PROVOCACIÓN Y SURGIMIENTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO, EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO DESDE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES. UN ESTUDIO DE CASO EN GRADO 7°

ANDRÉS MAURICIO MARTÍNEZ NOVOA

Código: 20132145004

JUAN CAMILO COBOS CAICEDO

Código: 20132145048

DIRIGIDA POR:

EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS

MAGISTER EN EDUCACIÓN Y TIC's

MONOGRAFÍA PRESENTADA POR LOS ESTUDIANTES ANDRÉS MAURICIO MARTÍNEZ NOVOA Y JUAN CAMILO COBOS CAICEDO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADOS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR EN LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2018

TABLA DE CONTENIDO

CONTEXTUALIZACIÓN 3
JUSTIFICACIÓN 4
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 5
OBJETIVOS 7
GENERAL 7
ESPECÍFICOS 7
MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL 8
MARCO DIDÁCTICO 11
MARCO LEGAL 16
METODOLOGÍA 22
DESARROLLO DE LA PROPUESTA 35
CONCLUSIONES 46
BIBLIOGRAFÍA 48
LISTADO DE LAS TABLAS 50
LISTADO DE LAS ILUSTRACIONES 51

CONTEXTUALIZACIÓN

Sobre la consulta de avances en investigaciones centradas en la enseñanza del álgebra, se ha esclarecido la idea de la emergencia del pensamiento variacional como una parte fundamental de la educación matemática, sobre todo desde las primeras aproximaciones en la escuela, teniendo en cuenta el valor significativo de los procesos conceptuales, acerca de la capacidad de abstracción y la generalización, que funcionaran como las bases del razonamiento matemático a potenciar en los estudiantes.

De esta manera, partiendo de la experiencia académica, como también de la práctica obtenidas en el ejercicio de la profesión docente, se han podido recopilar diferentes herramientas como referentes teóricos y propuestas didácticas, que permitieron reflexionar acerca de la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, sobre todo en la introducción expuesta por el currículo de las instituciones y las estrategias para promover un desarrollo valioso de esta rama de las matemáticas.

Es así como, en investigaciones hechas por Radford (2013, 2006, 2010), Kieran y Filloy (1989), Kieran (2017), Vergel (2013, 2014, 2015a, 2015b), Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnets (2012), Socas (2011), Callejo (2015), entre otros, sostienen la idea de un desarrollo sistemático del álgebra escolar en dos dimensiones que se han distinguido, la del pensamiento algebraico y la del razonamiento algebraico, por este motivo, la iniciativa radica en una propuesta didáctica con el objetivo de construir un puente que devele la transición entre el manejo reflexivo en situaciones aritméticas, y el desarrollo del lenguaje simbólico y la abstracción de patrones, que además fortalezca el crecimiento de los conceptos e interpretaciones propias del álgebra.

JUSTIFICACIÓN

La importancia de trabajar con actividades para desarrollar el pensamiento algebraico en la iniciación al álgebra escolar, establece un vínculo predominante para comprender la labor con otros contenidos matemáticos a medida que se avanza en el proceso de formación, debido a que, investigaciones como la de Fumagalli (2000), demuestran que dentro del sistema educativo hay una desarticulación de los contenidos de enseñanza y, esta fragmentación es inducida por algún factor institucional, o en palabras de la autora: “la escasa articulación interna de los contenidos de la enseñanza en términos de relaciones conceptuales”(p.79).

En un esfuerzo por intentar comprender el papel fundamental del álgebra escolar en el desarrollo del pensamiento matemático, surge la necesidad de profundizar en la relación existente del trabajo con los números al manejo de símbolos alfanuméricos, debido a que el álgebra es uno de los pilares fundamentales para la comprensión de los contenidos inmersos en la educación matemática (Socas, 2011).

En ese sentido, surgió la idea de realizar un estudio que apunte hacia el desarrollo del álgebra temprana, proponiendo una serie de situaciones que promuevan una noción sobre las ecuaciones de primer grado, a través de la generalización de patrones en un grupo de estudiantes de grado séptimo (7°).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El interés fundamental por el cual se realizó este trabajo, radica en el reconocimiento de dos tensiones, en cuanto a la primera, consiste en la problemática encontrada entre el paso de la aritmética hacia el álgebra escolar, así como lo sustenta Fumagalli (2000), que dentro del sistema educativo hay una desarticulación de los contenidos de enseñanza, y esta fragmentación es inducida por algún factor institucional. En ese sentido, el aprendizaje del álgebra se ve opacado por el hecho de concebir que el proceso de enseñanza, se reduce a sólo cambiar los números por letras, o en términos de Kieran y Filloy (1989), concebir el álgebra como la generalización de la aritmética, ya que esto conlleva a oscurecer la forma que tiene cada rama (estructura) de la matemática, y las consecuencias recaen en la construcción del significado que adquieren los estudiantes, sobre los objetos del álgebra y, también en el desarrollo del lenguaje algebraico, ejemplificado como:

> La experiencia en la escuela con los estudiantes de Grado Séptimo de Educación Básica Secundaria (E.B.S) nos muestra que existen serias dificultades para comprender y comunicar el lenguaje simbólico; esto no permite avanzar en la medida que se pretende que el estudiante logre plantear y resolver problemas usando ecuaciones, entienda generalidades, logre establecer relaciones entre una o varias magnitudes, etc. Dado que el puente que debería existir entre el lenguaje natural y simbólico no se ha construido con solidez. (González, 2012, p.27).

La segunda tensión, deriva de la búsqueda de contrarrestar la anterior postura sobre la enseñanza del álgebra, con los elementos en la escuela de los que se vale el educador para provocar en los alumnos, un buen progreso del pensamiento variacional, puesto que la mayoría de las veces están limitados. Por todo esto, crece la reciente necesidad de promover estrategias para incentivar la emergencia de esta forma de razonar respecto a las matemáticas, de introducir nuevas estructuras y objetos, desde instancias prematuras, González (2012) establece que: “el aprendizaje del lenguaje simbólico hasta este nivel (7º de E.B.S) está asociado exclusivamente a la aplicación de fórmulas y algoritmos para resolver cierto tipo de problemas y no a la comprensión de las mismas” (p.27). Por eso, para la comprensión del significado de las variables y relaciones, el lenguaje simbólico se vuelve fundamental y debería ser construido con sumo valor.

