

**DGPad como medio para conceptualizar la relación entre los registros de representación
algebraico y gráfico de la función cuadrática**

Autores:

Mary Jarley Soler Garzón

Mireya García Daza

Dirigido por:

Martín Eduardo Acosta Gempeler

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación.

Proyecto Curricular: Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas

Bogotá D.C.

Mayo de 2018

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	4
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
ANTECEDENTES.....	6
La conversión entre registros semióticos y la enseñanza de las funciones.....	7
Uso de tecnologías para el trabajo de conversión entre registros semióticos.....	8
La enseñanza de la función cuadrática.....	10
OBJETIVO GENERAL.....	11
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:	11
METODOLOGÍA	12
MARCO TEÓRICO	12
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	13
TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS	14
REPRESENTACIONES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA	16
ANÁLISIS A PRIORI.....	18
PRIMERA SERIE: CONVERSIÓN DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GRÁFICO.....	19
Actividad de modificación del parámetro c	19
Actividad de modificación del parámetro b	22
Actividad de modificación del parámetro a	26
Actividades de modificación simultánea de los parámetros b y c y de modificación simultánea de los parámetros a , b y c	29
SEGUNDA SERIE: CONVERSIÓN DEL REGISTRO GRÁFICO AL ALGEBRAICO.....	29
Actividad de modificación de la ordenada del vértice.....	29
Actividad de modificación de la abscisa del vértice.....	33
Actividad de modificación de la amplitud.....	36
Actividades de modificación simultánea de la abscisa y la ordenada del vértice y modificación simultánea del vértice y la amplitud.....	40
CONCLUSIÓN DEL ANÁLISIS A PRIORI	40
ANÁLISIS DEL PILOTAJE	40
PRIMERA SERIE: CONVERSIÓN DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GRÁFICO	41
Actividad de modificación del parámetro c	41
Actividad de modificación del parámetro b	44
Actividad de modificación del parámetro a cantidades enteras	50
Actividad de modificación del parámetro a cantidades decimales	55

Actividad de modificación de los parámetros c y b	59
Actividad de modificación de los parámetros a , b y c	61
SEGUNDA SERIE CONVERSIÓN DEL REGISTRO GRÁFICO AL ALGEBRAICO.....	66
Actividad de modificación de la abscisa del vértice.....	69
Actividad de modificación de la amplitud.....	71
Actividad de modificación de la abscisa y la ordenada del vértice.....	74
Actividad de modificación de la posición del vértice y de la amplitud	76
CONCLUSIONES DEL PILOTAJE	76
OBSERVACIONES PARA LA MODIFICACION DEL DISEÑO	77
CONCLUSIONES GENERALES	77
Proyecciones y recomendaciones.....	78
BIBLIOGRAFIA.....	¡Error! Marcador no definido.

Introducción

Este trabajo de grado nace a partir del trabajo de Cárdenas y Pinzón (2016), quienes proponen actividades para la construcción de las relaciones entre la representación gráfica y la representación geométrica de las funciones lineales, aprovechando el potencial del software CaRMetal para promover la construcción del conocimiento matemático a través de la interacción de los estudiantes con objetos matemáticos representados en la pantalla del computador.

Proponemos dos adaptaciones del trabajo de Cárdenas y Pinzón: la utilización del software DGPad, software gratuito diseñado específicamente para dispositivos táctiles, que permite la publicación de actividades en internet y el trabajo sobre funciones cuadráticas. Nuestro proyecto se basa en dos marcos teóricos diferentes: la teoría de Duval sobre las representaciones semióticas y la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. El trabajo incluye el diseño y el análisis a priori de situaciones a-didácticas para el aprendizaje de las relaciones entre las representaciones algebraicas y las representaciones gráficas de la función cuadrática utilizando DGPad como medio, así como un pilotaje de control sobre ese diseño y análisis a priori.

Estas actividades se plantean para responder a lo propuesto por el MEN (2006) en los estándares básicos de competencias en matemáticas para los grados 8 y 9:

- *“Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.*
(pág. 87)
- *“Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construir la relación gráfica y ecuación”.* (pág. 87)

Estos estándares obedecen al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Las actividades propuestas en este trabajo pretenden lograr el estándar mencionado, proponiendo que el estudiante experimente realizando cambios en uno de los registros y observando el efecto de esos cambios en el otro, para luego anticipar los efectos del cambio.

Planteamiento Del Problema

Dentro del currículo de matemáticas de educación secundaria un concepto fundamental es el de función. Para la comprensión de dicho concepto es necesario desarrollar habilidades de relación de diferentes representaciones semióticas de las funciones. Por eso dentro de los estándares básicos de competencias de 8 y 9 se plantea: *“Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construir la relación gráfica y ecuación”*. *“Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.* (pág. 87). Según lo que hemos podido observar en nuestras prácticas, los estudiantes tienen dificultades para establecer esas relaciones: al pedirles que construyan la representación gráfica de una función conociendo su ecuación, usualmente lo que hacen es tabular, representar parejas ordenadas en el plano cartesiano y unir los puntos; y al pedir que escriban la ecuación de una función conociendo su gráfica, simplemente no saben hacerlo debido a la falta de conceptualización de dichas relaciones. Por esto es importante desarrollar propuestas de enseñanza para propiciar el desarrollo de esas habilidades y la comprensión del concepto de función.

El software matemático es una herramienta que puede presentar simultáneamente diferentes representaciones semióticas de una función y en el cual pueden realizarse experimentos de

modificación de una representación semiótica para observar los cambios en las otras. Esa es la idea fundamental del trabajo realizado por Cárdenas y Pinzón (2016), quienes plantean una serie de actividades para que los estudiantes logren establecer las relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función lineal.

A partir de esto, surge la pregunta:

¿Cómo aprovechar el potencial del software DGPad para construir la relación entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función cuadrática?

Antecedentes

Para la realización de este trabajo revisamos una tesis de pregrado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, donde proponen una serie de actividades para que los estudiantes logren la conversión entre los registros algebraico y gráfico de la función lineal, usando como medio un software de geometría dinámica propuesto por Cárdenas y Pinzón (2016); una tesis de maestría de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán de Honduras, sobre la interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, realizado por Rivera (2009); un artículo de la revista Mediática y TIC de Gatica y Ares (2012) sobre la importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos y una ponencia de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) del Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe organizado por la Universidad del Litoral, sobre las dificultades que presentan los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Estos documentos tratan sobre 3 temáticas centrales: 1) La conversión entre registros semióticos y la enseñanza de las funciones 2) El uso de las tecnologías para el trabajo de conversión entre registros semióticos 3) La enseñanza de la función cuadrática. A

continuación, presentamos un resumen de los principales aspectos tratados en esos documentos que pueden aportar a la comprensión de la problemática tratada y al desarrollo de nuestro trabajo.

La conversión entre registros semióticos y la enseñanza de las funciones

Rivera (2009) afirma que la semiótica es considerada como la ciencia de los signos y los signos son los elementos fundamentales de toda actividad cognoscitiva; al momento de estudiar un objeto matemático es importante revisar una variedad de sistemas de representación. Citando a Duval (1999), afirma que la actividad matemática supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos, por lo que se necesita la movilización de diferentes sistemas de representación de un mismo objeto, que permita el funcionamiento cognitivo del individuo y así la comprensión matemática.

Citando a Yerushalmy y Schwartz (1993), este autor afirma que las distintas representaciones de un mismo objeto pueden transmitir informaciones diferentes y por lo tanto hay que considerar cuál representación es la más conveniente para una tarea concreta. Propone cuatro clases de representaciones asociadas al concepto de función: expresión verbal, tabla, gráfica, y expresión analítica. Cada una de estas representaciones pone en juego diferentes procesos cognitivos estrechamente relacionados con la información que contienen. La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística y es básica para interpretar o relacionar las otras tres; la representación gráfica permite la conceptualización a partir de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; la representación tabular se relaciona con el pensamiento numérico; y la representación analítica se relaciona con el álgebra y potencia la habilidad analítica.

Para Rivera, el aprendizaje de un objeto matemático se produce a través de la experiencia: interactuando con las diferentes representaciones del mismo se pueden visualizar diferentes propiedades e interiorizar el concepto.

Gatica y Ares (2012) afirman que para los estudiantes no es nada fácil estudiar una función a partir de una sola representación, ya que no logran hacer las articulaciones necesarias entre las diferentes representaciones. Cada representación muestra diferentes características de un mismo objeto; por ejemplo, la tabla muestra valores puntuales y la gráfica muestra el comportamiento de los datos. Por lo tanto, son necesarias las distintas representaciones para conceptualizar el concepto de función. Visualizar diferentes registros de representación de un mismo objeto puede ser un medio para comprender el objeto matemático y lograr representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar la información sobre la función.

En conclusión, según lo afirmado por los anteriores autores, manipular cada una de las representaciones permite al estudiante reconocer diversas propiedades de un objeto matemático, sin reducir el concepto a una sola representación. Se deben generar actividades encaminadas a la identificación y articulación de diferentes representaciones de las funciones.

Uso de tecnologías para el trabajo de conversión entre registros semióticos

Cárdenas y Pinzón (2016) proponen en su trabajo una serie de actividades para trabajar con estudiantes de noveno grado la conversión entre el registro gráfico y el registro algebraico de representaciones de la función lineal usando como medio el software de geometría dinámica CaRMetal.

Citan a Guzmán (1993), quien afirma que cuando el profesor decide diseñar e incorporar actividades usando nuevas tecnologías debe tener en cuenta las cuestiones o problemas

propuestos en clase que den sentido al conocimiento que están construyendo los alumnos; así se decide cuáles serán las tareas a delegar a las nuevas tecnologías y cómo el uso de estas permite centrar el trabajo en la solución de los problemas propuestos, probando conjeturas y no como una actividad meramente mecánica.

Presentan el diseño de una secuencia de actividades interactivas para promover en los estudiantes las conversiones entre los registros gráfico y algebraico de la función lineal, en búsqueda del aprendizaje por adaptación (Brousseau 1986), a partir de las retroacciones matemáticas que fueron programadas en el software CaRMetal.

Aprovechan la posibilidad de presentar simultáneamente representaciones algebraicas y gráficas en la pantalla para solicitar a los estudiantes que obtengan modificaciones en la representación gráfica a partir de la manipulación de la representación algebraica y viceversa. Las actividades comprenden una fase de experimentación en la que los alumnos construyen conocimientos relativos a las relaciones entre las dos representaciones y una fase de anticipación en la que los alumnos deben predecir el cambio que tendrá una representación al modificar la otra.

Rivera (2009) considera que el software de geometría dinámica permite un papel activo del estudiante en la construcción de su conocimiento. Además, por ser una herramienta que facilita la conversión entre representaciones con rapidez y exactitud, permite la manipulación y simultáneamente la visualización de lo que ocurre en ambas representaciones, potenciando la coordinación entre diferentes registros de representación y la construcción de significados de la función cuadrática. Gracias a la manipulación de las representaciones, los estudiantes pueden establecer conjeturas, conexiones entre representaciones, descubrir características e identificar patrones que difícilmente se pueden establecer a partir del trabajo con lápiz y papel.

En conclusión, para proponer actividades incorporando la tecnología es necesario ir más allá de la ejercitación de procesos y/o repetir lo realizado con lápiz y papel; se debe reconocer cómo se construye el conocimiento de los estudiantes, se debe pensar en cómo la interacción con un software permite que el estudiante reflexione sobre sus acciones y de esta manera construya conocimiento. El uso de la tecnología para construir un conocimiento útil sobre los objetos matemáticos se puede dar a partir de la visualización, realizando un análisis de las relaciones entre los registros gráfico y algebraico.

La enseñanza de la función cuadrática.

Para Gatica y Ares (2012) si la enseñanza de las funciones se centra en el registro algebraico dejando de lado las demás representaciones, se impide la exploración, comprobación y refutación de hipótesis en la solución de problemas y la visualización de diversas propiedades, así como la coordinación entre las representaciones.

Díaz, Haye, Montenegro, y Córdoba, (2013) realizaron un estudio sobre las dificultades que presentan los estudiantes para realizar la conversión entre la representación gráfica y la representación algebraica de la función cuadrática. Para dicho estudio proponen 2 actividades a 109 estudiantes de primeros semestres de ingeniería; les piden a los estudiantes a partir de la representación algebraica de la forma polinómica, dibujar la gráfica correspondiente: además, a partir de una gráfica proponer la ecuación polinómica correspondiente. Con estas actividades, establecieron que las mayores dificultades que enfrentan los estudiantes al momento de relacionar la representación gráfica y la representación algebraica de la forma polinómica de la función cuadrática, es establecer la conexión entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola y establecer el coeficiente del término cuadrático a partir de la

observación de la gráfica. Además, concluyen que los problemas de conversión entre los dos registros se evidencian con mayor fuerza cuando el registro de partida es el gráfico.

Como conclusión de lo aportado por Gatica, Ares, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba, en la enseñanza de la función cuadrática es importante trabajar diferentes representaciones relacionándolas entre sí, lo cual permite que los estudiantes puedan realizar la conversión entre un registro y otro, reconociendo diferentes propiedades de la función cuadrática.

Objetivo General

Diseñar actividades para estudiantes de grado noveno que contribuyan a la comprensión de la función cuadrática por medio de la coordinación de sus representaciones gráfica y algebraica, usando como medio el software DGPad.

Objetivos Específicos:

- Aprovechar el potencial del software DGPad para relacionar las representaciones gráficas y algebraicas de funciones cuadráticas para proponer tareas de conversión entre estos sistemas de representación.
- Aprovechar las retroacciones matemáticas y didácticas del software DGPad para proponer actividades que produzcan un aprendizaje por adaptación.
- Adaptar las actividades formuladas por Cárdenas y Pinzón (2016), con funciones cuadráticas en el software DGPad.

Metodología

La metodología empleada es la ingeniería didáctica. Según Artigue (1995), esta metodología está caracterizada por un esquema experimental basado en el diseño, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; la cual se ubica en el registro de estudios de caso y su validación se basa en la confrontación entre un análisis a priori y un análisis a posteriori.

La ingeniería didáctica se desarrolla en cuatro fases:

- Análisis preliminares: aquí se analiza el campo epistemológico, la enseñanza tradicional, las concepciones de los estudiantes, sus obstáculos y dificultades con respecto al objeto de enseñanza a tratar.
- Diseño y análisis a priori: aquí se actúa sobre un determinado número de variables pertinentes con relación al problema de estudio, para organizar una secuencia de enseñanza.
- Experimentación: Se realiza la explicitación de objetivos, la aplicación de la investigación y un registro de observaciones.
- Análisis a posteriori y validación: Se confrontan las hipótesis del análisis a priori con los comportamientos efectivamente observados durante la experimentación.

Para el caso de este trabajo sólo se llevarán a cabo las dos primeras fases: los análisis preliminares, y el diseño y análisis a priori.

