DISEÑO DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE NÚMEROS EN LOS GRADOS SEXTO A NOVENO

ADRIANA CAMPO FLOR

EDGAR OSWALDO DAZA

YIMI JAVIER LÓPEZ MANZANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2003

DISEÑO DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE NÚMEROS EN LOS GRADOS SEXTO A NOVENO

GRUPO DE INVESTIGACIÓN. "FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA EL DISEÑO CURRICULAR, LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS"

Aprobado por el Consejo de Investigaciones, Resolución No. 004, 18 de febrero de 2002
Universidad del Cauca, Vicerrectoría de Investigaciones
Código VRI: ID 711

ADRIANA CAMPO FLOR

EDGAR OSWALDO DAZA

YIMI JAVIER LÓPEZ MANZANO

Seminario de grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director
CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2003

DISEÑO DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE NÚMEROS EN LOS GRADOS SEXTO A NOVENO

ADRIANA CAMPO FLOR

EDGAR OSWALDO DAZA

YIMI JAVIER LÓPEZ MANZANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2003

CONTENIDO

Nota de Aceptación

CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE
C.C. 10532448 Popayán
Director grupo de investigación
"Formulación y Solución de Problemas"

IDALY COLLAZOS MUÑOZ

Jurado

GLADIS JAZMÍN ESCOBAR MOSQUERA
C.C. 34565509 de Popayán
Jurado

INTRODUCCIÓN

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventiva, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella impercedera en la mente y en el carácter".

"Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero, si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándole problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello".

"Un estudiante cuyos estudios incluyan cierto grado de matemáticas tiene también una particular oportunidad. Dicha oportunidad se pierde, claro está, si ve las matemáticas como una materia de la que tiene que presentar un examen final y de la cual no volverá a ocuparse una vez pasado éste… Habiendo gustado del placer de las matemáticas, ya no las olvidará fácilmente, presentándose entonces una buena oportunidad para que las matemáticas adquieran un sentido para él, ya sea como un pasatiempo o como una herramienta de su profesión, o su profesión misma o la misión de su vida".

George Polya ("Cómo plantear y resolver problemas", Prefacio).

El papel central que en la actualidad juega la resolución de problemas en la educación matemática, resulta natural como característica intrínseca de la misma matemática. Por tal motivo reconocer que resolver problemas es una actividad esencial en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas implica la necesidad de discutir ideas principales alrededor de esta actividad.

Actividades tales como identificar, diseñar y resolver problemas desempeñan un papel fundamental durante el estudio de las ideas matemáticas, profesores y estudiantes tienen que desarrollar continuamente diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su enseñanza y aprendizaje: ***profesores y estudiantes tienen que problematizar el estudio de las matemáticas.*** En este contexto el término problema se vincula no solo a situaciones específicas rutinarias o no rutinarias donde el estudiante intenta encontrar solución o soluciones sino que también incluye el tener que aprender un contenido, es decir el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o del problema; usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas; utilizar ejemplos y contraejemplos para avanzar, resolver, o entender esa situación o problema.

Así la resolución de problemas se relaciona no solamente con el uso y desarrollo de habilidades para que el estudiante tenga acceso y utilice diversos recursos; sino también con estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones. Por lo tanto, en la caracterización de la resolución de problema interesa presentar un panorama general que relaciona directamente el quehacer matemático con el aprendizaje de las matemáticas.

Inicialmente se presentan visiones a cerca de conceptos que ayudará a comprender la complejidad de la resolución de problemas. En este acercamiento se destaca el aceptar a las matemáticas no como una materia con contenido fijo o terminado, sino como una disciplina donde el estudiante tiene la oportunidad de participar activamente en su construcción. Además se establece que una enseñanza bajo el enfoque de la resolución de problemas debe propiciar actividades consistentes con las que los matemáticos o profesores de matemáticas realizan en su interacción cotidiana con esta disciplina.

Posteriormente se desarrollan los aspectos esenciales del proceso de resolución de problemas; algunas concepciones sobre enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas y se presentan algunos ejemplos para ilustrar estas ideas.

El trabajo contiene una selección de problemas que muestran el potencial y la importancia de la reflexión por parte del estudiante en aspectos relacionados con el uso de diagramas o representaciones, estrategias y heurísticas y la necesidad de discutir diversos métodos de solución. Además, se identifica que es importante que el estudiante también reformule o diseñe sus propios problemas. Por esta razón, presentamos un taller que considera algunos problemas típicos, relacionados con la enseñanza de la teoría de números en la educación básica y media, y proponemos un curso de capacitación para profesores y estudiantes de licenciatura.

1. CONCEPCIÓN SOBRE MATEMÁTICAS

Concebimos la matemática como una *disciplina dinámica* porque está en estrecha relación con el desarrollo del pensamiento racional y con el desarrollo de la ciencia y de la tecnología; *con dimensión política y social* porque contribuye a la formación de ciudadanos críticos; *y como actividad cultural* porque considera la sociedad a la que se orienta el proyecto educativo de las matemáticas.

Esta concepción obliga a reformular tanto sus contenidos como su forma de enseñanza. En la teoría de números para educación básica y media, es importante reducir el énfasis en los cálculos aritméticos, especialmente en la memorización de algoritmos o fórmulas, y dar más énfasis al pensamiento numérico, al sentido numérico, al significado de las operaciones, a la evaluación razonable de resultados y a la selección de procedimientos y estrategias adecuadas para resolver problemas.

1.1. CONCEPCIÓN DE LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES BÁSICOS

Del documento *"Matemáticas: Lineamientos Curriculares"* [LC1], retomamos algunos aspectos de la sección 2.3 *Una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela.*

En los últimos años, los nuevos planteamientos sobre la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares. Ha sido importante en este cambio de concepción, el reconocer que el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y periodos históricos particulares y que además, es en el sistema escolar donde tiene lugar gran parte de la formación matemática de las nuevas generaciones y por ello la escuela debe promover las condiciones para que ellas lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos. *El conocimiento matemático es considerado como una actividad social* que debe tener en cuenta los intereses y la actividad del niño y del joven.

Una nueva visión de las matemáticas escolares se fundamenta en aspectos como:

- Aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen solo una faceta de este conocimiento.

- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- Considerar que el conocimiento matemático constituye una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.

- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.

- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.

- Reconocer el impacto e las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.

- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas.

El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar como sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para construcción del nuevo conocimiento.

Como resultado de investigaciones se reconoce hoy el contexto cultural como elemento importante que puede proveer al individuo de actitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y para representar las ideas matemáticas, lo que explica que una determinada cultura desarrolla más significativamente una u otra rama de las matemáticas, sin querer esto decir desde luego que la actitud matemática sea privilegio de una cultura o un grupo. Se ha podido establecer el hecho de que diferentes culturas han llegado a desarrollos matemáticos similares trabajando independientemente y que han realzado actividades matemáticas semejantes, como el contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, actividades éstas que resultan ser universales. Estos elementos analizados en profundidad han permitido a su vez identificar componentes epistemológicas del conocimiento matemático.

En consecuencia la concepción matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia. Los alumnos aportan su propia cultura al aula de matemáticas y a su vez los matemáticos trabajan desde su propia cultura, constituida esta última por su hacer y por los elementos que integran su práctica.

Desde el punto de vista de los modelos de enseñanza que toman como referente la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto la que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje"; a partir de las estructuras que ya posee, de sus concepciones previas, el sujeto construye nuevos significados del objeto de aprendizaje, los socializa, los contrasta con los significados de otros y con el conocimiento socialmente aceptado.

De la conferencia *"Estándares Básicos de Matemáticas"* [TR1], consideramos importante destacar algunos fines y principios de los estándares.

- *Matemática y pensamiento racional*. Las matemáticas se relacionan con el pensamiento racional porque desarrolla capacidades tales como: el razonamiento lógico, la abstracción, el rigor, la precisión, el modelamiento, la exploración, la crítica, la creatividad, etc.

- *Matemática y desarrollo de la ciencia y la tecnología*. Hoy se reconoce la necesidad de alfabetizar no solo en técnicas y destrezas para utilizar la tecnología, sino también que es fundamental formar para la construcción, aplicación y desarrollo de la misma. Se debe preparar ciudadanos que puedan utilizar y adaptar herramientas para desempeñarse críticamente frente a la sociedad actual y la del futuro.

- *Educación matemática para todos*. Como los beneficios de la educación deben extenderse a todos los estratos de la sociedad, todos los niños y jóvenes tienen derecho a aprender matemáticas y se deben desarrollar actitudes de aprecio por las matemáticas.

- *Dimensión política y social para la educación matemática*. La educación matemática debe contribuir a la formación de ciudadanos críticos, a quienes las matemáticas les brinden herramientas para tomar posición frente a situaciones, fenómenos y decisiones de orden nacional, regional, local o particular. Debe comprometerse con ideales sociales y democráticos, incorporando la formación y la difusión de valores sociales, junto con el ejercicio de la crítica como elementos claves en la planificación y desarrollo de innovaciones curriculares.

- *Matemática como cultura*. Las matemáticas también son una actividad humana de razonamiento en contextos de comunicación y validación de acuerdo con propósitos y estrategias educativas. Están en estrecha relación con las funciones políticas, sociales y culturales que cumple todo proyecto educativo; consideran la sociedad en la que se desarrollan; sus metas educativas deben tener un fuerte acento hacia el logro de valores sociales y deben proponer nexos con el mundo exterior.

1.2. CONCEPCIÓN DE ALGUNOS INVESTIGADORES

Luz Manuel Santos Trigo, [ST1], hace referencia a que un punto de vista dinámico de la matemática conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda hacia:

- la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática;
- el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación,
- contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas;
- el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar;
- la resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente;
- la conexión y aplicación de las matemáticas, es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Miguel de Guzmán, [GM1], afirma que el conocimiento de la historia proporciona una *visión dinámica* de la evolución de la matemática, es decir, la historia nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente retante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores, y es ahí donde se siente un enriquecimiento tanto para el que enseña como para el que aprende. Esta visión nos permite desarrollar tanto la capacidad de extrapolación como la inmersión creativa en las dificultades del pasado.

Pedro Gómez, [GP1], afirma que cuando se mira la matemática como una *actividad social y cultural*, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación de conjeturas, y en la que se mira el entorno desde un punto de vista matemático al estar dispuestos a buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas, entonces los resultados cambian. La matemática se convierte en una actividad social en la que se construye el conocimiento, se mira como una ciencia y ser matemático, es ser miembro de una comunidad (como el salón de clase) en la que se construyen matemáticas.

Paul Halmos, [HP1], presenta su concepción sobre matemáticas de la siguiente forma. ¿De qué consiste realmente la matemática? De: ¿axiomas?, ¿teoremas?, ¿pruebas?, ¿conceptos?, ¿definiciones?, ¿teorías?, ¿fórmulas?, ¿métodos?... Seguramente, las matemáticas no pueden existir sin esos ingredientes; ellos son esenciales, sin embargo, un punto de vista es que ninguno de ellos está en el corazón del tema, y que la principal razón para la existencia de los matemáticos es para que resuelvan problemas y que, por lo tanto, las matemáticas consisten realmente de problemas y soluciones. Pienso que los problemas son el corazón de las matemáticas y espero que como profesores en el salón de clase, en seminarios, y en los libros y artículos que escribamos, enfaticemos más y más en ellos. Que entrenemos a nuestros estudiantes para que formulen y resuelvan problemas en forma más eficiente a como lo hacemos nosotros.

Alan Schoenfeld, [TR2], hablando sobre contenido matemático expresa lo siguiente. El peligro en esta clase de punto de vista, "inventario de contenidos", viene de lo que deja por fuera: el punto críticamente importante de que el *pensamiento matemático* consiste de mucho más que el contenido de hechos, teoremas, técnicas, etc. Entender esto fue la esencia del trabajo de Polya, que ha sido significativamente elaborado durante las últimas dos décadas. En pocas palabras, la visión emergente del aprendizaje matemático difiere significativamente en perspectiva, alcance y detalle de la visión tradicional.

En términos de perspectiva global, caracterizo las matemáticas que una persona entiende describiendo lo que la persona puede hacer matemáticamente, en lugar que mediante un inventario de los que la persona conoce. Esto es, cuando enfrentada con situaciones familiares y nuevas que requieren producir o usar ideas matemáticas, ¿puede hacer algo efectivamente?

Los matemáticos adquieren promoción y continuidad produciendo nuevas matemáticas, desarrollando nuevos o profundos entendimientos, identificando nuevas conexiones, solucionando problemas no resueltos. Los matemáticos, dentro o fuera de la universidad, ganan continuidad proponiendo problemas y solucionándolos, o desarrollando nuevos enfoques o reconociendo que un problema nuevo, mirado en la dirección correcta, está estrechamente relacionado con uno familiar (no resuelto). El punto clave aquí es que los matemáticos tienen que usar lo que ellos conoce, el sólo conocimiento no es suficiente.

2. CONCEPTOS Y CLASES DE PROBLEMAS

Para resolver *un ejercicio* uno aplica un procedimiento rutinario (conocido de antemano) que lo lleva directamente a la respuesta. Para solucionar *un problema*, uno hace pausa, reflexiona y hasta puede que ejecute pasos originales que no había ejecutado antes para obtener una posible solución. Esta caracterización de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue a un problema de un ejercicio. Sin embargo, se aclara que esta discusión no es absoluta, depende de la concepción y de los intereses de la persona que se enfrente a buscar una solución.

Retomamos el concepto de problema según algunos autores [FOR1].

George Polya. Tener un problema significa estar ante una situación en la que se debe buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Krulik y Rudnik. Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

Miguel de Guzmán. Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me pueda llevar de una a otra.

Las diversas concepciones, el uso en contextos diferentes y los diversos matices acerca del significado de la palabra “problema”, nos lleva a plantear en términos generales, que *un problema es una tarea o situación, una actividad intelectual, un espacio pedagógico, en el cual aparecen los siguientes componentes*, [ST1].

a. *Aceptación*. Es decir la existencia de un interés por parte de una persona o un grupo de individuos que quieren o necesitan encontrar una solución.

b. *No existencia de una solución inmediata*. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.

c. *Presencia de diversos caminos o métodos de solución* (algebraico, geométrico, numérico, etc.). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución o no tener solución.

d. *Exploración*. Es decir la atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea. Un problema es considerado como tal cuando existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

La idea fundamental en la concepción de lo que es un problema consiste en que el alumno se enfrente a una variedad de situaciones en donde sea necesario analizar y evaluar diversas estrategias en las diferentes fases de solución. En el entendimiento del problema; en el diseño y la implementación de algún plan de solución; en la verificación de la solución y en la búsqueda de conexiones; el estudiante podrá usar diagramas, tablas, ejemplos y contraejemplos, también deberá realizar los ajustes necesarios para avanzar en búsqueda de soluciones. *En esta perspectiva, la palabra problema incluye situaciones en donde se identifique el aprendizaje de determinado contenido.*

Aunque existen varias clasificaciones de problemas, citamos los tipos que consideramos están más estrechamente relacionados con el pensamiento numérico.

George Polya [PG1] considera las siguientes clases de problemas.

Ejercicios Operativos. En este grupo se incluyen aquellos “problemas” que para su solución sólo requieren aplicar una fórmula o ejecutar un algoritmo preestablecido. Este tipo de problemas son los más empleados, pueden ser útiles en la enseñanza cuando se requiere adquirir pericia en dominio mecánico de la fórmula o del algoritmo. No debemos caer en el error de solo limitarnos a utilizar problemas de este tipo.

Problemas por resolver. El propósito de un problema por resolver es determinar o descubrir ciertos objetos (incógnitas, por ejemplo) que satisfacen las condiciones que los relacionan con la información conocida (datos). Las incógnitas pueden pertenecer a una gama muy amplia de conjuntos. Si el problema es geométrico, la incógnita puede ser una figura. En la solución de una ecuación polinómica la incógnita es un número. En un sistema lineal de ecuaciones, la incógnita es un vector.

Problemas por demostrar. Tienen como elementos principales las hipótesis y las conclusiones. El propósito de un problema por demostrar consiste en probar, de manera concluyente, la veracidad o falsedad de una afirmación. En el primer caso se habla de teorema y en el segundo de contraejemplo. Esto puede conducir a teoremas o conjeturas.

Problemas Abiertos. Esta categoría cobija los que, seguramente, son los problemas más interesantes y difíciles, aquellos en los cuales se trata de discernir sobre la veracidad o falsedad de una afirmación o de encontrar una regla o una generalización. Este tipo de problemas son los que se enfrentan los investigadores y no se sabe si tiene o no solución.

Desde la perspectiva del estudiante, consideramos dos clases.

Problemas de aplicación. Son situaciones que se pueden resolver con los conocimientos previos del estudiante y que ponen en juego su capacidad de transferencia a situaciones nuevas.
Problemas de búsqueda. Para el estudiante son verdaderos problemas, ya que no pueden ser resueltos estrictamente con el conocimiento que posee, aunque requieren de su utilización. El objetivo de este tipo de problemas es la construcción de conocimientos por parte del estudiante.

Además de la clasificación anterior, es de gran importancia tomar posición frente a los que se pueden considerar "buenos" problemas para ser utilizados en la enseñanza de la matemática. En este sentido, Schoenfeld plantea lo siguiente [TR2].

Deseo que los problemas para el trabajo de mis estudiantes sirvan como introducción al pensamiento matemático. Los que utilizo en mis cursos tienden a tener las siguientes propiedades.

- *Buenos problemas son (relativamente) accesibles*. Fáciles de entender y que no requieren una cantidad de vocabulario o maquinaria para progresar sobre ellos. Esto no significa que sean conceptualmente fáciles o triviales. Los estudiantes pueden iniciar trabajando sobre el teorema de los cuatro colores y el último teorema de Fermat sin conocer mucho fundamento matemático.

- *Susceptibles a varios métodos de solución*. Es conveniente que los estudiantes vean múltiples soluciones, ya que ellos tienden a pensar, basados en experiencias anteriores, que sólo hay un método para resolver cualquier problema dado (forma que es la que el profesor expone en clase). Los necesito para entender que lo fundamental no es sólo dar una respuesta, sino ver las conexiones.

- *Los problemas y sus soluciones deben servir para introducir ideas matemáticas importantes*. Esto puede ocurrir en (al menos dos formas). Los temas y técnicas matemáticas involucradas en las soluciones pueden ser de importancia acordada. Además, las soluciones pueden ilustrar estrategias y servir como entrenamiento básico para el desarrollo de habilidades de los estudiantes.

- *Deben servir para realizar exploraciones matemáticas*. Problemas de extremos abiertos ofrecen una forma excelente de comprometer a los estudiantes en hacer matemáticas.

- *Extensibles o generalizables*. Los buenos problemas conducen a más problemas, y si el dominio es suficientemente rico, los estudiantes pueden iniciar con el "problema semilla" y apropiarse del dominio.

3. EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas se puede considerar como un medio para desarrollar el pensamiento matemático, puesto que el proceso de resolver problemas está en "el corazón de las matemáticas"; como herramienta para vivir diariamente porque es un proceso mediante el cual las matemáticas pueden ser aplicadas a una variedad de situaciones no familiares; es además un proceso que puede enriquecer el razonamiento lógico porque resolver un problema es un proceso similar a demostrar un teorema y a diseñar un algoritmo de programación.

Otra perspectiva consiste en considerar el proceso como objetivo general de la matemática, y por lo tanto como logro fundamental de toda la educación. En esta dirección, Santos Trigo [ST1] considera la resolución de problemas como:

- Vehículo para lograr metas curriculares que pueden incluir aspectos relacionados con motivación, creación, justificación o práctica (como contexto).

- Como una habilidad que se debe enseñar en el currículo.

- Como un arte en el sentido de simular la actividad matemática dentro del salón de clases.