Por lo anterior, se pretende desde esta investigación mostrar una estrategia, a través de la aplicación de una propuesta didáctica, que permita reflexionar sobre las cuestiones planteadas, para neutralizar los efectos de las tensiones expuestas, y expandir el campo de la investigación en educación matemática.

OBJETIVOS

GENERAL

Desarrollar una secuencia de actividades para promover y potenciar la emergencia del pensamiento algebraico en estudiantes de grado séptimo, respecto a la temática de ecuaciones de primer grado desde la generalización de patrones.

ESPECÍFICOS

- Analizar el impacto que tienen las actividades basadas en la generalización de patrones, para llegar al desarrollo del pensamiento algebraico y la temática de ecuaciones de primer grado.
- Describir los procesos resolutivos de los estudiantes, para brindar estrategias en la enseñanza del álgebra escolar en grado 7°.
- Reconocer cómo el factor del contexto socio-cultural dentro del ambiente de aprendizaje influye en la emergencia del pensamiento y razonamiento algebraico.
- Indagar sobre el surgimiento de las concepciones que tienen los estudiantes en la aproximación a temáticas propias del álgebra.

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

La enseñanza del álgebra ha captado de tal forma la atención de los investigadores en educación matemática, que la discusión sobre este tópico, ha promovido diferentes interpretaciones en cuanto al origen y su aprendizaje socialmente difundido. En ese sentido, trabajar con todos los puntos de vista respecto al álgebra, llevaría a estudiar y conceptualizar esta forma tan particular de cavilar matemáticamente, además, de considerar su construcción a partir del desarrollo del pensamiento y el razonamiento algebraico.

En consecuencia, el análisis de las concepciones de las letras o símbolos alfanuméricos en expresiones como las ecuaciones, que se ha realizado en años de investigación, compone una de las principales preocupaciones en este campo, sin embargo, no radica sólo en la adherencia de nuevos signos o representaciones a las técnicas y esquemas que ya poseen los estudiantes, sino al desarrollo previo de los elementos que componen un lenguaje estructurado, el cual refiere a objetos abstractos y la forma de razonar con ellos.

Para lograr lo anterior, fue necesario centrar la mirada en algunos componentes fundamentales en la concepción del álgebra, uno de ellos llamados lenguaje algebraico, el segundo los procesos de generalización y el tercero las operaciones con los símbolos.

Uno de los referentes de los cuales apropiamos la manera en describir lo que es el lenguaje de los signos está en la siguiente cita:

> Hans Freudenthal escribió, hace ya más de veinte años, que consideraba importante abordar la relación entre matemáticas y lenguaje sin presuponer ningún tipo de primacía de lo uno sobre lo otro, al subrayar que se desconocía qué había inventado primero el hombre, si la escritura o la aritmética (Puig, 1994, p.4).

Esta descripción y relación entre matemáticas y signos, presupone uno de los elementos más importantes en la conceptualización del álgebra, no es fácil en la mayoría de los estudiantes realizar una transición adecuada de los números a los símbolos y, mucho menos trabajar y operar con cantidades que en las situaciones-problema tienen un sentido pero que no lo pueden descifrar.

De manera similar, en la historia se ha descrito la forma en que las civilizaciones utilizaron los números y los símbolos para realizar operaciones, de estas primitivas formas de operar y contabilizar cantidades se empezaron a desprender la conformación de las operaciones aritméticas, y es que no ha sido fácil deducir durante toda la existencia de la humanidad si los signos y símbolos fueron creados para sintetizar las operaciones o fueron sacados del mundo de las matemáticas, que aún no vemos, pero aun así utilizamos.

En ese sentido, reconocer el carácter operacional de la matemática y el significado de los símbolos, es también papel del profesor, que debe resignificar la manera en que los estudiantes comprendan lo que hacen, y la actividad matemática que promueven cuando resuelven problemas

> Eugenio Filloy introdujo hace ya algún tiempo la necesidad de usar una noción de sistemas matemáticos de signos lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares —y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido—, así como de los textos matemáticos históricos —tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o de procesos de cognición propios de una episteme (Puig, 1994, p.8)

Episteme es conocido como el concepto o conocimiento universal, del cual se le atribuye su significado a Platón y Aristóteles, el primero aclara que para llegar al concepto hay que acceder al mundo de las ideas, el segundo estipula que conceptualizar el significado del concepto es necesario un razonamiento lógico, en otras palabras, ¿El ser humano aprende repitiendo o descubriendo? Estas cuestiones filosóficas son las que describen la forma en que los estudiantes empiezan a acceder a su propio conocimiento y, en relación con el álgebra, a consolidar el pensamiento con el que construyen sus propios significados.

Es importante describir que desde la postura de Puig (1994), el uso de signos y los significados que se les otorgan, dentro de la matemática va más allá de su aplicación como símbolos en algoritmos aritméticos, aproximándose más a la semántica y su utilización cultural, como la construcción de modelos, los cuales permiten describir fenómenos y predecir comportamientos, a través de un lenguaje estructurado, formalizado y evidente desde la emergencia del pensamiento variacional.

Al realizar acercamientos entre el lenguaje y las matemáticas, aparecen definiciones sobre el aprendizaje del álgebra, en las cuales se destaca la emergencia de la reflexión sobre patrones, relaciones y la variación en el aula, a temprana edad:

> Approaching the introduction of algebra in the early grades from various, occasionally overlapping, perspectives (generalizing arithmetic, moving from particular to generalized numbers, focusing on mathematical structures common to sets of algorithms, introducing variables and covariation in word problems, focusing on the concept of function, to tie together isolated mathematics topics, etc.), they identified previously overlooked opportunities to explore the algebraic character of early mathematics. These recent studies suggest that shortcomings of instruction may have had a decisive role in the gloomy results from early studies of algebraic reasoning among adolescents (Booth, 1988; Schliemann & Carraher,2002) (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnets, 2012, p.127-128)

Dentro de esta cita, además de destacarse la importancia de presentar situaciones que potencien el trabajo pronto del algebra, se encuentran afirmaciones acertadas en lo que acontece dentro de las instituciones, que resumen los errores cometidos en la enseñanza del álgebra escolar, se traduce como sigue: "*generalización de la aritmética, pasando de números particulares a generalizados, centrándose en estructuras matemáticas comunes a conjuntos de algoritmos, introducción de variables y covariación en problemas planteados, centrándose en el concepto de función, para unir temas aislados de matemáticas*". De aquí se tomaron elementos que se fueron desarrollando en este trabajo y, que trataron de cambiar las maneras en que se concebía la enseñanza del álgebra, lo que llevo a los estudiantes a realizar sus propios procesos de pensamiento y razonamiento algebraico.