Marco Teórico

Para la realización de este proyecto de grado, se toman como referentes teóricos a Duval (2004) quien hace referencia a la utilización de los registros semióticos y su implicación en el aprendizaje de conceptos matemáticos y Brousseau (1986) para analizar la interacción de los

estudiantes con el software. Además, se realiza una revisión de las representaciones de la función cuadrática, enfatizando en la relación existente entre la representación gráfica y la algebraica.

Representaciones semióticas

Duval (2004) establece que el aprendizaje de las matemáticas debe estar ligado al reconocimiento de los objetos matemáticos que solo son accesibles a través de sus representaciones semióticas. Estas representaciones no solo cumplen la función de comunicación; también permiten realizar un tratamiento de la información junto a la toma de conciencia sobre los objetos matemáticos.

Dado que los objetos matemáticos son abstractos y que su existencia se visualiza a partir de signos, es indispensable que el estudiante pueda reconocer un objeto matemático en más de un sistema de representación. Para este reconocimiento, Duval propone 3 actividades cognitivas que deben permitir los sistemas semióticos:

1. Se debe hacer uso de signos para constituir una marca que pueda ser identificada como la representación de alguna cosa.
2. Se manipula la representación usando reglas propias del sistema, obteniendo otra representación dentro del mismo sistema. (Tratamiento).
3. Se transforma una representación producida en un sistema, a una representación de otro sistema que exprese otras significaciones de lo representado. (Conversión).

Las representaciones, afirma Duval (2004), no deben confundirse con los objetos mismos; se debe establecer la diferenciación entre representante y representado. Esta diferenciación está asociada a la comprensión conceptual del objeto matemático y se logra comparando representaciones de diferente naturaleza.

Por lo anterior, es claro que el estudiante debe reconocer un objeto matemático a través de sus representaciones en por lo menos dos registros semióticos diferentes; debe tener la capacidad de articularlos entre sí, pasando de uno al otro sin problemas, reconociendo cada una de las representaciones como diferentes representantes del objeto.

En conclusión, si buscamos que los estudiantes tengan acceso al objeto función cuadrática, es necesario plantear un trabajo donde el estudiante tenga la oportunidad de visualizar y manipular representaciones de este objeto en por lo menos dos registros diferentes (para este trabajo elegimos el registro algebraico y el registro gráfico). El software DGPad permite visualizar simultáneamente el registro algebraico y el registro gráfico, y al manipular las representaciones en uno de esos registros se puede observar lo que sucede en el otro registro, lo cual permite que el estudiante reflexione sobre las relaciones entre ambos registros y su congruencia.

Teoría de situaciones didácticas

Por otro lado, en la Teoría de Situaciones Didácticas Brousseau (1986), describe el aprendizaje como un proceso de adaptación de un sujeto a un medio con el cual interactúa y que le opone resistencias que producen contradicciones, dificultades y desequilibrios.

Para Acosta, Monroy y Rueda (2010) la interacción sujeto-medio está compuesta por 5 elementos:

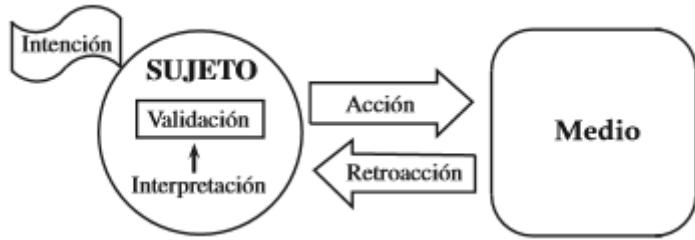


Ilustración 1 Aprendizaje por adaptación

Tomado de Acosta, Monroy y Rueda (2010)

El sujeto tiene una *intención*, una necesidad u objetivo. Para alcanzar esa intención realiza una *acción* sobre el medio, el medio reacciona ante la acción del sujeto, lo cual se denomina *retroacción*. El sujeto *interpreta* la retroacción y procede a juzgar la pertinencia de su acción con respecto a su intención, es decir *valida* o invalida la acción. Si el sujeto decide que su acción no alcanza lo que él quería, decide realizar otra acción con lo cual se inicia de nuevo el ciclo de interacción. Si por el contrario decide que su acción alcanza lo que él quería, vuelve a efectuarla y la refuerza.

Según Brousseau (citado por Acosta, Monroy y Rueda) el docente puede moldear el medio para lograr el aprendizaje de los conceptos matemáticos en sus estudiantes. Para esto debe tener presente que el medio debe ser exterior al alumno, el sujeto debe poder realizar acciones sobre el medio, el medio debe reaccionar ante las acciones del sujeto y por último el medio debe tener restricciones en las acciones: no todas las acciones deben ser posibles.

Para el diseño de las actividades se hace uso del software DGPad para construir un medio con el cual el estudiante pueda interactuar para aprender por adaptación algunas características del objeto función cuadrática. Dicho medio debe estar compuesto por representaciones del objeto función cuadrática en el registro algebraico y en el registro gráfico. El estudiante podrá realizar

acciones sobre uno de los registros, pero el problema le solicitará realizar cambios en el otro registro. Todos los cambios que realice el estudiante en el registro al que tiene acceso, producirán también cambios correspondientes en las representaciones del otro registro. De esta manera, el estudiante podrá inferir las reglas que regulan esos cambios.

Representaciones de una función cuadrática

Según Stewart (2012) una función cuadrática es una función polinómica de grado 2, es decir de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

La gráfica de cualquier función cuadrática es una parábola.

En cuanto a la representación algebraica se tienen 3 formas:

- **Forma polinómica:** Esta es la forma de expresarla por medio de un polinomio:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- **Forma factorizada:** Esta expresión se usa para obtener las raíces de la función:

$$f(x) = a(x - m)(x - n)$$

En la forma factorizada a es el factor común por ser el coeficiente principal de la función. El valor de a puede ser uno, caso en el cual puede omitirse en la forma factorizada. Cuando $m = n$, a m se le denomina raíz doble, debido a su orden de multiplicidad que es 2 y se podrá escribir como:

$$f(x) = a(x - m)^2$$

- **Forma canónica:** todas las funciones cuadráticas se pueden expresar por medio de un binomio:

$$f(x) = a(x + b)^2 + c$$

En la forma canónica a es el coeficiente principal, el par ordenado $(-b, c)$ corresponde a las coordenadas del vértice de la parábola.

Las tres formas de la ecuación de una función cuadrática son equivalentes, y pueden obtenerse unas a partir de las otras.

Para este trabajo se usará la forma canónica, debido a que es en esta forma que tienen sentido gráfico los parámetros de la expresión, como se explica a continuación.

- a está directamente relacionado con la amplitud de la parábola:

Con $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba. Es decir, el vértice de la parábola corresponde a un punto mínimo: la gráfica decrece en el intervalo a la izquierda del vértice y crece en el intervalo a la derecha del vértice.

- Al aumentar el valor de a , la amplitud de la parábola disminuye. Es decir, la gráfica “se cierra” alrededor de su eje de simetría.
- Al disminuir el valor de a , la amplitud de la parábola aumenta. Es decir, la gráfica “se abre” alrededor de su eje de simetría.

Con $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo. Es decir, el vértice de la parábola es un punto máximo: la gráfica es creciente en el intervalo a la izquierda del vértice y decreciente en el intervalo a la derecha del vértice.

- Al aumentar el valor de a , la amplitud de la parábola aumenta

- Al disminuir el valor de a , la amplitud de la parábola disminuye.

Esta variación se debe a la tasa de crecimiento de la función: entre mayor sea el valor de a , la amplitud de la parábola disminuirá, porque los valores de $f(x)$ aumentaran más rápido con respecto a los valores de x .

- **-b** es el valor de la abscisa del vértice.
 - Al aumentar el valor de b , la parábola se mueve horizontalmente hacia la izquierda.
 - Al disminuir el valor de b , la parábola se mueve horizontalmente hacia la derecha.

Esta variación se debe a que el valor de $f(x-b)$ en x es el mismo valor de $f(x)$ en $x-b$. Puesto que $x - b$ está b unidades a la izquierda de x , se deduce que la gráfica de $y=f(x-b)$, es la gráfica de $y=f(x)$ desplazada a la derecha b unidades.

- **c** es el valor de la ordenada del vértice.
 - Al aumentar el valor de c , la parábola se mueve verticalmente hacia arriba.
 - Al disminuir el valor de c , la parábola se mueve verticalmente hacia abajo.

Esta variación se debe a que el valor independiente de la representación algebraica, corresponde al punto donde corta la representación geométrica con el eje y.

Análisis A Priori

El diseño está organizado en dos series; en la primera, se realiza la conversión del registro algebraico al gráfico, y en la segunda se realiza la conversión del registro gráfico al algebraico. En cada serie se propone una tarea de experimentación (en la cual se permite a los estudiantes

modificar libremente uno de los parámetros en uno de los registros e identificar los efectos de estos cambios en el otro registro) y una tarea de anticipación (en la cual deben predecir el cambio que es necesario realizar en uno de los registros para obtener un efecto determinado en el otro).

Cada serie comprende 5 actividades: una para la manipulación del parámetro c, una para la manipulación del parámetro b, una para la manipulación del parámetro a, una para la manipulación simultánea de los parámetros b y c y una para la manipulación simultánea de los tres parámetros.

Primera serie: conversión del registro algebraico al gráfico

En el siguiente enlace se encuentras las actividades correspondientes a esta serie para ser implementadas:

<http://parabolas.atwebpages.com/vertexpalg.html>

Actividad de modificación del parámetro c

La primera actividad de esta serie relaciona el valor del parámetro "c" de la ecuación con el valor de la ordenada del vértice de la parábola. Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación gráfica de una parábola naranja; se le pide al estudiante que modifique el parámetro *c* de la ecuación para que la parábola verde quede superpuesta a la parábola naranja.

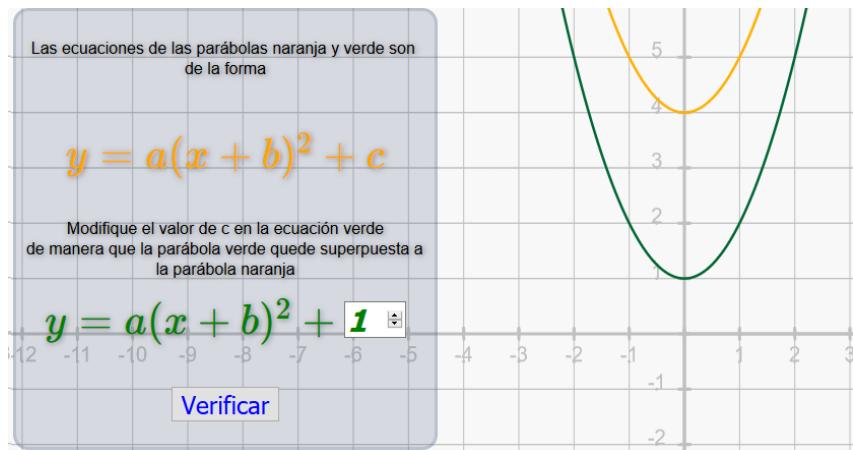


Ilustración 2 actividad sobre el parámetro c

Tarea de Experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta el parámetro c de la ecuación con una lista desplegable (tomando valores enteros entre -5 y 5), gracias a la cual el estudiante puede hacerlo variar. Todo cambio en el valor de c produce un cambio en la representación gráfica de la parábola verde. El estudiante puede entonces experimentar con distintos valores de c y observar los efectos de estos cambios en la ubicación de la parábola verde.

El vértice de las dos parábolas se encuentra sobre el eje de las ordenadas; al modificar el valor de c en la ecuación verde, cambia la ubicación de la parábola verde, es decir que el valor de la ordenada del vértice de la parábola verde corresponde al parámetro c .

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Modificar el valor de c a un valor que no corresponde a la ordenada del vértice de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.

2. Modificar el valor de c al valor correspondiente a la ordenada del vértice de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si las dos parábolas coinciden, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y la ordenada del vértice de la parábola naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La parábola verde todavía no está sobre la parábola naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre el parámetro c y la gráfica y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor del parámetro c con el valor de la ordenada del vértice de la parábola.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación. En esta tarea se representa el parámetro c de la ecuación con una casilla; de esta manera, el estudiante ya no podrá variar libremente el valor de c , sino que tendrá que pensar en un valor y escribirlo en la casilla.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Escribir en la casilla un valor de c que no corresponde a la ordenada del vértice de la parábola naranja.

2. Escribir en la casilla el valor de c correspondiente a la ordenada del vértice de la parábola naranja.

El software sólo emitirá retroacciones cuando se presione el botón *Verificar*. En ese momento se ocultará la casilla y aparecerá el valor escrito por el estudiante y simultáneamente la gráfica verde se modificará de manera que la ordenada de su vértice corresponda al valor escrito por el estudiante. Si las dos parábolas no coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción y aparece el botón *Intentar de nuevo*. Cuando el estudiante oprime este botón aparece nuevamente la casilla que le permite escribir otro valor. Si las dos parábolas coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja) le permite al estudiante validar su acción y aparece el botón *Siguiente* que lo llevará a un nuevo ejercicio, dando un nuevo valor al vértice de la parábola naranja y habilitando la casilla.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente *respuestas correctas / intentos realizados* > 1 se considera que el estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividad de modificación del parámetro b

Esta actividad relaciona el valor del parámetro "b" de la ecuación con el valor de la abscisa del vértice de la parábola. Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación gráfica de una parábola naranja

y se le pide al estudiante que modifique el parámetro b de la ecuación para que la parábola verde quede superpuesta a la parábola naranja.

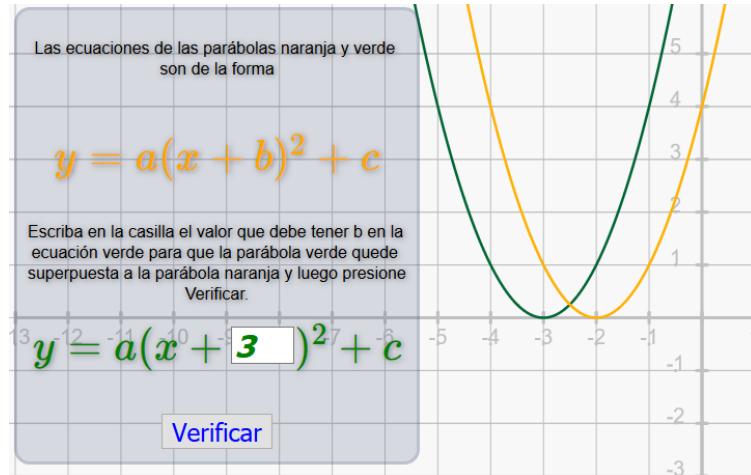


Ilustración 3 actividad sobre el parámetro b

Tarea de experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta el parámetro b de la ecuación con una lista desplegable (tomando valores enteros entre -13 y 13), gracias a la cual el estudiante puede hacerlo variar. Todo cambio en el valor de b produce un cambio en la representación gráfica de la parábola verde. El estudiante puede entonces experimentar con distintos valores de b y observar los efectos de estos cambios en la ubicación de la parábola verde.

