DISEÑO DE PROBLEMAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DENTRO DE LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA EN EL GRADO OCTAVO Y NOVENO DE LA EDUCACION BASICA

WILLIAM SOLARTE CASTILLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2005

DISEÑO DE PROBLEMAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DENTRO DE LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA EN EL GRADO OCTAVO Y NOVENO DE LA EDUCACION BASICA

WILLIAM SOLARTE CASTILLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2005

DISEÑO DE PROBLEMAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DENTRO DE LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA EN EL GRADO OCTAVO Y NOVENO DE LA EDUCACION BASICA

GRUPO DE INVESTIGACIÓN. "FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS"

WILLIAM SOLARTE CASTILLO

Seminario de Grado presentado como requisito parcial para optar al Título de Licenciado en Educación con especialidad en Matemáticas

Director
CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2005

ACEPTACIÓN

Dr. CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE
Director grupo de investigación
"Formulación y Solución de Problemas"

Mg. ÁNGEL HERNÁN ZÚÑIGA
Integrante Comité Evaluador

Esp. GERMAN RAÚL ROSALES
Integrante Comité Evaluador

Fecha de sustentación: Popayán mayo 2 de 2005

A Dios,

A mis padres,

A mi esposa e hija.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Escucho y olvido,
Veo y Recuerdo.
Hago y ... !comprendo!
(antiguo proverbio chino)

El presente documento contiene diversa información sobre el trabajo realizado durante el desarrollo del seminario "diseño de problemas para el desarrollo del pensamiento variacional dentro de la enseñanza del álgebra en el grado octavo y noveno de la educación básica". Inicialmente se presenta el marco teórico que contiene entre otros elementos con respecto a los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Matemáticas, documentación referente a resolución de problemas. Este documento está especialmente dirigido a los docentes de Educación Básica.

Es importante aclarar que los elementos que componen el marco teórico no son lo suficientemente amplios, debido a que el trabajo principal que se llevo a cabo durante el seminario se centro en la búsqueda, selección, modificación y adaptación de diferentes problemas. En la bibliografía se hace referencia a algunos documentos que tienen más extensa la información que en este documento se presenta.

Posteriormente se presentan algunos problemas, los cuales además de incluir el planteamiento del problema, tienen información adicional, que será útil para que el docente pueda emplear el proceso de resolución de problemas. Los diferentes problemas que aquí se encuentran se han agrupado en diversos niveles que no tienen que ver directamente con el grado escolar.

En la parte final del documento, se listan una serie de problemas que han sido previamente seleccionados y clasificados, los cuales pueden ser empleados para trabajar con ellos el enfoque de resolución de problemas.

Además se anexa una propuesta de un curso de capacitación para profesores y estudiantes de licenciatura con el objetivo de capacitar docentes en ejercicio y en formación inicial en los aspectos relevantes sugeridos por el programa de investigación y desarrollo "Formulación y Solución de Problemas: una estrategia metodológica para el diseño curricular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas", que les permita aplicarlos en la práctica educativa diaria del salón de clase. El mencionado proyecto fue aprobado por el Consejo de Investigaciones, Resolución No. 004, 18 de febrero de 2002. Universidad del Cauca, Vicerrectoría de Investigaciones, código VRI: ID 711.

1. JUSTIFICACIÓN

El desarrollo del seminario "diseño de problemas para el desarrollo del pensamiento variacional dentro de la enseñanza del álgebra en el grado octavo y noveno de la educación básica" va encaminado en diseñar una estrategia curricular que sea empleada para mejorar las condiciones existentes de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental, mediante el planteamiento y solución de problemas.

Desarrollar una propuesta curricular de este tipo es otra forma para lograr que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, parta de la propia actividad del estudiante y de su confrontación con el mundo. Al emplear solución de problemas se les proporciona un contexto, donde puedan aprender conceptos y desarrollar destrezas, creando en ellos la necesidad de investigar, aportar, deducir y relacionar sus conocimientos con la realidad.

El Ministerio de Educación Nacional en el documento *Significado de la calidad de la educación* establece que:

"Es fundamental que todos los estudiantes desarrollen al máximo sus capacidades de pensar, de solucionar problemas, de instruirse, de elegir libremente su postura ante la vida, de relacionarse con los demás de manera respetuosa, de construir una ética profesional y, en consecuencia, formarse como ciudadanos productivos, autónomos y responsables. Esta es la base para lograr espacios cada vez más amplios de convivencia pacífica y para aumentar la competitividad de nuestro país”.

En la actualidad, existe un cierto consenso acerca de cuáles deben ser las metas de la educación matemática; qué tipo de enseñanza está acorde con estos propósitos; que papel juega la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático

Cuando se mira la matemática como un conjunto de hechos y técnicas, se puede entender que se miren los problemas como tareas que hay que hacer, como ejercicios en los que se aprenden técnicas a partir de ejemplos repetitivos; técnicas que parecen únicas y que se enseñan dentro de entornos en los que no se espera que los estudiantes desarrollen nuevos métodos, sino que se convenzan de que siempre debe haber un método y que ese método debe dar una solución. Bajo esta perspectiva, la enseñanza es esencialmente instrucción, transmisión de una información por parte de un profesor que es dueño de la verdad, y el aprendizaje es recepción, recepción pasiva e individual. La enseñanza y el aprendizaje se centran en el contenido y aunque hay ejercicios no hay resolución de problemas: se busca la respuesta; no se analiza el proceso; no hay actividad creativa; las matemáticas son rígidas, frías.

Cuando se mira la matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación de conjeturas, y en la que se mira el entorno desde un punto de vista matemático al estar dispuestos a buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas, entonces los resultados cambian. La matemática se convierte en una actividad social en la que se construye el conocimiento. La matemática se mira como una ciencia y ser matemático (en un sentido amplio del término) es ser miembro de una comunidad (como el salón de clase) en la que se hacen (construyen) matemáticas. Desde esta perspectiva, la enseñanza deja de ser instrucción para convertirse en socialización. El aprendizaje deja de ser recepción, para convertirse en construcción. El conocimiento matemático se construye socialmente en el salón de clase. Para la enseñanza, el proceso se vuelve más importante que el resultado.

Los problemas interesantes son aquellos para los que no hay disponible un procedimiento de aplicación; son aquellos en los que hay que experimentar, conjeturar, intentar, y descubrir. Con esta visión, la enseñanza de la matemática debería presentase como una disciplina con múltiples características en la que se persigue un conocimiento estructural y operacional que tenga sentido en su aplicación práctica, que se logre a través de explorar y experimentar con situaciones problemáticas, para desarrollar un punto de vista matemático de interacción con el entorno.

Espero que este documento sirva para poyar un cambio de visión: pasar de la enseñanza de hechos y técnicas a la enseñanza del pensamiento

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Fortalecer el nivel de formación en matemáticas, específicamente en álgebra, realizando una estrategia curricular para su enseñanza, basada en la formulación y solución de problemas.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Diseñar problemas relacionados con los contenidos en el área de álgebra, teniendo en cuenta las sugerencias del Ministerio de Educación Nacional expuestas en los Lineamientos Curriculares y Los Estándares Básicos de Matemáticas.

Elaborar y adecuar material para la enseñanza del álgebra, utilizando la metodología basada en la formulación y solución de problemas.

3. PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS.

A comienzos de 1994, la Ley General de Educación (Ley 115), le quita al ministerio de Educación Nacional la potestad curricular para fijar centralmente los programas de las áreas fundamentales y obligatorias estipuladas en la ley. En los Art. 78 y 148 se estipula que el Ministerio de Educación Nacional debe únicamente expedir "los lineamientos generales de los procesos curriculares" y "los indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos" de la educación formal. Así pues, esos artículos le ordenan al ministerio fijar lineamientos generales de los procesos curriculares e indicadores de logro, sin precisar qué son esos últimos.

Después de dos años de reuniones realizadas en el Ministerio de Educación bajo la coordinación de Ana Cecilia Castiblanco Paiba, en el año de 1998 se publicaron los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas. En dichos documentos se enfatiza en una potente idea central: el propósito de las matemáticas no es tanto el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio, y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de las matemáticas escolares como se propuso durante los veinte años de la renovación curricular, desde 1978 a 1998. En los lineamientos, los sistemas matemáticos se ubican en su lugar apropiado como herramientas de las que se puede valer el pensamiento matemático respectivo y como medios potentes que ayuden a desarrollar y a refinarlo. Ahora, el propósito central es el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático enumerados. El paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos a los sistemas conceptúales y simbólicos que se proponía en la renovación curricular, se concreta en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida "cotidiana."[MEN3]

Los sistemas numéricos, geométricos, métricos y aleatorios se señalaban como los cuatro pilares de la educación matemática en la básica primaria y los sistemas analíticos se agregaban para la básica secundaria, de sexto a noveno grado (no había programas de educación media, grados 10 y 11). Había además tres sistemas instrumentales: los lógicos, los conjuntistas y los sistemas generales de relaciones y transformaciones.

La idea principal es que los sistemas analíticos son colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones. Los números naturales, racionales o reales, o los puntos de la línea , el plano o el espacio *no* son elementos del universo de los sistemas analíticos.

En este sentido, los sistemas analíticos son apenas un tipo particular de sistemas generales cuyos objetos de transformaciones, operaciones, operadores o funciones tomadas activamente, no como relaciones y mucho menos como conjuntos de parejas. Usando una metáfora zoológica, podemos decir que los objetos de los sistemas analíticos son monstruos que tragan y transforman números, pero no son números. Desde el punto de vista de Anna Sfard, son reificaciones de procedimientos o algoritmos de operaciones.

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue un paso adelante muy significativo, pues establece el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y en su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para "resolver problemas" que apenas son ejercicios escolares y no verdaderos problemas abiertos y retadores. Una de las dificultades que se han encontrado en la interpretación de los lineamientos curriculares del área de matemáticas es que no es muy claro qué se debe entender por "pensamiento variacional". Intentemos acercarnos a ese concepto.

El pensamiento variacional no consiste simplemente en saber una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas. Conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada, pero precisamente la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada.

Tampoco es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como ba, πr^2, o de las leyes matemáticas de la física, como $f = ma$, $V=IR$, o $s=1/2gt^2 + v_o t$. Más aun, esas leyes, entendidas sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de escribir nada y mucho menos, antes de memorizar fórmulas.

Tampoco se trata solo de dibujar gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica. En la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$, por ejemplo, la parábola, en puntos cercanos al origen, no deja ver características importantes tales como: el cero y el uno se quedan quietos, los negativos saltan al lado de los positivos, los números mayores que uno se agrandan y se agrandan cada vez más drásticamente en la medida en que son más grandes, los números menores que uno se achican y se achican cada vez más drásticamente en la medida que son más pequeños. Eso sí sería pensamiento variacional, pero saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierte en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

Tiene pues un momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan, con alguna aproximación, las covariaciones detectadas; luego tiene un momento de echar a andar o "correr" esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y finalmente, el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

Sólo cuando hay tecnologías socialmente disponibles, como las palabras, dibujos y otros símbolos, hay un momento de formulación simbólica del sistema mental por medio de algún simbolismo con su tecnología respectiva, simbolismo que puede ser verbal, gestual, pictórico o simbólico-formal y no sólo esto último, como suele equivocadamente creerse. Esta formulación permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo.

El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

Pongamos un ejemplo. El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano y las lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Nota que la una se mueve mientras que la otra está quieta. Puede reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta se animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Algo tiene que estar pasando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tiene que tener en la cabeza para poder imitarlo, trata de precisarlo verbalmente. Trata de pintar unos ejes de coordenadas y escribir unas ecuaciones. Ahí viene el problema. La representación pictórica es estática. Las fórmulas son difíciles. Los ensayos fracasan. El pensamiento variacional se queda atascado y viene el desánimo y el abandono de la tarea.

El pensamiento variacional requiere del pensamiento métrico y del pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también del pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas y otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

El principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante hay que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no se puede hacer sin activar el pensamiento variacional.

Por eso podemos decir que el pensamiento variacional incluye la modelación, que se verá más detalladamente. Por lo tanto, puede esquematizarse en varias fases o momentos, no necesariamente secuénciales y con muchos caminos de realimentación entre esas fases o momentos:

- Momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece
- Momento de creación de un modelo mental
- Momento de echar a andar un modelo
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- Momento de revisión del modelo

Si hay una tecnología socialmente disponible que permita hacerlo, habría también otros momentos:

- Momento de formación simbólica

- Momento de calcular con esa formulación
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- Momento de reformulación del modelo

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

- Con el pensamiento numérico, si se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos, como la variación de los números cuadrados; con los intentos de captar patrones numéricos que se repiten, como 3, 6, 9, 12, o 3, 9, 27, 81, o 3, 5, 7, 11.
- Con el pensamiento espacial
- Con el pensamiento métrico en cuanto a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de magnitudes, medición numérica, ordenación de cantidades de magnitudes y medición numérica.
- Con el pensamiento proporcional tradicional, con tal que no se defina una proporción como la igualdad de dos razones, pues eso estático y se refiere a la representación de la proporción, no a la covariación entre las magnitudes que se identifican como proporcionales, se pueden desarrollar notaciones mas acordes con la covariación. En el programa de la renovación curricular se propuso que se trabajara primero la correlación positiva o negativa, y luego se viera que la proporcionalidad directa entre cantidades, es solo un tipo especifico de covarianza positiva, y que la proporcionalidad inversa es solo un tipo muy especifico de correlación negativa entre cantidades absolutas o no negativas. En esta notación se pueden usar flechas diagonales con la punta hacia arriba o hacia bajo para indicar que si una aumenta, la otra aumenta o disminuye.
- Con las representaciones gestuales (Seymour Papert; "matemáticas Sintónicas con el cuerpo); por ejemplo, subir y bajar el dedo para el movimiento circular

uniforme y el armónico simple, la mano extendida para las derivadas y para el aumento o disminución de la pendiente, lo que permite entender el test de las primeras derivadas y entender el test de las segunda derivada mucho mejor que cualquier fórmula.

- Con representaciones de máquinas o circuitos.
- Con reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares. Aquí es muy poderosa la pantalla del computador o la calculadora graficadora.
- Con la atención a las variaciones implícitas en el pensamiento espacial, o mejor, espacio-temporal que es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, no en la forma estática de la geometría Euclidiana tradicional. Por ejemplo, atender a la variación del área de un triángulo en posición estándar con el cambio del largo de la base, con el cambio de la altura. Con el cambio de la posición del vértice a lo largo de una paralela a la base, o con el cambio de la posición de la base a lo largo de la recta en donde esta el segmento inicial, mientras se mantiene el vértice fijo.
- Con las representaciones sagitales de la "matemática moderna", en las cuales se ve mas claramente a donde van los puntos o números.
- Con el papel cuadriculado, el milimetrado y el ajuste de curvas
- Con el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas.

La Modelación

La modelación es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad.

Un arte , no es una ciencia. Como en la epistemología de las ciencias naturales, para repetir a Karl Popper, no se sabe como es la lógica de la invención de modelos, pero si hay una lógica de la puesta a prueba, la justificación y el refinamiento o abandono de los modelos. No hay pues una lógica de producir modelos matemáticos, pero si la hay para ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y generalizarlos o descartarlos.

Como todo arte, el arte de la modelación matemática se aprende haciéndolo. Hay muchas propuestas de modelos de diferentes tipos para aplicarlos a distintos tipos de procesos, y muchos casos y problemas que estimulan a la modelación a muy distintos niveles.

La investigación sobre la manera como los alumnos de distintas edades producen e interpretan modelos matemáticos es apenas incipiente. Hay muchas propuestas en todos los niveles educativos, generalmente muy asociadas a la disponibilidad de nuevas tecnologías [MEN3].

4. ESTANDARES BÁSICOS PARA EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Por muchos años y por diversas razones las matemáticas siempre han sido el dolor de cabeza de padres, maestros y de muchos estudiantes. El Ministerio de Educación Nacional ha trabajado en estrategias contra las creencias negativas que han rodeado a las matemáticas y para que desaparezca el temor que éstas producen. Lo que se busca es que descubramos que las matemáticas no son fastidiosas sino todo lo contrario: podemos encontrar en ellas retos magníficos que nos dan herramientas para desenvolvernos en diferentes situaciones dentro y fuera de la escuela.

Esto se puede lograr mediante una buena orientación que permita una permanente interacción entre el maestro y sus alumnos y entre éstos y sus compañeros, de modo que todos seamos capaces a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, de llegar a resultados que nos faciliten comunicarnos, hacer interpretaciones y representaciones, es decir, descubrir que las matemáticas sí están relacionadas con la vida y con las situaciones que nos rodean, más allá de las paredes de la escuela.

Sabemos que las matemáticas se relacionan con el desarrollo del pensamiento racional (razonamiento lógico, abstracción, rigor y precisión) y son esenciales para el desarrollo de la ciencia y de la tecnología pero además –y esto no siempre ha sido bien reconocido y divulgado–, contribuyen a la formación de ciudadanos responsables y diligentes frente a las situaciones y decisiones de la vida nacional o local.

Para enseñar y aprender matemáticas es imprescindible que en el aula de clase se propicien ambientes donde sea posible la discusión de diferentes ideas para favorecer el desarrollo individual de la confianza en la razón como medio de autonomía intelectual.

En estos tiempos, las matemáticas se enseñan de manera diferente. Hay unos procesos de pensamiento que los estudiantes van desarrollando y relacionando gracias a las herramientas, contenidos y situaciones reales. Ahora se tiene en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos y la diversidad del pensamiento de las personas, porque las matemáticas sirven para que cada quien en una situación concreta tome sus propias decisiones [MEN2].

Organización De Los Estándares De Matemáticas

Los estándares que se describen consideran tres aspectos que siempre deben estar presentes:

- Planteamiento y resolución de problemas.
- Razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración).
- Comunicación matemática. Consolidación de la manera de pensar (coherente, clara, precisa).

Los estándares están organizados en cinco tipos de pensamiento:

- **Pensamiento Numérico**

Se parte del concepto intuitivo de los números que el niño adquiere desde antes de empezar su proceso escolar y en el momento en que comienza a contar. Se llega a comprender la simbología de los números, las relaciones que existen entre éstos y las operaciones que se efectúan con ellos en cada uno de los sistemas numéricos.

- **Pensamiento Espacial Y Sistemas Geométricos**

Se examinan y analizan las propiedades de los espacios en dos y en tres dimensiones y las formas y figuras que éstos contienen. Se descubren herramientas como las transformaciones, traslaciones y simetrías y los conocimientos matemáticos se aplican en otras áreas de estudio.

- **Pensamiento Métrico Y Sistemas De Medidas**

Se llega a comprender las características mensurables de los objetos que vemos y tocamos y de otros que no se pueden ver o tocar pero sí sentir (como por ejemplo, el tiempo); también se pueden entender las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y los instrumentos utilizados para ello. En este punto se incluye el cálculo aproximado o estimación, la proporcionalidad, el margen de error y la relación de las matemáticas con otras ciencias.

- **Pensamiento Aleatorio Y Sistemas De Datos**

Se analizan situaciones en las que se realizan recolección sistemática y organizada de datos, ordenación y presentación de la información, gráficos y su interpretación; también se aprenden los métodos estadísticos de análisis, las nociones de probabilidad y de azar con las que se pueden hacer deducciones y estimaciones. Todo ello se hace práctico con ejemplos en situaciones reales de tendencias, predicciones y conjeturas.

- **Pensamiento Variacional Y Sistemas Algebraicos**

Ayuda a conocer y reconocer procesos de cambio, concepto de variable, el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio; también se ponen en práctica modelos matemáticos y relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas.

A continuación se presentan los Estándares Básicos asociados al pensamiento Variacional

PRIMERO A TERCERO

1. Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos numérico, geométrico, musical, entre otros).

2. Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
3. Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.
4. Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

CUARTO A QUINTO

1. Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
2. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
3. Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
4. Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias.
5. Construir ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos.

SEXTO A SÉPTIMO

1. Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
2. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio
3. Analizar las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos.
4. Utilizar métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.
5. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

OCTAVO A NOVENO

1. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
2. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
3. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas
4. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas
5. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales
6. Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales
7. Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.
8. Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.
9. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales

DÉCIMO A UNDÉCIMO

1. Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos
2. Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y desarrolla métodos para hallar la derivada de funciones básicas.
3. Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales
4. Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.

5. ¿QUÉ ES ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

En relación con esta pregunta, *Miguel de Guzmán* [GM1], opina lo siguiente.

La enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo.

La enseñanza a través de la resolución de problemas pone énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no debe en lo absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante que el estudiante:

- Manipule los objetos matemáticos
- Accione su propia actividad mental
- Ejercite su creatividad
- Reflexione sobre su proceso de pensamiento para mejorarlo conscientemente.
- Que adquiera confianza en sí mismo.
- Se divierta con su actividad mental.
- Se prepare así para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana.
- Se prepare para los nuevos retos de la tecnología y la ciencia.
- Porque lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes es la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas

- Porque como el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y cultura no se hacen obsoletos.
- Porque este trabajo resulta atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

Como el énfasis se ha trasladado desde enseñar a resolver problemas hasta enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, muchos escritos han intentado clarificar lo que significa una aproximación de la enseñanza de las matemáticas mediante resolución de problemas. *El foco consiste en enseñar tópicos matemáticos a través de contextos de resolución de problemas y medios ambientes orientados por indagaciones que se caracterizan porque el profesor ayuda a que los estudiantes construyan un profundo entendimiento de las ideas y procesos matemáticos animándolos a hacer matemáticas: creando, conjeturando, explorando, examinando y verificando.*

Algunas características específicas de una aproximación a la enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas incluyen las siguientes [TR1].

- Interacciones entre estudiantes-estudiantes y profesor-estudiantes.
- Dialogo matemático y consenso entre los estudiantes.
- Los profesores proveen solo suficiente información para establecer las bases relacionadas con el problema y los estudiantes clarifican, interpretan e intentan construir uno o más procesos de solución.
- Los profesores aceptan respuestas correctas y erradas.

- Los profesores guían, entrenan, hacen preguntas y comparten en el proceso de resolución de problemas.
- Los profesores saben cuando es apropiado intervenir, y cuando esperar a que los estudiantes realicen sus propias acciones.
- Una característica adicional es que una aproximación a resolución de problemas puede ser usada para animar a que los estudiantes hagan generalizaciones sobre reglas y conceptos, proceso que es fundamental en matemáticas.

5.1 PAPEL DEL PROFESOR

La principal función del profesor consiste en la selección de "buenos" problemas, para implementarlos en sus experiencias de aula. Sus acciones se deben asemejar a las de un entrenador, más que a las de un poseedor del conocimiento. El profesor debe tomar el rol de guía para orientar al estudiante en la búsqueda de su propio conocimiento.

Alan Schoenfeld [ST1] plantea lo siguiente.

Un aspecto crucial en la enseñanza de la matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos en su aprendizaje. Así, un estudiante que se desarrolle en un ambiente matemático donde se utilicen naturalmente estrategias para leer, conceptuar y escribir argumentos matemáticos, será más capaz de aprender en otros dominios y adquirir nuevas habilidades. En este sentido, no es importante cubrir amplios contenidos sino centrar el aprendizaje en las ideas básicas. El propósito principal de la enseñanza basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje de estrategias y habilidades, sino permitirles pensar por sí mismos. El valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar.

El papel del profesor incluye:

- Brindar a los estudiantes espacios diferentes al salón de clase, de tal forma que puedan relacionar el conocimiento que tienen, con aquello que los rodea, con el fin de que los aprendizajes sean importantes y significativos tanto para el profesor como para el estudiante.
- Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuenta que un problema es un problema cuando el estudiante muestra algún interés por resolverlo.
- Construir una atmósfera que le dé confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.
- Motivar y permitir que los estudiantes seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando esta sea necesaria.
- Diseñar junto con los estudiantes problemas, ya sea a partir de los que se tienen planteados o problemas que surjan de la creatividad e imaginación de ambos.

Un maestro de matemáticas debe conocer ampliamente los temas a enseñar y a los estudiantes a quienes están dirigidos, así como diferentes estrategias para el intercambio de conocimientos con ellos. Al brindarles ayuda para la ejecución de su trabajo esta debe ser discreta y moderada (ni mucha ni muy poca), manteniendo así su ilusión de progreso sin imponerse. Animarlos constantemente para que creen nuevas ideas y conceptos desde su propio contexto, siendo cuidadoso al juzgarlos, ya que hay diversos ritmos de aprendizaje y las formas de comunicación varían de un estudiante a otro, permitiendo así que miren más de cerca las ideas del pensamiento matemático (cambio, patrones, formas, tamaños y herramientas), e identifiquen que el lenguaje común que utilizan no está tan lejos del lenguaje matemático.

El interés por los problemas empieza cuando el profesor expone sus propias experiencias, dificultades e inquietudes ante sus alumnos, por lo cual debe "dramatizar" sus ideas y preguntas (partir de una situación general o de una sugerencia, para ir poco a poco hacia preguntas más precisas y concretas, en forma natural y simple). Es también conveniente asegurarse de que los razonamientos sean los más apropiados e idóneos, lo cual se logra revisando y verificando cada paso, antes de que sus alumnos se lancen a realizar cálculos que los puedan traumatizar si no encuentran la solución adecuada.

Cuando considere que los estudiantes han adquirido confianza en sí mismos, construir una atmósfera agradable que le permita atacar problemas no rutinarios, dejando que identifiquen y desarrollen sus propios caminos de abordaje y solución hasta llegar a proponerles que diseñen sus propios problemas, dándoles ayuda sólo cuando sea necesario y poniendo mucha atención a las estrategias utilizadas (pueden surgir algunas novedosas).

En ocasiones, cuando se resuelve un problema, el profesor propone varios caminos de solución, los cuales discute en clase formando pequeños grupos y que sean los alumnos los que propongan el más efectivo a seguir; de esta manera se dan a conocer las diferentes dificultades que surgen cuando se intenta resolver un problema. Esto hace desarrollar un espíritu investigador y creativo que estimula su curiosidad intelectual. Es clave y fundamental que el docente de a conocer a sus alumnos que el planteo de un problema debe de ser claro con una notación sencilla y familiar, de manera que los datos, incógnitas, notaciones se puedan manipular fácilmente. Además, insistir que el problema no termina cuando se encuentra la solución sino que es aquí cuando nace el verdadero reto (buscar la solución más adecuada, más general, crear nuevos problemas).

5.2. PAPEL DEL ESTUDIANTE

El estudiante es el responsable de adquirir el conocimiento, debe emplear todas sus herramientas y lo que sabe para madurar su conocimiento. Debe dejar de ser un simple receptor para convertirse en un productor de conocimiento.

Alan Schoenfeld [ST1], con respecto al papel del estudiante afirma:

Para que los estudiantes vean la matemática como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e interioricen los principios asociados a ella. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en espacios que se presenten como un microcosmos de la cultura matemática, esto es, clases donde los valores de las matemáticas, como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana.

Así mismo, sostiene que entre los principios importantes para el aprendizaje de las matemáticas se incluyen que el estudiante reconozca que:

- Encontrar la solución de un problema no es el final, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema. Además, en el desarrollo de las matemáticas el proceso de formular o rediseñar problemas se identifica como un componente esencial en el quehacer matemático.

- Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Es decir, el planteamiento de preguntas, la búsqueda de respuestas y de justificaciones son actividades que se pueden practicar desde la enseñanza elemental y su práctica cotidiana pueden producir resultados matemáticos nuevos.