MARCO DIDÁCTICO

Partiendo del supuesto presentado en la primera tensión del cual se desenvolvió el anterior marco, Resulta pertinente buscar estrategias enfocadas hacia el estudio de la segunda tensión, por lo tanto, presentamos en este apartado el referente del cual también se ha valido el diseño, planeación y gestión de las actividades presentados en la secuencia.

La ruptura que se puede evidenciar entre el aprendizaje de un campo con entidades numéricas concretas, a un campo de razonamiento algebraico caracterizado por objetos abstractos, puede surgir de la falta de conexión entre la organización de los contenidos institucionales, y la construcción de tales temáticas (tal es el ejemplo de la resolución de ecuaciones), por lo tanto, se establece una relación entre un proceso para provocar la emergencia del pensamiento algebraico a través de tareas con generalización de patrones, con el fin de brindar una propuesta enfocada en la conceptualización de elementos simbólicos propios del razonamiento algebraico, como ocurre con el trabajo con ecuaciones de primer grado, ya que este concepto matemático, relaciona el significado de varias representaciones simbólicas, como lo es una letra, el símbolo igual, la concatenación de símbolos y, estos a su vez adquieren sentido cuando tienen una procedencia significativa para los estudiantes.

En dicha brecha entre el proceso de enseñanza-aprendizaje, surge la necesidad de poder hacer la transición entre la aceptación de símbolos numéricos a símbolos que se salen del contexto aritmético, puesto que para los estudiantes puede ser normal tal aceptación, o seguramente para otros causara confusión y todo lo que esto atrae dentro del fracaso del método de enseñanza del profesor, como es bien sabido no existe una formula general en cuanto a la enseñanza de entes matemáticos, por tal motivo la esencia de esta investigación radica en relacionar teorías de la didáctica de la matemática en pro del desarrollo del pensamiento y razonamiento algebraico, luego en esa búsqueda infranqueable se reunió la tesis de dos teorías que dieron como resultado el siguiente esquema:

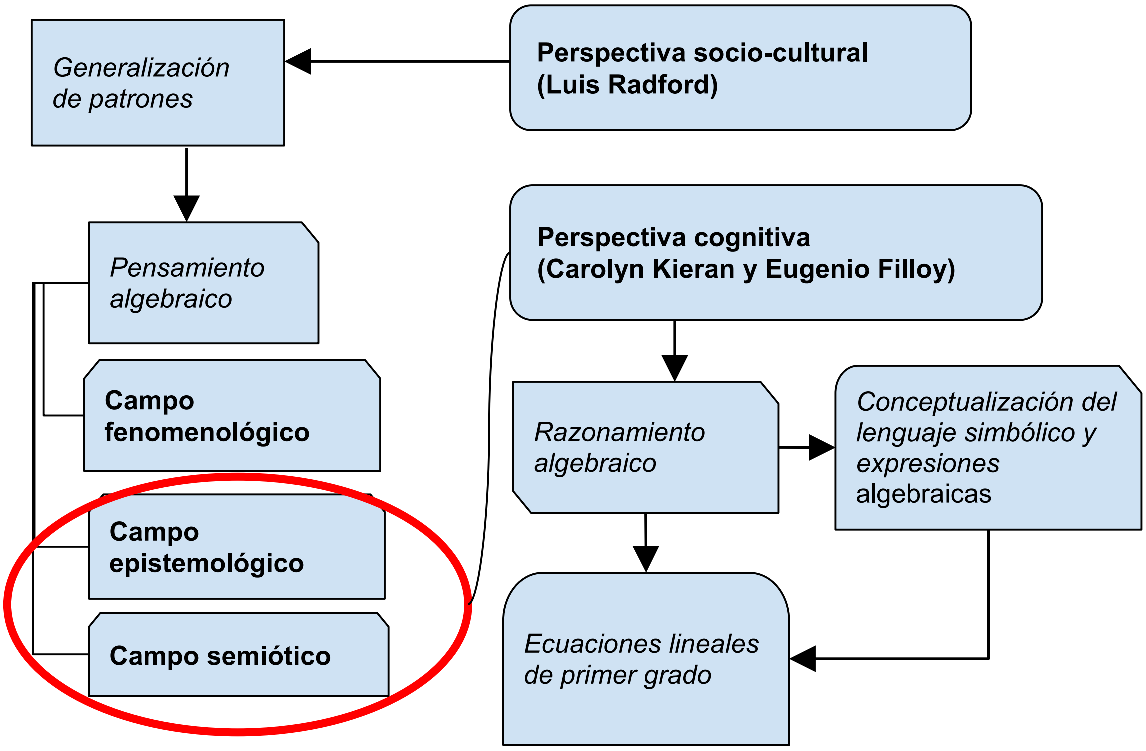


Ilustración 1.Relación sociocultural-cognitiva en el desarrollo del pensamiento y razonamiento algebraico. Construcción propia.

En el esquema se exponen los elementos teóricos que soportan la idea de trabajar con la generalización de patrones para llegar a desarrollar temáticas como las ecuaciones de primer grado, pero este paso que se da no es de manera espontánea, para entender esto, hay que hacer una descripción de los tres campos que se relacionan con el pensamiento algebraico para entrar al terreno del razonamiento matemático, en términos de la aceptación de símbolos para la comprensión de ecuaciones.

El campo fenomenológico lo describe Radford (2013) como: "es un problema planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad" (p.3). Dentro de las actividades propuestas, los estudiantes por medio de la percepción, generan su primera aproximación a la búsqueda de una regularidad, los elementos como la intuición y la intención son los que empiezan a estructurar el pensamiento, más, sin embargo, en este estudio no se enfatizó en este campo, se retoman elementos que componen el proceso de generalización, pero se centra la mirada en los otros dos campos.