El vértice de las dos parábolas se encuentra sobre el eje de las abscisas; al modificar el valor de b en la ecuación verde, cambia la ubicación de la parábola verde, es decir que el valor de la abscisa del vértice de la parábola verde corresponde a $-b$.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Modificar el valor de b a un valor que no corresponde al opuesto de la abscisa del vértice de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Modificar el valor de b al valor correspondiente al opuesto de la abscisa del vértice de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio podrá oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si las dos parábolas coinciden, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y la abscisa del vértice de la parábola naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La parábola verde todavía no está sobre la parábola naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre el parámetro b y la gráfica y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor del parámetro b con el valor de la abscisa del vértice de la parábola.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación. En esta tarea se representa el parámetro b de la ecuación con una casilla; de esta manera, el estudiante ya no podrá variar libremente el valor de b , sino que tendrá que pensar en un valor y escribirlo en la casilla.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Escribir en la casilla un valor de b que no corresponde al opuesto de la abscisa del vértice de la parábola naranja.
2. Escribir en la casilla el valor de b correspondiente al opuesto de la abscisa del vértice de la parábola naranja.

El software sólo emitirá retroacciones cuando se presione el botón *Verificar*. Al hacerlo se ocultará la casilla y aparecerá el valor escrito por el estudiante y simultáneamente la parábola verde cambiará de posición de manera que la abscisa de su vértice sea el opuesto de ese valor. Si los valores de las abscisas de los vértices de las dos parábolas no coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción y aparece el botón *Intentar de nuevo*. Al oprimir este botón aparece nuevamente la casilla y el estudiante podrá escribir un nuevo valor. Si los valores de las abscisas de los vértices de las dos parábolas coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja) le permite al estudiante validar su acción, y aparece el botón *Siguiente* que lo llevará a un nuevo ejercicio, dando un nuevo valor al vértice de la parábola naranja y habilitando la casilla.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente respuestas correctas / intentos realizados > 1 se considera que el estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividad de modificación del parámetro a

Esta actividad relaciona el valor del parámetro "a" de la ecuación con el valor de la amplitud de la parábola. Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación gráfica de una parábola naranja y se le pide al estudiante que modifique el parámetro a de la ecuación para que la parábola verde quede superpuesta a la parábola naranja. Esta actividad se divide en dos partes: la primera se realiza con valores enteros, de la misma manera que las anteriores, y la segunda se realiza con valores decimales, en la que se modifica el parámetro a cada 0.2 unidades, para que los estudiantes comprendan lo que ocurre con valores de a entre 0 y 1.

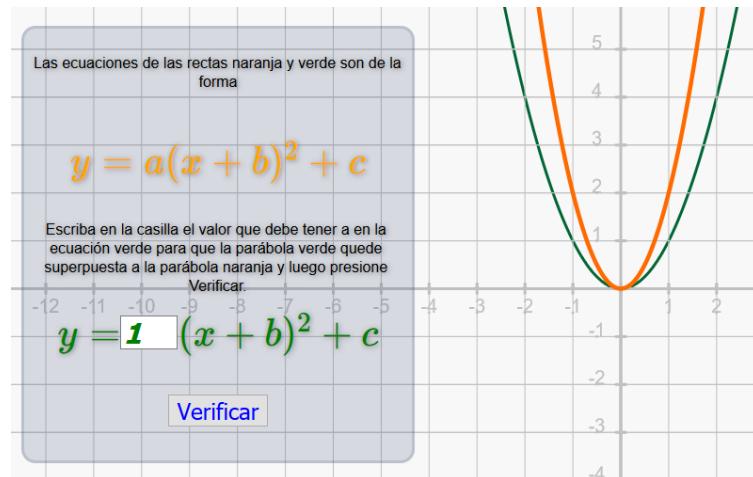


Ilustración 4 actividad sobre el parámetro a

Tarea de experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta el parámetro a de la ecuación con una lista desplegable (tomando valores enteros o decimales según el caso entre -5 y 5), gracias a la cual el estudiante puede hacerlo variar. Todo cambio en el valor de a produce un cambio en la representación gráfica de la parábola verde. El estudiante puede entonces experimentar con

distintos valores de a y observar los efectos de estos cambios en la ubicación de la parábola verde.

Las coordenadas del vértice de la parábola verde son $(-b, c)$. El punto de la parábola que puede servir de referencia al estudiante para construir la relación con el parámetro a de la ecuación es el punto $(-b + 1, c + a)$. Al modificar el valor de a en la ecuación verde, cambia la ordenada de ese punto, de manera que, si ese valor es positivo, la parábola es cóncava hacia arriba y es negativo la parábola es cóncava hacia abajo. Cuando aumenta el valor absoluto de a los brazos de la parábola “se acercan” al eje de simetría de la misma. Cuando disminuye el valor absoluto de a los brazos de la parábola “se alejan” del eje de simetría de la misma.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Modificar el valor de a a un valor que no corresponde a la amplitud de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Modificar el valor de a al valor correspondiente a la amplitud de la parábola naranja. En este caso, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio podrá oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si las dos parábolas coinciden, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y la amplitud de la parábola naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La parábola verde todavía no está sobre la parábola naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre el parámetro a y la gráfica y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor del parámetro a con el valor de la amplitud de la parábola.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación. En este ejercicio se representa el parámetro a de la ecuación con una casilla; de esta manera, el estudiante ya no podrá variar libremente el valor de a , sino que tendrá que pensar en un valor y escribirlo en la casilla.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Escribir en la casilla un valor de a que no corresponde a la amplitud del vértice de la parábola naranja.
2. Escribir en la casilla el valor de a correspondiente a la amplitud de la parábola naranja.

El software sólo emitirá retroacciones cuando se presione el botón *Verificar*. Al hacerlo se ocultará la casilla y aparecerá el valor escrito por el estudiante y simultáneamente la parábola verde se modificará, de manera que su amplitud corresponda a ese valor. Si los valores de la amplitud de las dos parábolas no coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda en una ubicación diferente a la parábola naranja) le permite al estudiante invalidar su acción y aparece el botón *Intentar de nuevo*. Al oprimir este botón aparece nuevamente la casilla y el estudiante podrá escribir un nuevo valor. Si los valores de la amplitud de las dos parábolas coinciden, la retroacción del software (la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja)

le permite al estudiante validar su acción, y aparece el botón *Siguiente* que lo llevará a un nuevo ejercicio, dando un nuevo valor a la amplitud de la parábola naranja y habilitando la casilla.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente respuestas correctas / intentos realizados > 1 se considera que el estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividades de modificación simultánea de los parámetros b y c y de modificación simultánea de los parámetros a , b y c

Estas actividades funcionan de la manera ya descrita, con la diferencia de que en cada ejercicio el estudiante debe modificar dos o tres parámetros simultáneamente, y la parábola verde se desplaza a cualquier lugar del plano.

Segunda serie: conversión del registro gráfico al algebraico.

En el siguiente enlace se encuentras las actividades correspondientes a esta serie para ser implementadas:
<http://fcuadratica.atwebpages.com/vertexpgra.html>

Actividad de modificación de la ordenada del vértice.

La primera actividad de esta serie relaciona la ordenada del vértice de la parábola con el valor del parámetro c . Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación algebraica de una parábola naranja y se pide al

estudiante que mueva el vértice de la parábola sobre el eje y para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja.

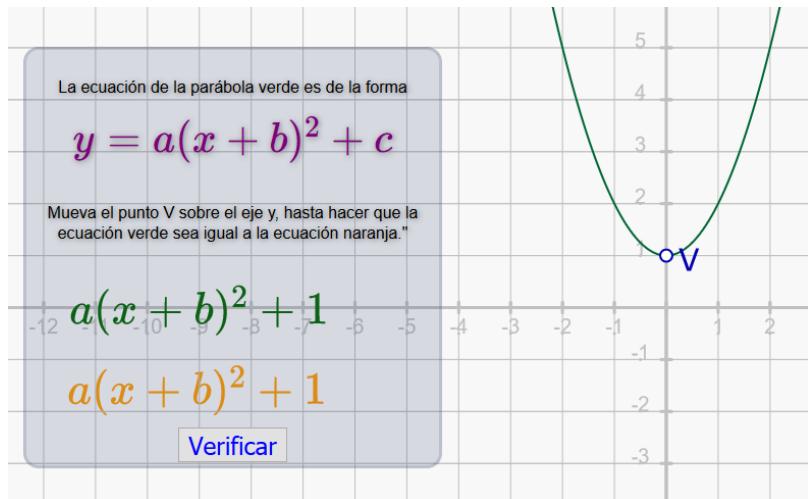


Ilustración 5 actividad sobre la ordenada del vértice

Tarea de experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta la parábola verde que el estudiante puede mover arrastrando su vértice sobre el eje y (tomando posiciones correspondientes a los valores enteros de la ordenada). Todo cambio en el vértice de la parábola produce un cambio en la ecuación verde. El estudiante puede entonces experimentar con distintas ubicaciones del vértice de la parábola y observar los efectos de estos cambios en la ecuación verde.

Al arrastrar el vértice de la parábola sobre el eje y, la ecuación verde cambia modificando el valor del parámetro c , es decir que el valor de la ordenada del vértice de la parábola verde corresponde al parámetro c .

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Arrastra el vértice de la parábola hasta una ubicación cuya ordenada no corresponde al valor del parámetro c de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Arrastrar el vértice de la parábola hasta una ubicación cuya ordenada corresponde al valor del parámetro c de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio podrá oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si la ordenada del vértice de la parábola coincide con el parámetro c de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro c de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y la ecuación y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor de la ordenada del vértice con el valor del parámetro c de la ecuación.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación, en la que deberá señalar el punto al que debe mover el vértice de la parábola para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja. El estudiante ya no podrá arrastrar el vértice de la parábola libremente, sino que tendrá que pensar en una ubicación

y seleccionarla. Cuando el estudiante selecciona un punto, el vértice de la parábola se desplaza a ese punto y la ecuación verde cambia de manera que el parámetro c corresponde a la ordenada del punto seleccionado.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Seleccionar una ubicación del vértice de la parábola cuya ordenada no corresponde al valor del parámetro c de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Seleccionar la ubicación del vértice de la parábola cuya ordenada corresponde al valor del parámetro c de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Para garantizar que el estudiante solo pueda mover la parábola sobre el eje y , y las coordenadas del vértice solo tomen valores enteros, se construyó una lista de puntos cuyas abscisas son igual a cero y cuyas ordenadas tienen valores enteros. El estudiante solo podrá seleccionar uno de los puntos de la lista (si selecciona un punto diferente el software no reaccionará). Cuando el estudiante haya seleccionado un punto aparece el botón *verificar*. Al oprimir este botón se emitirá como retroacción un mensaje; si la ordenada del vértice de la parábola coincide con el parámetro c de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro c de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente respuestas correctas / intentos realizados > 1 se considera que el estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividad de modificación de la abscisa del vértice.

Esta actividad relaciona la abscisa del vértice de la parábola con el opuesto del valor del parámetro b . Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación algebraica de una parábola naranja y se pide al estudiante que mueva el vértice de la parábola sobre el eje x para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja.

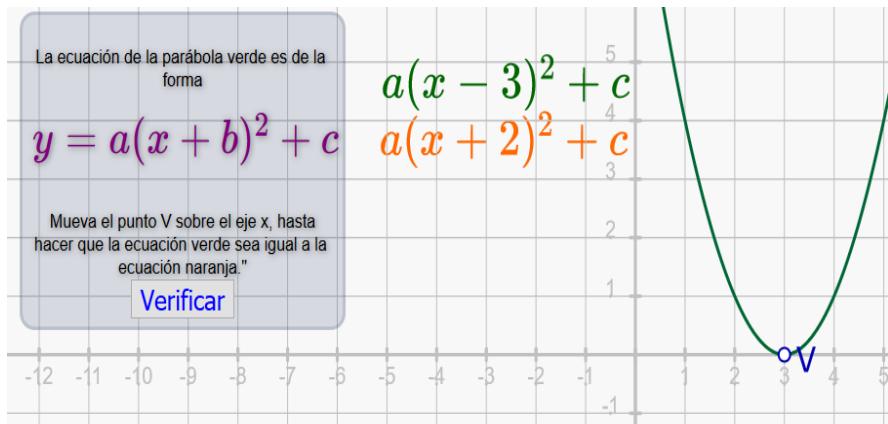


Ilustración 6 actividad sobre la abscisa del vértice

Tarea de experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta la parábola verde que el estudiante puede mover arrastrando su vértice sobre el eje x (tomando posiciones correspondientes a los valores enteros

de la abscisa) Todo cambio en el vértice de la parábola produce un cambio en la ecuación verde. El estudiante puede entonces experimentar con distintas ubicaciones del vértice de la parábola y observar los efectos de estos cambios en la ecuación verde.

Al arrastrar el vértice de la parábola sobre el eje x , la ecuación verde cambia modificando el valor del parámetro b , es decir que el valor de la abscisa del vértice de la parábola verde corresponde al opuesto de parámetro b .

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Arrastra el vértice de la parábola hasta una ubicación cuya abscisa no corresponde al opuesto del valor del parámetro b de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Arrastrar el vértice de la parábola hasta una ubicación cuya abscisa corresponde al opuesto del valor del parámetro b de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio podrá oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si la abscisa del vértice de la parábola es el opuesto del parámetro b de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro b de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre la abscisa del vértice de la parábola y la ecuación y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor de la abscisa del vértice con el valor del parámetro b de la ecuación.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación, en la que deberá señalar el punto al que debe mover el vértice de la parábola para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja. El estudiante ya no podrá arrastrar el vértice de la parábola libremente, sino que tendrá que pensar en una ubicación y seleccionarla. Cuando el estudiante selecciona un punto, el vértice de la parábola se desplaza a ese punto y la ecuación verde cambia de manera que el parámetro b corresponde al opuesto de la abscisa del punto seleccionado.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Seleccionar una ubicación del vértice de la parábola cuya abscisa no corresponde al opuesto del valor del parámetro b de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Seleccionar la ubicación del vértice de la parábola cuya abscisa corresponde al opuesto del valor del parámetro b de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Para garantizar que el estudiante sólo pueda mover la parábola sobre el eje x , y las coordenadas del vértice solo tomen valores enteros, se construyó una lista de puntos cuyas abscisas tienen valores enteros y cuyas ordenadas son igual a cero. El estudiante solo podrá seleccionar uno de los puntos de la lista (si selecciona un punto diferente el software no reaccionará). Cuando el estudiante haya seleccionado un punto aparece el botón *verificar*. Al oprimir este botón se emitirá como retroacción un mensaje; si la abscisa del vértice de la parábola coincide con el opuesto del parámetro b de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro b de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente respuestas correctas / intentos realizados > 1 se considera que el estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividad de modificación de la amplitud.

Esta actividad relaciona la amplitud de la parábola con el valor del parámetro a . Se presenta simultáneamente la representación algebraica y la representación gráfica de una parábola verde y la representación algebraica de una ecuación naranja y se pide al estudiante que modifique el punto A para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja.