Un componente fundamental del proceso de aprendizaje es el de solucionar problemas. Por lo tanto, el estudiante debe interactuar con una variedad de problemas para que pueda analizar la calidad de los diversos métodos y estrategias de solución, para que identifique la importancia de utilizar argumentos matemáticos en todas sus posiciones y afirmaciones.

El estudiante debe ser consiente de que su experiencia en matemáticas es incompleta, mientras no tenga ocasión de proponer o formular sus propios problemas, que pueden surgir en su vida diaria y en su entorno.

Frente a un problema, el estudiante no debe rendirse ante varios intentos de solución sin éxito, por el contrario debe motivarse para aceptar el reto. Debe insistir en la búsqueda de nuevos caminos; debe consultar con sus compañeros, con sus profesores o, si es del caso, con especialistas.

Además del papel del profesor y de los alumnos, es importante tener en cuenta que el ambiente que se les proporciona a los estudiantes debe ser tal que los motive a resolver problemas. Es deber de los profesores ofrecerles un espacio propicio para la investigación, para el análisis, un lugar en el que los estudiantes puedan explorar un problema. Además es adecuado que la solución de los problemas se haga en grupo, para que los estudiantes tengan la oportunidad de discutir, refutar y ampliar las diferentes ideas que surgen al abordar el problema, entre los mismos estudiantes se enriquece el conocimiento ya que las dudas o los inconvenientes que se presenten son la base para aprender nuevas cosas que ellos desconocían.

5.3 LA EVALUACIÓN

El trabajo del profesor al aplicar la resolución de problemas, es entre otros el de ser un guía para sus estudiantes, estar con ellos durante todo su proceso de aprendizaje; ya que el trabajo con los estudiantes es permanente y continuo el proceso de la evaluación difiere de la evaluación tradicional en diversos aspectos:

En la evaluación tradicional predomina el interés por la medición y por los datos estadísticos. Ahora la evaluación, consiste en analizar los logros, dificultades o limitaciones del alumno y las causas o circunstancias que inciden en su proceso de formación.

La evaluación tradicional esta orientada más a los resultados o productos, la nueva evaluación, en cambio sin prescindir de éstos, tiene en cuenta los procesos.

La nueva evaluación como parte esencial del proceso pedagógico busca mejorar los procesos y resultados de la escuela. Tiene entre otras las siguientes finalidades:

- Diagnosticar el estado de los procesos de desarrollo del alumno y pronosticar sus tendencias.
- Asegurar el éxito del proceso educativo y por lo tanto, evitar el fracaso escolar.
- Identificar dificultades, deficiencias y limitaciones.
- Ofrecer oportunidades para aprender de la experiencia.
- Obtener información para tomar decisiones.
- Promover, certificar o acreditar a los alumnos.
- Orientar el proceso educativo y mejorar su calidad.

La nueva evaluación debe ser:

Continua: se realiza de manera permanente con base en un seguimiento que permita apreciar el progreso y las dificultades que puedan presentarse en el proceso de formación de cada alumno.

Integral: debe tener en cuenta todos los aspectos o dimensiones del desarrollo del alumno.

Sistemática: debe ser organizada con base en principios pedagógicos y que guarde relación con los fines y objetivos de la educación, los contenidos, los métodos, etc.

Flexible*:* debe tener los ritmos de desarrollo del alumno en sus diferentes aspectos, por lo tanto, debe considerar la historia del alumno, sus intereses, sus capacidades, sus limitaciones y en general su situación concreta.

Interpretativa: debe comprender el significado de los procesos y los resultados de la formación del alumno.

Participativa: debe involucrar a varios agentes, que propicie la autoevaluación y la coevaluación.

Formativa: debe permitir reorientar los procesos educativos de manera oportuna, a fin de lograr su mejoramiento.

6. METODOLOGIA

Cuando se plantea cómo enfrentarse con el problema del bajo rendimiento de muchos alumnos en el colegio, todo profesor entre otras preguntas debería plantearse la siguiente cuestión: ¿Los niños no aprenden porque no están motivados o no están motivados porque no aprenden?, por lo que no se conseguirá enseñar a pensar adecuadamente sin cambiar la motivación, motivación que se puede alcanzar presentándoles problemas que despierten su interés.

"El aprendizaje de las matemáticas es más efectivo cuando el alumno está motivado. Por ello resulta fundamental que las actividades despierten su curiosidad y correspondan a la etapa de desarrollo en la que se encuentra, teniendo en cuenta la relación con experiencias de su vida cotidiana para el éxito"[MEN 2].

El aprendizaje de las matemáticas radica, no solo en el método empleado por el docente, sino en el desarrollo de estrategias para despertar curiosidad en el estudiante y a la vez su deseo de descubrir y experimentar nuevas prácticas matemáticas como base del enriquecimiento individual.

Esto guía la búsqueda permanente de nuevas estrategias que doten de sentido los aprendizajes de los alumnos. Entendiendo que un aprendizaje significativo no descarta ni lo abstracto, ni lo concreto, tiene en cuenta la coherencia interna de la matemática, la pertinencia con el modelo elegido, pero que atiende la diversidad de los alumnos que aprenden y que adquieran la capacidad de movilizar sus conocimientos y competencias para reaccionar ante un problema, entendiendo que todos los alumnos están en posibilidad de desarrollar esta capacidad.

Es importante consolidar una estrategia que genere una actitud favorable hacia las matemáticas, que genere en los estudiantes actitud e interés, desarrollo de la comprensión, conceptos, procesos y estrategias básicas y la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas y situaciones de la vida real.

El eje central del trabajo esta en diseñar problemas para el desarrollo del pensamiento variacional y mejorar así el aprendizaje del alumno, y brindarle un mecanismo para que desarrolle competencias que promueva un aprendizaje genuino.

El diseño de los problemas requirió la revisión de los estándares y lineamientos para el currículo de matemáticas, dentro de los cuales se decidió trabajar en el proceso de resolución de problemas donde se requiere el pensamiento variacional, dado que este componente del currículo tiene en cuenta las aplicaciones mas importantes de la matemática, como es la formulación de los modelos matemáticos para diversos fenómenos, es decir se ocupa de que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, estos tres temas entonces ocupan un lugar central en los estándares de los diferentes grados. En la estructura de los estándares básicos para matemáticas se trabaja el pensamiento variacional con mayor intensidad en los grados octavo y noveno, de ahí que se decidió trabajar en el grado noveno de la educación básica, donde se propone que el estudio de las relaciones, las ecuaciones algebraicas, del lenguaje algebraico, la modelación, la variación.

Con el objetivo de buscar problemas que nos aproximen a estos estándares y que sean atractivos al estudiante, se realizó una búsqueda a través de la web y de textos, buscando problemas para modificarlos en contexto, y buscando una estructura de solución sugerida a los problemas, con lo que se confecciono una estructura de presentación y de ayuda al docente la cual es presentada en el capitulo de diseño.

7. FUNDAMENTOS DEL DISEÑO

El diseño de los problemas esta fundamentado en la pregunta ¿Qué tipo de actividades de aprendizaje ayudan a los estudiantes a desarrollar su disposición hacia el estudio de las matemáticas?

Se intenta que los estudiantes empleen sus recursos matemáticos en la resolución de problemas planteados en diversos contextos. En esta dirección, se espera que los estudiantes muestren sus recursos matemáticos no sólo en el contexto escolar, sino también en situaciones ordinarias fuera del aula. De ahí la importancia de la actividad de resolución de problemas, particularmente el proceso de reformular o diseñar problemas y su posible relación con la transferencia del conocimiento.

Dos aspectos del álgebra que están íntimamente relacionados y que se desarrollaran juntos en el diseño de los problemas, son los modelos y las ecuaciones. Por lo tanto la mayoría de los problemas tratan estas dos aspectos. Se incluyen problemas en los cuales se debe hacer el uso de letras y símbolos los cuales nos proporciona una breve y muy precisa manera de escribir oraciones matemáticas; problemas que nos brindan resolver ecuaciones, se hace que un literal sea una incógnita, se construye una ecuación proveniente de un problema, y luego se resuelve la ecuación para la incógnita. En muchas ocasiones, en el álgebra no encontramos métodos apropiados para resolver problemas, pero en muchas ocasiones, sí el mas eficáz.

En los problemas se involucran modelos de una manera u otra, se hacen y describen modelos, se construyen reglas y se encuentran reglas generales, e implícitamente se da la noción de relación la cual se expresa en palabras y en los gráficos.

La selección y el uso de estrategias son una parte del proceso de resolver un problema. La comprensión de un problema especifico aclara qué estrategias nos ayudan a resolverlo, o para que se vuelva mas simple y manejable. También ayuda a que los estudiantes adquieran habilidad en la resolución de problemas.
En este trabajo se encuentran problemas que se resuelven con estrategias tales como;

- Las suposiciones (esto incluye la prueba – error)
- Las representaciones (uso de material real)
- Los dibujos, diagramas, lenguaje simbólico, transformaciones entre representaciones
- Hacer listas (esto incluye realizar tablas)
- Búsqueda de patrones
- Propuestas en la resolución de problemas de investigadores como Polya

Cada problema sigue la misma estructura de solución, la cual se espera sea de fácil comprensión. Los problemas pueden ser modificados, adaptados al contexto en el cual se van a desarrollar.

Para cada uno de los problemas además del enunciado se ha incluido información adicional que se describe a continuación.

¿De que se trata el problema? Se presenta un resumen sobre el problema, la solución y los objetivos que se alcanzan al resolver el problema.

Logros. Enuncia lo que el estudiante debe alcanzar al resolver el problema.

Recursos. Listado de materiales que son necesarios para solucionar el problema o para apoyar al profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Resultados específicos de aprendizaje. Listado de diferentes habilidades que se pretende que el estudiante alcance durante el proceso de solución del problema.

***Extensión del problema*.** Es otro problema relacionado con el original, que tiene un grado de dificultad un poco mayor.

Solución. Se presenta una posible solución del problema, describiendo la forma en que se llega a tal solución.

Los problemas se han agrupado en seis niveles, empezando desde el nivel uno. Los diferentes niveles dependen de los logros y los resultados específicos de aprendizaje que se pretenden alcanzar. En los primeros niveles se refieren a modelos: construyéndolos, encontrándolos, continuándolos, describiéndolos, y empleándolos en la solución de los problemas. En los niveles mas altos, estos patrones se expresan en términos de lo "desconocido". A continuación se enunciaran de forma general los logros y resultados específicos de aprendizaje correspondiente a cada uno de los niveles:

Problemas nivel 1

Logros

- Hace y describe repeticiones y secuencias de modelos
- Continua una repetición

- Modela y explica cálculos de sumas

Resultados específicos de aprendizaje

- Describir y continuar una repetición de modelos de números
- Usar números ordinales
- Realizar cuadros o utilizar ayudas para resolver un problema

Problemas nivel 2

Logros

- Usa símbolos matemáticos =, >, > para las relaciones "es igual que", "es mayor que", "es menor que"
- Continua una secuencia numérica y describe una regla para esta
- Continua con un modelo secuencial y repetitivo y describe la regla para esto

Resultados específicos de aprendizaje

- Escribir y hablar con frases numéricas que usan =, <, >
- Trabajar sistemáticamente para resolver un problema
- Contar de dos en dos utilizando números impares
- Realizar deducciones simples
- Trabajar problemas en equipo
- Hacer y describir un modelo secuencial para resolver un problema
- Identificar un modelo y describirlo utilizando sus propias palabras
- Describir modelos numéricos
- Continuar patrones

Problemas nivel 3

Logros

- Continua un modelo secuencial y describe una regla para este
- Indica la regla general en un sistema de problemas prácticos

Resultados específicos de aprendizaje

- Utilizar diagramas o listas para mostrar relaciones
- Identificar el modelo de números triangulares
- Indicar una regla en una situación práctica
- Describir un modelo de secuencia
- Utilizar varias estrategias para solucionar un problema
- Trabajar lógicamente y secuencialmente

Problemas nivel 4

Logros

- Diseña e interpreta los gráficos en un plano cartesiano que representa situaciones diarias
- Continua con un modelo secuencial y repetitivo describiendo la regla para esto
- Utiliza una regla para hacer predicciones (suposiciones)
- Encuentra una regla para conseguir cualquier término en una secuencia de números
- Bosqueja e interpreta los gráficos en una regla de números enteros

- Encuentra una regla para describir cualquier número de una sucesión de números y expresarlo en palabras.
- Encuentra y justifica una fórmula en palabras que representa una situación práctica dada.
- Soluciona ecuaciones lineales simples
- Encuentra y justifica una fórmula con palabras que representa una situación práctica dada

Resultados específicos de aprendizaje

- Describir una regla para continuar una secuencia numérica
- Comparar dos secuencias numéricas
- Utilizar sus propias palabras para describir una secuencia numérica
- Utilizar una regla para encontrar un término en una secuencia numérica
- Dibujar un gráfico con precisión
- Usar un gráfico para obtener una información
- Usar una variedad de estrategias para resolver el problema.
- Trabajar lógicamente y secuencialmente
- Resolver problemas que involucren relaciones lineales simples.
- Escribir expresiones lineales simples.
- Mirar más de una regla para un modelo dado.
- Expresar las reglas en palabras.

Problemas nivel 5

Logros

- Genera los modelos de una situación estructurada,

- Encuentra una regla para el término general, y lo expresa en palabras y símbolos.
- Genera un patrón para una regla
- Genera los patrones de una situación estructurada para encontrar una regla general para un término y lo expresa en palabras y símbolos
- Soluciona ecuaciones lineales
- Genera los patrones de una solución estructurada.
- Encuentra una regla para él termino general y la expresa en palabras y números.

Resultados específicos de aprendizaje

- Encontrar una regla para sumar números consecutivos.
- Identificar un modelo de números triangulares
- Hallar un patrón en una lista organizada.
- Describir una regla en un sistema en general.
- Aplicar álgebra para encontrar una solución al problema
- Utilizar cocientes.
- Formar y solucionar ecuaciones lineales.
- Utilizar diagramas como estrategia al solucionar un problema.

Problemas nivel 6

Logros

- Soluciona ecuaciones lineales.
- Utiliza ecuaciones para representar una situación práctica
- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

- Sustituye valores
- Genera modelos lineales y cuadráticos y encuentra y justifica la regla
- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples

Resultados específicos de aprendizaje

- Generar patrones en una situación estructurada.
- Dar una expresión general para él término n-esimo de un modelo.
- Describir vínculos entre diversos modelos
- Encontrar una regla para un término general.
- Utilizar habilidades algebraicas para solucionar un problema que implique tres variables.
- Encontrar una regla para un modelo cuadrático.
- Justificar una regla para un modelo cuadrático.
- Utilizar un método sistemático para solucionar un problema.
- Hacer predicciones con base en una regla que se haya encontrado
- Solucionar un problema de diversas maneras.

8. PROBLEMAS RESUELTOS

LA CANCIÓN DE MANUEL

PROBLEMA 1 - NIVEL 1

Manuel estaba cantando una canción. Esta era "uno, dos, tres, uno, dos,... " ¿Cuáles son los tres números siguientes? ¿Cuál es el décimo número que cantará?

¿De que trata este problema?

Este problema trata del reconocimiento de secuencias de números y de como poder utilizarlos de alguna manera. En esta pregunta la secuencia de los números es 1, 2, 3, 1, 2, 3... Los niños tienen que reconocer esto y usarlo para encontrar el décimo número en la canción de Manuel.

Logros

- Hace y describe repeticiones y secuencias de modelos
- Continua una repetición

Recursos

- Fichas numeradas (varias)
- Fichas para contar (3 colores)

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Describir y continuar una repetición de modelos de números
- Usar números ordinales

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Empiece el modelo siguiente: truene los dedos, palmada, truene los dedos, palmada.
2. Después de que todos los niños sigan el patrón pregúnteles si pueden utilizar los fichas para contar (2 colores) para demostrar el patrón.
   Pregúnteles si pueden utilizar números para demostrar este patrón: 1, 2, 1, 2...
3. Lea el problema a la clase.
4. Cuando los niños trabajen en el problema hágales preguntas que se centren en la descripción de modelos:
   ¿Qué número viene después? ¿Cómo lo sabes?
   ¿Cómo encuentras el décimo número?
5. Compartir soluciones
6. Encuentre otras maneras de demostrar el modelo (fichas para contar, acciones...)

Solución

Los tres números siguientes son 3, 1, y 2 en ese orden.

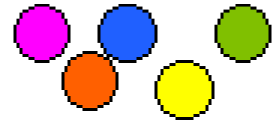
Se cantará la canción de Manuel para encontrar el décimo número, puede ser más fácil escribir los números. (Puede hacerse dibujando o usando fichas para contar numeradas 1, 2, 3,). Se han listado los diez primeros números con su número debajo.

1 2 3 1 2 3 1 2 3 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

¡Así que el décimo número que Manuel canta es el uno!

CANICAS

PR  **1**

Paula consiguió una canica el martes. Durante mucho tiempo consiguió 2 canicas cada día. ¿Cuándo consigue ella la 11ª canica?

¿De que trata este problema?

Este problema es una buena oportunidad de reforzar la cuenta de dos en dos, usando diversos puntos de partida (Ej: 1, 3, 5 o 4, 6, 8).

Este problema mezcla varias cosas. Primero los niños tienen que comprender que Paula tiene una sucesión de 1, 2, 2,… y que eso suma 1, 3, 5, 7,... en cada día sucesivo. Entonces se debe resolver cuando la secuencia llega a 11. El paso final es convertir ese número en un día de la semana.

Logros

- Hace y describe repeticiones y secuencias de modelos
- Continua una repetición

Recursos

- Canicas o fichas para contar

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Identificar y continuar un modelo de una repetición numérica (1. 3. 5 ..7)
- Indicar los días de la semana en orden

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Comience el problema con un niño actuando.
2. Sea creativo en la manera de solucionar el problema (use contadores o gráficos)
3. Permita que los niños trabajen el problema en parejas, pregúnteles acerca de los modelos que ellos usan:
   ¿Cómo sabes cuántas canicas suman cada día?
   ¿Puedes contar las fichas que has sacado?
   ¿Cómo puedes convencer al resto de la clase que estas en lo correcto?
4. Comparta las soluciones del problema

Extensión

¿Cuándo Paula obtiene la 30 ª canica?

Solución

Una manera de resolver esto es poner 11 fichas para contar y tener algunos cubos listos. Se usarán los cubos para calcular los días. Coloque una ficha para el primer día y registre un solo cubo. Después aumente dos fichas y registre agregando un segundo cubo. Después sume otras dos fichas y registre un tercer cubo. Se muestra el cálculo en el diagrama.

0	□	Martes
o oo	□□	Miércoles
o oo oo	□□□	Jueves
o oo oo oo	□□□□	Viernes
o oo oo oo oo	□□□□□	Sábado
o oo oo oo oo oo	□□□□□□	Domingo

Aquí se puede ver claramente que le toma seis días a Paula conseguir once canicas.

Esto puede hacerse mas fácilmente así:

1	+	2	+	2	+	2	+	2	+	2
martes		miércoles		jueves		viernes		sábado		Domingo

Extensión

¿Cuándo Paula puede conseguir 30 canicas? Ella empieza con una. Si ella consigue dos canicas mas todos los días tendrá siempre solamente un numero impar de canicas. (ella conseguirá 29 y 31 pero nunca exactamente 30).

CAMISETAS PINTORESCAS

PROBLEMA 3 – NIVEL 1

En una clase hay 20 niños que llevan puestas camisetas de tres colores diferentes, azul, verde y rojo. La clase estaba organizada de la siguiente manera:

azul, azul, verde, verde, rojo, azul, azul,

verde, verde, rojo...

¿Cuál es el color de la camiseta que utiliza el ultimo niño?

¿Cuántos niños utilizaban camiseta roja?

¿De que se trata el problema?

Este problema implica el reconocer y repetir una secuencia de cinco términos. Introduce también el concepto de múltiplo de cinco, ya que cada quinto niño esta utilizando una camiseta roja. Los estudiantes deben reconocer el patrón dado y ordenar los 20 niños con la muestra dada, para responder las preguntas.

Logros

- Continua una repetición y un modelo secuencial.

Recursos

- Fichas para contar azul, verde y rojo

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Describir y continuar una repetición y un modelo secuencial.

- Realizar cuadros o utilizar ayudas para resolver el problema.

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Los niños se organizan en clase, de acuerdo con un modelo de secuencia como el color de sus zapatos (por ejemplo blanco, café, blanco, café).
2. Sin decirle a los niños que modelo se esta usando, pídales que realicen la secuencia dada y que imaginen quien puede ser el quinto miembro de la secuencia.
3. Pídales que expliquen porque realizaron esa secuencia. Recuerde que pueden tener una razón valida aunque sea diferente a la suya.
4. Repita el proceso para ver si alguien puede ser también el quinto miembro
5. Plantee el problema a la clase. Compruebe que los niños entienden que están descubriendo dos cosas: el veinteavo niño y cuantos están utilizando camisetas rojas.
6. Cuando los estudiantes trabajen en el problema pídales que expliquen la estrategia que están utilizando
7. Comparta las soluciones.

Extensión

Pídale a los niños que hagan modelos de repetición utilizando compañeros de la clase

Solución

Los niños pueden solucionar el problema mecánicamente escribiendo una tabla como la de abajo. Para contestar las preguntas del problema, los estudiantes deben escribir los números del 1-20 y ordenar las camisetas según el modelo dado.

1	2	3	4	5
Azul	Azul	Verde	Verde	Rojo
6	7	8	9	10
Azul	Azul	Verde	Verde	Rojo
11	12	13	14	15
Azul	Azul	Verde	Verde	Rojo
16	17	18	19	20
Azul	Azul	Verde	Verde	Rojo

Por otro lado, los niños pueden notar que el modelo se repite cada cinco niños.
Así el primero, sexto, undécimo, y así sucesivamente los niños tienen blusas azules. Usando esta idea todas las preguntas pueden contestarse.
El último niño está llevando una camiseta roja porque 20 = 5 + 5 + 5 + 5. Hay cuatro camisetas rojas que tiene puestas los niños 5, 10, 15 y 20

LA TABLA DE JUAN

PROBLEMA 4 – NIVEL 1

Juan es hábil llenando tablas. Colocó números del 1 al 10 a lo largo de una tabla y números pares hacia abajo. Los sumó entre si y vió varios modelos.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			5			8				
4		6								
6	7				11					
8										
10										
12										
14										

Encuentra algunos modelos tu mismo. Úsalos para completar la tabla de Juan.

¿De que se trata el problema?

Los modelos son un ingrediente esencial de la matemática. Es muy importante que los niños empiecen a buscarlos y a crearlos. Este problema les proporciona la oportunidad de buscar modelos en un ejercicio simple de adición. Anime a los niños a que busquen modelos numéricos en la tabla de Juan, en las direcciones horizontal, vertical y diagonal.

Logros

- Modela y explica cálculos de sumas hasta 20
- Continua una repetición y un modelo secuencial
- Hace y describe repeticiones

Recursos

- Papel cuadriculado

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Describir modelos numéricos
- Sumar números hasta un total de 24

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Presente el problema a la clase. Pregúnteles
   ¿Qué numero piensas que va ahí?
   ¿Y qué de ahí?
2. Coloque estos números en la tabla.
3. Permita a los niños trabajar el problema con un compañero. Verifique que entienden lo que están haciendo.
4. En su totalidad clasifique las ideas y soluciones de los niños.
5. Anímelos a que intenten la extensión del problema.
6. Discuta las respuestas que los niños dan. Solicíteles que hagan preguntas ellos mismos

Extensión

¿Cuántas veces aparece el 4 en la tabla?

¿Cuántas veces el dígito 4 aparece en la tabla?

¿Cuál es el número que mas aparece?

Solución

La tabla de Juan completa se muestra abajo.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Hay un gran número de modelos que pueden encontrarse aquí. Se han resaltado algunos. Números consecutivos (en verde) horizontal y diagonalmente, números impares (en azul), números pares (en rojo), y los que aumentan en tres (en rosa). Anímelos a que busquen modelos especialmente en las diagonales.

Extensión:

Indagando se puede ver que solo hay un cuatro en la tabla. Pero se puede justificar esto mirando que no puede haber ningún cuatro después de la cuarta columna o debajo de la cuarta fila. Así el único cuatro que hay esta a la izquierda y sobre las líneas moradas. Hay un solo cuatro aquí.

Para ver cuantas veces aparece el digito cuatro, es mejor pasar ordenadamente por las columnas y contarlos. No hay ninguno en la primera columna (ni en las restantes columnas impares), dos en la segunda, uno en la cuarta, uno en la octava y dos en la décima. Esto da un total de siete. (Se puede seguir haciendo mas preguntas aumentando columnas en la tabla de Juan, como, cuál será la próxima columna que tiene un solo cuatro).

Hay varios números que están cinco veces. Éstos son 12, 13, 14, 15 y 16,

Hay muchas más preguntas que usted podría hacer aquí. Por ejemplo, ¿hay mas tres que cuatros? ¿Qué números aparecen solo dos veces? ¿Cuál es el dígito que mas se encuentra?

CALCULAR

PROBLEMA 5 – NIVEL 2

Carlos tiene una caja con un número mayor que 7.

María tiene una caja con un número menor que 9.

Tomás tiene una caja con un número mayor que 5.

Todos ellos tienen el mismo número. ¿Cuál es?

¿De que se trata el problema?

Para resolver este problema, los niños tienen que entender las desigualdades. Así que deben saber que todo número a partir del ocho es un número posible para Carlos. El problema también da práctica al uso de los símbolos en las desigualdades.

< menor que

> mayor que

Logros

- Usa símbolos matemáticos =, <, > para las relaciones "es igual que", "es menor que", "es mayor que"

Recursos

- Fichas numéricas (1-10)

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Escribir y hablar con frases numéricas que usan < >
- Trabajar sistemáticamente para resolver un problema

Sugerencia para la secuencia de la enseñanza

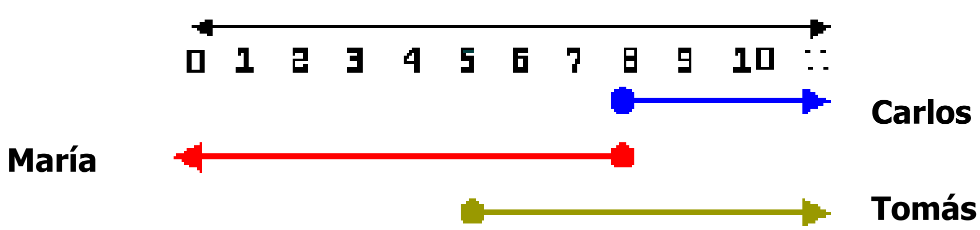
1. Presente el problema y pida que tres niños se paren en frente de la clase. Al lado de ellos ponga un grupo de cuatro niños.
2. Pídales que piensen en maneras de escribir lo que usted hizo usando los símbolos que escribió en el tablero (3, 4, 7, = <, >, 1). Por ejemplo: $3 + 4 = 7$, $7 - 4 = 3$, $3 < 4$
3. Escriba las oraciones, mientras se discute el uso de los símbolos.
4. Plantee el problema
5. Cuando los niños trabajen en el problema hágales preguntas que vayan dirigidas al uso de las desigualdades.
6. ¿Puedes escribir una afirmación para la primera pista?
7. Compartir soluciones

Extensión

Diseñe tres clases de problemas para que otros los resuelvan.

Solución

Una manera de resolver este problema es usando un dibujo. Se puede representar cada uno de los números de las cajas de los niños en una recta numérica. Se dibujaron flechas donde están los números posibles.