El componente epistemológico se basa en el estudio del conocimiento y de la objetividad del mismo, Radford (2013) lo distingue de la siguiente manera: "...consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto" (p.3). Este proceso lo denomina como inducción, que no es propio de la generalización algebraica, ya que hay una regularidad que es recurrente, es decir, un estudiante es capaz de identificarla, la toma, para aplicarla a los nuevos objetos o términos que van apareciendo, y en este momento, es donde el sujeto empieza a crear significados personales sobre el pensamiento algebraico, porque el docente está en la capacidad de retroalimentar las acciones que el sujeto realizó en el campo fenomenológico, la intención perceptiva pasa a ser del dominio del razonamiento para después observar la regularidad que es recurrente por el momento en la secuencia figural (de un término a otro).

En el último campo, el componente semiótico son todos los significados emergentes en la actividad matemática del sujeto, la cual, adquiere sentido en la comprensión de la regularidad encontrada, en términos de Radford (2013) establece que: "... resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado" (p.3). Es decir, son todas las expresiones que el estudiante presenta, para dar cuenta del proceso de generalización, es aquí donde es importante articular el desarrollo del razonamiento que hace el estudiante, para comprender los signos que se consolidaron, por lo tanto, ¿En qué momento el proceso de generalización se transforma en la comprensión de los significados de los objetos semióticos que emergen de la actividad matemática del estudiante? En ese sentido, esta pregunta sirve para ubicar la comprensión que dota de significado el lenguaje alfanumérico cuando se le presentan dichas ecuaciones.

Entonces se va pasando de un proceso aritmético a uno de razonamiento algebraico, utilizando la estructura de generalización algebraica (Radford, 2013), que permite dar paso a la construcción de objetos para poder conceptualizar y asimilar las representaciones de ecuaciones y lo que estas significan por la múltiple relación entre sus símbolos (Kieran y Filloy, 1989).

Dentro del trabajo con la generalización de patrones, es muy importante establecer las características que logran que el estudiante llegue a encontrar una fórmula a partir de una secuencia figural, en consecuencia, Radford (2013) propone el siguiente esquema que da cuenta del procedimiento que se debe seguir para llegar a generalizar:

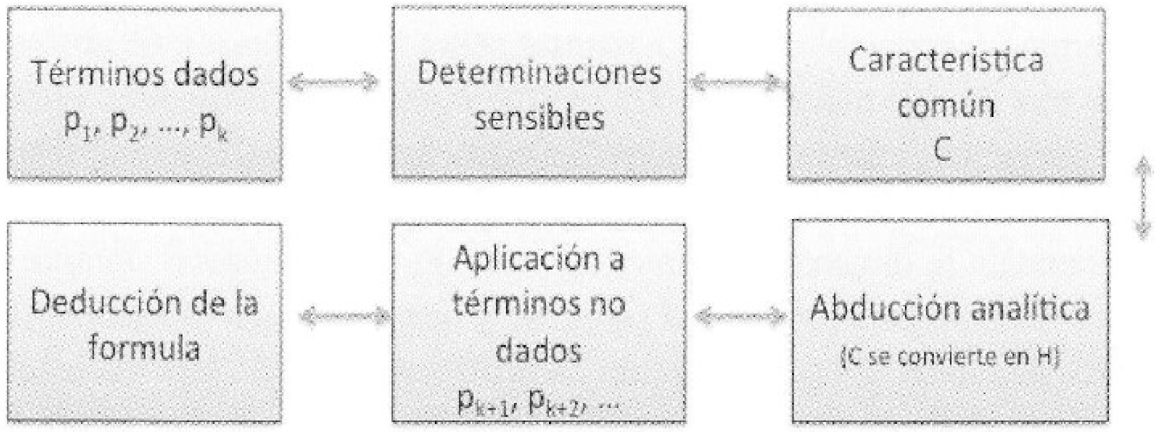


Ilustración 2.Estructura de la generalización algebraica de secuencias figúrales. Tomado de Radford (2013).

Cuando la característica común C, se convierte en hipótesis (H) para el estudiante, se comienza a develar la transición del pensamiento a uno de razonamiento algebraico, en ese sentido, se empieza a trabajar desde las nociones que tienen los estudiantes acerca de los símbolos que empiezan a existir, por ejemplo, si se retoma una secuencia figural donde la característica común es que va de "dos en dos", ¿Qué tipo de razonamiento podría realizar el estudiante entorno a las representaciones simbólicas que van a emerger? Cuando en la posición 10, el sujeto ya sabe qué cantidad va a haber, y cuando se le pregunta por la posición 1000 y por la posición "n", dentro del esquema mental del estudiante, se moviliza otro tipo de razonamiento, y es el razonamiento-con-los-símbolos, el "reemplazar en una letra" implica que el estudiante conceptualice los elementos constitutivos de una expresión algebraica, cuando se pasa de un proceso de generalización donde se conoce la fórmula general y, se presenta una ecuación lineal, la interpretación en ambos casos tiene que tener una conexión interpretativa y resolutiva, no son conceptos desligados, cuando el estudiante prefiere resolver ecuaciones con representaciones gráficas (Kieran, 2017), la extensión del pensamiento algebraico, pasa a ser del dominio del razonamiento, por eso la comprensión de una fórmula como "2n", implica la múltiple relación entre sus símbolos, cuando se le presente “2x”, el sujeto seguramente comprenderá que proceso es el que se está llevando a cabo entre estas representaciones.

Luego, la generalización de patrones se convierte en el medio, por el cual el estudiante es capaz de razonar algebraicamente, y será un agente en la comprensión de nuevos símbolos. Los estudiantes a la hora de enfrentarse a expresiones algebraicas como “x + 9 = 125”, contienen una conceptualización de los símbolos, cargados de significados tratados a través de las distintas actividades, por las que para comprender qué es lo que pasa cuando se les presenta esa expresión, por eso los campos antropológico y semiótico , guarda una estrecha relación entre la comprensión del lenguaje algebraico y el tipo de razonamiento que promueve el estudiante para apropiarse de este tipo de problemas.

En un ambiente de aprendizaje, la construcción del conocimiento conviene que tenga la claridad necesaria sobre los procesos que se deben trabajar para aprender a resolver problemas, los cuales se pueden analizar desde la perspectiva cognitiva de Kieran, en la que el papel de la comprensión de los símbolos que se realiza con la generalización de patrones, tiene que ser reforzada con la evolución del razonamiento que debe llevar al estudiante a comprender la presencia de otro símbolo como lo es la igualdad “=”, ya que esto induce a realizar otros procedimientos y admitir que la respuesta es un número (Kieran y Filloy, 1989).