Las coordenadas del vértice de la parábola son (0,0). Las coordenadas del punto A son (1, a).

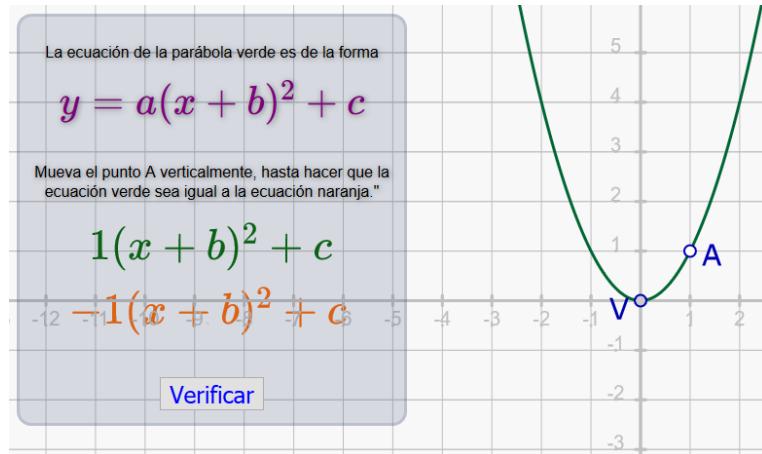


Ilustración 7 actividad sobre la amplitud

Tarea de experimentación

En los ejercicios de experimentación se presenta la parábola verde que el estudiante puede modificar arrastrando el punto A sobre la recta $x=1$ (tomando posiciones correspondientes a los valores enteros de la ordenada). Todo cambio en el punto A de la parábola produce un cambio en la ecuación verde. El estudiante puede entonces experimentar con distintas ubicaciones del punto A de la parábola y observar los efectos de estos cambios en la ecuación verde.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Arrastra el punto A de la parábola hasta una ubicación en el que el valor de la amplitud no corresponde al valor del parámetro a de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.

2. Arrastrar el punto A de la parábola hasta una ubicación en el que el valor de la amplitud corresponde al valor del parámetro a de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Cuando el estudiante considere que ha resuelto el ejercicio podrá oprimir el botón *verificar* y éste emitirá como retroacción un mensaje; si la amplitud de la parábola coincide con el parámetro a de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro a de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

Cuando el estudiante haya realizado correctamente 5 ejercicios, se pedirá que escriba en su cuaderno la relación entre la amplitud de la parábola y la ecuación y pase a la siguiente tarea. Se espera que relacione el valor de la amplitud con el valor del parámetro a de la ecuación.

Tarea de anticipación

Cuando el estudiante haya realizado correctamente la tarea de experimentación 5 veces, se da paso a la tarea de anticipación, en la que deberá señalar el punto al que debe mover el punto A de la parábola para que la ecuación verde quede igual a la ecuación naranja. El estudiante ya no podrá arrastrar el punto A de la parábola libremente, sino que tendrá que pensar en una ubicación y seleccionarla. Cuando el estudiante selecciona un punto, el punto A de la parábola se desplaza a ese punto y la ecuación verde cambia de manera que el parámetro a corresponde a la ordenada del punto seleccionado.

Hay sólo dos acciones posibles por parte del estudiante:

1. Seleccionar una ubicación del punto A de la parábola en el que el valor de la amplitud no corresponde al valor del parámetro a de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde está diferente a la ecuación naranja) le permite al estudiante invalidar su acción.
2. Seleccionar la ubicación del punto A de la parábola en el que el valor de la amplitud corresponde al valor del parámetro a de la ecuación naranja. En este caso, la retroacción del software (la ecuación verde es igual a la ecuación naranja) le permite al estudiante validar su acción.

Para garantizar que el estudiante solo pueda mover el punto A de la parábola obedeciendo a la amplitud de la misma, y las coordenadas del punto A solo tomen valores enteros, se construyó una lista de puntos cuyas abscisas siempre tienen una unidad mayor a la abscisa del vértice y cuyas ordenadas tienen valores enteros. El estudiante solo podrá seleccionar uno de los puntos de la lista (si selecciona un punto diferente el software no reaccionará). Cuando el estudiante haya seleccionado un punto aparece el botón *verificar*. Al oprimir este botón se emitirá como retroacción un mensaje; si la ordenada del punto A de la parábola coincide con el parámetro a de la ecuación naranja, se mostrará el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el parámetro a de la ecuación naranja obtendrá un valor diferente, dando paso a un nuevo ejercicio. En caso contrario, se mostrará el mensaje “*La ecuación verde aún no está igual a la ecuación naranja.*”, dando paso a un nuevo intento con el mismo ejercicio.

En esta tarea se contabilizan los intentos realizados y las respuestas correctas. Si después de realizar 5 ejercicios el cociente respuestas correctas / intentos realizados > 1 se considera que el

estudiante identificó correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y se le permite pasar a la siguiente actividad; en el caso contrario, se considera que el estudiante no ha identificado correctamente la relación entre la ecuación y la gráfica de la función y debe volver a la tarea de experimentación.

Actividades de modificación simultánea de la abscisa y la ordenada del vértice y modificación simultánea del vértice y la amplitud

Estas actividades funcionan de la manera ya descrita, con la diferencia de que en cada ejercicio el estudiante debe modificar simultáneamente las coordenadas del vértice o éstas con la amplitud de la parábola.

Conclusión del análisis a priori

Las retroacciones del medio permiten la invalidación de todas las estrategias que no corresponden al conocimiento buscado (la relación entre la representación algebraica y la representación gráfica de la función) y a su vez permiten la validación de las estrategias que corresponden a ese conocimiento. Hacemos la hipótesis de que un estudiante que no construya el conocimiento buscado no podrá avanzar por toda la secuencia de ejercicios y que un estudiante que pueda avanzar por toda la secuencia de ejercicios habrá construido el conocimiento buscado.

Pilotaje

Para controlar el análisis a priori se realizó un pilotaje con 4 estudiantes de grado octavo, del colegio Gimnasio Los Cerros de Bogotá. En una sesión de 2 horas los estudiantes organizados por parejas realizaron las actividades diseñadas.

Para realizar el pilotaje se seleccionaron estudiantes que tuvieran nociones de: función, plano cartesiano, coordenadas y parábola, nociones necesarias para construir el sentido de la coordinación de los registros algebraico y gráfico.

Las docentes decidieron comenzar con la serie de conversión del registro algebraico al gráfico. Al iniciar expresaron a los estudiantes que es una serie de actividades en el software DGPad relacionadas con la función cuadrática y que allí encontrarían las instrucciones correspondientes.

Primera serie: conversión del registro algebraico al gráfico

Actividad de modificación del parámetro c

Tarea de Experimentación

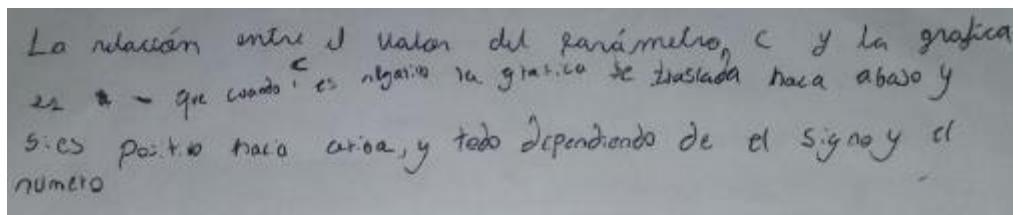
PAREJA A

Como primer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto (0,4) y el vértice de la parábola verde aparece en el punto (0,1) (los demás parámetros de las dos ecuaciones son iguales). Los estudiantes leen las instrucciones, realizan el ejercicio haciendo clic sobre la flecha de subir de la lista desplegable, por cada clic la parábola verde se mueve una unidad sobre el eje de las ordenadas. Los estudiantes observan lo que sucede al mover las flechas sin hacer comentarios y resuelven correctamente el ejercicio; en el segundo ejercicio aparece el vértice de la parábola en el punto (0,-4) y al mover la lista desplegable y pasar de positivo a negativo, comentan: E1¹: “*umm mira ahí quede guau qué pasó*”; E2²: “*sí, sí, se pone menos cuatro porque*

¹ Estudiante 1

² Estudiante 2

es la parte negativa"; E1: "se traslada para arriba y para abajo". En el quinto ejercicio el vértice de la parábola naranja aparece en el punto (0,-3) y los estudiantes dicen E2: "¿es menos tres?, ¿no?" E1: "sí mira, mira". Estas son evidencias de que gracias a las retroacciones del software los estudiantes toman conciencia de la relación entre los valores numéricos de la lista desplegable y la ordenada del vértice de la parábola verde. Cuando el ejercicio pide escribir en su cuaderno la relación entre el parámetro c y la gráfica los estudiantes escriben lo siguiente:



La relación entre el valor del parámetro c y la gráfica es que cuando c es negativo la gráfica se traslada hacia abajo y si es positivo hacia arriba, y todo dependiendo de el signo y el número.

Ilustración 8 respuesta dada por la pareja A

PAREJA B

Como primer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto (0,4) y el vértice de la parábola verde aparece en el punto (0,1), los estudiantes leen las instrucciones, realizan el ejercicio usando la lista desplegable, al hacer clic sobre la flecha, la parábola verde se mueve una unidad sobre el eje de las ordenadas. Ellos observan lo que sucede sin hacer comentarios. Como segundo ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto (0, -1) y uno de los estudiantes agrega: E3: "umm, se mueve sobre el eje y". En el tercer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto (0,2) y E3 dice: "es dos"; E4: "sí, es dos"; esto muestra que ya hacen la anticipación de la ordenada del vértice de la parábola. El cuarto y quinto ejercicio lo realizan de manera similar. Cuando terminan correctamente los 5 ejercicios, un estudiante le comenta a la docente: "nos parece que las flechitas no deberían mover la parábola porque esto lo hace muy fácil y no nos debemos esforzar mucho para solucionar el ejercicio". Cuando

aparece el mensaje que pide escribir la relación entre el parámetro c y la parábola, los estudiantes escriben:

La relación entre el valor del parámetro c y la gráfica es que c es el valor en y de la gráfica (dependiendo de las unidades que se pongan con respecto al plano cartesiano).

Ilustración 9 respuesta dada por la pareja B

Concluimos que los estudiantes de ambos grupos relacionan el valor del parámetro c con la ubicación de la parábola verde en el eje y , pero sin nombrar la ordenada del vértice de la parábola.

Tarea de Anticipación

Como primer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto $(0, -1)$ y el vértice de la parábola verde en el punto $(0, 1)$.

PAREJA A

Leen las instrucciones y dicen: E1: “*menos uno*”, E2: “*espera, espera*” E1: “*sí, porque la parábola está sobre menos uno*”. Escriben en la casilla -1 y al oprimir el botón *verificar*, el vértice de la parábola verde se ubica sobre el punto $(0, -1)$, se oculta la casilla y aparece la cantidad puesta en ésta como parte de la ecuación verde, al mismo tiempo que aparece el mensaje “*Muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Cierran el mensaje y oprimen el botón *siguiente* provocando que la ordenada del vértice de la parábola naranja cambie. Para el segundo, tercer, cuarto y quinto ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en las siguientes coordenadas respectivamente $(0, -4)$, $(0, 1)$, $(0, -2)$, $(0, -2)$. En el quinto ejercicio las dos parábolas aparecen superpuestas, lo cual confunde a los estudiantes: E1: “*¿qué se hizo la*

parábola verde?, E2: “*espera, no está*” aquí la docente interviene y les pregunta: *¿no estarán sobreuestas?*, E2: “*antes había un menos dos* (en la casilla), *tiene sentido, tiene sentido*”. En los ejercicios sexto y séptimo se presenta el vértice de la parábola naranja en los puntos: (0,2) y (0,3). Los estudiantes resolvieron correctamente todos los ejercicios.

PAREJA B

En el primer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto (0,-1) y el vértice de la parábola verde en el punto (0,1). Los estudiantes leen la instrucción; E3 dice: “*ahí va menos uno*”, escriben *-1* en la casilla y al oprimir el botón *verificar*, el vértice de la parábola verde se ubica sobre el punto (0,-1), al mismo tiempo que aparece el mensaje “*Muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. De la misma manera realizan los siguientes 6 ejercicios sin cometer ningún error al escribir el valor en la casilla.

Concluimos que la interacción con el medio de la tarea de experimentación produjo la construcción del conocimiento sobre la correspondencia entre los valores numéricos del parámetro c y la ordenada del vértice de la parábola verde, conocimiento que los estudiantes utilizan para resolver los ejercicios de la tarea de anticipación.

Actividad de modificación del parámetro b

Tarea de Experimentación

PAREJA A

Como primer ejercicio el vértice de la parábola naranja aparece en el punto (4,0) y en la lista desplegable aparece -9. E1 dice: “*mira aquí no es sobre el eje y, sino sobre el eje x, pero mira que la parábola verde está en 9 y en la casilla está el menos nueve*”. E2 “*entonces se*

intercambia todo”. E1: “*entonces ¿está bien?, no es menos nueve sino menos cuatro*”. Hacen clic sobre la flecha de abajo de la lista desplegable y observan que aparece -10 y el vértice de la parábola verde se ubica en (10,0). Hacen clic en la otra flecha hasta llegar a -4 y el vértice de la parábola queda ubicado en la coordenada (0,4). Al oprimir el botón *verificar* aparece el mensaje “*Muy bien inténtalo con una nueva parábola*” validando la respuesta. No se observa ninguna dificultad al resolver los ejercicios mostrando que han comprendido la relación entre el valor del parámetro b y la posición del vértice de la parábola verde. Al terminar 5 ejercicios correctos aparece el mensaje “*Explica en tu cuaderno cuál es la relación entre el valor del parámetro b la gráfica*”, los estudiantes escriben los siguiente:

La relación entre el valor del parámetro b y la gráfica es que cuando el signo es negativo la parábola se movea hacia la derecha ~~y~~ positivamente con respecto al eje x y si este signo es positivo ~~esta~~ se movea hacia la izquierda negativamente con respecto al eje x .

Ilustración 10 respuesta dada por la pareja A

PAREJA B (primer intento)

Esta pareja tuvo que realizar dos veces esta tarea, ya que al pasar a la anticipación por primera vez no habían comprendido la relación entre el parámetro b y la gráfica, lo cual produjo que el programa los devolviera al ejercicio de experimentación.