Si comparamos dos de esas líneas se nota que solo el ocho esta en la línea de Carlos y en la línea de María. ¿Es posible que Tomás tenga el número ocho en su caja? Dibuje su línea.

Sí, 8 es definitivamente más grandes de 5. Por lo tanto 8 es el número que buscamos porque satisface todas las desigualdades.

LA TARIFA DEL TAXI

PROBLEMA 6 – NIVEL 2

En una época, los taxistas cobraban $1 por parar el taxi, y además cobraban $2 por cada kilómetro recorrido. ¿Qué tan lejos se puede ir si se tienen solamente $23?

¿De que se trata el problema?

Los niños primero tienen que observar cuál es el modelo. El modelo empieza de dos en dos desde uno. ¿Cuándo llega a 23?

Logros

- Continua una secuencia numérica y describe una regla para esta

Recursos

- Monedas de 1 y 2 pesos (dibujos)

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Contar de dos en dos utilizando números impares
- Describir y repetir un modelo numérico

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Ponga una escena para el problema con una discusión sobre los taxis. Más específicamente verifique que los niños entiendan cómo los taxis cobran la parada y el valor por kilómetro
2. Hable a los niños sobre las tarifas de "parada" de los taxis

3. Pregunte: ¿Si quieres viajar 4 Km cuánto te costaría?
4. Discuta las soluciones
5. Proponga el problema para que los niños trabajen en parejas
6. Cuando los niños trabajan hágales preguntas que centren su pensamiento en un modelo de repetición de dos.
   ¿Qué utilizaste para resolver este problema?
   ¿De qué te valiste?
   ¿Qué números usaste? ¿Por qué?
   ¿Cuál es el número siguiente? ¿Cómo lo sabes?
7. Comparta las soluciones

Extensión

¿Qué tan lejos pueden viajar en el taxi si tenías $40?

Solución

Hay varias de maneras de solucionar este problema. Utilicemos una tabla.

Los amigos pueden viajar 11 kilómetros en el taxi.

$	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**
Km	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Extensión : 19,5 kilómetros

LOS TRABAJADORES

PROBLEMA 7 – NIVEL 2

Hay una familia con 4 niños. Entre cada niño hay una diferencia de 2 años de edad. El mayor de los niños, Sofía tiene menos de 11 años.

El niño más joven, Tomás, es mayor de 5.

Entre Sofía y Tomás están las gemelas Claudia y Camila. ¿Cuál es la edad de cada niño en esta familia?

¿De que se trata el problema?

Este problema involucra la relación de edades con enunciados numéricos, donde los estudiantes pueden utilizar símbolos matemáticos: =, <, > para las relaciones "es igual a", "es menor que" y "es mayor que" respectivamente.

El problema también implica conceptos de medida como "más viejo" y "más joven".

El problema requiere que los estudiantes utilicen sentido común y lógica para comprender que los gemelos tienen la misma edad y que el rango de edad está entre 6 y 10.

Logros

- Utiliza símbolos matemáticos como =, <, > para las relaciones "es igual a", "es menor que" y "es mayor que".

Recursos

- Tarjetas con los símbolos =, >, <
- Dibujo de los 4 niños

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Escribir y expresar oraciones numéricas usando los símbolos =, <, >.
- Realiza deducciones simples

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Hable a los niños sobre los cuatro dibujos. Pídales que hagan afirmaciones que puedan ser verdaderas usando los dibujos.
2. Pídales a los niños que hagan afirmaciones acerca de los dibujos usando los símbolos =, >, <
3. Lea el problema a la clase
4. Realice una discusión sobre las palabras: mas viejo, mas joven y gemelos.
5. Bosquejar formas de resolver el problema
6. Mientras los estudiantes trabajan en el problema, pídales que expliquen su criterio usando los símbolos < , >.
7. Anime a los niños a que usen los símbolos en los apuntes de la solución.
8. Comparta las soluciones

Solución

Si el mayor de los niños es menor de 11 y el menor es mayor de 5, las edades de los niños estarán entre 5 y 11. Así que escriba todos los números entre 5 y 11, que son 6, 7, 8, 9, 10. Como hay una diferencia de 2 años entre cada año de nacimiento, las edades deben ser 6, 8 y 10.

Así que la edad de Sofía es 10 (Compruebe 10 < 11); y la edad de Tomás es 6 (Compruebe 6 > 5); la edad de Claudia es 8 (Compruebe 10 - 2 = 8 y/o 6 + 2 = 8); y la edad de Camila es 8 (Compruebe 8 = 8).

TESORO PARA EMBARCAR

PROBLEMA 8 – NIVEL 2

En una isla hay dos piratas y cuatro cofres de un tesoro. Los piratas tienen una balsa en donde pueden llevar el tesoro. La balsa puede llevar dos piratas o un pirata y un cofre del tesoro.

¿Cuántos viajes hacen los piratas para lograr llevar todo el tesoro y ambos piratas a su barco?

Nota: La balsa necesita que uno de los dos piratas la naveguen. No olvides que por lo menos un pirata esta afuera con todo el tesoro.

¿De que se trata el problema?

Este es uno de los mejores problemas para desarrollar una estrategia. Los niños pueden encontrar la estrategia en equipo usando la lógica.

Problemas como este son buenos para desarrollar estrategias y como introducción al álgebra donde la notación conduce a expresar de forma ordenada la repetición de una estrategia.

Logros

- Continua con un modelo secuencial y repetitivo y describe la regla para esto.

Recursos

- Papel y lápiz
- 2 varillas de color naranja (piratas)
- 4 varillas de color amarillo (cofres del tesoro)

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Trabajar el problema en equipo
- Hacer y describir un modelo secuencial para resolver un problema.

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Presente el problema con una lectura o una historia de piratas
2. Proponga el problema a la clase
3. Pida a los niños que describan el problema con sus propias palabras para hacer que entiendan lo que se quiere
4. Usando 2 niños represente el viaje del barco hacia el tesoro. Discuta la manera en como pueden registrar los viajes realizados. (dibujos, listas)
5. Permita que los niños trabajen el problema en parejas.
6. Cuando los niños estén trabajando realice preguntas que enfoquen su pensamiento en los pasos que están realizando.
   ¿Cuántos viajes han realizado?
   ¿Pueden observar algún modelo en lo que están haciendo? descríbanlo
   ¿Cómo están guardando el registro de los viajes?
   ¿Piensan que se pueden realizar menos viajes?
7. Comparta las soluciones escritas del problema

Extensión

¿Qué pasa si hay 8 cofres del tesoro?

Solución

Hay nueve viajes desde la isla al barco.

1. 2 piratas van al barco

2. 1 pirata regresa por el tesoro
3. 1 pirata pone 1 cofre del tesoro en la balsa y regresa al barco
4. Regresa a la isla
5. Pone un segundo cofre en la balsa y regresa al barco
6. Regresa a la isla
7. Pone un tercer cofre en la balsa y regresa al barco
8. Regresa a la isla
9. Pone la ultima caja del cofre del tesoro en la balsa y regresa al barco

Nota: El paso 1 y 2 puede ocurrir en cualquier momento, la balsa esta en tierra o el paso 3 puede ser seguido por, regresar a la tierra, 2 piratas van al barco.

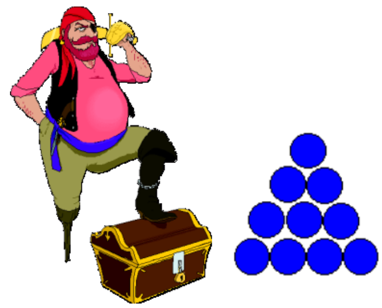
Extensión

Cada cofre del tesoro requiere 2 viajes, uno hacia el barco y uno atrás a la isla. Así que con 8 cofres los piratas necesitan 8 x 2 viajes con los cofres y un viaje extra para un pirata esto significa 17 viajes.

(Con c cofres y 2 piratas necesitaran 2c + 1 viaje)

LAS BALAS DEL CAÑON

PROBLEMA 9 – NIVEL 2



Hay una pirámide de balas de un cañón en una nave pirata.

¿Cuántas balas del cañón hay en la primera capa?

¿Cuántas balas del cañón habrá en la segunda capa?

¿Cuántas balas del cañón habrá en la tercera capa?

¿Cuántas balas del cañón en la capa superior?

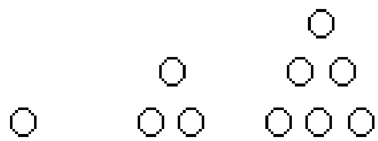
¿Cuántas balas del cañón necesita para terminar la pirámide?

¿De que se trata el problema?

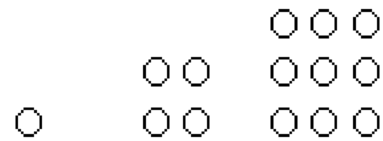
En este problema los niños comienzan a desarrollar una percepción para objetos de dos y tres dimensiones (o pueden reforzar los que ya lo practican). La forma básica de cada una de las capas de la pirámide de las balas de cañón es un triángulo (realmente un triángulo equilátero, pues todos sus lados son iguales). Así que el problema da la oportunidad a los niños de discutir sobre triángulos.

Y esa es la señal para los números triangulares. El número de balas del cañón hasta cada capa son números triangulares.

Esto será de mayor interés en la escuela cuando los niños miren los números cuadrados, los números pentagonales y así sucesivamente. Los dibujos siguientes muestran porque los números son llamados como objetos geométricos.



Los tres primeros números triangulares



Los tres primeros números cuadrados

Los números triangulares alcanzan más importancia en la secundaria donde adquieren nuevos papeles en la familia de coeficientes binomiales. Estos números tienen un papel importante al jugar contando. Y generalmente son vitales en probabilidad y estadística.

Para que cada bala del cañón se apoye encima de la otra, los niños tendrán que comprender que cada bala del cañón encaja exactamente encima de otras tres. Pueden necesitar que se les muestre esto utilizando bolas de tenis o naranjas.

Logros

- Continua con un modelo secuencial y describe la regla para esto.

Recursos

- Bolas de tenis u otras bolas convenientes para construir la pirámide (también podría utilizar plastilina para esto).

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Identificar un modelo y describirlo utilizando sus propias palabras.

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Introduzca el problema utilizando para las balas del cañón (bolas de tenis o similar). Pida a los niños que analicen de que manera ellos pueden apiñar las bolas.
2. Leales el problema. Compruebe que los niños entiendes el significado de la palabra "capas" y también como los piratas colocaron sus balas del cañón.
3. Pida a los niños que calculen cuantas balas del cañón ellos necesitarán. Registre los cálculos para verificarlos después.
4. Anímelos a que encuentren las maneras de resolver el problema (vincule estos problemas con los que ellos han resuelto antes).
   ¿Qué estrategia puedes utilizar?
   ¿Que instrumentos utilizaste?
   ¿Cómo registraste la información?
   ¿Qué descubriste?
5. Cuando los niños trabajen realice preguntas que los enfoquen a los modelos que están usando para resolver el problema.
   ¿Qué puedes comentar acerca de las balas del cañón?
   ¿Cómo estas registrando el número de balas del cañón?
6. Comparta las soluciones.

Otro contexto

Algunas veces las frutas están organizadas de esta manera en los supermercados.

Extensión

Si los piratas quieren poner otra capa de balas del cañón en su pila, necesitarían levantarla y poner otra capa en el fondo. ¿Cuántas balas del cañón habría en esa capa?

Solución

En la primera capa hay 4 balas del cañón (la que esta en la cima)

En la segunda capa hay 3 balas del cañón

En la tercera capa hay 2 balas del cañón

Y en la ultima capa hay 1 balas del cañón

Se necesitan para completar la pirámide: 4+3+2+1 = 10 balas del cañón.

Extensión

Si se coloca una capa de balas del cañón por debajo de la base, esta capa tendría 5 balas del cañón y la pirámide tendrá: 1+2+3+4+5 = 15 balas de cañón.

LA TABLA DE JOSÉ

PROBLEMA 10 – NIVEL 2

José tiene una tabla. El puso los números pares del 2 al 12 a lo largo y los números 3, 6, 9, 12, 15, 18 hacia abajo. Sumo los números entre si observando varios modelos

+	2	4	6	8	10	12
3			9			15
6		10				
9	11				19	
12						
15						
18						

Encuentra algunos modelos tu mismo. Úsalos para completar la tabla de José.

¿De que se trata el problema?

Los modelos son un ingrediente esencial de la matemática. Es muy importante que los niños empiecen a buscarlos y crearlos. Este problema les da la oportunidad de buscar modelos en un ejercicio sencillo de adición. Anime a los niños a que busquen modelos numéricos en la tabla de José, en las direcciones horizontal, vertical y diagonal.

Logros

- Continua una repetición y un modelo secuencial

Recursos

- Papel cuadriculado

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Describir modelos numéricos
- Continuar patrones

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Presente el problema a la clase. Pregúnteles
   ¿Qué número piensas que va aquí?
   ¿Y qué de aquí?
   Coloque estos números en la tabla.
2. Permita a los niños trabajar en el problema con un compañero. Verifique que entienden lo que hacen.
3. Clasifique en su totalidad las ideas y soluciones de los niños. Pídales que expliquen como trabaja su modelo.
4. Anímelos a que intenten la extensión del problema.
5. Discuta las respuestas que los niños dan en la clase. Pregúnteles porque sus respuestas son acertadas. Pídales que realicen preguntas.

Extensión

¿Cuál es el número menor que aparece más de una vez?

¿Cuál es el número mayor que aparece sólo una vez?

¿Cuántas veces aparece el 15?

¿Si la tabla se continúa hacia un lado y hacia abajo, cuántas veces aparecerá el 40? ¿En qué filas y columnas está?

Solución

La tabla de José completa se muestra abajo.

+	2	4	6	8	10	12
3	5	7	9	11	13	15
6	8	10	12	14	16	18
9	11	13	15	17	19	21
12	14	16	18	20	22	24
15	17	19	21	23	25	27
18	20	22	24	26	28	30

Hay un gran número de modelos que se pueden encontrar aquí. Los patrones horizontales son números consecutivos pares e impares. Esto ocurre porque José esta sumando parejas de números o relacionando los números con un número impar. Los modelos en las diagonales como los que están en rojo aumentan en cinco. Debido a que los números horizontales están aumentando de dos en dos y los verticales de tres en tres.   Las diagonales que van hacia la izquierda (como la que esta en azul) solo aumentan en uno. Ya que hay un aumento de tres hacia abajo, pero se disminuye en dos hacia la izquierda.

3–2= 1.

Anime a la clase a que busque especialmente modelos que estén en las diagonales.

Extensión

Vale la pena notar que después del borde rojo aparece cada número por lo menos dos veces. Esto se puede ver a través de las columnas y observando las repeticiones entre ellas. Una observación rápida permite ver que dentro del cuadro rojo aparece cada número una sola vez. Así que el número más pequeño que aparece más de una vez debe ser el número más pequeño fuera del cuadro. Es el 11.

De esta forma el número más grande que aparece sólo una vez debe ser el número más grande dentro del cuadro rojo. Este es el 12.

El número 15 aparece solamente en dos columnas, así que aparece dos veces.

¿Cómo encontramos el 40? En primer lugar el 40 no puede estar a la derecha de "40" en la columna, ni puede aparecer debajo del "39" en la fila. ¿Qué números en la tabla de José determinan el 40? Iremos cuidadosamente a través de las columnas.

2 +? = 40	? = 38 pero no es un múltiplo de 3;
4 +? = 40	? = 36 y 36 es un múltiplo de 3 (un 40);
6 +? = 40	? = 34 pero no es un múltiplo de 3;
8 +? = 40	? = 32 pero no es un múltiplo de 3;
10 +?= 40	? = 30 y 30 es un múltiplo de 3 (un 40);
12 +?= 40	? = 28 pero no es un múltiplo de 3;
14 +?= 40	? = 26 pero no es un múltiplo de 3;
16 +?= 40	? = 24 y 24 es un múltiplo de 3 (un 40);
18 +?= 40	? = 22 pero no es un múltiplo de 3;
20 +?= 40	? = 20 pero no es un múltiplo de 3;
22 +?= 40	? = 18 y 18 es un múltiplo de 3 (un 40);
24 +?= 40	? = 16 pero no es un múltiplo de 3;
26 +?= 40	? = 14 pero no es un múltiplo de 3;
28 +?= 40	? = 12 y 12 es un múltiplo de 3 (un 40);
30 +?= 40	? = 10 pero no es un múltiplo de 3;

32 +?= 40 ? = 8 pero no es un múltiplo de 3;

34 +?= 40 ? = 6 y 6 es un múltiplo de 3 (un 40);

36 +?= 40 ? = 4 pero no es un múltiplo de 3.

40 aparece seis veces en la tabla de José.

Esto se puede encontrar más rápidamente de dos maneras. Primero es más rápido usando 3 +? = 40, 6 +? = 40, etcétera.

Pero si observamos que 40 = 20 x 2 y que 2 x 3 = 3 x 2, podemos anotar las siguientes maneras de conseguir 40. Olvidando lo primero podemos conseguir el 40 de otras seis formas.

40 = 20 x 2;

40 = 17 x 2 + 2 x 3;

40 = 14 x 2 + 4 x 3;

40 = 11 x 2 + 6 x 3;

40 = 8 x 2 + 8 x 3;

40 = 5 x 2 + 10 x 3;

40 = 2 x 2 + 12 x 3.

SALUDO DE MANO

PROBLEMA 11 – NIVEL 3

Seis comerciantes se encuentran para el almuerzo y se saludan de mano entre si. ¿Cuantos apretones de manos hay aquí?

¿De que se trata el problema?

La matemática que involucra este problema depende de la aproximación que se utiliza para solucionarlo. Si los niños buscan modelos comenzando por los casos más simples (2 personas) el problema implica números triangulares.

```
                                          *
                         *              *   *
              *        *   *          *   *   *
 *          *   *    *   *   *      *   *   *   *
 1            3          6                10
```

Logros

- Indica la regla general en un sistema de problemas prácticos.
- Continua un modelo secuencial y describe una regla para este.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar diagramas o listas para mostrar las relaciones
- Identificar el modelo de números triangulares

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Introduzca el problema haciendo que 3 niños hagan el papel de las personas que se encuentran y se saludan de mano.
2. Cuente y registre el número de apretones de manos.
3. Discuta otras maneras de convencer que hay otros 3 apretones de manos (ejemplo, dibuje un cuadro)
4. Proponga el problema para que los niños trabajen en parejas o en grupos pequeños.
5. Sea creativo en las maneras de resolver el problema (realizarlo afuera, hacer una lista, buscar un modelo). Enumérelos en el tablero para que los niños los consideren.
6. Cuando los niños trabajan realice preguntas que enfoquen su pensamiento a trabajar sistemáticamente y buscar modelos.
   ¿Cómo estás registrando los apretones de manos? (diagrama, lista)
   ¿Cuántos apretones de manos piensas que habría si se agrega otra persona?
   ¿Qué notas sobre el número de apretones de manos y el número de personas?
   ¿Cómo podrías registrar tu trabajo de tal forma que puedas buscar un modelo?
7. Resultados de interés.

Extensión

Cuantos apretones de manos hay en la reunión, si las personas entran en pares y se saludan de mano con cada uno excepto con su pareja

Solución

Si dos personas se saludan dan un apretón de manos.
Si tres personas se saludan hay tres apretones de manos.
Si cuatro personas se saludan hay tres apretones de manos mas, así 3 + 3 = 6 en total.

Si cinco personas se saludan hay cuatro apretones de manos mas por tanto

6 + 4 = 10

Para 6 personas habrá 5 apretones de manos más así 10 + 5 = 15

Un segundo modelo que puede ser descrito, es que cada persona se salude de mano con todos los demás. Si hay seis personas cada persona tiene que hacer cinco apretones de manos. Cada vez que hay un apretón de manos hay dos personas implicadas. Esto significa que usted sólo necesita ½ (6 x 5) = 15.

Extensión

6 personas = 12 apretones de manos (15 – 3 = 12, restan 3 para los apretones entre las parejas)

CUADRADOS CON PALILLOS

PROBLEMA 12 – NIVEL 3

Ricardo y Juan estaban sentados jugando alrededor de unos palillos, Ricardo comenzó a hacer un 

¿Cuántos palillos necesitará para hacer un modelo de 9 cuadrados?

Variación: ¿Cuántos cuadrados puede hacer Richard con 23 palillos?

¿De que se trata el problema?

En este problema los niños necesitan encontrar un modelo y aplicarlo después a una situación práctica. En el problema original Ricardo tiene que encontrar cuántos palillos necesita para hacer 9 cuadrados. Pero el problema se puede mirar de otra forma (véase la variación). ¿Dado el número de palillos cuántos cuadrados puede hacer Ricardo?

En cualquier situación el problema puede establecer una base para el álgebra permitiendo a los niños observar un enlace entre las variables. Las variables son el número de palillos y el número de cuadrados. Para apreciarlo los niños no tienen que escribir necesariamente el acoplamiento como se ha hecho en la solución. Se puede hacer por ejemplo utilizando una mesa.

La extensión toma una perspectiva diferente. Aquí el camino esta abierto para que los niños lleguen con su propio modelo en un esfuerzo por reducir el número de palillos que se necesitan para fabricar 9 cuadrados. (Esto también puede voltearse y buscar el número máximo de cuadrados que se fabrican al utilizar un determinado número de palillos)

Logros

- Indica la regla general en un sistema de problemas prácticos.
- Continua un modelo secuencial y describe una regla para este.

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Indicar una regla general en una situación práctica
- Describir un modelo de secuencias.

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Pida a los niños que formen un cuadrado con los palillos. Posteriormente pida que realicen dos cuadrados. Discuta ¿Cuántos palillos necesitan? (7)
2. Plantee el problema
3. Cuando los niños trabajan en el problemas hágales preguntas que enfoquen su pensamiento en el patrón numérico que esta apareciendo
   ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 3 cuadrados? ¿4 cuadrados?
   ¿Puedes indicar cuántos necesitaras para 5? ¿Por qué piensas eso?
   ¿Puedes observar el modelo con el número de palillos que necesitas? ¿Descríbelo?
4. Anime a los niños a que escriban la regla para encontrar el número de palillos utilizando sus propias palabras.
5. Comparta los resultados

Extensión

¿Si Juan intentara otro modelo con los palillos cuál es el número más pequeño de palillos que necesitaría para hacer 9 cuadrados todos del mismo tamaño?

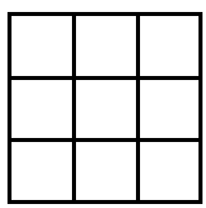
Solución

El modelo de Ricardo da un patrón que depende del número de palillos que él utiliza. Para hacer un cuadrado utiliza cuatro palillos; para hacer 2 cuadrados utiliza 7 palillos; para hacer 3 cuadrados utiliza 10 palillos. Para cada nuevo cuadrado él necesita tres palillos más. Si él quiere hacer un (#) número determinado de cuadrados. Él necesita 3 x # + 1 palillo. Así que para 9 cuadrados necesita 9 x 3 + 1 = 28 palillos.

Este problema puede ser resuelto, sin basarse tanto en el álgebra formal. Puede utilizarse una mesa, los cuadrados pueden formar los palillos a contar, y así sucesivamente. Sin embargo, se debe precisar la relación entre los cuadrados y los palillos y lograr que ellos lo observen en situaciones similares. Podría animarlos para que hagan su propio modelo de palillos.

Variación

Puesto que 3 # + 1 = 25, entonces # = 8. Richard puede hacer 8 cuadrados con 25 palillos.



Extensión

Esto se podría dejar como incógnita para ver quién puede utilizar menos palillos. Podemos conseguir 9 cuadrados usando 24 palillos.

CARRERA A 100

PROBLEMA 13 – NIVEL 3

Dos cucarrones, Pila y Pilo, juegan en una recta numerada. Pilo puede saltar de tres números y Pila puede saltar de dos. Pilo empezó en uno y Pila comenzó en 30. Si ellos saltaron juntos, ¿Quién consigue primero llegar a 100 y cuantos saltos del segundo tuvo que esperar?

¿De que se trata el problema?

Trata sobre modelos numéricos y también sobre solucionar problemas algebraicos simples. Claro, puede hacerse salto a salto. Si sus niños pueden hacerlos solos esta manera esta bien, sin embargo, se les debe señalar que hay otras maneras de hacerlo. Esta clase de problemas merecen la pena, ayuda a que ellos obtengan una percepción de los problemas y a su intuición.

En la extensión 1, Pilo y Pila no caen exactamente en el numero 100. La extensión 2 es difícil amenos que sea hecha con ayuda de una tabla.

Puede hacerse resolviendo dos ecuaciones pero esto está más allá de este Nivel.

Logros

- Describe en palabras, reglas de continuación de números y modelos espaciales de sucesión
- Formula una regla general para un juego de problemas prácticos

Recursos

- Líneas numéricas (1-100) (o utilice regla métrica)

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Describir en palabras modelos numéricos
- Trabajar sistemáticamente para solucionar un problema que implica modelos numéricos

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Introduzca los dos personajes en el problema
2. Diga que Pilo salta usando este modelo: truene los dedos, palmada, truene los dedos, palmada. Discuta las maneras de registrar esto.
3. Proponga el problema para que los niños trabajen en parejas
4. Cuando los niños estén trabajando haga preguntas que se enfoquen en el pensamiento que se está utilizando
   ¿Qué estás haciendo?
   ¿Por qué lo resuelves de esa manera?
   ¿Quién piensas que llegará primero? ¿Por qué piensas eso?
   ¿Qué puedes decir sobre los números en el modelo de Pila?
   ¿Qué puedes decir sobre los números en el modelo de Pilo?
5. Comparta las soluciones
6. Si todos los niños representaron o dibujaron el problema se les pide que vuelvan atrás y que piensen sobre otras maneras que puedan usar para resolver el problema, por ejemplo usando la división.

Extensión

Permita que Pila comience en 51 y salte de dos números a la vez. Permita que comience Pilo en 1 y salte de cuatro números a la vez.

¿En la extensión 1, en cuál número da alcance?

Solución

Esto puede resolverse utilizando un dibujo o con álgebra. Lo haremos usando una tabla.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pila	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
Pilo	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Pila	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72
Pilo	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64

	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Pila	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94
Pilo	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97

	33	34	35								
Pila	96	98	100								
Pilo	100										

Así de la tabla se puede ver que Pilo llega justo al 100 y tenía que esperar dos saltos para que Pila llegue.

Otra cosa que usted y los niños pueden ver de la tabla es que ésta es una manera tediosa de resolver este problema. Vemos que Pila esta saltando en números pares de la forma 2# + 30 entonces ella consigue llegar al 100 cuando 2# + 30#=100 y esto sucede para #=35 (verifíquelo en la tabla).

Por otro lado Pilo esta usando el modelo 3# + 1, el consigue el 100 cuando

$3\# + 1 = 100$, en otras palabras cuando $3\# = 99$, o cuando $\# = 33$, como vemos en la tabla Pilo llega al cien en 33 saltos, dos delante de Pila.