En el siguiente cuadro, se proponen los procesos cognitivos que están involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar (Kieran y Filloy, 1989) y, por lo tanto, el razonamiento que tiene que realizar el sujeto cuando está tratando con símbolos alfanuméricos.

Tabla 1.Cuadro elementos del Razonamiento Algebraico. Construcción propia.

Forma de ver el signo igual (FVSI).	Métodos de simbolizar (MS).	Variables (V).	Expresiones y ecuaciones (EE).	Resolución de ecuaciones (RE).

Los anteriores elementos del razonamiento algebraico, son descripciones hechas por Carolyn Kieran y Eugenio Filloy hace más de 20 años, las cuales soportan la idea de trabajar todos estos aspectos después de haber consolidado en etapas anteriores el trabajo con el pensamiento algebraico, luego ¿Por qué el método de enseñanza del maestro aun devela falencias en el aprendizaje de los estudiantes?

Tal vez el problema no radique en la forma de enseñanza de los docentes, sino en la organización de los contenidos del currículo, la mejor forma de acercar a un aprendizaje fructífero seria por medio de la exploración, memorizar elementos matemáticos no es la solución a la problemática del fracaso en la enseñanza del álgebra escolar, no se sabe cuál es la procedencia de las matemáticas, ¿Es una invención de la humanidad? O ¿Tal vez es una herramienta a la cual se accede?

Durante la experiencia en esta investigación, la mejor forma de potenciar el pensamiento variacional de los estudiantes, resulto mediante el planteamiento de retos y la resolución de problemas, de esta manera los elementos del razonamiento algebraico, son construidos y apropiados por ellos, en ese sentido, es importante destacar la interrelación entre los campos propuestos por Radford (2013) para consolidar procesos algebraicos de manera cognitiva, como son el sentido de lo indeterminado (alude a las expresiones de los estudiantes al referirse a objetos que no tiene un valor numérico concreto) la analiticidad (la capacidad de operar con los objetos indeterminados y valores conocidos, bajo operaciones aritméticas) y el lenguaje simbólico (propio del manejo de letras o símbolos alfanuméricos que respetan la estructura matemática).

Para terminar, más adelante se esboza el diseño y la metodología de recolección de datos junto con las categorías de análisis, la cual conviene aclarar que salen de la interrelación de 2 campos de generalización de Radford (2013) y de algunos elementos del razonamiento algebraico (Kieran y Filloy, 1989).

MARCO LEGAL

En el presente marco conviene aclarar la normatividad estipulada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), el cual, a partir desde los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas y los lineamientos curriculares, plantea las bases como guía para la conformación de las actividades llevadas a cabo en el aula, y precede el diseño curricular a considerar en cuanto a contenidos y procesos generales, considerados para el desarrollo del pensamiento matemático

Por consiguiente, se utilizan las herramientas puestas en escena hace más de 10 años (lineamientos curriculares y estándares del MEN), que son el punto de partida para conseguir la emergencia del pensamiento y razonamiento algebraico, las cuales tienen un aditamento propio de la experiencia académica de otras formas de enseñanza no convencionales en la escuela.

Al respecto, el siguiente documento esboza una mirada sistémica de lo que es el álgebra en la escuela, por lo tanto, esta descripción propone un punto de vista constructivo que se aplicó en el aula

> Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional (MEN, 1998, p.17)

Esta visión del álgebra y su recorrido prematuro por la escuela, deja algunos caminos inexplorados en su momento, pues aún se tenía la lógica secuencial de la matemática, dando grandes saltos entre concepciones que ahora se sabe que necesitan una construcción previa. También se destaca la idea de comenzar por una generalización patrones, que, de acuerdo al marco didáctico, se encontró su relación entre el pensamiento y el razonamiento, teniendo en cuenta dos significados que se construyen en momentos diferentes, pero que están interrelacionados.

Conforme a lo descrito por el MEN (1998), se puede realizar un contraste, con otra descripción encontrada en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, esta vez llamado Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos

> El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (MEN, 2006, p. 66).

Esta descripción casi poética de la iniciación al álgebra, permite ampliar y liberar una concepción estructuralista de principios de milenio, lo que permite crear y recrear diferentes métodos y formas para potenciar la emergencia del álgebra en la escuela, además, se observa la necesidad de utilizar los patrones para inducir a los procesos de generalización.

Conceptos más específicos se describen para el abordaje y tratamiento del álgebra escolar:

> El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las

exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones (MEN, 2006, p. 67).

Vemos como la relación entre el lenguaje y el álgebra se vuelve tan estrecho que no se alcanza a divisar en qué punto se vuelven uno solo, ya que este nuevo universo de conocimiento tiene que ser entendido e interpretado desde la postura cultural, para que la construcción del conocimiento sea la solución a la búsqueda de problemas contextualizados, dicha búsqueda es la que resignifica el estudiante es su actividad matemática.

Toda la retórica entorno al conocimiento algebraico y, su estructura legal enmarcada institucionalmente, se conforman los llamados estándares básicos, que son el entramado de los procesos generales y los campos del pensamiento matemático (MEN, 2006). A continuación, serán presentados los que tienen relación directa con el grado séptimo

Tabla 2. Estándares básicos de competencia en matemáticas grado séptimo, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Tomado de (MEN, 2006).

ESTANDAR
Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Estos estándares, son la base de la cual se parte para lograr consolidar una ruta de trabajo de acuerdo a las problemáticas encontradas y, segundo utilizar el conocimiento y la experiencia adquirida para dar paso al desarrollo del pensamiento algebraico desembocando en el razonamiento algebraico.

Para finalizar, los esquemas básicos que se siguen para trabajar las actividades, siguen su raíz en los elementos del MEN, como el que se observa a continuación

Ilustración 3. Cubo de los procesos, conocimientos básicos y el contexto. Tomado de (MEN, 2006).

Cada cara conforma en conjunto las herramientas necesarias para llegar a abstraer una noción fundamental para el aprendizaje significativo, teniendo en cuenta cada dimensión conceptual que el profesor cambia de acuerdo a sus intereses pedagógicos, para este caso, la consolidación del pensamiento algebraico desde la mirada socio-cultural de Luis Radford y el Razonamiento Algebraico de Carolyn Kieran y Eugenio Filloy.

