trabaje con 2 hebras o dos colores únicamente, en las demás formas está ligada a la definición y forma de definir operación o figura a crear en el telar.

**Elemento neutro:** se deduce que el elemento neutro de una operación en el telar Kumihimo, es mover el disco redondo en sentido de las manecillas del reloj, ya que genera retroceso en el tejido, no tejer o no generar ninguna figura.

## INVERSOS GENERALES PARA CUALQUIER FORMA OBTENIDA

Para cualquier $T$ hebras, que cumpla la condición $0 < T < 32$ en este caso los inversos están dados por replicar las hebras de manera ordenada, al eje de donde proviene, se cumple $T^{-1}$ me indica que cada hebra tiene inverso, sin importar en la posición en la que se ubique.

Por ejemplo en la hebra inicial de color morado que se ubica en la posición 32, al aplicar el movimiento que le corresponde, pasara a la posición 14, su $T^{-1}$asociado en este caso seria 32 el cual indica la posición en la que se encontraba.

El caso general que aporta este tejido en cuestión de inversos se denota como: $T_2^{-1}$=$T_1$

Entonces $T_n$ indica que $T$ denota la hebra sobre la que se quiere ver el inverso y $n$ es el eje donde se encuentra la hebra. Por tanto $T_n^{-1}$ denota el inverso de cualquier hebra en este caso, de forma general.

## Conclusiones

- Trabajar lo abstracto desde de lo tangible puede generar una discusión teórica en términos de: si lo abstracto se vuelve visible y accesible; deja de ser abstracto.

- El telar Kumihimo permite trabajar alrededor de nociones teóricas del álgebra abstracta, pero es necesario hacer explicita la relación entre lo visual, lo manipulativo y lo simbólico, para poder dar un paso a trabajar sobre algún proceso de generalización.

- Es posible llevar a cabo procesos de matematización, mediante la manipulación del telar Kumihimo, sin necesidad de recurrir al uso de algoritmos convencionales que conlleven a procesos de generalización de carácter alfanumérico.

- Una forma de matematizar tejidos artesanales en el telar Kumihimo, es describir paso a paso, como se obtiene la creación de una figura específica (rombo, corazón, flor, etc.). Para posteriormente dotar de significado matemático tanto el proceso de elaboración y lo que se obtiene en dicho telar. En consecuencia se puede situar en alguno de los niveles de matematización planteados.

- En cada sistematización realizada, para las diferentes formas de tejido del Kumihimo, se resaltaron características de acuerdo a cada nivel de matematización propuesto, para que finalmente se asignara el nivel (situacional, general, referencial, formal) en el que se encontraba cada tejido elaborado, justificando por medio de un esquema, porque se consideraba que hacia parte de ese nivel.

- La creación de una notación propia y explicita en la sistematización de las artesanías del telar Kumihimo, permite establecer una relación directa entre crear tejidos y visibilizar conceptos matemáticos existentes en la teoría.

- Finalmente si se descubrieron matemáticas detrás de las artesanías del telar Kumihimo.

## Referencias Bibliográficas


- Bresan A. (2009). Los principios de la educación matemática realista. Recuperado de https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf
- Freudhental, H. (1983) Didactical phenomenology of mathematical structures. Cap 2 y cap 6, London, England.
- Freudhental, H. (1999). Didactical phenomenology of mathematical structures. London, England.
- Freudenthal, H. (1983).Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, 3, 413 – 435
- Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? Educational Studies in Mathematics, 1(1), 3-8.
- Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Japanese Braiding (Kumihimo) Instructions (2018) Recuperado de http://www.japanesebraids.com/
- Pinterest. (2018) Recuperado de https://co.pinterest.com.
- Rodríguez, J. (2008). Juegos topológicos [Blog]. Recuperado de https://topologia.wordpress.com/2008/10/17/trenzas/
- Sahashi, K. (1988) Exquisite: The World of Japanese Kumihimo Braiding. Kodansha International. Tokio. Japon.
- Treffers, A., y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program, in L. Streefland (ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, OW & OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands. Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.
- Treffers, A. (1987). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.