Desde el punto de vista didáctico [ENF], resolución de problemas puede identificarse como una modalidad didáctica en la cual el docente genera situaciones para que los estudiantes exploran conceptos, aprenden procedimientos, argumentan sobre sus ideas y las de sus compañeros, se aproximan a demostraciones, prueben resultados, analizan y generan aplicaciones y, en general, aprenden matemáticas mediante un método de enseñanza similar al método de investigación.

3.1. ETAPAS DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya [PG1] identifica cuatro etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos juega un papel importante. De manera general estas etapas son las siguientes.

- ***Comprender el problema.*** En esta fase se ubican las estrategias que ayudan a entender y representar las condiciones del problema. Se debe tener claridad en aspectos tales como: las incógnitas, los datos y las condiciones.

- ***Concebir un plan.*** Una vez determinadas las relaciones entre los datos y las incógnitas, se recomienda examinar los conocimientos previos, identificar problemas auxiliares, pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver y así establecer un plan de solución. En psicología, la habilidad de establecer relaciones se considera un indicador de inteligencia. Es importante que el individuo diferencie propiedades estructurales profundas de características superficiales.

- ***Ejecución del plan.*** Implementar el plan que se escogió hasta solucionar completamente el problema, si es posible, o hasta que la misma acción sugiera considerar un nuevo plan. En esta etapa se deben considerar aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución.

- ***Examinar la solución obtenida*.** Una vez que se ha obtenido una solución, verificando cada paso del razonamiento, hay motivos para creer que es correcta, pero puede haber errores si el razonamiento es largo y enredado, por lo cual es recomendable verificar la solución y el razonamiento completo. Una idea fundamental es tratar de resolver el problema en una forma diferente y analizar la solución obtenida. También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

Comúnmente, los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada el enunciado a una forma equivalente del problema en la que se usa representaciones matemáticas, resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta contrastándola con las condiciones del problema original. Este proceso es muy similar al modelamiento matemático.

Las fases anteriormente expuestas no deben tomarse independientes entre sí, tampoco debemos suponer que ellas poseen una estructura lineal. Sus interrealaciones pueden ser múltiples. El siguiente párrafo ilustra algunas de las relaciones entre las etapas.

Si se comprende el problema, se puede concebir un plan; si se concibe un plan, se comprende el problema. Si se diseña un plan, se puede ejecutar; al ejecutar el plan puede no ser exitoso y se debe concebir un plan alterno. Similarmente, si se ejecuta un plan, se puede evaluar; al evaluarlo es posible identificar errores en la ejecución, se debe volver a ejecutarlo. Finalmente si se examina lo hecho, se tiene una visión retrospectiva y es posible regresarse al problema y conocerlo en una forma más profunda, o mejor aún, formular nuevos problemas relacionados con el problema original.

3.2. ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya complementa la descripción de las cuatro etapas del proceso con preguntas, sugerencias, y otros aspectos que pueden considerarse como estrategias o heurísticas. A la propuesta original de Polya, hemos agregado algunos otros aspectos.

Comprender y familiarizarse con el problema.

¿Entiendes todo lo que dice el enunciado del problema?
¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
Identificar datos, incógnitas, condiciones y posibles contradicciones.
Determinar relaciones entre los datos y las incógnitas.
Verificar si estos datos y condiciones son suficientes para encontrar las incógnitas.
Trazar un diagrama, hacer una lista, elaborar tablas.
Examinar casos particulares.
Intentar simplificar el problema.
Enunciar el problema en diferentes formas, representaciones y notaciones.

Trazar un plan y buscar estrategias de solución.

Identificar los recursos conceptuales y heurísticos, o de sentido común, que parecen adecuados para el problema.
Revisar sus experiencias, sus conocimientos.
¿Ha visto el mismo problema antes?
¿Ha visto el mismo problema bajo una forma ligeramente diferente?
¿Conoce algún problema relacionado?
¿Puede pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma pregunta?
¿Puede enunciar el problema de otro modo? ¿Puede enunciarlo aún en otra forma?
Evaluar su plan.
¿Está convencido de su plan? Su estrategia ¿utiliza todos los datos, utiliza todas las condiciones? ¿Ha tomado en cuenta todos los conceptos esenciales?
Especializar. Considerar casos particulares. Tabular, diagramar, identificar regularidades
Ensayo – error (conjeturar y verificar).
Manipular, experimentar, extraer pautas.
Sacar partido de la simetría
Dividir el problema en partes.
Seleccionar los objetivos fundamentales y los objetivos secundarios.
Suponer que no (reducción al absurdo).
Empezar el problema desde atrás.
Variar las condiciones del problema.
Consultar.
Con sus compañeros, con su profesor, en fuentes de información.

Ejecutar el plan Lleva adelante tu estrategia.

Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para la solución del problema, ello sugiere atender a las siguientes recomendaciones.
Aplicar los algoritmos que se consideran útiles en la búsqueda de soluciones.
Seguir un método (organización).
Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.
¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
¿Puede usted demostrarlo?
Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.
No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.
Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, grafico, numérico.
Deducir y sacar conclusiones
Conjeturar

Examina lo hecho.

La verificación de las respuestas obtenidas en la fase anterior, la evaluación de los procesos realizados para obtener las soluciones son aspectos importantes y permiten que el estudiante los interiorice para que pueda aplicarlos en la resolución de futuros problemas semejantes.
¿Puede usted comprobar la respuesta?
¿Puede usted comprobar los argumentos?
¿Puede obtener el resultado por un camino diferente?
¿Puede usted “ver” la respuesta de una sola mirada?
¿Puede usar el resultado o el procedimiento para resolver otro problema?
¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?
¿Puedes formular otros problemas relacionados con el que solucionaste?
Verifica la solución los criterios específicos siguientes

Utiliza todos los datos pertinentes
Esta acorde con predicciones o estimaciones razonables
Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala
Puede quedar concretada en casos particulares
Es posible reducirla a resultados conocidos

4. ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A finales de los años 50 y comienzos de la década de los 60, se producen cambios curriculares en la enseñanza de las matemáticas escolares en todos los países. La matemática nueva o matemática moderna y el regreso a lo básico, fueron movimientos donde el estudiante desarrollaba ciertas formas de operar con las ideas matemáticas que no mostraban las características propias de esta disciplina. En este contexto surge la propuesta de relacionar el currículo, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con la resolución de problemas.

En la década pasada se ha sugerido que las técnicas resolución de problemas pueden hacerse disponibles más efectivamente mediante el hacer de la resolución de problemas el foco del currículo matemático. Aunque problemas han sido tradicionalmente una parte del currículo matemático, comparativamente *ha sido muy recientemente que resolución de problemas vino a ser mirada como un medio importante para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*.

En el pasado la resolución de problemas había tenido un lugar en la clase de matemáticas, pero usualmente era utilizada en una forma estática como un punto de partida para obtener una sola respuesta correcta, tradicionalmente siguiendo un solo procedimiento “correcto”. Sin embargo, recientemente, organizaciones profesionales tales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomiendan que *el currículo matemático debe ser organizado alrededor de resolución de problemas*, enfocado sobre:

- Desarrollar destrezas y la habilidad para aplicar esas destrezas en situaciones no familiares.

- Obtener, organizar, interpretar y comunicar información.

- Formular preguntas claves, analizar y conceptuar sobre problemas, definir problemas y metas, descubrir patrones y semejanzas escoger datos apropiados, experimentar, transferir destrezas y estrategias a nuevas situaciones

- Desarrollar *curiosidad, confianza y pensamiento abierto (NCTM, 1980, pp.2-3).*

4.1 ¿QUÉ ES ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

En relación con esta pregunta, *Miguel de Guzmán* [GM1], opina lo siguiente.

La enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo y de inculturación.

La enseñanza a través de la resolución de problemas pone énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no debe en lo absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante que el estudiante:

- manipule los objetos matemáticos,
- accione su propia actividad mental,
- ejercite su creatividad,
- reflexione sobre su proceso de pensamiento para mejorarlo conscientemente,
- que adquiera confianza en sí mismo,
- se divierta con su actividad mental,
- se prepare así para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana,
- se prepare para los nuevos retos de la tecnología y la ciencia.

Entre las ventajas que tienen la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas tenemos las siguientes.

- Porque lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes es la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- Porque como el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y cultura no se hacen obsoletos.
- Porque este trabajo resulta atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

Como el énfasis se ha trasladado desde enseñar a resolver problemas hasta enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, muchos escritos han intentado clarificar lo que significa una aproximación de la enseñanza de las matemáticas mediante resolución de problemas. *El foco consiste en enseñar tópicos matemáticos a través de contextos de resolución de problemas y medios ambientes orientados por indagaciones que* *se caracterizan porque el profesor ayuda a que los estudiantes construyan un profundo entendimiento de las ideas y procesos matemáticos animándolos a hacer matemáticas: creando, conjeturando, explorando, examinando y verificando.*

Algunas características específicas de una aproximación a la enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas incluyen las siguientes [TR2].

- Interacciones entre estudiantes-estudiantes y profesor-estudiantes.
- Dialogo matemático y consenso entre los estudiantes.
- Los profesores proveen solo suficiente información para establecer las bases relacionadas con el problema, y los estudiantes clarifican, interpretan e intentan construir uno o más procesos de solución.
- Los profesores aceptan respuestas correctas y erradas.
- Los profesores guían, entrenan, hacen preguntas y comparten en el proceso de resolución de problemas.
- Los profesores saben cuando es apropiado intervenir, y cuando esperar a que los estudiantes realicen sus propias acciones.
- Un característica adicional es que una aproximación resolución de problemas puede ser usada para animar a que los estudiantes hagan generalizaciones sobre reglas y conceptos, proceso que es fundamental en matemáticas.

4.2. EL PAPEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS COMO UN PROCESO

La resolución de problemas es una componente importante de la educación matemática porque es el vehículo capaz de alcanzar en la escuela los tres valores fundamentales de la matemática: funcional, lógico y estético.

Valor Funcional. La matemática es una disciplina esencial debido a su papel práctico para el individuo y la sociedad. A través de esta aproximación, puede ser desarrollado este aspecto de las matemáticas. *Presentar un problema y desarrollar las habilidades necesarias para resolverlo es más motivador que enseñar las habilidades sin contexto*. Tal motivación da a la resolución de problemas un valor especial como vehículo para el aprendizaje de nuevos conceptos y destrezas o para reforzar habilidades ya adquiridas. Aproximarse a matemáticas a través de resolución de problemas puede crear un contexto que simule la vida real y por lo tanto justifica la matemática en lugar de tratarla únicamente como un fin en sí misma. La resolución de problemas debe ser un foco de la enseñanza de las matemáticas, porque ella abarca habilidades y funciones que son una parte importante de la vida diaria. Debe influenciar todos los aspectos de la enseñanza de matemáticas para dotar de experiencia a los estudiantes del poder de las matemáticas en el mundo a su alrededor. Es *un vehículo para que los estudiantes construyan, evalúen y refinen sus propias teorías sobre matemáticas y las teorías de otros.*

Valor Lógico. Resolución de problemas e*s una habilidad que puede enriquecer el razonamiento lógico*. Los ciudadanos ya no pueden funcionar óptimamente en la sociedad solo conociendo las reglas a seguir para obtener una respuesta correcta. Ellos también necesitan ser capaces de decidir a través de un proceso de deducción lógica cuál algoritmo, si hay alguno, requiere una situación, y algunas veces necesita ser capaz de desarrollar sus propias reglas en una situación donde un algoritmo no puede ser aplicado directamente. Por esas razones *resolución de problemas puede ser desarrollado como una habilidad importante por sí misma, una forma de pensamiento*, en lugar que simplemente como un medio para el fin de encontrar la respuesta correcta.

Si la educación falla en contribuir al desarrollo de la inteligencia, es obviamente incompleta. *Aún la inteligencia es esencialmente la habilidad para resolver problemas: problemas diarios, problemas personales*. Definiciones modernas de inteligencia hablan sobre la inteligencia práctica que permite al individuo resolver problemas genuinos o dificultades que él o ella han encontrado y también los compromete en encontrar o crear problemas de donde se genera el trabajo básico para la adquisición de nuevo conocimiento. Como anotamos antes, las matemáticas clásicas, con el énfasis sobre la adquisición de conocimiento, no necesariamente satisface esas necesidades.

Valor estético. *La Resolución de problemas permite a los estudiantes experimentar un rango de emociones asociados con varias etapas en el proceso de solución*. Los Matemáticos que han resuelto problemas exitosamente dicen que la experiencia de haberlo hecho contribuye a una apreciación por el *poder y la belleza de las matemáticas*, el regocijo de golpear su cabeza ante una pared matemática, y luego descubrir que hay formas de ir alrededor de esa pared.

Aquí, es conveniente recordar la afirmación de Polya.

> *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventiva, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella impercedera en la mente y en el carácter".*

4.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ENSEÑANZA DE VALORES

Uno de los propósitos de la enseñanza a través de resolución de problemas es comprometer a los estudiantes en refinar y construir sus propios procesos y con el tiempo cuando sus experiencias les permitan descartar algunas ideas y dar con otras posibilidades adicionales. Cuando desarrollen conocimiento, los estudiantes también desarrollarán entendimiento sobre cuando es apropiado o no usar estrategias particulares. Mediante el uso de esta aproximación *el énfasis es hacer de los estudiantes más responsables de su propio aprendizaje* en lugar de decirles que los algoritmos que ellos usan fueron inventos de algún "experto" externo y desconocido.

Como hemos dicho, se da importancia considerable a que los estudiantes realicen actividades exploratorias, de observación y descubrimiento. *Los estudiantes necesitan desarrollar sus propias teorías, examinarlas, examinar las teorías de otros, descartarlas si no son consistentes, y tratar algo distinto*. Peden involucrarse aún más en resolución de problemas mediante la formulación y solución de sus propios problemas, o rescribiendo problemas en sus propias palabras para facilitar el entendimiento. Es de particular importancia anotar que ellos son animados a discutir los procesos que han entendido, para obtener nuevas luces sobre el problema y comunicar sus ideas.

Por muchas razones, el estado de la sociedad ha llegado a una etapa en la que es más crítico que antes educar a las personas en los valores tradicionales de su cultura. En años recientes hay discusión considerable sobre si es responsabilidad de la escuela impartir *valores educativos*. Hay presión sobre los profesores para que enseñen esos valores, discutiendo y criticando aspectos relacionados con esos valores.

Un enfoque particular sobre formas en las que valores educativos pueden ser incrementados utilizando una aproximación resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas, se relaciona con los siguientes valores.

- *Equipar a los estudiantes para enfrentar los retos de la vida*
- *Desarrollar conocimiento general y sentido común*
- *Aprender como discernir en el uso del conocimiento, esto es conocer qué conocimiento es apropiado de usar para qué propósitos*
- *Integrar lo que es aprendido como un todo*
- *Despertar la atención y el interés en el campo del conocimiento para que sea dominado en una forma importante*

Todo ciudadano necesita ser capaz de *pensar por sí mismo* en un medio ambiente constantemente cambiante, particularmente cuando la tecnología facilita el acceso y la manipulación de grandes cantidades de información. También necesita tener capacidad para *adaptarse a situaciones no familiares o impredecibles,* más ahora que en el pasado.

La enseñanza de las matemáticas abarca habilidades y funciones que son parte de la vida diaria, como son:

- *interpretar un mapa para encontrar direcciones,*
- *entender reportes de tiempo,*
- *entender indicadores económicos,*
- *entender modelos de pagos,*
- *estimar o calcular cual de los artículos rebajados es mejor comprar.*

Hay, al menos, tres tipos de problemas a los cuales deben ser expuestos los estudiantes, problemas que permiten incrementar los valores anteriormente descritos.

Problemas orales donde el concepto está inmerso en una situación del mundo real y se requiere que el estudiante reconozca y aplique el algoritmo o la regla apropiada (*preparar a los estudiantes para retos de la vida*).

Mediante la resolución de este tipo de problemas, los estudiantes aprenden a discriminar el conocimiento que se requiere para ciertas situaciones y a *desarrollar su sentido común*. Algunas veces es importante presentar un problema que contiene mucha información, para que los estudiantes seleccionen lo que es apropiado y relevante.

Otro tipo de problemas que compromete a los estudiantes a ser *recursivos* es aquel en el cual no se da suficiente información (Problemas tipo Fermi), estos problemas son aptos para ser resueltos en un medio ambiente *cooperativo* y pueden ser relacionados con *aspectos sociales*.

Se recomienda, como hemos insistido, que se anime a los estudiantes para que construyan sus propios problemas. Esto los compromete a ser *flexibles* e identificar que puede haber más de una forma de mirar en un problema. Además, el profesor puede asignar un tema para que los problemas que los estudiantes deben construir incluyan la actividad de *ayudar a otros* o relacionarlos con aspectos de su vida social.

Problemas no rutinarios que requieren un alto grado de interpretación y organización de información en el problema, en lugar que del solo reconocimiento y aplicación de un algoritmo (*compromiso con el desarrollo de conocimiento general y sentido común*). Pueden ser utilizados para comprometer pensamiento lógico, reforzar o extender la comprensión de conceptos y para desarrollar estrategias de la resolución de problemas que pueden ser aplicadas a otras situaciones.
Problemas "reales" relacionados con investigar un problema que es real para los estudiantes, no necesariamente tienen solución fija, y usa las matemáticas como una herramienta para encontrar una solución (*comprometer a los estudiantes en el servicio a la sociedad*). Se utilizan para realizar investigaciones comenzando en el salón de clase, permiten que los estudiantes se conviertan en "productores de conocimiento en lugar que sólo consumidores".

Problemas para Investigaciones matemáticas pueden ubicarse en algunas de las tres categorías anteriores. Problemas que parten de preguntas realizadas por los estudiantes o propuestas por el profesor tales como: ¿podemos hacer lo mismo con otros números?, o, ¿qué ocurre si tal cosa?, ¿qué ocurre si reducimos las condiciones? , etc.

Al comienzo de una investigación, los estudiantes no saben si tendrán una respuesta adecuada o más de una respuesta. Además, el profesor o no conoce el resultado, o pretende no conocerlo. Una aproximación investigativa es adecuada para muchos tópicos del currículo e involucra *comunicación, confianza, motivación* y entendimiento como también pensamiento matemático. El uso de esta aproximación hace que los estudiantes piensen sobre lo que ellos están haciendo y no sólo efectúen tareas rutinarias.
Finalmente, insistimos una vez más, que en la resolución "investigativa" de problemas los estudiantes deben ser animados a que realicen sus propias preguntas. El profesor puede introducir un "punto de partida" para toda la clase, solicitar a los estudiantes que lo trabajen durante corto tiempo, solicitarles que hagan sus propias preguntas (las que se les ocurran mientras trabajan), y reunir un "pool" de ideas. Inicialmente, el profesor puede proponer algunos ejemplos de preguntas:

- ¿esto funciona siempre?
- ¿hay alguna razón para que esto ocurra?
- ¿hay alguna conexión entre esto y eso otro?

Los estudiantes deben ser invitados a mirar el trabajo de cada uno de los otros y, especialmente, si ellos tienen respuestas diferentes, a discutir sobre quién tiene la razón.

4.4. PAPEL DEL PROFESOR

Aunque en las secciones anteriores es posible identificar, tanto el papel del profesor como el papel del estudiante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, consideramos conveniente dedicarle una sección aparte.

La principal función del profesor consiste en la selección de "buenos" problemas, para implementarlos en sus experiencias de aula. Sus acciones se deben asemejar a las de un entrenador, más que a las de un poseedor del conocimiento.

Alan Schoenfeld [ST1] plantea lo siguiente.

Un aspecto crucial en la enseñanza de la matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos en su aprendizaje. Así, un estudiante que se desarrolle en un ambiente matemático donde se utilicen naturalmente estrategias para leer, conceptuar y escribir argumentos matemáticos, será más capaz de aprender en otros dominios y adquirir nuevas habilidades. En este sentido, no es importante cubrir amplios contenidos sino centrar el aprendizaje en las ideas básicas. El propósito principal de la enseñanza basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje de estrategias y habilidades, sino permitirles pensar por sí mismos. El valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar.