Extensión

Usando la ecuación $2\# + 51 = 100$ para Pila, podemos verificar que # debe ser mas grande que 24 ($2 \times 24 + 51 = 99$) y menor que 25 ($2 \times 25 + 51 = 101$). Así que Pila necesitará 25 pasos para llegar al 100

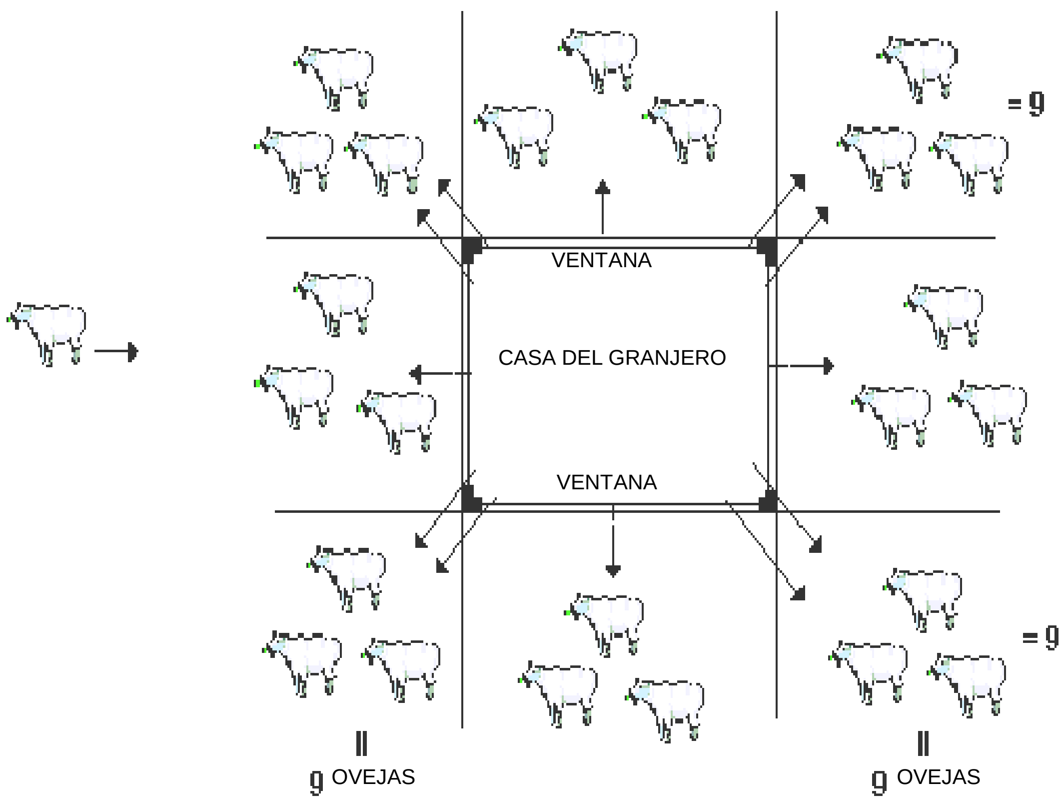
Para Pilo tenemos la ecuación $4\# + 1 = 100$ en este caso verificamos con una tabla y miramos que # es mayor que 24 ($4 \times 24 + 1 = 97$) y menor que 25
($4 \times 25 + 1 = 101$).

LAS OVEJAS DEL GRANJERO

PROBLEMA 14 - NIVEL 3

Un granjero puede ver nueve ovejas si mira hacia afuera desde cualquiera de sus cuatro ventanas. Su esposa le compra una oveja nueva. ¿En qué potreros puede poner la nueva oveja de modo que pueda ver nuevamente nueve ovejas desde cada una de las cuatro ventanas?

De cuántas maneras puede el granjero poner sus 25 ovejas de modo que él pueda ver 9 ovejas a través de cada ventana? (cada prado debe tener por lo menos una oveja.)



¿De que se trata el problema?

Este problema ayuda a los niños a desarrollar habilidades en la solución de problemas, en el pensamiento lógico y en su capacidad de trabajar secuencialmente. También les ayuda a desarrollar reglas en los problemas matemáticos.

Hay mucho en este problema. Al hacerlo la primera vez puede encontrarlo complicado. Sin embargo, el problema da oportunidad a los niños de percibir el dominio de una idea matemática para ocuparse de una gran serie de casos. Esto es algo a lo que ellos se expondrán cuando pasen por la escuela y la universidad. Este es el objetivo del álgebra, y de hecho, de la matemática en su conjunto.

Logros

- Indica la regla general para un sistema de problemas generales

Recursos

- Fichas para contar o animales plásticos

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar varias estrategias para solucionar el problema
- Trabajar lógicamente y secuencialmente

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

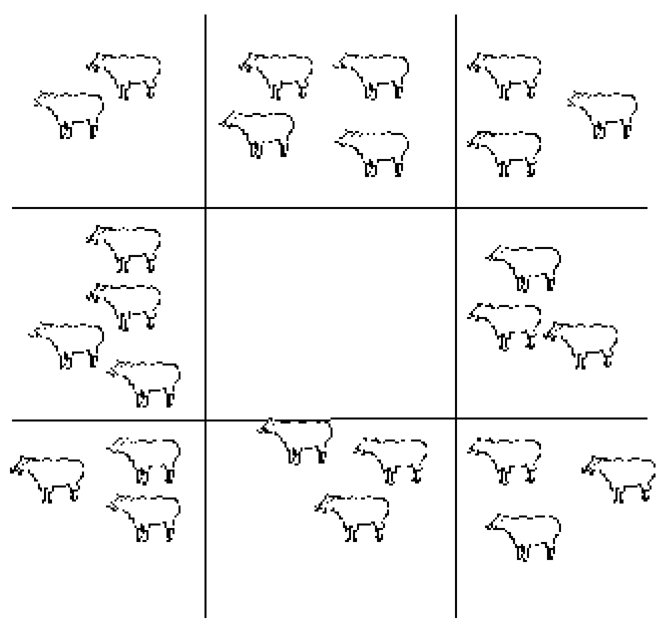
1. Cuente a los niños la historia de un granjero al que le gusta ver únicamente nueve ovejas por la ventana. Su esposa le ha comprado otra oveja ¿qué es lo que va a hacer? ¿Dónde puede ponerla?

2. Sitúe una cuadricula grande dentro del salón de clases e indique las características. Por ejemplo donde están las ventanas.
3. Explique las reglas
4. Anime a los niños a que trabajen en parejas. Y que registren las secuencias que van realizando al solucionar el problema.
5. Comparta la soluciones. ¿Hay reglas?

Otros contextos

Primero que todo el granjero puede mirar cualquier animal que le satisfaga o cualquier cosa que le satisface (su esposa pudo regalarle otro árbol de pino). En segundo lugar, puede pensar en la casa como si fuera una cámara fotográfica de seguridad. El guardia de seguridad es feliz si él ve 9 piezas de arte en sus cámaras de vigilancia. ¿Puedes pasar de contrabando una pieza de arte sin que el guardia de seguridad se entere de que algo cambio?

Solución



Quizás la manera más simple de solucionar este problema es notar que se puede mover una oveja desde el prado superior-derecho al centro-izquierdo. Esto mantiene en la visión 9 ovejas desde cada ventana excepto la que esta en la parte superior. Si usted pone una oveja en la parte centro-superior del cercado esto balancea el problema.

Pero, hay muchas maneras de solucionar este problema. Sin embargo, todas necesitan de la mudanza de ovejas. Deje a los niños pensar en otras soluciones. Al principio esto se hará probablemente por suposición y sobre la base de comprobaciones. Esto puede tomar un buen tiempo. Pueden hacerlo como tarea y pedir a sus padres que les ayuden. Hágalo en una competencia. Cuando tenga algunas respuestas, puede ser que se comience a ver un modelo. Asombrosamente, en cada caso, los números de ovejas en los cuatro prados de la esquina suman siempre 11. ¿Por qué es esto?

La discusión siguiente puede ser un poco difícil pero algunos de los niños más brillantes podrán ver qué está sucediendo. Suponga que sumamos las ovejas haciéndolo con la cantidad que se ve por cada una de la cuatro ventanas, entonces tendremos la suma de 9+9+9+9=36 = 9 X 4. Pero esto no es correcto ya que el total de ovejas es 25. Así, 25 mas las ovejas en las esquinas son 36 en el cercado. Esto significa que los prados de la esquina tienen que tener 11 ovejas en ellos. Ahora todo lo que tiene que hacer debe ser sistemático y conseguirá las 16 respuestas abajo.

2	6	1
6		1
1	1	7

1	5	3
2		5
6	2	1

1	4	4
3		4
5	3	1

1	6	2
6		1
2	1	6

2	6	1
5		2
2	1	6

1	6	2
5		2
3	1	5

2	4	3
6		1
1	3	5

3	4	2
5		2
1	3	5

1	6	2
4		3
4	1	4

1	4	4
4		3
4	3	2

1	5	3
5		2
3	2	4

1	4	4
5		2
3	3	3

2	5	2
5		2
2	2	5

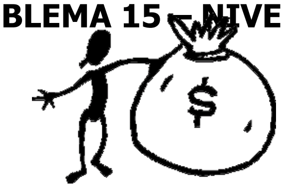
2	5	2
4		3
3	2	4

2	4	3
3		4
4	3	2

2	4	3
4		3
3	3	3

LOS GEMELOS REVUELTOS

PROBLEMA 15 – NIVEL 4



Tina y Tomás son gemelos. Tina ahorra y Tomás gasta. Tomás se encontró un billete de $200 el domingo en la tarde y puede gastar $20 por día a partir de el lunes. Coincidencialmente, Tina empezó a trabajar el lunes y gana $25 por día. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que Tina tenga más dinero que Tomás?

¿De que se trata el problema?

Este problema involucra la escena de una situación práctica a ser resuelta matemáticamente. Puede realizarse por suposición o utilizando una tabla de números. Lo realizaremos usando un acercamiento gráfico en primer lugar y analizándolo desde un punto de vista algebraico después. Vale la pena ver cuál de estos dos métodos es el mejor. Este acercamiento al problema dará las herramientas a los niños para que puedan trabajar en otras situaciones.

Logros

- Diseña e interpreta los gráficos en un plano cartesiano que representan situaciones diarias.
- Continua con un modelo secuencial y repetitivo describiendo la regla para esto.
- Utiliza la regla para hacer predicciones (suposiciones).

Recursos

- Papel para gráficos.

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

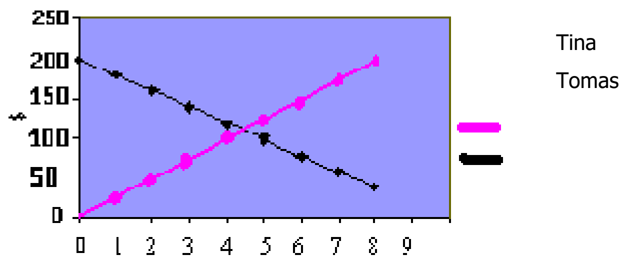
- Describir una regla para continuar con una secuencia numérica.
- Comparar dos secuencias numéricas.

Secuencia de la enseñanza

1. Plantee el problema a la clase. Puede utilizar 2 niños para ayudar a entender el problema y de este modo interesarlos en el problema.
2. Motive a que se planteen sugerencias sobre la solución de los problemas. Enumérelas en el tablero para que los niños se refieran a como solucionar el problema.
3. Cuando los niños trabajen en parejas o grupos de trabajo solucionando el problema realice preguntas según la estrategia que han seleccionado:
   ¿Qué estrategia estás utilizando?
   ¿Por qué seleccionaste esa estrategia?
   ¿Estás viendo el progreso?
4. Anime a los niños a que busquen soluciones de manera clara que describan claramente lo que se hizo.
5. Pida las soluciones por escrito.

Solución

En el gráfico de abajo, trazamos la situación. La línea negra representa las finanzas de Tomás y la línea rosada representa la situación de Tina.



En el gráfico podemos ver fácilmente que la línea rosada pasa por encima de la línea negra el día viernes. Así es que en cinco días Tina tiene más dinero que Tomás.

Extensión

Para solucionar este problema algebraicamente tenemos que averiguar las dos reglas para los modelos del producido por Tomas y la actividad de Tina. Tomas empezó con $200 y gastó $20 por día. Así que cada día él tiene $20 menos. Su ecuación es:

M = 200 - 20n.

Por otra parte Tina gana $25 cada día así que su ecuación es

M = 25n.

Usted debe comprobar estas ecuaciones poniendo valores reales. Si se igualan las M, se tiene:

25n = 200 - 20n, que se convierte 45n = 200, así que n es 4 y un pedacito.

Si ellos tienen la misma cantidad después de 4 días y un pedazo, entonces uno de ellos debe tener más la primera vez para que en el día 5 el dinero de Tina haya aumentado, ella simplemente tendrá mas dinero en el día 5.

EL MODELO DE JUAN

PROBLEMA 16 – NIVEL 4

Juan habla por teléfono con su amigo Pedro. Tiene un modelo numérico, que intentaba describir a Pedro pero no podía encontrar las palabras para hacerlo.

El modelo de Juan era: 3, 7, 11, 15...

¿Cómo puede describirle a Pedro la secuencia numérica? ¿Cómo puede describirle a Pedro la forma de conseguir el término 50 de la manera más simple posible?.

Luego Pedro pensó en un modelo. El modelo de Pedro era 3, 6, 12, 24. ¿Cómo puede Pedro describirle a Juan la secuencia numérica? ¿Cómo puede describirle a Juan la forma de conseguir el termino 50 de la manera más simple posible?

¿De que se trata el problema?

El objetivo es obtener destrezas en la consecución de los términos en una sucesión. En este contexto se puede ser capaz de formular una regla para determinar una sucesión. Lo que sé esta buscando es conseguir una expresión para el término n de una sucesión.

Logros

- Encontrar una regla para conseguir cualquier término en una secuencia de números

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar sus propias palabras para describir una secuencia numérica.
- Utilizar una regla para encontrar un término en una secuencia numérica.

Secuencia de la enseñanza

1. Introduzca la lección con el juego de "a quién pertenece". En este juego los niños intentan suponer los números de la secuencia.
2. Cuando ellos observan al profesor ordenar en el tablero los números en 2 listas "pertenece" y "no pertenece". Observando las listas intentarán suponer la regla, acláreles que guarden su regla hasta finalizar el juego. La regla es que a los múltiplos de 4 pertenecen el 12, 24, 8, y no pertenecen el 1, 0, 5, 7, 6, 13, 15.
3. Plantee el problema a la clase.
4. Cuando los niños trabajan realice preguntas que les incite a describir los modelos con sus propias palabras.
5. Si los niños tienen problemas para encontrar los modelos anímelos a que exploren el tamaño de los "saltos" entre los números.
6. Cuando los niños trabajen encontrando el término 50 recuérdeles que encuentren la manera más fácil. Aunque los niños pudieran continuar con la sucesión de 50 mida el tiempo que gastan, sin exigirles que encuentren una regla para cualquier término en el modelo.
7. Comparta las explicaciones de los modelos encontrados, éstos pueden escribirse en el tablero.

Solución

En la sucesión de Juan, el primer término es 3. Para seguir del primer al segundo término, él tuvo que sumar 4. La misma relación tiene que hacerse para ir del segundo término al tercero. Y si suma otros 4 consigue el cuarto término. Así que para decirle a Pedro cómo generar el modelo, tiene sólo que decir "Pedro, usted empieza en 3 y adiciona 4. De esa manera conseguirá todos los números de mi modelo."

Ahora eso no nos ayuda con el término 50. Pedro, podría conseguirlo agregando 4 hasta conseguir el término 50 pero se puede hacer algo mejor que eso.

Bien, para conseguir el primer término Juan tomó 3 y no agregó ningún 4. Para conseguir el segundo término, Juan tomó 3 y agregó un 4. Para conseguir el tercer término tomó 3 y agregó dos 4. Para conseguir el cuarto término tomó 3 y agregó tres 4. El número de veces que adicione 4 Juan, siempre es uno menos del número del término. Así para el sexto término Juan tomará 3 y agregará cinco veces 4.

Así que Juan puede decirle ahora a Pedro cómo conseguir el término 50 rápidamente. "Pedro, debes tomar el 3 y agregarle 49 x 4". A lo que Pedro contesta "Gracias, el número para el término 50 es 3 + 49 x 4 = 199”.

Ahora es el turno de Pedro. Recuerde, su sucesión es 3, 6, 12, 24. Aquí él está empezando en 3 y se está doblando para conseguir el próximo termino en la sucesión. Así que él dice simplemente esto: "Juan, simplemente toma el 3 y sigue doblando". Bien quizá eso no es demasiado exacto pero servirá ahora.

Se debe doblar al menos una vez y eso hace el número del término en la sucesión, él le dice a Juan, "Tome 3 y dóblelo, entonces dóblelo de nuevo y siga haciendo esto para 49 dobles. Así que el término 50 es 3 x 2 x 2 x… x 2, dónde hay 49 productos de 2". Usted necesitará una calculadora para obtener el resultado. ¡El número 3×2^{49} es muy grande!.

EL REMEDIO PARA LA TOS

PROBLEMA 17 – NIVEL 4

EL señor Muñoz y su hija María están enfermos. Van a la farmacia y cada uno compra una botella de medicina para la tos. La botella del señor Muñoz tiene 300ml y tiene que tomarse 10ml cada 3 horas. Por otra parte, a María le dan una botella más pequeña con sólo 90ml y ella tiene que tomarse 5ml cada 6 horas. Los dos tienen que tomar la medicina entre las 7am y 7pm. ¿Cuál de las dos botellas dura más?

¿De que se trata el problema?

Este problema puede resolverse de varias maneras. Se sugiere un diagrama o una tabla sería la mejor manera de resolverlo.

El objetivo del problema es ver cómo pueden compararse diferentes proporciones. Esto es típico en muchos problemas del mundo real donde hay diferentes proporciones y diferentes cantidades.

¡Cuidado! Hay un truco leve en este problema. Los dos enfermos tomarán su primera dosis a las 7am. Así pues, por ejemplo, el señor Muñoz toma su medicina 4 veces en 12 horas (una vez cada tres horas) más la dosis de las 7am.

Logros

- Bosqueja e interpreta los gráficos en una regla de números enteros.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Dibujar un gráfico con precisión.
- Usar el gráfico para obtener una información.

Secuencia de la enseñanza

1. Solucione el problema utilizando una botella de medicina. Pida que los niños estimen el volumen de la medicina y pronostique las instrucciones que se leerán en la botella.
2. Lea el problema a la clase o se puede presentar el problema utilizando 2 botellas etiquetadas como lo dice el problema.
3. Consiga que los niños piensen cómo pueden resolver el problema antes de pedirles que trabajen el problema en parejas.
4. Cuando los niños solucionen el problema, haga preguntas que centren su pensamiento en que estrategia sirve para solucionar el problema:
   ¿Cómo estás resolviendo el problema?
   ¿Por qué decidiste resolverlo de esa manera?
   ¿Qué puedes decirme sobre lo que has encontrado?
   ¿Piensas que puedes convencer a tus compañeros de que has encontrado la solución? ¿Que dices?.
5. Comparta las soluciones.

Extensión

La señora María también desarrolla una tos. El farmaceuta dice que debe tomar 10ml cada 4 horas de medicina. ¿Cuánta medicina puede tomar ella? ¿Por qué María tiene una dosis más pequeña?¿Cuántas dosis debe tomar ella? ¿Cuáles son las dosis típicas de medicina?

Solución

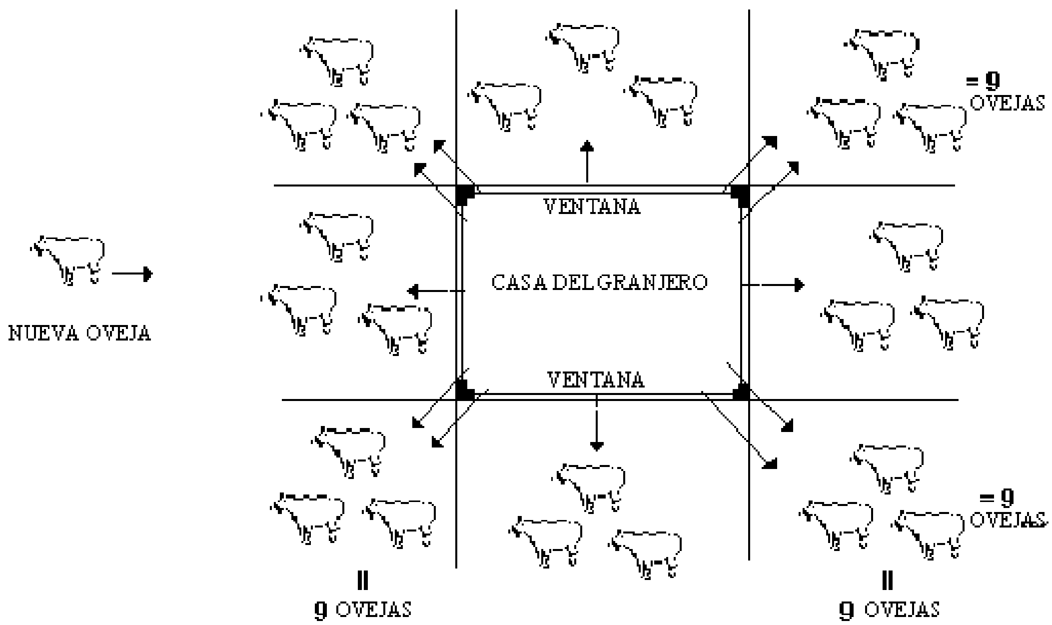
Use un gráfico con el eje horizontal marcado de 7am a 7pm en horas durante aproximadamente 7 días. El señor Muñoz tomará toda su medicina en el sexto día a las 7pm. Maria hará lo mismo.

Extensión: La señora Muñoz usará 40ml por día (4 dosis de 10 ml cada día). Si la botella dura seis días como la de su esposo, entonces ella tendrá una botella de 40 * 6 = 240 ml

LAS OVEJAS DEL GRANJERO

PROBLEMA 18 - NIVEL 4

Un granjero puede ver nueve ovejas si mira hacia fuera desde cualquiera de sus cuatro ventanas. Su esposa le compra una oveja nueva. ¿En qué potreros ella debe poner la nueva oveja de modo que el granjero pueda ver nueve ovejas desde cada una de las cuatro ventanas?



¿Cuál es el número mayor de ovejas que su esposa puede regalarle sabiendo que a él le gusta solo ver 9 ovejas a través de cada ventana?

¿Cuál es el número más pequeño de ovejas que su esposa puede regalarle sabiendo que a él le gusta ver 9 ovejas a través de cada ventana?

¿Si hay por lo menos una oveja en cada potrero, qué número de ovejas puede tener el granjero y todavía ver las 9 ovejas a través de cada ventana?

¿De que se trata el problema?

Este problema ayuda a los niños a desarrollar habilidades en la solución de problemas, el pensamiento lógico y su capacidad de trabajar secuencialmente. También ayuda a desarrollar reglas en los problemas matemáticos. Estas reglas no son evidentes por algún tiempo.

Hay mucho en este problema. Puede encontrarlo complicado al resolverlo la primera vez. Sin embargo da oportunidad a los niños de percibir el dominio de una idea matemática para ocuparse de una gran serie de casos. Esto es algo a lo que ellos se expondrán cuando pasen por la escuela y la universidad. Este es el objetivo del álgebra, y de hecho, de la matemática en su conjunto.

Otro aspecto de este problema es que se pide que maximice y que reduzca al mínimo el problema. Usted necesita encontrar el número más grande y más pequeño de ovejas que satisfacen ciertas condiciones. Éste es un tema común de las matemáticas, motivado por el mundo real y sus demandas.

Logros

- Encuentra una regla para describir cualquier número en una sucesión de números y expresarlo en palabras.
- Encuentra y justifica una fórmula en palabras que representa una situación práctica dada.

Recursos

- Fichas para contar o animales plásticos

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Usar una variedad de estrategias para resolver un problema.
- Trabajar lógicamente y secuencialmente

Sugerencias para la secuencia de la enseñanza

1. Cuente a los niños la historia de un granjero al que le gusta ver únicamente nueve ovejas por la ventana. Su esposa le ha comprado otra oveja ¿qué es lo que va a hacer? ¿Dónde puede ponerla?
2. Situé una cuadricula grande dentro del salón de clases e indique las características. Por ejemplo donde están las ventanas.
3. Explique las reglas:

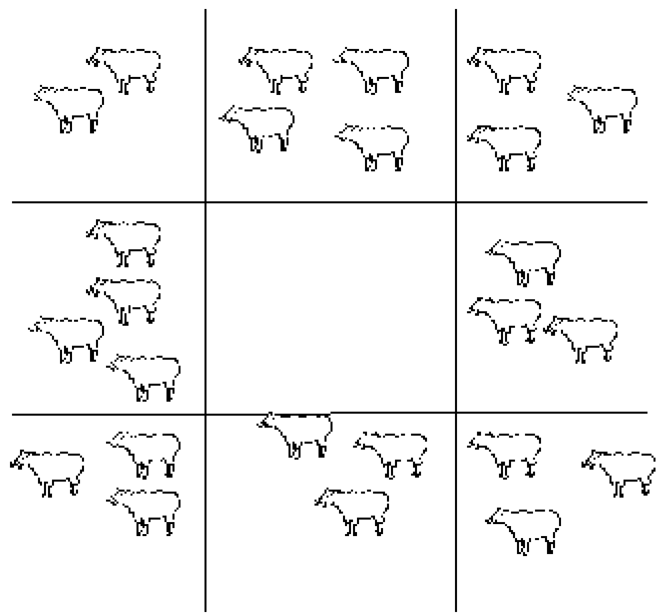
- Las nuevas ovejas deben entrar en un potrero, no pueden ocultarse ni comerse.
- El granjero debe ver un total de nueve ovejas en cada potrero desde cada ventana.

4. Anime a los niños a que trabajen en parejas y que registren las secuencias que van realizando al solucionar el problema.
5. Comparta las soluciones. ¿Hay reglas?.

Otros contextos

Primero de todo el granjero puede mirar cualquier animal que le satisfaga o cualquier cosa que le satisface (su esposa pudo regalarle otro árbol de pino). En segundo lugar, usted puede pensar en la casa como si fuera una cámara fotográfica de seguridad. El guardia de seguridad es feliz si él puede ver 9 piezas de arte en sus cámaras de vigilancia. ¿Cuántas piezas de arte puede alguien robar sin que el guardia de seguridad sé de cuenta?

Solución



La respuesta más simple para el granjero se muestra anteriormente. Sin embargo hay 16 respuestas en total. Éstas se dan en las ovejas del granjero del nivel 3.

Para maximizar el número de ovejas, se debe poner los números más pequeños en las esquinas. Hay dos razones que conocemos para esto. Primero se construye la solución de la oveja del granjero del nivel 3 pero no es la manera más fácil. Se da dé todos modos.

Así que el número más pequeño de ovejas entra en la esquina porque el número de ovejas + los números en los potreros de la esquina = 36.

(Vea las ovejas del granjero del nivel 3). Como el número de ovejas va encima del número en los potreros de la esquina, abajo se va a mantener la suma constante en 36.

Como tiene que tener por lo menos una oveja en cada potrero, necesita poner una oveja en cada uno de los potreros de la esquina. Esto da la respuesta de abajo como la única posibilidad. Hay 32 ovejas.

1	7	1
7		7
1	7	1

Pero es más simple mirarlo de la siguiente manera. Con esta manera puede ser más fácil convencer a la clase. Suponga que colocamos cualquier número en una esquina. Reduzca este número por uno. Para guardar las dos sumas de la ventana que incluyen esa esquina igual a 9, nosotros necesitaremos añadir uno a cada uno de los potreros de cualquier lado de esta esquina. Esto cambiará la cuenta de las ovejas por - 1 + 1 + 1 = +1, reduciendo el número de ovejas, en los aumentos de la esquina del potrero aumenta el número total de ovejas en uno. Esto significa que queremos poner el número más pequeño de ovejas en cada potrero de la esquina. Este número más pequeño es 1.