Como primer ejercicio el vértice de la parábola naranja aparece en el punto (4,0), en la lista desplegable aparece -9 y el vértice de la parábola verde aparece en el punto (9,0). Los estudiantes hacen clic varias veces en la lista desplegable hasta que la parábola verde coincide con la parábola naranja. Oprimen el botón *verificar* y aparece el letrero “*Muy bien, ahora inténtalo con*

una nueva parábola”; E3 dice: “*mira aquí la parábola no se mueve sobre el eje y sino sobre el eje x*”. De la misma manera resuelven los otros 4 ejercicios y cuando se les pide que escriban en su cuaderno la relación entre el parámetro b y la gráfica, escriben lo siguiente:

“La relación entre el parámetro y la gráfica, es que b es el valor de x en la gráfica y por ende en el plano cartesiano”

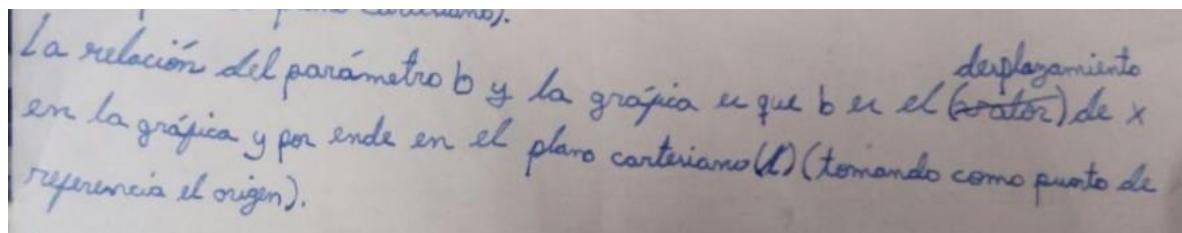
Hacemos la hipótesis que los estudiantes al resolver los ejercicios no tuvieron en cuenta los valores de la lista desplegable y sólo se fijaron en la posición de la parábola verde.

Segundo intento

En el primer ejercicio la parábola naranja aparece con coordenadas (4,0) los estudiantes vuelven a utilizar la misma estrategia del primer intento: hacer clic en la lista desplegable hasta que la parábola verde coincide con la parábola naranja. E3 dice: “*¿no entiendo por qué nos quedó mal?, mira es en x*” (refiriéndose a que no pudieron resolver bien el ejercicio de anticipación).

Como segundo ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en (-3,0), hacen clic en la lista desplegable hasta hacer coincidir la parábola verde con la parábola naranja; E3 dice: “*ayyy, mira que es al revés; cuando en la casilla aparece el número negativo, la parábola se mueve hacia el lado positivo; entonces es el desplazamiento de la parábola*”. Este comentario es una evidencia de que los estudiantes toman conciencia de que el signo del parámetro b es contrario al signo de la abscisa del vértice. Para el tercer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en (6,0) los estudiantes cuentan las unidades desde donde se encuentra el vértice de la parábola verde hasta el vértice de la parábola naranja y dice E4: “*debería ser 3*”; selecciona tres en la lista desplegable. El vértice de la parábola verde queda ubicado en el punto (3,0). E3 dice: “*entonces no es así, es el desplazamiento, pero contando desde el origen y con los signos intercambiados*” al mismo

tiempo hace clic en la flecha para abajo y luego en la flecha para arriba de la lista desplegable. E4 dice “*entonces pon -6*” E3 selecciona -6 en la lista desplegable y la parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja. Los demás ejercicios los resuelven correctamente. Estas son evidencias de que gracias a las retroacciones del software los estudiantes toman conciencia de la relación entre los valores numéricos de la lista desplegable y la posición del vértice de la parábola verde. Aunque en el primer intento habían resuelto 5 ejercicios, aún no habían tomado conciencia de la relación entre los valores numéricos y la gráfica. El hecho de no haber resuelto los ejercicios de anticipación y la retroacción didáctica de devolverlos a la tarea de experimentación, los hace centrar la atención precisamente en la relación que les falta. Al terminar los 5 ejercicios aparece el aviso que pide explicar en el cuaderno la relación entre el parámetro b y la gráfica, para lo que escriben:



La relación del parámetro b y la gráfica es que b es el ^{desplazamiento} (vector) de x en la gráfica y por ende en el ^{plan} cartesiano (\mathbb{C}) (tomando como punto de referencia el origen).

Ilustración 11 respuesta dada por la pareja B

Aunque este texto no expresa claramente la relación pedida, los comentarios de los estudiantes dejan ver que sí la identificaron correctamente.

En conclusión, de la tarea de experimentación, ambos grupos establecieron una relación entre el parámetro b y la posición del vértice de la parábola verde, utilizaron dicha relación para resolver los ejercicios, pero al formularla no nombran la abscisa del vértice de la parábola.

Tarea de Anticipación

PAREJA A

Como primer ejercicio aparece el vértice de la parábola naranja en el punto $(-2,0)$, E1 dice: “*si está en menos dos, entonces es 2*”, escribe en la casilla 2 y oprime el botón *verificar*. La parábola verde cambia de posición y se superpone con la parábola naranja. Aparece el aviso “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Aparece el botón *siguiente* y desaparece la casilla mostrando -2 como parte de la ecuación verde. Cierran el mensaje y oprime *siguiente* accediendo a un nuevo ejercicio. Los demás ejercicios los resuelven sin cometer ningún error y pasan al ejercicio de experimentación del parámetro a .

El comentario de E1 y las acciones realizadas durante la tarea de anticipación dejan ver que los estudiantes anticipan correctamente el valor del parámetro b que hace coincidir los vértices de las dos parábolas.

PAREJA B (primer intento, después de haber realizado por segunda vez la tarea de experimentación)

Como primer ejercicio el vértice de la parábola naranja aparece en el punto $(2,0)$. Escriben 2 en la casilla y oprimen en el botón *verificar*. El vértice de la parábola verde se ubica en $(-2,0)$, desaparece la casilla y se reemplaza por el valor 2. Aparece el botón *inténtalo de nuevo* y el mensaje: “*La parábola verde todavía no está sobre la parábola naranja*”. E3: “*¿por qué quedó mal?*”. E4: “*no sé, vuelve a escribir dos*”. Cierran el mensaje y oprimen el botón *inténtalo de nuevo*; aparece nuevamente la casilla. Vuelven a escribir 2 y oprimen el botón *verificar*. Suceden las retroacciones anteriormente descritas. E2: “*escribamos 1*”, escriben en la casilla y oprimen el botón *verificar*, sucediendo las mismas retroacciones ya descritas. Escriben de la misma manera

3, 5, 7 y 4. Cuando hacen los 7 ejercicios de forma incorrecta aparece la opción Tarea anterior junto al mensaje “*parece que no te ha quedado clara la relación entre la gráfica y el parámetro b. vuelve a la tarea anterior*”.

Es evidente que los estudiantes construyeron la correspondencia entre el valor numérico de b y la abscisa del vértice de la parábola verde, pero no tomaron conciencia de la no correspondencia de los signos. A pesar de que las retroacciones del medio les permiten invalidar el conocimiento construido, los estudiantes no intentan replantearse dicho conocimiento y deciden experimentar con otros valores. Como estaba previsto, en esta tarea no es posible experimentar, y los estudiantes se ven obligados a regresar a la tarea de experimentación.

Segundo intento

Como primer ejercicio el vértice de la parábola naranja aparece en el punto (2,0). E4 dice “*recuerda es con los signos intercambiados*”, escriben -2 en la casilla, oprimiendo el botón *verificar* el cual hace que desaparezca la casilla y aparezca -2 como parte de la ecuación verde, aparece el botón *siguiente* y el mensaje: “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”.

Realizan correctamente los siguientes 6 ejercicios.

Concluimos que la interacción con el medio de la tarea de experimentación produjo la construcción del conocimiento sobre la correspondencia entre los valores numéricos del parámetro b y la abscisa del vértice de la parábola verde, conocimiento que los estudiantes utilizan para resolver los ejercicios de la tarea de anticipación.

Actividad de modificación del parámetro a cantidades enteras

Tarea de Experimentación

PAREJA A

En el primer ejercicio el vértice de las dos parábolas se ubica en (0,0), el punto referente a la amplitud de la parábola naranja se ubica en (1,-2), el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en (1,-5), y la ecuación verde muestra en la lista desplegable -5. E1 dice: “*mira; si multiplicamos por -5, mira dónde está el punto* (señala el punto (1,-5)), *entonces no sé si esté bien, pero creo que ahí es -2*”. E2 responde: “*pues intenta*”. Seleccionan el valor -2 en la lista desplegable. La parábola verde se superpone a la parábola naranja. Oprimen el botón *verificar* y este le muestra el mensaje que valida su respuesta al mismo tiempo que reubica al punto de referencia de la amplitud de la parábola naranja en (1,-3). E2: “*recuerdas que si se multiplica por menos 1 la parábola se volteá*”. E1: “*pero es convección y aquí estamos hablando como de estiramientos*”, E2: “*sí, pero es como las dos cosas cuando multiplico por menos uno es una reflexión y si multiplico, digamos por 3 también hay un, un estiramiento*”. Hacemos la hipótesis de que los estudiantes han trabajado en clase sobre el efecto de multiplicar por menos uno la ecuación de la parábola y por eso se refieren al cambio de convexidad de la gráfica, pero además generalizan el efecto al multiplicar por cualquier número negativo. Es evidente que los estudiantes identifican la correspondencia entre el valor numérico del parámetro a y la ordenada del punto referente a la amplitud de la parábola verde; los estudiantes señalan con el dedo y nombran esa relación. Solucionan los 5 ejercicios sin ningún error y cuando se les pide explicar la relación entre el parámetro a y la gráfica escriben:

A) la relación de el valor a es que ^{este} cuando multiplica los valores de x, esto puede ~~causar~~ causar un estiramiento o una reflexión, ~~que~~ depende del signo y el numero.

Ilustración 12 respuesta dada por la pareja A

PAREJA B (primer intento)

Esta pareja tuvo que realizar dos veces esta tarea, ya que al pasar a la tarea de anticipación por primera vez no habían comprendido la relación entre el parámetro a y la gráfica, lo cual produjo que el programa los devolviera a la tarea de experimentación.

En esta tarea como primer ejercicio se presenta el punto referente a la amplitud de la parábola naranja en (1,-2), el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en (1,-5) y la ecuación verde muestra en la casilla desplegable -5. Los estudiantes seleccionan -5 en la lista desplegable, ubicando la parábola verde sobre la parábola naranja. E3 dice: “*mira, esto son estiramientos*”, realizan los 5 ejercicios rápidamente y cuando la actividad pide explicar en el cuaderno la relación entre el parámetro a y la gráfica, ellos escriben:

“*la relación entre el parámetro a y la gráfica es que a multiplica el valor en x lo que causa un estiramiento o encogimiento con un factor de $\frac{1}{a}$.*”

Hacemos la hipótesis que en clase ya han trabajado estiramientos de la gráfica con la ecuación, además, relacionan el parámetro a con la amplitud de la parábola; sin embargo, no toman conciencia sobre el significado de los puntos resaltados en las dos parábolas.

Segundo intento

Como primer ejercicio, se muestra el punto referente a la amplitud de la parábola naranja en (1,-2) y el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en (1,-5). E3 dice: “*son los*

estiramientos ¿cierto?, pues mira este punto no lo tuvimos en cuenta ahorita y en la otra no lo muestra”, mientras mueve las flechas de la lista modificando la amplitud de la parábola verde, E4 agrega: “*el valor de la casilla es el mismo del punto en el eje y*”. Esto evidencia que los estudiantes tomaron conciencia sobre lo que representa el punto resaltado en cada una de las parábolas y la relación que este tiene con la amplitud de las parábolas. El siguiente ejercicio presenta el punto referente a la amplitud de la parábola en (1,-4), E3: “*ahí va -4*”; ubicando el valor de la lista desplegable en -4 y oprimen el botón *verificar* lo cual valida su respuesta con el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Al realizar el cuarto ejercicio el punto referente a la amplitud de la parábola naranja se ubica en (1,-3), E3 dice: “*mira que el valor en x siempre es uno*”. Con este comentario hacemos la hipótesis de que el estudiante establece que la ordenada del punto referente a la amplitud de la parábola es la que se relaciona con la amplitud de la parábola y que la abscisa de este punto será siempre 1. Al terminar los 5 ejercicios correctamente la actividad pide que explique en el cuaderno la relación entre el parámetro a y la gráfica; por lo cual ellos escriben:

La relación entre el parámetro a y la gráfica es que a multiplica el valor en x lo que causa un (des)estiramiento o encogimiento con un factor de $\frac{1}{a}$, además lo podemos identificar mediante (que) el conocimiento de una coordenada en y ejemplo: P=(1,-1) Puede ser realizada con números enteros o decimales.

Ilustración 13 respuesta dada por la pareja B

La primera parte hasta $\frac{1}{a}$ fue escrita en el primer intento, luego en el segundo intento escribieron lo demás.

Concluimos que a partir de la interacción con la actividad los dos grupos establecieron la relación entre el parámetro a de la ecuación y la gráfica, y a pesar que la pareja A no nombró el punto de referencia de la parábola, sus acciones demostraron que sí lo relacionaron con el valor del parámetro a .

Tarea de Anticipación

PAREJA A

Como primer ejercicio, se muestra el punto referente a la amplitud de la parábola naranja en (1,2) y el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en (1,3). E1 dice: “*es dos, pero no estoy seguro, ¿probamos?*”. Al oprimir el botón *verificar* el punto de referencia de la amplitud de la parábola verde se ubica en las coordenadas (1,2), se oculta la casilla y el valor allí puesto se muestra como parte de la ecuación verde, se muestra el botón *siguiente* y el mensaje “*muy bien, inténtalo ahora con una nueva parábola*” lo cual valida su respuesta y prosiguen al siguiente ejercicio. Los 7 ejercicios los solucionan correctamente y pasan al ejercicio de experimentación del parámetro a con números decimales. A pesar de que al principio dudan un poco sobre el valor que deben poner en la casilla para que la amplitud de la parábola verde sea igual al valor de la amplitud de la parábola naranja, realizan correctamente todos los ejercicios, lo cual demuestra que los ejercicios de experimentación sí provocaron el aprendizaje deseado.

PAREJA B (primer intento)

Como primer ejercicio, se muestra el punto referente a la amplitud de la parábola naranja en (1,2) y el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en las coordenadas (1,3). E3: “*bueno aquí es como más o menos tres*”, escriben 3 en la casilla y oprimen el botón *verificar*, aparece el botón *inténtalo de nuevo* junto al mensaje “*la parábola verde aún no está sobre la*

parábola naranja”. Vuelven a intentarlo escribiendo 5 en la casilla y vuelve a aparecer el mismo mensaje, en el tercer intento escriben 4 y el mensaje vuelve a aparecer. Para el cuarto intento E4 dice: “*date cuenta que entre más grande es el valor, más angosta es la parábola, escribamos 2*”, escribe 2 en la casilla y al oprimir el botón *verificar* lo cual produce que las dos parábolas queden superpuestas y aparezca el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Se muestra un nuevo ejercicio donde la parábola naranja tiene como amplitud -4, E4: “*aquí más o menos es -3*” al oprimir el botón *verificar* las parábolas no quedan superpuestas y se muestra el mensaje “*la parábola verde aún no está sobre la parábola naranja*”. E4 dice: “*entonces es -4 así será más pequeña*”. Hacemos la hipótesis de que los estudiantes estiman perceptivamente el valor observando que tan abierta o cerrada es la parábola, pero sin fijarse en las coordenadas del punto A. Al oprimir *verificar* se valida su respuesta con el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. El siguiente ejercicio muestra la parábola naranja con amplitud 1, el cual resuelven correctamente, pero por la cantidad de intentos incorrectos realizados la tarea los devuelve a la tarea anterior.

