“EL TANGRAM”
HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA BASES GEOMÉTRICAS DE ÁREAS

Por: María Luisa Rodríguez Pineda
Cód. 22022011

UNIVERSIDAD LIBRE
Facultad Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas XII semestre
Noviembre 15 de 2007

“EL TANGRAM”
HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA BASES GEOMÉTRICAS DE ÁREAS

Por: María Luisa Rodríguez Pineda
Cód. 22022011

A: Lic. Dora Estrada

UNIVERSIDAD LIBRE
Facultad Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas XII semestre
Noviembre 15 de 2007

ACEPTACIÓN

Presidente del Jurado____

Jurado 1:____

Jurado 2:____

Jurado 3:____

Bogotá DC. ____________ __________________ __________
Día Mes Año

DEDICATORIA

Con todo mi corazón dedico este proyecto a mi esposo FREDY IGNACIO RODRÍGUEZ R. y a mi hija LAURA MILENA RODRÍGUEZ, por su apoyo incondicional durante los seis años que duró mi proceso educativo en la Universidad Libre.

AGRADECIMIENTOS

Por su colaboración especial para la óptima presentación del presente proyecto de grado, agradezco muy especialmente a los licenciados Dora Estrada y Germán Montezuma, sin su colaboración esta tarea se habría cumplido con mayores dificultades. También agradezco a las directivas del Colegio Calazans Femenino (sede Pablo VI), las cuales muy generosamente permitieron un eficaz desarrollo de mi práctica docente, basada en la implementación del presente proyecto.
Preciso importante agradecer también a todas las personas (directivas, docentes, personal administrativo y compañeros), de la Universidad Libre (sede Bosque Popular), los cuales con su acompañamiento y colaboración, ayudaron para la obtención de mis metas.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad se ha reconocido el valor didáctico del juego, aunque con distintas características que en nuestros días. A todos nos atraen las actividades lúdicas en las que se combina el desafío y la curiosidad. Sin embargo, el juego es construido en principio desde el espacio familiar y puesto en relación con los elementos propios del contexto. Sólo en tiempos recientes se reconoce la importancia del desarrollo conceptual en torno a la actividad lúdica en la escuela y no se ve al juego como un obstáculo, como algo inútil e improductivo. Es más divertido aprender jugando, en el juego se piensa y a la vez se apropia y producen nuevos significados para la vida.

Las situaciones de aprendizaje con juegos didácticos favorecen el crecimiento cognoscitivo, intelectual y afectivo teniendo en cuenta los intereses y motivaciones de los alumnos.

Las actividades lúdicas, culturales, deportivas y sociales de contenido educativo orientado por las pautas curriculares según el interés del estudiante forman parte de la educación actual. Existen investigaciones tendientes a desarrollar metodologías donde la lúdica será el pilar de la actividad cognitiva, por medio de los juegos. En el futuro, los juegos computarizados también tendrán su lugar en las aulas. Sin embargo es importante destacar que el valor didáctico de los juegos, como el de todo material didáctico, no se encuentra en el juego en sí, sino en la secuencia didáctica que se plantee. Es el docente quien debe reconocer el valor formativo de un material didáctico y aprovecharlo para diseñar actividades que permitan a los alumnos aprovecharlo simplemente como un recurso para lograr el desarrollo conceptual deseado.

Las secuencias didácticas bien diseñadas y bien utilizadas contribuyen y fortalecen la construcción de las representaciones de las ideas matemáticas. Los recursos lúdicos permiten aumentar la variedad de opciones visuales y situaciones problema sobre las cuales los alumnos pueden pensar, y establecer las relaciones necesarias para resolver problemas.

JUSTIFICACIÓN

En vista de las dificultades que han presentado las niñas del grado cuarto del Colegio Calasanz femenino, en el área de matemáticas, específicamente en lógica, razonamiento espacial y geometría (hallar áreas equivalentes), se hace necesario implementar modelos que mejoren significativamente el proceso de enseñanza aprendizaje, permitiéndole a las estudiantes buscar estrategias, realizar conteos y sacar conclusiones, además mejorando la enseñanza de estos tópicos. Con el tangram encontraremos otra herramienta que nos ayudará a minimizar las deficiencias de las estudiantes y a su vez las de los educadores, haciendo de nuestra labor, una tarea agradable para todos los participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Independiente de estas dificultades, con el desarrollo de este proyecto se persigue un fin primordial el cual consiste en implementar el tangram como una herramienta eficaz para fortalecer los conceptos fundamentales de la matemática y facilitar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los mismos, con ayuda de la didáctica.

Como una herramienta base para la modelación de estos arreglos se utilizará el tangram de siete piezas, el cual servirá para que las estudiantes por medio de su manejo asimilen y pongan en práctica el desarrollo de la teoría planteada en el presente proyecto.

Las matemáticas proceden de actividades consistentes sobre elementos de carácter abstracto (números y signos), su interpretación y relación se logra si dominamos operaciones mentales, representaciones de espacio y tiempo, relaciones lógicas que en un proceso cognitivo, mejoran la atención, concentración, reconocimiento e interpretación de información visual, verbal, auditiva y búsqueda de estrategias en la resolución de problemas.

I. MARCO DE LA REALIDAD

1. 1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1.1 Selección del problema:

Deficiencias en el desarrollo del pensamiento lógico y espacial, para solucionar rompecabezas de figuras geométricas, analizar grafos, desarrollar laberintos, solucionar problemas de áreas.

1.1.2 Definición del problema.

En el grupo de 42 niñas, del grado cuarto B, del Colegio Calasanz femenino, de la ciudad de Bogotá, se presentan dificultades y deficiencias en el desarrollo del pensamiento lógico y espacial, así como para solucionar rompecabezas de figuras geométricas, analizar grafos, desarrollar laberintos, solucionar problemas de áreas, etc.

Las diferentes posibilidades para encontrar formas de solucionar ejercicios utilizando el "TANGRAM" (de siete piezas), hace de este una herramienta eficaz en el proceso para minimizar el problema que nos atañe en el presente proyecto. Además nos favorece al mejorar el pensamiento lógico de las estudiantes, ayudándolas en la resolución de las diferentes dificultades que se les presenten en su cotidianidad.

Nuestro problema entonces sería: ¿Qué beneficios trae la implementación del tangram, como herramienta en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría en el tema de áreas?

1.1.3 Descripción del problema

En el desarrollo del presente proyecto, analizaré las observaciones hechas a las estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Calasanz Femenino sede Pablo VI, de la ciudad de Bogotá. Esta institución está localizada en un sector de estrato medio-alto, un lugar en el cual se busca el desarrollo integral de la mujer, con ideologías católicas y dirigido por las madres escolapias. Este es un colegio donde se respira un ambiente de paz y fraternidad tanto entre las estudiantes como entre los educadores. Se caracteriza por un clima de sencillez, por estar abierto a todos sin discriminación, fundamentalmente a las clases populares y por proyectarse en la realidad en que viven las niñas.

El grupo de niñas del grado cuarto B, está conformado por 42 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 8 y los 11 años. Son niñas con principios y valores bien dirigidos desde sus hogares y fortalecidos en esta institución educativa, su realidad social les es favorable en los aspectos familiares, socio- económico y cultural. Reciben clases por parte de diferentes docentes, de acuerdo con el área de estudio. Las directivas están siempre pendientes del desarrollo integral de sus alumnas.

1.2 OBJETIVO GENERAL

Se espera que las estudiantes del grado cuarto de primaria, en actividades pictóricas y constructivas “uso del tangram chino de siete piezas”, reconozcan, cuenten, analicen y ordenen información sobre: lógica , razonamiento espacial y áreas equivalentes.

1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Reconocer figuras equivalentes en distintas posiciones, implementando la lógica y la interpretación de imágenes visuales.
2. Que las estudiantes en situaciones reales, pictóricas y construcciones con el tangram, entablen relaciones globales independientes de formas y tamaños.
3. Identificar el papel que cumplen las relaciones métricas dentro de las relaciones espaciales.
4. Construir las siete piezas del tangram por composición de triángulos rectángulos isósceles e identificar un triángulo como unidad comparativa.
5. Mediante el uso frecuente del tangram, dominar las nociones de áreas equivalentes y fortalecer el concepto general de área.

II. MARCO DE REFERENCIA

2.1 Presentación de los antecedentes.

En este grupo de niñas del grado cuarto B, del colegio Calasanz Femenino, se presentan dificultades y deficiencias en el desarrollo del pensamiento lógico y espacial, así como en los procedimientos para solucionar rompecabezas de figuras geométricas, analizar grafos, desarrollar laberintos, encontrar diferentes posibilidades de armar figuras utilizando el Tangram de siete piezas y encontrar soluciones a situaciones que requieren construir significativamente el concepto de área. Con base en indagaciones realizadas a los diferentes docentes que han dictado materias a este grupo de estudiantes, se concluye que este problema se está presentando desde el primer año escolar, persistiendo año tras año.

Nuestro problema en estudio., radica entonces en la falta de atención a aspectos que han requerido un importante desarrollo del pensamiento lógico y espacial de las estudiantes, no quiero decir que se ha descuidado por completo este aspecto del aprendizaje escolar, sino que no se le ha dedicado suficiente tiempo y espacio a introducir en la metodología estrategias dirigidas al fortalecimiento integral del pensamiento, raciocinio y búsqueda de destrezas para conseguir objetivos por diferentes métodos. Un ejemplo que nos ilustra este problema es la dificultad para armar figuras con el tangram y hallar áreas.

Este problema se manifiesta cuando se requiere atención y concentración para la búsqueda de estrategias encaminadas a solucionar situaciones que necesitan de la observación, escucha, interpretación, razón, dar a conocer sus puntos de vista, reconocimiento e interpretación de información.
Las estudiantes pierden con facilidad la atención a los procesos, se distraen con facilidad. El desarrollo de actividades que requieren práctica de procedimientos que buscan dominar operaciones mentales, representaciones del espacio, relaciones lógicas que en un proceso cognitivo mejoran la atención, concentración, reconocimiento e interpretación de información visual, verbal, auditiva y búsqueda de estrategias en la resolución de problemas. Esta situación conlleva a que las niñas pierdan el interés por la clase, se sientan cansadas, fuera de contexto, desubicadas, no terminen lo que están haciendo en clase, se distraigan con facilidad y se dediquen a otras cosas que no tienen nada que ver con el tema que se desarrolla.

2.2 BASES PEDAGÓGICAS

SAN AGUSTÍN

El trabajo de un estudiante de matemáticas es construir en su mente un conjunto de ideas matemáticas. (Fuson y Hiebert-1992)[1]. La educación debe ir de la mano con la fe y los valores humanos.

Pero, ¿de dónde vienen estas ideas? Hace mucho tiempo se pensaba que la mente del estudiante era como una pizarra en blanco que el profesor tenía que ir llenando. Transmitir, con claridad y precisión, los conceptos matemáticos era el objetivo de la enseñanza; memorizarlos, el del estudiante. Los estudiantes aprendían leyendo los libros de texto y escuchando atentamente la explicación del profesor.

Decía Freire (1973)[2]: La educación padece la enfermedad de la narración. La narración convierte a los alumnos en “contenedores”… que han de ser llenados por el profesor. Cuanto más llene los receptáculos, mejor será el docente. Cuanto mayor sea la docilidad de los receptáculos para permitir su llenado, mejores alumnos serán.

En años recientes ha surgido una forma alternativa de enseñanza, conocida como enseñanza constructivista. Ésta parte tiene como idea central de que el alumno es quién, en último término, construye, modifica, y coordina sus esquemas mentales, en un proceso de naturaleza básicamente interna; proceso de construcción que se basa en reconocer semejanzas entre las ideas nuevas y las que ya existen (Baroody y Ginsburg, 1990; Davis, Maher y Noddings, 1990; Duilt, 1991; Davis y Maher, 1997; English, 1997)[3].

La labor del profesor es reconocer y ser consciente de las representaciones mentales que el alumno está construyendo internamente, y ayudarle, proporcionándole las actividades y experiencias adecuadas que le permitan desarrollar o revisar las estructuras mentales que está procesando.

Entender cómo las personas construyen las ideas, cómo piensan cuando resuelven problemas o cómo construyen los conceptos ha sido materia de estudio de muchas personas desde hace mucho tiempo.

[1] Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and substraction of whole numbers.
[2] Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.
[3] Baroody, A. ;Ginsburg, H. (1990). Children’s learning: A cognitive view. In R. B. Davis; C. A. Maher; N. Noddings (Eds), *Constructivist views on the teaching and learning of Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

2.2.1 Modelo Pedagógico del colegio

Teniendo en cuenta el PEI de nuestro colegio “En busca de una libertad responsable” con énfasis en valores y la pedagogía vivida por Santa Paula Montal, nuestra fundadora. Orientamos nuestro quehacer hacia una educación integral que concibe a la alumna como un ser singular, social y trascendental. Así como en los fundamentos de San José del Calasanz destacándose su filosofía de formar bajo la disciplina y al amor “piedad y letras”.

2.3 BASES LEGALES

Ley 115 de Febrero 8 de 1994[4]
Por la cual se expide la ley general de educación.
EL CONGRESO DE LA REPÚBLICA DE COLOMBIA
DECRETA:

ARTICULO 21. Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria. Los cinco (5) primeros grados de la educación básica que constituyen el ciclo de primaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes:

a) La formación de los valores fundamentales para la convivencia en una sociedad democrática, participativa y pluralista;

b) El fomento del deseo de saber, de la iniciativa personal frente al conocimiento y frente a la realidad social, así como del espíritu crítico;

c) El desarrollo de las habilidades comunicativas básicas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente en lengua castellana y también en la lengua materna, en el caso de los grupos étnicos con tradición lingüística propia, así como el fomento de la afición por la lectura;

d) El desarrollo de la capacidad para apreciar y utilizar la lengua como medio de expresión estética;

e) El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos;

f) La comprensión básica del medio físico, social y cultural en el nivel local, nacional y universal, de acuerdo con el desarrollo intelectual correspondiente a la edad;

g) La asimilación de conceptos científicos en las áreas de conocimiento que sean objeto de estudio, de acuerdo con el desarrollo intelectual y la edad;

h) La valoración de la higiene y la salud del propio cuerpo y la formación para la protección de la naturaleza y el ambiente;

i) El conocimiento y ejercitación del propio cuerpo, mediante la práctica de la educación física, la recreación y los deportes adecuados a su edad y conducentes a un desarrollo físico y armónico;

j) La formación para la participación y organización infantil y la utilización adecuada del tiempo libre;

k) El desarrollo de valores civiles, éticos y morales, de organización social y de convivencia humana;

l) La formación artística mediante la expresión corporal, la representación, la música, la plástica y la literatura;

m) La adquisición de elementos de conversación y de lectura al menos en una lengua extranjera;

n) La iniciación en el conocimiento de la Constitución Política, y

[4] Reglamento parcial. Ley 115 de 1994 en los aspectos pedagógicos y organizativos

ñ) La adquisición de habilidades para desempeñarse con autonomía en la sociedad.

LEY 115 – decreto 1860 del 3 de agosto de 1994

ARTÍCULO 35: Desarrollo de asignaturas: Las asignaturas tendrán el contenido, la intensidad horaria y la duración que determine el PEI, entendiendo los lineamientos del presente decreto y los que para su efecto expida el ministerio de educación nacional.
En el desarrollo de un asignatura se deben aplicar estrategias y métodos pedagógicos activos y vivenciales que incluyan la exposición, la observación, la experimentación, la práctica, el laboratorio, el taller de trabajo, la informática educativa, el estudio personal y los demás elementos que contribuyan a un mejor desarrollo cognitivo y a una mayor formación de la capacidad crítica, reflexiva y analítica del educando.

ARTÍCULO 38: PLAN DE ESTUDIOS: NUMERAL 3: El plan de estudios debe relacionar las diferentes áreas con las asignaturas y con los proyectos pedagógicos y contener al menos los siguientes aspectos:
3. La metodología aplicable a cada una de las asignaturas y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas, audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica.

ARTÍCULO 44: MATERIALES DIDÁCTICOS PRODUCIDOS POR LOS DOCENTES:
Los docentes podrán elaborar materiales didácticos para el uso de los estudiantes con el fin de orientar su proceso formativo, en los que pueden estar incluidos instructivos sobre el uso de los textos del bibliobanco, lecturas, bibliografías, ejercicios, simulaciones, pautas de experimentación y demás ayudas. Los establecimientos educativos proporcionarán los medios necesarios para la producción y reproducción de estos medios materiales.

LEY 715 DE DICIEMBRE 21 DEL 2001[5]

CAPITULO 1 COMPETENCIAS DE LA NACIÓN.
ARTÍCULO 5: Numeral 5.6: Definir, diseñar y establecer instrumentos y mecanismos para la calidad de la educación.

[5] Ley 715 diciembre 21 de 2001. Normas orgánicas en materias de recursos y competencias

2.4 MARCO TEÓRICO

2.4.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

LAS ACTIVIDADES LÚDICAS EN EL AULA DE MATEMÁTICA

En este apartado se describen a algunas ideas previas que sitúan las imágenes mentales dentro del contexto de las representaciones mentales. Introduciremos y reflexionaremos brevemente en el tema, desde el ámbito de la Psicología Cognitiva ya que fueron los psicólogos, a finales del siglo XIX, los primeros en efectuar investigaciones sistemáticas en las imágenes mentales.

Nociones preliminares

La experiencia intuitiva nos revela que las imágenes mentales aparecen cuando pensamos. Preguntarnos por el significado de algo, ya sea una experiencia, una teoría, una palabra o un problema matemático, equivale a profundizar y reflexionar en la comprensión que de ello tenemos. Cada individuo retiene en su memoria un cúmulo de contenidos semánticos (significado de las palabras, conceptos sobre el mundo en el que vive, conocimientos especializados, etc.), habilidades y destrezas (conducir, montar en bicicleta, resolver problemas, etc.).

Esta ingente cantidad de información permanece normalmente en estado latente hasta que se activa y recupera desde la memoria operativa. Una parte de la información procesada y acumulada se representa, probablemente, en un formato espacial de imágenes mentales. Estas son, junto a las palabras, las formas que toman las intuiciones y las conceptualizaciones durante el proceso de construcción del pensamiento. Pensar sobre ideas matemáticas nos lleva a representarlas internamente, y esta representación tiene que ser tal que permita a la mente operar sobre y con ellas (Hiebert y Carpenter, 1992)[6].
De esta manera, no es extraño que en las investigaciones actuales sobre la resolución de problemas o sobre la formación de los conceptos matemáticos

[6] Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding.

aparezcan con frecuencia expresiones en las que interviene la palabra “representación”, que tiene diferentes acepciones. Por ello, y dado que este trabajo está relacionado con el término, se hace necesario clarificar lo mejor que podamos el tipo de estructuras conceptuales que tenemos en la mente cuando decimos “representación”; pues la utilización de los vocablos sin reflexión puede crear confusiones conceptuales.

Las representaciones mentales. Terminología y epistemología

En el idioma castellano el término “representar” tiene diferentes significados:

a) Evocar, hacer presente a alguien o algo en la imaginación;
b) hacer un determinado papel en una obra de teatro o cinematográfica;
c) ser imagen, imitación o símbolo de una cosa;
d) actuar en nombre o por cuenta de otro, hacer las veces de otra persona o colectividad (Diccionario de la Real Academia Española, 1992; Gran Enciclopedia Larousse, 1991).

Tanto en el idioma castellano como en inglés es el contexto en el que se utiliza la palabra “representar” el que determina la acepción de la misma en cada momento. A diferencia del castellano, en el que una sola palabra “representar” se utiliza con distintas acepciones, el idioma alemán mantiene diferenciados los significados y utiliza diferentes palabras, que analizaremos con la finalidad de separar, tanto como nos sea posible, las distintas estructuras conceptuales que se “esconden” tras el término “representar”.

Ernst Von Glaserlfeld, en su trabajo “Preliminaries to Any Theory of Representation” (Janvier, 1987)[7], describe, si bien expresa que puede haber más, cuatro palabras que en el idioma alemán delimitan sin confusión el significado de representar.
Son: Darstellen, Vorstellen, Vertreten y Bedeuten. Los ejemplos, que nosotros hemos tomado en castellano, utilizados por Von Glaserlfeld en su exposición son:
El dibujo representa a una azucena (Darstellen)
Juana - mentalmente - se representa algo a sí misma (Vorstellen)
El señor Bush representa al presidente (Vertreten)
“x” representa una cantidad desconocida (Bedeuten).
La lectura e interpretación de las ideas de Von Glaserlfeld nos llevan a lo siguiente:
A) Darstellen podría corresponder en castellano a la representación como figuración o exposición de un objeto real o de un concepto, siendo siempre el resultado de una actividad humana.

[7] Janvier, C. (Ed) (1987). Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

B) Vorstellen podría corresponder en castellano a la representación en la que una imagen mental sustituye a algo real o imaginario.
C) Vertreten que se corresponde en castellano a la acción de sustituir a alguien o hacer sus veces, desempeñar su función (el vicepresidente de la nación representa al presidente, el portavoz del gobierno representa la opinión del mismo, etc.).
D) Bedeuten que se corresponde en castellano a ser símbolo de un concepto o una idea.
Pensamos que son tres vocablos los que nos interesan en la investigación matemática: Vorstellen, Darstellen y Bedeuten.
Siguiendo las ideas de Von Glaserlfeld una diferencia básica entre las dos primeras estaría en que, mientras que en la primera (vorstellen) la representación

No es una réplica exacta de un original externo, sino que tiene que ser construida e interiorizada mentalmente, en la segunda (darstellen) se comienza con un objeto que tiene que ser representado externamente.
Vorstellung sustantivo de vorstellen, es para Von Glaserfeld sinónimo de “representación mental”[8] y se entiende tanto como la actividad mental (el proceso) como el resultado o producto final de esa actividad. En ambos casos, se refiere a una creación primaria, a un acto de construcción interna en el que no hay un objeto a priori que sirva como original a ser replicado o re-presentado, ya que ningún organismo cognitivo puede tener acceso completo a las cosas en sí mismas. Nuestra capacidad representativa se ve limitada desde el momento de la percepción del objeto que no se percibe en su totalidad, en su exacto detalle, a la vez que la persona añade o complementa esta percepción con sus propios criterios, mecanismos o procesos cognitivos. Ello llevaría directamente a la concepción individual de las ideas matemáticas. Para acentuar su carácter de construcción interna Von Glaserlfeld se refiere a ellas con el nombre de conceptions.
Bedeuten, la tercera palabra que el idioma alemán utiliza para referirse al término “representar”, se usa cuando se quiere expresar acciones como “significar”, “querer decir”, “ser símbolo” y “denotar”; también se utiliza este término cuando se pregunta por ejemplo por el significado de una palabra.
Ante un concepto matemático empieza inicialmente a jugar la imaginación, creándose una primera aproximación interna del mismo; piénsese, por ejemplo, en el concepto de límite de una función f(x) cuando x®a.
La idea matemática de aproximación es una construcción interna e individual (vorstellen) diferente para cada persona; este sería el primer paso para la construcción del concepto.
Con la simbología correspondiente " (cuantificador universal), e (número real positivo pequeño), R (conjunto de todos los números reales), f (función considerada),... enunciamos formalmente y con rigor la idea matemática. Cada

[8] Von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation. In Janvier, C. (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

uno de estos símbolos, representa una cosa; en este caso, un objeto matemático (bedeuten).
Un apoyo externo, como un boceto, un diagrama o una forma icónica (darstellen) harán más tangible, comunicable y manejable la idea inicial.
El boceto o el diagrama, que en efecto encierra una idea (*darstellen*), complementarán y reforzarán la imagen o representación mental (*vorstellen)* del concepto de límite.
La diferencia entre el diagrama (*darstellen*) y la representación interna (*vorstellen*), por simplificar la situación, radica en que el primero contiene ciertas características o se perciben en él algunas propiedades reales del concepto, mientras que la segunda se fundamenta en la actividad mental del individuo en el que se inicia la idea.