El papel del profesor en el salón de clase incluye:

- Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuenta que un problema es un problema cuando el estudiante muestra algún interés por resolverlo.
- Construir una atmósfera que le de confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.

- Permitir que los estudiantes (y motivarlos) seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando esta sea necesaria.

Un maestro de matemáticas debe conocer ampliamente los temas a enseñar y a los estudiantes a quienes están dirigidos, así como diferentes estrategias para el intercambio de conocimientos con ellos. Al brindarles ayuda para la ejecución de su trabajo esta debe ser discreta y moderada (ni mucha ni muy poca), manteniendo así su ilusión de progreso sin imponerse. Animarlos constantemente para que creen nuevas ideas y conceptos desde su propio contexto, siendo cuidadoso al juzgarlos, ya que hay diversos estilos de aprendizaje y comunicación entre ellos, permitiendo así que miren más de cerca las ideas del pensamiento matemático (cambio, patrones, formas, tamaños y herramientas), de tal manera que identifiquen que el lenguaje común que utilizan no está tan lejos del lenguaje matemático.

Las actividades en clase deben surgir de situaciones problema acordes con la madurez, tanto matemática como cultural, y con las experiencias de los estudiantes. La tarea principal del profesor consiste en desarrollar en sus discípulos la actitud para resolverlos haciendo que se enfrenten a diferentes situaciones de imitación y práctica.

El interés por los problemas empieza cuando el profesor expone sus propias experiencias, dificultades e inquietudes ante sus alumnos, por lo cual debe "dramatizar" sus ideas y preguntas (partir de una situación general o de una sugerencia, para ir poco a poco hacia preguntas más precisas y concretas, en forma natural y simple). Es también conveniente asegurarse de que los razonamientos sean los más apropiados e idóneos, lo cual se logra revisando y verificando cada paso, antes de que sus alumnos se lancen a realizar cálculos que los puedan traumatizar si no encuentran la solución adecuada.

Cuando considere que los estudiantes han adquirido confianza en sí mismos, construir una atmósfera agradable que le permita atacar problemas no rutinarios, dejando que identifiquen y desarrollen sus propios caminos de abordaje y solución hasta llegar a proponerles que diseñen sus propios problemas, dándoles ayuda solo cuando sea necesario y poniendo mucha atención a las estrategias utilizadas (pueden surgir algunas novedosas).

En ocasiones, cuando se resuelve un problema, el profesor propone varios caminos de solución, los cuales discute en clase formando pequeños grupos y que sean los alumnos los que propongan el más efectivo a seguir; de esta manera se dan a conocer las diferentes dificultades que surgen cuando se intenta resolver un problema. Esto hace desarrollar un espíritu investigador y creativo que estimula su curiosidad intelectual. Es clave y fundamental que el docente de a conocer a sus alumnos que el planteo de un problema debe de ser claro con una notación sencilla y familiar, de manera que los datos, incógnitas, notaciones se puedan manipular fácilmente. Además, insistir que el problema no termina cuando se encuentra la solución sino que es aquí cuando nace el verdadero reto (buscar la solución más adecuada, más general, crear nuevos problemas).

4.5. PAPEL DEL ESTUDIANTE

> *"El resolver problemas es cuestión de habilidad práctica como, por ejemplo, el nadar. Habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes".* George Polya [GP1].

Alan Schoenfeld [ST1], sostiene lo siguiente.

Para que los estudiantes vean la matemática como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e internalicen los principios asociados a ella. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clases que presente un microcosmos de la cultura matemática, esto es, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sena reflejados en la práctica cotidiana.

Así mismo, sostiene que entre los principios importantes para el aprendizaje de las matemáticas se incluyen que el estudiante reconozca que:

- Encontrar la solución de un problema no es el final de la empresa, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema. Además, en el desarrollo de las matemáticas el proceso de formular o rediseñar problemas se identifica como un componente esencial en el quehacer matemático.
- Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Es decir, el planteamiento de preguntas, la búsqueda de respuestas y de justificaciones son actividades que se pueden practicar desde la

enseñanza elemental y su práctica cotidiana pueden producir resultados matemáticos nuevos.

La principal condición que debe presentar un estudiante es el deseo de aprender a solucionar problemas, lo cual se consigue imitando y practicando lo que el profesor desarrolla en clase. Es importante que entienda que *aprender matemática es un proceso activo* que requiere discusiones sobre conjeturas y pruebas, que lo guía al desarrollo de nuevas ideas matemáticas (surgimiento de habilidades que le ayudan a cuestionarse y a cuestionar, a crear, a trabajar en equipo, a ser autónomo, etc.).

Un componente fundamental del proceso de aprendizaje es el de solucionar problemas. Por lo tanto, el estudiante debe interactuar con una variedad de problemas para que pueda analizar la calidad de los diversos métodos y estrategias de solución, para que identifique la importancia de utilizar argumentos matemáticos en todas sus posiciones y afirmaciones.

El estudiante debe ser consiente de que su experiencia en matemáticas es incompleta, mientras no tenga ocasión de proponer o formular sus propios problemas, que pueden surgir en su vida diaria y en su entorno.

Frente a un problema, el estudiante no debe rendirse ante varios intentos de solución sin éxito, por el contrario debe motivarse para aceptar el reto. Debe insistir en la búsqueda de nuevos caminos; debe consultar con sus compañeros, con sus profesores o, si es del caso, con especialistas.

Por otro lado, una vez que han logrado resolver un problema, es fundamental que los estudiantes expongan ante la clase sus métodos y estrategias de solución, para que comuniquen y justifiquen sus argumentos. Se deben discutir las estrategias generales y las componentes asociadas a cada una de ellas. Esto permite que los estudiantes realicen actividades de auto evaluación para convencerse a si mismos y de evaluación para convencer a sus compañeros.

4.6. EL AULA DE CLASE

En su conferencia sobre Estándares Básicos de Matemáticas, Trujillo [TR1] propone identificar *el aula de clase como laboratorio* donde:

- se experimentan valores como: someter las ideas al escrutinio público, construir el conocimiento en prácticas de cooperación, argumentar como medio para convencer al otro y para vincularlo a un proyecto de interés común;
- los procesos de conjetura y validación son las herramientas sustanciales de las interacciones entre maestro y estudiantes y entre estudiantes;

- la necesidad de argumentar y demostrar surge como consecuencia natural de acuerdos y desacuerdos grupo - clase, estudiante - clase, estudiantes – profesor;
- se favorece también el desarrollo individual cuando se toma conciencia del proceso constructivo de las matemáticas para intervenir la realidad.

El salón debe proporcionar un medio ambiente agradable que refleje actividades en las cuales los estudiantes, guiados por su profesor, toman parte en el desarrollo y creación de las matemáticas, para que le encuentren sentido a su estudio y aprendizaje.

El aula de clase debe reflejar un ambiente similar al de una (micro) comunidad matemática, donde las ideas surgen, se enseñan y se aprenden por medio de un proceso "investigativo" y de comunicación. Es decir los estudiantes dialogan y discuten para llegar a acuerdos que luego exponen, justifican y someten al escrutinio público. Esto hace que el profesor y sus estudiantes participen activamente en todas las actividades propias del proceso educativo.

El aula de clase se concibe así como un medio ambiente donde regularmente se exploran problemas interesantes que lleven a generar ideas, conceptos y resultados matemáticos fundamentales. El profesor debe transformar ejercicios rutinarios en problemas de tal forma que los estudiantes los sientan como propios. Las actividades en el aula de clase deben convertirse en trabajos de cooperación (profesor, estudiantes y comunidad), donde cada uno opina, escucha y se hace escuchar.

En este orden de ideas, siguiendo algunas de las sugerencias de Santos Trigo [ST1], proponemos realizar las siguientes actividades en clase.

1. Exposiciones del profesor. El maestro propone situaciones problemáticas. Ilustra los "movimientos reales" que emplea cuando él resuelve problemas matemáticos (ideas y estrategias), incluyendo "falsas movidas" y proponiendo varias formas de solución exitosas.
2. Discusión en grupos pequeños. Organizar el trabajo en grupos pequeños durante la clase de tal manera que todos participen activamente sugiriendo y explorando conjeturas que ayudan a evaluar constantemente las ideas.
3. Presentaciones individuales por parte de los estudiantes. Ante todo el grupo, los estudiantes exponen y justifican sus ideas (aprenden a comunicarlas y las desarrollan alrededor de un argumento). El estudiante debe recurrir a diversos ejemplos y contraejemplos o a utilizar diferentes representaciones para convencer a sus compañeros de que lo que esta presentando posee estructura o consistencia, siendo su principal prioridad "convencer".
4. Participación grupal. Aparece cuando la clase en su conjunto intenta resolver algún problema, donde el maestro evalúa y coordina las ideas sugeridas por los estudiantes, sabiendo cuestionar y promoviendo su participación. Es necesario e indispensable que exista una retroalimentación constante durante el desarrollo de toda a actividad.

4.7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EVALUACIÓN

En la página del Enfoque [ENF], se plantean algunas preguntas importantes para ser discutidas por los profesores: ¿cómo evaluamos?, ¿qué papel desempeña la evaluación en el proceso de aprendizaje?, ¿qué relación existe entre las formas en que evaluamos a nuestros alumnos y lo que sabemos acerca de la evaluación y del aprendizaje?, ¿qué rol puede jugar la tecnología informática en la evaluación del aprendizaje?

La forma en que evaluamos incide, de un modo decisivo, en el sentido que el conocimiento adquiere para el estudiante, así como en las percepciones que ellos desarrollan acerca de sí mismos y acerca de su potencial de aprendizaje. Las actitudes hacia la escuela y el aprendizaje, también se ven afectadas por la forma en que se realiza la evaluación. La evaluación, tiende a determinar el currículo real: "es importante lo que se evalúa, lo que 'entra' para la prueba". Por último, en muchos casos, la evaluación reemplaza la motivación intrínseca. En efecto, es frecuente que se estudie por motivaciones externas, principalmente por las calificaciones o, más bien, por los efectos que esas calificaciones producen en la vida del estudiante.

De un modo complejo, difícil de rastrear en sus causas, sostenido en el tiempo y muy generalizado, la práctica escolar ha reducido la evaluación a la calificación de los resultados del aprendizaje, según son determinados por medio de pruebas e interrogaciones construidas por el profesor. Sobre la base de la experiencia personal, de un modo más o menos espontáneo - en el sentido de no recurrir necesariamente al conocimiento especializado en evaluación que cada uno conoció en las etapas de formación o de actualización - se generan algunas preguntas que se proponen a los estudiantes. Luego, también en un proceso algo estereotipado por la repetición y alejado del conocimiento técnico, se "corrigen" las respuestas y se "coloca nota"

Sabemos mucho más que eso acerca de cómo evaluar, qué evaluar y con qué recursos hacerlo, pero una práctica escolar generalizada influye para que la evaluación no sea lo que se espera. En efecto, una forma de aplicar los reglamentos o formas algo rutinarias de educar, también las malas condiciones en que trabajan la mayoría de los profesores, las mismas pruebas nacionales que acentúan cierto tipo de aprendizajes, en fin, la rutina escolar, que más se relaciona con formas de administrar el proceso educativo que con el conocimiento aportado por la pedagogía o la psicología del aprendizaje, influyen para que la evaluación se reduzca a la "colocación de notas".

De otra parte, no sólo cada docente por formación y experiencia, sabe mucho más de técnicas y procedimientos de evaluación que los que aplica o puede aplicar, sino que el conocimiento acerca de estos temas ha cambiado radicalmente en los últimos años.

Todo hace pensar que este es un momento adecuado para experimentar con formas innovadoras de evaluación. En efecto, tanto nacional como internacionalmente, se observa un interés creciente en la educación y - en un intento de poner nuevos modelos de enseñanza a funcionar- un énfasis en ampliar las modalidades de evaluación y del rango de aprendizajes a evaluar.

La evaluación es una parte central del proceso curricular. La forma en que se evalúa el aprendizaje condiciona el estilo curricular, las formas posibles de enseñanza, la administración del proceso y las actividades de aprendizaje. Esto es, para poner en práctica una idea pedagógica, tanto lo que se quiere enseñar (el currículo), la forma en que se organizan las experiencias de aprendizaje (las prácticas pedagógicas) y la evaluación, deben formar un todo, ser congruentes y mutuamente reforzadores y, por lo tanto, participar de una filosofía común.

El verdadero perfeccionamiento proviene de la capacidad del docente para poner a prueba sus ideas y aprender de los resultados de esa experiencia. La sala de clases, las experiencias en que los profesores interactúan con sus estudiantes son el terreno más adecuado para facilitar el aprendizaje, no sólo de los alumnos, sino también del profesor. Es más, sabemos que existen profesores, en los más diversos lugares y en las más diversas condiciones que han experimentado, experimentan y experimentarán formas innovadoras de educación. Para esos profesores la sala de clases ha sido su laboratorio de aprendizaje permanente.

Sabemos también que, dado el ritmo de trabajo habitual de un docente, es muy difícil que pueda realizar todas sus tareas profesionales con la debida dedicación, preparación y correspondiente cuota de reflexión. *Por eso es que proponemos que, al menos, una vez al año, usted diseñe, desarrolle, ponga a prueba y evalúe una experiencia de aula innovadora, en la que cual pueda experimentar tratamientos distintos y evaluar críticamente los resultados obtenidos.*

En el proceso de evaluación están involucradas, al menos, tres acciones: la **medición**, la **evaluación** y la **calificación**.

Medir se puede realizar de muchos modos y con diferentes niveles de estructuración. Puede ser un proceso de clasificación, o de generación de categorías a partir de la observación o la comparación de comportamientos observables con categorías o escalas conocidas.

Evaluar, supone la existencia de estándares o criterios para la población a la que pertenecen los estudiantes, con respecto a los cuales comparar los resultados de la medición

Emitir un juicio acerca de la relación entre lo demostrado por el estudiante y el estándar o criterio seleccionado.

Calificar, es expresar mediante un código (generalmente un número que indica una posición en una escala dada) el resultado de ese juicio.

Diferentes momentos del aprendizaje apelan a diferentes modalidades de evaluación, diferentes propósitos de la evaluación, hacen referencia a distintos procedimientos y técnicas. En general la evaluación responde a preguntas tales como: ¿qué saben mis alumnos acerca de...?, ¿cuánto han aprendido de...?, ¿qué sentido tiene para ellos este concepto, procedimiento, algoritmo...?, ¿aprendieron lo esperado?, ¿pueden aplicarlo a una situación diferente a la tratada en clase?

Cada una de esas preguntas apela a modalidades de medición y de evaluación diferentes. En la experiencia que se propone más adelante, se dan ejemplos de instrumentos para la evaluación acerca de los conocimientos que esperamos los estudiantes traigan a una tarea de aprendizaje dada, otros para tomarle el pulso al proceso y otros para evaluar los resultados.

Como la forma más frecuente y conocida de evaluación son las pruebas, esta vez nos concentramos en otras formas de medición y de evaluación. Un elemento clave en el proceso de medición son los **indicadores** del aprendizaje. Esos indicadores son los que obtenemos cuando el que aprende expresa sus procesos internos. En el momento que el estudiante responde o interviene en la clase, explica a un compañero, realiza o explica una tarea, hace una aplicación o responde una pregunta en una prueba, nos provee con algunos indicadores de sus procesos internos.
Esos indicadores nos permiten comprender parcialmente lo que sabe, lo que se ha comprendido y lo que falta. Desde un punto de vista más profundo, se pueden inferir las concepciones acerca del objeto de estudio, también, las falsas concepciones. Estas **muestras de la vida interior** son nuestras únicas pistas para comprender el complejo proceso del aprendizaje y poder así cumplir nuestro papel de orientadores y guías.

También en forma parcial, esas señales observables e imitadas por nuestros alumnos, son las que nos muestran cómo se están configurando sus intereses, motivaciones, actitudes y otras manifestaciones emocionales que serán cruciales en la forma que los aprendizajes se incorporen a su modo de pensar, actuar y sentir.

Desde esta perspectiva, la actuación de los jóvenes es un material de inmenso valor para el profesional de la enseñanza. Tener la capacidad para observar, analizar indicadores, relacionar esos indicadores con categorías y decidir su actuación posterior de acuerdo con la información que ese proceso esté entregando, es una capacidad profesional de orden superior. Así, una respuesta, un error, un comentario, un gesto, o el registro escrito del pensamiento, constituyen la sustancia a partir de la cuál se puede reorientar o enriquecer el proceso educativo.

Por otro lado, **resolver problemas como estrategia de evaluación** implica que en todo aprendizaje se hace necesario indagar sobre lo que se aprende, es por esto que la evaluación se convierte en un componente indispensable dentro del proceso de enseñanza para cualificar las competencias desarrolladas por el alumno. El término evaluación posee distintas significaciones sin embargo estas coinciden en considerarla como una *noción de juicio sobre un asunto determinado e implica un proceso de investigación que debe ser secuencial y continuo, siendo en este caso enfocado hacia la resolución de problemas.*

Joaquín García [GJ1]. Propone trabajar la evaluación de los procesos de enseñanza a través de resolución de situaciones en cuatro campos

Campo de evaluación correspondiente a la asimilación de conocimientos. Tener en los siguientes indicadores.

- La *capacidad de transferencia* para la aplicación de los conceptos, principios y teorías en situaciones y contextos diferentes al contexto en el cual fueron aprendidos.
- La *capacidad para explicar y predecir* el comportamiento de los sistemas naturales, sociales o culturales, haciendo uso de los conceptos científicos enseñados.

Campo de evaluación correspondiente al desarrollo de la capacidad creadora. Presenta los siguientes indicadores de evaluación.

- La *sensibilidad hacia los problemas*. Se define como la capacidad de encontrar problemas dentro de los contextos naturales, sociales o culturales que no se encuentran explícitos o definidos en ellos.
- La *Flexibilidad* constituida por la capacidad de cambiar de enfoque o punto de vista con respecto a una situación o problema.
- *La Fluidez de ideas* que consiste en la capacidad de generar ideas en tiempos limitados para resolver un problema o situación.
- *La Originalidad* entendida como la capacidad del individuo para la generación, ya no de una gran cantidad de ideas sino, de ideas diferentes a las generadas por otros.

Campo de evaluación correspondiente al desarrollo de la independencia cognitiva. Evaluado a través de los siguientes indicadores:

- *Capacidad para discriminar* los elementos esenciales y secundarios en los problemas, objetos, fenómenos y procesos.
- *Capacidad de organizar* de forma sistemática los materiales de estudio.
- *Actitud para la polémica y defensa de argumentaciones* en términos de formulación de preguntas, interrogantes, contra argumentaciones, proposición y estructuración de nuevos problemas.
- *Capacidad de critica con fundamentos en términos científicos*, el hallazgo de vacíos, inconsistencias y fallas en los discursos y procesos.

Campo de evaluación correspondiente al desarrollo de habilidades propias del desarrollo de resolución de problemas. El incremento de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, puede ser evaluado de acuerdo con los siguientes indicadores:

- *Capacidad para identificar* el problema dentro de un contexto.
- *Capacidad para formular* lingüísticamente y en forma delimitada el problema a resolver.
- *Capacidad de representación* icónica, formal, convencional, gráfica o mediante observaciones de los contextos y las situaciones problemáticas.
- *Capacidad de modelamiento* definida como la producción de modelos o diseños de carácter descriptivo o de comportamiento, referidos a situaciones o procesos.
- *Capacidad de traducción* y comunicación de resultados obtenidos a partir de la resolución de un problema.

Finalmente, en los Estándares de Evaluación del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], se expone lo siguiente.