El siguiente apartado, expondrá la metodología utilizada, la población con la cual se trabajó y, las actividades aplicadas junto con sus criterios de análisis, lo anterior, de acuerdo a las producciones realizadas por cada estudiante.

METODOLOGÍA

Este tipo de modalidad, permite ampliar el campo de la investigación en educación matemática, puesto que el trabajo que se ha consolidado, pretende conformar un contraste entre dos teorías del aprendizaje para el desarrollo del álgebra escolar, en ese sentido, lo que se lleva realizado hasta este apartado, apunta a especificar en qué momento se da dicho contraste y cómo esto ayuda a promover procesos de aprendizaje más efectivos en la emergencia del pensamiento algebraico y el paso hacia el razonamiento.

En cuanto a la ruta metodológica de este trabajo, se presenta el primer esquema, en el que se ilustra la correlación de las distintas guías que se trazaron para conseguir los objetivos planteados

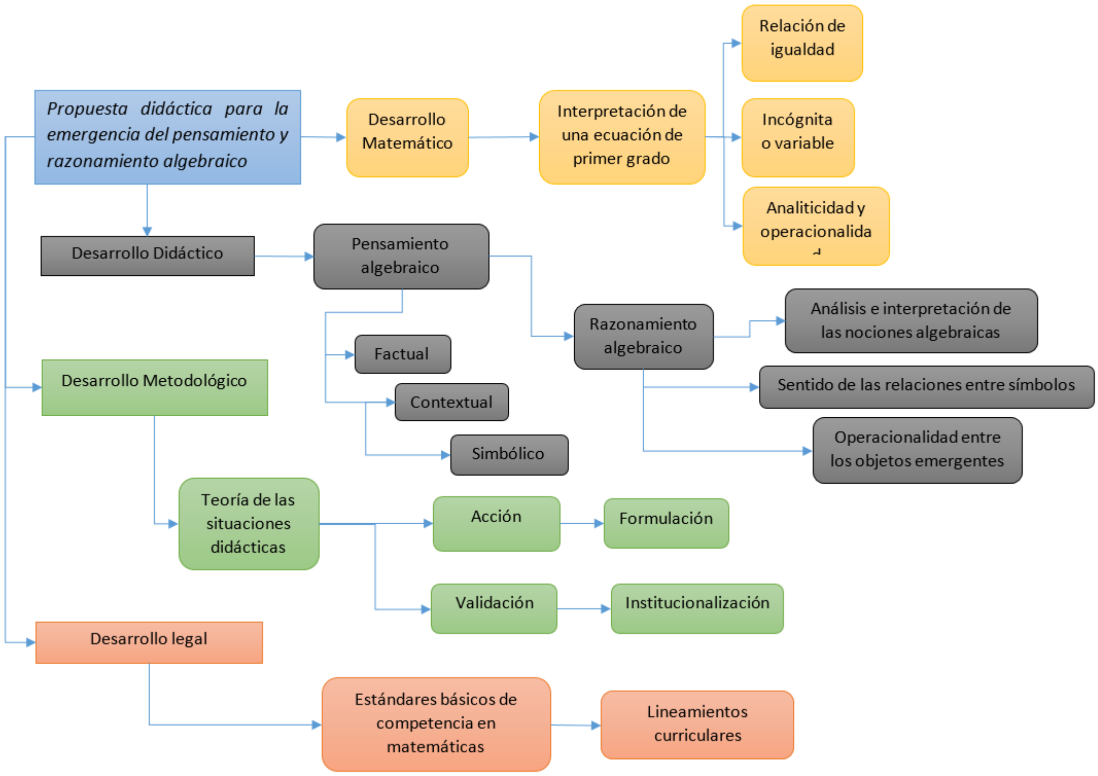


Ilustración 4. Ruta metodológica. Construcción propia.

En la ilustración 4 se puede evidenciar el orden metodológico que se siguió en este proceso, el cual, sigue las pautas para consolidar una gestión apropiada con las situaciones que se propusieron y su consigna analítica de la producción de los estudiantes.

En el desarrollo de esta experiencia de aula, se presentaron 7 actividades[1] a un grupo de estudiantes en edad de 12 a 14 años de una colegio Distrital de la ciudad de Bogotá, inicialmente, estos estudiantes no habían tenido un acercamiento conceptual a lo que es el inicio del álgebra escolar, por lo tanto, estas situaciones se diseñaron en pro de la movilización de todo tipo de significados iniciales por parte de los niños, con la finalidad de ir afinando los conceptos y nociones que se iban generando, para consolidar los saberes institucionales mediante la exploración y resolución de situaciones-problema.

Como metodología de gestión de las actividades, se utilizó la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), la cual, proporcionó un marco de referencia amplio para la organización y gestión dentro del ambiente de aprendizaje, tal vez, uno de los esquemas más utilizados para comprender el fenómeno de la enseñanza-aprendizaje de nociones matemáticas es el siguiente

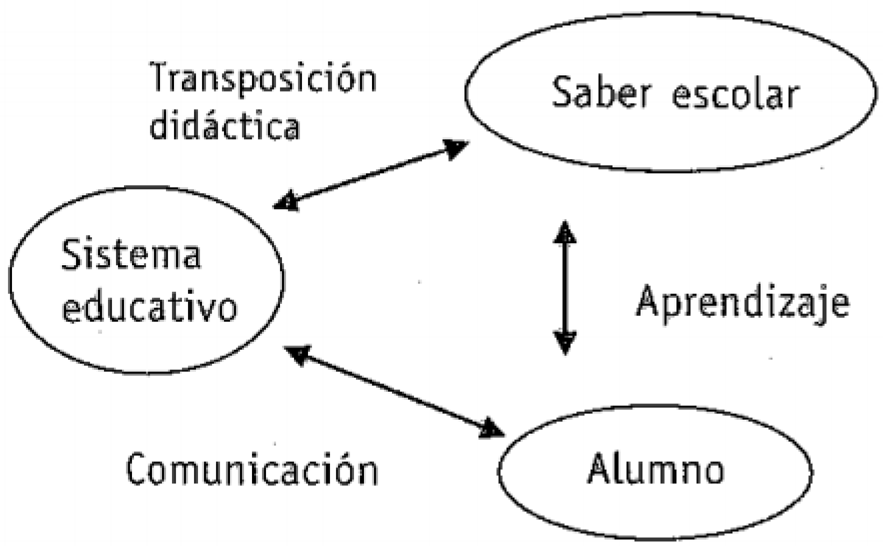


Ilustración 5. Triada generada para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tomado de (Brousseau, 2007).