Representaciones en un contexto matemático

En el ámbito educativo, y desde las Matemáticas, una idea básica es entender el modo, o los modos, en que las personas entienden y transmiten los conceptos y las ideas matemáticas. El "cómo" las personas los entienden, la manera en que les dan significados es una cuestión de la comprensión humana. Se asume que el conocimiento se representa internamente, y es a través de estas representaciones y en las conexiones y relaciones que se establecen entre ellas donde las personas van construyendo sus ideas.
Las investigaciones sobre la visualización en Matemáticas, y el papel de las imágenes mentales, han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos.
Los objetos de las Matemáticas se presentan bajo un aparente dilema con dos estatus diferente: el operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Sin embargo, mientras el estatus conceptual del objeto matemático se presenta organizado en diferentes redes conceptuales y es plenamente aceptado, los Sistemas de Representación Semióticos (SRS) que caracterizan el estatus operacional (representaciones numéricas, códigos, gráficas, diagramas, etc.) en los que los objetos son expresados y comunicados, han recibido menor atención por parte de los matemáticos y el sistema educativo. No obstante, las Matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación.
Con la finalidad de comprender los mecanismos que ocurren dentro del proceso de construcción y comprensión del conocimiento, investigadores como Janvier (1987); Kaput (1987, 1989a, 1991); Duval (1993, 1995); Palarea y Socas (1994a, 1994b) y Palarea (1999), entre otros, han realizado estudios experimentales y teóricos en los que analizan el papel de las representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas.

Janvier (1987) proporciona algunos resultados que muestran la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar “un proceso de traducción”[9] entre representaciones, concibiéndolo como una etapa importante en la construcción del concepto. Tomando como ejemplo el concepto de función, usa una figura en forma de estrella de cinco puntas, en cada una de las cuales exhibe una representación de la función (descripción verbal, objeto, tabla, gráfica y fórmula).

Kaput (1987), por su parte, desarrolla un acercamiento teórico para explicar el uso de símbolos matemáticos y señala que “cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Hay, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirá: 1) el mundo representado; 2) el mundo representante; 3) qué aspectos del mundo representado han sido representados; 4) qué aspectos del mundo representante hacen la representación y 5) la correspondencia entre los dos mundos”[10]. Kaput (1989 a) afirma que los sistemas de representación (o sistemas simbólicos, artefactos lingüísticos o culturales, materialmente realizables), cuando se aprenden, son utilizados por los individuos para estructurar la creación y elaboración de sus representaciones mentales -medio por el cual un individuo organiza y maneja el flujo de su experiencia-. Ha intentado establecer relaciones entre una “notación A (escrita, dibujada, etc.) y el referente B”[11] donde cada uno (y quizá su correspondencia) es expresable en forma material, pero donde la relación referencial existe sólo en términos de operaciones mentales de los miembros de un dominio consensual particular. Es claro que Kaput subraya la presencia de operaciones mentales y que las transformaciones (acciones) de una representación a otra juegan un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos.

Duval (1993, 1995) realiza un trabajo teórico, coherente y unificador, y caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación siempre y cuando permita tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis (o sea, aprehensión o producción de una representación semiótica que se puede generar con una sola representación): 1) La presencia de una representación identificable; 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada y 3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993) mantiene que: “toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa” y, por tanto: “la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva”[12].

---

[9] Janvier, C. (Ed) (1987). Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
[10] Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in Mathematics. In Janvier, C. (Ed.):
[11] Kaput, J. (1989a). Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. In S.
[12] Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de* la pensée.

Palarea y Socas (1994a, 1994b), en sus estudios experimentales sobre el lenguaje algebraico, constatan la necesidad de ampliar las fuentes de significados para éste a SRS de procedencia visual (registros geométricos), y proponen una interacción entre las diferentes representaciones semióticas que se articulan en estrategias de enseñanza.
Palarea (1999) realiza una aplicación del planteamiento teórico anterior en su investigación relacionada con expresiones algebraicas y ecuaciones.

En los párrafos anteriores, se ha señalado que distintos investigadores, ya sea tanto en el ámbito teórico como desde la experimentación, han resaltado la importancia de las representaciones para la formación adecuada de los conceptos matemáticos.
Sintetizando, y desde esta reflexión en el tema, se diferenciarán las representaciones "internas" (formas que toman las estructuras cognitivas de una persona) y las "externas" (utilizadas para comunicar las ideas).
Las internas las construye la mente de la persona, pertenecen al campo de lo cognitivo y a través de ellas el individuo da sentido a los fenómenos explicando los conceptos e ideas matemáticos. Son lo que Von Glaserlfeld (1987) llama "concepciones"[13]; son modelos cognitivos o mentales con los que se asimila y se estructura esta experiencia. En este estudio, la "imagen mental" es una representación mental interna.

Por su parte, las representaciones externas aparecen en escena cuando queremos comunicar las ideas matemáticas que hemos construido o estamos construyendo. La comunicación requiere que la representación de las ideas sea externa; aparecen entonces el lenguaje hablado, el escrito, los dibujos, los modelos físicos, etc., objetos que tienen como objetivo representar externamente una idea, concepto o problema matemático (Hiebert y Carpenter, 1992). Las representaciones externas serían todos aquellos "objetos" de conocimiento (tablas, diagramas, símbolos, dibujos, gráficos en el ordenador, etc.) que actúan como estímulos en el aprendizaje, y cuya presencia puede representar una idea o un concepto matemáticos. Podemos considerarlas como "concretizaciones" de ideas o conceptos matemáticos; por ejemplo con relación al concepto de función, el grafo, la tabla de valores y la ecuación (ya sea en forma paramétrica, continua o vectorial) son diferentes representaciones que usamos para comunicar dicho concepto. Las representaciones externas serían "icónicas" (término utilizado por Von Glaserlfeld) si la representación se parece a lo que representa, esto es, al original. Valga como ejemplo el dibujo que hacemos de la construcción mental que llamamos triángulo.
Las representaciones mentales y las representaciones externas están fuertemente relacionadas en Matemáticas, de manera que muchas veces, a menos que reflexionemos y profundicemos en ello, nos movemos de manera inconsciente de

[13] Von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation.

unas a otras. Por ejemplo, en el acto de resolver un problema matemático se hace uso de un diagrama.

Esta representación externa permite a la persona que resuelve el problema tener más espacio mental para construir nuevas imágenes y relaciones (Wheatley, 1997). Se crea un proceso recursivo de la siguiente manera:

1. Frente a un problema, se construye una imagen (representación interna).
2. Se hace un dibujo (representación externa).
3. Se vuelve a razonar, tomando base en el dibujo y se construye una imagen más sofisticada.
4. Se construye un dibujo más elaborado.
5. Se repite el proceso.

Es esta relación entre las representaciones externas e internas la que nos permitirá analizar e interpretar nuestros datos. Suponemos que cuando un estudiante utiliza una representación externa para comunicar una de sus ideas, ésta revela algo de cómo el estudiante está construyendo esa idea en su mente. Esto permitirá explicar sus procesos de pensamiento y el modo en que da sentido a los conceptos matemáticos.

Teniendo en cuenta que las representaciones mentales no son observables directamente, debido a que ocurren en la mente de cada individuo, las discusiones acerca de cómo las ideas se representan internamente en la mente de las personas están basadas en alto grado de inferencias.

Imágenes mentales

Algunas de las cuestiones que han preocupado a los psicólogos cognitivos han sido:

¿Las imágenes son una forma de representación mental con propiedades funcionales? ¿específicas?, ¿Son construcciones analógicas semejantes a lo que representan?

Se entiende que hay dos concepciones diferentes sobre las imágenes mentales.

Una de ellas asume que estas imágenes constituyen un formato casi-perceptivo que preserva las propiedades espaciales de la información. Los partidarios de esta idea admiten la existencia de un formato más abstracto, quizá proposicional, junto al formado por las imágenes mentales. La segunda concepción parte de la idea de que el formato mental es proposicional, las imágenes mentales no constituyen un verdadero constructor científico pues se pueden tratar como simples proposiciones (De Vega, 1984)[14]. Al ser nuestro trabajo de corte didáctico, y estar situado en el ámbito de la Educación Matemática, abordaremos las imágenes desde su funcionalidad, es decir, estudiaremos su uso en la práctica; concretamente en la actividad matemática, en el razonamiento matemático, en la resolución de problemas y en la creatividad matemática.

[14] De Vega, M. (1984). Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza.

Imágenes desde un contexto histórico

Algunos estudios pioneros

Las imágenes mentales constituyen un fenómeno que apareció tempranamente en la historia y su estudio ha sido realizado por diferentes personas. Pensadores, filósofos, poetas, oradores, frailes, psicólogos y educadores matemáticos, han sido algunos de los que se han dedicado a su estudio e investigación.

En los primeros escritos griegos ya aparecen referencias a las imágenes en el estudio de fenómenos como la memoria, en las situaciones donde se quiere hacer uso del recuerdo, o en fenómenos donde se trata de encontrar significado y sentido a los problemas que ocurren a nuestro alrededor. Históricamente, Aristóteles fue uno de los primeros pensadores para el que las imágenes mentales realizaban un papel importante en el pensamiento; sostuvo que “el pensamiento es imposible sin una imagen” (citado en Kosslyn, 1983)[15]. Otros pensadores, algunos citados en el siguiente apartado, también vieron la importancia que tienen las imágenes en el fomento de la memoria.

Imágenes y memoria

Oradores griegos y romanos y, más tarde, frailes y sacerdotes durante la Edad Media, emplearon las imágenes como un medio para recordar sus sermones y mítines (citado en Sommer, 1978)[16].

La primera evidencia histórica se sitúa hace unos 2500 años, época en que Simónides elaboró un procedimiento para que los oradores recordasen los discursos.

Consistía en construir una imagen de un trayecto familiar y generar imágenes de las cosas que se querían recordar, situándolas en determinados lugares del “trayecto”. Para recuperar la información volverían a recorrer mentalmente el trayecto “viendo” los objetos que pusieron en cada lugar (Paivio, 1971)[17].

Imágenes desde la Psicología

Los psicólogos fueron los primeros en emprender investigaciones sistemáticas en imágenes mentales a finales del siglo XIX. Éstas se desarrollaron de modo bastante tardío, ya que existía un fuerte prejuicio teórico sobre el escaso interés de las imágenes (De Vega, 1984)[18].

[15] Kosslyn, S. M. (1983). Ghosts in the Mind’s Machine. New York: W. W. Norton Co.
[16] Sommer, R. (1978). The Mind's eye: imagery in everyday life.
[17] Paivio, A. (1971). Imagery and verbal processes. New York: Holt, Rinehart and Winston.
[18] De Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid: Alianza.

Uno de los primeros estudios en imágenes mentales fue hecho en 1883 por Sir Francis Galton, antropólogo y explorador inglés, quien estaba interesado en investigar las diferencias individuales que mostraban las personas en su inteligencia con el fin de un programa de eugenesia para mejorar la raza. Utilizando como instrumento de investigación un sencillo cuestionario, pedía a un grupo de universitarios y científicos que formasen una imagen de su mesa de desayuno y la describiesen. Galton detectó que la mayoría de los encuestados fracasaba en la tarea. En estudios posteriores, incluyó a personas de otras profesiones y de diferentes niveles sociales. Encontró que muchas de esas personas también confesaron ausencia de imágenes y otras dijeron haber "visto" imágenes muy vivas. Galton analizó sus datos eligiendo 100 respuestas, al azar, de entre los cuestionarios realizados, y los ordenó teniendo en cuenta la fuerza y claridad de las imágenes reportadas. Algunas personas tenían una gran tendencia a pensar en imágenes, empleando todo tipo de "dibujos" en la mente; sin embargo, para otras no era así, pues manifestaron que pensaban principalmente con las palabras (Brown, 1993; Skemp, 1980)[19].

Las personas muestran diferencias en cuanto a su habilidad para usar imágenes en su pensamiento. Para algunas, las imágenes tienen un papel moderado o regular, pueden valerse de ellas pero no suele ser una característica importante de su personalidad o estilo cognitivo. Otras suelen decir que no usan imágenes y que piensan y razonan utilizando palabras. Y, por último, hay personas cuya facultad para usar imágenes está bien desarrollada y pueden abordar los problemas a través de la construcción de imágenes, ya que son ricas en detalles, textura, movimiento, colores. Se suele decir que son buenos visualizadores.

A lo largo de la Historia el interés de los investigadores en las representaciones mentales de las ideas, como materia de investigación, no ha sido el mismo. Sin ir más lejos, a lo largo del siglo XX ha habido importantes discrepancias. Las primeras décadas del siglo que vivimos estuvieron dominadas por el paradigma conductual representado principalmente por Thorndike, Pavlov, Watson y Skinner[20], quienes postulaban análisis asociacionistas de la conducta según el modelo proceso-producto; básicamente, en este modelo, se establece una conducta deseada en términos observables y medibles. Estos autores negaban o minimizaban el valor funcional de los procesos mentales; las representaciones mentales fueron excluidas del estudio y de la investigación debido a que no podían ser observables y cuantificables directamente.

Ante la inoperancia del paradigma conductual, en la década de los setenta numerosos psicólogos y didactas se dedicaron a la investigación y búsqueda de un paradigma alternativo centrado en los procesos de pensamiento. Bruner, Piaget, Ausubel y Vygotsky, fueron algunos de los que creyeron que es la mente la que dirige la persona y no los estímulos externos. La inteligencia, la creatividad, el pensamiento reflexivo y crítico son temas constantes en este paradigma. Así, los

[19] Brown, D. L. (1993). *An investigation of imagery and mathematical understanding in*
elementary school children.; Skemp, R. (1980). Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Ediciones Morata.

trabajos en Ciencia Cognitiva, a partir de los años setenta, restablecieron el estudio de las representaciones mentales como materia de investigación.
En síntesis, las investigaciones en imágenes mentales continuaron durante los primeros años de la Psicología Experimental, pero disminuyeron durante el apogeo del Conductismo. Ya hemos dicho que psicólogos como Pavlov, Watson y Skinner desconfiaron de todo lo que no podía ser observado y medible directamente. Imágenes, junto a sueños y emociones, fueron desterradas de gran parte de la Psicología académica durante muchos años, sobre todo en USA. En su detrimento, surgió un auge en procesos verbales, los cuales dominaron las investigaciones teóricas y empíricas en fenómenos como aprendizaje, memoria y lenguaje.
Sin embargo, durante la década de los setenta, el estudio de las imágenes mentales empezó a resurgir. Merecen destacarse, entre otros, los trabajos de Allan Paivio, Jean Piaget, Barber Inhelder y Stephen Michael Kosslyn. Recogemos a continuación algunas de sus ideas.
Paivio (1971)[21] proporcionó informes sobre imágenes mentales que tuvieron una gran influencia en los años posteriores. Su hipótesis dual ("dual coding theory*"*) es el marco de referencia conceptual que se ha estado empleando en las últimas décadas para abordar el estudio de las imágenes. Esta hipótesis sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, sistemas estrechamente conectados y que actúan conjuntamente, pero con propiedades estructurales y funcionales diferentes. De Vega (1984)[22] hace una descripción detallada de los postulados básicos de la hipótesis dual.
Gracias a los trabajos de Paivio, los procesos mentales que utilizan las imágenes han adquirido la misma importancia que los procesos verbales o que utilizan palabras. Paivio dio a los estudios sobre imágenes su conocida reputación en el mundo de la investigación.
Jean Piaget ha sido una de los investigadores más importantes de este siglo. Su obra y sus investigaciones son famosas y conocidas en el mundo entero. Junto a sus colaboradores de la escuela de Ginebra desarrolló la Psicología Genética, que puede considerarse un paradigma cognitivo por derecho propio. Ésta tiene como meta prioritaria averiguar los mecanismos que determinan el desarrollo cognitivo desde el nacimiento hasta la adolescencia.
Con relación a las imágenes mentales, Piaget, junto a su colaboradora Barber Inhelder, hizo algunas importantes aportaciones.
En su libro Mental Imagery and the Child*,* Piaget e Inhelder (1971)[23], diferenciaron las imágenes en dos categorías que llamaron reproductive y anticipatory**.** Las primeras representan mentalmente sucesos y objetos ya conocidos por las personas, mientras que las segundas suceden cuando una persona representa objetos o sucesos que no ha percibido previamente.

[21] Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
[22] De Vega, M. (1984). Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza.
[23] Piaget J.; Inhelder B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.

La clasificación de Piaget e Inhelder la tendremos in mente cuando interpretemos el trabajo de nuestros estudiantes.
Por otro lado, Piaget e Inhelder sostienen que los niños no son capaces de formar imágenes mentales hasta que pasan la etapa en que los objetos pueden ser representados a través de acciones sobre los mismos. Mantienen que la naturaleza de las imágenes cambia con la edad; así, en la "etapa de las operaciones concretas" pueden formar imágenes anticipatorias, algo que no ocurre en la etapa "preoperatoria", donde sólo pueden construir imágenes reproductives, además de que las imágenes no derivan de la percepción (el conocimiento de los objetos surge del contacto directo con ellos) sino de una "imitación internalizada". Para formarnos una idea de lo que esto significa y de cómo los niños construyen las imágenes, utilizamos la descripción que hacen Piaget e Inhelder de la actuación de los niños en la siguiente tarea (citada en Holloway, 1969)[24]: la tarea consiste en reconocer formas por el sentido del tacto con ausencia de estímulo visual (percepción óptica) y nombrarlas, dibujarlas o señalarlas. Los problemas a los que se enfrenta el niño, en la realización de esta tarea, son: por una parte trasladar sus percepciones cinestésicas táctiles a visuales, y, por otra, la construcción de una imagen visual que incorpore la información táctil y los resultados de sus movimientos exploratorios. Resumimos, a continuación, algunos de los encuentros en las distintas etapas evolutivas:

ETAPA I (2-4 años) puede reconocer objetos familiares pero es incapaz de reconocer formas no familiares a causa de una exploración insuficiente. No puede dibujar las formas, ni siquiera las más simples, porque la actividad perceptual es la fuente de la imitación.

ETAPA II (4-7 años) la exploración es mas activa aunque todavía arbitraria. Es capaz de distinguir formas curvas de las que tienen ángulos y líneas rectas. Los dibujos ya no son garabatos, se parecen al modelo. No expresa tanto el modelo percibido de manera táctil, sino más bien la actividad táctil misma. Carece de una guía operacional, avanza y no vuelve para determinar un punto de referencia (análisis empírico no basado en razonamiento). La imagen que extrae de un objeto la construye desde sus propias acciones sobre el objeto.

ETAPA III (7-8 años) aparece la coordinación operacional. Una operación como un acto que puede volver a su punto de partida y que puede integrarse con otras acciones que también poseen este rasgo de reversibilidad. La exploración es dirigida por un método operacional que consiste en agrupar los elementos percibidos en términos de un plan general y partir desde un punto fijo de referencia hasta el cual el niño puede siempre volver. Cada forma percibida se asimila al esquema de acciones coordinadas necesarias para reconstruirla. Por eso el

[24] Holloway G. E. T. (1969). *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Buenos Aires: Paidos.

elemento pictórico se corresponde en forma tan estrecha con este proceso reconstructivo.
Resumiendo**:** en cada uno de los tres estadios descritos los niños son capaces de reconocer, y especialmente de representar, sólo aquellas formas que puedan reconstruir efectivamente a partir de sus propias acciones.

La abstracción de forma se logra sobre la base de la coordinación de las acciones del niño y no, o al menos no sólo, directamente a partir del objeto**.** La representación mental de una figura, "su imagen", se entiende como una imitación interna de acciones (imitación internalizada).
En consonancia con las ideas de Piaget, y desde una perspectiva constructivista, Wheatley y Cobb (1990)[25] mantienen que las personas dan significado y estructura a los modelos espaciales basándose en sus propias experiencias, estructuras conceptuales, intenciones y continua interacción social. Cada niño construye a través de sus acciones, físicas o perceptuales, conscientes o inconscientes, una imagen del modelo que puede más tarde re-presentar y transformar. No es una captura "visual" de algo exterior que guarda "tal cual es" en su cabeza.

Piaget e Inhelder (1971)[26] diferencian cuatro posibles procedimientos en la investigación que nos hagan pensar en la utilización de imágenes por una persona: una descripción verbal de que se está usando una imagen; un dibujo hecho; la elección de un dibujo que se adapte mejor a la imagen mental, entre varios mostrados por el investigador; y una reproducción utilizando gestos. Reconocen la dificultad de los métodos verbales en los niños pequeños.
En esta investigación se asumirá la posición de Presmeg (1997a)[27], quien acepta la idea de Piaget de que las imágenes están implicadas cuando las personas dibujan un diagrama o una figura.
Kosslyn (citado en Clements, 1981)[28] señala que Piaget e Inhelder no formularon claramente su teoría sobre las imágenes mentales, es decir, que no especificaron el formato o contenido de la imagen, no explicaron de una manera precisa lo que entendían por "imitaciones interiorizadas" ni de qué manera operan estas imitaciones interiorizadas.
De Vega (1984)[29] explica que Kosslyn se basó en los resultados de una gran cantidad de investigaciones, muchas de las cuales realizadas por él y sus colaboradores, para elaborar un protomodelo que sirva de base a los modelos de simulación de las imágenes mentales utilizando el ordenador. Básicamente el protomodelo se apoya en las siguientes ideas:

- las imágenes no son epifenómenos o eventos marginales, sino plenos de funcionalidad, como demuestran muchos experimentos cronométricos;

[25] Wheatley, G.H.; Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions. In L. P. Steffe
[26] Piaget J.; Inhelder B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.
[27] Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres
[28] Clements, M. A. (1981). Visual imagery and school Mathematics. Parte I. *For the* learning of Mathematics, 2, 2, 2-9.
[29] De Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid: Alianza.

- las imágenes no se recuperan globalmente o "in toto", sino que se generan poco a poco, añadiendo detalles; prueba de ello es que se tarda más en elaborar una imagen grande (más detalles) que una pequeña;
- se construyen en unidades gestálticas significativas o coherentes, no en trozos sin significado;
- las imágenes se construyen no sólo a partir de información perceptiva, sino también semántica o descriptiva; prueba de ello es que podemos elaborar combinaciones novedosas de imágenes a partir de descripciones verbales.

Para concluir se dirá que las investigaciones expuestas previamente muestran cómo una parte de la información mental procesada y almacenada se ajusta seguramente a un formato espacial de imágenes mentales.

Partiendo de que las imágenes existen, se analizará en el siguiente apartado la relación de las imágenes mentales con las Matemáticas.