Cambios en los énfasis

a. Evaluación integrada a la docencia.

b. El uso de distintos procedimientos de evaluación.

c. La búsqueda de situaciones de evaluación que permitan determinar todos los aspectos del conocimiento y sus conexiones.

d. La inclusión de la docencia y el currículo a la hora de enjuiciar la calidad de un programa.

e. La organización de “situaciones” de evaluación que impliquen sesiones, días y semanas, lo que sugiere el uso intensivo de los proyectos como una modalidad de evaluación.

f. La proposición de usar “situaciones” en vez de ítems aislados, también transforma la evaluación en un medio para el mejor conocimiento entre el estudiante y su profesor.

g. La evaluación concebida para modificar la práctica y no sólo para calificar.

Más que determinar una nota, la propuesta del NCTM, busca determinar:

a) el **potencial de aprendizaje** (¿cuánto es capaz de aprender un alumno?;

b) la **capacidad para resolver problemas**;

c) la **capacidad para comunicar lo aprendido** (es en la expresión de nuestro pensamiento cuando la formalización se produce y se apela a la memoria profunda);

d) el **razonamiento** (¿cómo lo pensó?, ¿qué aspectos correctos tiene esa forma de pensar?);

e) los **conceptos y procedimientos** y

f) la **actitud**.

Los siguientes son los cambios de énfasis propuestos por el NCTM en relación a la evaluación de los aprendizajes de los alumnos.

Más atención a:

- Comprobar qué saben los alumnos y cómo razonan acerca de los temas en estudio.
- Considerar la evaluación parte integrante de la docencia.
- Centrarse en una gama amplia de tareas y adoptar una visión global del objeto de estudio.
- Utilizar técnicas y fuentes múltiples de evaluación, incluyendo informes escritos y orales, exposiciones, archivadores y la demostración de las capacidades aprendidas (desempeño).
- Utilizar en la evaluación diversos materiales, según la especialidad, incluidos calculadoras y computadores.
- Determinar el valor de un programa recolectando información sobre resultados, currículo, materiales, relación pedagógica y docencia.
- Que el alumno reconozca sus fortalezas.
- Desarrollar un lenguaje que permita expresar formas de razonar y sentimientos.

Menos atención a:

- Comprobar lo que los alumnos **no** saben.
- Considerar la evaluación simplemente como un recuento de respuestas acertadas de un examen con el único propósito de poner una nota.
- Centrarse en un gran número de destrezas específicas y aisladas organizadas como contenido / actuación.
- Utilizar ejercicios o enunciados que sólo requieren de pocas destrezas.
- Utilizar exclusivamente pruebas escritas.
- Utilizar ejercicios o preguntas que muestren los contenidos descontextualizados.
- Excluir de la evaluación materiales, situaciones, calculadoras y computadores.
- Valorar el programa basándose exclusivamente en la puntuación de exámenes
- Utilizar pruebas normalizadas sólo como uno de los muchos indicadores de éxito de un programa.

Otro punto de referencia para la evaluación, lo plantea el Ministerio de Educación Nacional en “Matemáticas: Lineamientos Curriculares” [LC1].

5. PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ESTÁNDARES BÁSICOS

La expresión pensamiento matemático utilizada en los Lineamientos como organizador de los conocimientos básicos relaciona los siguientes principios:

- visión socio cultural de las matemáticas escolares;
- procesos matemáticos propios de la actividad matemática;
- sistemas simbólicos y de representación característicos del conocimiento matemático;
- contexto de aprendizaje.

Los tipos de pensamiento matemático tienen una orientación curricular en tanto cada pensamiento describe los sistemas simbólicos propios de cada campo de las matemáticas, los fenómenos y problemas asociados a cada campo y modos de uso de los sistemas simbólicos. Al aceptar este tipo de organización se busca establecer varios ejes conductores diferentes y necesarios en la construcción del conocimiento matemático, pues de un lado se amplia la perspectiva de las acciones dominantes y comunes (representar, argumentar, demostrar) de la actividad matemática, y de otro, la organización también permite reconocer conceptos articuladores y recurrentes (por ejemplo, número, función).

5.1. PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

El pensamiento numérico incluye no solo el sentido numérico, sino también el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etc.

El NCTM, define el *sentido numérico* como “una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número”. Los niños con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas.

Mcintosh, amplía este concepto y afirma que “el *pensamiento numérico* se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones”

El pensamiento numérico se desarrolla en estrecha relación con el estudio de los sistemas numéricos. En este proceso se incluye la comprensión del número, su uso en métodos cualitativos o cuantitativos, en estimaciones y aproximaciones, y en general como herramienta de comunicación, procesamiento e interpretación de la información en contexto, con el fin de fijar posturas críticas frente a ella y participar activamente en la toma de decisiones relevantes para la vida personal o en comunidad.

El desarrollo del pensamiento numérico de los niños empieza antes de su ingreso a la escuela, a través de la interacción con otros adultos, fundamentalmente sus padres. Gracias a esas interacciones, adquiere una serie de intuiciones sobre lo numérico, las cuales se muestran en competencias relativas al conteo, percepción del cardinal de pequeñas colecciones, e incluso, a la posibilidad de composiciones y descomposiciones de las mismas. Si bien estas actuaciones no constituyen un conocimiento amplio del número, sí puede afirmarse que estas primeras intuiciones numéricas son la base para el posterior desarrollo de este concepto.

La escuela, juega un papel importante en la construcción del concepto de número, en tanto posibilita experiencias numéricas diferentes a las del contexto familiar. Por esta razón el trabajo escolar debe centrar su atención en los siguientes aspectos.

- Comprensión de los números y de la numeración
- Comprensión del concepto de las operaciones
- Cálculos con números y aplicación de números y operaciones.

Estos tres aspectos son ampliamente tratados en el documento de Lineamientos Curriculares, con una perspectiva centrada en el número natural. A continuación se presentan algunas consideraciones para ampliar y complementar los planteamientos allí estudiados.

Comprensión de los números y de la numeración

*El conteo y las estrategias para operar a través del conteo***.** Contar es una acción básica para el desarrollo del concepto de número natural, pero sobre todo si esta acción es mediada por la necesidad de comunicar o interactuar con otros: a través de un juego para determinar los puntajes de cada jugador, para decir a otros cuánto se tiene de algo, para comparar cantidades, etc. Cuando el niño inicia los primeros aprendizajes de este proceso, se ve enfrentado a múltiples problemas, que van desde no conocer los nombres de los números o no conocer el orden correcto de ellos, hasta los relativos al establecimiento del cardinal de la colección contada. A través de enfrentar múltiples situaciones de conteo, el niño desarrolla los procesos suficientes y necesarios para iniciar el proceso de comprensión del número.

Por otra parte, en la medida que las situaciones de conteo a las que el niño se enfrente expliciten la necesidad de comunicarse con otros (sobre todo si se realiza a través del lápiz y papel), se genera la necesidad de aprender a escribir los *numerales*. Éste no es un aprendizaje de fácil tránsito; parte de las representaciones espontáneas de los niños (iconográficas muchas veces) hasta llegar a la escritura socialmente compartida. No se trata de imponer a la fuerza una escritura simbólica, sino de permitir que, en la medida en que aumente la comprensión conceptual del número, también mejore la forma como éste se representa por escrito, y viceversa, en la medida en que se disponga de formas más potentes de representación simbólica para el número, entonces se tienen mejores herramientas para su comprensión.

El conteo también es una herramienta importante para iniciar el aprendizaje de las operaciones básicas. La composición de dos o más cantidades – partes -, para formar una única cantidad – todo -, o su correspondiente operación inversa, descomponer una cantidad dada – todo -, en una o más cantidades no necesariamente iguales – partes -, son una fuente importante de sentido y significado para la suma y la resta respectivamente. El conteo proporciona estrategias para el tratamiento de situaciones que involucran tanto la composición como la descomposición aditiva. Adicionalmente, el conteo es también importante para el caso de las composiciones o descomposiciones multiplicativas, cuando se hace no sólo de uno en uno, sino también de dos en dos, de tres en tres, etc., es decir conteo con unidades múltiples, y además, de forma ascendente y descendente, se dispone de una herramienta importante para iniciar la comprensión de la multiplicación y la división. Este tipo de conteo también es fundamental para conceptualizaciones relativas a la proporcionalidad y las fracciones.

Adicionalmente, el conteo no sólo es importante para los aprendizajes relativos al número natural y sus operaciones, sino que se extiende a procesos similares contando fracciones, decimales y porcentajes. De igual forma, está estrechamente relacionado con el Sistema de Numeración Decimal (y en general, con cualquier sistema de numeración posicional), en tanto que éste se fundamenta en un conteo de agrupamientos recurrentes de unidades. Además, a partir de situaciones problémicas y utilizando diagramas de árbol y otras representaciones es posible introducir técnicas de conteo tales como: regla de adición, regla de multiplicación, permutaciones, combinaciones y variaciones; las cuales establecen relaciones con el pensamiento aleatorio.

Conocimiento de los significados del número. El estudio de la variedad de significados del número se justifica en tanto que los múltiples contextos dentro de los cuales tiene sentido, ponen en juego o determinan las acciones que se pueden desarrollar con ellos. Así, los números para contar, para cuantificar o para medir, se hacen importantes en tanto permiten la estructuración de procesos orientados a las operaciones. Los números para marcar una posición, al estar en relación directa con el problema del orden, permiten la construcción de una operación fundamental en el número natural: el siguiente o sucesor y por consiguiente el antecesor. En este caso, el orden media este tipo de construcción como resultado de la acción uno-más/ uno-menos. Finalmente, el número como elemento para codificar, al ser asumido como un código que identifica una clase de elementos, permite el desarrollo de procesos de clasificación.

El significado del número también está en estrecha relación con la teoría de números. Ésta ofrece oportunidades para realizar exploraciones que permiten conjeturar, verificar, refutar, especializar y generalizar regularidades y propiedades de los números. Estas exploraciones son relevantes en la resolución de problemas, en la apreciación de la belleza de las matemáticas y en la comprensión de los aspectos humanos del desarrollo histórico del número. Gradualmente, los estudiantes deben ir comprendiendo y usando en resolución de problemas algunos elementos básicos de la teoría de números tales como: clases de números naturales y sus características (pares, impares, compuestos, primos, cuadrados, etc.); conceptos y propiedades de la divisibilidad (máximo común divisor, primos relativos, mínimo común múltiplo, teorema fundamental de la aritmética). Aquí se presentan oportunidades para establecer relaciones con el pensamiento variacional, al usar variables en la representación de propiedades de las clases de números (forma general de los pares, impares, múltiplos de 5, cuadrados, etc.).

De otra parte, el sentido y significado de los números se incrementa cuando son vistos como sistemas matemáticos. En el currículo se pueden identificar segmentos dedicados al estudio de los diferentes sistemas numéricos, los cuales se encuentran separados en el tiempo de acuerdo a niveles crecientes de complejidad lógica formal. Pero a pesar de este trabajo diferenciado, los niveles de conceptualización que se alcanzan son muy pobres, lo cual pone en evidencia que realmente los alumnos no logran trascender un nivel más allá de los números naturales. El comprender un sistema numérico estimula la eficacia de los estudiantes en su trabajo sobre fracciones, decimales, enteros y números racionales a través de la unidad de ideas comunes. También les ofrece otras perspectivas para ampliar el sistema de los números naturales y el sistema de los números racionales, y aun de los números reales y complejos.

El trabajo formal con sistemas numéricos debe desarrollarse a partir de situaciones que permitan la construcción de los múltiples sentidos y significados de cada uno de ellos. Así, el estudio de los números racionales debe permitir la construcción de los sentidos y significados relativos a medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, campo de cocientes. De igual forma, el estudio de los números enteros debe darse a partir de situaciones que involucren las medidas relativas y la variación de medidas.

Cuando se trasciende de los números naturales a los enteros y a los racionales, se refuerzan las intuiciones de los estudiantes sobre el orden y la magnitud, y sobre la forma en que funcionan los sistemas numéricos. Sus intuiciones sobre las operaciones deben reconceptualizarse cuando se realiza este tránsito (suma y resta en los naturales y en los enteros, multiplicación y división en los naturales y en los racionales). Por ejemplo, multiplicar (respectivamente dividir) un número natural por una fracción entre 0 y 1, produce un resultado menor (respectivamente mayor) que el número natural, aspecto que es contrario a la experiencia anterior del estudiante con números naturales. Entender el desarrollo de los sistemas numéricos es básico para trabajar en la solución de ecuaciones (identificar el tipo de ecuaciones que pueden o no ser resueltas en cada sistema). Entender que los números irracionales pueden sólo aproximarse mediante racionales, ya sea con fracciones o decimales.

Es importante identificar características estructurales asociadas a sistemas numéricos. Comenzar a ver los sistemas numéricos desde una perspectiva más global, aprender sobre semejanzas y diferencias entre sistemas numéricos, identificar propiedades que se ganan, se preservan o se pierden cuando se pasa de un sistema numérico a otro (¿cuáles propiedades se mantienen, se pierden o se ganan, cuando se trasciende de los naturales a los enteros, de éstos a los racionales, de los racionales a los reales, y de los reales a los complejos?). Comprender la densidad de los racionales y su no completitud con respecto a la recta numérica, es un aspecto fundamental para introducir los números reales, y la correspondencia biunívoca entre ellos y los puntos de una recta numérica.

Comprensión del sistema de numeración decimal. La comprensión del sistema de numeración decimal es importante no sólo por la necesidad de escribir los números, sino porque los algoritmos convencionales para realizar los cálculos de las operaciones se basan en la lógica que lo sustenta. Este sistema de numeración, es un sistema en base diez y posicional. Por ser en base diez, sus unidades son potencias de diez, y un aspecto fundamental en su aprendizaje es conocer cuáles son las unidades básicas que lo componen, al igual que las equivalencias entre cada una de ellas. Es posicional porque el valor de cada una de las cifras que componen un numeral es relativo a la posición que ocupan dentro del mismo. El valor de posición es el resultado de un proceso de conteo recurrente de unidades (agrupación sucesiva de colecciones encajadas). Es necesaria la comprensión de las unidades del sistema y sus equivalencias, al lado del valor de posición de las cifras, pues sobre estos dos principios se fundamentan las múltiples formas de calcular, entre ellas, los métodos de cálculo mental o los algoritmos convencionales de las cuatro operaciones básicas.

Un problema asociado al sistema de numeración es el relacionado con las palabras-número, puesto que estas en algunos momentos rompen con la secuencia lógica a través de la cual se organizan los números en el sistema de numeración decimal. Por ejemplo para los números entre cero y nueve, cada nuevo número se obtiene al agregar una unidad al número inmediatamente anterior. Para cada uno de estos números hay un determinado símbolo, y por supuesto una palabra-número distinta. A partir del diez comienza la repetición de los diez símbolos iniciales, pero el nombre es una nueva palabra. Para los números 11, 12, 13, 14 y 15 aunque son diez y uno, diez y dos, etc., sus nombres son palabras nuevas. Desde el 16 hasta el 19, los nombres de los números y la manera como se estructuran en el sistema de numeración decimal son idénticas: diez y seis, diez y siete, etc. En el 20 se rompe nuevamente la regularidad entre las palabras-número y el sistema de numeración decimal, la cual se recupera aproximadamente entre el 21 y el 29 (con contracciones fonéticas, como “veintidós” en lugar de “veinte y dos”). A partir de allí se rompe la secuencia sólo en las decenas completas. Este hecho de los rompimientos puede ser un factor de dificultad en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Comprensión del Concepto de las Operaciones

El estudio de las operaciones comporta ante todo el aspecto conceptual ligado a la comprensión del sentido y significado matemático y práctico de las operaciones. En el documento del MEN (1998), se expresa un análisis amplio del sentido y significado de las cuatro operaciones básicas por ejemplo, potenciación y radicación. Si bien cada una de las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) presenta características y propiedades propias, estas pueden ser organizadas desde la perspectiva de su estudio conjunto – suma y resta, multiplicación y división -, y su empleo en la resolución de problemas. La organización de todas las diferentes situaciones y problemas que se resuelven por una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones, conforma la estructura aditiva. Estas situaciones también requieren para su solución de los conceptos de medida, de parte y de todo, de estado y transformación, de comparación, de composición binaria y de operador unitario, de número relativo, de abscisa, etc. El resultado de esta organización es la estructura aditiva.

De igual modo, la estructura multiplicativa, hace referencia a las situaciones problema cuyo tratamiento requiere una multiplicación, una división o una combinación de ambas. Estas situaciones tienen un estrecho parentesco con la proporcionalidad. El parentesco reside en reconocer que tanto en las situaciones de multiplicación como de división hay dos variables numéricas relacionadas, (cantidad de objetos o mercancías y su precio, por ejemplo), teniendo en cuenta la naturaleza de las cantidades que representan los números. Desde esta perspectiva se integra, el análisis dimensional, la razón, el operador escalar, la regla de tres y los conceptos de área y volumen como casos de proporción doble o triple. Para relacionar la proporcionalidad con la multiplicación es necesario insistir en la enseñanza, en interpretar los problemas de multiplicación como problemas que relacionan dos variables numéricas.

Un trabajo de la multiplicación en tal sentido, muestra cómo la proporcionalidad no es un tema de un grado determinado de la educación básica, sino objetivo de varios grados, iniciado con la multiplicación hasta llegar al estudio de la función lineal.

Cálculo con números y aplicación de números y operaciones

El cálculo y la estimación. El conocimiento de las operaciones está mediado por la comprensión de diversas formas de realizar los cálculos, y de la capacidad de determinar un método apropiado de acuerdo al contexto de la situación dentro la cual toma sentido la operación que se va a realizar. El cálculo está ligado tanto a las distintas maneras para encontrar un resultado, por ejemplo con el cálculo mental y con los algoritmos convencionales. El cálculo mental es un proceso mediante el cual se obtienen resultados a partir de estimaciones, conocimientos de hechos numéricos, composiciones, descomposiciones y el diseño de algoritmos no convencionales; puede apoyarse en el uso de instrumentos, el lápiz y el papel, el ábaco, la calculadora y el computador.

Por otro lado, el cálculo tiene que ver con los instrumentos que se utilizan para realizarlo. Es de destacar el papel que juegan instrumentos como el ábaco, la calculadora, el computador, etc., en tanto que facilitan la exploración de regularidades y propiedades de los números y sus operaciones. En particular el uso de calculadoras desde el primer grado de la educación básica es un apoyo importante para el desarrollo del pensamiento numérico. Por supuesto, que se trata no de usarlas tan solo como un instrumento para comprobar lo realizado por otros medios, sino de utilizar sus potencialidades para proponer situaciones problemáticas interesantes a los estudiantes, de tal forma que la calculadora sea un instrumento para pensar las matemáticas.

El trabajo en la escuela debe promover en los primeros años el estudio de las operaciones apoyado sobre formas de cálculo no convencionales (tales como las inventadas por los propios alumnos, o a través de ábacos, calculadoras, etc.), pues de esta manera se favorece ampliamente el desarrollo del sentido numérico. Es decir, no es fundamental que en los grados iniciales los alumnos sean expertos en los algoritmos convencionales para calcular el resultado de una operación; lo fundamental es que sean capaces de hallarlo mediante diversas estrategias.

A partir de estas estrategias, en los grados posteriores se debe fundamentar el aprendizaje de los algoritmos convencionales, sobre la base de una muy buena comprensión de las operaciones, los números y el sistema de numeración decimal. Así, los algoritmos convencionales estarán en la escuela no como la única manera de calcular, sino como una forma entre otras, eficiente en algunos casos (por ejemplo, para hacer cálculos con números grandes), innecesarios en otros (por ejemplo, cuando se trabaja con números pequeños, o con números seguidos de ceros, tales como 3500+2000).

Por otro lado, el cálculo tiene que ver con los instrumentos que se utilizan para realizarlo. Es de destacar el papel que juegan instrumentos como el ábaco, la calculadora, el computador, etc., en tanto que facilitan la exploración de regularidades y propiedades de los números y sus operaciones. En particular el uso de calculadoras desde el primer grado de la educación básica es un apoyo importante para el desarrollo del pensamiento numérico. Por supuesto, que se trata no de usarlas tan solo como un instrumento para comprobar lo realizado por otros medios, sino de utilizar sus potencialidades para proponer situaciones problemáticas interesantes a los estudiantes, de tal forma que la calculadora sea un instrumento para pensar las matemáticas.