Segundo intento (Después de haber realizado por segunda vez la tarea de experimentación)

Como primer ejercicio, se muestra el punto referente a la amplitud de la parábola naranja en las coordenadas (1,2) y el punto referente a la amplitud de la parábola verde se ubica en (1,3). E4: “*entonces según lo que hicimos ahorita, donde corta en uno con x, es el valor, entonces es 2*”, escriben 2 en la casilla y al oprimir el botón *verificar*, la parábola verde se superpone a la parábola naranja, aparece el botón *siguiente* y el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Pasan al siguiente ejercicio y de la misma manera realizan los demás ejercicios sin errores.

En este segundo intento de la tarea de anticipación, los comentarios de los estudiantes y sus acciones muestran que comprendieron la relación entre el parámetro a y la amplitud de la gráfica, identificando que el punto A tiene coordenadas $(1, a)$ y que por lo tanto pueden usarlo como referencia para conocer el valor de a .

Por lo anterior, concluimos que la interacción de los dos grupos con el software en la tarea de experimentación produjo la construcción del conocimiento sobre la correspondencia entre los valores numéricos del parámetro a y la abscisa del punto de referencia de la parábola verde, conocimiento que los estudiantes utilizaron para resolver los ejercicios de la tarea de anticipación, sin tener visible el punto de referencia lo cual muestra que pueden identificar dicho punto en cualquier parábola. Además, la evaluación que realiza el software sobre el número de ejercicios correctamente solucionados y el hecho de devolver a la tarea de experimentación tuvieron un efecto positivo en el aprendizaje del grupo B.

Actividad de modificación del parámetro a cantidades decimales

Tarea de Experimentación

PAREJA A

En el primer ejercicio el punto referente a la amplitud de la parábola se ubica en $(1, -2.6)$. E1 dice: “*aquí, es con decimales, el punto está más o menos en -2.5*”. E2 responde “*no, es como -2.4, porque no está en la mitad, mira está un poquito corrido hacia abajo*”. Seleccionan -2.4 en la lista desplegable. Se dan cuenta que las dos parábolas no quedan sobrepuertas, por lo cual seleccionan -2.6, oprimen el botón *verificar* y éste muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y ubicando el punto referente de la amplitud de la parábola

naranja en (1,1.8). E1 dice: “*es uno coma siete*” y E2 agrega: “*no, es como uno punto ocho*”. Cambian los valores en la lista desplegable a 1.8 y las paráolas se superponen. E1 dice: “*aquí toca es mirar bien hacia qué valor se inclina*”. Al oprimir el botón *verificar* aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y el punto referente a la amplitud de la parábola naranja se ubica en las coordenadas (2,-3.4), E1 dice: “*aquí es como -3.4*” mientras selecciona este valor en la lista desplegable y oprime el botón *verificar* el cual provoca que aparezca el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y se reubica el vértice de la parábola naranja en nuevas coordenadas para iniciar un nuevo ejercicio. De ésta manera realizan los demás ejercicios, expresando verbalmente los valores muy cercanos o el valor correcto al de la ordenada del punto de referencia. Cuando la tarea pide explicar en el cuaderno la relación entre el parámetro a y la gráfica, los estudiantes escribieron haciendo alusión a lo escrito en la tarea con cantidades enteras:

• B) la única diferencia en la relación es que se multiplica por números decimales.

Ilustración 14 respuesta dada por la pareja A

PAREJA B

Como primer ejercicio se presenta el punto referente a la amplitud de la parábola en (1,-2.6) y en la casilla se muestra -8. E3 dice: “*aquí es lo mismo, solo que, con decimales, podría ser -2.5*”. Cambia el valor de la lista desplegable hasta hacer que la parábola verde se sobreponga a la parábola naranja y oprime el botón *verificar* el cual muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y el punto de referencia de la amplitud de la parábola naranja cambia a (1,-3.2). E3 dice: “*es más o menos -3.2 porque está muy cerquita al tres*”. Cambian el

valor en la lista desplegable al mismo tiempo que se mueve la parábola verde hasta quedar ubicada sobre la parábola naranja, oprimen el botón *verificar* y se producen las retroacciones correspondientes. De la misma manera se realizan los demás ejercicios hasta que se pide explicar en el cuaderno la relación entre el parámetro a y la gráfica, a continuación de lo que escribieron en la tarea con cantidades enteras, escriben:

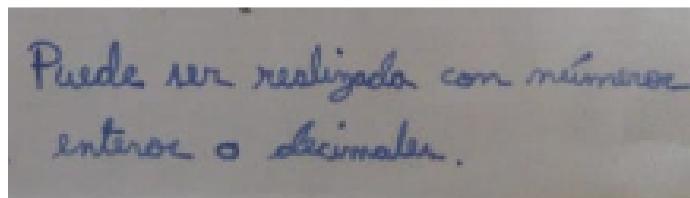


Ilustración 15 respuesta dada por la pareja B

A partir de lo escrito por los estudiantes se evidencia que relacionaron lo trabajado en la actividad con cantidades enteras.

Tarea de anticipación

PAREJA A

Como primer ejercicio, la parábola naranja se presenta con amplitud -4.4 y la parábola verde con amplitud 3. E1 dice: “*Ahí va -4.3*”. Escriben esta cantidad y presionan el botón *verificar* lo cual ocasiona que la amplitud de la parábola verde se modifica, pero no queda sobrepuesta a la parábola naranja y aparece el mensaje “*la parábola verde aún no está sobre la parábola naranja*”, la casilla se oculte y aparezca -4.3 en la ecuación verde, aparece el botón “*inténtalo de nuevo*”. E2 dice: “*quedó un poco más abajo, entonces es -4.4*”. Escriben esta cantidad en la casilla y oprimen *verificar* ubicando la parábola verde sobre la parábola naranja, mostrando el botón *siguiente* y el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. En los demás ejercicios escriben en la casilla el valor correspondiente a la amplitud de la parábola sin tener que

intentarlo varias veces, lo cual indica que están utilizando un conocimiento eficaz para resolver la tarea. Hacemos la hipótesis de que este conocimiento fue construido en las tareas de experimentación.

PAREJA B

Como primer ejercicio, la parábola naranja se presenta con amplitud -4.4 y la parábola verde con amplitud 3. E4 dice: “*creo que ahí va -4.4*”. Escriben esta cantidad en la casilla y oprimen el botón *verificar* produciendo que la parábola verde quede sobrepuerta a la parábola naranja, aparezca el botón *siguiente* y se muestre el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Al oprimir el botón *siguiente* aparece la parábola naranja con amplitud 2.2. E3 escribe en la casilla 2.1 y oprime el botón *verificar* el cual modifica la amplitud de la parábola verde sin quedar sobre la parábola naranja y mostrando el mensaje “*la parábola verde aún no está sobre la parábola naranja*”, a lo cual reacciona E4 diciendo “*creo que solo toma valores que terminan en par*”. E3 dice: “*entonces es 2.2*”, escriben 2.2 en la casilla y oprimen el botón *verificar*, este provoca que las parábolas queden sobrepuertas y que se muestre el mensaje “*muy bien, ahora inténtalos con una nueva parábola*”. De esta misma manera resuelven los demás ejercicios proponiendo los valores correctos lo cual demuestra que los ejercicios de experimentación fueron aprovechados para construir el conocimiento pretendido y así resolver correctamente los ejercicios de anticipación.

Actividad de modificación de los parámetros c y b

Tarea de Experimentación

PAREJA A

En esta tarea, el primer ejercicio presenta el vértice de la parábola en el punto (7,1) y el vértice de la parábola verde en el punto (9,0). E1 dice: “*Bueno, aquí es c y b , entonces aquí va -7*” al tiempo modifica el valor de la lista desplegable del parámetro b ; al ubicar el vértice de la parábola verde en (7,0), *agrega*: “*y lo subimos uno*” modificando el valor de la lista desplegable del parámetro c , oprimen el botón *verificar* y este produce como retroacción el mensaje “*muy bien, ahora intentalo con una nueva parábola*”, y se ubica el vértice de la parábola naranja en (5,4). Los siguientes ejercicios los realizan de la misma manera, anticipando los valores de los dos parámetros correctamente y cuando les piden explicar en el cuaderno la relación entre los parámetros b y c y la gráfica, ellos escriben:

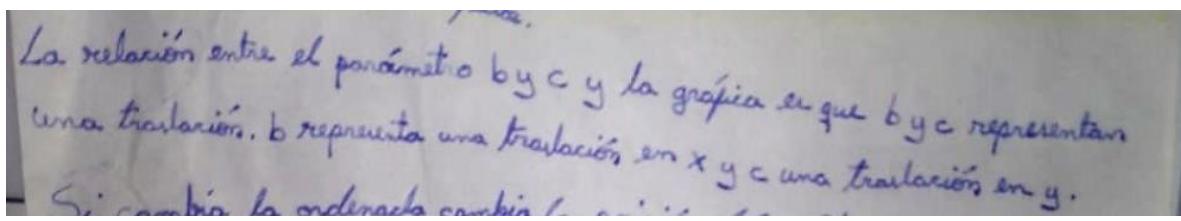
La relación que existe entre b y c es que ambos valores sirven para trasladar horizontalmente las parábolas, b sirve para traslaciones verticales horizontales, y el valor c para traslaciones verticales.

Ilustración 16 respuesta de la pareja A

PAREJA B

El primer ejercicio presenta el vértice de la parábola naranja en el punto (7,1) y el vértice de la parábola verde en el punto (9,0). E4 dice: “*esto ya lo hicimos, a ver, recordemos b es el movimiento en el eje x, y c es el valor en el eje y*”. E3: “*recuerda que en x los signos son contrarios*”. Modifican los valores de las dos listas seleccionando -7 en la lista del parámetro b y

1 en la lista del parámetro a . La parábola verde se ubica sobre la parábola naranja, oprime el botón *verificar* y se muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y se ubica el vértice de la parábola naranja en las coordenadas (5,3), E3 dice: “*en b va -5 y en c va 3*”. Selecciona 3 en la lista del parámetro c y -5 en la lista del parámetro b . La parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja. Oprimen el botón *verificar* y aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Los demás ejercicios los resuelven correctamente. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen la relación entre los parámetros b y c con la gráfica, ellos escriben:



La relación entre el parámetro b y c y la gráfica es que b y c representan una traslación, b representa una traslación en x y c una traslación en y . Si cambia la ordenada cambia la gráfica.

Ilustración 17 respuesta de la pareja B

De lo anterior concluimos que los estudiantes recordaron lo realizado en las anteriores actividades de los parámetros b y c y lo aplicaron para realizar esta actividad anticipando los valores de dichos parámetros correspondientes a la parábola naranja.

Tarea de anticipación

PAREJA A

En el primer ejercicio se muestra el vértice de la parábola naranja en (9,-2). E2 dice: “*debemos poner en éste -9*” (mientras escribe este valor en la casilla del parámetro b), “*y en éste -2*” (escribe -2 en la casilla del parámetro c). Oprime el botón *verificar* y éste hace que la parábola verde se ubique sobre la parábola naranja, que se oculte la casilla y aparezcan los dos valores como parte de la ecuación verde, que se muestre el botón *siguiente* y el mensaje “*muy bien*,

ahora inténtalo con una nueva parábola”. Los demás ejercicios también los realizaron correctamente, lo cual muestra que los estudiantes lograron construir el conocimiento sobre la relación entre los parámetros b y c y el vértice de la gráfica.

PAREJA B

Al iniciar la tarea, el vértice de la parábola naranja se ubica en el punto (9,-2). E3 dice: “*bueno aquí va -9*” señalando la casilla del parámetro b “*y aquí va -2*” mostrando la casilla del parámetro c . Modifican los valores y oprimen el botón *verificar*. La parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja, ocultando las casillas, para que en su lugar aparezcan los valores -9 y -2 respectivamente, mostrando el botón *siguiente* y el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Los demás ejercicios de esta tarea son realizados correctamente, lo cual confirma que los estudiantes lograron construir el conocimiento sobre la relación entre los parámetros b y c y el vértice de la gráfica.

Actividad de modificación de los parámetros a , b y c

Tarea de Experimentación

PAREJA A

En el primer ejercicio la parábola naranja se muestra con amplitud 3 y su vértice en las coordenadas (-8,2), y la parábola verde se presenta con amplitud 3 y su vértice en las coordenadas (7,3). E1 dice: “*primero menos ocho, a no, ocho*” y modifica el valor de la lista desplegable del parámetro b , el vértice de la parábola se mueve al punto (-8,1), “*ahora, hacia arriba uno*”, modificando el valor de la lista desplegable del parámetro c . La parábola verde queda superpuesta la parábola naranja, “*ah bueno, este no hay que cambiarlo*”. Al oprimir el

botón *verificar* aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”, el valor de la amplitud de la parábola naranja cambia a -5 y su vértice a las coordenadas (9,3). Para solucionar este ejercicio primero modifican el valor de la lista desplegable del parámetro b donde seleccionan -9, luego del parámetro c donde seleccionan 3 y los vértices de las parábolas quedan superpuestos. E1 dice: “*es menos cuatro*” (refiriéndose al valor de la amplitud). Selecciona -4 en la lista desplegable del parámetro a . La parábola verde no queda superpuesta a la parábola naranja, puesto que tienen amplitudes diferentes. E1 dice: “*contemos: uno, dos, tres, cuatro, cinco*”, señalando las unidades desde el vértice de la parábola hasta el punto (10,-2), modifican el valor de la lista desplegable del parámetro a seleccionando -5 lo cual hace que las parábolas queden sobreuestas. Oprimen el botón *verificar* validando con las respectivas retroacciones, las acciones realizadas. Realizan correctamente los siguientes ejercicios mostrando comprensión de la relación entre la gráfica y los parámetros a , b y c de la ecuación. Cuando la tarea pide explicar en el cuaderno la relación entre los parámetros a , b y c de la ecuación y la gráfica los estudiantes escriben:

La relación que tiene el valor a con la gráfica es que este valor multiplica los valores de x , esto puede causar un estiramiento o un encogimiento o que no realice.

La relación que tiene el valor b con la gráfica es que el valor de b trastada horizontalmente los puntos, pero esto tiene una peculiaridad, que es cuando el valor es negativo este se mueve hacia la derecha y cuando este es positivo se mueve hacia la izquierda.

La relación que tiene el valor c con la gráfica es que este valor ~~no~~ realiza traslaciones verticales con respecto a los puntos.