IMÁGENES, VISUALIZACIÓN Y MATEMÁTICAS

En este apartado se definirán los constructos: imagen mental y visualización, desde el ámbito de la educación Matemática. Además se analizará, por una parte, la interrelación entre las imágenes y la creatividad en el pensamiento y la actividad matemática, y por otra, se estudiará la función que desempeña la imagen y los procesos de visualización en la resolución de problemas matemáticos.

Definiendo las imágenes mentales

La definición de "imagen mental" es un asunto polémico. Investigadores y educadores definen la imagen mental de formas diferentes, incluso muchos utilizan el término en sus estudios sin hacer explícita una definición.

La opinión más elemental es que las imágenes son réplicas fieles de los objetos físicos que reemplazan (Arnheim, 1986)[30]. En un nivel más académico, se puede decir que las imágenes mentales constituyen un formato representacional de nuestro sistema cognitivo (formato que es analógico, en el sentido, por ejemplo, de que la imagen mental de un objeto se parece al mismo en ciertos parámetros como la forma, el tamaño, la orientación).

Las imágenes pueden ocurrir en una o varias de entre estas seis modalidades diferentes: visual, auditiva, gustativa, táctil, olfativa y cinéstesica. Aunque todas las imágenes mentales son "internas" las cinco primeras modalidades las podemos conectar con los sentidos externos (vista, oído, olfato, gusto y tacto) mientras que la modalidad cinestésica hace referencia a una síntesis de sensaciones

---

[30] Arnheim, R. (1986). *El pensamiento visual.* Barcelona: Paidós.

simultáneas, consecuencia de relaciones entre las otras modalidades. Ilustremos con un ejemplo las distintas modalidades. Imaginemos un paseo en la playa; este paseo puede haber sido realizado o no, es decir, podemos construir ese paseo mentalmente o recordar un paseo realizado. Imaginando el paseo, podemos:

- Sentir la arena en nuestros pies, el frescor del aire en la cara (modalidad táctil).
- Oír el sonido del mar, (modalidad auditiva).
- Oler una violeta, (modalidad olfativa).
- Ver la playa, las montañas, el paisaje, (modalidad visual).
- Saborear el pescado de un determinado bar, (modalidad gustativa).
- El sabor y el olor de la imagen visual de una comida sabrosa que produce un movimiento muscular interno o respuesta vegetativa, (modalidad cinestésica).

Las modalidades que se usan en Matemáticas son la auditiva, la cinestésica y, básicamente, la visual (Presmeg, 1997a)[31].

Las imágenes visuales, imágenes mentales que tienen una fuerte componente visual, son las que se consideran de manera fundamental en este trabajo.

En los párrafos sucesivos se recogerá la contribución de algunos investigadores que tratan cuestiones relacionados con la definición de “imagen”.

Los primeros estudios conceptualizaron las imágenes como “dibujos en la mente”

Según apunta Presmeg (1997a), Clements incluye, en su categoría de fotografías mentales, las teorías de investigadores como Kosslyn y Paivio, para quienes la formulación del término “imagen” se aparta un paso de la idea tradicional. Esta idea se remonta a Aristóteles y aparece en escritos de filósofos como Aquino, Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke, Berkeley y Hume, entre otros.

Kosslyn (1983)[32], por su parte, señala que la analogía “dibujos en la mente” para referirse a la imagen mental resulta inadecuada para explicar la naturaleza y las propiedades de las imágenes. Observando y analizando las respuestas que diferentes personas daban a determinadas preguntas, se dio cuenta de que las personas pueden hacer con las imágenes procesos dinámicos (como rotarlas, desplazarlas, transformarlas), los cuales serían difíciles de hacer si las imágenes fuesen igual que fotografías o dibujos en la mente. Kosslyn (1990b)[33] define una imagen visual como una representación en la mente que (en ausencia de la apropiada estimulación sensorial a través de la vista) da la experiencia de "ver". Recopiló una gran cantidad de información, la mayoría encontrada en investigaciones que realizaron él y sus colaboradores, y concluyó una serie de premisas básicas, entre las que figura la de que las imágenes se construyen no sólo a partir de información perceptiva, sino también semántica y descriptiva, como lo demuestra el hecho de que podamos construir imágenes a partir de descripciones verbales.

La metáfora que concibe las imágenes como “dibujos en la mente” no es aceptada por los investigadores actuales en el ámbito de la Educación Matemática.

---

[31] Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres

[32] Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind’s Machine.* New York: W. W. Norton Co.

[33] Kosslyn, S. M. (1990b). Mental Imagery. In D. N. Osherson; S. M. Kosslyn; J. M.

Presmeg (1986, 1997a)[34] considera la imagen visual como un constructo mental que describe información visual o espacial.
Wheatley (1997) se refiere a la imagen como una construcción mental. Para él, las imágenes son construidas a partir del "flujo" de la actividad experimental de una persona y pueden ser re-presentadas mentalmente sin la presencia de un estímulo sensorial. Podemos hacer uso de ellas desde la memoria, y transformarlas.
Entendemos que Wheatley se refiere al proceso, a la calidad, al "fluir" de la experiencia más que a la cantidad. El papel de la experiencia física, de la acción, como un elemento que favorece la construcción de las imágenes ha sido una idea desarrollada, con anterioridad, en los escritos de Piaget e Inhelder (1971)[35].
A partir de estudios cronométricos desarrollados por distintos psicólogos cognitivos, se concluye que los individuos elaboran imágenes mentales y que son capaces de someterlas a una transformación mental, estructural y funcionalmente análoga a la rotación física de un objeto, carácter ausente en la percepción visual. De Vega (1984: 231)[36] escribe:
Resulta extraordinario este carácter transformacional de las imágenes, totalmente ausente en la percepción visual. En ésta, los aspectos dinámicos de la información son propiedades objetivas del ambiente, es decir, eventos relativamente independientes del sistema perceptivo. Sin embargo, en la imagen mental, las transformaciones son generadas por el propio sistema cognitivo. Esto revela una importante cualidad funcional de las imágenes. Se trata de un sistema de "simulación" analógico de ciertos parámetros y relaciones observadas o potenciales de nuestro ambiente visual.

En este trabajo llamaré *"imagen mental"* a un constructo que la mente crea y que constituye un formato representacional de nuestro sistema cognitivo. Puede, una vez construida, volver a ser re-presentada en la "pantalla mental" y también ser transformada.
La naturaleza de la imagen depende de construcciones mentales previas y de los propósitos de la persona que construye la imagen, además de la situación para la que se necesita la construcción.

Sobre la visualización

En el ámbito de la Educación Matemática, Bishop (1989)[37] establece una diferenciación a tener en cuenta en el término "visualización" y es su consideración de "sustantivo" o "verbo". El primero dirige la atención hacia el producto, el objeto,

[34] Presmeg, N. C. (1986a). Visualization in high school Mathematics. *For the learning of Mathematics,* 6, 3, 42-46.; Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres
[35] Piaget J.; Inhelder B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.
[36] De Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid: Alianza.

[37] Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education.

el “qué” de la visualización, las imágenes visuales. El segundo nos conduce al proceso, a la actividad, a la habilidad, al “cómo” visualizar.
En una investigación anterior, Bishop (1983)[38] había propuesto considerar dos habilidades diferentes:
1.- La habilidad para interpretar información figurativa, IFI (*interpretation of figural information*). Esta habilidad, Bishop (1983: 184)[39] la define como:
The ability involves understanding the visual representations and spatial vocabulary used in geometric work, graphs, charts, and diagrams of all types. Mathematics abounds with such forms and IFI concerns the reading, understanding, and interpretation of such information. It is an ability of content and of context, and relates particularly to the form of the stimulus material. Involucra comprender las representaciones visuales y el vocabulario espacial que se usa en el trabajo geométrico, grafos, tablas y diagramas de todo tipo. En Matemáticas abundan esas formas e IFI tiene que ver con la lectura, comprensión e interpretación de ese tipo de información. Es una habilidad de contenido y de contexto y está particularmente relacionada con la forma del estímulo material.
2.- La habilidad para el procesamiento visual VP (*visual processing*) que para Bishop (1983: 184) tiene que ver con:
Visualization and the translation of abstract relationships and no figural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented. La importancia de la habilidad VP está en que, a través de ella, Bishop enfatiza los procesos realizados independientemente de la forma del estímulo presentado. En este sentido, llama la atención sobre el hecho de que si se quiere examinar o estudiar la visualización en Matemáticas, se deberían usar pruebas que incluyan tanto elementos figurativos como no. Pienso que tener en cuenta lo anterior es importante en estudios experimentales, como lo es el presente, ya que creo que la visualización puede darse no solamente en Geometría sino en Álgebra o Aritmética.
Bishop (1983) relaciona la dicotomía VP e IFI con dos tipos de habilidades espaciales puestas de manifiesto a finales de los años 70 por McGee (1979)[40]: “visualización espacial” (Vz) y “relación y orientación espacial” (SR-O).

La “visualización espacial” involucra la habilidad para manipular, rotar, girar, o invertir mentalmente un objeto presentado pictóricamente *y* la “relación y orientación espacial” se corresponde con la comprensión de la colocación de los elementos dentro de un modelo visual y la aptitud para permanecer sin confundirse si la configuración presentada se cambia de orientación.

[38] Bishop, A. J. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.
[39] Bishop, A. J. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.
[40] McGee, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin,* 86, 5, 889-918.

Imágenes, visualización y matemáticas

En este trabajo de investigación se entenderá el uso de imágenes, en el desarrollo del pensamiento matemático, asociado básicamente a dos aspectos que consideramos importantes. El primero, hace mención a la interrelación visualización creatividad en el pensamiento y actividad matemática, y el segundo, a la función que desempeña la visualización como herramienta en la resolución de problemas y en la construcción de conceptos matemáticos. En los siguientes apartados se expondrá, con más detenimiento, estos dos aspectos.

Imágenes y creatividad

En este apartado se reflexionará sobre la conexión que se piensa existe entre las imágenes mentales y la creatividad.
En el proceso creativo es preciso distinguir entre creatividad primaria y secundaria. La primera, o fase de inspiración de la creación, debe separarse de la segunda, que es en la que se da el proceso de elaboración y de desarrollo de la misma.
Esta segunda fase, la creatividad secundaria, se basa en el trabajo arduo y en la dedicación de la persona que emplea el tiempo necesario para conocer los recursos, los medios y los materiales de una disciplina, hasta ser capaz de poder expresar lo que "ve" en sus momentos de inspiración. Las cualidades que acompañan a la creatividad secundaria (la que tiene por resultados productos reales como un nuevo teorema matemático, nuevos inventos, obras de arte, etc) se apoyan tanto en la creatividad como en otras dotes personales: capacidad de trabajo, paciencia, obstinación, etc.
Se piensa que, en algunos casos, las imágenes tienen una contribución relevante en la primera fase de inspiración, en ese primer destello del proceso creativo.
En los siguientes párrafos, cuando se mencione el término "creatividad", se referirá exclusivamente a la primera fase del proceso creativo. Sin embargo, soy muy consciente de la importancia de la segunda fase, la creatividad secundaria, sin la que muchas inspiraciones se malogran y no conducen a ningún resultado.
Además de favorecer el recuerdo, las imágenes mentales parecen desempeñar un papel importante en el pensamiento de las personas creativas. Desde distintos campos del conocimiento (música, ciencia, literatura) existen informes introspectivos de personas que coinciden en enfatizar el valor de las imágenes mentales en su proceso creativo. Las imágenes auditivas de Wolfgang Amadeus Mozart, por ejemplo, le permitieron "oír" una sinfonía completa que aún no había escrito (citado en Miller, 1984)[41].
Ello muestra el papel que la imagen mental tuvo en el pensamiento creativo de Mozart. El matemático y físico Douglas R. Hofstadter[42], hijo del premio Nobel de Física Robert Hofstadter, y autor del libro *Gödel, Escher y Bach: Un eterno y grácil*

[41] Miller, A. I. (1984). *Imagery in Scientific Thought Creating 20th*. Century Physics. Birkhauser, Boston.
[42] Hofstadter, D. R. (1995). *Gödel, Escher, Bach, un eterno y grácil bucle*.

bucle, con el que obtuvo el premio Pulitzer en 1980, expresa lo siguiente en la introducción al capítulo XX del mismo:
Mi interés es transmitir algunas de las imágenes que más me ayudaron a visualizar la forma en que la conciencia brota de la jungla de neuronas; transmitir un conjunto de intuiciones intangibles, en la esperanza de que sean válidas y puedan así contribuir, en alguna medida, a que otros lleguen a afinar la formulación de sus propias imágenes acerca de lo que hace funcionar a la mente.
Y en un ámbito distinto, reproducimos un fragmento de la entrevista en la que el cantautor canario Pedro Guerra, hablando sobre sus canciones, dice lo siguiente:
Soy joven y los títulos de mis canciones responden un poco a eso: intentar decir algo, y lo quiero hacer de una manera original... "Peter Pan" es una canción que habla sobre los hombres que van buscando la mujer ideal... yo utilizo imágenes infantiles para hablar de eso. Cuando tengo claro lo que quiero decir me cuesta escribirlo, pero enseguida lo visualizo... "(Diario de Avisos, 22/4/96).
En ambas citas, científico y cantante confiesan la construcción mental interna que hacen de una situación. Para crear una canción, el cantautor acude a una imagen mental de su niñez y visualiza la canción que luego va a escribir.
También los escritos de Albert Einstein proporcionan un buen documento ilustrativo sobre sus procesos de pensamiento al mismo tiempo que hacen referencia al papel de las imágenes en el descubrimiento científico.

Las imágenes mentales permitieron a Einstein realizar experimentos mentales que sirvieron como modelos de simulación de sus teorías físicas. El desarrollo matemático de la teoría de la relatividad lo realizó después del correspondiente proceso de comprensión visual. El famoso experimento que dio lugar a su teoría consistió en que Einstein se imaginaba a sí mismo viajando a la velocidad de la luz y observaba mentalmente el comportamiento de un rayo de luz.
Por otra parte, dentro del proceso creativo, es importante la discriminación. Una persona creativa distingue las buenas ideas de las malas y reconoce cuándo algo es prometedor, de manera que puede desarrollar y refinar las ideas que merecen la pena. Ha de estar especialmente dotada para reconocer el núcleo de la cuestión, ya sea la solución de un problema o la construcción de un argumento. En este mismo sentido Poincaré, argumentando sobre el proceso creativo, afirma:
La creación matemática no consiste en organizar nuevas combinaciones de entidades matemáticas ya conocidas. Esto es algo que cualquiera puede hacer, si bien tales combinaciones son innumerables y la mayor parte de ellas carece por completo de interés.
Crear consiste precisamente en no hacer combinaciones inútiles y sí, en cambio, aquellas que son útiles, que son muy pocas. La invención es discernimiento, elección.
La persona creativa ha de estar en grado de reconocer lo que merece la pena y lo que no sin actuar como lo hace un ordenador, que es muy bueno combinando al azar y produciendo mucho pero cuyas combinaciones están desprovistas de interés en una gran mayoría.

Se podría concluir que la creatividad, en la ciencia y en las Matemáticas, participa de tres aspectos:

a) Requiere ser una persona iniciada o experta en el tema.
b) Tener capacidad para establecer asociaciones o relaciones.
c) Ser capaz de seleccionar, de escoger, de sintetizar,...
Para finalizar este apartado, se expondrán dos cuestiones:
1.-Desde un ámbito educativo y como educadores matemáticos, se cree que, más que conseguir productos o resultados creativos, es primordial formar personas creativas, y esto más desde un punto de vista holista que atomista.
En consonancia se piensa que puede haber cientos y, casi literalmente, miles de factores determinantes de la creatividad; en realidad, todos los que ayuden a una persona a avanzar en dirección a una mayor salud psicológica y a formar parte de una humanidad más plena y auténtica.
2.-Presmeg (1985, 1991)[43] escribió que las características manifestadas por el grupo de profesores visuales podrían considerarse relacionadas con un tipo de mente que incluye aspectos de personalidad asociados con la creatividad. En esta investigación, los profesores visuales establecían, la mayoría de las veces, conexiones entre el concepto a explicar y otras áreas de pensamiento (como otros conceptos del curso, otras materias, trabajo hecho previamente, etc.), es decir, utilizaron diferentes formas para presentar los conceptos y estuvieron más inclinados a lograr diferentes métodos de solución de los problemas por parte de los alumnos; diversidad de soluciones de la que eran conscientes.
En contraste, los profesores no visuales fueron más propensos a presentar la materia desde el principio de una forma más rigurosa y lógica (Presmeg, 1991)[44].

Se puntualizará que no es nuestra intención emitir ningún juicio de valor sobre la valía profesional de los profesores. Somos conscientes de que existen excelentes profesores preocupados seriamente por su profesión que no pertenecen al “grupo visual”.
En lo referente a los alumnos, una persona visual sería aquélla que prefiere usar métodos visuales en el proceso de resolver problemas matemáticos. De acuerdo con las ideas de Presmeg, se entiende por método visual aquél que utiliza imágenes visuales, con o sin diagramas, como parte esencial del método de solución aunque se empleen razonamientos o métodos algebraicos (Presmeg, 1985)[45].

La imagen como herramienta en la resolución de problemas matemáticos además de su papel en el pensamiento creativo, el uso de imágenes mentales puede ser una buena estrategia tanto para resolver problemas matemáticos como para construir y consolidar conceptos matemáticos a distintos niveles de dificultad.

[43] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics; Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school Mathematics.
[44] Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school Mathematics
[45] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics

Investigaciones de autores como Wheatley (1990, 1991, 1997)[46], Brown (1993), Brown y Wheatley (1989, 1990, 1991)[47], han puesto de manifiesto que existe relación entre la utilización de imágenes y “tener éxito” en la resolución de problemas matemáticos.

En sus estudios, básicamente de corte cualitativo, encontraron que los estudiantes que frente a problemas “no rutinarios” usaron imágenes en sus razonamientos tuvieron más “éxito” que los estudiantes que abordaron las tareas de forma procedimental.
Coincidiendo con los autores señalados anteriormente, es evidente la importancia que las imágenes tienen en el razonamiento matemático y en que hacen más fácil encontrar la solución de muchos problemas. De la misma forma que es útil tener u mapa mental de las calles con el fin de planificar la ruta mejor para viajar a lo largo de la ciudad, podría ser beneficioso también tener almacenadas en memoria la mayor variedad posible de imágenes mentales que representen relaciones y modelos matemáticos.

En la búsqueda de la solución de problemas matemáticos han aparecido diferentes procesos como construir, representar y transformar, procesos formulados por Wheatley y Brown (1994), de acuerdo al modelo de Kosslyn y que comparto. Si un estudiante ha construido, basándose en imágenes, los conceptos e ideas matemáticas, enlazándolos significativamente en una red conceptual, las soluciones a problemas “no rutinarios” podrían encontrarse más fácilmente.

En años recientes se ha insistido en que la imagen es central en el razonamiento Matemático (Brown y Wheatley, 1991; Dörfler, 1991; Lakoff, 1987; Wheatley, 1991a, 1997)[48].
Muchas veces la construcción de una imagen puede ayudar a representar la esencia de un concepto matemático, y también a que surja una solución inmediata en la resolución de un problema. Los individuos “expertos” frecuentemente emplean la visualización y analogías visuales, a menudo metafóricamente, cuando resuelven problemas complicados (Kosslyn, 1983; Sfard, 1994b)[49].

Lakoff sostiene que las estructuras abstractas se comprenden en función del “esquema de la imagen” (citado en Wheatley, 1997). El “esquema de la imagen” se puede comparar a las imágenes patrones definidas por Presmeg (1985)[50]

Ya sea en contextos aritméticos o geométricos, si los estudiantes se centran en la búsqueda de relaciones entre los conceptos e ideas matemáticos, con la finalidad

---

[46] Wheatley, G.H.; Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. ; Wheatley, G. H. (1991a). Enhancing Mathematics learning through imagery".
[47] Brown, D. L.; Wheatley, G. (1989). Relationship between spatial ability and Mathematics knowledge
Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1990). The Role of Imagery in Mathematical reasoning.
Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1991). Assessing Spatial Visualization: Evidence for transformed Images

[48] Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. Proceedings of the fifteenth Annual of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 17-32. Italia: Assisi.
[49] Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine.* New York: W. W. Norton Co.
[50] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics

de realizar un aprendizaje significativo más que de memorizar fórmulas y algoritmos de cálculo, es bastante probable que estén usando algún tipo de imágenes.
Hay una evidencia de que las imágenes tienen un papel significativo en el razonamiento matemático. Por ejemplo, cuando un niño utiliza una estrategia compensación para sumar 7+5 moviendo 1 de 7 a 5 para obtener 6+6, un hecho conocido, y dice “ver” una relación entre 7+5 y 6+6, la relación es abstracta y no puede verse en un sentido visual, el “ver” no es un acto perceptual sino cognitivo; Wheatley y Bebout (1990)[51] sostienen que cuando se dice que “se ve una relación” lo que se “ve” es una imagen autoconstruida de la relación.

Además, las imágenes y la visualización permiten “predecir” lo que sucedería en situaciones imposibles de observar, como es el caso de muchos problemas matemáticos y físicos. Ilustrativos, entre otros, son los casos de Einstein y Tesla (citados en Kosslyn, 1983)[52], quienes usaron simulaciones para elaborar o validar sus ideas. El primero, en l elaboración de la teoría de la relatividad, se imaginó a sí mismo viajando a la velocidad de la luz, y el segundo dijo que cuando trabajaba en un nuevo invento podía imaginar con todo detalle cada parte de la máquina; sus imágenes eran más vívidas que cualquier anteproyecto y podía probar las partes de la máquina, poniéndolas mentalmente en movimiento para juzgar su funcionamiento.

Razonar frente a determinadas situaciones (imaginar posibles rutas, decorar una habitación, construir una nueva máquina, etc.), simulando lo que podría suceder con una u otra alternativa permite evitar esfuerzos, desperfectos y gastos inútiles.

Limitaciones en el uso de imágenes en matemáticas

Hasta ahora se ha expuesto distintos casos donde la imagen juega un papel primordial para la resolución de un problema. Pero hay situaciones en las que la representación externa de la imagen puede causar confusiones a los estudiantes.

Las construcciones mentales que una persona realiza están mediatizadas por las imágenes mentales formadas en experiencias anteriores; lo que constituye, si no están bien formuladas, un serio obstáculo en el aprendizaje. Por ejemplo, si un niño tiene como única imagen de un triángulo isósceles uno con base horizontal y el ángulo desigual opuesto a la misma, su concepto de triángulo será bastante limitado. Tendrá un concepto más rico cuando pueda transformar su imagen de triángulo isósceles y darse cuenta de que la orientación es irrelevante.

---

[51] Wheatley, G. H. (1990). Spatial sense and Mathematics learning. *Aritmetic Teacher*. 37, 6, 10-11.
[52] Kosslyn, S. M. (1983). ***Ghosts in the Mind's Machine.*** New York: W. W. Norton Co.