También es importante incorporar la estimación en el trabajo con las operaciones y en el resultado de las mismas cuando los contextos lo requieran. La estimación implica un pensamiento flexible y un buen conocimiento de los números, sus operaciones, sus propiedades, y sus relaciones. Sowder (1992), plantea que existen tres procesos claves que la caracterizan:

- *La reformulación*: es el proceso de alterar datos numéricos para producir una forma más manejable mentalmente, pero dejando la estructura del problema intacta.

- *La traslación*: se cambia la estructura matemática del problema a otra mentalmente más manejable.

- *La compensación*: se realizan ajusten que reflejan las variaciones numéricas resultado de la reformulación o traslación realizada.

Además de estos procesos, la estimación requiere el conocimiento de hechos numéricos básicos, del valor de posición, de propiedades aritméticas; así como del cálculo mental; y de la tolerancia del error; entre otros.

5.2. ESTÁNDARES BÁSICOS PARA EL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

Grados primero a tercero

1. Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).
2. Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos.
3. Usar los números para describir situaciones de medida con respecto a un punto de referencia (altura, profundidad con respecto al nivel del mar, pérdidas, ganancias, temperatura, etc.)
4. Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes.
5. Usar representaciones –principalmente concretas y pictóricas- para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
6. Reconocer el efecto que tienen las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división sobre los números).
7. Reconocer las relaciones y propiedades de los números (ser par, ser impar, ser múltiplo de, ser divisible por, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
8. Usar diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
9. Usar la estimación para establecer soluciones razonables acordes con los datos del problema.
10. Identificar regularidades y propiedades de los números mediante diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.).
11. Resolver y formular problemas aditivos de composición y transformación.
12. Resolver y formular problemas de proporcionalidad directa (mercancías y sus precios, niños y reparto igualitario de golosinas, ampliación de una foto).

Grados cuarto a quinto

1. Interpretar las fracciones en diferentes contextos – situaciones de medición, razones y proporciones.
2. Analizar y explicar las distintas representaciones de un mismo número (naturales fracciones, decimales, porcentajes).
3. Utilizar la notación decimal para expresar las fracciones en diferentes contextos.
4. Resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
5. Resolver y formular problemas aditivos de composición, transformación, comparación e igualación.
6. Resolver y formular problemas en los cuales se use la proporción directa y la proporción inversa.
7. Reconocer la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
8. Modelar situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
9. Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
10. Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
11. Justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando las calculadoras o computadores.

Grados sexto a séptimo

1. Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
2. Justificar la representación polinomial de los números racionales utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
3. Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa, etc.).
4. Resolver y formular problemas utilizando propiedades fundamentales de la teoría de números.
5. Justificar operaciones aritméticas utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
6. Formular y resolver problemas aplicando conceptos de la teoría de números (números primos, múltiplos) en contextos reales y matemáticos.
7. Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
8. Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
9. Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
10. Hacer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.

11. Justificar la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
12. Utilizar argumentos combinatorios (tabla, diagrama arbóreo, listas) como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

Grados octavo a noveno

1. Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
2. Simplificar cálculos usando relaciones inversas entre operaciones.
3. Utilizar la notación científica para representar cantidades y medidas.
4. Identificar la potenciación y la radicación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas.

Grados décimo a undécimo

1. Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
2. Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos**.**
3. Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos).
4. Utilizar argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.
5. Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

5.3. TALLER DE ESTÁNDARES BÁSICOS SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO

El conjunto de talleres que se presenta en esta sección pretende en primer lugar, orientar a los profesores y profesoras en el diseño de actividades en el aula para articular el desarrollo de los Estándares Básicos con los Proyectos Educativos Institucionales. En segundo lugar, en este conjunto de talleres se integran los principios que orientan la propuesta de los estándares. En razón a esta consideración es necesario explicitar de nuevo el significado de cada uno de los principios expuestos en el Documento *Estándares Básicos de Matemáticas.*

Valores sociales, culturales y democráticos de las matemáticas escolares. La incorporación de estos valores en los diseños de actividades redimensiona la cultura del aula, pues exige que los estudiantes experimenten el valor *de someter las ideas al escrutinio público, lo que supone que el conocimiento se construya en prácticas de validación*, la gestión de esta cultura esta supeditada a proponer ambientes esencialmente comunicativos, en los que el tipo de actividades y su estructuración, exige replantear desde los formatos tradicionales de presentación de los conceptos y estructuras matemáticas hasta las formas tradicionales de preguntar.

El compromiso con los fines sociales, requiere involucrar las conexiones de las matemáticas escolares con otras ciencias, con los eventos y fenómenos del mundo social, deportivo y cultural.

Complejidad y coherencia conceptual. Este principio está orientado a evidenciar las relaciones entre los procesos, conocimientos básicos y contextos, puesto que cada conocimiento básico requiere de otros conocimientos, y estos a su vez de los procesos asociados. La diversidad de contextos amplía el campo semántico de los conocimientos, además para evidenciar las relaciones complejas en la triada, se requiere establecer la coherencia, horizontal y vertical entre los estándares.
Aprendizaje de las matemáticas. En razón a los principios descritos, es necesario reconocer que los procesos de comprensión y desarrollo de las competencias matemáticas son procesos complejos y se suceden en largos períodos de tiempo. Por lo que es importante destacar que la determinación de las competencias matemáticas de los estudiantes está asociada a distintas actuaciones en clase, situaciones problema, que a su vez determinan diferente niveles de complejidad.

Desde las perspectivas anteriores este documento pretende orientar a los maestros en el diseño y desarrollo de un conjunto de actividades para el aula. Se han seleccionado algunos estándares y en cada uno de ellos se elabora un análisis didáctico teniendo en cuenta:

- Complejidad conceptual
- Coherencia horizontal y vertical, es importante señalar que sólo se enuncian estándares en los que se explicita la coherencia.
- Actividades para el aula, que contemplan: situaciones problema, conceptos y procesos involucrados.

Estándar ***Establecer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando diversos métodos e instrumentos de cálculo*** Grado sexto a undécimo

Complejidad Conceptual

Con respecto a las propiedades de los números, este estándar se refiere a las de los números en si mismos - ser primo, ser par, ser impar, entre otras -; a las de los números con relación a la notación decimal - ser capicúa, por ejemplo-; a las de los números en relación con las operaciones -la estructura algebraica de los sistemas numéricos-.

Por su parte con respecto a las relaciones, se refiere a relaciones unarias -ser múltiplo de, ser divisor de, ser divisible por, entre otras-- y a relaciones binarias -relaciones de orden, relaciones de equivalencia, etc.-. Estas propiedades y relaciones están presentes en la construcción del concepto de número y, por consiguiente, son aspectos fundamentales de la Teoría de Números.

El estudio de las propiedades algebraicas de los sistemas numéricos se hace importante al analizar las extensiones de uno a otro, por ejemplo, la extensión de los naturales a los enteros o a los racionales, y desde estos a los reales. En estas transiciones se debe comprender el sentido y significado de lo que preserva o cambia la extensión en relación a algunas propiedades y al significado de las operaciones. En lo referente a los cambios en las relaciones, por ejemplo, las de orden se hacen más complejas por los significados y las formas de representación que involucra cada conjunto numérico.

Por otra parte, establecer conjeturas sobre las propiedades y relaciones de los números requiere de la visualización, del reconocimiento de regularidades y patrones a partir de razonamientos inductivos y deductivos; y del desarrollo de procesos de validación o refutación de hipótesis. Los anteriores elementos obligan a establecer un estrecho vínculo con el pensamiento variacional, pues se hace necesario el recurso de la identificación y uso de variables, la identificación de regularidades en el proceso de variación, el uso de diferentes sistemas de representación para la sistematización de las regularidades, y finalmente, la identificación y la formulación de las propiedades y relaciones (generalización).

Este estándar también hace referencia al uso en el aula de tecnologías informáticas como las proporcionadas por calculadores y computadores. Estas tecnologías son mediadores importantes para la actividad matemática del alumno, en tanto que extienden las posibilidades de exploración, búsqueda y experimentación de propiedades y relaciones, y ponen al alcance de los estudiantes métodos y procesos que por otras vías podrían escapar de sus posibilidades conceptuales. Estos métodos y procesos se refieren a la capacidad de integración entre diferentes sistemas de representación en el procesamiento de la información, la posibilidad del desarrollo de procedimientos algorítmicos rutinarios o complejos (como por ejemplo, análisis de regresión), y la simulación y modelación de situaciones como parte del proceso de su tratamiento matemático. El uso de estos medios debe estar acompañado de la reflexión sobre los procesos desarrollados y no sobre la implementación del instrumento en si mismo.

Coherencia vertical y horizontal

Coherencia Vertical
De primero a tercero

- Reconocer las relaciones y propiedades de los números (ser par, ser impar, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos
- Identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (ábacos, calculadoras, bloques, etc.)

De cuarto a quinto

- Resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones
- Justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras o computadores

De sexto a séptimo

- Generalizar propiedades y relaciones de los números (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, etc.)
- Resolver y formular problemas utilizando las propiedades fundamentales de la teoría de números
- Justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones

De diez a once

- Utilizar argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales

Los estándares relativos a la teoría de números están relacionados fundamentalmente con los del pensamiento variacional, en tanto proveen herramientas para la identificación de patrones y relaciones numéricas y con los del pensamiento aleatorio, en cuanto incorporan conceptos de la estadística y la teoría de probabilidades (elementos de combinatoria, por ejemplo). El estándar en consideración se relaciona explícitamente con los siguientes estándares

Coherencia horizontal

Pensamiento variacional

Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).

Pensamiento aleatorio

Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento

SITUACIONES PARA EL AULA

Situación 1

El profesor solicita que cada estudiante escriba un número natural de dos o más dígitos y que con los mismos dígitos pero cambiando el orden (permutándolos) construya un segundo número, que determine la diferencia entre el mayor y el menor de los dos números y que divida el resultado por 9.

Lo importante es propiciar la discusión en torno a las soluciones planteadas por los estudiantes. Colocando el énfasis en carácter del residuo, la cantidad de dígitos y las posibilidades de generalizar las conjeturas. Para apoyar el proceso de conjetura se puede considerar el siguiente caso particular

Considere un número natural con dos o más dígitos, réstele la suma de sus dígitos y divida este resultado por 9. Repita las operaciones con varios números y conjeture sobre el procedimiento y resultado de las operaciones.

Conceptos y Procesos

Predecir comportamientos de los números
Usar la representación decimal
Identificar y usar relaciones y propiedades de los números
Estrategias heurísticas (considerar casos especiales, ensayo y error, ...)
Argumentar con las propiedades y relaciones de los números sobre estrategias y conjeturas.

Situación 2

Marcos va a hacer una fiesta y necesita comprar vasos, platos y cucharas. Quiere comprar el mismo número de unidades de cada artículo. Teniendo en cuenta que los vasos vienen en paquetes de 18 unidades, los platos en paquetes de 24 unidades y las cucharas en paquetes de 12 unidades, cada uno, ¿cuántos paquetes de cada utensilio debe comprar? ¿Cuál es el número mínimo de personas que puede invitar a la fiesta de tal forma que no sobren utensilios para servir la torta?

Suponiendo que Marcos invitó a 150 personas, ¿cuántas unidades de cada utensilio hay en cada paquete?

Conceptos y Procesos

Reconocer múltiplos comunes
Conjeturar, argumentar y probar
Identificar estrategias de solución
Formular y resolver problemas

Situación 3

Proyecto: Descubrir un teorema oculto

En teoría de números, un resultado importante es el siguiente.

"Pequeño" Teorema de Fermat. Para todo número primo p, y todo entero a se tiene que:

$$(a^p - a) \text{ es divisible por } p.$$

Elaborar un proyecto de aula que permita "redescubrir" este teorema, incluir un contexto histórico relacionado con el teorema y con la importancia del mismo en nuestra época.

Situación 4

Proyecto: Ayudando a Goldbach

Desde el siglo XVIII, el matemático C. Goldbach (en carta dirigida a Leonard Euler) estableció su famosa conjetura:

Todo número natural par, mayor o igual que 6 puede expresarse como suma de dos primos impares.

Elaborar un proyecto de aula que incluya actividades para que los estudiantes "redescubran" y verifiquen dicha conjetura. En tales actividades es conveniente incluir breves revisiones históricas sobre la conjetura y algunos de los matemáticos relacionados con ella.

6. ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS Y SUGERENCIAS PARA PROPONER PROBLEMAS

Ejemplo 1 Pedro y María visitaron una granja el fin de semana donde se crían gallinas y cerdos. Pedro Observó que en total habían 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos habían en la granja?.

Método Pictórico

Este incluye el uso de figuras, dibujos o diagramas como medio para representar el problema. El estudiante puede dibujar los animales o representarlos mediante un diagrama y usarlos como referencia para aumentar la cantidad o eliminar algunos de acuerdo al número de patas.

Método de ensayo y error

Este método puede ser usado originalmente por el estudiante. En su desarrollo puede incluir varias direcciones de acuerdo con el tipo de ensayo que se seleccione. Por ejemplo el estudiante puede usar:

a. **Un método de intercambio**: en el cual fija un número indeterminado de cerdos o gallinas y los empieza a intercambiar de acuerdo al número de patas. Así , el estudiante puede iniciar con 19 cerdos y calcular el número de patas y disminuir el número de cerdos de uno en uno compensado cada cerdo con las gallinas correspondientes. Repitiendo este proceso se llega a la solución del problema.

b. **Un método de conteo** puede iniciarse con cualquier número de gallinas y cerdos. Por ejemplo 10 gallinas y 9 cerdos. Contando el total de patas se tiene que 20 + 36 = 56; se nota que faltan 4 patas. Entonces la siguiente selección puede ser 9 gallinas y 10 cerdos; esto lleva a 18 + 40 = 58 patas. En este caso faltan, 2 patas. Naturalmente la siguiente selección conlleva a considerar 8 gallinas y 11 cerdos, lo que produce la solución deseada.

c. **La construcción de una tabla** puede también ayudar a los estudiantes a seleccionar los números sistemáticamente. Por ejemplo, iniciando, con los casos extremos (solo gallinas o cerdos) y tomando en cuenta la información se puede generar la siguiente tabla:

Gallinas	**Cerdos**	**Patas**
19	0	36
0	19	76
10	9	56
8	11	60

El método de correspondencia. La idea es pensar en una correspondencia entre el número de patas y cabezas, dos formas similares ilustran este procedimiento:

a. Supongamos que las gallinas se sostienen sólo con una pata y que los cerdos sólo con dos patas. Entonces estaría pisando tierra solamente la mitad de las patas, es decir, 30 patas.

En este número la cabeza de una gallina se cuenta solamente una vez, mientras que la cabeza de los cerdos se cuentan dos veces, restándole a 30 el número de cabezas (19), resulta el número de cabezas de cerdo. Esto es 30 – 19 = 11 cerdos. Con esta información se tiene que hay 8 gallinas.

b. Otra variante del método de corr4espondencia es imaginarse que todos los animales se sostienen con dos patas, entonces habrían 38 patas y 60 – 38 = 22, que serían las patas de cerdo que faltan, entonces hay 11 cerdos.

Método semialgebraico. Este se puede identificar cuando el estudiante, por ejemplo, utilice g = cantidad de gallinas y c = cantidad de cerdos; de aquí puede escribir que g + c =

19 o g = 19 – c. Tomando esto como base, el estudiante puede explorar las posibles combinaciones que puedan satisfacer la expresión del número de patas.

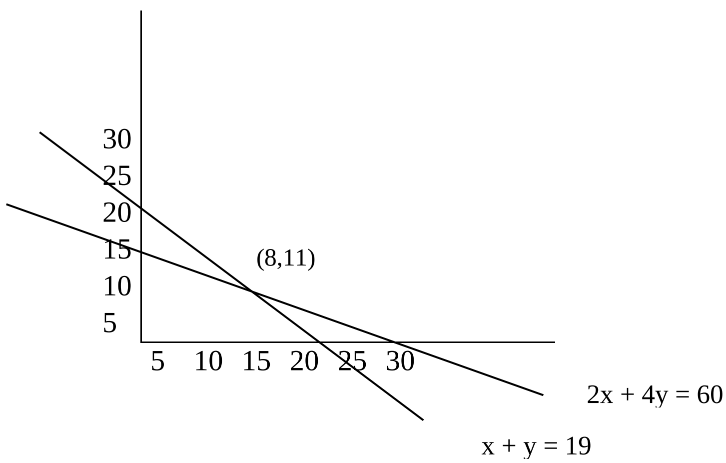
g	19 - c	2(g) + 4(19 - c)	Patas
4	19 – 4	2(4) + 4(15) =	68
6	19 – 6	2(6) + 4(13) =	62
8	19 – 8	2(8) + 4(11) =	60

Método algebraico: una forma puede ser representando la información dada como un sistema de ecuaciones. Este sistema que incluye dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver utilizando los procedimientos rutinarios:

x = Número de gallinas
y = Número de cerdos

x + y = 19 Número de cabezas. (1)
2x + 4y = 60 Número de patas (2)

Multiplicando (1) por 2 y restando (2), se obtiene: 2y = 22; y así y = 11 y x = 8.



Ejemplo 2. Diferencia de cuadrados. Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Comprender el problema

Después de leer el problema, podemos atacarlo como sigue.

El número 5 tiene una propiedad especial; puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados: $5 = 3^2 – 2^2$. Encuentra otros números que cumplan esta característica y mira si ellos tienen un patrón de formación o pertenecen a algún conjunto numérico que puedas caracterizar.

El problema nos pregunta por un grupo de números que tienen como característica común: ser iguales a la diferencia de dos cuadrados.

Crear un plan.

Encontremos los cuadrados de los números más pequeños y hagamos las posibles diferencias entre ellos, estos resultados los colocamos en una tabla para tratar de observar un patrón de comportamiento.

Poner en práctica el plan

Construyamos la tabla de los primeros números que se pueden escribir como diferencia de dos cuadrados.

--	**0**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**	**121**	**144**	**169**	**196**
0	0	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
1		3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195
4			5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	192
9				7	16	27	40	55	72	91	112	135	160	187
16					9	20	33	48	65	84	105	142	153	180
25						11	24	39	56	75	96	119	144	171
36							13	24	45	64	85	108	133	160
49								15	32	51	72	95	120	147
64									17	36	57	80	105	132
81										19	40	63	88	115
100											21	44	69	96
121												23	48	75
144													25	52
169														27

Considerando la anterior tabla notamos la presencia en ella, de los primeros impares en la diagonal principal, por ejemplo, y de los primeros múltiplos de cuatro en la diagonal que está encima de la principal, por ejemplo. Se observa también que no se presenta otro tipo de números diferente a los mencionados (¿cuáles son estos?)

Luego podemos *conjeturar* que los números que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados son los números de la forma 2n + 1 y 4n.

Visión Retrospectiva.

Analizando el caso particular dado en el planteamiento del problema, notamos que este se cumple pues el número 5 es un impar, así mismo observamos el procedimiento para otros números como el 16, y establecemos que este número es igual a la diferencia del cuadrado de 5 y el de 3.

Luego de hacer este análisis, surge la necesidad de *demostrar* que estos números si se pueden escribir como diferencia de dos cuadrados. Y también aparece un interrogante importante que apunta en la siguiente dirección: dado un número y verificando que este pertenece a los dos tipos expuestos en la solución, ¿cuales son los dos cuadrados que permiten obtenerlo como diferencia de ellos?

Para responder a la pregunta anterior puede usted también considerar la elaboración de tablas, por ejemplo:

$3 = 2^2 - 1^2$	$4 = 2^2 - 0^2$
$5 = 3^2 - 2^2$	$8 = 3^2 - 1^2$
$7 = 4^2 - 3^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
$9 = 5^2 - 4^2$	$16 = 5^2 - 3^2$

¿Identifica algún patrón?

Demostremos que un número impar se puede escribir como diferencia de dos cuadrados.