Para reducir al mínimo el número de ovejas que usted desea poner los posibles números más grandes en las esquinas. (Usted usa el mismo argumento que usamos anteriormente en el potrero de la esquina. Pero esto va aumentando el número de ovejas en este potrero, así reducirá el número total de ovejas.) Esto le da 20 ovejas.

4	1	4
1		1
4	1	4

Teniendo esto, puede conseguir cualquier número de ovejas a partir del 20 hasta el 32. Empiece de 20. Entonces sistemáticamente el movimiento de una oveja de un potrero de la esquina a un potrero vecino del centro; ahora agregue otra oveja al lado de la ventana que ha sido reducido por uno. Esta regla debe conseguirle a partir de 20 hasta 32 ovejas.

MASMELOS

PROB IVEL 4

El lunes Carlos, José y Silvia compartían algunos masmelos que su madre les había dado. A José le dieron el doble de Masmelos que le dieron a Carlos. A Silvia tres veces los de Carlos más dos masmelos. Su madre les dio el mismo número de masmelos todos los días hasta el viernes (incluido este). En total, su madre les dio 70 masmelos. ¿Cuántos masmelos le dieron a Carlos el lunes?

¿De que se trata el problema?

Al solucionarlo tiene que referirse siempre a Carlos y a su situación, esta es la única manera que puede relacionarse a lo que José consigue y a lo que Silvia consigue.

Realmente se podrían dar más ideas. Dejamos eso para que usted lo haga.

En la práctica, los problemas complicados que pueden resolverse algebraicamente a menudo tienen ideas numéricas bastante simples. Por supuesto, la misma cosa puede decirse para cualquier problema aparentemente difícil en matemáticas. Las ideas que se utilizan en cualquier nivel se basan en unas encontradas anteriormente.

Logros

- Soluciona ecuaciones lineales simples

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Resolver problemas que involucren relaciones lineales simples.

- Escribir expresiones lineales simples.

Secuencia de la enseñanza

1. Lea la primera parte del problema a la clase. El lunes Carlos, José y Silvia compartían algunos masmelos que su madre les había dado. A José le dieron el doble de masmelos que le dieron a Carlos. A Silvia tres veces los de Carlos más dos masmelos.
2. Haga algunas preguntas simples para conseguir que los niños piensen sobre el problema. ¿Si Carlos tiene diez masmelos cuántos han conseguido José y Silvia?.
3. Pida que los niños usen frases numéricas para expresar sus respuestas.
4. Comparta y discuta. En esta fase usted puede hablar sobre el uso de una letra para representar el número desconocido en el problema.

Carlos	x
José	2x
Silvia	3x + 2

5. Plantee el problema a la clase.
6. Dé a los niños tiempo para pensar cómo resolverán el problema y que lo discutan con sus amigos.
7. Dígale a los niños que usen frases numéricas en su registro escrito de la solución.
8. Cuando los niños estén trabajando, hágales preguntas que se enfoquen en sus operaciones numéricas y frases numéricas para registrar su respuesta.
   ¿Qué operación has seleccionado? ¿Por qué?
   Diga lo que indica él numero en la oración.
9. Comparta las soluciones del problema y discuta los diferentes resultados obtenidos.

Extensión

Pida que los niños resuelvan un problema con una historia similar para que otros lo solucionen.

Solución

Una manera de solucionar este problema es suponer que el número de masmelos que Carlos consigue es X. Entonces José consigue 2X y Silvia consigue 3X + 2. En un día ellos consiguen X + 2X + (3x + 2) = 6x + 2.

En 5 días ellos consiguen 5(6x + 2) = 30x + 10. Pero esto es 70. Así que tenemos que resolver 30x + 10 = 70. Restando 10 de ambos lados da 30x = 60. Ahora dividimos ambos lados por 30 o simplemente suponemos la respuesta. De cualquier manera conseguiremos x = 2. Y esto es el número de masmelos que consiguió Carlos el lunes.

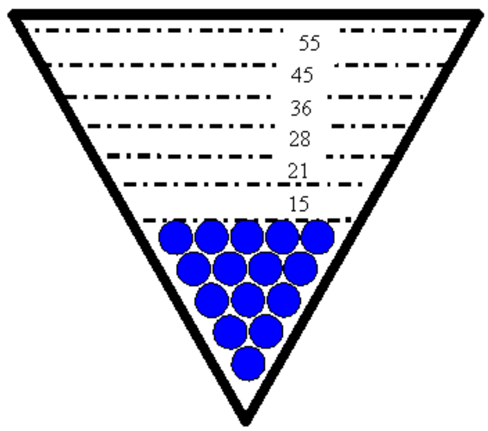
Alternativamente podríamos decir que 70 masmelos en cinco días es 70/5 = 14 en un día. Ahora sólo resolvemos 6x + 2 = 14. De allí 6x = 12 para que x = 2.

Este problema no tiene que ser solucionado sin embargo por el álgebra. Suponemos que Carlos consigue uno, José consigue dos, Silvia consigue tres más dos masmelos. Ahora 1 más 2 más 3 más dos masmelos son ocho masmelos por 5 días serán 40 masmelos (faltan). Supongamos ahora que Carlos consigue dos masmelos, José conseguirá 4 , Silvia conseguirá seis mas dos luego hay 2 mas 4 más 6 mas 2 masmelos que suman 14 masmelos por 5 días dan 70 masmelos (listo). Por tanto Carlos consiguió el lunes dos masmelos.

CUENTA DE PILDORAS

PROBLEMA 20 - NIVEL 4

Los farmaceutas utilizan a veces una bandeja triangular para contar píldoras rápidamente. Haga una bandeja de cartulina que se pueda utilizar para contar hasta 15 pelotas de ping – pong.



Imagine la bandeja más grande y las pelotas muy pequeñas. El 5° número en la cuenta es 15. El 6° número es 21. El 7° es 28. ¿Cuál es el 99° número?

¿De que se trata el problema?

Este problema se relaciona con los números triangulares. Sobre el rango de estos problemas se puede desarrollar la idea de los números triangulares que conducen a una fórmula algebraica para el n-esimo número triangular.

Este problema es acerca de modelos, cómo continuarlos y cómo encontrar el término general. Muchas ideas que se usan en este problema se pueden utilizar en otros modelos. Se encuentra un termino siguiente, usando una tabla, e incorporando las propiedades características de los números.

Logros

- Encuentra y justifica una fórmula con palabras que representa una situación práctica dada.

Recursos

- Pelotas de ping – pong

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Mirar más de una regla para un modelo dado.
- Expresar las reglas en palabras.

Secuencia de la enseñanza

1. Presente el problema a la clase. Las ideas sirven de inspiración para acercarse al problema y no perder de vista lo que se ha hecho.
2. Anime a los niños a usar una tabla y que vean cómo las entradas en la tabla están relacionadas para hacer un acercamiento geométrico.
3. Cuando los niños trabajen en el problema en parejas puede hacer las siguientes preguntas para extender su pensamiento:
   ¿Qué estrategias pudieron ayudarte a encontrar la respuesta?
   ¿Cómo puedes usar tu conocimiento sobre números aquí?
   ¿Puedes ver algún modelo que te podría ayudar?
   ¿Puede expresar esos modelos en palabras?
4. Comparta las respuestas de los estudiantes. Pídales que expliquen su razonamiento. Anímelos a que piensen sobre lo que han utilizado. ¿Qué acercamiento puedes entender mejor?.
5. Pídale a los estudiantes que escriban una solución.
6. Inicialmente use el problema de la extensión para los estudiantes más rápidos pero permita a los otros tiempo para trabajar en él. (Puede utilizar números más pequeños con los estudiantes más lentos). Pruebe 66 para empezar. Ellos

pueden hacerlo probablemente dibujando los números triangulares. Anímelos, sin embargo, a usar la regla de los números triangulares que han encontrado.)

7. Discuta esto con la clase.

Extensión

¿Cuántas píldoras hay a lo largo del lado de la pila triangular si hay 6216 píldoras en total?

Solución

Este problema se ha resuelto de una manera simple en los niveles anteriores.

Desafíe a los estudiantes a completar la tabla. Ellos tienen qué multiplicar siempre para ir de un término a un número triangular.

(Las entradas en la tercera columna deben ser, en orden, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4,...)

¿Cuál es el modelo para los números en la tercera columna? ¿Cómo se relacionan con los otros dos?.

¿Cómo pueden conseguir el tercer número triangular? ¿El 10°? ¿Puede dar una regla para los números triangulares para cualquier término dado? (Tome el término y multiplíquelo por la mitad del próximo término.)

Término	Número triangular	¿Término multiplicado por?
1	1	
2	3	
3	6	
4	10	

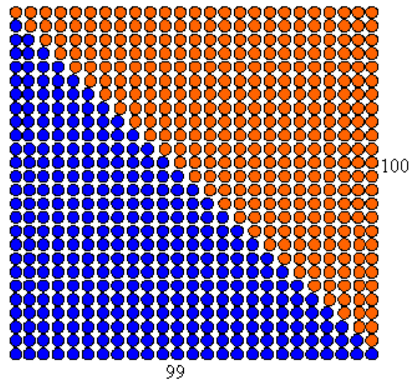
5	15	
6	21	
7	28	
8		

Ayúdeles a ver que el número en la tercera columna es el producto del término por la mitad del siguiente término. El 7° número triangular es 7 x (8/2) = 28. Si esto se aplica a la 99ª fila de la tabla tendremos que multiplicar 99 por la mitad de 100. Esto lleva a una solución de 99 x 50 = 4950.

Término	Número triangular	¿Término multiplicado por?
1	1	
2	3	
3	6	
4	10	
99	99 x (100/2)	100/2
100		

Esto es más divertido desde un punto de vista geométrico. Reúna dos porciones de los 99° números triangulares (2 x 99° número triangular). Coloree uno rojo y el otro azul (véase abajo). De los lados del rectángulo se obtiene: (99 por 100).

Para que 2 x (99° número triangular) = 99 x 100; significa que el 99° número triangular = (99 x 100)/2 = 4950.



Anime a los estudiantes para que expresen en palabras las relaciones involucradas. Por ejemplo, para decir, un número triangular es: ”el término x (el próximo término/2)”. Puede usted escribir las expresiones utilizando el álgebra.

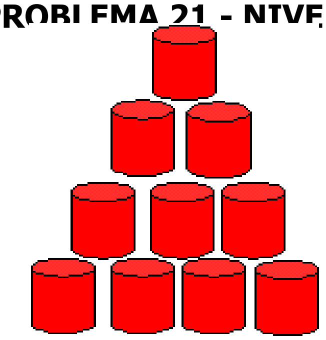
Extensión

Tenemos 6216 píldoras. Ahora éste es un número triangular y el término de ese número es la longitud del lado de las píldoras. 6216 = (el término x por el próximo termino)/2.

Esto significa que 12432 es el término x, por el término siguiente X + 1. ¿Puede encontrar dos factores de 12432 que se diferencien por 1 y que al multiplicarse los dos den 12432?. Experimentándolo debe encontrar que 111 x 112 = 12432. Así que 6216 es el 111° número triangular.

PUEDE APILAR

PROBLEMA 21 - NIVEL 5



Un supermercado tiene una exhibición de latas en forma de triángulo. Las cuatro filas superiores se muestran al lado

a. ¿Si la pila tiene 10 filas, cuántas latas estarán en la exhibición?

b. ¿Si la exhibición era de 21 filas cuantas latas habrá?

c. Encuentre una regla para encontrar el número de latas para cualquier número de filas.

¿De que se trata el problema?

Éste es un ejemplo de un problema que tiene muchos métodos de solución. Las dos primeras partes se pueden resolver con un método relativamente ingenuo. Esto significa que un rango de estudiantes puede encontrar la solución por lo menos para las dos primeras partes del problema.

Este problema es una manera excelente de introducir o reforzar las ecuaciones cuadráticas. Al mismo tiempo da la oportunidad de relacionar un problema de palabras y los números triangulares. Se puede ver que los números triangulares aparecen en gran cantidad de contextos. Por ejemplo, los números triangulares cuentan el número de apretones de manos que tiene lugar entre un número de personas y también cuentan el número de maneras de escoger a dos personas de una muchedumbre en un concierto.

Varios problemas de este tipo consiguen que los estudiantes produzcan un modelo general en forma algebraica de una situación real. Ésta es una habilidad que se necesita en una amplia gama de aplicaciones dentro y fuera de la matemática. Se convierte en un modelo bastante complicado que, en la escuela, en la universidad, puede implicar derivadas.

Hay varias condiciones aquí (número de latas en una pila de n filas), es probable que los estudiantes encuentren la suma en una progresión aritmética. Esta suma es una progresión aritmética con razón 1.

Logros

- Genera modelos de una situación estructurada.
- Encuentra una regla para el término general, y lo expresa en palabras y símbolos.

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Encontrar una regla para sumar números consecutivos.
- Identificar un modelo de números triangulares.

Secuencia de la enseñanza

1. Dibuje la pila de latas en el tablero. ¿Cuántas latas se han utilizado? ¿Cuántas latas estarán en la próxima fila?
2. Plantee el problema a la clase. ¿Qué estrategia podríamos utilizar para resolver este problema? ¿Recuerda algún problema como este?
3. Cuando los estudiantes trabajen en el problema hágales preguntas que se centren en los métodos utilizados para sumar números consecutivos.
   ¿Cómo estas agregando números?
   ¿Piensas que existe otra manera más rápida en que pudieras agregarlos?

4. Consiga que algunos estudiantes justifiquen su razonamiento donde expliquen su respuesta.
5. Comparta y discuta las respuestas.

Extensión

a. ¿Cuántas filas tiene una pila de 136 latas?

b. ¿Cuántas filas tiene una pila de 432 latas?

Solución

Hay varias maneras de resolver las dos primeras partes de este problema. Se han dado dos aquí.

Método 1: Viendo un Modelo

a. El modelo es 1 + 2 + 3 + 4 +... Cada fila nueva tiene una lata más. Así pues en un apilado de 10 filas, habrá C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 latas. Es fácil de sumarlos para un total de 55.

Sin embargo, es útil intentar encontrar una manera rápida de agregar los números en una lista así. Esto puede hacerse con ciertas parejas de números donde su suma es 11.

1 + 10 = 11

2 + 9 = 11

3 + 8 = 11

4 + 7 = 11

5 + 6 = 11

Ahora cinco veces 11 es igual a 55, así que se consigue la respuesta que se consiguió por la suma directa.

b. Si la exhibición es de 20 filas, necesitamos encontrar C = 1 + 2 + 3 + 4 +... + 18 + 19 + 20. De nuevo esto puede encontrarse de dos maneras: por la suma directa o por un método de apareamiento. El problema con el apareamiento es que este tiene un número impar de términos. Así que conseguimos

1 + 21 = 22	6 + 16 = 22
2 + 20 = 22	7 + 15 = 22
3 + 19 = 22	8 + 14 = 22
4 + 18 = 22	9 + 13 = 22
5 + 17 = 22	10 + 12 = 22
	¿11?

¿Qué podemos hacer con el 11?. Bien ignórelo por un momento. Hay 10 porciones de 22, y eso da 220. Ahora agregue el 11 para conseguir 231.

c. Generalizando este método a cualquier número de filas conseguimos C = 1 + 2 + 3 + 4 +... +(n -1) + n. Ahora si n es par podemos producir la suma por el apareamiento usual.

$1 + n = n + 1$

$2 + (n - 1) = n + 1$

$3 + (n - 2) = n + 1$

… … …

$r + (n - (r - 1)) = n + 1$

… … …

$\frac{n}{2} + (n - (\frac{n}{2} - 1)) = n + 1.$

Cada pareja suma n + 1. Hay $\frac{n}{2}$ parejas. Por lo tanto C = $\frac{n}{2}$ (n + 1).

¿Pero qué si n es impar? Claro conseguimos la misma forma de la respuesta. C = $\frac{n}{2}$ (n + 1) aun cuando n es impar. ¿Por qué? (Un poco de álgebra basada en el modelo de n = 21 debe convencerlo).

Método 2: Un Acercamiento Geométrico

Primero mire que la forma del apilado es un triángulo. Si lo empujamos un poco se vuelve un triángulo rectángulo con el mismo número de latas. Reuniendo dos de éstos, se vuelve un rectángulo. Y el área del rectángulo es más fácil de calcular que el área del triángulo. Empecemos con cuatro filas.

```
   X      X       XXXX         XXXXX
  XX  --> XX       XXX         XXXXX
 XXX      XXX   +   XX    =    XXXXX
XXXX      XXXX       X         XXXXX
```

El rectángulo tiene 20 latas pero éste es dos veces las latas del apilado original. Por lo tanto un pilado de cuatro filas tiene 10 latas.

a. Para usar este método en general se necesita saber el número de filas y el número de latas en la fila más grande. Mirando este método para 10 filas sabemos que la fila más grande tiene 10 latas. Usted debe encontrar que el rectángulo correspondiente tiene una base 11 = 10 + 1 y altura 10 (el número de filas). El rectángulo tiene 11 x 10 = 110 latas. El área del triángulo original es la mitad del rectángulo así que es 55 (como lo encontramos en el método 1.)

b. Para 21 filas tenemos un rectángulo de base 22 y altura 21 es decir que tendrá 462 latas. Así que la pila original tiene 231 latas (vea método 1).

c. En general para una pila de n filas. Cuando los dos triángulos se reúnen, la base del rectángulo que se forma es n + 1 y la altura es n. Por lo tanto el área del rectángulo es n(n + 1). Esto da el área del apilado triangular $\frac{n(n+1)}{2}$ (vea método 1).

Extensión

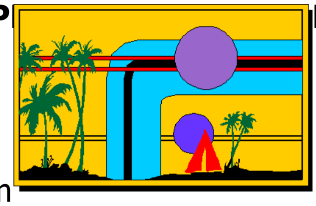
a. Ahora hay que averiguar cuántas filas ocuparían 136 latas, se puede suponer y verificar con la ayuda de una tabla. Para comenzar sabemos que la respuesta está entre 10 y 21. Así que podríamos suponer 15. Si hubiera 15 filas entonces nosotros tendríamos $\frac{15x16}{2}$ = 120 latas. Esto no esta bien, así que supongamos 18 filas. Eventualmente podemos conseguir la respuesta de esta manera. Sin embargo, también podemos usar la fórmula para el número de latas en un apilado con n filas.

Así que tenemos que resolver 136 = $\frac{n(n+1)}{2}$. Esto da $n^2 + n - 272 = 0$. Esto lo descomponemos en factores para dar (n - 16)(n + 17) = 0. Esto tiene dos soluciones pero n no puede ser -17 luego n = 16.

b. Usando el método cuadrático para esta parte da $n^2 + n - 864 = 0$. Elegimos este deliberadamente para que el cuadrático no se descomponga en factores. ¿Puede resolverse utilizando la fórmula para n = 28.898 o para n = -29.898?. Bien el apilado más cercano que podríamos tener es un apilado con 29 filas. Sin embargo, no hay el número de latas para semejar tal apilado. Hay unas latas que están en la cima. ¿Cuántas faltan?

EXHIBIR LAS POSTALES

P EL 5



Sara, Janeth y su hermano Pablo coleccionan tarjetas postales. Cada uno de ellos compra un álbum grande para pegarlas. Los álbumes no son necesariamente todos del mismo tamaño. La mayor Sara, que siempre las organiza, les sugirió que todos deberían poner el mismo número de tarjetas postales en cada página para hacer ver los álbumes mas ordenados y así permitir poner más de una tarjeta postal en cada página. Cada uno de los tres niños puso sus tarjetas postales en un montón en el piso.

Sara dijo, "Si yo pongo mis tarjetas postales, cuatro en cada página, tendré un excedente de tres tarjetas."

Janeth dijo, "Si yo tuviera justo una tarjeta postal mas podría agrupar cinco en una página."

Pablo dijo "yo puedo acomodarlas perfectamente en cada página y supongo que tengo la mayoría, y seré el primero en pegar 100 de todos modos."

Ellos decidieron contar sus tarjetas postales y ver quién tenía más. Para desilusión de Pablo descubrieron que todos tenían el mismo número.

¿Cuántas tarjetas postales tiene cada uno de ellos? ¿Y cuántas páginas tienen sus álbumes?

¿De que se trata el problema?

Es importante la interpretación de las palabras en este problema como en muchos problemas de palabras. Hay mucha información que tiene que ser extraída del problema, además de ecuaciones que involucran múltiplos de 4 y 5. Por ejemplo, el hecho que Pablo no pueda tener primero un número de tarjetas es fundamental en la solución.

El modelo en esta pregunta se genera de la regla dada en palabras y los estudiantes no necesitan traducir el problema al álgebra para resolverlo. En la opción 1 de la solución mostramos esto y completamos el problema en gran parte con una tabla.

Si usted toma un acercamiento algebraico puede ser útil usar letras que le ayuden a recordar lo que él representa. Así que sugerimos pensar en s, j, p en lugar de a, b, c, porque s seria Sara, j Janeth y p Pablo. Esto se puede considerar como un problema algebraico.

Si usted va abajo la ruta algebraica puede acelerar las cosas para resolverlo usando una ecuación de Diofanto. Éstas son ecuaciones que sólo tienen soluciones de números enteros. Tales ecuaciones contienen a menudo información adicional que puede utilizar para resolverlas. Por ejemplo, en este problema tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Sin embargo, podemos resolver las ecuaciones porque las soluciones enteras. Una ecuación importante de Diofanto que fue descubierta en 1975 y que estaba sin resolver por mas de 300 años, es el tema del ultimo Teorema de Fermat. La pregunta es si es posible resolver $x^n + y^n = z^n$ para los números enteros x, y, z dónde n es un número entero mayor que 2. El problema se propuso originalmente por Fermat. Tomó un mucho tiempo para que el matemático Andrew Wiles solucionara el problema.

Logros

- Genera un patrón para una regla.

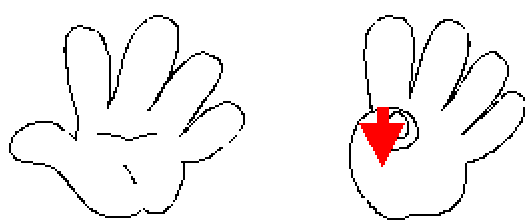
Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Aplicar el álgebra para encontrar una solución al problema.

Secuencia de la enseñanza

1. Interese a los estudiantes en el problema hablándoles sobre modelos como en los múltiplos de 9. Escriba la lista de los múltiplos de 9 (9, 18, 27, 36, 45, 54, 63,...) en el tablero y pregunte:
   ¿Sabes cuales son estos números?
   ¿Cuál es el próximo número?
   ¿Qué modelos puedes ver?
   ¿Alguien sabe una manera muy fácil de recordar la tabla del 9?
2. Si nadie le sugiere, muestre la técnica siguiente.
   Para 6 x 9: Doble hacia abajo el sexto dedo (1 dedo en la mano derecha). Esto divide los dedos en 5 dedos y 4 dedos que son, claro, la respuesta a 6 x 9.



3. Proponga el problema para que los estudiantes trabajen en él.
4. Formule preguntas que ayuden a los estudiantes a conseguir resultados, como:
   ¿Cómo podemos utilizar esto?
   ¿Qué información tenemos?
   ¿Qué conocimiento matemático podríamos aplicar a esta solución?
   ¿El álgebra nos ayudaría?
   ¿Cómo comparamos los casos?

5. Anime a que los estudiantes justifiquen su razonamiento claramente escribiendo una conclusión para explicar su respuesta.
6. Plantee sus respuestas.
7. Si los estudiantes no han podido resolver el problema algebraicamente ayúdelos expresando una de las tarjetas postales, por ejemplo, Sara tiene 4s + 3 tarjetas.

Solución

Esto se puede resolver utilizando los múltiplos o utilizando el álgebra y una tabla.

Opción 1: Utilice una tabla.

Sara tiene tres más que un múltiplo de 4; Janeth tiene uno menos que un múltiplo de 5; y Paúl tiene un múltiplo de un número natural. Si escribimos en una tabla podemos comparar los números de tarjetas de Sara y Janeth. Cuando encontremos que dos números son iguales podemos ver si Pablo puede tener esa cantidad. Puesto que Pablo (y por consiguiente todos los demás) tienen menos de 100 tarjetas sólo tenemos que subir hasta 100 en la tabla. (En la tabla M4 son múltiplos de 4 y M5, múltiplos de 5.)

M4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
Sara	7	11	15	**19**	23	27	31	35	**39**	43	47	51
M5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Janeth	4	9	14	**19**	24	29	34	**39**	44	49	54	**59**

M4	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96

Sara	55	**59**	63	67	71	75	**79**	83	87	91	95	**99**
M5	65	70	75	80	85	90	95	100				
Janeth	64	69	74	**79**	84	89	94	**99**				

(A propósito, usted podría usar una hoja de cálculo para construir la tabla.)

Se han resaltado los números que podrían representar el número de tarjetas que los niños tienen. Hay cinco posibilidades.

Pero hay una condición que no hemos usado todavía. Pablo tiene un número igual de tarjetas postales en cada página. Ahora asumimos que su libro tiene más de una página. Por lo tanto el número de tarjetas postales debe ser un múltiplo del número de páginas. Puesto que él tiene más de una tarjeta postal en cada página, el número de tarjetas postales que cada uno de ellos tiene no es un numero primo. Por lo tanto el no puede tener 19, 59, o 79 tarjetas. Esto deja dos posibilidades 39 y 99.

a. Suponga que cada uno tiene 39 tarjetas. Entonces 39 = 4 x 9 + 3, Sara tiene 9 páginas en su libro. Como 39 = 5 x 8 - 1, entonces Janeth tiene 8 páginas en su libro. Ahora 39 = 3 x 13, así que Pablo tiene 3 páginas con 13 tarjetas en cada página o 13 páginas con 3 tarjetas en cada página. A menos que el libro de Pablo sea bastante grande, es imposible que él tuviera 13 tarjetas en una página. Así que él tiene 13 páginas probablemente en su libro.

b. Suponga que cada uno de ellos tiene 99 tarjetas. Entonces 99 = 4 x 24 + 3, Sara tiene 24 páginas en su libro. Como 99 = 5 x 20 - 1, entonces Janeth tiene 20 páginas en su libro. Ahora 99 = 3 x 33 o 9 x 11, así que Pablo tiene 3 páginas con 33 tarjetas en cada página o 33 páginas con 3 tarjetas en cada página o 9 páginas con 11 tarjetas en cada página o 11 páginas con 9 tarjetas en cada página. A menos que el libro de Pablo sea bastante grande, es imposible que él tuviera 9 tarjetas en una página o 11 tarjetas en cada pagina o 33 tarjetas en cada pagina. Así que él tiene 33 páginas probablemente en su libro.

Opción 2: Use el álgebra

Aquí permitimos que s, j y p representen el número de páginas en los libros de Sara, Janeth y Pablo, respectivamente. Sabemos que Sara tiene $4s + 3$ tarjetas, Janeth tiene $5j - 1$ y Pablo tiene cp dónde c es algún número entero más grande que 1.

Como Sara y Janeth tienen el mismo número de tarjetas, $4s + 3 = 5j - 1$.

luego $5j = 4(s + 1)$, puesto que 4 es factor en el lado derecho de la ecuación debería ser factor en el lado izquierdo. Esto obliga a que j sea un múltiplo de 4. Deje $j = 4k$, así $5j - 1 = 20k - 1$. Como los niños tienen menos de 100 tarjetas, $20k - 1 < 100$, luego que $k \leq 5$ qué significa que k = 1, 2, 3, 4 o 5.