Por otra parte, un dibujo o un diagrama son concretos por naturaleza y esa concreción puede ser un obstáculo en el aprendizaje de las Matemáticas, donde el Pensamiento se caracteriza por su abstracción y generalización.
Para que las imágenes sean útiles en la resolución de problemas tienen que poder ser controlables (Richardson, 1969; Presmeg, 1997)[53]. Las imágenes no controlables son las que surgen en la mente de las personas, y lejos de ser una ayuda, constituyen un obstáculo en el razonamiento. Son imágenes que aparecen espontáneamente en el pensamiento como consecuencia de ideas previas. Persisten incluso aunque se presente alguna evidencia que las contradiga. Presmeg (1992a)[54], entre otros, describió el caso de Paul, para quien su prototipo de parábola simétrica respecto al eje Y constituyó un obstáculo en su aprendizaje matemático, impidiéndole razonar con una parábola que no se ajustase a su imagen prototipo.

Hershkowitz (1989), Aspinwall y otros (1995) y Plasencia y otros (1998) exponen distintos ejemplos (la primera, desde la Geometría Elemental, y los restantes, desde el análisis Matemático), que muestran cómo la imagen prototípica de un concepto (triángulo rectángulo con el ángulo recto en la posición vertical-horizontal) o una “mal entendida” representación gráfica (bien de una función discontinua y su derivada, bien de la diferencial de una función de una variable), pueden crear obstáculos y confusión en los estudiantes.

Síntesis

Las imágenes y la visualización, entendida como el proceso a través del que se relacionan imágenes mentales, tienen un papel destacado en la actividad matemática. A veces una solución basada en una imagen puede ser más comprensible y “elegante” (Wheatley, 1997)[55]. Son ilustrativas las demostraciones sin palabras de varios teoremas algebraicos y geométricos propuestos por Roger B. Nelsen (1993)[56]; formas a veces sencillas y elegantes de demostrar un teorema. Mi experiencia docente confirma que algunos estudiantes entienden “mejor” el teorema de Pitágoras cuando se les presentan algunas de estas demostraciones “visuales”.

La naturaleza de la imagen depende de las construcciones mentales hechas con anterioridad, de la intención con que se construye y de la situación bajo la que es construida la imagen. Cuando se piensa, por ejemplo, en un rombo, algunas personas pueden imaginar la figura como un todo indiferenciado –lo que Van Hiele (1986)[57] sitúa en el nivel 1 de su modelo geométrico-, otras pueden imaginar las características del rombo, como lados iguales, paralelos dos a dos, diagonales

[53] Richardson (1969). *Mental Imagery*. London: Routledge and Kegan Paul.; Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics.
[54] Presmeg, N. C. (1992a). Uses and values of prototypic visual images in high school Mathematics.
[55] Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity.
[56] Nelsen R. B. (1993). *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America.
[57] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando, FL: Academic Press.

perpendiculares -nivel II de Van Hiele-; y otras, el rombo en diferentes posiciones espaciales, etc. Frente a un mismo problema o una misma situación las personas elaboran imágenes diferentes (Presmeg, 1997a; Bishop, 1989; Wheatley, 1997), interviniendo en esta elaboración los esquemas matemáticos que cada individuo posea junto a la experiencia que tenga, su preferencia por utilizar imágenes, su memoria de imágenes o su habilidad para recordar o generar visualizaciones apropiadas, elegir las adecuadas y poder actuar u operar con las visualizaciones elegidas.

Resumiendo, la utilización de las imágenes y la visualización en Matemáticas es algo personal; los profesores tienen que contar con que los estudiantes elaboren imágenes diferentes como consecuencia de ese proceso personal.
Es recomendable fomentar y animar la diversidad de alternativas en los procesos de visualización y no olvidar que las personas necesitan tiempo para desarrollar sus imágenes mentales.

INVESTIGACIONES PREVIAS ACERCA DEL TEMA

En este apartado se presentan algunas contribuciones acerca de las imágenes mentales y sobre el proceso de visualización que han sido importantes en la Educación Matemática.

Habilidad espacial, imágenes y visualización en las matemáticas

En la bibliografía se han encontrado las imágenes mentales unidas a temas como visualización o habilidad espacial, sobre todo en los primeros trabajos realizados acerca de este tema. De todas estas contribuciones emerge la complejidad del proceso de visualización y la dificultad para estudiar los caminos en los que las personas llevan a cabo estos

Revisiones e investigaciones que sitúan el tema

Se han comentado, con anterioridad, cómo algunos científicos como Hadamard o Einstein identifican las imágenes en la construcción de sus ideas. También matemáticos y educadores matemáticos como Bishop o Wheatley han sugerido que la habilidad espacial y las imágenes visuales tienen un papel importante en la construcción del pensamiento matemático. Esto lleva a reconocer que en Matemáticas existen maneras diferentes de procesar la información. Krutetskii (1976)[58] se refiere a dos modos de pensamiento en Matemáticas: verbal/lógico y

[58] Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*.

visual/pictórico. El equilibrio entre estos dos modos permite establecer diferentes “temperamentos” que determinan cómo una persona procesa sus ideas matemáticas. Krutetskii establece una distinción entre el “nivel” de las habilidades matemáticas determinado en su mayor parte por una componente verbal/lógica del pensamiento y el “tipo” determinado por una componente visual/pictórica. El “tipo” matemático al que pertenece una persona se caracteriza porque, además de la habilidad para usar la componente visual/pictórica, tiene en cuenta la preferencia para hacer uso de esa habilidad. El propio Krutetskii distinguió cuatro “tipos” diferentes en las personas de su estudio, y cuyas características se expresan a continuación:

Analítico: componente verbal/lógica muy fuerte frente a una componente visual/pictórica débil; conceptos espaciales débiles; no pueden y no sienten necesidad de usar soportes visuales en la resolución de problemas.

Geométrico*:* componente visual/pictórica muy fuerte frente a una componente verbal/lógica, que se encuentra por encima de la media; conceptos espaciales muy buenos; pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas y sienten necesidad de hacerlo.

Armónico**:** componentes verbal/lógica y visual/pictórica fuertes y equilibradas; conceptos espaciales buenos. Se divide en dos subtipos:
Subtipo a, armónico abstracto*,* que puede usar soportes visuales en la resolución de problemas pero prefiere no hacerlo.
Subtipo b, armónico pictórico*,* que puede usar soportes visuales en la resolución de problemas y prefiere hacerlo.

Aunque Krutetskii estableció la clasificación estudiando a alumnos “buenos” en Matemáticas, en los que la componente verbal/lógica era muy fuerte, por encima de la media, y, fuerte, sugiere que la clasificación podría extenderse a otros niveles de habilidad, donde la fuerza de la componente verbal/lógica determinaría el nivel.
Bishop (1980a, b, 1983, 1989)[59] desarrolló importantes trabajos, desde la perspectiva de la Educación Matemática, que han sido relevantes para la investigación en el área que nos ocupa.
En el primer artículo (1980a), Bishop introduce las ideas de las habilidades VP y
IFI (visual processing e interpretation figural information) tomadas de las distinciones de McGee y que han sido punto de referencia de otros investigadores (Gutiérrez, 1996, Gorgorió, 1996, 1998)[60] y de nuestra investigación.
En el segundo trabajo (1980b), Bishop analiza la interconexión entre el campo visual/espacial (orientado desde la Psicología) y la Educación Matemática en

[59] Bishop, A.J. (1980a). *Spatial and mathematical abilities*. ; Bishop, A. J. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes ;Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education.
[60] Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry

cuatro líneas de investigación: diferencias individuales, experimentos de enseñanza, Psicología evolutiva y análisis de factores. Los investigadores que han trabajado sobre diferencias individuales pueden aportar muchas ideas acerca de por qué existen estas diferencias.

Coincido con Bishop en que la necesidad de animar y fomentar el uso de imágenes mentales, además de que el profesorado sea consciente de los procesos de visualización, son objetivos que resultan muy posibles en la enseñanza. Si bien es verdad que los estudios analizados muestran que no hay suficiente evidencia acerca de progreso en la formación de las imágenes mentales, tanto en el ámbito teórico como pedagógico. Este hecho no sorprenderá si tenemos en cuenta la naturaleza personal e individual de la visualización que se ha encontrado, además de la dificultad al realizar el análisis. La utilización de imágenes es una actividad mental. Cualquier evidencia sobre cómo se manifiesta tiene que ser indirecta, ya que no podemos “entrar en la cabeza” de las personas y ver lo que está sucediendo en su “pantalla mental”.

Clements (1982)[61] proporcionó uno de los mejores escritos históricos de que se dispone sobre las imágenes y la Educación Matemática. A partir de estudios cognitivos realizados, expuso distintas formulaciones teóricas de las imágenes mentales y analizó los problemas inherentes en la externalización de las imágenes desde el punto de vista metodológico. También intentó mostrar la relación entre la habilidad espacial y las imágenes visuales, explicando que, aunque éstas se han estudiado independientemente, es posible unificar ambos conceptos.

Para ello se apoya en los resultados de otros investigadores como Liben (1981) y Lohman (1979)[62]; éste último, después de revisar la literatura existente sobre habilidad espacial, concluyó que ésta puede ser definida como la habilidad para generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas, idea que de alguna manera unifica los dos conceptos.

Habilidad espacial y matemática

Moses realizó dos estudios pioneros (1977, 1980)[63] en los que analiza la relación entre habilidad espacial y Matemáticas.
Su primer estudio (1977), cuantitativo, lo realizó con 145 estudiantes de 5º grado en Newburgh, Indiana (USA), a los que pasó una batería de 6 tests, 5 de ellos eran tests espaciales y el otro incluía 10 problemas “no rutinarios”. Para cada

[61] Clements, M. A. (1982). Visual imagery and school Mathematics. Parte II.
[62] Lohman, D. F. (1979). Spatial Ability: a review and re-analysis of the correlational literature. Stanford:
[63] Moses, B. E. (1977). The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving; Moses, B. E. (1980). *The relationship between visual thinking tasks and problemsolving performance.*

persona obtuvo una puntuación que medía la habilidad espacial y otra que llamó grado de visualidad (*degree of visuality)*, que se basaba en el número de dibujos, diagramas, listas o tablas que se encontraban en las soluciones escritas que los estudiantes daban a los problemas. Observó que las correlaciones de la habilidad espacial con la actuación en la resolución de problemas y el grado de visualidad eran significadamente diferentes de cero pero la correlación entre la resolución de problemas y el grado de visualidad no era significadamente diferente de cero. Concluyó que la habilidad espacial es un buen predictor de la actuación en la resolución de problemas, y que, aunque las personas con una alta habilidad espacial habían resuelto bien los problemas, sus soluciones escritas no siempre reflejan en su totalidad, los procesos visuales utilizados.

En su segundo estudio (1980), cuantitativo también, Moses investigó las diferencias en visualización espacial y razonamiento teniendo en cuenta las variables edad y sexo, y los efectos que una instrucción había tenido en estas diferencias utilizando ejercicios de pensamiento visual. Para llevar a cabo la investigación, utilizó dos grupos, uno experimental y otro de control, a los que les administró un pretest y un postest. Concluyó que la instrucción no había afectado al grado de visualidad o a la forma de actuación en la resolución de problemas, y sí había tenido influencia en las habilidades espacial y de razonamiento.

A los estudios de Moses se le han hecho algunas críticas (Lean y Clements, 1981; Presmeg, 1997a)[64]; una de ellas tiene relación con el hecho de que Moses midió el grado de “visualidad” utilizando las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas. La dificultad de este procedimiento estriba en que algunos estudiantes pueden no haber reflejado en sus respuestas las imágenes visuales que utilizaron cuando resolvían los problemas (hay personas que tienen habilidad para usar métodos espaciales que involucran imágenes y prefieran no utilizarla cuando resuelven problemas de Matemáticas). Otra de las críticas tiene relación con el hecho de que los problemas planteados fueron difíciles para casi todos los estudiantes, y esto significa que lo más probable es que las soluciones hayan sido sólo suposiciones (conjeturas).

Los estudios de Moses llaman la atención sobre la necesidad de que, si se quiere reconocer la utilización que las personas hacen de las imágenes visuales cuando resuelven problemas matemáticos, es importante tener en cuenta, en futuras investigaciones, que las soluciones escritas no siempre reflejan el uso de imágenes.

Harían falta estudios de corte cualitativo que profundizaran en las actuaciones matemáticas de los estudiantes. Hershkowitz (1989)[65] muestra que el papel de la visualización, que ella identifica con habilidad espacial dentro del proceso de formación de los conceptos geométricos, es muy complejo. Por una parte, es una herramienta necesaria para la formación de los mismos ya que no se puede formar la imagen de un concepto y de sus ejemplos sin visualizar sus elementos. Pero por otra, los elementos visuales pueden limitar la habilidad para formar

[64] Lean, G.; Clements, M.A. (1981). Spatial Ability, Visual imagery, and mathematical performance.
[65] Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry- Two sides of the coin. *Focus on learning problems in Mathematics*, 11, 1, 61-76.

conceptos abstractos, debido a que algunos aprendices los identifican con un caso concreto (ejemplo prototípico). Como ejemplos prototípicos, cita los casos: “cualquier altura es interior a la figura”, y “el triángulo rectángulo se sitúa en la posición vertical-horizontal”. Como una posible solución, propone que desde la instrucción se le proporcionen al estudiante materiales y métodos que enriquezcan su experiencia visual (más ejemplos, distintas orientaciones, contraejemplos, etc.).

Tartre (1990)[66] exploró la relación entre la habilidad de orientación espacial y la resolución de problemas matemáticos. Administró un test de orientación espacial (*Gestalt Completion Test*) a estudiantes de grado 10 (14-15 años de edad) y seleccionó 57 estudiantes, 27 con alta orientación espacial y 30 con baja, a los que posteriormente entrevistó. La entrevista consistía en resolver 10 problemas matemáticos con contenido geométrico (7) y no geométrico (3). Todos los problemas admitían más de una forma para encontrar la solución. Encontró un tipo de comportamiento específico en el entorno geométrico que podría ser consecuencia de la habilidad de orientación espacial. Ésta parecía estar involucrada también en problemas no geométricos, tanto en la comprensión del problema como en la posibilidad de relacionar el problema nuevo con otros problemas, hechos previamente.

Preferencia visual y matemática

Suwarzono (1982)[67] realizó una investigación con estudiantes de Secundaria (edad aproximada 12 - 13 años) en Australia. Elaboró un test que tenía como finalidad medir la preferencia de los estudiantes para usar métodos analíticos o visuales en la resolución de problemas matemáticos. El test constaba de dos partes: la primera la formaban 30 problemas verbales mientras que en la segunda se describían para cada problema varios posibles métodos de solución (de 3 a 5). A los estudiantes, después de haber resuelto cada problema, se les pedía indicaran el método que usaron para resolverlo, recurriendo para ello a la segunda parte del test. Las respuestas de los estudiantes se codificaron y se obtuvo una puntuación que medía la preferencia analítica o visual de los estudiantes en la solución de los problemas.

El instrumento de investigación, desarrollado por Suwarzono, parece proporcionar un método efectivo para medir la preferencia de las personas en el procesamiento de la información. Lean y Clements (1981)[68] usaron el instrumento de Suwarzono en estudiantes universitarios en los primeros años de ingeniería, en Papua, Nueva Guinea. Utilizando técnicas estadísticas de regresión múltiple encontraron que la habilidad espacial y el conocimiento de convenios espaciales no tuvieron mucha influencia en la actuación matemática de los estudiantes de la muestra. Los

[66] Tartre, L. A. (1990). Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. Journal for Research in Mathematics Education. 21, 3, 216-229.
[67] Suwarzono, S. (1982). Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students.
[68] Lean, G.; Clements, M.A. (1981). Spatial Ability, Visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics. 12, 3, 267-299.

estudiantes que prefirieron procesar la información matemática por medios verbales/lógicos obtuvieron mejores puntuaciones en los tests matemáticos y espaciales que los estudiantes que usaron métodos netamente visuales. Este resultado estaría en contradicción con los estudios que sugieren que sería aconsejable el empleo de procesos visuales en la resolución de problemas matemáticos; sin embargo, los autores de este estudio apuntan como una posible explicación el hecho de que ellos utilizaron, para evaluar la competencia matemática, sencillas tareas rutinarias, mientras que los otros estudios recurrieron a problemas "no rutinarios" de mayor dificultad. Un resultado común de las dos investigaciones anteriores es que la preferencia para usar imágenes en la resolución de problemas no está asociada con la actuación en Matemáticas o en tests espaciales (Clements, 1981). Turner (1982)[69] encontró que la habilidad para transformar imágenes mentalmente, estaba altamente relacionada con el éxito del estudiante en cálculo integral. El estudio que efectúo fue cuantitativo. Fennema (1975)[70] realizó en USA uno de los primeros trabajos de corte cuantitativo, que tuvo en cuenta la visualización espacial. Estaba interesada en la relación entre el sexo y la competencia en Matemáticas. ¿Son los hombres más competentes en Matemáticas que las mujeres, o al contrario? La visualización espacial era una de las variables en la que hombres y mujeres mostraban diferencias, razón por la que ella la incluyó en su estudio junto a otras variables cognitivas y afectivas. Fennema y sus colaboradores observaron una correlación positiva entre la habilidad espacial y el éxito en Matemáticas, y no encontraron que la diferencia entre sexos fuese significativa, al menos en cuanto a habilidad espacial se refiere (citado en de Brown, 1993)[71]. Fennema y Tartre (1985) estudiaron cómo 33 chicos y 36 chicas de Primaria, discrepantes en sus habilidades de visualización espacial y verbal (los grupos elegidos tenían baja habilidad verbal y alta espacial o viceversa), utilizaban las habilidades de visualización espacial en la resolución de problemas verbales. Para ello pidieron a cada estudiante que leyera un problema, hiciera un dibujo para ayudarse a resolverlo, lo resolviese, y explicase cómo usó el dibujo en la solución. Concluyeron que aunque los estudiantes discrepantes en sus habilidades espaciales y verbales difieren en los procesos que usan a la hora de resolver los problemas, no difieren en su habilidad para resolverlos. En relación a la variable sexo, escribieron que las diferencias encontradas entre los chicos y las chicas fueron pequeñas, siendo mayores dentro de un mismo sexo que entre ambos sexos. Puntualizan la idea de que no se puede decir que todas las chicas son menos capaces que los chicos para usar sus habilidades de visualización de una manera apropiada en Matemáticas, algo absolutamente obvio pero que muchos investigadores no han especificado claramente. De esta manera muchas personas

Piensan que existen más diferencias entre las respuestas de los distintos sexos de las que realmente hay. El libro *Visualización in teaching and learning and*

[69] Turner, K. V. (1982). An investigation of the role of spatial performance, Learning styles, and Kinetic Imagery in the learning of calculus.
[70] Fennema, E. (1975). *Spatial ability, Mathematics and the sexes*. In E. Fennema (Ed) ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education, College of Education, Ohio State University, Columbus, OH.
[71] Brown, D. L. (1993). An investigation of imagery and mathematical understanding in elementary school children.

mathematic (Zimmermann, Cunningham, 1991) proporciona una perspectiva de investigación, análisis, experiencia práctica y opiniones sobre la visualización y su papel en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, especialmente a nivel universitario. Diversos autores muestran sus experiencias en relación con la visualización mediante ordenador con temas de geometría, fractales, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, análisis complejo, análisis numérico, procesos estocásticos y otros fenómenos aleatorios. Los editores del texto, Zimmermann y Cunningham, afirman tener la convicción de que el pensamiento visual y el desarrollo de herramientas visuales, a través de los gráficos por ordenador, puede suponer una gran contribución a la Educación Matemática. Acerca de ¿qué es la visualización matemática?, los editores manifiestan lo siguiente:

La visualización matemática no es “la Matemática percibida a través de dibujos”. La intuición que la visualización matemática pretende no es una forma vaga de intuición, una sustitución superficial del conocimiento, sino la clase de intuición que penetra en el núcleo de la idea. Da profundidad y significado al conocimiento, sirve como guía segura para resolver problemas, e inspira descubrimientos creativos. Para alcanzar esta clase de conocimiento, la visualización no puede ser aislada del resto de las Matemáticas. El pensamiento visual y las representaciones gráficas deben estar unidos a otros modos de pensamiento matemático y a otras formas de representación. Debemos aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica y gráficamente, y moverse atrás y adelante entre estos modos. Podemos desarrollar la habilidad para elegir el método más apropiado para un problema particular y para conocer las limitaciones de estos tres dialectos del lenguaje de las Matemáticas.

Presmeg (1985)[72], como parte de su tesis doctoral, elaboró el instrumento MPI (*Mathematical Processing Instrument*) que medía la "visualidad matemática" en profesores y alumnos en su último año de Secundaria (edad aproximada 16 – 17 años). El instrumento estaba inspirado en el desarrollado por Suwarzono y medía la preferencia, más que la habilidad de los estudiantes, para utilizar imágenes en problemas matemáticos. El motivo de utilizar un instrumento que midiera la preferencia estaba, según Presmeg, en que hay personas que tienen habilidad para utilizar métodos espaciales que involucran imágenes y que, sin embargo, prefieren no utilizar esa habilidad en la resolución de problemas matemáticos. Igual que el instrumento usado por Suwarzono, el MPI desarrollado por Presmeg constaba de dos partes. La primera estaba dividida en tres secciones A, B y C, formadas por una colección de problemas verbales de los que A y B se propusieron a los estudiantes y B y C a los profesores. La segunda mostraba, para cada problema propuesto, distintos métodos de solución. La persona que resolvía el problema tenía que especificar si el método que utilizó en la solución coincidía o no con alguno de los propuestos. Con los datos se obtenía una puntuación para cada persona que la Dra. Presmeg llamó MV (*mathematical visuality*) y que utilizó para clasificar a las personas investigadas.

[72] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished *Ph. D. dissertation*.