Un número impar es de la forma *C = 2n +1, además los impares se obtienen al restar dos cuadrados de números consecutivos*, sean ellos *x* y *x - 1*, luego:

$$2n+1 = x^2 - x^2 + 2x - 1$$
$$\frac{2n+2}{2} = x$$
$$x = n+1$$
$$C = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$$

Luego existen dos enteros $x = n + 1$ y $x – 1 = n$ que al ser elevados al cuadrado y sus resultados restarse, arrojan como diferencia el impar $C = 2n + 1$.

Demostremos que un número múltiplo de 4 se puede escribir como diferencia de dos cuadrados.

Si C es un número es múltiplo de 4 es de la forma C = 4n, además los múltiplos de 4 se obtienen al restar dos cuadrados de números de la forma x y x-2, así:

$$4n = x^2 - x^2 + 4x - 4$$
$$4n = 4x - 4$$
$$x = n + 1$$
$$4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

Luego existen dos enteros $x = n + 1$ y $x - 2 = n - 1$ que al ser elevados al cuadrado y sus resultados restarse, arrojan como diferencia un múltiplo de $C = 4n$.

Falta demostrar que estos números son los únicos representables como diferencia de dos cuadrados.
¿Por qué los pares que no son múltiplos de 4 no se pueden representar como diferencia de dos cuadrados?
Responder a esta pregunta.

Por otro lado, surgen muchos problemas nuevos.

- ¿De cuantas formas se puede representar un impar, 2n + 1, como diferencia de dos cuadrados?
- ¿De cuantas formas se puede representar un múltiplo de 4, 4n, como diferencia de dos cuadrados?
- Consideremos suma en lugar de diferencia: ¿Es posible caracterizar los enteros positivos que se pueden representar como suma de dos cuadrados?
- En lugar de cuadrados consideremos cubos, etc.
- En lugar de cuadrados consideremos números primos. ¿Es posible caracterizar los enteros positivos que son diferencia de dos primos? ¿Es posible caracterizar los enteros que son suma de dos primos?

De esta forma, nos introducimos en la investigación en un campo fascinante de la matemática: La Teoría de Números ("La reina de las matemáticas").

Ejemplo 3. Productos Máximos. Descomponer un número entero positivo *n* como suma de enteros positivos de tal forma que el producto de los sumandos sea lo más grande posible.

Comprender el problema

Para lograr una mejor comprensión del problema, *primero consideremos algunos casos particulares*. El número 4, expresémoslo como suma de números y miremos en que caso el producto de los sumandos es mayor, así:

Sumandos	Suma	Producto

4, 0	0 + 4	0
1, 3	1 + 3	3
2, 2	2 + 2	4

Crear un plan.

En la misma forma que procedimos para el número 4, procedamos para los primeros 20 números. Colocando los sumandos que maximizan el producto en una tabla, luego observemos patrones de comportamiento y, si es posible, demostramos las conjeturas que hagamos.

Poner en práctica el plan

Descompongamos los primeros 20 números y coloquemos sus resultados en una tabla, como sigue:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2
		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3
					3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
								3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
												3	3	3	3	3	3	3
														3	3	3	3	3
																	3	3

De la tabla anterior podemos observar que la descomposición de cualquier número en un número determinado de sumandos, para los cuales se logra el mayor producto, corresponde a un determinado número de 2 y otro número de 3.

También se puede observar que la cantidad de veces que se repite el 2 como sumando en los diferentes números varía y se repite en forma periódica de la siguiente forma:

Residuo al dividir n por 3	Cantidad de veces que se repite el 2	Cantidad de veces que se repite el 2
0	0	n/3
1	2	(n - 4)/3
2	1	(n - 2)/3

La mejor descomposición de un número n en sumandos enteros positivos que hace máximo el producto de los mismos, esta formado por 3 y por 2, en la forma que se mostró en la tabla.

De acuerdo a lo anterior se plantea la siguiente conjetura.
Para cualquier número n, la descomposición de este número en sumandos enteros positivos que maximiza el producto de los mismos esta dada en términos de 3 y 2

Bosquejo de Prueba.

Para cada entero n llamamos P(n) al producto máximo. Por inducción vemos que la mejor descomposición esta formada por 2 y 3 de la siguiente manera.

Si n = 3k, la descomposición
n = $\underline{3 + 3 + ... + 3}$.(k sumandos).
Hace que el producto P(n) = 3^k sea máximo.

Si n = 3k + 1, la descomposición óptima es
n = $\underline{3 + 3 + ... + 3}$ + 2 + 2, (k-1 sumandos iguales a 3)
El producto P(n) = $4*3^{k-1}$

Si n = 3k + 2, la descomposición óptima es
n = $\underline{3 + 3 + ... + 3}$ + 2, (k sumandos iguales a 3),
el producto P(n) = $2*3^k$

Si n = 4	n = 2 + 2	P(4) = 2^2
Si n = 5	n = 3 + 2	P(5) = 2*3

Si vale para todo entero menor que n también vale para n, ya que si en una descomposición:

$n = a_1 + ... + a_r$ *para algún* $a_i > 3$

Por hipótesis inductiva: $a_i < n$.

$a_i = b_1 + ... + b_s$, con $b_j = 2$ o $b_j = 3$.

Tenemos entonces que $p_n = 2^{\alpha} * 3^{\beta}$, con $2\alpha + 3\beta = n$.

Si n = 3k, $2\alpha + 3\beta = 3k$, entonces $2\alpha = 3(k - \beta)$ (1)

Entonces

$$2^{\alpha} * 3^{\beta} \ o \ 3^k \ \leftrightarrow \ 2^{\alpha} \ o \ 3^{k-\beta} \ \leftrightarrow \ por \ (1) \ tenemos \ 2^{3(k-\beta)} \ o \ 3^{2(\beta)} \ o \ 8^{k-\chi} \ o \ 9^{k-\beta}$$

La igualdad vale solo si $k = \beta$.

Entonces: $2(\alpha - 2) = 3(k - 1 - \beta)$ *por* (1), luego

$2^{\alpha} * 3^{\beta}\ \ o\ \ 2^{2} * 3^{k-1}\ \ \ ya\ \ que\ \ 2^{\alpha-2}\ \ \ o\ \ \ 3^{k-1-\beta}$

$pues\ \ (1),\ \ 2^{3(k-1-\beta)}\ \ o\ \ 3^{2(\alpha-1-\beta)}\ \ dado\ \ que\ \ 8^{k-1-\beta}\ \ \ o\ \ 9^{\alpha-1-\beta}$

La igualdad vale cuando $\beta = \alpha - 1$. Es decir $P(n) = 2^{2} * 3^{k-1}$.

Si n = 3k+2, $2\alpha + 3\beta = 3k + 2,\ entonces\ 2(\alpha - 1) = 3(k - \beta)\ \ \ por\ \ (1)$

Entonces

$2^{\alpha} * 3^{\beta}\ \ o\ \ 2 * 3^{k}\ \ ya\ \ que\ \ 2^{\alpha-1}\ \ o\ \ 3^{k-\beta}\ \ \ pues\ (1),\ \ 2^{3(k-\beta)}\ \ o\ \ 3^{2(k-\beta)},\ dado\ que\ 8^{k-\beta}\ \ o\ \ 9^{k-\beta}$

La igualdad vale cuando $k = \beta,\ \ \alpha = 1$. Es decir $P(n) = 2 * 3^{k}$.

Visión retrospectiva

Aplicando la conjetura para casos particulares, observamos que se verifica. Además revisando los pasos de la prueba, notamos que ellos se pueden justificar; lo que permite establecer que la conjetura es verdadera.
Completar y justificar cada uno de los pasos en el bosquejo de prueba anterior.
¿Es posible formalizar más detalladamente el procedimiento anterior? Hágalo, es un buen ejercicio.

A continuación presentamos algunas sugerencias para los problemas que se pueden proponer a los estudiantes, con algunas observaciones complementarias. Proponemos a los profesores que elaboren sus propios materiales educativos, que la metodología sugerida por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de resolución de problemas es una poderosa estrategia para que comiencen tan importante tarea.

Ejemplo 4. Cuadrados dentro de Cuadrados. Un número cuadrado perfecto de cuatro dígitos esta formado cuando dos números de dos dígitos son colocados uno al lado del otro. Si el numero representado por los primeros dos dígitos es uno mas que el numero representado por los últimos dos dígitos, y si el numero representado por los últimos dos dígitos es un cuadrado perfecto. Hallar el numero de cuatro dígitos.

Comprender el problema

¿Qué solicita el problema, cuál es la pregunta?
Solicita un número cuadrado perfecto de cuatro dígitos .
¿Qué sabemos?
Las propiedades del número :

1. El número formado por sus últimos dos dígitos es un cuadrado perfecto.

2. El número formado por sus dos primeros dígitos es el cuadrado anterior aumentado en 1

Crear un plan.

Encontramos las conexiones entre los datos y la incógnita o lo desconocido. El problema plantea una igualdad entre el número cuadrado perfecto y las propiedades del número.
Por lo tanto, el problema puede quedar planteado de la siguiente forma :

$$X^2 = (A^2 + 1)\,A^2$$

Donde, X tiene dos dígitos , $10 \leq X \leq 10^2$
A tiene un dígito, $4 \leq A \leq 9$

Poner en práctica el plan

$$X^2 = (A^2 + 1)\,A^2$$

La descomposición polinomial de X^2, nos lleva a lo siguiente:

$$X^2 = 100\,(A^2+1) + A^2$$

$$X^2 - 10^2 = 101\,A^2$$

$$(X-10)\,(X+10) = 101\,A^2$$

Como 101 es un número primo tenemos que $^{101}\!\diagup_{(X-10)(X+10)}$

Luego $^{101}\!\diagup_{(X-10)}$ *o* $^{101}\!\diagup_{(X+10)}$

Si $^{101}\!\diagup_{(X-10)}$, entonces $X - 10 = 101t$

$X = 101t + 10$

Como $10 \leq X \leq 10^2$, t debe ser $1 \leq t \leq 0$, lo cual no es posible.

Si $^{101}\!\diagup_{(X+10)}$, entonces $X + 10 = 101t$

$X = 101t - 10$,

Como $10 \leq X \leq 10^2$, t debe ser igual a 1.

Luego, $X = 101 - 10$
$X = 91$

El número cuadrado perfecto de cuatro dígitos es 8281.

Visión retrospectiva

Examinamos la solución obtenida. Al reemplazar la incógnita tenemos:

$$X^2 = (A^2 + 1)\,A^2$$

$$91^2 = \underbrace{82}_{9^2+1}\ \underbrace{81}_{9^2}$$

Lo cual cumple las condiciones del problema.

¿Qué números tienen propiedades similares?. Aquí le presentamos algunos :

$$9901^2 = \underbrace{9802}_{99^2+1}\ \underbrace{98011}_{99^2}$$

$$999001^2 = \underbrace{998002}_{999^2+1}\ \underbrace{9980011}_{999^2}$$

Es posible determinar todos los enteros positivos que tienen la misma propiedad. ¿Cómo empezar?. ¿Cómo plantear el problema en forma general?.

<u>Problema</u>: Determinar todos los enteros positivos X tales que existe un entero positivo a que satisface las siguientes propiedades:

1. Los números formados por los últimos k dígitos de X^2 es igual al cuadrado de un entero positivo A.

2. El número formado por los primeros k dígitos de X^2 es igual a dicho cuadrado aumentado en 1.

$$X = \left(\underbrace{A^2+1}_{K\ dígitos}\right) * \left(\underbrace{A}_{K\ dígitos}\right)$$

determine todos los pares de enteros positivos (X,A) que satisfacen las propiedades anteriores. ¿Cómo empezar?. Observe la sucesión de cuadrados perfectos.

Considere casos particulares, k = 1, k = 2, 3, 4, ... ¿Alguna conjetura?. Extienda su conjetura, pruebe su conjetura.

Incluir valores educativos y sociales tales como *compartir, ayudar y conservar energía* en los enunciados de los problemas [TR2].

Ejemplo 5. A continuación se tienen tres situaciones cuya dificultad se incrementa a medida que se requieren más pasos.

- Siete niños quieren recoger guayabas y *acuerdan compartirlas*. Recogen 245 guayabas ¿Determinar cuántos de ellos le corresponde a cada uno?
- Juan *ayuda* a su vecina durante ¼ de hora toda noche de la semana de lunes a viernes y durante ½ hora en el fin de semana ¿Cuánto tiempo dedica él ayudando a su vecina en una semana?

- Recientemente se descubrió que un motor depurado utiliza menos gasolina. Un aeroplano utiliza 4700 litros de gasolina durante un vuelo. Después de que se depuró se observó que utilizó 4630 litros para el mismo recorrido. Si el costo de la gasolina es de $1000 por litro, ¿qué tan económico es el aeroplano depurado?

Es importante proponer problemas que contienen mucha información para que los estudiantes se acostumbren a seleccionar lo que es apropiado y relevante.

Ejemplo 6. La semana pasada viajé en autobús una distancia de 1093 kilómetros. Salí a las 8 AM y, en promedio, a 86 km./hora durante las primeras cuatro horas de la jornada. El autobús paró en una estación para almorzar durante una hora y media y luego recorrió durante otras tres horas a una velocidad promedio de 78 km./hora antes de parar en otra estación, ¿qué tan rápido viaje?

También es importante proponer problemas en los cuales la información que se da no es suficiente para resolverlos. Pueden ser utilizados para que los estudiantes aprendan a ser *recursivos*, y son llamados *problemas Fermi* (después del matemático que los hizo populares).

Ejemplo 7. Las cuatro situaciones siguientes ilustran la forma en que es posible relacionar problemas con valores sociales.

- ¿Cuántos litros de gasolina se consumen en su ciudad durante un día?
- ¿Cuánto dinero ahorra una persona promedio en su ciudad en un año caminando en lugar de manejar o tomar transporte público?
- ¿Cuánto gasta en alimento una familia promedio en una semana?

- ¿Cuánto invierten sus padres en su educación durante un año?

El siguiente ejemplo ilustra como la última situación planteada en el ejemplo anterior puede ser tratada más detalladamente.

Ejemplo 8. Usando un Problema Fermi para Promover Valores Humanos. La profesora X desea enseñar a sus alumnos sobre el valor del dinero y a apreciar lo que hacen sus padres por ello. Ella opina: "Creo que los estudiantes deben ser conscientes de este importante aspecto para que sean más considerados cuando aspectos de dinero aparecen en su propia familia, tales como exigir a sus padres que les compren un regalo costoso. En la solución de problemas, pienso que los estudiantes pueden tener un mejor entendimiento del concepto de dinero, no simplemente como herramienta para comprar y vender cosas".

Elaborar alguna historia que motive a sus estudiantes para que intenten responder a:

- ¿Cuánto dinero gastan sus padres en usted en un año?
- ¿Cuánto dinero han gastado sus padres en usted hasta ahora?
- ¿Cuánto dinero gastarán sus padres en usted durante el tiempo que le falta para finalizar su bachillerato?
- ¿Cuánto dinero se gastará en sostener un niño en el país este año?

Una vez planteados estos problemas, se sugiere realizar lo siguiente.

- Formar grupos de 4 estudiantes para encontrar los posibles datos que necesitan conocer.
- Los grupos presentan sus datos y la forma como encontraron la respuesta.
- Realizar un análisis detallado del trabajo.

> ***"Colaboremos para que nuestros estudiantes se conviertan en productores de conocimiento en lugar de que continúen siendo solo consumidores"***

Ejemplo 9. Desperdicios producidos en la cafetería del colegio.

Paso 1. ¿Cuáles son algunas preguntas que usted desea responder?
Aprovechar el interés de los estudiantes por cosas que ellos desean conocer, cuestiones que deben responder, o problemas que han observado en la escuela, en su casa, en la comunidad. Se sugiere establecer como regla que nadie juzgue mal las ideas de otro. Si alguien repite una idea que ya está en el tablero, escribirla de nuevo (nunca decir "ya lo dijimos" ya que este tipo de respuestas ahoga el pensamiento creativo).

Paso 2. Escoger un problema o una situación investigativa.

Los estudiantes están interesados en la cantidad de desperdicios en la cafetería del colegio y su impacto en el medio ambiente. La situación investigativa es: *¿qué parte de los desperdicios en nuestra cafetería es reciclable?.*

Paso 3. Predecir lo que ocurrirá.

Paso 4. Desarrollar un plan para examinar sus hipótesis.
Es posible que sea necesario considerar las siguientes preguntas.

- ¿Quién dará el permiso para recoger los datos?
- ¿Cuándo podemos discutir convenientemente este proyecto con el director o dueño de la cafetería?
- ¿Qué tanto tiempo tomará recoger los datos?
- ¿Cuánto dinero costará?
- ¿Qué medidas debemos considerar por seguridad?

Paso 5. Ejecutar el plan.
Recoger los datos y discutir formas en las que los estudiantes pueden reportar los hallazgos (gráficos, por ejemplo).

Paso 6. Analizar los datos.
¿La verificación soporta nuestras hipótesis?
¿Qué herramientas serán necesarias para analizar los datos? Reconocer el tipo más adecuado de gráfico y de medida de tendencia central (media, mediana, moda).
Paso 7. Reflexión.
¿Qué hemos aprendido? ¿Nuestros hallazgos contribuyen a nuestra escuela, a nuestra comunidad, a nuestro mundo? ¿Quién puede estar interesado en nuestros resultados?

> *"La enseñanza final dejada a nuestros estudiantes es que ellos pueden investigar y ser productores de nueva información y que las matemáticas pueden ayudar a obtener conocimiento nuevo. Sus hallazgos pueden contribuir al conocimiento de la clase, del colegio, de la comunidad, o de la sociedad como un todo. Sus hallazgos pueden afectar a su colegio o a su mundo en una forma muy positiva"*

> **Podemos diseñar problemas que ayuden a que los estudiantes refuercen o extiendan la comprensión de conceptos (algoritmos de división y otros) y para desarrollar estrategias de resolución de problemas.**

Ejemplo 10. ¿Cuál es el número misterioso? Si lo divido por 3 el residuo es 1. Si lo divido por 4 el residuo es 2. Si lo divido por 5 el residuo es 3. Si lo divido por 6 el residuo es 4. ¿Cuántos números con estas características hay?

7. ENUNCIADO DE PROBLEMAS SELECCIONADOS

Los problemas que a continuación proponemos fueron diseñados y resueltos con el propósito de ser utilizados como punto de partida para el diseño de experiencias de aula en nuestra práctica como profesores de enseñanza básica y media. Como es lógico, estamos comprometidos con la aplicación del enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, consideramos que este material constituye sólo un punto de partida en tan importante empresa: hemos aceptado el reto.

Los docentes deben resolver los problemas, identificar los tópicos matemáticos (ideas, conceptos, resultados, etc.) que intervienen en la solución. También, de ser posible, deben modificarlos y adecuarlos, tanto al nivel como al contexto educativo en el cual los van a utilizar.

No se contenten con una solución, cuestiónese: ¿existe otro método?, ¿cómo propongo el problema a mis estudiantes?, ¿cómo guío a mis estudiantes en la búsqueda de soluciones?, ¿cómo diseño y propongo problemas similares?, ¿cómo utilizo el problema para enseñar tal tema?, ¿es posible generalizar el problema? Finalmente, la pregunta más importante ¿dónde aprendo más sobre los temas matemáticos que intervienen en los problemas y sus soluciones?

Es muy conveniente que estas actividades las realicen trabajando en equipo, de acuerdo con los estándares básicos de matemáticas y con cada proyecto educativo institucional, para que diseñen experiencias de aula y aplicarlas, con el propósito fundamental de ***construir sus propios materiales educativos***.

Objetivo general

Adquirir maestría en los aspectos relevantes sugeridos por el programa de investigación y desarrollo “Formulación y Solución de Problemas: una estrategia metodológica para el diseño curricular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas”, para aplicarlos en la práctica educativa diaria del salón de clase.