Basándose en este tipo de tratamiento, fue posible organizar las sesiones de clase, de tal manera que se pudo llevar un proceso sistemático, acorde a lo que se espera buscar en cada estudiante y en cada grupo de trabajo. Por ejemplo, el saber institucional que se tenía predispuesto, tuvo que ser ajustado a los interés académicos e investigativos de la línea conceptual de esta experiencia, que es la emergencia del pensamiento y razonamiento algebraico.

[1] El diseño, gestión y evaluación de las actividades, fueron llevadas a cabo en conjunto con Junior Raid Yebara Gutiérrez, Estudiante de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

La construcción del conocimiento colectivo e individual y, el sentido de las actividades se basó en la resolución de problemas, con el fin de que los estudiantes reflexionarán sobre la actividad matemática que realizaban, y se pudiera observar estrategias que movilizaban, la forma de gestionar las actividades permitió la generación de espacios de comunicación y socialización de las respuestas a las situaciones planteadas, movilizando así los desarrollos de autoaprendizaje, afinando la concepción adaptada por el estudiante en un principio, para poder validarla en otro tipo de escenarios (Brousseau, 2007).

Al respecto, la importancia que tiene el recurso por el cual se establece la comunicación maestro y estudiante, tiene su carácter asociativo y enigmático, como se describe en lo siguiente

> En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado? ¿Qué aventura-sucesión de juegos- puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? Desde este enfoque, se describe al sujeto como si fuera un jugador de ajedrez que actúa teniendo en cuenta sólo sus conocimientos y el estado del juego (Brousseau, 2007, p.15).

La metáfora de juego o situación de juego, es aplicable a lo que sería las situaciones diseñadas para el alcanzar el estatus conceptual de los niños en cada fase.

El sentido que se le da al aprendizaje del álgebra escolar, está dado por la importancia que tiene este concepto en la comprensión de otros objetos matemáticos, entonces, pasar de un plano socio-cultural a un plano psicológico, fue lo que se buscó establecer en esta investigación, la aprehensión de un concepto no solo se da de manera individual ni de manera colectiva, el aprendizaje surge en el movimiento constante entre esos dos mundos, donde es difusa la frontera que los distingue, pero ciertamente existe un vínculo entre lo que se construye significativamente y lo que se transforma en el campo mental o conceptual (Vergnaud, 1990), por lo tanto el tipo de representaciones internas que posee una persona determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar (Godino, Blanco y Pegito, 2012), como es el caso del manejo de símbolos alfanuméricos presentes en expresiones algebraicas.

Las situaciones planteadas a los estudiantes se describirán a continuación, cada una desarrollada en dos sesiones de clase de 2 horas, revelando las secuencias figúrales utilizadas en las actividades, con la finalidad de que el lector pueda develar las potencialidades de cada una.

Tabla 3. Recolección de las situaciones. Construcción propia.

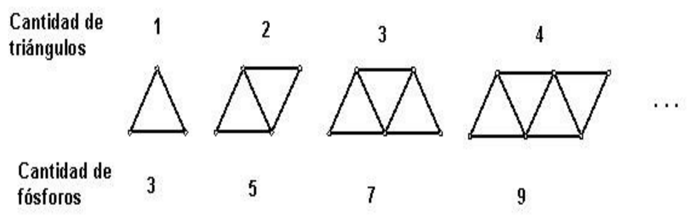
SITUACIÓN DIAGNÓSTICO

La siguiente tabla muestra el valor que tienen para la venta de los paquetes de frituras en una tienda

núm.	1	2	3	4	....
precio	2000	4000	6000	8000	....

Como podemos encontrar el precio de 10 paquetes, o de 50, de ahí en adelante para cualquier numero

Las siguientes formas se arman con la cantidad de fósforos indicados



Como saber ¿cuántos fósforos se usaran al armar la figura 50 o la figura 100?

SITUACIÓN 1

Suponga que tiene un trozo de alambre (ver Fig.1), al que le realizamos un corte (ver la Fig.2), del que resultan 4 partes de alambre. En un segundo corte paralelo al anterior obtenemos 7 partes de alambre (ver Fig.3) ¿Cuántas partes habrá al realizar el 4º corte? ¿Cuántas partes habrá al realizar el 7º corte, al 20º corte, y el 117º corte? (Martínez, Cobos y Yebara, en prensa)

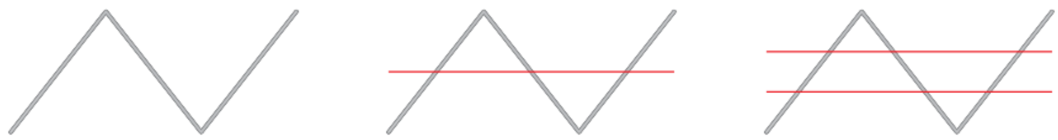


Fig.1 **Fig.2** **Fig.3**

Abriremos un espacio, para las inquietudes de los estudiantes, orientando sus respuestas con nuevas preguntas, como ¿Es necesario realizar los dibujos para hallar la cantidad de partes de los cortes pedidos? O ¿Qué sucedería al hallar cualquier cantidad de cortes? ¿Hay una forma de saberlo?

SITUACIÓN 2

Suponga que tiene un trozo de alambre (ver Fig.1), al que le realizamos un corte (ver la Fig.2), del que resultan 4 partes de alambre. En un segundo corte paralelo al anterior obtenemos 7 partes de alambre (ver Fig.3) ¿Cuántas partes habrá al realizar el 4º corte? ¿Cuántas partes habrá al realizar el 7º corte, al 20º corte, y el 117º corte?