A diferencia de Suwarzono, Presmeg entrevistó también a 54 estudiantes visualizadores (individuos que prefieren, cuando hacen Matemáticas, pensar visualmente), criterio que obtuvo a través del MPI. Algunos de los hallazgos de la investigación fueron:

1. La identificación de cinco diferentes tipos de imágenes utilizadas en las personas entrevistadas
2. Los análisis de las entrevistas sugirieron que los estudiantes entrevistados hicieron un amplio uso de imágenes mientras resolvían problemas matemáticos de álgebra, geometría, trigonometría y vectores, aunque algunas veces no fueran conscientes de la presencia y papel de las imágenes en su razonamiento.
3. Los 13 profesores que participaron en la investigación fueron clasificados desde "visuales" a "muy no visuales" utilizando el MPI. Sus opiniones sobre el uso en las clases de métodos visuales fueron varias. Merece la pena destacar que sólo pocos profesores dicen necesitar "soportes visuales" cuando resuelven problemas matemáticos, aunque los utilizan y fomentan en las clases ya que se dan cuenta de que muchos de sus alumnos los necesitan. Por otra parte los profesores que tuvieron más éxito en la instrucción matemática de los alumnos visualizadores fueron los que no usaron solamente métodos visuales (diagramas, colores, etc.), sino que enfatizaron y estimularon en los estudiantes la generalización.
4. A lo largo de la investigación se les pidió a los 13 profesores que nombrasen a los alumnos que ellos consideraban "estrellas". Se encontró que los alumnos elegidos (7 de un total de 277) eran casi siempre "no visualizadores". Incluso usando un criterio menos estricto, los alumnos visualizadores eran menos de la quinta parte. De los 27 alumnos elegidos como "muy buenos" sólo 5 formaron parte del grupo de estudio (visualizadores) al que se entrevistó. Presmeg describe y analiza algunos factores que pueden ser la causa de este suceso. Entre los factores internos está el hecho de que una imagen o un diagrama es por naturaleza un caso concreto, lo que impide la generalización si no se sabe cómo superarla y es el caso de muchos visualizadores. Por otra parte, el uso de métodos no visuales es reforzado por el currículum escolar, exámenes y métodos de enseñanza, con lo que los visualizadores no tienen necesidad de superar el obstáculo de una visualización concreta. Entre los factores externos destaca el hecho de que el currículum de Matemáticas favorece al pensador no visual ya que normalmente la evaluación en Matemáticas suele realizarse a través de tests y exámenes en un tiempo determinado, y el uso de métodos visuales necesita más tiempo. Otro de los factores externos hace referencia a que los métodos de enseñanza, en la mayoría de las clases de Matemáticas, no son visuales, y que los métodos visuales, utilizados por algunos estudiantes, no son valorados por los profesores. Los trabajos de Wheatley han sido, junto a los de Presmeg, los que más han influido en nuestro trabajo. Defiende que la construcción de imágenes tiene un papel muy importante en la resolución de problemas. Wheatley[73] y sus

[73] Wheatley, G.H.; Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions. In L. P. Steffe; T. Wood (Eds). *Transforming children's Mathematics education*.

colaboradores Brown y Solano utilizando los resultados de tres estudios (Brown y Wheatley, 1989, 1990; Wheatley, Brown y Solano, 1994), afirman
Que existe una fuerte relación entre el uso de imágenes y el éxito en la resolución de problemas.

La metodología que emplearon fue básicamente cualitativa, entrevistas a los estudiantes, y el test WSAT12 (*Wheatley Spatial Ability Test*) fue el instrumento utilizado para seleccionar a los mismos. Encontraron que los estudiantes que puntuaron alto en el test tuvieron más éxito frente a problemas matemáticos "no rutinarios". Este resultado puede estar en contradicción con algunos estudios como el de Friedman (1995)[74] para quien la habilidad espacial (medida a través de un test espacial) y el razonar "bien" en Matemáticas no están exactamente relacionados. Wheatley (1997)[75] sostiene que es importante analizar varios aspectos antes de aceptar conclusiones como las de Friedman. En el estudio de Friedman, por una parte, la habilidad espacial se midió aplicando tests espaciales, dos de los cuales se pueden realizar recurriendo tanto a métodos analíticos como espaciales. Parece dudoso pensar, por tanto, que estos tests midan la habilidad para construir y transformar imágenes. Por otra parte, para valorar el "hacer bien" en Matemáticas, Friedman utilizó tests con preguntas que pueden resolverse utilizando procedimientos rutinarios de cálculo. Mi posición, que coincide con la de Wheatley, es que hacer Matemáticas va más allá de realizar cálculos y memorizar fórmulas. La actividad matemática tiene que ser significativa, tener sentido para la persona que la realiza, y no puede ser "evaluada" por medio de tests rutinarios donde lo único que haya que hacer es aplicar una fórmula sin más reflexión. Se comparte con Wheatley la idea de que si el aprendizaje de las Matemáticas se enfoca como una actividad instrumental (Skemp, 1980)[76] es improbable que se encuentre relación entre la utilización de imágenes y el éxito en Matemáticas. Sus investigaciones insisten también en la importancia de los entornos de aprendizaje. La Matemática y la Ciencia pueden ser enseñadas desde una perspectiva, centrada en problemas, que podría ofrecer considerables beneficios a los estudiantes. Wheatley (1992b)[77] propone un modelo de instrucción, en Matemáticas, basado en el Constructivismo. En lugar de usar el paradigma explicación-práctica, el profesor establece y coordina ambientes de aprendizaje en los que se fomente que los estudiantes construyan las ideas significativamente, aprendan a "pensar" y tomar decisiones más que a memorizar y reproducir conceptos enseñados.

[74] Friedman, L. (1995). The space factor in Mathematics: gender differences. *Review of Educational Research,* 65, 1, 22-50.
[75] Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*
[76] Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata
[77] Wheatley, G. H. (1992b). Spatial Sense and the construction of abstract units in tiling. *Arithmetic Teacher*, 39, 8, 43-45.

Diferentes tipos de imágenes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Es importante partir de alguna clasificación sobre los diferentes tipos de imágenes, ya sea para realizar con detenimiento un análisis de cómo los estudiantes hacen uso de las imágenes en su actividad matemática o para presentar los resultados de investigaciones en el tema. Las clasificaciones hechas por Piaget e Inhelder (1971) y Presmeg (1985) han sido el punto de partida inicial. En los párrafos que siguen se comentará, en primer lugar, cada una de estas clasificaciones y, posteriormente, se expondrá cómo interpretaremos en este trabajo los diferentes tipos de imágenes que pueden utilizarse en la actividad matemática. Clasificación formulada por Piaget e Inhelder Piaget e Inhelder diferenciaron las imágenes en dos categorías que llamaron *reproductive* y *anticipatory*.

Las primeras representan mentalmente sucesos y objetos ya conocidos por las personas, mientras que las segundas se dan cuando una persona representa objetos o sucesos que no ha percibido previamente. Las imágenes "reproductivas" pueden, además, ser clasificadas en: -"estáticas" o RS (*reproductive static*); aquéllas que representan objetos estáticos o configuraciones inmóviles (una mesa, un hexágono o una línea recta) "cinéticas" o RK (*reproductive kinetic*); aquéllas que evocan, en sentido figurado, movimiento (el balanceo de un péndulo o el movimiento de dos móviles que se cruzan a velocidad constante) "transformadas" o RT (*reproductive transformational*); aquéllas que representan cuerpos que, por el movimiento, cambian su forma y no únicamente su posición (Transformación de un arco en una línea recta o la división de un cuadrado en dos rectángulos).

Las imágenes "anticipatorias" son aquéllas en las que una persona es capaz de anticipar transformaciones que son nuevas para ella, por ejemplo cuando al doblar mentalmente dos veces una hoja de papel en dos partes iguales y cortar el punto de intersección de los dobleces, se da cuenta de que "verá" un agujero al desdoblar la hoja, mientras que si la hoja se dobla tres veces en dos partes iguales "verá" dos agujeros. Estas imágenes fueron subdivididas también en: "cinéticas" o AK (anticipatory kinetic), "transformadas" o AT (anticipatory transformational), según la imagen "anticipatoria" suponga cambio en la posición o en la forma. Piaget e Inhelder no consideraron dentro de las imágenes "anticipatorias" las "estáticas", ya que si se quiere anticipar, por medio de una imagen, una posición estática desconocida, se tendrá que tener en cuenta el movimiento o las transformaciones que llevan a esta posición. Esto ocurre, por ejemplo, cuando un niño quiere imaginar la posición estática final de un tubo que se gira 180 grados de manera que sus extremos rojo y azul se inviertan, es decir que si el extremo rojo está a la derecha del niño antes de la rotación lo esté a la izquierda después de la misma. Tanto las imágenes "cinéticas" como las "transformadas", ya sean "reproductivas" o "anticipatorias", pueden subdividirse, a su vez, teniendo en cuenta el resultado de la actividad mental (P) o el proceso de la modificación (M). Aunque el niño para “reproducir” o “anticipar” el resultado tiene que tener en cuenta este proceso de modificación, esto no significa que tenga que imaginarlo en detalle.

La distinción mayor que encontraron fue entre las imágenes “estáticas” y las “anticipatorias”, ya sean éstas “cinéticas” o “transformadas”.
Mantendremos en mente la clasificación de Piaget e Inhelder en el presente estudio.

Clasificación formulada por Presmeg

Presmeg (1985)[78], en la investigación que realizó con estudiantes y profesores de Secundaria, identificó cinco diferentes tipos de imágenes cuando éstos hacían Matemáticas: imágenes “concretas”, imágenes “patrón”, imágenes de “memoria de fórmulas”, imágenes “cinestésicas” e imágenes “dinámicas”. A continuación se describirá cada tipo de imagen.

Las “imágenes concretas” son identificadas por Presmeg como pictures in the mind. La característica más esencial de este tipo de imágenes es que consisten en una única fotografía, sin movimiento pero con muchos detalles. Fueron el tipo de imágenes predominantemente utilizado por los estudiantes de su estudio. Cita como ejemplos de este tipo de imágenes las de triángulos especiales, los cuadrantes en Trigonometría, los diagramas relacionados con teoremas, las imágenes de grafos, etc., además de las imágenes idiosincrásicas peculiares y personales construidas por algunos de sus estudiantes.
Las “imágenes patrón” han sido definidas por la profesora Presmeg como aquéllas donde se desatienden detalles concretos y se representan relaciones en un esquema visual-espacial. Pueden ser tenues o vívidas, aunque su característica esencial es que son como patrones, en los que emergen relaciones y faltan detalles concretos. Puede ser el tipo de imagen usado por los maestros de ajedrez, quienes pueden no necesitar visualizar el tablero con todos sus detalles. El juego de ajedrez es extremadamente complejo, cada movimiento se hace teniendo en cuenta un número increíble de jugadas alternativas y de contrajugadas. Un jugador experto no puede permitir que su pensamiento se distraiga en detalles irrelevantes. McKim (1972)[79] cita al maestro de ajedrez Alekhine, quien dijo que visualizó las piezas como “líneas de fuerza”, y a Pillsbury, que habló de una “visión sin forma de las posiciones”.
Algunos ejemplos de “imágenes patrón” encontrados por Presmeg fueron: esquemas para representar la magnitud y la dirección de un vector, modelos de

[78] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished *Ph. D. dissertation*. University of Cambridge. England.
[79] McKim, R. M. (1972). *Experiences in visual thinking*. Monterey, CA: Brooks/Cole.

tablas donde aparecen regularidades que permiten encontrar las razones trigonométricas de determinados ángulos, e imágenes de fórmulas trigonométricas para ángulos compuestos. Presmeg escribe también sobre la dificultad de identificar en la práctica este tipo de imágenes, ya que resulta complicado, en ciertas situaciones, diferenciar dónde acaba la imagen concreta y dónde empieza la imagen patrón.

Las **“**imágenes de memoria de fórmulas” son explicadas por la Dra. Presmeg como las imágenes utilizadas por los estudiantes que dijeron “ver” una fórmula en sus mentes, imaginándola escrita en la pizarra o en el cuaderno. Son utilizadas en Matemáticas, probablemente, por la mayoría de las personas visualizadoras, siendo quizá más accesibles que las imágenes patrón.

Además de las ventajas mnemotécnicas asociadas a las imágenes en general, las imágenes de memorias de fórmulas proporcionan un poderoso medio de hacer a una imagen concreta portadora de una información abstracta. Algunas fórmulas que tuvieron un gran impacto visual entre los estudiantes entrevistados por la Dra. Presmeg fueron las del módulo de un vector y la que da las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Las **“**imágenes cinestésicas” son imágenes que involucran actividad muscular.

Esta actividad, normalmente, se manifiesta en el trazado de una curva, ya sea en el aire o sobre la superficie de una mesa, o haciendo movimientos “caminando” con dos dedos.

Algunos estudiantes dibujaron en el aire, con sus dedos, la gráfica de una parábola o de una hipérbola, sobre todo cuando no se podían acordar del nombre (Presmeg, 1985)[80].

Las **“**imágenes dinámicas” son las que involucran habilidad para mover y transformar, mentalmente, imágenes concretas. Presmeg encontró solamente dos ejemplos de estas imágenes en el estudio que constituyó su tesis doctoral. Cita el ejemplo de Paul R., quien frente al problema: sabiendo que el área del cuadrado ABCD es cuatro unidades cuadradas y que E y F son los puntos medios de los segmentos AB y CD, encontrar el área del paralelogramo AECF, sostuvo que el paralelogramo tenía área dos. Paul R explicó su solución diciendo que después de percatarse de que el rectángulo AEFD tenía área dos, al ser la mitad del cuadrado original, también el paralelogramo AECF tenía área dos. Para darse cuenta de ello, hizo coincidir al paralelogramo AECF con el rectángulo AEFD moviendo mentalmente el triángulo ECF a la posición del triángulo AFD.

[80] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished *Ph. D. dissertation*. University of Cambridge. England.

Clasificación utilizada en este estudio

Se empleará una clasificación estructurada básicamente en la propuesta por la Dra. Presmeg, a la que he añadido algunas matizaciones, fruto de las reflexiones en el tema, lecturas de investigaciones posteriores.

Se interpretan las “imágenes concretas” en la misma línea que Presmeg. Se piensa que es el tipo de imágenes más fácil de identificar, son como fotografías mentales que presentan muchos detalles. Por ejemplo, se podría formar la imagen de un rostro humano pletórico de detalles: puede tener los ojos desmesuradamente abiertos y una pupila más grande que la otra, una cicatriz que pasa por debajo del ojo izquierdo, un lunar en el lado izquierdo y debajo de la comisura derecha de la boca, y así, sucesivamente, un detalle tras otro. Son imágenes “ricas” en información (Johnson, 1987)[81]. Se pueden comparar a las que Piaget e Inhelder (1971)[82] llaman imágenes “estáticas”**.**

Muchos problemas matemáticos se pueden resolver utilizando una imagen concreta, ayuda visual, como apoyo al pensamiento abstracto. En algunos ejemplos, la imagen de un objeto o de un suceso se usa para representar el suceso o el objeto real.

Simulamos mentalmente una situación utilizando una imagen como una forma de anticipar lo que sucederá en la realidad.

En relación con las “imágenes patrón” encontradas por Presmeg se piensa que son imágenes más abstractas. Brown y Presmeg (1993)[83] piensan que la “imagen patrón” podría ser el tipo de imagen usado por Einstein, quien, en una carta a Hadamard, escribió que en la forma de su pensamiento aparecían “ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas, […] antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros”.

Johnson (1987) utiliza indistintamente los términos “esquema de la imagen” y “esquema corporeizado” (image-schemata, es el término original) para referirse a lo que podría tener relación con la imagen patrón encontrada por Presmeg. Johnson expone que el “esquema de la imagen” no es una imagen rica o concreta sino un conjunto de estructuras que organizan nuestras representaciones mentales a un nivel más general y abstracto que el correspondiente a imágenes mentales particulares.

En contraposición a lo específico de éstas, el “esquema de la imagen” presenta una mayor universalidad. Un ejemplo sería el esquema de un rostro en el que sólo se consideran algunos rasgos básicos: líneas para los ojos, la nariz, la boca, etc. Este esquema permite ejemplarizar una gran cantidad de imágenes distintas de rostros.

Dörfler (199l) sugiere que la manipulación en el ámbito cognitivo de los conceptos matemáticos se facilita, en gran medida, por la construcción y disponibilidad de

---

[81] Johnson, M. (1987). The body in the mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination and Reason.
[82] Piaget J.; Inhelder B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.
[83] Brown, D. L.; Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning.

adecuados “esquemas de la imagen”. La construcción de significado para una idea matemática depende de la construcción de las anteriores imágenes. Éstas, muchas veces, se abstraen de imágenes concretas y se experimentan a través de nuestra acción mental sobre los objetos.
El siguiente problema, obra de McKim (citado en Kosslyn, 1983)[84], ilustra cómo una imagen “concreta” o una imagen “patrón” pueden simular y dar respuesta a una situación problemática:
Un monje comienza a subir a una montaña a las 8:03, un lunes por la mañana. El camino es difícil y el monje, a veces, necesita descansar. Llega a la cima de la montaña a las 4:30, después de haber parado quince minutos para almorzar. Pasa toda la noche meditando en la cima de la montaña. Al día siguiente, a las 8:03, comienza a descender la montaña por el mismo camino que subió el día anterior. Vigorizado por la meditación, llegó a la base de la montaña a la 1:05 del mediodía.
El problema pregunta: ¿Hubo alguna hora (no se necesita decir cuál) en la que el monje pasó exactamente por el mismo punto del camino, el lunes y el martes?
Este problema es sencillo de resolver si se utiliza una imagen “concreta” (terminología de Presmeg) y al mismo tiempo “anticipatoria cinética” (terminología de Piaget) que simule y anticipe la situación. Podemos imaginar la montaña y dos monjes, uno en la cima y otro en la base, que comiencen a caminar el mismo día y a la misma hora, uno subiendo el camino y otro bajándolo. Es fácil darse cuenta de que los monjes se encontrarán en algún punto del camino. Ese momento es la solución al problema.
El mencionado “problema del monje” podía haber sido resuelto a través de unos ejes cartesianos en los que en el eje horizontal se represente el tiempo y en el vertical la altura de la montaña. Una línea ascendente representará la subida y una descendente la bajada del monje. El punto donde se cruzan ambas líneas indicará la hora en la que las dos alturas son idénticas.
Siguiendo las ideas de Johnson se puede pensar en los ejes cartesianos como un esquema de la imagen en el sentido que operan a un nivel de generalidad y abstracción superior al de las imágenes “ricas” y concretas. Un esquema se compone de una reducida cantidad de partes y relaciones, en virtud de las cuales se pueden estructurar indefinidamente muchas percepciones, imágenes y acontecimientos.
En su estudio inicial Presmeg (1985[85]) identificó las “imágenes de memoria de fórmulas” en algunos visualizadores que recordaban una fórmula visualizándola escrita en la pizarra o en su cuaderno. No obstante, como Brown y Presmeg (1993)[86] reconocen esta clasificación parece restringida. Los niños hacen, con frecuencia, uso de fórmulas en las Matemáticas escolares y puede que usen métodos visuales para recordar la información.

[84] Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine.* New York: W. W. Norton Co.
[85] Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation
[86] Presmeg, N. C. (1993). Mathematics- A bunch of formulas? Interplay of beliefs and problem solving styles. *Proceedings of the XVII Annual Meeting of the* 306

Parece más viable hablar en general de “imágenes desde la memoria”, aquéllas que los estudiantes pueden usar para recordar la información desde sus clases de Matemáticas. Son las imágenes que Piaget e Inhelder denominaron “reproductivas”, ya comentadas anteriormente. Son imágenes que cuando se manifiestan son concretas y pueden ser muy precisas y detalladas, pero también en algunos casos no contribuyen a la comprensión matemática de los estudiantes.
Un ejemplo anecdótico de la utilización de este tipo de imagen lo proporciona el premio Nobel (Año 1965) en Física Richard Feynman, que escribe:
Procuro acordarme de esto, sobre todo, cuando estoy enseñando alguna técnica esotérica, como la integración de las funciones de Bessel. Cuando veo ecuaciones, veo las letras de colores; no sé por qué. Al tiempo que hablo, veo imágenes vagas de las funciones de Bessel tomadas del libro Jahnke y Emde, con jotas de color sepia, enes levemente azul-violáceas y equis marrón oscuro volando por allí. Y me pregunto qué infiernos de aspectos tienen que ofrecerles a los estudiantes (Feynman, 1988)[87].
Las “imágenes dinámicas” no las entendemos solamente como imágenes no estáticas, sino como susceptibles de moverse y transformarse. Se pueden considerar, de alguna manera, como una combinación de las imágenes “cinéticas” y “transformadas” de Piaget, ya sean “reproductivas” o “anticipatorias”. Por otra parte no se encuentran diferencias esenciales con las formuladas por Presmeg. Se ilustra con el siguiente ejemplo nuestra concepción de las mismas.
Supongamos el siguiente problema:
Se quiere decorar con vidrieras parte de la ventana del altar mayor de una iglesia. La ventana tiene la siguiente forma:
Las tangentes al círculo tienen igual longitud que el diámetro del mismo. Los dos semicírculos de la parte superior e inferior de la figura son de igual diámetro.
La parte que se quiere decorar con vidrieras es la parte sombreada del dibujo. ¿Cuál será el área a decorar?
Una manera de resolver este problema sería construir una imagen de la ventana y darse cuenta de que si trasladamos los semicírculos externos y los colocamos dentro del círculo interior ocuparían la misma superficie que éste. Es decir, la superficie que nos pide el problema coincide con la de un cuadrado de lado el diámetro del círculo, superficie de fácil cálculo.
El ejemplo muestra el uso de imágenes dinámicas en la resolución de un problema matemático. Aunque no suele ser habitual su uso en los estudiantes, la construcción de imágenes dinámicas es una herramienta poderosa que facilita la resolución de los problemas matemáticos a los estudiantes que las utilizan (Presmeg, 1986; Brown y Presmeg, 1993)[88].

---

[87] Feynman, R. (1988). ¿Qué te importa lo que piensen los demás? Madrid: Alianza.
[88] Presmeg, N. C. (1993). Mathematics- A bunch of formulas? Interplay of beliefs and problem solving styles. *Proceedings of the XVII Annual Meeting of the* 306

Etapas y procesos en el uso de imágenes en Matemática

Kosslyn (1983)[89] encontró cuatro diferentes procesos implicados en el uso de las imágenes visuales. Los llamó: “generar”, “inspeccionar”, “transformar” y “mantener” una imagen. Para este autor, los dos primeros procesos intervienen en todo uso de una imagen.

La construcción de una imagen no es un proceso simple. En determinados casos, como en los problemas que surgen en la Geometría Tridimensional, generar una imagen en tres dimensiones puede ser necesario para entender un problema; sin embargo, esta habilidad no suele ser común, y muchas personas muestran incapacidad para visualizar objetos en tres dimensiones, lo que les lleva a fracasar en la solución de determinados problemas.

Inspeccionar, mantener y transformar son aquellos procesos que nos llevan a interpretar la imagen, manteniéndola en conciencia durante el tiempo necesario y realizando en determinados casos transformaciones como rotación, acercamiento o alejamiento de la imagen, exploración y análisis de un aspecto particular sobre el que basar nuestra observación.

Cuando resolvemos determinados problemas en Matemáticas, muchas veces es difícil mantener una imagen construida, y necesitamos hacer un dibujo o un esquema que nos ayude en nuestra reflexión. Se crea “un diálogo” entre la imagen construida en nuestra mente y nuestra acción física, por ejemplo, un dibujo sobre un papel, un esquema u otra construcción. Este diálogo nos hace profundizar y analizar nuestro pensamiento.

Wheatley (1990)[90], educador matemático, ha incorporado las ideas de Kosslyn a las Matemáticas y habla de construcción, re-presentación y transformación. En esencia, sus ideas de construcción y transformación coinciden con lo que Kosslyn llamó generación y transformación. Sin embargo, Wheatley señala que, cuando se construye una imagen, ésta no permanece en conciencia sino que tenemos que hacerla surgir cuando la necesitemos. Por eso habla de re-presentación de la imagen, esto es, volver a presentar.

Esta imagen re-presentada puede coincidir con la imagen original o puede haber sido modificada con nuestra experiencia.

[89] Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine.* New York: W. W. Norton Co.
[90] Wheatley, G. H. (1990). Spatial sense and Mathematics learning. *Aritmetic Teacher*. 37, 6, 10-11.