Objetivos específicos

- Diseñar materiales educativos acordes con los lineamientos curriculares, los estándares básicos de matemáticas, y con cada uno de los proyectos educativos institucionales.

- Identificar las diferentes fases y estrategias propias del proceso de resolución de problemas, para colaborar en la formación de ciudadanos críticos y autónomos ante la toma de decisiones en su diario vivir.

CUADRADOS MÁGICOS

Un cuadrado de orden *n*, *n* filas por *n* columnas (nxn = n^2 casillas), se llama *mágico* si en cada casilla se puede colocar uno y sólo uno de los primeros n^2 números naturales ($1,2,3,\ldots,n^2$), de tal forma que la suma de los números colocados en cada una de las *n* filas, en cada una de las *n* columnas y en cada una de las dos diagonales sea la misma. A esta suma constante se le llama *suma mágica*.

¿Es posible tener cuadrados mágicos de orden 1, 2, 3, 4, 5? En cada caso debe justificar su respuesta: si es posible, debe construir un ejemplo; si no es posible, debe justificar porque no. En cada caso, ¿cuál es la suma mágica correspondiente? Aquí hay varios retos interesantes. Primero: en función del orden, ¿puede usted obtener una fórmula para la suma mágica, suponiendo que existe un cuadrado mágico de dicho orden? Segundo: averiguar si existe algún método general que permita construir cuadrados mágicos de cualquier orden. Tercero: obtener información sobre otras “figuras mágicas”.

1. ¿Qué números naturales pueden ubicarse en las casillas del siguiente cuadrado, de tal manera que el producto de los números colocados en las casillas de cada horizontal sea igual al producto de los números ubicados en las casillas de cada vertical?

3	4	
	9	2
6		6

¿El problema tiene solución?, ¿la solución es única? Justifique su respuesta.

2. ¿Si existen, cuáles deben ser los valores de a, b, c, d y e para que el siguiente cuadrado sea mágico?

15	A	35
50	B	C
25	D	E

¿El problema tiene solución?, ¿la solución es única? Justifique su respuesta.

3. Diseñar problemas similares a los planteados. Identificar ideas, conceptos, métodos y resultados matemáticos relacionados con estos problemas. Recuerde las preguntas

propuestas en la introducción y proponga otras. Intente responderlas. Diseñe una experiencia de aula relacionada con la temática sobre cuadrados mágicos.

ADIVINANZAS

"El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades. Nadie dice que un educador no haga otra cosa que proponer pasatiempos a sus alumnos. Y un libro para profanos que sólo ofrezca pasatiempos es igual de ineficaz para enseñar unas matemáticas significativas. Lo que tiene que haber, evidentemente, es un juego recíproco entre seriedad y frivolidad. La frivolidad mantiene alerta al lector. La seriedad hace que el juego merezca la pena". (Martin Gardner, [GM1]).

"El matemático experto comienza su aproximación a cualquier cuestión de su campo con el mismo espíritu explorador con el que un niño comienza a investigar un juguete recién estrenado, abierto a la sorpresa, con profunda curiosidad ante el misterio que poco a poco espera iluminar, con el placentero esfuerzo del descubrimiento ¿Por qué no usar este mismo espíritu en nuestra aproximación pedagógica a las matemáticas?" Miguel de Guzmán [GM1].

Como Martin Gardner y Miguel de Guzmán, muchos matemáticos sostienen que el juego es un excelente motivador para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas Los siguientes problemas son algunos ejemplos que pueden ser utilizados en esta dirección.

1. **Adivinando dígitos.** Escoge al azar dos dígitos diferentes de cero (1,2,…,9). Multiplica uno de ellos por 5, al producto súmale 3, este resultado multiplícalo por 2, y a esta respuesta súmale el segundo número que pensaste. Dime el número que obtuviste. Apuesto a que puedo "adivinar" los dos dígitos originales.
   Justificar ¿por qué estoy seguro de ganarte la apuesta? ¿Por qué se excluye el 0?
   Diseñe una adivinanza similar con tres dígitos. ¿Puedes generalizar el problema?

2. **Mínimo número de preguntas.** En el cumpleaños de Esteban, el famoso mago Merlín, le propuso el siguiente problema. Si pienso un número entero entre 1 y 16, ¿cuál es el menor número de preguntas que debes hacerme para estar seguro de adivinarlo? ¿Cuántas preguntas son necesarias para adivinar un número entero entre 1 y 32, entre 1 y 64, entre 1 y 100? ¿Entre 1 y n?

3. **Clasificando números de dos dígitos.** Si existen, dar ejemplos de números enteros con dos dígitos que sean 3 unidades menos que un múltiplo de 3; que sean 2 unidades más que un cuadrado perfecto. En cada caso, ¿puedes exhibirlos todos?

4. **Proceder como el numeral 3 de la sección sobre cuadrados mágicos.**

NÚMERO DE DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL

Muchas veces presentamos las fórmulas que permiten resolver una gran variedad de problemas (que son ejercicios una vez que se conoce dicha fórmula) sin preocuparnos por el proceso que condujo a ellas, las exponemos diciendo que x matemático las demostró. En la mayoría de casos el método para descubrirlas es más importante que las mismas fórmulas. Es conveniente, cuando sea posible, exponer las ideas que permiten obtenerlas. Considere los siguientes problemas (¿ejercicios?), a primera vista parecen difíciles, pero si uno conoce la fórmula para el número de divisores positivos de un número natural tiene una herramienta poderosa para resolverlos. El propósito central de esta sección consiste en deducir dicha fórmula.

1. Calcular el número de divisores de 24192.
2. Hallar el menor número natural que tiene 24 divisores.
3. La descomposición prima de un número es $2^3x3^4x5^3x7^2$ ¿Cuántos divisores tiene el número?
4. Un número tiene exactamente 8 divisores, dos de ellos son 35 y 77 ¿Cuál es el número?
5. Hallar el mayor número de cuatro dígitos que tiene exactamente 3 divisores.
6. Hallar el mayor número de cinco dígitos que tiene exactamente 3 divisores.
7. Hallar el mayor número de tres dígitos que tienen exactamente 10 divisores.
8. Hallar el mayor número impar de 3 dígitos que tienen exactamente 10 divisores.
9. Calcular la suma de todos los divisores positivos de $10^5x6^{4.}$
10. ¿Cuántos de los primeros 100 enteros positivos son divisibles por los 3 primos más pequeños?
11. El número natural *n* tiene 6 divisores enteros positivos distintos incluyendo 1 y *n*. El producto de 5 de estos es 648. Hallar el otro divisor de *n*.
12. Liste todos los números menores que 100 con exactamente 5 factores. Hallar los siguientes 2 números. Cada número mayor que 100 tiene exactamente 5 factores

Solo consideramos números naturales y divisores positivos de ellos.

- ¿Cuáles números tienen exactamente dos divisores?
- ¿Cuántos divisores tiene 5^4? ¿Cuántos divisores tiene 3^2x5^3?
- Si p es primo y k es un entero positivo, ¿cuántos divisores tiene p^k?
- Sean p, q primos distintos, k, s enteros positivos, ¿cuántos divisores tiene p^kxq^s?
- Recuerde algunas de las estrategias de Polya: primero considere casos particulares, luego generalice. Está listo para encontrar una fórmula que le permite calcular el número de divisores de un número natural, inténtelo.

- Con esta herramienta a mano, resuelva los problemas anteriores (que ahora son casi ejercicios).
- Ahora considere situaciones similares. Diseñe preguntas, problemas, etc., que conducen a la obtención de algunas fórmulas que usted conoce.

RETOS

1. Productos máximos.
Descomponer un entero positivo *n* como suma de enteros positivos de forma tal que el producto de los sumandos sea lo más grande posible.

2. Luces de colores.
Un juego consiste de nueve botones luminosos (de color verde o rojo) dispuestos de la siguiente manera

1* 2* 3*
4* 5* 6*
7* 8* 9*

si se aprieta un botón del borde del cuadrado cambian de color el y todos sus vecinos (el 1 es vecino del 2, 4 y 5; el 2 es vecino del 1, 4, 5, 6 y 3; el 3 es vecino de 2, 5, 6; y así sucesivamente). Si se aprieta el botón del centro cambian de color sus 8 vecinos pero él no. ¿Es posible (apretando sucesivamente algunos botones) encender todas las luces verdes, si inicialmente estaban todas encendidas con luz roja? Justifique la respuesta.

3. Impar desconocido
El numero 142857 es en realidad un número impar, pero tiene algunas propiedades desconocidas. Multiplíquelo por los números desde el 2 hasta el 7 y observe los resultados. ¿Qué noticia tiene? ¿Puede explicar los resultados? Tratar de hallar otro número misterio que tenga propiedades similares.

4. Pitágoras extendido
El número de días en un año no bisiesto, 365 es un número especial porque es la suma de 3 números cuadrados, hallarlos. ¿Es 366 los días de un año bisiesto un número especial? ¿Existen otros números especiales?

5. Diferencia de cuadrados
83 tiene una propiedad muy especial: se puede escribir como la diferencia de dos cuadrados, hallarlos ¿Qué otros números cumplen esa propiedad?

6. Suma de factores primos
Hallar todos los números cuyos factores primos sumen 22

7. Permutando dígitos

¿Cuántos números de cinco dígitos se obtienen permutando los números 3, 4, 5, 6, 7? ¿Cuántos de ellos son pares, múltiplos de 5, múltiplos de 3? ¿Cuántos son divisibles por 9? ¿Si se ordenan, qué lugar ocuparía el 56347?

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

1. Parada de buses.

Por una ruta circulan varias líneas de colectivos cuya terminal esta en el kilómetro cero. La línea A tiene paradas cada 8 kilómetros y la línea B cada 12 kilómetros.
a. ¿Cada cuantos kilómetros coinciden las paradas?
b. Si la línea C tiene paradas cada 18 kilómetros ¿cada cuántos kilómetros coinciden las tres paradas?
c. Una compañía de teléfonos instaló cabinas equidistantes. Si los pasajeros cuentan con teléfono en cualquier parada de cualquier línea, ¿cuál es la distancia que hay, a lo sumo, entre dos cabinas consecutivas?

2. Restos de cáscaras,

Juan tiene entre 3 y 100 cáscaras; si él cuenta sus cáscaras de 3 en 3, le sobran 2,; si las cuenta de 4 en 4, le sobran 2; si las cuenta de 5 en 5, le sobran 2. ¿Cuántas cáscaras tiene Juan?

PRODUCTOS Y SUMAS DE NATURALES CONSECUTIVOS

Investigando sobre la suma y el producto de dos, tres, cuatro, etc., números naturales consecutivos.

1. ¿Cuántos números naturales consecutivos debo sumar como mínimo para obtener un número divisible por un primo dado?
2. *Pruebe* que 1000 no es suma de cuatro naturales consecutivos ¿Cuál es la menor cantidad de naturales consecutivos que sumados dan 1000?, encuéntrelos.
3. 45 tiene una propiedad muy especial: es el menor entero positivo que se puede expresar como la suma de enteros consecutivos de 5 formas. Encontrarlas. ¿Tiene 105 una propiedad similar?

Encontrar un procedimiento general que sirva para caracterizar los números naturales que son suma de consecutivos.

1. ¿Cuántos y cuáles de los enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 2, 3, 4, 5, 6, 7... naturales consecutivos?, ¿puede hallar un patrón. Explique.
2. ¿Cuántos y cuáles enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 2 enteros consecutivos.?
3. ¿Cuántos y cuales enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 3 enteros consecutivos?
4. ¿Cuántos y cuáles enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 4 enteros consecutivos?
5. ¿Cuántos y cuáles enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 5 enteros consecutivos?
6. ¿Cuántos y cuáles enteros entre 10 y 40 se pueden escribir como la suma de 6 enteros consecutivos?

Otros problemas adicionales sobre sumas y productos de naturales consecutivos.

1. 105 es el menor entero positivo que se puede expresar como suma de enteros positivos consecutivos de 7 formas distintas. Encontrar esas formas.
2. ¿Cuál es la menor cantidad de enteros positivos consecutivos que sumados dan 1000 y cuales son dichos enteros?
3. La suma de cinco números impares consecutivos es 3055, encontrar el impar más pequeño.
4. El producto de 3 números naturales consecutivos es 4896. Hallar los números.
5. Si a, b, 15519678084, 15519927241, X, Y, son cuadrados consecutivos. Hallar, a, b, X, Y. Sin calcular raíz cuadrada alguna.

REPRESENTACIÓN DECIMAL

1. Producto de dígitos

Puede usted caracterizar de alguna manera, los números enteros positivos que sean igual al producto de sus cifras. ¿Existe algún número de dos cifras que sea divisible por el producto de sus cifras?

2. El número ABCDE

El número ABCDE es un número entero cuyos dígitos son A, B, C, D, E. Formamos dos números de 6 dígitos. Así:

a) Colocando 1 al final del número anterior: ABCDE1.
b) Colocando 1 al principio del número anterior: 1ABCDE.

Hallar el número de cinco dígitos tal que: 3 (1ABCDE) = ABCDE1.

¿Qué sucede con menos o más cifras?
Si en lugar de 1 se coloca otra cifra, ¿qué sucede?

3. Números perdidos
En la siguiente figura cada letra representa uno de los dígitos del 1 al 9, cada dígito aparece solo una vez, hallar el número representado por cada letra.

	A	4	B
+	2	c	5
	D	1	E

4. Invirtiendo dígitos
Hallar un número de 2 dígitos si es tal que la suma del número original y el número obtenido al invertir sus dígitos es 54 ¿Hay más de una solución?

5. Posición de un dígito
Elige un número de tres dígitos, repítelo para obtener uno de seis dígitos, divida por 7, 11 y 13, en todos los casos da como residuo cero. ¿Por qué? ¿Qué pasa si el número es de 6, 7,..., etc. dígitos?

6. Coleccionado Estampas
Jesús tiene un número impar de estampas en su colección. La suma de los dígitos del número de estampas es 12, la cifra de las centenas es tres veces la de las unidades. Si él tiene entre 2000 y 3000 estampas en su colección. ¿Cuántas estampas tiene Jesús?

7. Dígitos primos
¿Cuál es el mayor número de 3 cifras que tienen todas sus cifras primas?

8. Dígitos y número de páginas
Se usaron 642 dígitos para numerar las páginas de un libro ¿cuántas páginas tiene el libro?

10. Los diez dígitos y el número 100
Escribir números empleando una sola vez cada uno de los diez dígitos, de tal forma que la suma de dichos números sea igual a 100.

Factorizando días
¿En cuántos días durante el año la fecha del día es un divisor del número del mes?

11. Dígitos múltiples
María escribió una lista de enteros consecutivos comenzando con el número 1. Si usó 594 dígitos, ¿cuál es el último número que ella escribió?

12. Cinco con vida

Si usted escribió todos los números enteros de 1 hasta 10.000, ¿cuántas veces escribió el dígito 5?

13. Justo a tiempo

En un periodo de 36 minutos, 24 estudiantes juegan un partido de básquetbol, si solo 10 pueden jugar a la misma vez y cada estudiante juega la misma cantidad de tiempo, ¿cuántos minutos juega cada jugador?, realiza un horario de tiempo para cada jugador.

14. El mayor múltiplo de doce

¿Cuál es el mayor múltiplo de 12 que se puede escribir utilizando cada dígito de 0 a 9 exactamente una vez?

15. Julia y los caramelos

La señorita Julia plantea diariamente un problema a sus alumnos de 7° grado y le regala un caramelo al primero que lo resuelve. En las últimas semanas ha repartido 18 caramelos entre 5 alumnos y ninguno de ellos recibió la misma cantidad de caramelos. Es más, uno de los chicos recibió lo mismo que lo que recibieron en total tres de los restantes. ¿Cómo se distribuyeron los caramelos? Mostrar que hay una sola forma posible.

NÚMEROS ESPECIALES

1. Números perfectos

Un número natural es *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos (excluyendo él mismo). Por ejemplo, 6 es perfecto pues 6 = 1 + 2 + 3. Hallar otro número perfecto. Sobre números perfectos hay problemas que los matemáticos aún no han podido resolver, por ejemplo: “No se conoce si existe o no un número perfecto impar”, “no se sabe si existen infinitos perfectos pares”.

2. Números abundantes

Un número natural es *abundante* si es menor que la suma de todos sus divisores (excluyendo él mismo). Por ejemplo 12 es un abundante, porque la suma de sus divisores: 1, 2, 3, 4 y 6 es mayor que 12. Dar ejemplos de otros números abundantes ¿Existen infinitos números abundantes?

3. Números deficientes

Un número natural es *deficiente* si es mayor que la suma de todos sus divisores (excluyendo él mismo). Por ejemplo 9 es deficiente porque la suma de sus divisores excluyendo el 9 es: 3 + 1=4 que es menor que 9. Dar ejemplos de otros números deficientes.

4. Perfectos, abundantes y deficientes

Hallar todos los números abundantes, deficientes y perfectos desde 1 hasta 100. Construir una tabla para chequear su comportamiento, será de gran utilidad. ¿Qué patrones observa usted? ¿Cuántos números menores que 100 son perfectos? ¿Hay más números abundantes o deficientes? ¿Algún número cuadrado es perfecto? ¿Cuáles son números pares y cuáles impares?

5. Palíndromos

Un número natural es *palíndromo* si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 13431 es palíndromo. ¿Cuántos palíndromos de 4 dígitos pueden escribirse?

5. Números triangulares y cuadrados

1, 3, 6, 10 son los primeros cuatro números triangulares. Hay una correspondencia entre los números triangulares y las siguientes configuraciones:

```
                                                 *
                                    *
                                                *   *
                  *
                                  *   *        *   *   *

*               *   *           *   *   *     *   *   *   *
```

El primer número triangular es 1, el cuarto es 10.

a) Hallar el 15° número triangular.

b) Hallar el n-ésimo número triangular.

El n-ésimo número triangular se obtiene como suma de una progresión aritmética ¿Cuál es?

Los números cuadrados también pueden mirarse en forma geométrica, describir como. Hallar la sucesión aritmética a partir de la cual se forman los números cuadrados (este es un buen reto).

NÚMEROS PRIMOS

Un número natural mayor que 1 es *primo* si sus únicos divisores positivos son 1 y él. Un número natural mayor que 1 es *compuesto* si tiene otros divisores distintos de 1 y de él. Por ejemplo, 2,5,7,11,13 son primos; mientras que 4,6,8,10,12 son compuestos.

1. **Primos y cuadrados**
   ¿Cuántos y cuáles números primos entre 1 y 10 son iguales a un cuadrado perfecto menos 1? ¿Cuántos y cuáles números primos entre 1 y 100 son iguales a un cuadrado perfecto más 1?

2. **Contando armarios**
   Hay 1000 armarios enumerados del 1 a 1000, suponga que al principio todos están abiertos. Cada segundo armario se cierra comenzando con el que esta marcado con el 2. Comenzando con el armario 3, cada tercer armario cerrarlo si está abierto y abrirlo si está cerrado. Siga el mismo patrón par el cuarto armario, comenzando por el armario 4, cada quinto armario comenzando por el armario 5 y así sucesivamente hasta llegar al armario 1000 ¿Cuáles armarios estarán abiertos cuando el proceso haya terminado? Justifique su respuesta.

3. **Criba de Erastótenes**
   Elaborar un problema similar al anterior, para que los armarios que al finalizar el proceso resulten abiertos correspondan a aquellos numerados con primos.

4. **Fabricando potencia perfectas mínimas**
   ¿Cuál es el entero positivo más pequeño que se debe multiplicar por 90 para hacer del producto un cuadrado perfecto, un cubo perfecto?

5. **Gemelos**
   El producto de las edades de los gemelos y su hermano mas joven es 3468. ¿Cuántos años tienen los niños?

6. **Salve a la princesa**
   El malvado Ñandú encierra a la princesa en una mazmorra, antes de sacarla ella deberá encontrar el primer número cuadrado perfecto mayor que 6000. Ayúdele a encontrar ese número a la princesa.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Diseñar problemas para deducir las reglas de divisibilidad por 2, por 3, por 5, por 9.