Podemos resumir las posibilidades en la tabla de abajo.

k	1	2	3	4	5
j	4	8	12	16	20
5j - 1	19	39	59	79	99
4s + 3	19	39	59	79	99
s	4	9	14	19	24

Como en la opción 1 sabemos que se debe descontar 19, 59, y 79. La respuesta sigue ahora como en la opción 1.

LOS NUMEROS CONSECUTIVOS DE JAIRO

PROBLEMA 23 - NIVEL 5

Jairo explora las respuestas que se consiguen cuando suma números consecutivos. Los registró sistemáticamente; por ejemplo:

1 + 2 = 3

2 + 3 = 5

3 + 4 = 7

4 + 5 = 9 etc.

Les llamó a estas sumas, suma de dos números consecutivos.

a. Usando este método escriba sumas de tres números consecutivos.

b. Decide descubrir si se puede escribir el 36 como la suma de dos, tres, cuatro o cinco números consecutivos. Utilizó la siguiente tabla para registrar su información.

Suma de 2 números consecutivos	Suma de 3 números consecutivos	Suma de 4 números consecutivos	Suma de 5 números consecutivos
3	6	10	15
5	9	14	20
7	12	28	25
9	15	32	30

c. Usando la información de la tabla de Jairo, escriba algunas generalizaciones que él pudo utilizar para hacer una prueba rápida para ver si 36 es la suma de dos, tres, cuatro o cinco números consecutivos.

d. Escoja cualquier número menor que 50. Compruebe que sea la suma de dos, tres, cuatro o cinco números consecutivos.

e. Extienda la tabla de Jairo para incluir sumas de seis y siete números consecutivos.

f. Ahora explore todos los números menores que 50 que no se pueden escribir como la suma de números consecutivos.

¿De que se trata el problema?

Una de las partes importantes de este problema es ver los modelos. Esto toma dos pasos. El primero es poder describir el modelo en palabras y el segundo es encontrar una expresión algebraica para el.

Pero en matemáticas, ver los modelos es sólo parte del juego. Las matemáticas se diferencian de otras disciplinas en que se tienen que justificar los modelos que se encuentran. Encontrar el modelo en una forma algebraica es útil para la justificación.

Ahora el nivel más bajo de esta justificación está en mostrar que todo los datos encajan en el modelo. Éste es sólo el primer paso. Claramente usted verificará siempre que cada número en su juego satisfaga el modelo. Pero entonces tiene que seguir justificando que cada miembro del juego lo satisface (incluso los que usted no ha enumerado todavía). Esto es más difícil pero es algo que usted debe animar para que sus estudiantes lo intenten, pues es una parte esencial de la matemática.

Los modelos a los que estamos refiriéndonos aquí se llaman conjeturas. A lo qué nosotros llamamos justificación también se le llama prueba.

Logros

- Genera los patrones de una situación estructurada para encontrar una regla general para un término y lo expresa en palabras y símbolos.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Hallar un patrón para una lista organizada.

- Describir una regla para el sistema en general.

Secuencia de la enseñanza

1. Dígale a los estudiantes que el problema se solucionara por partes.
2. Escriba 1+ 2 = 3 en el tablero, ¿Cual piensas que podría ser el próximo término en el problema?
3. Escriba el dos sumas mas de números consecutivos en el tablero. ¿Cómo podríamos describir estas ecuaciones? (las sumas de dos números consecutivos)

   ¿Quién puede darme una suma de tres números consecutivos?
4. Dé el problema a los estudiantes para que trabajen en parejas.
5. Haga que el trabajo de los estudiantes se centre en preguntas como:

   ¿Qué puedes decirme sobre los números de la tabla?

   ¿Puedes ver los modelos?

   ¿Estos modelos los utilizaran siempre?

   ¿Piensas en una manera de describir el modelo usando condiciones generales?
6. Soluciones de las partes.
7. ¿Qué puedes decir sobre los números que no son la suma de números consecutivos?

Extensión

¿Existen números que pueden escribirse como la suma de dos números consecutivos y como la suma de tres números consecutivos?

¿Puedes justificar los modelos que encontraste anteriormente?

Solución

a. 2 + 3 + 4 = 9; 3 + 4 + 5 = 12;

b. Algunas sumas de esta tabla pueden ser:

Suma de 2 números consecutivos	**Suma de 3 números consecutivos**	**Suma de 4 números consecutivos**	**Suma de 5 números consecutivos**
3	6	10	15
5	9	14	20
7	12	18	25
9	15	22	30
11	18	26	35
13	21	30	40

c. Algunas observaciones interesantes son:

- Las sumas de dos números consecutivos son todas impares.
- Las sumas de tres números consecutivos son todas divisibles por 3.
- Las sumas de cuatro números consecutivos comienzan en 10 y aumentan cada vez en 4.
- Las sumas de cinco números consecutivos comienzan en 15 y aumentan en 5 cada vez.

Suponga que la tabla se vuelve a hacer

n	**Suma de 2 números consecutivos**	**Suma de 3 números consecutivos**	**Suma de 4 números consecutivos**	**Suma de 5 números consecutivos**
1	3	6	10	15
2	5	9	14	20
3	7	12	18	25

4	9	15	22	30
5	11	18	26	35
6	13	21	30	40
7	15	24	34	45

Algunos modelos:

I las dos sumas consecutivas da $2n + 1$;

II las tres sumas consecutivas da $3n + 3 = 3(n + 1)$;

III las cuatro sumas consecutivas da $4n + 6 = 2(2n + 3)$;

IV las cinco sumas consecutivas da $5n + 10 = 5(n + 2)$.

36 no es la suma de dos números consecutivos puesto que es par.

36 es la suma de tres números consecutivos, es divisible por 3, (aquí $n = 11$.)

Si 36 fuese la suma de cuatro números consecutivos, entonces a partir de III nosotros vemos $2(2n + 3) = 36$. Por lo tanto $2n + 3 = 18$ o $2n = 15$. Puesto que no hay un numero entero que satisfaga esta condición, 36 no puede ser la suma de cuatro números consecutivos.

36 no es la suma de cinco números consecutivos, ya que todos estos son múltiplos de 5.

d.

n	**Suma de 6 números consecutivos**	**Suma de 7 números consecutivos**
1	21	28
2	27	35
3	33	42
4	39	49

5		

Los modelos aquí son $6n + 15$ y $7n + 21$, respectivamente.

f. Los números que no se pueden escribir son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... es decir todos los números de la forma 2^n.

Extensión

Hay números que son las sumas de dos números consecutivos y la sumas de tres números consecutivos. Usted sólo tiene que encontrar un número impar mayor que 2 que sea divisible por 3. Por ejemplo 9 y 15 son sumas de dos números consecutivos y tres números consecutivos.

Justificaremos el hecho de que los números de la forma $4n + 6$ son la suma de 4 números consecutivos. Todos los otros modelos pueden justificarse de una manera similar.

Suponga que $N = 4n + 6$ y $n > 0$. Entonces esto puede volver a escribirse como $N = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$. Luego para todo $N > 6$ de la forma $4n + 6$ se puede escribir como la suma de cuatro números consecutivos.

EL ENTRENAMIENTO OLIMPICO

IVEL 5

María y Rubén están entrenando para los juegos olímpicos. Empezaron a nadar desde un extremos diferente de la piscina y cuando alcanzan el extremo opuesto dan la vuelta. Rubén nadaba a la derecha cuando se encontraron, en ese momento la proporción de su distancia del extremo izquierdo al extremo derecho era 3:2. ¿Cuál era el cociente de la velocidad de Rubén con respecto a la velocidad de María?

¿De que se trata el problema?

A pesar del hecho de que este problema está en la rama del Álgebra, la primera cosa para hacer con él es hacer un diagrama. De ese diagrama los estudiantes necesitan ordenar algunas ecuaciones para después resolver.

Los estudiantes deben tomar el hábito de dibujar los diagramas para ayudarse así a resolver los problemas. Es una habilidad importante para conseguir ecuaciones de nuevas situaciones y cuando lo requieran situaciones más complicadas mientras que los estudiantes incrementan su matemática.

Logros

- Soluciona ecuaciones lineales.

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar cocientes.
- Formar y solucionar ecuaciones lineales.
- Utilizar diagramas como estrategia de solución a un problema.

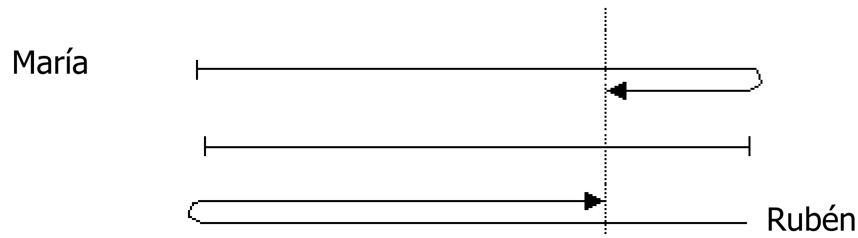
Secuencia de la enseñanza

1. Interese a los estudiantes en el problema con una historia breve de nadadores conocidos. Puede nombrar a 4 nadadores que ellos quizás conozcan.
2. Proponga el problema a la clase.
3. Después de dar a los estudiantes la oportunidad de pensar en el problema pídales ideas de cómo podrían resolverse el problema. Pídales que expliquen por qué hicieron esa sugerencia, por ejemplo, puede ser que reconozcan el problema como similar a uno de los que se han resuelto previamente.
4. Deje a los estudiantes trabajar en el problema en parejas. Compruebe que registran su trabajo de modo que puedan socializar su solución a los demás.
5. Realice preguntas sobre el trabajo, que enfoquen su comprensión en cocientes y de la estrategia que utilizaron.
6. ¿Por qué un cociente como 3:2 aparece en términos de su posición en la piscina?.
7. Dependiendo de su experiencia los estudiantes pueden necesitar un poco de apoyo con la formación de la ecuación lineal.
   ¿Cuánto ha nadado María?
   ¿Cómo puedes registrar esto?
   ¿Cuánto ha nadado Rubén?
   ¿Cómo puedes registrar esto?
8. Soluciones de las partes.

Extensión

Rubén nadaba a la derecha cuando se encontraron, en ese momento la proporción de su distancia del extremo izquierdo al extremo derecho era 6:5. ¿Cuál era el cociente de la velocidad de Rubén con respecto a la velocidad de María?

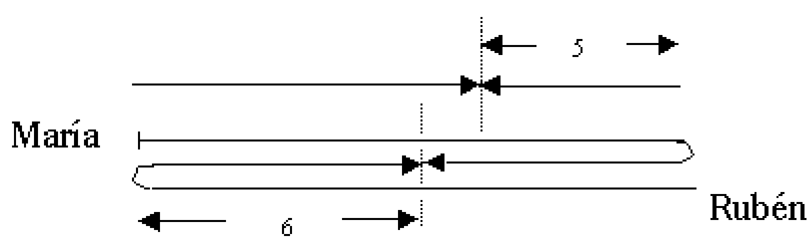
Solución



Tome la longitud de la piscina como L. Cuando ellos se encuentran Rubén ha viajado L + $\frac{3}{5}$L y Maria ha viajado L + $\frac{2}{5}$L. El cociente de sus velocidades es

$$\frac{l+\frac{3}{5}l}{l+\frac{2}{5}l} = \frac{\frac{8}{5}l}{\frac{7}{5}l} = \frac{8}{7}$$

Extensión:



Cuando ellos se encuentran primero Rubén ha nadado 5 unidades y los dos han nadado la longitud de la piscina, L unidades. Cuando Maria y Rubén dan la próxima vuelta, juntos han nadado 3L unidades. Pero para cada longitud que naden juntos, Rubén nada 5 unidades. Así a su segunda vuelta, Rubén ha nadado 3*5 = 15 unidades.

Pero cuando ellos toman el segundo tiempo, Rubén también ha nadado L + 6 unidades. Así 15 = L + 6, para que L = 9.

Ahora sabemos que cuando Rubén y Maria se encuentran primero, Rubén ha nadado 5 unidades y Maria L - 5 que son 9 - 5 = 4. Por lo tanto el cociente de la velocidad de Rubén es a la velocidad de Maria como 5:4.

FILA DE NUMEROS

PROBLEMA 25 - NIVEL 5

Esta serie de números se construye usando el siguiente modelo.

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21
22	...				

1. ¿Encuentra los siguientes números? ¿Es decir, en qué fila, y en que columna?

a. 37 b. 61 c. 86.

2. Use un método para localizar el número 1,387.

¿De que se trata el problema?

Este problema tiene varias maneras de abordarlo y cada uno con un grado de dificultad diferente. Éstos van desde escribir todos los números hasta conseguir el número que se busca, a través del uso de los números triangulares.

Trabajando en este problema es posible encontrar varios modelos diferentes. Es útil aprovechar cualquier oportunidad que se presente para expresar estos modelos algebraicamente. Los modelos algebraicos se presentaran frecuentemente en los niveles de aquí en adelante. Por lo tanto este problema proporciona una buena práctica.

Logros

- Genera modelos en una solución estructurada.
- Encuentra una regla para él termino general y la expresa en palabras y números.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Generar modelos en una situación estructurada.
- Encontrar una regla para un término general.

Secuencia de la enseñanza

1. Empiece escribiendo los tres primeros términos del modelo en el tablero. ¿Cuál es el próximo término en este modelo? ¿Y el próximo? ¿Qué método puedes utilizar para encontrar 61?
2. Plantee el problema para que los estudiantes trabajen en él.
3. Enfoque las preguntas que pueden ayudar a los estudiantes a conseguir resultados
   ¿Cómo puedes empezar?
   ¿Qué información tienes?
   ¿Qué conocimiento matemático podrías aplicar a este problema?
4. Cuando los estudiantes trabajen, hágales preguntas que se enfoquen en el método que ellos están usando en el problema.
   ¿Qué método estas utilizando?
   ¿Por qué escogiste este método?
   ¿Es eficaz?
   ¿Has visto antes un modelo de números como este?

5. Pida a los estudiantes que justifiquen su razonamiento escribiendo una conclusión para explicar su respuesta.
6. Comparta y discuta las respuestas.

Extensión

a. Escriba un método o regla para encontrar la localización de cualquier numero dado.
b. Invente sus propios números y encuentre modelos generales.

Solución

Hay varios maneras de resolver este problema

Método 1: Construya una tabla al número requerido.

Se hacen todas las posibles combinaciones que generarán respuestas 37, 61 y 86 pero claramente sería sumamente tedioso para un número como 1,387. Claro, será imposible encontrar una regla general para localizar cualquier número usando este método.

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
16	17	18	19	20	21			
22	23	24	25	26	27	28		
29	30	31	12	33	34	35	36	
37	38	39	40	41	42	43	44	45

46	47	48	49	50	51	52	53	54	55		
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	…			

De este método, las soluciones son

37: fila 9, columna 1 (9, 1)

61: (11, 6)

86: (13, 8)

Método 2: Busque un patrón.

El primer número de cada fila aumenta constantemente.

Número de la fila	**Primer número en la fila**	**Aumento de la fila anterior**
1	1	0
2	2	1
3	4	2
4	7	3
5	11	4
6	16	5
7	22	6

Este modelo indicará la fila para cualquier número dado. Pero esto sigue siendo tedioso para encontrar 1,387. Y todavía no le dirá donde esta cualquier número dado.

Método 3: Adopte la estrategia, ¿ha visto un problema similar así antes?.

Note que en el final de cada fila los números son 1, 3, 6, 10, 15, 21. Éstos son los Números Triangulares. La fórmula para el n-esimo término es $\frac{n(n+1)}{2}$

Así para localizar 91, por ejemplo:

n = 10,	$\frac{10X11}{2}$ =55	Demasiado pequeño
n = 11,	$\frac{11X12}{2}$ =66	Demasiado pequeño
n = 12,	$\frac{12X13}{2}$ =78	Demasiado pequeño, pero se consigue acercarse.
n = 13,	$\frac{13X14}{2}$ =91	

Así que 91 se localiza en la fila 13. La fila 13 tiene 13 números por tanto 13 columnas

	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7	Col 8	Col 9	Col 10	Col 11	Col 12	Col 13
Fila 13	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91

y 86 se localizará en esa fila, entonces 86 se localiza en (13, 8).

Localizar 1387, intente:

n = 20 $\frac{20X21}{2}$ =210 Demasiado pequeño

n = 40 $\frac{40X41}{2}$ =820 Demasiado pequeño

$n = 70 \quad \frac{70X71}{2} = 2485$ Demasiado grande

$n = 60 \quad \frac{60X61}{2} = 1830$ Demasiado grande

$n = 58 \quad \frac{58X59}{2} = 1711$ Demasiado grande

$n = 53 \quad \frac{53X54}{2} = 1431$ Demasiado grande

$n = 52 \quad \frac{52X53}{2} = 1378$

así que, 1387 están en la fila 53 en (53, 9).

Método 4: Resolviendo una ecuación.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1387$$

$$\Rightarrow \quad n^2 + n - 2774 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{-1+\sqrt{11097}}{2}$$

$$= 52.17$$

qué significa 1387 está en la fila 53 y se puede localizar en (53, 9).

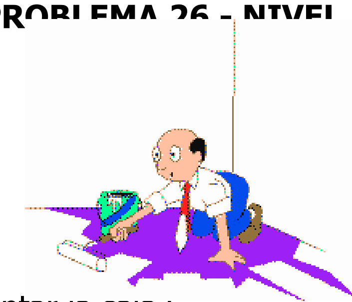
Extensión

a. El método 3 da un acercamiento general que usa los números triangulares. ¿Es posible encontrar una fórmula que dará la posición del número n? Permítanos saber si usted o uno de sus estudiantes encuentra tal regla.

b. Cuéntenos si usted encuentra algo interesante.

EL TRIO

PROBLEMA 26 - NIVEL 5



Ricardito, Sara y Bruno son hermanos. Ricardito, puede pintar la sala de televisión en 3 horas.
Su hermana, Sara puede hacerlo en 4 horas. A su hermano Bruno le tomará 6 horas.
¿Si trabajan todos juntos, cuánto tiempo les tomará pintar la sala?

¿De que se trata el problema?

Aquí tenemos un problema que utiliza álgebra. La dificultad esta en formar las ecuaciones. Es cuestión de tener un pensamiento claro para decidir qué variables se necesitan y cómo usarlas. Ésta es la clave de este problema. ¡Piense antes de utilizar el álgebra!.

Al comienzo hay que encontrar relaciones entre las variables. Por lo tanto este problema es de un tipo diferente a las ecuaciones de Diofanto que nosotros hemos encontrado en otra parte. Aquí no se puede utilizar el hecho de que las variables son números enteros.

Observe que hemos usado variables para este problema y hacemos que **r** sea lo que Ricardito pinta, **s** lo que Sara pinta y **b** lo que pinta Bruno.

Logros

- Soluciona ecuaciones lineales.
- Utiliza ecuaciones para representar una situación practica.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Generar los patrones de una situación estructurada.
- Encontrar una regla para un termino general.

Secuencia de la enseñanza

1. Usted puede introducir la clase preguntándoles. ¿Si toma a tres estudiantes 5 horas para excavar un agujero, cuánto tiempo le toma a 4 estudiantes para vaciarlo?
2. Plantee el problema a la clase.
3. Mientras los estudiantes trabajan (en parejas o grupos pequeños) observe que estén expresando las afirmaciones algebraicamente.
   ¿Qué variables están en este problema?
   ¿Cómo podrías expresar esto?
4. Si algunos de los estudiantes tienen dificultad haga que otros compartan la manera de como comenzaron el problema.
5. Comparta las soluciones que necesiten los estudiantes para explicar su razonamiento a los otros.
6. Mire y discuta las diferentes maneras en que los estudiantes han expresado las ecuaciones y sus métodos de solución.

Extensión

Suponga que Ricardito puede hacer otro trabajo en 3 horas y Sara puede hacer el mismo trabajo en 4 horas. Trabajando juntos, pueden hacer toda la tarea sobre una hora porque Bruno ha tenido cierta ayuda en su técnica. ¿Cuánto tiempo le tomaría a Bruno hacer su propio trabajo?

Solución

Suponga que Ricardito pinta una fracción r, Sara pinta una fracción s y Bruno pinta una fracción b de la sala de Televisión. Entonces

$r + s + b = 1$.

Pero ésta es una ecuación con tres incógnitas. ¿Qué mas sabemos para reducir él numero de variables?. Bien sabemos las velocidades relativas a que trabajan. Así quizá podemos encontrar una relación entre r y s.

Miremos a Ricardito y Bruno primero porque los números ahí están más simples. Cada 3 horas que Ricardito pinta, Bruno pinta 6 horas. Así mientras Ricardito pinta todo la sala de televisión, Bruno pinta sólo la mitad. Sí Ricardito pinta un cuarto de la sala Bruno pinta un medio de un cuarto. Así que la fracción de Bruno es siempre un medio de la de Ricardito. Esto significa que $\frac{r}{2} = b$.

Si comparamos a Ricardito y Sara podemos ver que, no importa el trabajo que ellos hagan, si Ricardito pinta toda la sala, Sara pintará $\frac{3}{4}$ de la sala. (Esto es porque en 3 horas, Ricardito pintará la sala entera). Si Ricardito pinta toda la sala es decir **r**, entonces Sara pinta $\frac{3}{4}r$ de la sala. Así $s = \frac{3}{4}r$.

Así $r + \frac{3}{4}r + \frac{r}{2} = 1$

$\frac{9}{4}r = 1$

$r = 4/9$.

¿Pero cómo ayuda esto? Bien, a Ricardito le toma 3 horas pintar el cuarto solo. Esto significa que él toma 4/9 de 3 horas cuando él trabaja con sus hermanos. Así que todos juntos trabajan 4/3 de una hora es decir 1 hora y 20 minutos.

Extensión

En 1 hora Ricardito hace 1/3 del trabajo y Sara hace 1/4 del trabajo. Así que Bruno hace el resto. Su fracción es por consiguiente 1 - 1/3 - 1/4 = 5/12 del trabajo. Así si Bruno hace 5/12 del trabajo en una hora puede hacer el trabajo entero en 12/5 horas. Es decir, él puede hacerlo en 2 horas y 24 minutos.

NUMEROS CUADRADOS Y TRIANGULARES

PROBLEMA 27 - NIVEL 5 y 6

Juana empezó a sumar números impares. Se sorprendió cundo noto que se formaba un modelo

¿Cuál fue el modelo?

¿Puedes mostrar como funciona el modelo de Juana?

¿De que se trata el problema?

En estos problemas desarrollamos la idea de los números triangulares que llevan a una fórmula algebraica para el número triangular enésimo.

Nos preocuparemos aquí por los modelos, cómo continuarlos y cómo encontrar el término general de un modelo. Aquí podremos conseguir el término enésimo (el término general) de los modelos como una expresión de n. Muchas de las ideas que se usan en este problema se pueden usar con otros modelos. Se podrá encontrar el próximo término (mirando la regla de la repetición), usando una tabla, e incorporando las propiedades del número, son todas valiosas habilidades que se pueden usar en muchas situaciones.

Logros

- Utiliza ecuaciones para representar situaciones prácticas.
- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

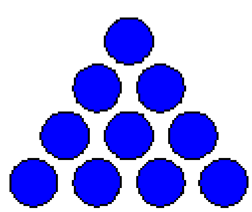
- Dar una expresión general para él termino enésimo de un modelo.
- Describir los vínculos entre diversos modelos.

Secuencia de la enseñanza

1. Presente el problema a la clase. Realice una lluvia de ideas para acercarse al problema.
2. Mientras los niños trabajan en el problema en parejas realice las siguientes preguntas para ampliar su pensamiento:
   ¿Qué estrategias pudieron ayudarle a encontrar su respuesta?
   ¿Cómo pueden utilizar el conocimiento sobre números aquí?
   ¿Pueden ver modelos que pudieran ayudar?
   ¿Cómo puede encontrar un modelo general de la expresión? ¿Usando las palabras? ¿Usando el álgebra?
3. Comparta las respuestas de los estudiantes. Pídales que expliquen su razonamiento. Hable sobre lo que se necesita para una solución completa al problema.
4. Pida a los estudiantes que escriban su método de solución. Compruebe que hayan utilizado correctamente las principales ideas de la discusión.
5. Consiga que los estudiantes trabajen en la extensión del problema tanto como sea posible.
6. Discuta el problema de la extensión con la clase entera.

Extensión

Los números triangulares están hechos formando modelos triangulares con contadores. El 4° número triangular es 10 porque necesita 10 contadores.



Un amigo de Juana dice que si se dobla un número triangular la respuesta siempre será un número cuadrado. Otro amigo de Juana dice que no es correcto, pero ella dice que es casi correcto.

¿Cómo los números triangulares pueden combinarse para hacer los números cuadrados?

¿Cómo puede un número cuadrado dividirse para dar una fórmula para un número triangular?

Solución

En esta solución nosotros sugerimos pensar en algún andamiaje que podría ayudar con su clase.

Elabore una tabla (Las tablas siempre son buena estrategia para los modelos.)

Término	**Número impar**	**Suma hasta ahora**
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36

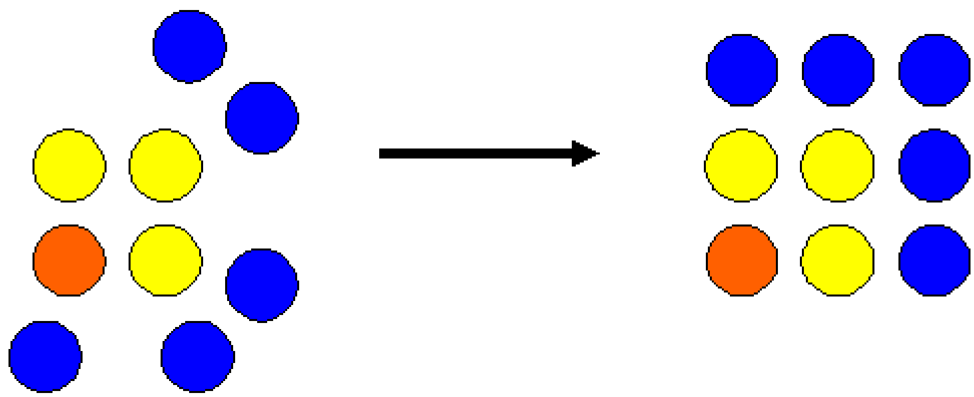
La adición de números impares parece llevar a ajustar los números. Si pusiéramos n en la primera columna la suma sería n^2. (Usted también puede ver que el número n-esimo impar es $2n - 1$.)

Término	Número impar	Suma hasta ahora
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
...	...	...
...	...	...
n	2n-1	n^2

Así que de la tabla que podemos ver que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

¿Cómo podemos mostrar esto geométricamente? Demos una mirada a un ejemplo para ver si podemos hacer el ejercicio. Es mejor empezar por números pequeños. Así que mire 1 + 3, es de mucha ayuda ver cómo las cosas trabajan si usamos contadores coloreados para los diferentes números impares. De algún modo tenemos que conseguir que los contadores formen un cuadrado. Hay sólo una manera

Ahora mire 1 + 3 + 5. Sabemos que tenemos que hacer un cuadrado. ¿En dónde podemos poner los 5 contadores azules para hacer un cuadrado?