IMÁGENES METAFÓRICAS EN LA MATEMÁTICA

El lenguaje lógico, que es el ideal para la exposición científica, permite enunciar juicios y razonamientos de una manera objetiva, donde lo que importa es la claridad, la precisión y la exactitud de lo tratado. No se deberá dejar sobreentendido nada y cada término será empleado en su significación justa y permanente. En relación con la Matemática, en el informe Cockroft (1985: 4) se puede leer:
Las Matemáticas proporcionan un medio de comunicación de la información concisa y sin ambigüedades porque hacen un uso amplio de la notación simbólica. Sin embargo, es la necesidad de usar e interpretar esta notación y de entender las ideas y conceptos abstractos que le sirven de base lo que resulta un escollo para mucha gente. En efecto, la notación simbólica que capacita a las Matemáticas para que se usen como medio de comunicación, ayudando así a hacerlas “útiles”, puede también hacer las Matemáticas difíciles de entender y usar.

Los profesionales reflexivos involucrados en los procesos de enseñanza de la Matemática saben que en la práctica no se pueden limitar al uso del lenguaje matemático formal cuando se comunican con los estudiantes, debido a que éstos desconocen muchas veces ese lenguaje, además de la dificultad que presenta su comprensión, ya resaltada en el párrafo anterior.
Se quiere, en este punto, mencionar brevemente que la comunicación entre profesor y estudiante es un proceso complejo. Se puede imaginar que es un proceso de envío y recepción de mensajes. Sin embargo, no es una especie de telégrafo en el que las señales portadoras de significado se transmiten directamente de un interlocutor a otro. Cada participante debe construir por sí mismo significado para los mensajes que recibe y tiene que diseñar mensajes cuyo significado pueda descifrar otra persona.
En este proceso de “guiar” al estudiante en lo que necesita saber, el profesor recurre al uso de lo que en Literatura se conoce como “lenguaje figurado”, donde las construcciones gramaticales se desordenan; las palabras y giros convenientes desde un punto de vista lógico y matemático son reemplazadas por otros que experimentan un cambio accidental de significación, usándose en sentido figurado. Aparecen los tropos, figuras de carácter semántico -metáfora, metonimia mediante las cuales se hace tomar a una palabra una significación que no es la significación propia de esa palabra.
En consonancia con la influencia de los procesos de visualización en la construcción del pensamiento, se analizará la importancia de las metáforas y metonimias como elementos base en la representación que hacen las personas de constructos matemáticos. Las metáforas y metonimias, acompañadas de imágenes y simbolismo, ayudan a las personas a ver y entender por sí mismas las

relaciones y conceptos matemáticos en medio de las ambigüedades inherentes a su representación (Presmeg, 1998)[91].
Antes de investigar el papel que juegan las metáforas y las metonimias en el contexto matemático, escribiremos unas palabras para clarificar la terminología utilizada.

Metáforas

La “metáfora” es una figura de carácter semántico mediante la cual se hace tomar a una palabra un significado que no es el propio y habitual de la misma. Una explicación aparece en la obra El cartero de Neruda de Antonio Skarmeta, en una conversación entre los personajes de Neruda y Mario Jiménez: Mario Jiménez. Es indigno que me sometas a todo tipo de comparaciones y metáforas.

[91] Presmeg, N. C. (1998). Metaphoric and Metonymic Signification in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 25-32.

III. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 ENFOQUE INVESTIGATIVO

Teniendo en cuenta el objetivo de este proyecto se tomó como enfoque investigativo el crítico, participativo, militante u orientado a la acción.

Tiene como finalidad:

a. Conocer y comprender la realidad como praxis
b. Unir teoría y práctica: conocimiento, acción y valores
c. Utilizar el conocimiento para liberar al hombre
d. Implicar a los docentes el la solución de sus problemas a partir de la autorreflexión

Según el enfoque crítico los problemas educativos se investigan en la propia realidad, ya que su objetivo fundamental es transformar dicha realidad educativa.

3.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que este proyecto busca que tanto docentes como estudiantes trabajen en conjunto, dirigidos a fortalecer los conocimientos se tomó el siguiente tipo de investigación
Investigación-Acción: es un tipo de investigación social aplicada que se caracteriza por la inmediatez y el grado de involucramiento del investigador. La idea central es que el investigador no es sólo un cronista de la realidad social sino un agente de cambio. La acción es parte integral de la investigación, son como los dos lados de una misma moneda. Implica la participación conjunta de las personas que van a ser beneficiarias de la investigación y de aquellos quienes van a hacer el diseño, la recolección y la interpretación de los datos para encontrar soluciones a las necesidades y requerimientos.

Murcia (1990) citado por Hurtado y Toro (1997)[92] considera que en este tipo de investigación no existe un núcleo de principios epistemológicos y metodológicos establecidos con anterioridad, todo emerge de la dinámica social y de la interacción en el contexto. Para él "el conocimiento de la realidad del objeto es en si mismo un proceso de transformación a través de la superación de los conflictos y contradicciones del investigador, del grupo participativo y del problema u objeto de estudio. Entonces el conocimiento de la realidad no se descubre ni se posee: es el resultado de la transformación objetiva y subjetiva que lo produce dentro del mismo proceso de investigación-acción-participante".

En la Investigación-Acción pasa junto a los participantes a formar parte del proceso de toma de decisiones, así los hallazgos el investigador actúa como un facilitador o recurso proporcionando información que ayude a tomar decisiones sobre diferentes alternativas de acción. El investigador de la investigación se da en la forma de experiencia compartida que crea un conocimiento a veces difícil de comunicar en términos académicos tradicionales.

En general, se pueden describir 5 características que definen la Investigación Acción y que las distinguen de otras metodologías en ciencias sociales:

a. Es práctica, en el sentido que la investigación debe conducir no sólo a avances teóricos sino que debe tener consecuencias prácticas para todos los participantes.

b. Es participativa y colaborativa, de manera que trata de superar la relación desigual entre investigador e investigado

c. Es emancipatoria, en el sentido que trata de liberar a los involucrados del rol de sujetos poniéndolos en posiciones de influencia, tanto en la investigación misma como en las acciones y vida a seguir como consecuencia.

d. Es interpretativa por todos los participantes, a diferencia de la investigación tradicional donde el investigador es el experto y sus opiniones son las dominantes.

e. Es crítica, porque todos los participantes se comprometen a un análisis crítico de sus situaciones, posibles recursos y limitaciones de acción

La Investigación-Acción comparte algunos rasgos con la etnografía y la observación participante, pero es esencialmente diferente en la relación entre investigador e investigado. Las diferencias se dan en varios aspectos fundamentales:

En la observación participante aquéllos que son observados se revelan ante el observador, pero el observador no se revela ante ellos. En Investigación-Acción, el investigador actúa como un miembro participante total del grupo, así la relación es más abierta y honesta.

[92] Murcia(1990) citado por Hurtado y Toro (1997) Murcia(1990)

3.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

El grupo de niñas del grado cuarto B, está conformado por 42 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 8 y los 11 años de edad. Son niñas con principios y valores bien dirigidos desde sus hogares y fortalecidos en esta Institución educativa, su realidad social les es favorable en los aspectos familiares, socio-económico y cultural. Reciben clases por parte de diferentes docentes, de acuerdo con el área de estudio. Las directivas están siempre pendientes del desarrollo integral de sus alumnas.

La muestra de estudiantes que se tomó para el desarrollo del presente proyecto pertenece al grado descrito anteriormente. Del total del número de niñas que es de 42, se tomó un grupo de 20 niñas de forma aleatoria.

3.4 VARIABLES

Estas variables se tomaron para analizar el nivel del problema:

- Reconoce diferentes figuras geométricas
- Identifica diferentes formas de triángulos
- Diferencia un círculo de un ovalo
- Nombra correctamente las figuras geométricas sugeridas
- Reconoce el concepto de área del cuadrado y rectángulo
- Emplea correctamente los conceptos de área del cuadrado y del rectángulo en la resolución de problemas
- Realiza gráficos según las áreas indicadas
- Extrae información de un gráfico y halla su área
- Descompone correctamente los polígonos en cuadrados, triángulos y rectángulos
- Calcula áreas de diferentes figuras compuestas
- Descompone en triángulos diferentes polígonos
- Resuelve problemas que requieren del uso de los conceptos de área

3.5 MÉTODO[93]

Al organizar el proyecto de investigación, veo la necesidad de elegir que tipo de investigación es la más apropiada para el trabajo que se va a realizar, y en este caso como el objetivo del trabajo es ver la eficacia de los materiales de apoyo concretos y virtuales que se les proporcionen a los estudiantes para la enseñanza de un tema concreto como es área de algunas figuras

[93] W.W.W.GOOGLE.COM/MONOGRAFIAS.COM./METODOS DE INVESTIGACION 2007

geométricas. Nos encontramos ante una "investigación curricular " en la que se debe seguir un proceso constante de desarrollo y evaluación: Elaboración de una primera propuesta de material, experimentación del mismo, evaluación de los resultados.

Se utilizará el método cualitativo ya que se analizará la formación de conceptos y se trata de indagar sobre cómo se desarrolla el proceso cognitivo y de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él. También se utilizará la entrevista formativa completamente estructurada y con preguntas orientadas a objetivos muy específicos para descubrir como tienen lugar los procesos de aprendizaje de la estudiante, para lo cual se les proporcionará determinada información (conceptos, propiedades, técnicas) y observaré como la asimila y utiliza.

Para recoger la información cualitativa se hará mediante la observación y las entrevistas por el investigador, con ayuda en el aula de un operador con una cámara de video (fotos).

La observación será participativa en la cual trataré de comportarme como miembro de grupo para comprender mejor las interacciones aunque tomaré una postura de observador externo, para tener una perspectiva adecuada sobre las actividades del grupo.

Para la realización de la exploración que se pretende en este trabajo, nos ubicaremos en el colegio Calasanz femenino con niñas del grado 4 de primaria entre 9 y 10 años de edad.

El método a seguir para la implementación del presente proyecto, se basa en la experiencia, para que por medio de una pedagogía adecuada para el grupo de estudiantes del grado 4 de básica primaria, lograr que todos los conocimientos descriptivos mentales o verbales que poseen para la resolución de problemas que impliquen las operaciones matemáticas de adición y sustracción, sean capaces de realizarlos utilizando como medio el lenguaje matemático escrito.

3.6 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Las técnicas que se implementarán para el logro de los objetivos, serán desarrolladas por medio de la observación, interacción y participación, tanto del docente como de los estudiantes en el desarrollo de las actividades interclase y reforzando con la repetición (práctica) en espacios posteriores, así:

- Observación participativa
- Prueba diagnóstica inicial

- Análisis de resultados
- Fortalecimiento de concepto
- Unidad didáctica
- Talleres de refuerzo
- Prueba diagnóstica final
- Análisis de resultados
- Conclusiones

3.7 INSTRUMENTOS

Los siguientes son los Instrumentos utilizados para el desarrollo del proyecto

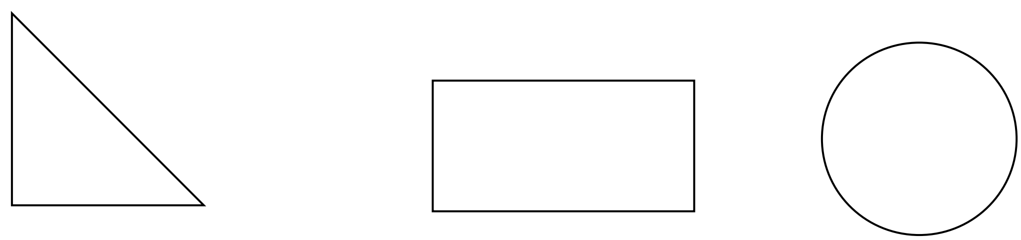
- Talleres
- Cámara fotográfica
- Encuestas
- Guías
- Pruebas
- Elaboración material didáctico
- Material alternativo

IV. DIAGNÓSTICO

4.1 PRUEBAS - ANALISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS

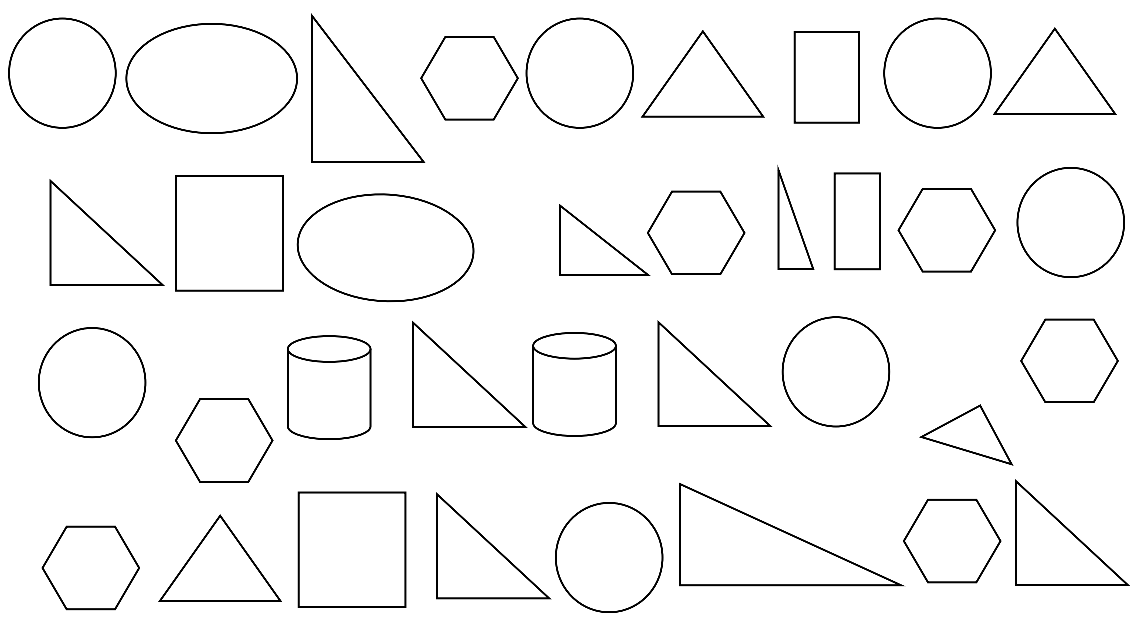
4.1.1 PRUEBA DIAGNOSTICA #1 - CONOCIMIENTOS BASICOS DE GEOMETRIA:

1. Observa bien las siguientes figuras, lee sus nombres y memorízalos.



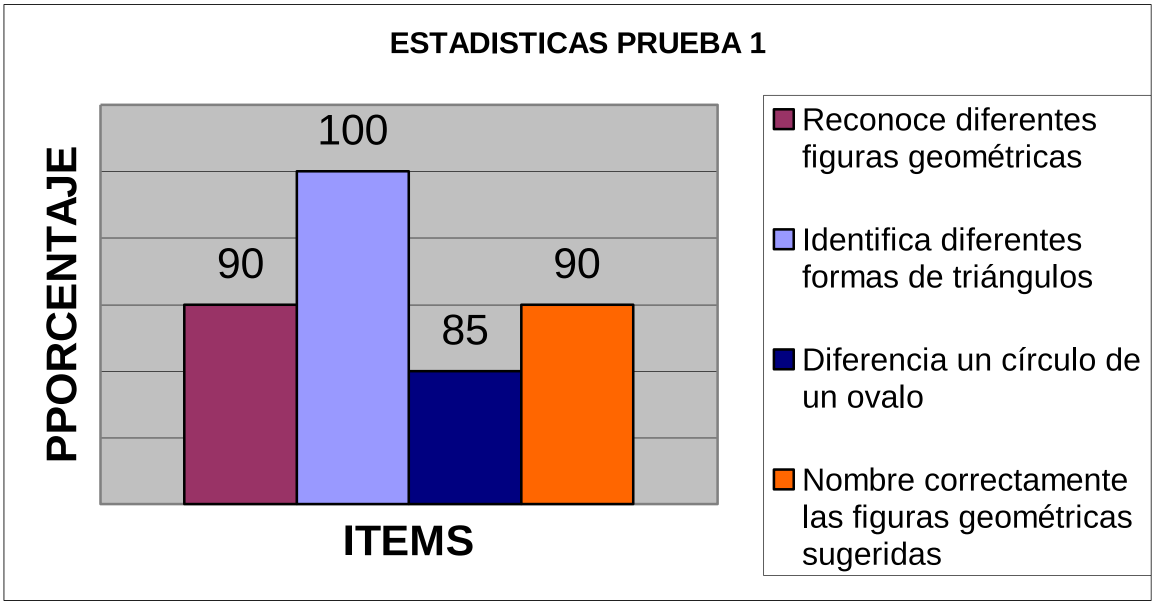
TRIANGULO **RECTANGULO** **CÍRCULO**

2. Mira bien cada una de las siguientes figuras
3. Escribe una T dentro de los triángulos
4. Escribe una R dentro de los rectángulos
5. Escribe una C dentro de los círculos



4.1.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PRUEBA #1

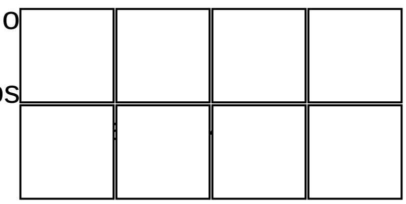
ITEMS	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS ACERTADAS	PORCENTAJE %	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS INCORRECTAS	PORCENTAJE %
Reconoce diferentes figuras geométricas	18	90%	2	10%
Identifica diferentes formas de triángulos	20	100%	0	0%
Diferencia un círculo de un ovalo	17	85%	3	15%
Nombra correctamente las figuras geométricas sugeridas	18	90%	2	10%



4.2 PRUEBA DIAGNOÓSTICA #2 – ÁREA DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO

Para calcular el área de un rectángulo se multiplican las medidas del largo y del ancho:

Área rectángulo = largo X ancho
= 4cm. X 2 cm.
= 8 cm. cuadrados

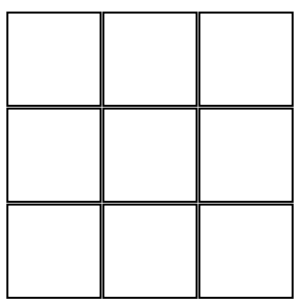


Ancho =2 Cm.

Largo = 4cm.

Para calcular el área del cuadrado, se multiplica la medida del lado por si misma:

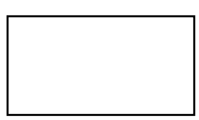
Área del cuadrado
= lado x lado
= 3cm. X 3cm.
= 9 cm. cuadrados

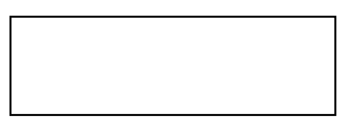


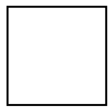
Lado: 3 cm.

Lado: 3cm.

1. Mide los lados de cada polígono, luego calcula su área







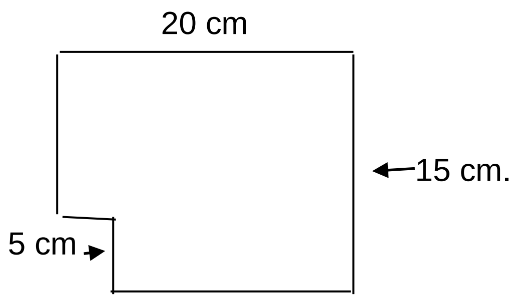
Área =__cm.x___cm
= ______ cm.^{2}

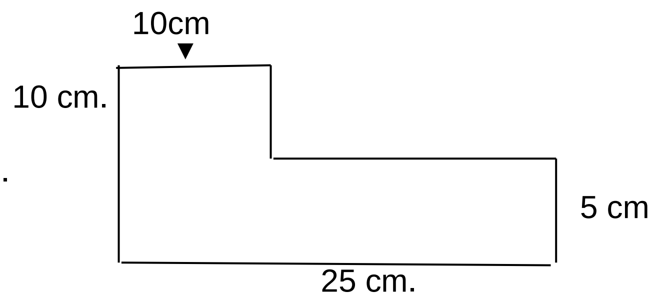
área = __cmx___cm
=______cm^2

área =___cm X ___cm
=________cm^2

2. Dibuja un rectángulo y un cuadrado que tengan 16 cm. ^{2} de área cada uno.

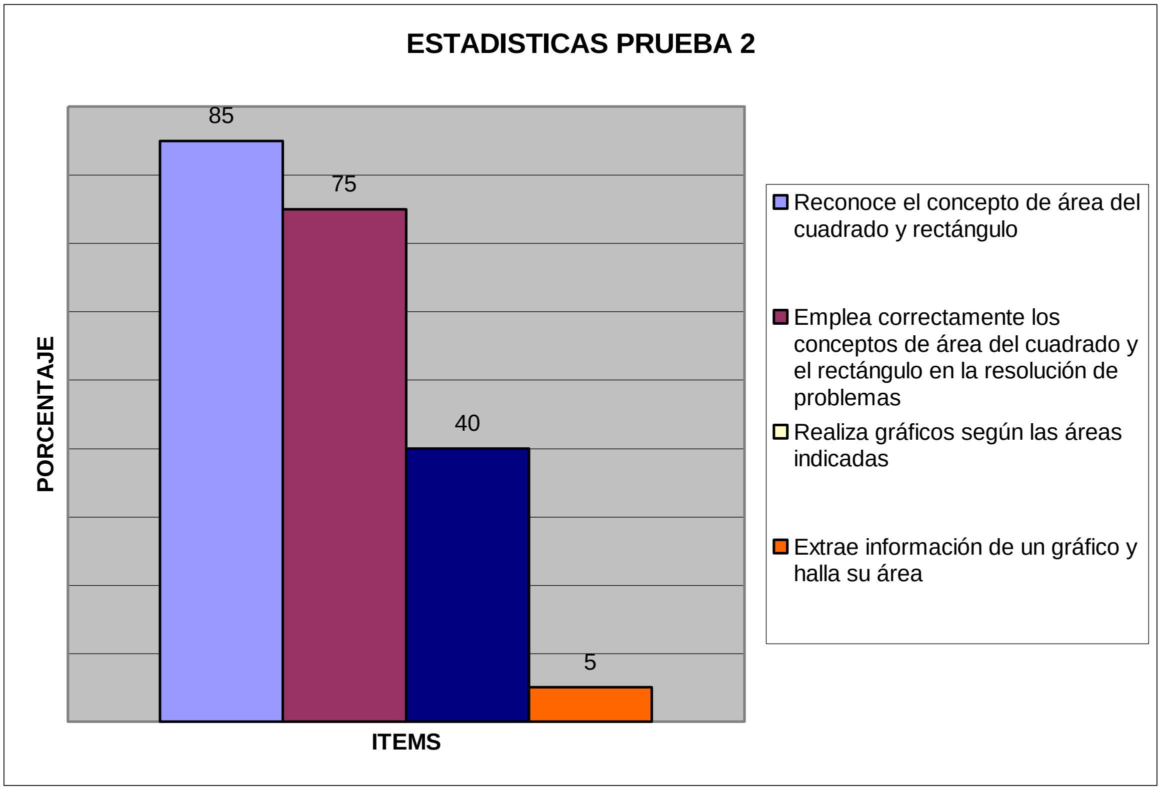
3. Extraer información de un gráfico:
   Las figuras están formadas por rectángulos y cuadrados, de acuerdo con las medidas dadas calcula su área:





4.2.1 ANALISIS DE RESULTADOS PRUEBA #2

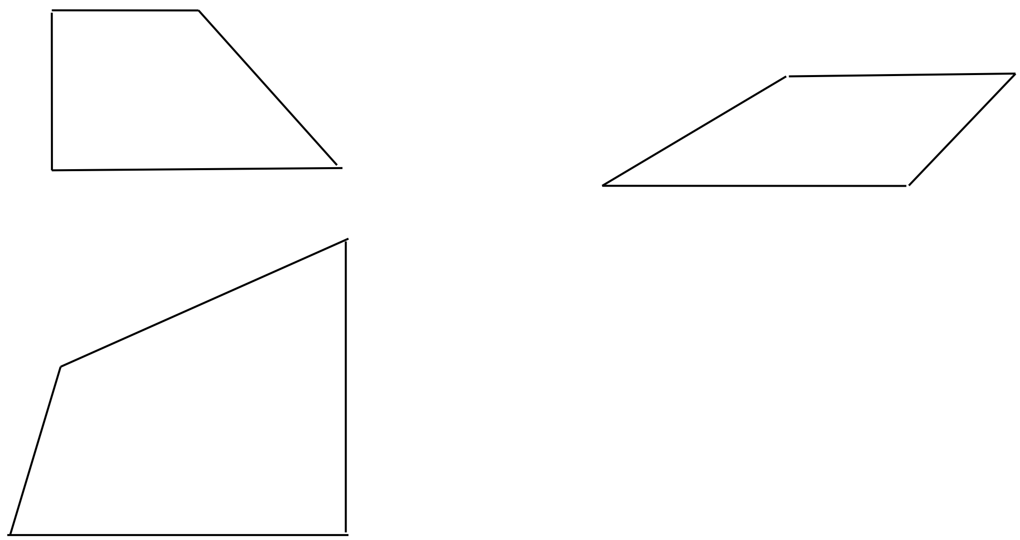
ITEMS	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS ACERTADAS	PORCENTAJE %	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS INCORRECTAS	PORCENTAJE %
Reconoce el concepto de área del cuadrado y rectángulo	17	85%	3	15%
Emplea correctamente los conceptos de área del cuadrado y el rectángulo en la resolución de problemas	15	75%	5	25%
Realiza gráficos según las áreas indicadas	8	40%	12	60%
Extrae información de un gráfico y halla su área	1	5%	19	95%



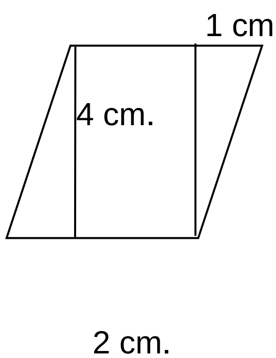
4.3 PRUEBA DIAGNOSTICA #3 – AREA DE FIGURAS COMPUESTAS

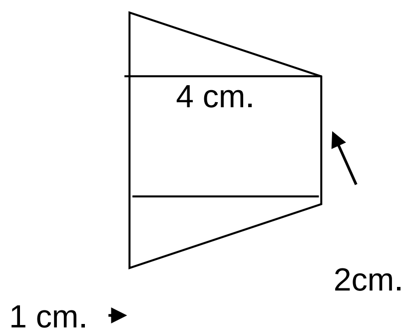
Área del rectángulo = base X altura;
Área del triángulo = (base X altura) /2;
Área del paralelogramo = base x altura:

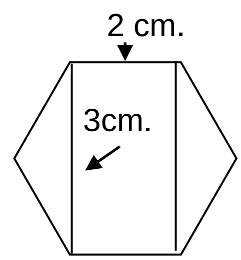
1. Realiza la descomposición de cada figura en cuadrados, triángulos y rectángulos:



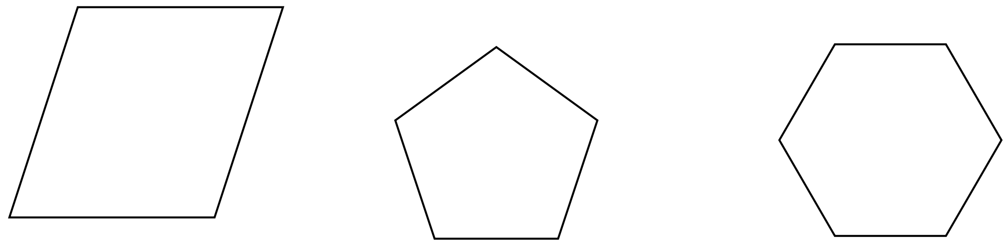
2. Calcula el área de cada figura:





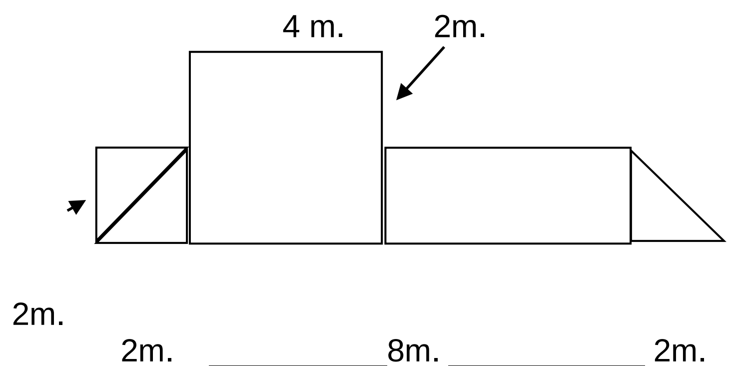


3. Traza desde un vértice todos los segmentos de recta hasta los otros vértices. ¿cuántos triángulos se obtienen en cada polígono?



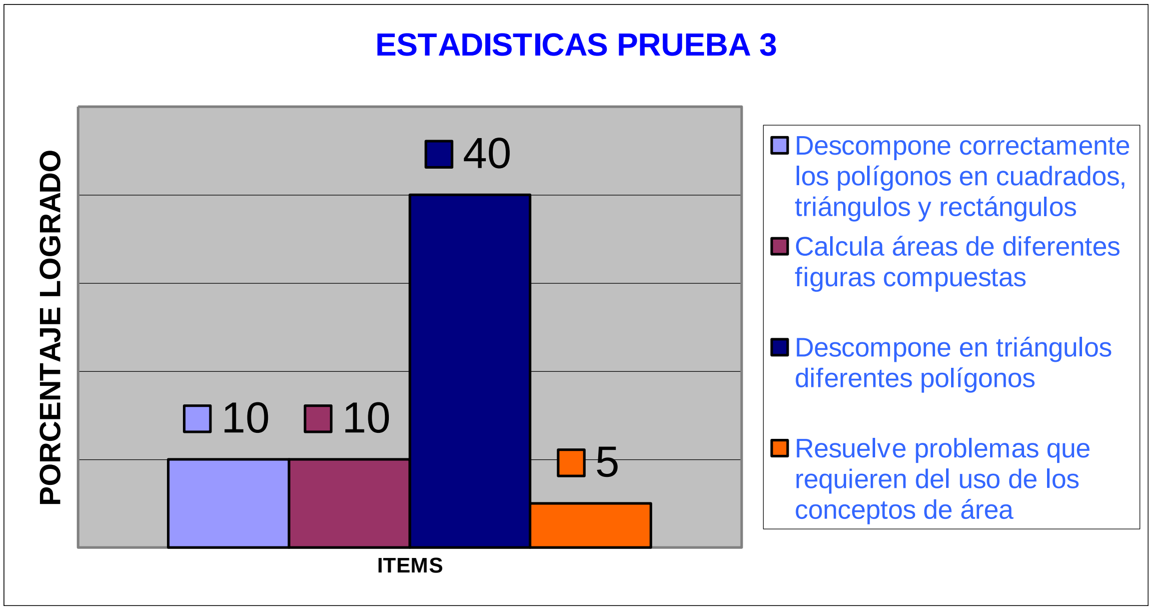
4. Resuelve el siguiente problema.

Si el metro cuadrado de una baldosa cuesta $16 520 y se quiere embaldosar un piso como el que se muestra en la figura, ¿cuánto dinero se necesita para cubrir el piso?

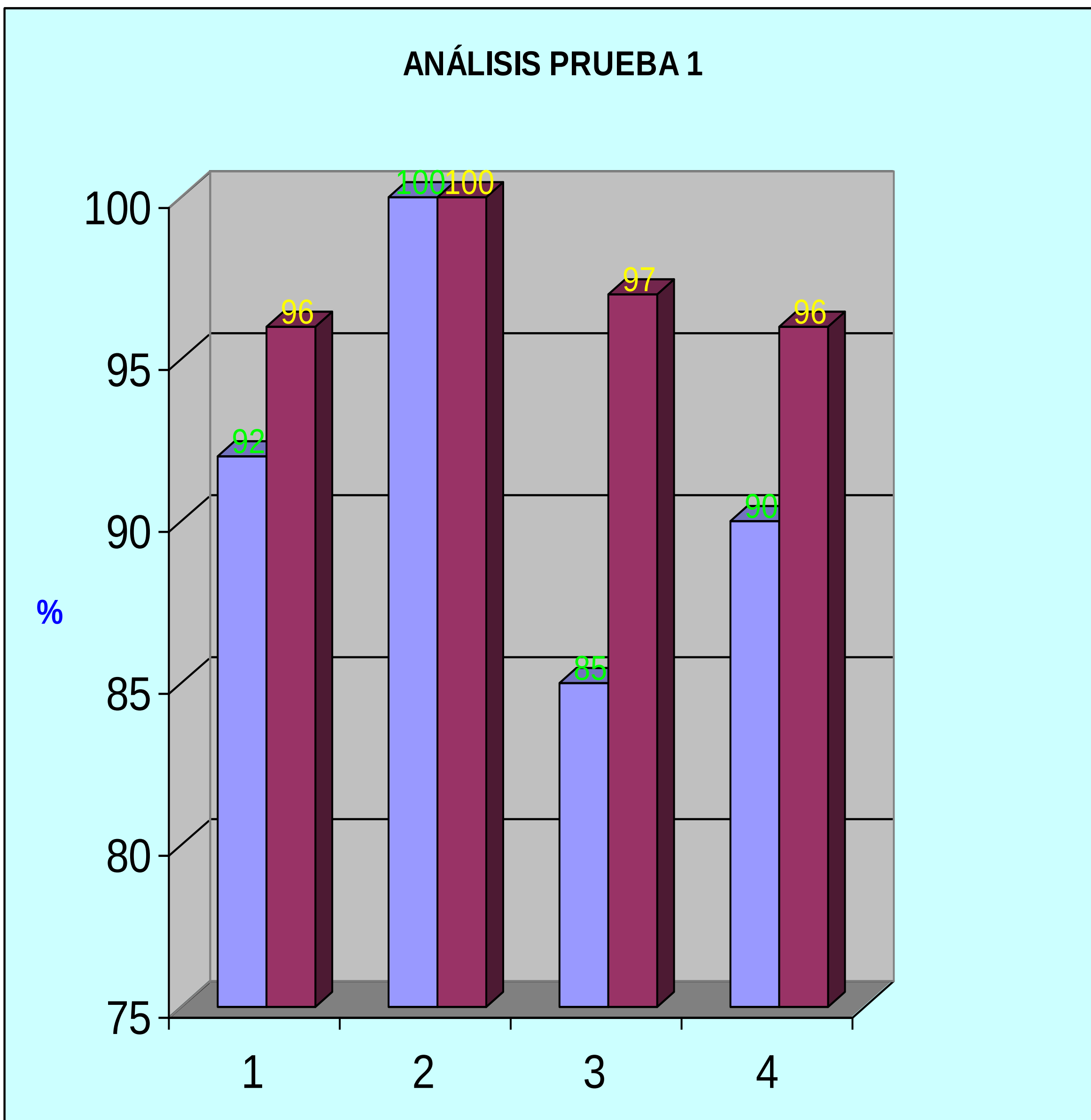


4.3.1 ANALISIS DE RESULTADOS PRUEBA #3

ITEMS	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS ACERTADAS	PORCENTAJE %	ESTUDIANTES CON RESPUESTAS INCORRECTAS	PORCENTAJE %
Descompone correctamente los polígonos en cuadrados, triángulos y rectángulos	2	10%	18	90%
Calcula áreas de diferentes figuras compuestas	2	10%	18	90%
Descompone en triángulos diferentes polígonos	8	40%	12	60%
Resuelve problemas que requieren del uso de los conceptos de área	1	5%	19	95%

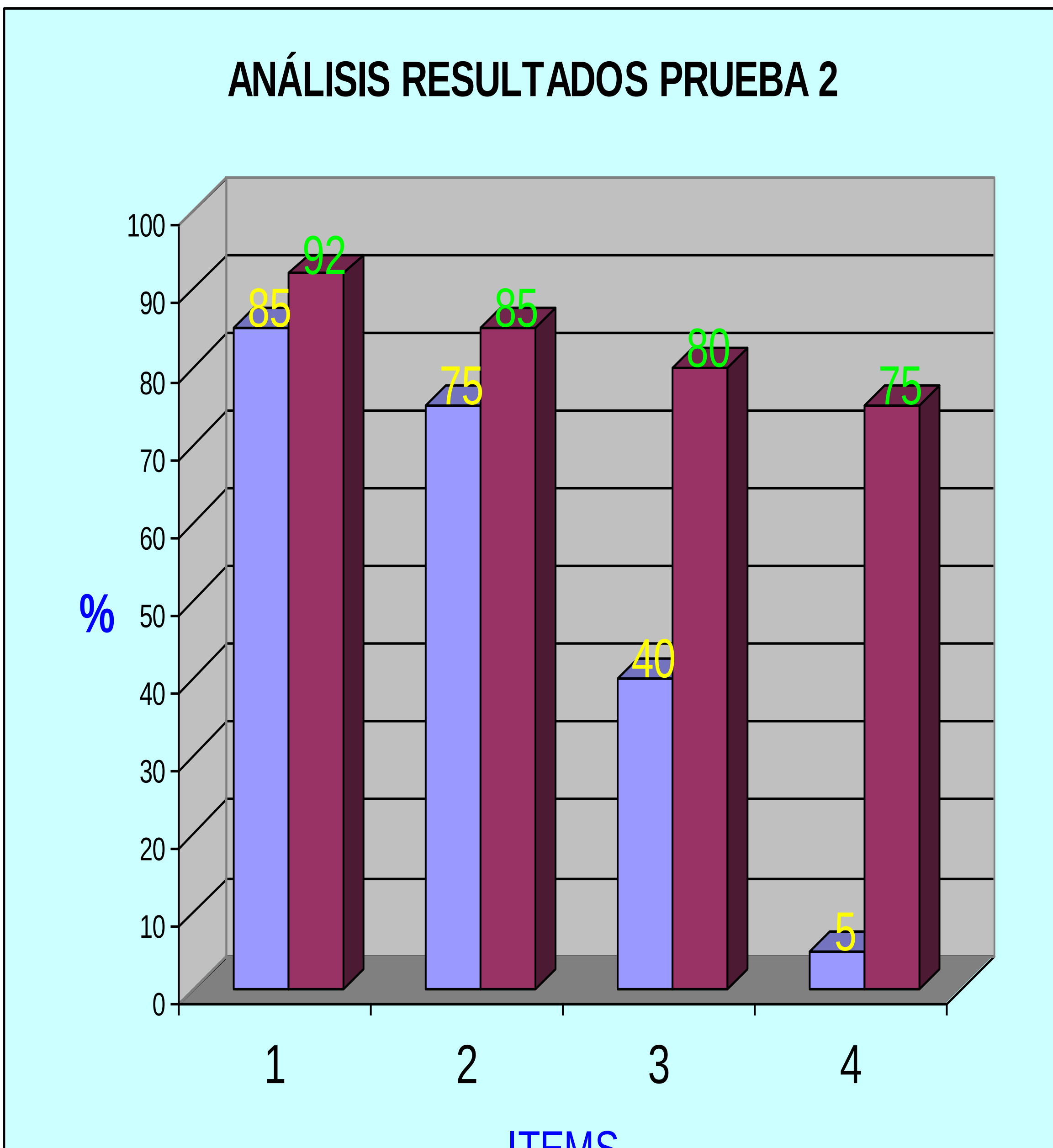


4.4 RESULTADOS PRUEBA INICIAL VS. PRUEBA FINAL



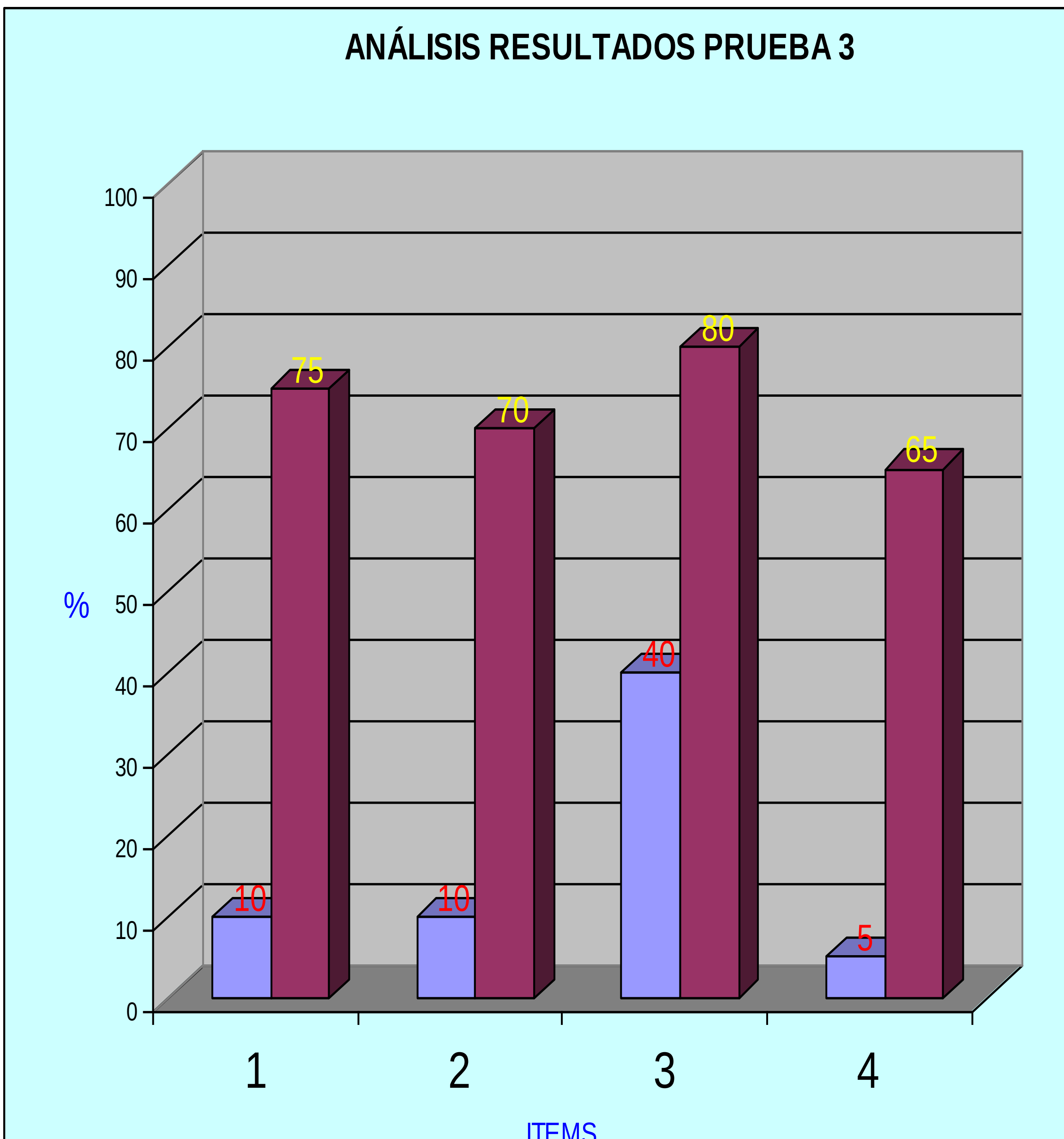
Prueba inicial **Prueba final**

1. Reconoce diferentes figuras geométricas
2. Identifica diferentes formas de triángulos
3. Diferencia un círculo de un óvalo
4. Nombra correctamente las figuras geométricas sugeridas



PRUEBA INICIAL PRUEBA FINAL

1. Reconoce el concepto de área del cuadrado y rectángulo
2. Emplea correctamente los conceptos de área del cuadrado y el rectángulo en la resolución de problemas
3. Realiza gráficos según las áreas indicadas
4. Extrae información de un gráfico y halla su área



PRUEBA INICIAL PRUEBA FINAL

- Descompone correctamente los polígonos en cuadrados, triángulos y rectángulos
- Calcula áreas de diferentes figuras compuestas
- Descompone en triángulos diferentes polígonos
- Resuelve problemas que requieren del uso de los conceptos de área

PLAN DE ACCIÓN				
ETAPAS	**OBJETIVO**	**ACTIVIDADES**	**RECURSOS**	**TIEMPO**
1. Reconocimiento	1. Reconocer figuras equivalentes en distintas posiciones, implementando la lógica y la interpretación de imágenes visuales.	1. Definir las figuras geométricas básicas utilizadas en el tangram de siete piezas. 2. Reconocer el tangram como la herramienta central de nuestro proyecto. 3. Construcción de diferentes figuras bases y obtención de partes del todo por descomposición geométrica. 4. Implementar los principios de lógica en la construcción de nuevas figuras y sus posibles descomposiciones	▪ Tablero ▪ Marcadores ▪ Hojas de papel ▪ Tijeras ▪ Rompecabezas ▪ Tangram de siete piezas ▪ Cuadernos ▪ Lápices	Dos semanas Una semana Dos semanas Dos semanas
2. Establecimiento de relaciones globales	2. Que las estudiantes en situaciones reales, pictóricas y construcciones con el Tangram, entablen relaciones globales independientes de formas y tamaños.	1. Llevar a situaciones reales las experiencias con las visualizaciones y ejercicios realizados durante la primera etapa, con el fin de establecer relaciones de espacio y tiempo. 2.Realizar frecuentemente construcciones geométricas utilizando el tangram y definir las relaciones existentes entre las figuras que lo componen 3. Implementar el concepto de área relacionado con los ejercicios con el tangram. 4. Llevar a la realidad con ejercicios prácticos lo trabajado con el tangram.	▪ Tablero ▪ Marcador ▪ Cuaderno ▪ Lápices ▪ Tangram ▪ Objetos del salón ▪ Espacios físicos del colegio ▪ Otros	Una semana Una semana Dos semanas Una semana

			espacios	
3. implementación de relación métrica y espacial.	3. Identificar el papel que cumplen las relaciones métricas dentro de las relaciones espaciales.	1. Realizar mediciones de diferentes objetos y establecer relaciones espaciales entra ellos y otros más pequeños y grandes de su misma forma. 2.Conceptualizar las definiciones de métrica y espacio 3. Implementar el tangram para hacer trabajos de manejo, observación y práctica de ejercicios que nos refuercen los conceptos anteriores 4. Con el uso del tangram, ejercitar y fortalecer los conceptos de relación métrica y espacial.	▪ Objetos varios ▪ Tablero ▪ Marcadores ▪ Cuadernos ▪ Lápices ▪ Regla ▪ Escuadras ▪ Tangram ▪ Rompecabezas ▪ Libros de consulta	Una semana Una semana Una semana Una semana

4. Identificación y Comparación	4. Construir las siete piezas del tangram por composición de triángulos rectángulos isósceles e identificar un triángulo como unidad comparativa	1. Analizar cada una de las siete piezas del tangram y establecer diferentes composiciones de sus partes tomando como base sus triángulos 2. En grupos de dos o tres estudiantes, realizar dentro de la clase y con base en el tangram, otro del mismo tamaño pero únicamente que se componga de triángulos. 3. Por medio de mediciones establecer que área tiene cada triángulo y qué área tiene todo el nuevo tangram, cuántos triángulos pequeños lo componen y otras características. 4. Cada estudiante realizará un nuevo tangram, de menos piezas, puede ser uniendo varios triángulos pequeños para formar nuevas figuras geométricas	▪ Tangram de siete piezas ▪ Tablero ▪ Marcadores ▪ Cuadernos ▪ Lápices ▪ Hojas de papel ▪ Tijeras ▪ Regla ▪ Cuadrículas	Una semana Una semana Una semana Una semana
5. Fortalecimiento y dominio	5. Mediante el uso frecuente del Tangram, dominar las nociones de áreas equivalentes y fortalecer el concepto general de área.	1. Ejercitación frecuente del concepto de áreas y utilización de la lógica matemática, por medio de construcciones con el uso del tangram 2. Por medio de mediciones y sobreposiciones fortalecer los conceptos de métrica y relaciones espaciales 3. Realización de trabajos de refuerzo en clase 4. Desarrollar la creatividad de las niñas solucionando talleres en los cuales se sugiera la construcción de figuras abstractas mediante el tangram	▪ Tablero ▪ Marcadores ▪ Cuadernos ▪ Lápices ▪ Tangram ▪ Cartulina ▪ Tijeras ▪ Papel ▪ Otros.	Dos meses Dos meses Dos meses Una semanas

4.5 UNIDAD DIDÁCTICA

4.5.1 ÍNDICE UNIDAD DIDÁCTICA

4.5.2 TRABAJO LÚDICO
"el tangram"

Perfil del Grupo Estudiantes del grado cuarto de primaria de la jornada mañana, niñas entre 8 y 11 años de edad, de un nivel socioeconómico medio alto entre los estratos 4 y 5.
Objetivo general de la unidad. Lograr que las niñas de básica primaria del grado cuarto empleen el tangram como una unidad didáctica para generar un aprendizaje significativo en actividades pictóricas y constructivas y así reconozcan, cuenten, analicen y ordenen información sobre: lógica, abstracción y áreas equivalentes.
Conexión con el currículo. Se implementa en el desarrollo de competencias aplicables a lo comercial como en compras o en ventas, así correlacionándolo con el medio o el entorno del estudiante, es decir en su diario vivir, para que aplique, piense y actué frente a diferentes situaciones.