La divisibilidad por 9 tiene muchas aplicaciones interesantes. Por ejemplo: si a cualquier número natural se le resta la suma de sus dígitos, el resultado obtenido es siempre divisible por 9, SIN IMPORTAR CUÁNTOS DÍGITOS TENGA EL NÚMERO. ¿Puede usted justificar esta afirmación? También, dado un número de cuatro dígitos (Ej.: 4581) si se forma otro con los mismos dígitos (Ej.: 5418) y se restan, el resultado es divisible por 9. El número de dígitos no importa, haga otros ejemplos y convénzase ¿Puede usted justificar esta afirmación?

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

1. Residuos iguales

Al dividir los números 47 Y 70 por cierto número de dos dígitos se obtienen en ambos casos el mismo residuo, también de dos dígitos ¿por qué número se ha dividido?

2. Aritmética en distintas bases

Nuestro sistema de numeración se llama "decimal" porque utiliza como base 10. El reloj funciona con base 12 y base 60.
a) ¿A qué es igual 18 (base 10) en base 12? ¿En base 60?
b) ¿A qué es igual 73 (base10) en base 12? ¿En base 60?
c) ¿A qué es igual 132 (base 12) en base 10? ¿En base 60?

Determine los valores de a y b si el número de 5 dígitos b2aba en base 6 es equivalente al número de 7 dígitos a0a0aab en base 4.

3. Número especial

¿Cuál es el entero positivo mas pequeño que tiene residuo 4 cuando se divide por 5, y residuo de 6 cuando se divide por 7?

4. Completar la división

Reemplazar las letras por los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, sabiendo que el cociente es mayor que 200 y el residuo es cero. Use cada dígito una sola vez.

$$\begin{array}{r|l} 9\;3\;5 & \;\;a\;\;b \\ \cline{2-2} & c\;\;d\;\;e \end{array}$$

PROGRESIONES

1. Hallar fórmulas generales para sumas

Encuentre una fórmula para cada una de las siguientes sumas

1. 1 + 2 + 3 + ... + n
2. 2 + 4 + 6 + ... + 2n
3. 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1

Recuerde, primero considere casos particulares. Conjeture, verifique y pruebe.

2. Contando asteriscos

En el siguiente esquema:

```
                                    *
                  *                 *
      *           *                 *
*, *  *  *, *  *  *  *  *, *  *  *  *  *  *  *,...
      *           *                 *
                  *                 *
                                    *
```

a) ¿Cuántos asteriscos hay en el 10° paso?

b) ¿Cuántos asteriscos se han dibujado, en total, en los 15 primeros pasos?

4. Tres enteros en progresión aritmética

Hallar tres enteros en progresión aritmética cuyo producto sea un primo.

PÀTRONES DE COMPORTAMIENTO

1. El último dígito

¿Cuál es el último dígito de $4^{5456468}$?

¿Cuál es el último dígito de 3^{597}? Explique sus razones

2. Contando ceros

¿Cuántos ceros hay en el número entero 100!?

3. Raíces cuadradas

a) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 12345678987654321?

b) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 102030405060708090807060504030201?

4. Cuadrados y cubos

Seis enteros entre 3 y 30 son o cuadrados o cubos 4,8, 9, 16, 25, 27. ¿Cuántos enteros entre 30 y 300 son o cuadrados o cubos? ¿Cuántos enteros entre 30 y 3000 son o cuadrados o cubos?
Nota. Si un entero es un cuadrado y un cubo debería ser contado solamente una vez.

ECUACIONES

1. Cajas dentro de cajas
Dentro de una caja larga hay 6 cajas pequeñas, algunas de estas cajas están vacías y otras tienen seis cajas más pequeñas dentro de ellas. Hay 31 cajas de estas en total. ¿Cuántas de estas 31 cajas están vacías?, ¿tiene solución el problema si el total de cajas es 32?

2. El regalo de Ana
Ana da a Pedro una cantidad de 18.000 pesos más de lo que él ya tiene, después que Pedro recibe el regalo, Pedro tiene 216.000 pesos ¿Cuánto le dio Ana a Pedro?

3. Casi un cuadrado
Un cuadrado perfecto se puede hacer con 25 unidades, hacer un rectángulo con 24 unidades, pero hacerlo lo más próximo a un cuadrado, el largo debe ser lo más próximo al ancho ¿Cuáles son las dimensiones? Repita la construcción utilizando otros cuadrados. En general que rectángulo se forma cuando se le quita una unidad a un cuadrado perfecto. Muestre la generalización utilizando álgebra simbólica, una tabla y diagramas.

4. Cortando cabello
En una barbería un corte de cabello toma 35 minutos. En un día ocupado Cristina corta continuamente a todo momento, ella no deja ningún cliente sin peluquear. ¿Cuánto tiempo trabaja ella?

5. Tres hijas
Una familia tiene tres hijas. El producto de sus edades es 200. La hija mayor tiene dos veces la edad de la hija del medio. ¿Cuántos años tiene cada hija?

6. Puntaje promedio
En una clase de 22 estudiantes, 8 estudiantes reciben 84 puntos, 10 reciben 92 y 2 reciben 96 en el último examen. Si la clase tiene un promedio de 90 puntos. ¿Cuáles son las posibilidades calificaciones de los estudiantes restantes?

7. Calificando al ganador

América ganó 17 juegos más de los que perdió el año pasado. Si jugó 212 juegos en total y empató 3 ¿Cuántos partidos perdió América?

7. **Substrayendo**
Se le solicita que sume dos naturales. Por error, los resta y obtiene respuesta 10. Otro miembro de su grupo los multiplica y obtiene 651. ¿Cuál es la suma correcta?

8. **Doble inquietud**
¿Qué número natural debe usted sumar a y restar de 129, de tal forma que la suma es dos veces a diferencia?

9. **Completando un cuadrado perfecto**
¿Qué número natural debe sumar separadamente a 100 y a 164 para hacer de ambos resultados un cuadrado perfecto?

10. **Clavos en un balde**
Un balde contiene 40 clavos y juntos pesan 175 gramos. El mismo balde con 20 clavos pesa 95 gramos. ¿Cuánto pesa el balde? ¿Cuánto pesa cada clavo?

11. **Libro de lectura grueso**
Alejandro lee un libro con más de 100 páginas y poco menos que 200 paginas. La suma de los 3 dígitos del número de páginas es 10. El segundo dígito es 2 veces el último dígito ¿Cuántas páginas tiene el libro?

12. **Horario salarial**
Un hombre fue empleado para trabajar por $30.000 al día, con la condición de que por cada día que no trabaje deberá pagar $15.000, el número de días que no trabaja es mayor que el número de días que trabaja ¿Cuál es el número de días que trabajó si obtuvo un ingreso de $330.000?

13. **Determine mi edad**
Mi edad este año es múltiplo de 7, el siguiente año será múltiplo de 5 ¿Cuándo ocurrirá este evento próximamente? Mi edad este año es un múltiplo de x, el siguiente será múltiplo de x + 2 ¿Cuándo ocurrirá este evento próximamente?

14. **Dentro de un dominio**
Listar todos los números enteros que pueden reemplazar a la letra x en la ecuación 235 +3x para obtener valores ente 9350 y 13225.

15. **Dólares y cambio**
¿Cuántos cambios son necesarios para cambiar un dólar en combinaciones de 10 y 5 centavos?

16. **Elecciones**
Cinco candidatos A, B, C, D, E están en una elección, el candidato A fue elegido con 30 votos, B en el segundo lugar y E en el último lugar con 3 votos. Si hubo 49

votos en total y dos candidatos no obtuvieron el mismo número de votos. ¿Cuál fue el número de votos que obtuvo B?

17. El bolsillo secreto

Andrés tiene un bolsillo secreto dentro de su chaqueta y en el tiene algunas monedas de dólar. El tiene igual número de monedas de 5, 10 y 25 centavos de dólar, el valor total de sus monedas es de $8 dólares ¿Cuántas monedas de cada valor tiene Andrés?

18. Edades desconocidas

Jaime nació en el cumpleaños de su abuela, los dos dígitos de la edad de Jaime hoy son el inverso de la edad de la abuela. La edad de la abuela es un número primo, además después de 10 años su abuela será tres veces más vieja que Jaime en ese entonces ¿Cuántos años tiene cada uno?

19. Conozca abc

Si $ab = 12$, $bc = 20$, $c = 15$ y a es positivo ¿Cuál es el producto *abc*? Qué puede decir usted de *abc* si no se sabe que a es positivo.

20. Para ir a cine

Una función de cine cuesta $4000 por adulto y $1000 por niño. Si el número de adultos fue el doble del número de niños que ingresaron al cine y el teatro recibió un total de $72000, ¿cuántos adultos asistieron? Si el número de niños fue el doble del número de adultos que ingreso al cine y el teatro recibió $72000, ¿cuántos adultos ingresaron? Justifique su razonamiento.

EJERCICIOS

1. Marcando orden

En un periodo de 24 horas ¿cuántas veces los dígitos de un reloj digital estarán en un orden estrictamente creciente?, ¿en un orden estrictamente decreciente?

2. Paseo seguro

Dos atletas corren alrededor de una pista ovalada en direcciones opuestas, un atleta recorre el trayecto en 56 segundos, los dos atletas se encuentran cada 24 segundos ¿Cuánto segundos tarda el otro atleta en recorrer el óvalo?

3. Relaciones en centenas

Dado que a, b, c son dígitos distintos, ¿cuantos números de tres dígitos abc se pueden formar donde $a + b = c$?

4. **Construyendo triángulos**
¿Cuántos triángulos se pueden construir con lados enteros y un perímetro de 15?

5. **Jaulas**
¿Cuál es el mayor número de jaulas que se pueden usar para cazar 100 ratones, sin que ninguna jaula tenga igual número de ratones que otra?

6. **Productos y sumas**
Un número decimal es redondeado a 2. El producto de sus dígitos es 54 y la suma de sus dígitos es 16. Encontrar un tal número ¿Puede encontrar otros más?

7. **Productos con muchos ceros**
¿Qué par de números que no terminan en cero multiplicados entre sí dan 1.000.000.000 y 1.000.000.000.000.000.000?

8. PROPUESTA PARA UN CURSO DE CAPACITACIÓN

A continuación presentamos un proyecto para realizar un curso de capacitación para profesores en ejercicio y estudiantes de licenciatura. Este curso se propondrá durante las próximas actividades de capacitación que se programen por parte de las Secretarías de Educación. Por otro lado, algunos de los tópicos presentados en la propuesta serán utilizados en la oferta de un taller durante el IV Encuentro de Matemáticas organizado por FUNDEMAR y el Colegio Champagnat de Popayán.

Curso de Capacitación
"Pensamiento Numérico y Resolución de Problemas"

Orientadores
Adriana Campo, Oswaldo Daza, Yimi López, Carlos Trujillo
Grupo "Formulación y Solución de Problemas"
Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas

Objetivo general

Capacitar docentes en ejercicio para tener recurso humano habilitado en los aspectos relevantes sugeridos por el programa de investigación y desarrollo "Formulación y Solución de Problemas: una estrategia metodológica para el diseño curricular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas", para aplicarlos en la práctica educativa diaria del salón de clase.

Objetivos específicos

- Diseñar materiales educativos, relacionados con el pensamiento numérico, acordes con los lineamientos curriculares, los estándares básicos de matemáticas, y con cada uno de los proyectos educativos institucionales.

- Identificar las diferentes fases y estrategias propias del proceso de resolución de problemas, para colaborar en la formación de ciudadanos críticos y autónomos ante la toma de decisiones en su diario vivir.

PLAN DE ACTIVIDADES EN LA CAPACITACIÓN

1 PRESENTACIÓN Y NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

Presentación de los Participantes
Problemas para trabajar en grupos
Presentación de soluciones o intentos de soluciones
Presentación del curso
Contenido, Actividades, Metodología, Evaluación
Preguntas y Sugerencias

Taller 1. **Preconceptos**
Matemáticas. Quehacer matemático. Educación matemática. Ejercicios y Problemas.
Trabajo en grupo: desarrollo y socialización.

Conversatorio 1. Naturaleza de las Matemáticas.
Presentación, Preguntas y Discusión.
Actividades complementarias
- Pensamiento Numérico
- Lineamientos curriculares de Matemáticas
- Estándares Básicos de Matemáticas
- Capítulos 1 y 2 del material experimental

2. FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

Taller 2. Clases tradicionales.
Presentación de tres clases para temas específicos.
Esquema general: papel del profesor, papel del estudiante, el aula de clase.
Discusión y análisis.

Conversatorio2. Enseñaza de las matemáticas a través de resolución de problemas
Presentación, Preguntas y Discusión.
Actividades complementarias
- Lecturas seleccionadas de la bibliografía

Conversatorio 3. Clases basadas en la estrategia sugerida por el grupo
Presentación de tres clases para temas específicos.
Esquema general: papel del profesor, papel del estudiante, el aula de clase.

Discusión y análisis.

3. FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS 2.

Coversatorio 4. El Proceso de Resolución de Problemas
Concepto y clases de problemas.
Etapas de la Resolución de problemas.

Taller 4: Ejercicios y Problemas
Trabajo en grupos: desarrollo y socialización

Conversatorio 5. Generalidades sobre estrategias de resolución de problemas
Presentación, preguntas y discusión.

Actividades complementarias
Diseñar y resolver algunos problemas aplicando las etapas anteriormente expuestas.
Lecturas seleccionadas de la bibliografía
Capítulo 3 del material experimental

4. ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 1)

Taller 5: Formulación y solución de problemas (parte1)
Trabajo en grupos: Desarrollo y socialización

Conversatorio 6. Algunas Estrategias para resolver problemas
Presentación, preguntas y discusión.

Taller 6: Formulación y solución de problemas (parte 2)
Trabajo en grupos: Desarrollo y socialización

Actividades complementarias
Formular y resolver un problema atendiendo a los requisitos de los conversatorios
Lecturas seleccionadas de la bibliografía

5. ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 2)

Conversatorio 7. ¿Qué es enseñanza de las matemáticas a través de resolución de problemas?
Presentación Preguntas y discusión.
Taller 7: Preparación de actividades de aula (parte 1)
Presentación, preguntas y discusión.

Actividades complementarias
Lecturas seleccionadas de la bibliografía
Capítulo 4, sección 4.1 y 4.2 del material experimental

6. ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Parte 3)

Conversatorio 8. Resolución de problemas y enseñanza de valores.
Presentación Preguntas y discusión.

Taller 8: Preparación de actividades de aula (parte 2)
Presentación, preguntas y discusión.

Actividades complementarias
Lecturas seleccionadas de la bibliografía
Capítulo 4, sección 4.3 del material experimental

7. DISEÑO DE MATERIAL EDUCATIVO

Elaboración de proyectos de aula
Ejemplos de clases basadas en propuesta metodológica.

- De acuerdo con algunos de los temas que le corresponderá orientar, seleccionar o diseñar problemas partir de los cuales desarrollará sus clases.
- Elaborar un proyecto a ejecutar en un tiempo establecido.
- Presentación de los proyectos en el grupo.

Experimentación de los proyectos de aula
Ejecutar el proyecto y elaborar informe, de acuerdo con las sugerencias.

- Presentar por escrito una planeación sobre cada una de las clases.
- Informar sobre el desarrollo de cada una de sus clases.
- Observaciones y conclusiones: recoger opiniones de sus estudiantes.

Presentación del informe final

CONTENIDOS

Introducción general

Lineamientos curriculares y estándares básicos de matemáticas
Aspectos relacionados con la formulación y resolución de problemas, y el pensamiento numérico.

Concepción sobre matemáticas y quehacer matemático

Concepto y clases de problemas

El proceso de resolución de problemas

Enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas

Selección y el diseño de buenos problemas
Estudio de casos y conclusiones. Talleres experimentales.

Temas y lecturas complementarias.

METODOLOGÍA

Iniciando con intervenciones o conferencias por parte de los integrantes del grupo y de algunos participantes, la metodología se basa en a estrategia de seminario. Cada reunión de trabajo tendrá un grupo responsable de la misma (ponentes) que elaborarán la ponencia y otro grupo encargado del protocolo (acta) de la reunión. La evaluación se fundamentará en los informes escritos del protocolo, ponencias y talleres relacionados con la temática considerada.

BIBLIOGRAFÍA

[CP1]. Cazau Pablo. El aprendizaje por resolución de problemas. http://www.segciencias.com.ar/apxresol.htm

[CL1]. CLAMA: Club de Amigos de la Matemática. www.cienat.uda.edu.com/~clama.

[CL2] Colombo Leonor. "La resolución de problemas en el aula". Revista Brasilera de Ensino de Física, volumen 20, Nº 1, 1998.

[GM1]. De Guzmán Miguel. "Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias innovadoras en la educación matemática". http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

[ENF]. El Enfoque de resolución de Problemas. http://www.comenius.usach.cl/webmat2/enfoque/elenfoque.htm.

[FL]. Fridman Lev M. "Metodología para resolver problemas de matemáticas". Editorial Iberoamericana.

[GJ1]. García José Joaquín. "Didáctica de las ciencias, Resolución y Solución de Problemas y Desarrollo de la Creatividad". http://www.agora.udea.edu.co/~oleca/ponencias/problemas.htm.

[GP1]. Gómez Pedro. "Matemática y resolución de problemas". http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/mate_pensamiento.doc

[HP1]. Halmos Paul. "The heart of Mathematics". American Mathematical Montlhy, Vol. 87, No. 7, pp. 519-524 (1980).

[INT]. Intermath. http://.www.intermat_uga.gatech.edu.

[PG1]. Polya George. "Como plantear y resolver problemas". Editorial Trillas, Serie de matemáticas. Vigésimo cuarta reimpresión, Enero 2000.

[EBM]. Ministerio de Educación Nacional. Asociación Colombiana de Facultades de Educación. Estándares Básicos de Matemáticas (Documento borrador).

[LC1]. Ministerio de Educación Nacional. "Lineamientos Curriculares de matemáticas". Bogotá, 1998.

[NCTM]. National Council of Teacher of mathematics (NCTM). "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática". Sociedad Andaluza de Educación Matemática. "THALES", Sevilla, 1991.

[MP]. Pifarré Manoli y Sanuy Jaime. "La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto". http://www.bib.uab.es/pub/enseñanzadelasciencias/021245221v19n2p297.

[OMA]. Olimpiadas Matemáticas Argentinas. http://www.oma.org.ar/programa/

[ST2]. Santos Trigo Luz Manuel. "Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas". Grupo editorial Iberoamericana, 1997.

[ST1]. Santos Trigo Luz Manuel. "Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes". CINVESTAN – IPN, México.

[TM1]. Taplin Margaret. "Mathematics Through Problem Solving". Institute of Sathya Sai Education, Hong Kong. http://www.mathgoodies.com/articles/problem_solving.shtm

[TM1]. Taplin Margaret. "Teaching values through a problem solving approach to mathematics". Institute of Sathya Sai Education, Hong Kong. http://www.mathgoodies.com/articles/teaching_values.shtm

[TR1]. Trujillo Solarte Carlos Alberto. *"Estándares Básicos de Matemáticas"*. Conferencia, Universidad del Cauca, Popayán, 2003.

[TR2]. Trujillo Solarte Carlos Alberto. "Currículo Matemático y Resolución de Problemas". Conferencia, Primer Encuentro de Educación Matemática, ERM, Universidad del Quindío, Armenia, 2003.

[FOR1]. Trujillo Solarte Carlos Alberto y otros. "Formulación y Resolución de Problemas una Estrategia Metodológica para el Diseño Curricular, la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas". Programa de Investigación y Desarrollo, Universidad del Cauca, Código VRI ID 711, Febrero de 2002.

[VS] Vilanova Silvia y otros. "La educación Matemática. El papel de la resolución de Problemas.". OEI – Revista iberoamericana de educación.

http://www.campus.oei.org/revista/deloslectores/203Vilanova.pdf