Ilustración 18 respuesta de la pareja A

PAREJA B

En el primer ejercicio la parábola naranja se muestra con amplitud 3 y su vértice en las coordenadas $(-8, 2)$, y la parábola verde se presenta con amplitud 3 y su vértice en las coordenadas $(7, 3)$. E4 dice: “*bueno, es lo mismo, pero ahora con a incluida, primero ubiquemos c que es 2, b es 8 y a es el mismo, mira*”, al tiempo que modifican los valores de las listas desplegables de los parámetros b y c , la parábola verde se ubica sobre la parábola naranja. Al oprimir el botón *verificar* aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*” y la parábola naranja cambia su amplitud y su vértice cambia de posición. En el segundo ejercicio aparece la parábola naranja con amplitud -2 y el vértice en las coordenadas $(5, 2)$. Primero modifican el valor de la lista desplegable del parámetro c , mientras E3 dice: “*bueno, aquí va 2*”, luego modifican el valor de la lista desplegable del parámetro b , al mismo tiempo que E3 dice: “*aquí va -5*”. Lo cual produce que el vértice de la parábola verde quede

sobre el vértice de la parábola naranja. Mientras oprime las flechas de la lista desplegable del parámetro a , E4 dice: *“recuerdas que el punto de 1 en x es el que muestra el valor de la amplitud en y, entonces mira que aquí corta en 6* (señala el punto $(6,0)$), *lo cual significa que es 1, entonces el valor debe ser 0, a no, no, no, debe ser menos dos, que son las unidades que se mueve desde este punto* (señala el vértice de la parábola)”. Finalmente selecciona el valor -2. La parábola verde queda superpuesta a la parábola naranja. Al oprimir el botón *verificar* se presentan las respectivas retroacciones. Esto evidencia que los ejercicios sobre la relación entre la amplitud de la parábola y el parámetro a , sí cumplieron con el objetivo de reconocer el valor de la amplitud de una parábola, con tan solo observar la gráfica. Realizan correctamente los siguientes ejercicios, hasta que la tarea les pide explicar en el cuaderno la relación entre los parámetros a , b y c de la ecuación y la gráfica, esto no lo realizan manifestando que se presenta la misma relación ya descrita en los anteriores ejercicios de los parámetros a , b y c .

Tarea de Anticipación

PAREJA A

En el primer ejercicio de esta tarea, la parábola naranja aparece con amplitud 1 y el vértice aparece en las coordenadas $(6,-2)$, la ecuación verde muestra los valores 2, 1 y 2 de los parámetros a , b y c respectivamente. Los estudiantes empiezan modificando el parámetro c ; E1 dice: *“aquí va menos dos”*, y escribe -2 en la casilla del parámetro c . Al ubicar el cursor en la casilla del parámetro b , E1 dice: *“entonces, negativo seis”* (escribe -6 en la casilla) *“ya tenemos las traslaciones, ahora el estiramiento* (poniendo el cursor en la casilla del parámetro a), *esto es menos porque está así* (se refiere a la concavidad de la parábola) *y es uno, dos, tres, cuatro”* cuenta las unidades desde el vértice hasta el punto $(2,2)$. Cuando escribe -4 en la casilla del

parámetro a , E2 le dice: “*no, no, no, mira que primero corta aquí en uno*”. E1 le responde: “*si, tienes razón, es uno*”. Escribe 1 en la casilla del parámetro a y oprime el botón *verificar*, provocando como retroacciones que se ubique la parábola verde sobre la parábola naranja, se oculte la casilla y se muestren los valores escritos en ellas como parte de la ecuación verde, que aparezca el botón *siguiente* y se muestre el mensaje: “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Los 7 ejercicios son solucionados correctamente por los dos estudiantes y de esta manera terminan la serie de conversión del registro algebraico al gráfico. Cabe resaltar que en la tarea del parámetro a , el vértice estaba sobre el origen de las coordenadas, lo cual facilitaba que los estudiantes reconocieran el valor del parámetro a . En esta tarea ya el vértice tiene coordenadas distintas y esto les crea un choque a los estudiantes que resuelven analizando lo aprendido anteriormente, lo cual se evidencia en el conteo de unidades que realizan para hallar el valor del parámetro a .

PAREJA B

En el primer ejercicio de esta tarea, la parábola naranja aparece con amplitud 1 y el vértice aparece en las coordenadas (6,-2), la ecuación verde muestra los valores 2, 1 y 2 de los parámetros a , b y c respectivamente. E3 dice: “*comienza por c, ahí va -2*”, (escribe -2 en la casilla correspondiente) “*en b va -6*” (escribe -6 en la casilla correspondiente) y *en a va 1, ¿sí?*”. E4 responde: “*si, si es uno*” (escribe 1 en la casilla correspondiente). Oprimen el botón *verificar*, provocando que la parábola verde se ubica sobre la parábola naranja, la casilla se oculte al tiempo que se muestran los valores escritos como parte de la ecuación verde, además, aparece el botón *siguiente*, y se muestra el mensaje: “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. Todos los ejercicios de esta tarea fueron resueltos sin errores; lo cual nos da cuenta de que las

anteriores tareas de experimentación y anticipación, junto a la tarea de experimentación de ésta actividad, fueron provechosas para la construcción del conocimiento de las relaciones entre la gráfica y los parámetros de la ecuación.

Segunda serie conversión del registro gráfico al algebraico

Actividad de modificación de la ordenada del vértice

Tarea de Experimentación

PAREJA A

Como primer ejercicio aparece 1 como valor del parámetro c de la ecuación verde y 1 como valor del parámetro c de la ecuación naranja, (los demás parámetros de las dos ecuaciones son iguales). Los estudiantes leen la instrucción y E1 dice “*ya están iguales*”, oprime el botón *Verificar*, con el que aparece el mensaje “*Muy bien, ahora inténtelo con una nueva ecuación*” y se cambia el valor del parámetro c de la ecuación naranja a -2 E1: “*o sea muevo esto hasta -2*” (señalando el vértice de la parábola), arrastra el vértice hasta -2 provocando que el parámetro c de la ecuación verde sea -2 y presiona el botón *Verificar*. Hacemos la hipótesis de que al haber realizado anteriormente la serie de la conversión del registro algebraico al gráfico, los estudiantes ya tenían clara la relación entre el parámetro c y la ordenada del vértice de la parábola, por lo cual en esta ocasión ya podían anticipar la posición del vértice. De la misma manera resolvieron los siguientes 3 ejercicios. Al resolver el último ejercicio y presionar el botón *Verificar* apareció el mensaje “*Explica en tu cuaderno la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y la ecuación*” lo cual inicialmente les generó dificultad pues no tenían claro a que refiere la ordenada; luego de hacer la respectiva aclaración, escriben lo siguiente:

La relación entre estos es que al modificar la gráfica verticalmente en y, esto causa que la ecuación sea modificada ~~en la ecuación en c~~ en el valor C, que corresponde a y (ordenada).

Ilustración 1 respuesta de la pareja A

PAREJA B

Como primer ejercicio aparece el parámetro c con valor 1 en la ecuación verde y en la ecuación naranja 1 como valor del parámetro c . E3 dice: “*mira, ya está hecho*”; oprime el botón *verificar* y se presenta el mensaje: “*Muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el valor del parámetro c de la ecuación naranja cambia a 3. E3 dice: “*aquí debo poner la parábola en 3, ¿verdad?*”, E4 contesta: “*si claro*” arrastra el vértice de la parábola hasta la coordenada (0,3) al mismo tiempo que cambia el valor del parámetro c a 3 y oprime el botón *verificar*, que muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*”. Hacemos la hipótesis que la tarea de conversión del registro algebraico al gráfico del parámetro c , contribuyó a que construyeran la relación entre la gráfica y el parámetro c de la ecuación. De la misma forma realizan los siguientes ejercicios hasta que la tarea pide explicar en el cuaderno la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y la ecuación. E3 dice: “*¿qué es la ordenada?*”, E4 agrega: “*no sé, pero aquí pasa lo mismo que en la anterior, solo que lo que toca mover es la parábola*”. Le preguntan a la docente cuál es la ordenada del vértice y luego de realizar la respectiva aclaración, escriben:

Si cambia la ordenada cambia la posición del vértice en y (y cambia en la ecuación). Si una translación en y.

Ilustración 20 respuesta de la pareja B

Concluimos que en esta tarea de experimentación los estudiantes sí hacen explícita la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y el valor del parámetro c en la ecuación, debido a que estos términos son mencionados dentro del ejercicio, al contrario de lo que sucedió en la serie anterior.

Tarea de Anticipación

PAREJA A

En el primer ejercicio de esta tarea, el valor del parámetro c en la ecuación verde es 1 y el de la ecuación naranja es 0. El intenta arrastrar el vértice de la parábola verticalmente tal y como se realizó en la tarea de experimentación. La profesora le pide leer las instrucciones, de esta manera se da cuenta de que primero debe presionar el botón *Mover V* y luego seleccionar el punto al cual debe dirigirse el vértice de la parábola; sigue las indicaciones y hace clic sobre el punto ubicado en (0,0). El vértice de la parábola queda ubicado en (0,0) y el parámetro c de la ecuación verde cambia a cero; presiona el botón *verificar*, con el cual aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtelo con una nueva ecuación*”, al mismo tiempo apareció el botón *siguiente* que al presionarlo, hizo que el valor de c de la parábola naranja cambiara a -3. Los demás ejercicios fueron resueltos correctamente, lo cual indica que los estudiantes lograron construir la relación deseada.

PAREJA B

En el primer ejercicio de esta tarea, el valor del parámetro c en la ecuación verde es 1 y el de la ecuación naranja es 0. Oprimen el botón *Mover V*, leen el mensaje “*Haz clic en el punto donde debe ubicarse V para que la ecuación verde sea igual a la ecuación naranja*”, hacen clic en

aceptar, en el punto (0,0), el vértice de la parábola queda en el punto (0,0) y la ecuación verde queda igual a la ecuación naranja. Oprimen el botón *verificar* apareciendo el mensaje “*muy bien ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el valor del parámetro c de la ecuación naranja cambio a -4. De la misma manera realizan los demás ejercicios hasta encontrar la opción continuar que los lleva a la siguiente tarea.

En esta actividad los estudiantes muestran que construyeron el conocimiento de la relación entre el parámetro c y la ordenada del vértice de la parábola, aquí la fase de experimentación no fue del todo para que los estudiantes experimentaran y relacionaran la expresión algebraica con la gráfica; ya que en la tarea de experimentación mostraban conocimiento de los valores que allí correspondían partiendo de la experiencia que tuvieron en la serie de conversión del registro algebraico al gráfico.

Actividad de modificación de la abscisa del vértice

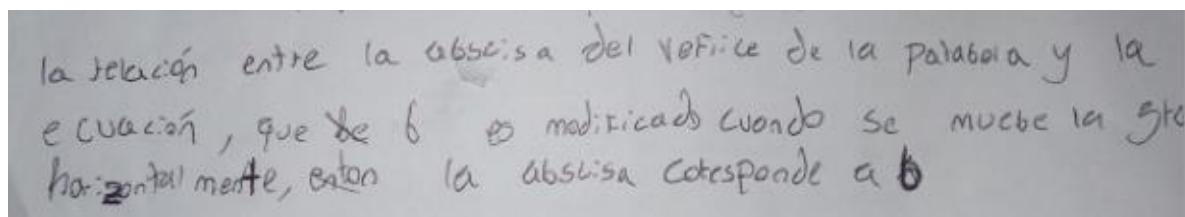
Tarea de Experimentación

PAREJA A

El primer ejercicio de esta tarea presenta a -3 como el valor del parámetro b de la ecuación verde y a 2 como valor del parámetro b de la ecuación naranja. Los estudiantes leen las instrucciones y E1 dice: “*Ah, ahora es con x*”; arrastra el vértice una unidad hacia la izquierda y se detiene, es decir, ubica la abscisa en 2. La ecuación cambia a $a(x-2)^2 +c$. Continúa arrastrando el vértice hasta -2. Las dos ecuaciones quedan iguales. Hacemos la hipótesis de que inicialmente no recordaban que el signo del parámetro b en la ecuación es opuesto al signo de la abscisa del vértice de la parábola, pero la retroacción del software de mostrarles que en la primera selección

las ecuaciones no estaban iguales, les permitió recordar y replantear la solución al ejercicio.

Presionan el botón *Verificar* que emite el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y continúan realizando los demás ejercicios correctamente. Al terminar el quinto ejercicio y presionar el botón *Verificar* apareció el mensaje “*Explica en tu cuaderno la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y la ecuación*”, ellos escriben lo siguiente:

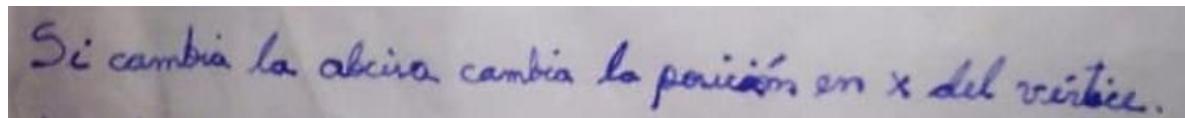


la relación entre la abscisa del vértice de la parábola y la ecuación, que se modifica cuando se mueve la gráfica horizontalmente, entonces la abscisa corresponde a b

Ilustración 21 respuesta de la pareja A

PAREJA B

El primer ejercicio de esta tarea presenta al parámetro b de la ecuación verde con valor -3 y a 2 como valor del parámetro b de la ecuación naranja. E3 dice: “*ponlo en el punto -2*”; E4 agrega: “*bueno, aquí es la regla de que a la izquierda es positivo y a la derecha negativo*”. Arrastra el vértice de la parábola hasta la coordenada (-2,0) lo cual ocasiona que las dos ecuaciones queden iguales. Oprime el botón *verificar* y aparece el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva parábola*”. De la misma manera realiza correctamente los siguientes ejercicios hasta que aparece el mensaje: “*Explica en tu cuaderno la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y la ecuación*”, por lo cual escribieron:



Si cambia la abscisa cambia la posición en x del vértice.

Ilustración 22 respuesta de la pareja B

Tarea de Anticipación

PAREJA A

El primer ejercicio de esta tarea muestra en la ecuación verde a -1 como el parámetro b , y el parámetro b de la ecuación naranja igual a 4 . Los estudiantes leen la instrucción y oprimen el botón *Mover V* y rápidamente seleccionan el punto $(-4,0)$. El vértice de la parábola se desplaza a $(-4,0)$ y las dos ecuaciones quedan iguales. Presionan el botón *Verificar* que emite el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y aparece el botón *Siguiente*, al oprimir éste último, el parámetro b de la ecuación naranja cambia a 3 y tanto este como los demás ejercicios fueron resueltos de la misma manera sin cometer errores.

PAREJA B

El primer ejercicio muestra en la ecuación verde el parámetro b con valor -1 , y el parámetro b de la ecuación naranja con valor 4 . E4 dice: “*bueno, aquí toca ponerlo en -4*” y procede a oprimir el botón *Mover V*, hacer clic en el punto $(-4,0)$ que hace que el vértice de la parábola se mueva hasta este punto. Oprimen el botón *verificar*, el cual muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*”. Luego oprimen el botón *siguiente* que hace que el valor del parámetro b de la ecuación naranja tome otro valor y el estudiante realice un nuevo ejercicio. Realizan todos los ejercicios de esta tarea correctamente lo cual muestra que el conocimiento de la relación entre la ordenada del vértice de la parábola y el parámetro b de la ecuación canónica de la función cuadrática fue construido con los anteriores ejercicios.