I. INVENTARIO DEL CONTENIDO

Contenidos.		
Conceptos.	**Procedimiento**	**Actitudes**
• Presentación del tangram • Cuadrado • Triángulo • Romboide • Comparación de las fichas del tangram	▪ Observación, conteo ,manipulación de las fichas del tangram(dibujar el tangram en cartón paja) ▪ Conceptos y	• Interés por conocer las diferentes figuras que conforman el tangram • Establecer las relaciones entre las diferentes figuras

• Contornos de las figuras • Tomar una ficha del tangram como unidad de medida • Regiones • Vértices • Lados	dibujos de cuadrado, triangulo y romboide(realizar un taller) ▪ Observación, manipulación y concepto del entorno de cada una de las figuras que forman el tangram ▪ Observación ,manipulación conteo y concepto de lado	del tangram • En guía de aplicación comparar y diferenciar las figuras del tangram. • Descubrir diferentes figuras por medio de su entorno y realizarlas con el tangram. • Tomar como unidad de medida el triángulo pequeño. • Realizar varios ejercicios

II. OBJETIVOS

Objetivos Didácticos.
• Reconocer que el tangram es un rompecabezas de siete piezas geométricas. • Comprender que al unir las figuras del tangram se puede formar un cuadrado, un triángulo, un rectángulo, un trapecio, un romboide y tantas figuras como puedas imaginar. • Construir diferentes figuras con el tangram y dibujar el contorno de cada una de ellas • Observar el contorno de figuras y construirlas con las siete piezas del tangram. • Reconocer e identificar los vértices, los lados y las regiones de cada figura que conforma el tangram

III. ACTIVIDADES

Conocimientos necesarios previos del tema.

- Utilización de regla.
- Tomar medidas a una superficie
- Manejo de rompecabezas
- Saber contar
- Conocer los colores
- Identificar tamaños

Actividades de motivación.

- Presentación de imágenes con el tangram
- Identificación de las fichas por medio del tacto
- Observación de los colores y tamaño de las fichas
- Darle el nombre correspondiente a cada ficha (concursos).
- Elaboración del tangram con una medida mayor
- Construcción de figuras propuestas por las niñas (dibujo del contorno)
- Observación del contorno de figuras y construcción de las mismas

Actividades de enseñanza/aprendizaje.

Actividad	Tiempo	Grupos	Espacios
• Armar un rompecabezas • Presentación y conteo de las fichas del tangram (numerarlas)	1º hora	Docente y grupo	Cancha salón
• Comparar y nombrar adecuadamente las fichas del tangram (triángulo, rectángulo, romboide, cuadrado).	1hora	Grupo/individual Docente	Aula
• Realizar diferentes figuras y dibujar su contorno	2horas	Grupo/individual	Aula
• Observar el contorno de algunas figuras y elaborarlas con las siete piezas del tangram	4 horas	Todo el grupo/docente	Aula
• Construir diferentes figuras con el tangram y en ellas identificar: regiones, vértices, separaciones o fronteras.	2horas	Individual	Aula

• Realizar talleres donde se observe el aprendizaje que han adquirido las niñas sobre este temas	3horas	individual	Aula - casa
• Elaborar un tangram de un tamaño superior al que se viene manejando.	3 horas	Todo el grupo/individual	Aula
• Tomar como unidad de medida el triángulo pequeño y con él hacer recubrimientos en cada una de las figuras del tangram	1 hora	Grupo/personal	Aula - Casa
• Desarrollar guías de este tema o	3horas	Grupo/individual	Aula – patio Salón didáctico

IV. PROCESO

Momentos del trabajo. • Trabajo personal • Trabajo grupal • Socialización profesor – estudiante • Interacción simultanea con todos sus compañeros
Extensión temporal de la unidad
Espacios. • Colegio • Casa
Materiales • Rompecabezas. • Tangram. • Cartón paja. • Pinturas.

- Regla, lápiz.
- Talleres
- Colores
- Cartulina
- tijeras

V. EVALUACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Actividades para la evaluación inicial.

- Habilidad y agilidad para armar un rompecabezas.
- Participación adecuada para nombrar y comparar cada una de las figuras del tangram.
- Habilidad y creatividad en la elaboración de las figuras con el tangram
- Capacidad e interés para dibujar adecuadamente el entorno de la figura
- Atención visual para identificar la figura y elaborarla según su entorno
- Comprensión e identificación de vértices, regiones, y separaciones o fronteras
- Desarrollo de guías que contengan cada uno de estos temas
- Elaboración correcta de un tangram en cartón paja
- Realización de cubrimientos en forma correcta tomando como unidad de medida el triángulo pequeño del tangram.

Técnicas de evaluación formativa:

- Corrección y auto corrección de ejercicios
- Desarrollo de cada uno de los ejercicios propuestos en el aula o en casa
- Debates
- Actitud y participación en las actividades colectivas
- Retroalimentación y socialización de los temas
- Trabajo autónomo y participativo en las guías o ejercicios
- Revisión de los trabajos desarrollados en la misma clase.
- Atención y participación
- Esmero y dedicación al trabajo tanto grupal como individual.

4.5.3 BIBLIOGRÍA UNIDAD DIDÁCTICA:

JESÚS A. ANZOLA – PABLO E. ABRIL, DIDÁCTICA Y MATEMÁTICAS, PRIMERA EDICIÓN 2004, GRADO 4º. DIDÁCTICA Y MATEMÁTICAS, BOGOTÁ.

MARÍA S. MARTINEZ R., AMIGOS DE LAS MATEMÁTICAS 4, SANTILLANA S.A., 2006, BOGOTÁ COL.

ESPERANZA C. ALFONSO, JUEGOS MATEMÁTICOS ACTIVOS, REI ANDES LTDA, EDICIÓN AÑO ESCOLAR 1999, PRIMERA EDICIÓN, BOGOTÁ COLOMBIA.

CUADERNILLOS 4º- TANGRAM, DIDÁCTICA Y MATEMÁTICAS.

4.6 TALLERES EVALUACIÓN DELPROCESO

TALLER 1
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
"EL TANGRAM"
CONSTRUYE JUGANDO

NOMBRE: ____CURSO:_________

OBJETIVO: Lograr que los estudiantes identifiquen y reconozcan diferentes figuras geométricas

- Observa la ilustración
- Cierra las líneas abiertas y forma figuras geométricas
- Colorea las figuras y escribe el nombre de cada una de ellas

TALLER 2
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
“EL TANGRAM”
INVENTA Y DIBUJA

NOMBRE: ____ CURSO:________

OBJETIVO: Despertar en los estudiantes la capacidad de relacionar objetos reales, con figuras geométricas

- Utilizar compás y regla
- Inventa un paisaje en el que predominen las figuras geométricas

TALLER 3
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
“EL TANGRAM”
CONSTRUYE Y APRENDE

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Construir e identificar las diferentes figuras geométricas que conforman el tangram

- El tangram es un rompecabezas
- Observa en él las figuras geométricas que contiene
- Descubre armados en el tangram dos cuadrados ¿cuáles son?
- ¿Cuántos triángulos tiene el tangram?
- Recorta y pega el tangram sobre una base de cartón paja
- Recorta cada una de las siete piezas del tangram
- Arma con el tangram diferentes figuras geométricas

TALLER 4
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
“EL TANGRAM”
RESPONDE Y APRENDE

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Lograr que los estudiantes comprendan que las figuras geométricas del tangram están conformadas por triángulos

- Escribe el nombre de las figuras geométricas que conforman el tangram

____

____

____

- En el cuadrado de abajo y en una escala menor, dibuja las siguientes construcciones que puedas armar con el tangram
  - Construye un cuadrado con los dos triángulos grandes
  - Construye dos cuadrados con los dos triángulos pequeños del trangram
  - Con los dos triángulos grandes construye un romboide
  - Construye un cuadrado con el triángulo grande, dos triángulos pequeños y el cuadrado
- Con los dos triángulos pequeños y el triángulo mediano del tangram construye:
  - Un rectángulo - Un cuadrado -Un romboide -Un triángulo
- Con los triángulos pequeños y el cuadrado del tangram construye:
  - un rectángulo - un trapecio - un romboide - un triángulo

TALLER 5
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
“EL TANGRAM”
ANALIZA Y ARMA

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Lograr que los estudiantes construyan y analicen diferentes figuras utilizando las piezas del tangram

- Construye las siguientes figuras utilizando las piezas del tangram

TALLER 6

LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS

"EL TANGRAM"

OBSERVA Y DESCUBRE

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Lograr que los estudiantes analicen y descubran las piezas del tangram utilizadas en las diferentes figuras

- En las siguientes figuras descubre las piezas del tangram que se utilizaron y la forma en que se colocaron

TALLER 7
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
"EL TANGRAM"
ANALIZANDO Y APRENDIENDO

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Identificar elementos geométricos en diferentes polígonos y figuras

- Observa cada uno de los polígonos y en ellos señala con un color rojo los vértices y con un color azul los lados
- Construye las figuras con las siete piezas del tangram y retiñe los lados con color verde
- Frente a cada figura anota: número de vértices, número de lados, número de ángulos

---

POLIGONO
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

FIGURA
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

POLIGONO
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

FIGURA
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

POLIGONO
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

FIGURA
Número de lados
Número de vértices
Número de ángulos

TALLER 8

LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS

"EL TANGRAM"

ANALIZANDO Y APRENDIENDO

NOMBRE: ____ CURSO:________

OBJETIVO: Por medio de recubrimientos descubrir el área de cada una de las figuras

- Coloca sobre cada uno de los polígonos las piezas necesarias del tangram para construirlos. Dibújalo.
- Traza los lados o separaciones con un color
- Analiza y escribe el número de triángulos pequeños que utilizó para hacer el cubrimiento en cada una de las figuras

CUADRADO DE ÁREA 8

CUADRADO DE ÁREA 4

CUADRADO DE ÁREA 2

TALLER 9
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
"EL TANGRAM"
ANALIZANDO Y APRENDIENDO

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Hallar el área en diferentes figuras, según los recubrimientos necesarios, tomando como base el triángulo pequeño

- Construye las siguientes figuras utilizando las siete piezas del tangram
- Utiliza diferentes colores para identificar cada una de las piezas del tangram
- Frente a cada figura escribe el área teniendo en cuenta los recubrimientos realizados con el triángulo pequeño

TALLER 10
LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMATICAS
“EL TANGRAM”
ANALIZANDO Y APRENDIENDO

NOMBRE: ____CURSO:________

OBJETIVO: Analizar y construir diferentes figuras según el área sugerida

- Utilizar las piezas necesarias del tangram para construir las figuras según el área pedida, teniendo en cuenta que algunas figuras no es posible recubrirlas con las piezas del tangram.

4.7 DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES:

1. Se avisará con anterioridad para que las niñas traigan cualquier rompecabezas que tengan en casa, durante la primera clase las niñas armarán diferentes rompecabezas intercambiándolos entre ellas, de esta manera identificarán varias figuras.

2. Mediante la observación y manipulación del tangram las niñas identificarán y nombrarán cada una de las figuras geométricas que componen el tangram, si se presenta alguna duda la docente la explicará.

3. Con las fichas del tangram explicaré como armar diferentes figuras y como dibujar el contorno de cada una de ellas. Luego las niñas realizarán varios ejercicios según la explicación.

4. Observaremos el contorno de algunas figuras realizadas con el tangram y las armaremos con las siete piezas del mismo. Luego las niñas realizaran diferentes ejercicios teniendo en cuenta la explicación.

5. Explicaré sobre el tema de regiones, vértices y fronteras o separaciones realizando varios ejemplos y luego pasaré a las niñas una guía para que la desarrollen teniendo en cuenta la explicación.

6. Pediré a las niñas que traigan el material adecuado para la elaboración del tangram y lo haremos teniendo en cuenta las medidas correctas y mediante esta actividad las niñas de darán cuenta que es necesario medir correctamente y que existen algunas figuras con las mismas medidas.

7. Utilizando el tangram elaborado por las niñas haremos los recubrimientos necesarios en cada una de las figuras geométricas contenidas en el tangram y junto con este ejercicio desarrollarán una guía de este tema.

4.8 PRONÓSTICO

Teniendo en cuenta que este proyecto ha sido diseñado y probado durante todo un año escolar y sus resultados fueron satisfactorios, se sugiere implementarlo como recurso educativo desde los grados iniciales de la educación básica de los estudiantes, siguiendo su uso en grados posteriores con aumento del nivel de dificultad para los grados superiores.

4.9 CONCLUSIONES

El cambio educativo en la enseñanza sólo puede darse si el profesor se implica en el proceso de reflexión sobre su práctica. Si el proceso investigador se dirige a la transformación educativa de la práctica, el procedimiento es generar conocimiento para ser aplicado.
En este capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación y algunas recomendaciones que se ofrecen, a modo de sugerencias, para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el ámbito de la didáctica y visualización.
Estas conclusiones deben entenderse más como punto de partida para la discusión, para la reflexión colectiva, que como proposiciones.
A modo de resumen se dirá que el propósito de esta investigación ha consistido
en averiguar si las alumnas de edades comprendidas entre 8 y 11 años hacían uso o no de la lógica y el pensamiento espacial con base en imágenes mentales y de los procesos de visualización cuando resolvían problemas de geometría (áreas) utilizando el tangram y, también analizar el papel que tiene el profesorado en esta actividad matemática.

Las conclusiones se centraran en el objeto de mi investigación: “El tangram y su utilización en la actividad geométrica “

- La enseñanza – aprendizaje de la geometría (áreas), se debe hacer más participativa

- Este proyecto pretende hacer de la Geometría una clase didáctica

- Se debe analizar el papel positivo que brinda la implementación de materiales didácticos en la enseñanza matemática en general**.**

4.10 SUGERENCIAS

- Implementar el "TANGRAM", como herramienta de trabajo periódico en geometría.
- Incluir en todos los grados de básica primaria, una unidad didáctica con la cual se busque la implementación de material tangible para el refuerzo de los temas.
- Inducir a las estudiantes a la investigación, con el fin de fortalecer los conceptos teóricos, guiándolos hacia la práctica y dirigiéndolos a facilitar la resolución de problemas de su vida diaria.

BIBLIOGRAFÍA

Angulo Rasco, J. (1999). De la investigación sobre la enseñanza al conocimiento docente. En A. Pérez; J. Barquín; J. F. Angulo (Eds), Desarrollo profesional del docente. Madrid: Akal.

Arnheim, R. (1986). El pensamiento visual. Barcelona: Paidós.

Bernstein, B. (1993). La estructura del discurso pedagógico. Madrid: Morata.

Castelnuovo, E. (1981). La Geometría. Barcelona: Ketres.

Cockcroft, W. H. (1985). Las Matemáticas sí cuentan. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

Contreras, J. (1999). El sentido educativo de la investigación. En A. Pérez Gómez, J.

Barquín Ruiz; J. F. Angulo Rasco (Eds), Desarrollo profesional del docente. Madrid: Akal.

De Vega, M. (1984). Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza.

Doyle, W. (1985). La investigación sobre el contexto del aula: hacia un conocimiento básico para la práctica y la política de formación del profesorado. Revista de Educación.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg. (Traducido por el departamento de Matemática Educatica del CINVESTAV: IPN. México, 1997).

Fernández Viña, J.A. (1976). Lecciones de Análisis Matemático. Madrid: Tecnos.

Feynman, R. (1988). ¿Qué te importa lo que piensen los demás? Madrid: Alianza.

García, J. A.; Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. Enseñanza de las Ciencias.

Gimeno, J. (1988). El Currículum: una reflexión sobre la práctica. Madrid: Morata.

Gimeno, J.; Pérez, A. (1992). Comprender y transformar la enseñanza. Madrid: Morata.

Guzmán, M. de (1996). El rincón de la pizarra. Madrid: Pirámide.

Guzmán, M. de; Colera, J. (1989). Matemáticas 3. Madrid: Anaya.

Holloway G. E. T. (1969). Concepción del espacio en el niño según Piaget. Buenos Aires: Paidos.

Kemmis, S. (1988). El Curriculum: más allá de la teoría de la reproducción. Madrid: Morata.

Luria, A. R. (1968). Pequeño libro de una gran memoria. Madrid: Valograf.

Luria, A.R.; Yudovich, F. (1979). Lenguaje y desarrollo intelectual. Madrid: Pablo del Río.
Luria, A.R. (1980). Lenguaje y pensamiento. Barcelona: Fontanella.
Maslow, A. (1983). La personalidad creadora. Barcelona: Kairós.
Pérez Gómez, A. (1992). Los procesos de enseñanza – aprendizaje: análisis didáctico de las principales teorías de aprendizaje. En J. Gimeno Sacristán y A. Pérez Gómez, Comprender y transformar la enseñanza. Madrid: Morata.
Piaget, J. (1990). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema del desarrollo. Madrid: Siglo XXI de España editores.
Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Ediciones Morata
Plasencia, I.; Güemes, R.; Dorta, J. A.; Espinel, M. C. (1999). Metodología utilizada en un trabajo sobre visualización matemática. Revista de Investigación Educativa.
Presmeg, N. C. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas.
Roanes, E. (1976). Didáctica de las Matemáticas. Salamanca: Anaya.
Ruiz Olabuénaga, J. I. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Bilbao. España: Universidad de Deusto
Skemp, R. (1980). Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Ediciones Morata. , 1978. Hillsdale,
Von Glasersfeld, E. (1994). Despedida de la objetividad. En P.Watzlawick; P. Krieg (Eds), El ojo del observador. Contribuciones al constructivismo. Barcelona: Gedisa.
Wittrock, M. C. (1989). La investigación en la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación. Barcelona: Paidós.

V. ANEXOS

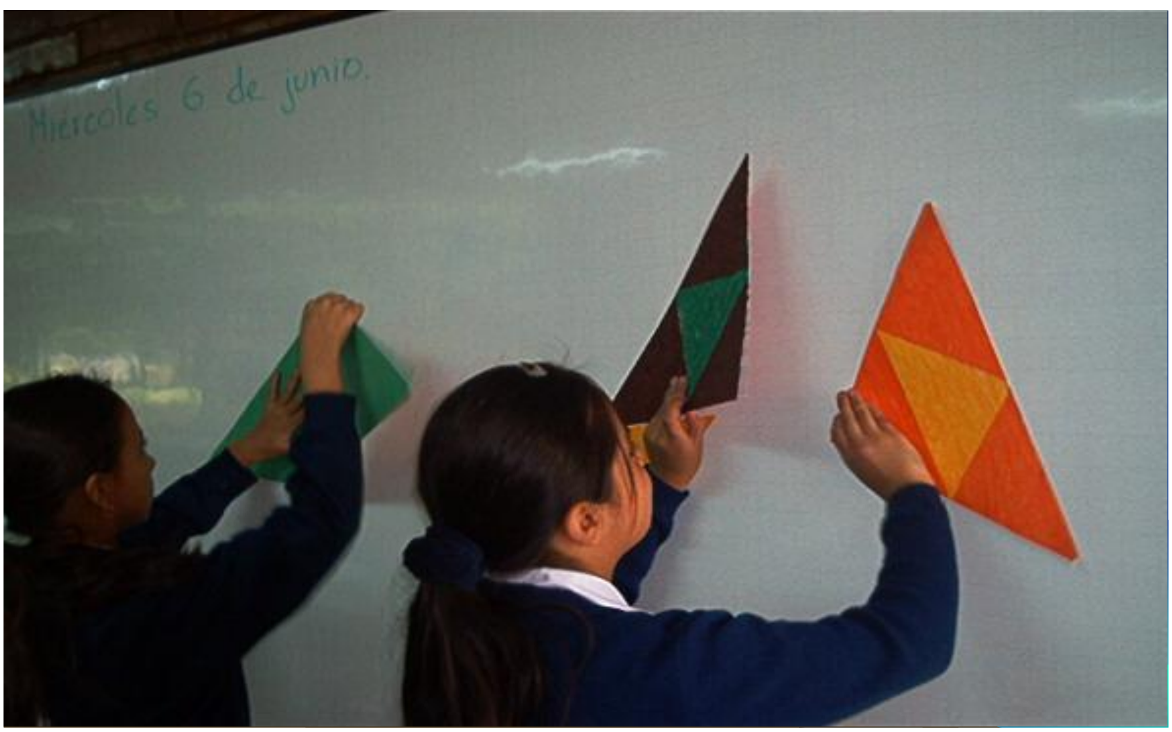
1. Pruebas diagnósticas
2. Evidencias (fotográficas)


Bacilos Búlgaros


Agenda


Agenda


Agenda


Miercoles 6 de junio.