Ahora usted puede ver que 1 + 3 + 5 + 7 = 16 y 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. ¿Usted puede ver que siempre es posible agregar el próximo número impar al lado? Empareje 5 contadores verdes con los contadores azules en el último diagrama y hay entonces dos espacios para poner los 2 últimos contadores verdes.

Otra manera de resolver este problema es algebraicamente. Sabemos que tenemos que sumar los números 1, 3, 5,…, 2n - 1. Supongamos que la suma es S. Escribiremos a S así:

$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1).$

$S = (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \ldots + 5 + 3 + 1.$

Ahora agregue los números como si estuvieran en columnas.

$2S = [1 + (2n - 1)] + [3 + (2n - 3)] + [5 + (2n - 5)] + \ldots + [(2n - 5) + 5] + [(2n - 3) + 3] + [(2n - 1) + 1] = [2n] + [2n] + [2n] + \ldots + [2n] + [2n] + [2n].$

Sorprende que todos los términos suman 2n. ¿Pero cuántos 2n están allí? Había una condición de n en S (estábamos sumando los primeros n números impares). Así $2S = 2n \times n = 2n^2$.

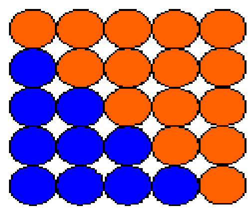
Esto significa que $S = n^2$ que es lo que estábamos esperando.

Este truco de agregar cosas después de escribirlas hacia delante y hacia atrás se puede usar en otras situaciones dónde la diferencia entre las condiciones es una constante.

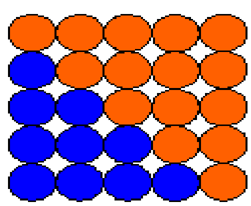
Extensión

Este problema se puede aproximar sucesivamente usando el ensayo y error con números triangulares. No toma demasiado notar que cuando se agregan dos números triangulares consecutivos la respuesta es un número cuadrado.

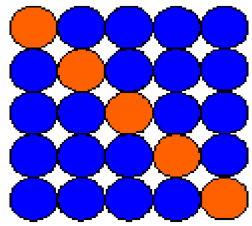
Esto puede verse en el diagrama de abajo.



Si sumamos el enésimo número triangular y el número triangular (n + 1) - esimo obtenemos $(n + 1)^2$. Los números cuadrados se pueden dividir en 2 números triangulares consecutivos. ¿Pero como conseguimos la fórmula para un número triangular cuadrado?. Lo primero que se hace para un caso especial, tome el cuarto y quinto número triangular (véase abajo)



Ahora reubiquemos los contadores de modo que acentuemos el cuarto número triangular (véase abajo)



Así ahora dos veces el 4° número triangular más 5 es 25. Reestructurando da el 4° número triangular = (25 - 5)/2.

Usando este mismo argumento en el n-esimo número triangular da el n-esimo número triangular = $[(n + 1)^2 - (n + 1)] /2$.

Vemos cómo esto trabaja para los ejemplos específicos (n = 5, 6, 7). Sería útil intentar trabajar a través del caso general. Se necesitaría hacer algo así.

Dos veces el n-esimo número triangular más (n + 1) es $(n + 1)^2$, por la geometría de la situación seria dos veces el n-esimo número triangular = $(n + 1)^2 - (n + 1)$.

Esto da el n-esimo numero triangular = $[(n+1)^2 – (n+1)]/2$.

EL PROBLEMA DE LOS PUERCOS, LAS GALLINAS Y LAS OVEJAS

PROBLEMA 28 - NIVEL 6

Darío compró puercos, gallinas y ovejas. En total compró 100 animales y gasto \$600. Darío pagó \$21 por cada puerco, \$8 por cada gallina y \$3 por cada oveja. Había un número par de puercos.

¿Cuántos animales de cada clase compró Darío?

¿De que se trata el problema?

Éste es otro ejemplo de un problema que puede resolverse de varias maneras. Es posible mediante ensayo - error. Una tabla también será útil.

Una solución usando álgebra da más idea sobre lo que ocurre. Es fácil establecer las ecuaciones algebraicas, pero resulta que no hay suficientes ecuaciones para poder resolver todas las variables. La clave esta en usar el hecho de que la solución son números enteros.

Este problema tiene que ver con en ecuaciones Diofanticas. Éstas son ecuaciones cuyas soluciones se buscan únicamente en los números enteros. Un problema Diofantico importante que fue resuelto en 1995 (y estuvo sin resolver durante mas de 300 años), es el denominado Ultimo Teorema de Fermat. Este problema pregunta si para todo numero natural $n>2$ es posible resolver la ecuación Diofantica $x^n + y^n = z^n$ con x, y, z enteros mayores que 2. El problema fue planteado originalmente por Pierre de Fermat en 1646. Su solución requirió del esfuerzo de muchos matemáticos, hasta que el matemático ingles Andrew Wiles lo resolvió.

Logros

- Forma y resuelve ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

- Sustituye valores en una fórmula

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar las habilidades algebraicas para solucionar un problema que implique tres variables.

Secuencia de la enseñanza

1. Plantee el problema a la clase.
   ¿Qué estrategia podemos utilizar para empezar este problema?
   ¿Si usamos una suposición y la comprobamos, como se sabrá si tenemos todas las posibles respuestas?
2. Los estudiantes pueden probar en una lista pero hay muchas combinaciones debido a las tres variables. Aquí se necesitará animar a los estudiantes a que piensen en aplicar álgebra al problema.
3. Se debe aplicar un método de eliminación en el problema.
4. Puede usarse una lista una vez que se haya eliminado s.
5. Las preguntas que se enfocan en las variables pueden ayudar a los estudiantes a que usen estrategias en lugar de la lista.
   ¿Qué sabes sobre los 18 p (puercos)?
   ¿Cuál es el rango para las posibles respuestas para los p (puercos)?
   ¿Qué sobre las g (gallinas)?

Extensión

Primero redacte de nuevo este problema para ponerlo en otra escena. Produzca su propio problema. Intercambie su problema con alguien más de su clase.

Solución

De la información que nos da la pregunta podemos construir dos ecuaciones. Tome p, g, y s como los números de cerdos, cabras, y ovejas, respectivamente. Entonces:

$p + g + s = 100$

$21p + 8g + 3s = 600.$

La dificultad con que nos enfrentamos es que tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. No hay solución única en tales situaciones. Sin embargo, aquí tenemos el hecho de que las soluciones son números enteros, no podemos tener una fracción de un animal. Ahora se transforman las ecuaciones en una forma que nos permitirá resolverlas.

$3p + 3g + 3s = 300$

$21p + 8g + 3s = 600$

Si eliminamos s de estas dos ecuaciones obtenemos

$18p + 5g = 300.$

¿Se puede resolver esto de alguna manera? Aquí podemos continuar con una lista usando suposición y comprobación.

Otro acercamiento, que probablemente será demasiado complejo para la mayoría de estudiantes involucra reestructurar la ecuación para obtener:

$18p = 300 - 5g$. Es interesante (y crucial) observar que 5 es un factor del lado derecho de esta última ecuación. Así que 5 debe ser un factor de 18p. Dado que 18 y 5 no tienen ningún factor en común (ellos son primos relativos). Ponemos $p = 5k$. Por otro lado, sabemos de la pregunta que p tiene que ser par. Esto significa que p es múltiplo de 10. Así que tenemos que $p = 10m$.

Sustituimos esta parte en la última ecuación para obtener

$18(10m)=300-5g$

$180m = 300 - 5g$

$36m = 60 - g$.

¡Por ahora esto no parece ser mejor que la ecuación $18p = 300 - 5g$, después de todo, todavía tiene dos incógnitas, m y g. Pero ahora piense! ¿Qué valores puede tomar m realmente? Puesto que 36m es positivo (la pregunta original implica que hay por lo menos uno de cada animal), 60 - g tiene que ser estrictamente positivo. Así 60 - g está entre 1 y 60. Y como la pregunta original implica que hay por lo menos uno de cada animal, g debe ser por lo menos 1 luego 60 - g no puede ser igual a 60.

Así sí $m = 1$, entonces $p = 10m = 10$. Y ahora:

$36 = 60 - g$. Entonces $g = 24$.

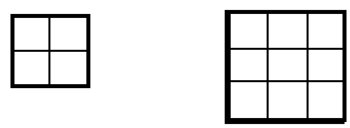
Regresando a la primera ecuación tenemos $s = 66$. Entonces el señor Darío compró 10 puercos, 24 gallinas y 66 ovejas.

LOS CAJONES CUADRADOS DE BOT HE.

PROBLI L 6

Andrés tiene un problema. Él trabaja en una compañía que usa canastas de leche. Éstas son divididas con divisiones según el número de botellas que caben en las canastas.

Con 2 divisiones, Andrés puede acomodar 4 botellas en una canasta. Con 4 divisiones él puede acomodar 9 botellas. Ésta clasificación depende del tamaño de la canasta. Las dos situaciones se muestran en el cuadro.



2 divisiones	4 divisiones
4 botellas de leche	9 botellas de leche

El viernes el jefe de Andrés quiso saber cuántas botellas pueden colocarse en una canasta cuadrada si se utilizan 30 divisiones. El martes el jefe de Andrés quiso saber cuántas divisiones se necesitarán para acomodar 100 botellas de leche en una canasta cuadrada.

¿De que se trata el problema?

En primer lugar este es otro de problema que tiene más de una solución. Por lo tanto el problema es accesible a una amplia gama de estudiantes. El problema radica en encontrar los modelos.

Logros

- Genera modelos lineales y cuadráticos y encuentra y justifica la regla.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Encontrar una regla para un modelo cuadrático.
- Justificar una regla para un modelo cuadrático.

Secuencia de la enseñanza

1. Muestre a los estudiantes un cuadro de cartón con 4 divisores
   ¿Qué preguntas matemáticas podríamos plantear sobre este cartón?
2. Es posible que los estudiantes propongan un problema similar a los que los estudiantes han resuelto.
3. Pídales sus ideas iniciales al empezar el problema.
4. Cuando los estudiantes estén trabajando en el problema hágales preguntas que los anime a pensar en estrategias para resolver el problema.
   ¿Qué estrategia estás usando para resolver el problema?
   ¿Estás consiguiendo resultados?
   ¿Has visto problemas similares antes?
5. También haga preguntas que animen a los estudiantes a buscar y explicar modelos en el número de divisiones.
   ¿Qué has averiguado sobre las divisiones?
   ¿Esto te ayuda a solucionar el problema?¿Cómo?
   ¿Qué modelos puedes encontrar en el problema?
   ¿Qué te ayuda a encontrar modelos en problemas como éstos? (tablas)
6. Justifique las respuestas.

Extensión

Tome las canastas cuadradas de nuevo. Andrés quiere estar un paso delante de su jefe. Así que decide realizar alguna fórmula.
¿Si el jefe de Andrés le da 2 divisores, cual es el número máximo de botellas que él puede poner en la canasta?
¿Si el jefe de Andrés quiere encajar un número de botellas en una canasta cuadrada, cuántas divisiones necesita?

Solución

Hay un número de soluciones posibles a estos problemas. Ellos incluyen solucionar el problema usando una tabla y usando álgebra.

Opción 1: El problema de 30 divisiones.

Usando una tabla y considerando primero los casos más simples. Es claro que cada botella debe caber en un agujero cuadrado formado por las divisiones. Eso significa que un número igual de divisiones tiene que ser usado en cada dirección.

Números de divisiones	Número de las botellas de leche
2	$4 = 2^2$
4	$9 = 3^2$
6	$16 = 4^2$
8	$25 = 5^2$
10	$36 = 6^2$
...	...
30	$256 = 16^2$

La tabla puede continuarse hasta 30 si el modelo no es obvio para los estudiantes.

El problema de 100 botellas de leche.

Una manera de resolver esto es trabajar al revés en la tabla. Desde $100 = 10^2$, y $10 - 1 = 9$, entonces $2 * 9$ es el número de divisiones que son utilizados. Así que el jefe de Andrés tendrá que tener 18 divisiones.

Extensión: Los números cuadrados se convierten en evidentes y necesitan unirse algebraicamente con el número de divisiones. El número de divisiones son pares. Si cada par es considerado como un solo caso la tabla se vuelve.

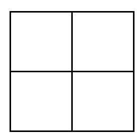
Caso	No. de divisiones	No. de las botellas de leche
1	2	2^2
2	4	3^2
3	6	4^2
4	8	5^2
5	10	6^2
d	2d	$(d + 1)^2$

Enfocándose en el doble del número de divisiones podemos generar una fórmula cuadrática para el número de botellas de leche.

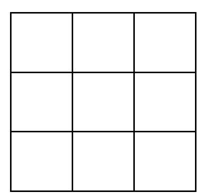
Así el número de botellas = $(d + 1)^2$.

Si tenemos b^2, entonces podemos trabajar de derecha a izquierda en la tabla. El correspondiente a b^2 es 2(b - 1) en la columna del medio.
Así el número de divisiones = 2(b - 1).

Opción 2: El problema de los 30 divisores.
Realizando un diagrama se puede ver que la mitad del número de divisiones son usados en un lado de la canasta. Así que se usarán 15 divisiones en un lado de la canasta.



1 división genera 2 espacios para las botellas



2 divisiones generan 3 espacios para las botellas

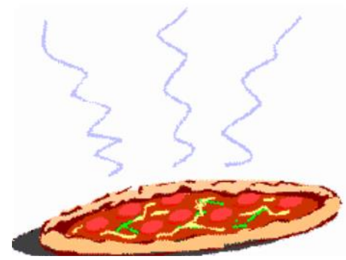
Por lo tanto si hay 15 divisiones en un lado, darán 16 espacios de las botellas. Así el número total de espacios de las botellas en la canasta es 16 * 16 = 256.

El problema de 100 botellas de leche.
Si hay 100 botellas significa que hay 10 botellas en cada lado, luego hay 9 divisiones en cada lado. Por lo tanto hay 18 divisiones.

INGREDIENTES DE LA PIZZA

PROBLEMA 30 - NIVEL 6

La cubierta de la Pizza de mamá tiene los siguientes ingredientes:
jamón, queso, salchichón, pollo, hongos, tomate, tocino y piña. Jesid le dice que su pizza la quiere solo con 2 ingredientes



¿ Cuántas opciones tiene la Mamá?, si hay 100 ingredientes disponibles. ¿Cuántas opciones tendría la mamá?

¿De que se trata el problema?

El objetivo de este problema es encontrar el modelo que existe en el número de maneras de escoger 2 ingredientes de un número t de ingredientes. Esperamos que la mayoría de los estudiantes obtengan la respuesta en casos específicos, inclusive cuando se involucran 100 ingredientes.

Una manera en que puede resolver es seguir el razonamiento que se utilizó en el apilado de latas.

Este tipo de desarrollo es común en la matemática y es de hecho la manera en que se progresa en este tema. El problema se solucionará primero de una manera simple. Y luego se resuelve por un acercamiento más certero.

Logros

- Genera modelos lineales y cuadráticos y encuentra y justifica la regla.

Resultados específicos del aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Utilizar un método sistemático para solucionar un problema.
- Hacer predicciones con base en una regla que se haya encontrado.

Secuencia de la enseñanza

1. Discuta cuál es la comida favorita de los estudiantes.
   ¿Han estado recientemente en algún lugar de comidas rápidas?
   ¿Este problema le recuerda otro? (Muéstreles el problema de la pizza).
   ¿Qué ingredientes prefiere en la pizza?
2. Hable sobre cómo pueden escoger varios ingredientes. ¿Cuantas formas hay de elegir 2 ingredientes de 3 disponibles?.
3. Hable sobre la primera parte del problema. ¿Cómo piensas que podrías solucionarlo?
4. Permita a los estudiantes trabajar en grupos. Los grupos más ágiles pueden intentar los 100 ingredientes del problema. Cuando tienen los ingredientes, entonces podrían probar el caso para X.
5. Busque que los grupos divulguen a toda la clase.
6. Permita a los estudiantes escribir las soluciones en sus cuadernos.

Extensión

Si en la tienda hay X ingredientes, de cuantas maneras Jesid podría elegir 2 ingredientes.

Solución

Empezaremos el problema con 8 ingredientes. Ahora, el jamón puede escogerse con el queso, salchichón, pollo, hongos, tomate, tocino y piña, para un total de 7 ingredientes.
Después de haber usado el jamón, puede escogerse el queso con el salchichón, pollo, hongos, tomate, tocino y piña, para un total de 6 ingredientes.

Después de haber usado el jamón y el queso, el salchichón puede escogerse con el pollo, hongos, tomate, tocino y piña, para un total de 5 ingredientes.

Después de haber usado el jamón, el queso y el salchichón, el pollo puede escogerse con los hongos, tomate, tocino y piña, par un total de 4 ingredientes.

Después de haber usado el jamón, el queso, el salchichón y el pollo, puede escogerse los hongos con el tomate, tocino y piña, para un total de 3 ingredientes.

Después de haber usado el jamón, el queso, el salchichón, el pollo y hongos, el tomate puede escogerse con el tocino y piña, para un total de 2 ingredientes.

Después de haber usado el jamón, el queso, el salchichón, el pollo, hongos y el tomate, el tocino puede escogerse con la piña, para un total de 1 ingredientes.

Así en total tenemos 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 pares de ingredientes. Esto se observa rápidamente: 7 + 1 = 8, 6 + 2 = 8 y 5 + 3 = 8, así que conseguiremos 28 como respuesta.

Si nos enfrentamos a una opción de 2 ingredientes entre 100, podemos adoptar la misma estrategia. En este momento tendremos que sumar

T = 99 + 98 + 97 + 96 +… + 3 + 2 + 1.

El problema del apilado de latas, nos muestra exactamente cómo hacer esto. Mostramos otra manera aquí.

T = 99 + 98 + 97 + 96 +… + 3 + 2 + 1, y

T = 1 + 2 + 3 +… + 96 + 97 + 98 + 99.

Si sumamos estos T, conseguimos 99 porciones de 100 (porque 99 + 1 = 100, 98 + 2 = 100, etc.

Luego 2T = 99 x 100.

Por lo tanto T = 99 x 50 = 4950. Eso debe mantenerlo feliz por algún tiempo.

Extensión: El mismo argumento aquí para el caso de 2 ingredientes de t disponibles. El número de maneras que esto puede hacerse es

$T = (t - 1) + (t - 2) + \ldots + 2 + 1$, o

$T = 1 + 2 + \ldots + (t - 2) + (t - 1)$.

Sumando da $2T = (t - 1)t$.

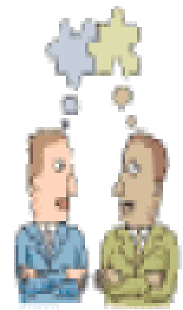
Por lo tanto $T = (t - 1)t/2$.

Compruebe esto para $t = 8$ y $t = 100$.

LA EDAD DE LADY

PROBLEMA 31 - NIVEL 6

Las curiosidades y enigmas matemáticos han fascinado
a las personas a través de los tiempos.
Una joven impertinente le pregunta la edad a una señora.
Esta le dio la siguiente contestación:
Si a mi edad le agregó un medio,
un tercio y tres veces tres 130 será la suma.
Ahora adivine cuál es mi edad.



¿De que se trata el problema?

Este enigma se remonta al año de 1788. Esto le puede parecer viejo, pero problemas similares pueden encontrarse en las escrituras indias. En un libro, Lilivati que fue escrito alrededor del año 1150, el autor Bhaskara escribe los problemas para que su hija los resuelva. Hay ahí una pregunta sobre un pavo real y una serpiente que involucran el Teorema de Pitágoras.

Sorprendentemente el Kamasutra que es probablemente famoso por otras cosas, contiene varios problemas matemáticos. Estoy seguro que usted lo leerá ahora con una nueva visión diferente. Si quiere admirar la historia matemática, le sugerimos que lea el libro "Historia en matemática" de Carl Boyer.

Logros

- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Solucionar un problema de diversas maneras.
- Solucionar de manera creativa un problema o un problema de otra fuente de información.

Secuencia de la enseñanza

1. Hable sobre hechos históricos.
2. Lea a la clase el enigma de la Señora. Asegúrese de que tengan alguna idea de lo que se va a hacer.
   ¿Por qué piensas que fue inventado el problema?
   ¿Qué piensa de la forma en que pensaba la persona que lo escribió?
   ¿Qué usó ella?
   ¿A que se refiere con un medio y con un tercio?
3. Permita a la clase trabajar en el problema en grupos de dos o cuatro.
4. Circule alrededor de la clase e inspeccione el progreso. Si un grupo termina usando un acercamiento algebraico, permítales probar el problema de la extensión.
5. De un tiempo de su hora a varios grupos para informar su respuesta y las maneras en que resolvieron el problema. Si no hay tiempo para mirar el problema de la extensión pídales que lo resuelvan en casa.
6. En alguna fase de la clase, permita escribir dos maneras de resolver el problema en su cuaderno de matemática.

Extensión

Usted puede presentar el problema con su propia edad o la de alguien más. Dígalo a otro miembro de la clase para que lo resuelva. Use el Internet para encontrar libros que contienen problemas matemáticos, enigmas o pasatiempos.

Solución

Como en otros problemas, damos tres posibles acercamientos a este problema. Todos los estudiantes podrán usar el método 1. El método más sofisticado es el método 3 donde usamos álgebra.

Método 1. Suponga.

Se puede probar este problema mediante la suposición y verificación pero eso es muy ineficaz. Se hará una suposición inicial y se usará para conseguir una solución.

La suma es 130, así que suponemos una edad para la señora tal que una mitad de la edad, más un tercio de ella, más tres por tres sea igual a 130.

Suponga que la señora tenía 48 años. Entonces la mitad de 48 es 24 y un tercio de 48 es 16. Claramente tres por tres son 9. Así que nosotros tenemos 48 + 24 + 16 + 9 = 97. Esto es demasiado pequeño. Así que pruebe un número más grande.

Suponga que ella tenía 90 años. Entonces 90 + 45 + 30 + 9 = 174 (demasiado grande). Así que tenemos que probar algo más grande que 48 y más pequeño que 90.

Suponga que ella tenía 60 años. Entonces 60 + 30 + 20 + 9 = 119 (demasiado pequeño). Así que necesitamos un número entre 60 y 90.
Suponga que ella tenía 66 años. Entonces 66 + 33 + 22 + 9 = 130: ¡AJÁ!!

Método 2: Pruebe cada combinación posible.
Ésta es una manera que requiere de bastante trabajo. Sin embargo, si tiene alguien que sea bueno en los programas por computador, conseguirá los cálculos muy rápidamente. El programa puede funcionar aplicando los números a partir de 1 ascendentemente verificando el criterio del problema.

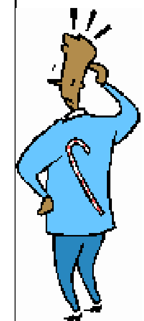
Método 3: Use el álgebra.
Permita que la edad sea **e**. (pensamos que es un método bueno usar una letra que tenga cierta importancia en el problema. Por supuesto, no hay nada mal con x pero cual es el acoplamiento entre x y la edad?)

Entonces tenemos que solucionar	$e + e/2 + e/3 + 9 =$	130.
Entonces	$e + e/2 + e/3 =$	121.
Por lo tanto	$(6e + 3e + 2e)/6 =$	121.
Esto da	$11e/6 =$	121
o	$e =$	$(121 \times 6)/11$.
Esto da	$e =$	66

Este método es mucho más eficaz que los otro dos. Realmente es una técnica matemática poderosa real.

ÁLGEBRA DE DIOfANTO

PROBLEMA 32 - NIVEL 6



Las curiosidades y enigmas matemáticos han fascinado a las personas a través de los tiempos. Éstos se expresaron a menudo en verso o como enigmas. Se supone que este ha venido de la tumba de un matemático griego antiguo que vivió primero en Alejandría.

Cuando nos unimos en matrimonio mi esposa y yo, su edad era tres años mas que la mía más tres veces tres; pero después de tres años y un medio de tres años, nuestras edades estaban entonces en la proporción como doce a trece.¿cuál era su edad el día de la boda?

[Escrito en la tumba de Diofanto (100dc aproximadamente)]

¿De que se trata el problema?

No se esta realmente seguro de cuántos años tiene este problema. En el miramos el problema que se grabó supuestamente en la lápida.

No sabemos exactamente cuando realmente vivió Diofanto pero era alrededor de los años 150 y 364 DC. También se sabe que vivió en Alejandría que era el centro de la civilización griega antigua entre los años 350 AC y 640 AC. A Diofanto lo llevo a la fama un sistema de trece volúmenes de libros llamados Aritmética. Sólo seis de ellos han sobrevivido pero se dice que él estaba interesado en problemas que tenían soluciones en los números enteros. Las ecuaciones de este tipo se llaman ecuaciones Diofanticas hoy en su honor.

Este problema puede resolverse por suposición y comprobación o siendo sistemático de alguna manera. Sin embargo, la manera más eficáz de resolverlo está en el álgebra. Vale la pena permitir que su clase trabaje en ellos debe impresionarles el poder del álgebra que los lleva a resolverlos muy eficazmente.

Logros

- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Solucionar un problema de diversas maneras.
- Solucionar de manera creativa un problema o un problema de otra fuente de información.

Secuencia de la enseñanza

1. Hable sobre hechos históricos.
   ¿Qué persona famosa conoce que haya nacido hace 100 años?
   ¿Hace 1000 años?
   ¿Hace 2000 años?
2. Recite poemas de Diofanto. Asegúrese de que tienen idea de quien es.
   ¿Cuál es la proporción doce es a trece?
3. Consiga que la clase trabaje en el problema en grupos de dos o cuatro.
4. Circule alrededor de la clase e inspeccione el progreso. Si un grupo ha terminado usando un acercamiento algebraico, permítales probar el problema de la extensión.
5. De un tiempo de su hora a varios grupos para informar su respuesta y las maneras en que resolvieron el problema. Si no hay tiempo para mirar el problema de la extensión pídales que lo resuelvan en casa

6. En alguna fase de la clase, permita escribir dos maneras de resolver el problema en su cuaderno de matemática.

Extensión

Usted puede construir un problema con su propia edad o la de alguien más. Dígalo a otro miembro de la clase para que lo resuelva. Use el Internet para encontrar libros que contienen problemas matemáticos, enigmas o pasatiempos.

Solución

Como en otros problemas, damos tres posibles acercamientos a el. Todos Los estudiantes deben poder usar el método 1. El método más sofisticado es el método 3 donde se usa álgebra. Esperanzadamente la mayoría de su clase puede empezar por lo menos en el acercamiento algebraico.

Método 1. Suponga y compruebe.

Pruebe una suposición inicial. Si esta no sirve, entonces pruebe otra. Use la primera suposición para hacer una segunda suposición mejor.

Suponga que él tenía 30 años, entonces su esposa tenía 33 años. Después de $3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$ años, él tenía $34\frac{1}{2}$ años, y su esposa tenía $37\frac{1}{2}$ años.

Ahora la proporción de su edad a la de la esposa es:

$34\frac{1}{2} : 37\frac{1}{2}$ dividiendo por $34\frac{1}{2}$ tenemos

1 : 1.086 multiplicando por 12 tenemos

12 : 13.043.

Esto es cercano pero no lo suficiente.

Así que pruebe su edad con 33. Entonces la edad de su esposa era 36. Después de $4\frac{1}{2}$ años, él tenia $37\frac{1}{2}$, y ella tenia $40\frac{1}{2}$.