Actividad de modificación de la amplitud

Tarea de Experimentación

PAREJA A

En el primer ejercicio de esta tarea, el parámetro a de la ecuación verde es igual a 1 y el de la ecuación naranja es igual a -1. los estudiantes leen las instrucciones y E2 dice “*Toca bajarlo a -1*” E1 arrastra el punto A hasta ubicarlo en (1,-1) provocando que las dos ecuaciones tengan el mismo valor en el parámetro a , presiona el botón *Verificar* que emite el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y cambia el valor del parámetro a de la ecuación naranja a -2. De la misma manera resolvieron los siguientes ejercicios. Al resolver el último ejercicio y presionar el botón *Verificar* apareció el mensaje “*Explica en tu cuaderno la relación entre el punto A de la parábola y la ecuación*”. Antes de escribir, comentan entre ellos E1:”*cuando tú multiplicas por un número se hace un estiramiento, y por ejemplo, menos uno hace una reflexión*” E2:”*pero estás multiplicando es en la ecuación*” la profesora interviene diciendo que en esta tarea, ellos no modificaron nada en la ecuación, aclarando que lo que estaban diciendo refería a la relación ya mencionada de la primera serie con respecto a qué sucede en la gráfica al cambiar el parámetro a de la ecuación y en este caso se solicitaba lo contrario; a esto E1 responde: “*Pues es que se multiplica por el lugar en dónde esté, por ejemplo si yo pongo el A en -5, se multiplica por menos cinco, entonces a es y*”. En la hoja escriben lo siguiente:

cuando el punto A se modifica en la ecuación ~~el~~ ^{en} este se produce un estiramiento vertical y un encogimiento horizontal, El valor de la ordenada en A con en la ecuación corresponde a y , y en la gráfica a y

Ilustración 233 respuesta de la pareja A

Los estudiantes tuvieron dificultad para expresar la relación entre el punto A y la ecuación, y hacemos la hipótesis de que se dejaron guiar por lo que ya han trabajado en clase con respecto a la transformación de funciones y a la solución de los ejercicios de la primera serie y no realizaron conscientemente la reflexión de lo que estaba sucediendo en los ejercicios de esta tarea

PAREJA B

En el primer ejercicio de esta tarea; el parámetro a de la ecuación verde es 1 y el de la ecuación naranja es igual a -1. Los estudiantes arrastran el punto A para arriba y para abajo y observan lo que sucede. E4 dice: “*aquí V se mantiene en el origen y movemos A*”. Ubica el punto A en la coordenada (1,-1) cambiando el valor del parámetro a en la ecuación verde a -1. Oprimen el botón *verificar* lo cual provoca que se muestre el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y en la ecuación naranja cambia el valor -1 a 3 del parámetro a para iniciar un nuevo ejercicio. E4 dice: “*ponlo en 3*”, ubican el punto A en las coordenadas (1,3) lo cual cambia el valor del parámetro a en la ecuación verde a 3. Oprimen el botón *verificar* y éste muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*”. Realizan correctamente todos los ejercicios hasta que la tarea les pide explicar en el cuaderno la relación entre punto A de la parábola y la ecuación; ellos escriben:

La relación es que entre más cerca esté el punto A del vértice más amplia será la parábola y su valor será más cerca a zero.

Ilustración 244 respuesta de la pareja B

Tarea de Anticipación

PAREJA A

El primer ejercicio de esta tarea tiene a 1 como el parámetro a de la ecuación verde y el parámetro a de la ecuación naranja es igual a -5, El presiona el botón *Mover A* y hace clic en el punto (1,-5) haciendo que el punto A se dirija hasta allí y el parámetro a de la ecuación verde sea igual a -5, de esta manera las dos ecuaciones han quedado iguales y el estudiante presiona el botón *Verificar* que muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” para dar inicio a un nuevo ejercicio. Aparece el mensaje “*Muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y el botón *Siguiente*, que al oprimirlo hace que el parámetro a de la ecuación naranja sea igual a 1. Así resolvieron los demás ejercicios sin cometer ningún error.

PAREJA B

El primer ejercicio de esta tarea muestra el parámetro a de la ecuación verde con valor 1 y -5 el parámetro a de la ecuación naranja, oprimen el botón *Mover A* el cual les muestra el mensaje “*Haz clic en el punto donde debe ubicarse A para que la ecuación verde sea igual a la ecuación naranja.*”, hacen clic en el punto (1,-5) y el punto A se mueve hasta este, presionan *verificar* el cual muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y modifica el valor del parámetro a de la ecuación naranja, iniciando un nuevo ejercicio. Realizan todos los ejercicios correctamente hasta que aparece la opción continuar que les muestra la siguiente tarea.

Actividad de modificación de la abscisa y la ordenada del vértice

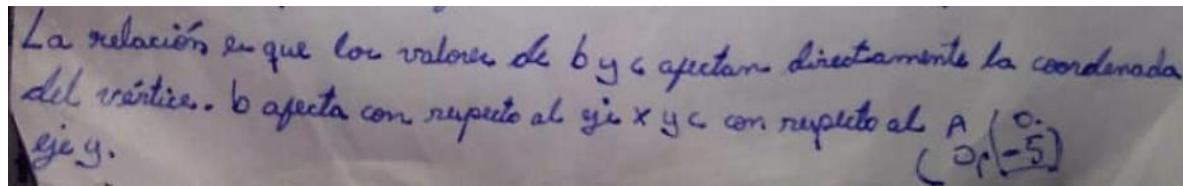
Por cuestiones de tiempo, la pareja A no alcanzó a resolver esta actividad

Tarea de Experimentación

PAREJA B

En esta tarea el primer ejercicio muestra el parámetro c de la ecuación naranja con valor 3 y en la ecuación verde -4; el parámetro b de la ecuación naranja con valor 5 y en la ecuación verde -5.

E4 dice: “*aquí son las dos*” y E3 arrastra el vértice de la parábola hasta el punto (-5,3) a la vez que se modifica el valor de los parámetros. Oprime *verificar*, el cual le muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y cambia el valor de los parámetros b y c de la ecuación naranja. De la misma manera realizan correctamente los siguientes ejercicios de la tarea, hasta que ésta les pide explicar en el cuaderno la relación entre las coordenadas del vértice de la parábola y la ecuación, por lo cual, escriben:



La relación en que los valores de b y c afectan directamente la coordenada del vértice. b afecta con respecto al eje x y c con respecto al eje y .
(Op(-5))

Ilustración 25 respuesta de la pareja B

Tarea de Anticipación

PAREJA B

Como primer ejercicio de esta tarea, se presenta el parámetro c de la ecuación verde con valor 1 y 0 en la ecuación naranja, en el parámetro b de la ecuación verde aparece 1 y -4 en la ecuación naranja. E4 oprime el botón *Mover V* sobre el punto (4,0) haciendo que el vértice de la parábola se ubique en éste y que las dos ecuaciones queden iguales. Oprime el botón *verificar* y este le muestra el mensaje “*muy bien, ahora inténtalo con una nueva ecuación*” y cambia los valores de los parámetros b y c de la ecuación naranja. Realizan todos los ejercicios de ésta tarea correctamente hasta finalizar y de ésta manera terminan las actividades de ésta serie.

Actividad de modificación de la posición del vértice y de la amplitud

No se pudo realizar el pilotaje de esta actividad de modificación de la posición del vértice y de la amplitud, debido a problemas de construcción de la misma.

CONCLUSIONES DEL PILOTAJE

En todas las actividades, los estudiantes realizaron las acciones previstas en el análisis a priori y se generaron las retroacciones previstas que permitieron a los estudiantes la validación e invalidación de sus acciones. Los estudiantes resolvieron correctamente las tareas de anticipación, lo cual es un signo de que construyeron y utilizaron un conocimiento sobre las relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica de la función cuadrática. Además, la evaluación de estas tareas de anticipación permitió identificar correctamente que uno de los dos grupos no estaba utilizando el conocimiento correcto y se les pidió volver a realizar la tarea de experimentación. Al realizar la tarea de experimentación por segunda vez, los estudiantes tomaron conciencia de algunos aspectos que habían pasado por alto en el primer intento y esto les permitió resolver correctamente las tareas de anticipación.

En la actividad de modificación del parámetro b de la serie de conversión del registro algebraico al gráfico, el signo de la abscisa del vértice no corresponde al signo del valor del parámetro, por esto, que a los estudiantes se les dificultó establecer la relación.

Al realizar la actividad de modificación del parámetro a de la serie de conversión del registro algebraico al gráfico, se evidenció que como el punto A no se encuentra sobre ninguno de los ejes, como si ocurre con el vértice; a los estudiantes se les dificultó establecer la relación entre la ordenada del punto con el valor del parámetro a .

Observaciones para la modificación del diseño

Los estudiantes no nombran el vértice de la parábola cuando formulan la relación entre los parámetros b y c de la ecuación y la gráfica de la función. Es posible que si se muestra el punto vértice en las gráficas los estudiantes lo nombren en el momento de la formulación.

Dada la manera en la que se decidió realizar el trabajo con los estudiantes, de iniciar con la serie de conversión del registro algebraico al gráfico, las tareas de experimentación de la segunda serie fueron más de anticipación, pues se evidenció que los estudiantes no probaban con diferentes posiciones del vértice o del punto A para hacer que las ecuaciones fueran iguales, sino que ya sabían en qué posición ubicarlo para cumplir la condición, gracias a lo realizado en las actividades de la primera serie. Pensamos que en futuras implementaciones es posible eliminar las tareas de experimentación en la segunda serie.

Conclusiones Generales

El diseño realizado contribuye a la comprensión de la función cuadrática promoviendo la coordinación de los registros gráfico y algebraico, aprovechando el potencial del software DGPad para: presentar simultáneamente los dos tipos de representación, dar la posibilidad de manipulación de estas representaciones y hacer que los cambios en una representación tengan consecuencias en la otra representación.

En las tareas de experimentación los estudiantes tienen la posibilidad de tomar conciencia de las relaciones entre los dos registros al observar las retroacciones del software cuando ellos modifican una de las representaciones. El hecho de solicitar a los estudiantes que escriban esa relación contribuye a la toma de conciencia de la misma y a su posterior uso en las tareas de

anticipación. Las restricciones impuestas en las tareas de anticipación efectivamente impidieron que los estudiantes (grupo B) utilizaran una estrategia de ensayo y error para resolverlas.

Proyecciones y recomendaciones

El pilotaje realizado permitió controlar de manera general el análisis a priori. Sin embargo, es necesario realizar una experimentación más amplia en condiciones normales de clase para observar y estudiar tanto los procesos de validación y de devolución mediados por el software, como el proceso de institucionalización. Este último requiere una experticia de parte del profesor para aprovechar la interacción con el software con el fin de organizar discusiones grupales sobre la eficacia y la validez de los procedimientos utilizados para resolver los problemas, y la construcción de acuerdos colectivos sobre esa eficacia, esa validez y sobre el lenguaje adecuado para comunicarlos.

Para que las actividades diseñadas tengan el efecto previsto en el aprendizaje de los estudiantes es necesario que estos dispongan de nociones básicas que ya suponen una cierta coordinación entre los registros algebraico, gráfico y numérico. Estas nociones tienen que ver con el plano cartesiano, los ejes de coordenadas, la correspondencia entre posición de un punto y coordenadas del mismo. También son necesarias nociones sobre ecuación y gráfica de una función, en especial entender la gráfica de una función como un conjunto infinito de puntos cuyas coordenadas mantienen una determinada relación que puede expresarse por medio de una ecuación. Sugerimos la realización de diseños para promover el aprendizaje de estas nociones básicas.

De igual manera, el aprendizaje de la función cuadrática no se agota con las actividades propuestas. Es necesario diseñar actividades complementarias para realizar después de las actividades de nuestro trabajo. Por ejemplo, es necesario plantear problemas en los que los

parámetros de la ecuación de la función cuadrática tengan valores decimales y también problemas en los que la gráfica pueda ocupar posiciones alejadas del origen del sistema de coordenadas.

También es necesario plantear actividades en las que los estudiantes deban producir la gráfica de la función a partir de su ecuación y producir la ecuación a partir de la gráfica.

Las ideas utilizadas en el diseño de nuestras actividades, que fueron tomadas y adaptadas del trabajo de Cárdenas y Pinzón (2016), pueden ser utilizadas para trabajar con otros tipos de funciones (polinómicas, trigonométricas, exponenciales).

Para poder aprovechar el potencial del software DGPad en el diseño de actividades, es necesario dedicar tiempo y esfuerzo para la apropiación del uso de las herramientas de construcción y de programación del mismo. Como una contribución a ese esfuerzo de las personas interesadas en utilizar DGPad para producir actividades de clase, hemos recopilado en un sitio web las descripciones detalladas de las figuras DGPad utilizadas en nuestras actividades. El enlace para acceder a dicho sitio web es el siguiente:

http://registrosderekrepresentacionfuncuadratica.atwebpages.com/co/modulo_Funcion_cuadratica.html

Bibliografía

Acosta, M., Monroy, L., y Rueda, K. (2010) *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio*. Revista Integración. Vol. 28. Universidad Industrial de Santander. Recuperado de:

<http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol28N2/V28N2-6Acosta.pdf>

Artigue, M., Doudy, R., y Moreno, L. (1995) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Iberoamérica, S.A. México. Recuperado de:

<http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>

Brousseau G. (1986): *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Cárdenas, Y., y Pinzón, K. (2016) *Diseño de actividades con el software de geometría dinámica CaRMetal, para la enseñanza de la relación de la gráfica y la ecuación de la recta*. (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., y Córdoba, L. (2013) *Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas*.

Universidad Nacional del Litoral. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Santo Domingo. República Dominicana. Recuperado de:

<http://funes.uniandes.edu.co/4072/1/C%C3%B3rdobaDificultadesCemacyc2013.pdf>

Duval, R. (2004) *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. 2^a edición.

Gatica, S., y Ares, O. (2012) *La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos*. Revista de Educación Mediática y TIC. Recuperado de:

<https://www.uco.es/servicios/ucopress/ojs/index.php/edmetic/article/view/2853>

Stewart, J. (2012) *Cálculo de una sola variable. Trascendentes y Tempranas*. Toronto, Canadá. Cangare Liaoning Editores C.V.

Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nafio”. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional —Francisco Morazán. Recuperada de: <http://www.cervantesvirtual.com/research/interpretacion-de-significados-de-la-funcion-cuadratica-en-un-ambiente-computacional-desarrollada-por-estudiantes-de-ii-de-bachillerato-de-la-escuela-normal-mixta-pedro-nufio/8028f7f2-cda6-41cb-b7d9-4a965a73bcf5.pdf>