La proporción es ahora

$37\frac{1}{2}$: $40\frac{1}{2}$ dividiendo por $37\frac{1}{2}$ tenemos

1 : 1.08 multiplicando por 12

12 : 12.96,

como 12.96 están en el otro lado de 13 (13.043), la próxima suposición debe estar entre 30 y 33.

Así que pruebe $31\frac{1}{2}$ para la edad de Diofanto. Su esposa tendría entonces $34\frac{1}{2}$ años. Después de $4\frac{1}{2}$ años, él tiene 36, y ella tiene 39 años. ¡La proporción entre sus edades es ahora 36:39 que es igual a 12:13. BINGO!

Método 2: Pruebe cada combinación posible.

La manera más eficaz de hacer esto es escribir un programa en el computador.

Método 3. Use el álgebra.

Tome la edad como **e** (más sugestivo que x). Entonces la edad de su esposa es **e** + 3, para así obtener una ecuación:

$$(\mathbf{e} + 4\tfrac{1}{2})/[(\mathbf{e} + 3) + 4\tfrac{1}{2}] = \frac{12}{13}.$$

Luego $13(\mathbf{e} + 4\frac{1}{2}) = 12[(\mathbf{e} + 3) + 4\frac{1}{2}]$.

Entonces tenemos $13\mathbf{e} + 58\frac{1}{2} = 12\mathbf{e} + 90$.

Así $\mathbf{e} = 31\frac{1}{2}$,

Como lo encontramos por el método 1.

Por lo tanto, cuando se casaron, Diofanto tenia $31\frac{1}{2}$ y su esposa $34\frac{1}{2}$

Este método es mucho más eficáz que los otro dos. Realmente es una técnica matemática poderosa de gran alcance.

ÁLGEBRA DE DIOFANTO

PROBLEMA [illegible] 6

Las curiosidades y enigmas matemáticos han fascinado a las personas a través de los tiempos. Éstos se expresaron a menudo en verso o como enigmas. Se supone que este ha venido de la tumba de un matemático griego antiguo que vivió en Alejandría.

Dios le concedió ser un muchacho durante la sexta parte de su vida, agregando una duodécima parte de su vida él vistió sus mejillas; lo encendió la luz del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio él le concedió un hijo. ¡Ay! El niño infeliz tarde nació; después de lograr la mitad de la vida de su padre, el destino frío lo tomó. Después de consolar su pena por esta ciencia de los números a los cuatro años él acabó con su vida.

¿Cuánto tiempo vivió Diofanto?

[Escrito en la tumba de Diofanto (100dc aproximadamente)]

¿De que se trata el problema?

No se está realmente seguro de cuántos años tiene este problema. Este problema se grabó supuestamente en la lápida.

No sabemos exactamente cuando realmente vivió Diofanto pero era alrededor de los años 150 y 364 DC. También se sabe que vivió en Alejandría que era el centro de la civilización griega antigua entre los años 350 AC y 640 AC. Diofanto lo llevo a la fama un sistema de trece volúmenes de libros llamados Aritmética. Sólo seis de ellos han sobrevivido pero se dice que estaba interesado en problemas que tenían soluciones en los números enteros. Las ecuaciones de este tipo se llaman ecuaciones Diofanticas hoy en su honor.

Este problema puede resolverse por suposición y comprobación o siendo sistemático de alguna manera. Sin embargo, la manera más eficáz de resolverlo está en el álgebra. Vale la pena permitir a su clase trabajarlos, deben impresionarse por el poder del álgebra que los resuelve muy eficazmente.

Logros

- Forma y soluciona ecuaciones lineales, ecuaciones simultaneas y ecuaciones cuadráticas simples.

Resultados específicos de aprendizaje

Los niños serán capaces de:

- Solucionar un problema de diversas maneras.
- Solucionar de manera creativa un problema o uno de otra fuente de información.

Secuencia de la enseñanza

1. Hable sobre hechos históricos.
   ¿Quién es la persona más famosa que usted conoce nacida hace 100 años?
   ¿Hace 1000 años?
   ¿Hace 2000 años?
2. Recite poemas de Diofanto. Asegúrese de que ellos tienen idea de quien es.
3. Consiga que la clase trabaje el problema en grupos de dos o cuatro.
4. Circule alrededor de la clase e inspeccione el progreso. Si un grupo ha terminado usando un acercamiento algebraico, permítales probar el problema de la extensión.

5. De un tiempo de su hora a varios grupos para informar su respuesta y las maneras en que resolvieron el problema. Si no hay tiempo para mirar el problema de la extensión pídales que lo resuelvan en casa
6. En alguna fase de la clase, permita escribir dos maneras de resolver el problema en su cuaderno de matemática.

Extensión

Usted puede construir un problema con su propia edad o la de alguien más. Dígalo a otro miembro de la clase para que lo resuelva.

Solución

Sus estudiantes pueden resolver este problema con un método algebraico.

Suponga que Diofanto vivió d años. Él era un muchacho durante los $\frac{d}{6}$ años; se tuvo que afeitar después de $\frac{d}{12}$ años; se caso después de $\frac{d}{7}$ años; tuvo un hijo después 5 años; su hijo se murió $\frac{d}{2}$ años después; luego Diofanto murió 4 años después. Así

$$d = \frac{d}{6} + \frac{d}{12} + \frac{d}{7} + 5 + \frac{d}{2} + 4 = \frac{75d}{84} + 9$$

Por lo tanto $\frac{9d}{84} = 9$ o $\frac{d}{84} = 1$. Luego d = 84.

Diofanto vivió 84 años.

9. ENUNCIADOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS

El grado de complejidad de los problemas aumenta con el incremento en el nivel. Los profesores son los responsables de escoger los problemas que más se adecuen al contexto en el cual están trabajado.

1. Impares y Pares Consecutivos

Escoja cuatro números impares consecutivos. Tome el producto de los dos números medios y reste el producto del primer número y el último número. Pruebe con varios ejemplos y formule una regla. Explique por qué trabaja la regla.

¿Qué sucederá si utiliza cuatro números pares consecutivos en el problema anterior? ¿Su regla cambiará? Si es así encuentre una regla nueva, y explique porqué esta nueva regla trabaja y porqué es diferente de la regla original. ¿Si la regla no cambia, su explicación cambia?

¿Qué sucederá si usted utiliza cuatro números consecutivos en el problema anterior? ¿Su regla cambiará? Si es así encuentre una nueva regla, y explique porqué esta nueva regla trabaja y porqué es diferente de la regla original. ¿Si la regla no cambia, su explicación cambia?

2. Patrones en una tabla

Ésta es parte de una tabla de valores de $3S^2 + T^2$. Los valores de S están en el lado izquierdo y los valores de T están en la parte superior. De valores en la muestra y evalué la expresión $3S^2 + T^2$ usando los valores de S y T de las filas y de las columnas correspondientes. Amplíe la tabla para valores más grandes de S y de T e investigue cualquier patrón que usted pueda encontrar.

		T												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S	1	4	7	12	19	28	39	52	67	84	103	124	147	172
	2	13	16	21	28	37	48	61	76	93	112	133	156	181
	3	28	31	36	43	52	63	76	91	108	127	148	171	196
	4	49	52	57	64	73	84	97	112	129	148	169	192	217
	5	76	79	84	91	100	111	124	139	156	175	196	219	244
	6	109	112	117	124	133	144	157	172	189	208	229	252	277
	7	148	151	156	163	172	183	196	211	228	247	268	291	316

3. Fracciones en números enteros

Encuentre tres números enteros, a, b y c, que hagan que esta fracción sea un número entero:

$$\frac{bc + ac + ab}{a + b + c}$$

¿Puede encontrar un método que dé muchas soluciones? Explique porqué su método funciona.

4. Fibonacci

Escoja dos números enteros (numero uno y numero dos). Súmelos y forme una sucesión como la Fibonacci (sume el número uno y el número dos para conseguir el número tres, después sume el número dos y el número tres para conseguir el número cuatro, etc.). Hágalo con un total de diez números. Repita el proceso empezando con dos números diferentes.

¿Cuál es la relación entre el séptimo término y la suma de los términos (para cada secuencia)? ¿Cuál es la relación entre el séptimo término y el décimo término (para cada secuencia)? Explique.

Extensiones

¿Su resultado sería diferente si comenzó con números negativos o fracciones?

5. Vamos de pesca

Un pescador profesional pescó 385 peces durante un torneo de 14 días. Cada día pescó tres peces más que él día anterior. ¿Cuántos peces pescó el pescador en cada día?

Genere una breve respuesta para verificar el número total de peces pescados por el pescador durante el torneo. Use sólo el número de peces en el primer día de captura, el número de peces en el último día captura, y número de días en el torneo. Explique su razonamiento.

6. Patrones de pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

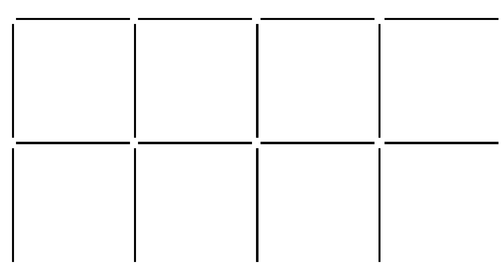
¿Cuál es la suma de cada fila? Encuentre una manera de describir el patrón de sumas comparando la suma de cada fila al número correspondiente de la fila.

Extensiones

¿Qué otros patrones nota en este triángulo de números?

7. Arreglo de palillos

Se usan palillos para construir una reja rectangular de 20 palillos de largo y 10 palillos de ancho. La reja está llena con cuadrados que tienen 1 palillo en cada lado. ¿Cuál es el número total de palillos usados? Si a representa el número de palillos a lo largo de una reja y b representa el número de palillos a lo ancho de una reja (de nuevo, la reja está llena con cuadrados que tienen 1 palillo de lado), escriba una expresión que representa el número total de palillos en cualquier reja rectangular de esta clase.



8. Casi un Cuadrado

Un cuadrado con los lados de la longitud entera (es decir, las longitudes de los lados son números enteros) se podría hacer con 25 unidades cuadradas. Haga un rectángulo con los lados de la longitud entera y un área de 24 unidades cuadradas, pero construya el rectángulo de manera que sea lo mas cercano posible a un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?.

Repita esta construcción empezando con otros números del cuadrado

9. Eleva a la 100

Encuentre el dígito de las unidades para cada uno de los números siguientes. Utilice los patrones encontrados enumerando los valores de potencias más pequeñas de cada base para comenzar.

2^{100}	3^{100}	4^{100}
5^{100}	6^{100}	7^{100}

10. Triunfo de Hypátia

Hypátia fue una matemática egipcia del 370 A.C.. Un problema que ella planteó fue el siguiente:

Encuentre un número que sea la suma de dos cuadrados y que el cuadrado sea también la suma de dos cuadrados.

¿Puede usted solucionar el problema de Hypátia? ¿Hay más soluciones? ¿Hay un patrón entre cada par de soluciones? Justifique su respuesta

11. Sumar múltiplos

Encuentre la suma de todos los múltiplos de 3 a partir 1 hasta 300. ¿Usted ve como se desarrolla un modelo?. Encuentre la suma de los múltiplos de 7 a partir 1 hasta 700. ¿Encuentra usted el modelo? Supongamos que n es cualquier número entero. Encuentre la suma de todos los múltiplos de n a partir de 1 hasta 100 * n .

12. El pez de Germán

Héctor tiene un pez que se cuadruplica cada mes. Germán tiene un pez que aumenta en 20 cada mes. Héctor tiene 4 peces y Germán tiene 128 peces. ¿En cuántos meses ellos tendrán el mismo número de peces? Muestre como llegó a la respuesta.

13. Tríos de triple cuadrado

Los números 3 y 6 son números triangulares consecutivos. Su suma es 9, que es un número cuadrado. Encuentre otros dos números triangulares cuya suma es un número cuadrado. Dibuje un cuadro para ilustrar cualquier patrón que usted observe.

14. Suma parcial de enteros consecutivos

¿Existe un número natural n tal que 1+2+3+4+... +n es un número de tres dígitos idénticos?

¿Existe un número natural n tal que 1+2+3+4+... +n es un número de cuatro dígitos idénticos?

15. Cuadrados en un tablero

¿Cuántos cuadrados, de cualquier tamaño, están en un tablero de 3 x 3? ¿4 x 4? ¿8 x 8? ¿n x n? Explique cómo llegó a sus respuestas.

16. Terminar la secuencia

Encuentre los siguientes números en cada uno de estas secuencias:

-4	-1	2	5	8	11	14	17	20			

-1	0	3	8	15	24	354	48	63			

-128	-54	-16	-2	0	2	16	54	128			

17. Suma de números enteros consecutivos

¿Cuántos enteros entre 10 y 40 pueden escribirse como la suma de 2 enteros consecutivos?

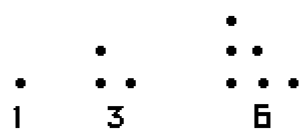
¿Cuántos enteros entre 10 y 40 pueden escribirse como la suma de 3 enteros consecutivos?

¿Cuántos enteros entre 10 y 40 pueden escribirse como la suma de 4 enteros consecutivos?

¿Puede encontrar un modelo? Explique.

18. Números triangulares

Considere el modelo formado por estos puntos.



El número usado para describir cada "triángulo" se llama número triangular. ¿Dado un número, puede arreglar ese número de puntos en un triángulo? Si puede, ha identificado un número triangular. La secuencia de números triangulares comienza con 1, 3, 6, etcétera.

Haga un dibujo del siguiente triangulo en la secuencia dada y diga cual es el siguiente número triangular.

Sin dibujar más triángulos, determine los próximos cinco números triangulares y explique cómo encontró los resultados

Extensiones

Investigue el patrón con números cuadrados.

19. Triángulos dentro de triángulos

1 1

2 2 2

3 4 4 3

4 7 8 7 4

5 11 15 15 11 5

6 16 26 30 26 16 6

7 22 42 56 56 42 22 7

8 8

Este triángulo comienza con las filas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de la diagonal del exterior. . .

Los números dentro del triángulo son cada uno la suma de dos números en la fila directamente sobre ella: el número diagonalmente arriba a la derecha, y el número diagonalmente arriba a la izquierda. Por ejemplo, 42 = 16 + 26.

Complete el triángulo y determine una relación entre varios números en el triángulo que son exactamente divisibles por algunos número mayor que 5 ¿Cómo cambian los resultados si intenta otros números mayores que 5 ?

20. Suma de números naturales

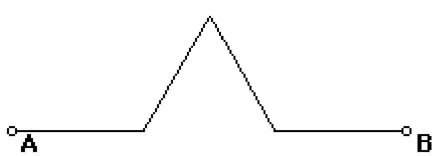
¿Dado que 1 = 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, y 1 + 2 + 3 + 4 = 10, cuál es la suma de los números a partir de la 1 hasta 100? Explique cómo encontró su respuesta. ¿A que es igual 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + . . . + n? Dé su respuesta en términos de n.
Explique su solución.

21. Repetición de patrones

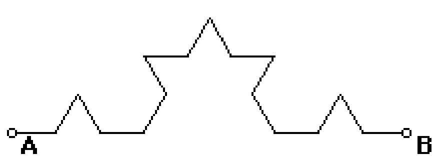
¿En el decimal siguiente, cuántos 2 hay después de trescientos 3?
0.23223222322223. . .

22. Iteraciones de fractal

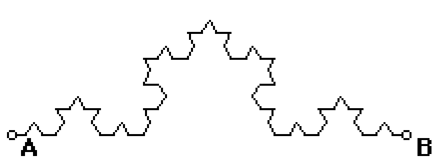
Los diagramas abajo representan las etapas en la construcción de un fractal, un patrón infinito donde está visible la etapa inicial en pedazos más pequeños de la imagen. Cada paso en el proceso se llama una iteración



Etapa inicial



1ra iteración

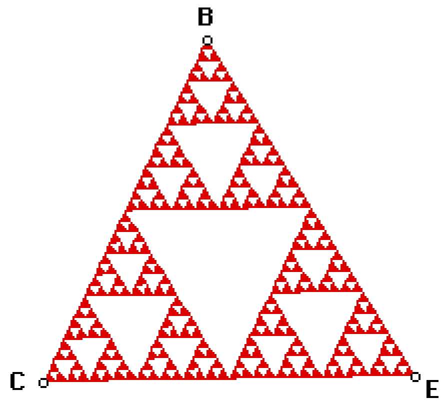


2da iteración

Dibuje la tercera iteración y describa cómo la hizo.

Extensiones

Describa cómo usted generaría el triángulo de Sierpinski mostrado abajo.



23. La Fila Siguiente

¿Termine la fila ???? en este problema. Explique cómo encontró la solución.

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

??????????????

24. ¿Que sigue?

Determine el valor siguiente en la secuencia: ¿900, 945, 1030, 1115, 1200???

Explique su razonamiento.

RECOMENDACIONES

1) Los problemas planteados en el presente seminario, deben ser aplicados en una Institución Educativa, esto con el fin de ver el grado de aceptación que tienen y la compresión del lenguaje y de las actividades planteadas.

2) Los profesores son los responsables de escoger los problemas que más se adecuen al contexto en el cual están trabajando y a las necesidades que se tengan al plantear el problema.

3) Los problemas se pueden modificar y adecuar al contexto, no son una camisa de fuerza para los profesores.

4) Es conveniente que los problemas que únicamente están planteados, se les adicione la información relacionada con: ¿Sobre qué es el problema?, objetivos, recursos, resultados específicos de aprendizaje, extensión del problema y la solución.

5) Los profesores pueden diseñar sus propios problemas para trabajar con ellos el enfoque de resolución de problemas.

6) Es importante practicar y dar a conocer el enfoque de resolución de problemas a aquellas personas que de una u otra forma están involucradas con la enseñanza y el aprendizaje de las personas.

ANEXO
PROPUESTA PARA UN CURSO DE CAPACITACIÓN

A continuación presentamos un proyecto para realizar un curso de capacitación para profesores en ejercicio y estudiantes de licenciatura.

Curso de Capacitación
"Pensamiento Variacional"

Orientadores
William Solarte Castillo, Carlos Trujillo Solarte
Grupo "Formulación y Solución de Problemas"
Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas

Objetivo general
Capacitar docentes en ejercicio para tener recurso humano habilitado en los aspectos relevantes sugeridos por el programa de investigación y desarrollo "Formulación y Solución de Problemas: una estrategia metodológica para el diseño curricular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas", para aplicarlos en la práctica educativa diaria del salón de clase.

Objetivos específicos
Diseñar materiales educativos, relacionados con el pensamiento variacional, acordes con los lineamientos curriculares, los estándares básicos de matemáticas, y con cada uno de los proyectos educativos institucionales.

Identificar las diferentes fases y estrategias propias del proceso de resolución de problemas, para colaborar en la formación de ciudadanos críticos y autónomos ante la toma de decisiones en su diario vivir.

PLAN DE ACTIVIDADES EN LA CAPACITACIÓN

PRESENTACIÓN Y NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

Presentación de los Participantes
Problemas para trabajar en grupos
Presentación de soluciones o intentos de soluciones
Presentación del curso
Contenido, Actividades, Metodología, Evaluación
Preguntas y Sugerencias

Taller 1. Preconceptos
Matemáticas. Quehacer matemático, educación matemática, ejercicios y problemas, Trabajo en grupo. Desarrollo y socialización.

Conversatorio 1. Naturaleza de las Matemáticas.
Presentación. Preguntas y Discusión.

Actividades complementarias
Pensamiento Variacional
Lineamientos curriculares de Matemáticas
Estándares Básicos de Matemáticas

FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

Taller 2. Clases tradicionales.

Presentación de tres clases para temas específicos.

Esquema general: papel del profesor, papel del estudiante, el aula de clase.

Discusión y análisis.

Conversatorio2. Enseñaza de las matemáticas a través de resolución de problemas

Presentación. Preguntas y Discusión.

Actividades complementarias

Lecturas seleccionadas de la bibliografía

Conversatorio 3. Clases basadas en la estrategia sugerida por el grupo

Presentación de tres clases para temas específicos.

Esquema general: papel del profesor, papel del estudiante, el aula de clase.

Discusión y análisis.

FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS 2.

Coversatorio 4. El Proceso de Resolución de Problemas

Concepto y clases de problemas.

Etapas de la Resolución de problemas.

Taller 4: Ejercicios y Problemas

Trabajo en grupos: desarrollo y socialización

Conversatorio 5. Generalidades sobre estrategias de resolución de problemas

Presentación. Preguntas y discusión.

Actividades complementarias

Diseñar y resolver algunos problemas aplicando las etapas anteriormente expuestas.

Lecturas seleccionadas de la bibliografía

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 1)

Taller 5: Formulación y solución de problemas (parte1)

Trabajo en grupos: Desarrollo y socialización

Conversatorio 6. Algunas Estrategias para resolver problemas

Presentación. Preguntas y discusión.

Taller 6: Formulación y solución de problemas (parte 2)

Trabajo en grupos: Desarrollo y socialización

Actividades complementarias

Formular y resolver un problema atendiendo a los requisitos de los conversatorios

Lecturas seleccionadas de la bibliografía

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 2)

Conversatorio 7. ¿Qué es enseñanza de las matemáticas a través de resolución de problemas?
Presentación. Preguntas y discusión.

Taller 7: Preparación de actividades de aula (parte 1)
Presentación. Preguntas y discusión.

Actividades complementarias
Lecturas seleccionadas de la bibliografía

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 3)

Conversatorio 8. Resolución de problemas y enseñanza de valores.
Presentación. Preguntas y discusión.

Taller 8: Preparación de actividades de aula (parte 2)
Presentación. Preguntas y discusión.

Actividades complementarias

Lecturas seleccionadas de la bibliografía

DISEÑO DE MATERIAL EDUCATIVO

Elaboración de proyectos de aula

Ejemplos de clases basadas en propuesta metodológica.

De acuerdo con algunos de los temas que le corresponderá orientar, seleccionar o diseñar problemas partir de los cuales desarrollará sus clases.

Elaborar un proyecto a ejecutar en un tiempo establecido.

Presentación de los proyectos en el grupo.

Experimentación de los proyectos de aula

Ejecutar el proyecto y elaborar informe, de acuerdo con las sugerencias.

Presentar por escrito una planeación sobre cada una de las clases.

Informar sobre el desarrollo de cada una de sus clases.

Observaciones y conclusiones: recoger opiniones de sus estudiantes.

Presentación del informe final

CONTENIDOS

Introducción general

Lineamientos curriculares y estándares básicos de matemáticas
Aspectos relacionados con la formulación y resolución de problemas, y el pensamiento variacional.
Concepción sobre matemáticas y quehacer matemático

Concepto y clases de problemas

El proceso de resolución de problemas
Enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas

Selección y el diseño de buenos problemas
Estudio de casos y conclusiones. Talleres experimentales.
Temas y lecturas complementarias.

METODOLOGÍA

La formulación y solución de problemas contribuye a la formación del profesorado de Matemática, al mejoramiento de su desempeño profesional, y a adquirir la capacidad de enfrentar con independencia y creatividad los retos de la enseñanza de la matemática.

La presencia de las limitaciones relacionadas con la resolución y formulación de problemas de la Matemática, como medio de enseñanza y herramienta de trabajo para elevar la eficiencia del aprendizaje es un problema complejo, de actualidad e interés para la comunidad de educadores matemáticos y población en general, las limitaciones ya señaladas, tienen una amplia repercusión en el aprendizaje de la matemática, por tal motivo, la búsqueda de alternativas de solución se convierte en una tarea de primer orden para los encargados de la formación del profesorado de Matemática.

Hay la necesidad de formar un profesor de Matemática capaz de dirigir un proceso educativo de la matemática que contribuya al desarrollo intelectual y educación de los estudiantes y a encontrar soluciones creadoras a través de la formulación y solución de problemas.

Es necesario preparar a los estudiantes para que utilicen estrategias generales y específicas para resolver problemas pertenecientes a las diferentes ramas de la Matemática, resolución de problemas no matemáticos mediante la utilización de modelos matemáticos, expresar ideas matemáticas de forma oral y escrita, elaborar y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos, identificar y generar ejemplos y contraejemplos así como utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar relaciones

Todos estos objetivos expresan la necesidad de preparar un profesor de Matemática, capaz de dirigir un proceso educativo de la Matemática en los niveles de enseñanza básica y media en el cual se potencie la preparación de los estudiantes para aprender a formular y resolver problemas, comunicarse mediante las matemáticas y razonar matemáticamente.

En esta dimensión la estrategia de trabajo se vincula a la formulación y solución de problemas, este método exige entre los aspectos fundamentales, la necesidad de plantear problemas con las expresiones adecuadas, conocer diferentes estrategias para resolver y formular problemas, comprender las implicaciones matemáticas de un problema, trabajar en grupo para encontrar la solución de un problema y estar preparado para resolver problemas abiertos, pues la mayoría de los problemas reales no están bien formulados.

La metodología de trabajo se inicia con intervenciones o conferencias por parte de los integrantes del grupo y de algunos participantes, y se basa en la estrategia de seminario. Cada reunión de trabajo tendrá un grupo responsable de la misma (ponentes) que elaborarán la ponencia y otro grupo encargado del protocolo o acta de la reunión. La evaluación se fundamentará en los informes escritos del protocolo, actas, ponencias y talleres relacionados con la temática considerada.

BIBLIOGRAFÍA

[ACM] Asociación Colombiana de Matemática Educativa. Estándares Curriculares – Área de Matemáticas. Aportes Para el Análisis.

[CDL] CAMPO FLOR, Adriana; DAZA Edgar Oswaldo y LOPEZ MANZANO Yimi Javier. Diseño De Problemas Para la Enseñanza de la Teoría De Números en los Grados Sexto a Noveno. Popayán, 2003. Informe Seminario de Grado (Licenciados en Educación con especialidad en Matemáticas). Universidad del Cauca. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas de la Educación. Departamento de Matemáticas.

[FOR1] TRUJILLO, Carlos Alberto et al. "Formulación y Resolución de Problemas una Estrategia Metodológica para el Diseño Curricular, la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas". Programa de Investigación y Desarrollo, Universidad del Cauca, Código VRI ID 711, Febrero de 2002.

[GM1] De Guzmán Miguel. "Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias innovadoras en la educación matemática".
http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

[INM] Intermath
http://www.intermath-uga.gatech.edu/

[MEN1] Ministerio de Educación Nacional. "Lineamientos Curriculares de Matemáticas". Bogotá, 1998.

[MEN2] Ministerio de Educación Nacional. "Estándares Básicos de Matemáticas, Mayo de 2002".

[MEN3] Ministerio de Educación Nacional. Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas". Mayo de 2002

[MEN4] Ministerio de Educación Nacional.
www.mineducacion.gov.co

[MED4] MENDES, Alexandra. Diseño de problemas para la enseñanza del pensamiento geométrico en el grado sexto. Popayán 2004. Informe Seminario de Grado (Licenciados en Educación con especialidad en Matemáticas). Universidad del Cauca. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas de la Educación. Departamento de Matemáticas.

[POL] POLYA, George. "Como plantear y resolver problemas". Editorial Trillas, Serie de matemáticas. Vigésimo cuarta reimpresión, Enero 2000.

[PR] Problems Resolving
http://www.nzmaths.co.nz

[ST1] SANTOS TRIGO, Luz Manuel. "Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes". CINVESTAN – IPN, México.

[TR1] TRUJILLO SOLARTE, Carlos Alberto. "Currículo Matemático y Resolución de Problemas". Conferencia, Primer Encuentro de Educación Matemática, ERM, Universidad del Quindío, Armenia, 2003.