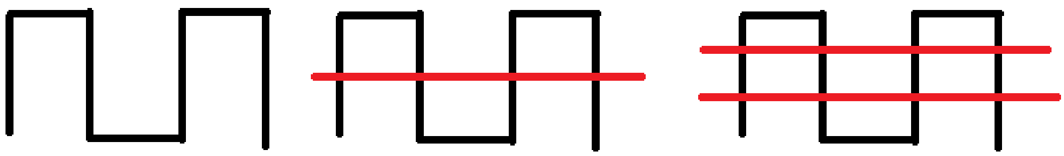


Fig.1 **Fig.2** **Fig.3**

SITUACIÓN 3

En la zona de descanso del colegio se dispone organizar las sillas como se muestra en la imagen anterior ¿Cuantas sillas habrá en la figura 4, en la figura 10 y en la figura 30?

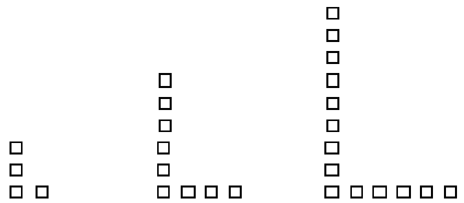


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig.3**

Ahora, si suponemos que tenemos una enorme cantidad de sillas ¿Habrá alguna forma de saber cuántas hay en la figura 100?

SITUACIÓN 4

En la zona rural del colegio, se plantó un árbol para estudiar su crecimiento y se encontró la siguiente información

Meses transcurridos	Altura alcanzada
1	2
2	2,5
3	3
4	3,5
…	….

¿Cómo se podría saber que altura habrá alcanzado el árbol cuando hayan pasado 57 meses? ¿Qué expresión nos permitirá saber la altura alcanzada para cualquier cantidad de meses transcurridos? ¿Cuantos meses tendrán que pasar para que la altura del árbol llegue a ser mayor que un metro?

Ahora presentamos una variación de la anterior situación, que pretende profundizar en el tratamiento

Suponga ahora, que plantamos un árbol, pero aplicamos sobre el un tónico que aumenta su crecimiento expresado en la siguiente tabla

Meses transcurridos	Altura alcanzada
1	6
2	6,5
3	7
4	7,5
…	….

¿Qué expresión describe el nuevo crecimiento del árbol? ¿Cuantos meses tendrán que pasar para que el árbol alcance 2288 centímetros de altura?

SITUACIÓN 5

Luisa y Jaime compran sobres con cartas, para jugar, todos los sobres tienen la misma cantidad de cartas. Luisa tiene 4 sobres y 1 carta, Jaime tiene 2 sobres y 5 cartas, Si ambos tienen la misma cantidad en cartas ¿Cuántas cartas tienen un sobre?
SITUACIÓN 6 En el colegio detectó un enjambre de abejas muy cerca de la zona donde se plantan árboles, y se encontró que la cantidad de abejas aumentaba como muestra la siguiente tabla:

Número de días	Cantidad de abejas
1	9
2	16
3	23
4	30
…	…

Las situaciones planteadas en la tabla 3, guiaron el proceso de enseñanza-aprendizaje con los estudiantes, la forma en que se abordaron las actividades tuvo su aprovechamiento para consolidar nociones que se iban construyendo y, de esa manera avanzar en la conceptualización de los símbolos alfanuméricos y de la comprensión cognitiva (razonamiento).

Por lo tanto, para el análisis de las producciones, se consolido el siguiente cuadro, que especifica el contenido teórico que describe el contenido en cada situación, en el cual se pretende esbozar los elementos de cada teoría puestos en marcha en las producciones de los estudiantes

Tabla 4. Elementos teóricos para el análisis de las producciones.

SITUACIÓN	SUPUESTO TEÓRICO
Situación diagnóstico	Elementos conceptuales previos.
Situación Fundamental 1 y 2 (Generalización)	Elementos de la generalización de patrones (Radford, 2013)
Situación Fundamental 3	Contraste elementos del

(Ecuaciones 1) Situación Fundamental 4 (Ecuaciones 2)	pensamiento algebraico (Radford, 2013) y Razonamiento Algebraico (Kieran y Filloy, 1989).
Situación fundamental 5 y 6 (final)	Elementos del Razonamiento algebraico (Kieran y Filloy, 1989).

Ahora bien, los supuestos teóricos permiten categorizar las situaciones dentro de las teorías descritas, pero la siguiente matriz, apunta específicamente a cada situación y su concepto base observado en las producciones, esto con la intención de análisis y desarrollo de la propuesta enmarcada en este escrito

Tabla 5. Rejilla de categorías de análisis. Construcción propia.

	Criterio 1.	Criterio 2.	Criterio 3.
Situación diagnóstico	Dominio de los conjuntos numéricos (enteros y racionales).	Generalización de patrones.	Reconocimiento de relaciones de cambio y variación.
Situación Fundamental 1 y 2 (Generalización)	Criterio 1. Pensamiento Factual.	Criterio 2. Pensamiento Contextual.	Criterio 3. Pensamiento Simbólico
	1.1 El estudiante expresa con lenguaje natural, el comportamiento de un patrón que ha reconocido.	2.1 El estudiante destaca las relaciones funcionales que reconoce del patrón, aludiendo a casos concretos.	3.1 El estudiante refiere al patrón en una generalidad que incluye símbolos (no necesariamente alfanuméricos) que refieren a entidades indeterminadas.
	1.2 El estudiante utiliza expresiones de generalidades aritméticas o funciones recursivas para referirse al patrón.	2.2 El estudiante se refiere al patrón con una generalidad, en la que evoca un caso genérico en el que interviene el sentido de lo indeterminado en lenguaje natural.	3.2 El estudiante expresa una generalidad que incluye símbolos, que aluden a una variable y reflejan relaciones funcionales.
Situación Fundamental 3 y 4	C1.1/FVSI C1.2/EE	C2.1/MS, V C2.2/EE	C3.1/MS C3.2/V C3.1,2/RS

Situación final 5 y 6	Forma de ver el signo igual.	Métodos de simbolizar.	Expresiones y ecuaciones.	Variables.	Resolución de ecuaciones.

Con la rejilla de análisis, es posible, constatar y referenciar las producciones de los estudiantes, teniendo en cuenta que ellos también movilizan conocimiento generado por las retroacciones didácticas que provee la situación y las acciones sobre las que hacen operativo su conocimiento, que se expresa lenguaje verbal y sus representaciones icónicas.

Por último, durante el recorrido en las diferentes prácticas se acostumbró a realizar unos criterios de evaluación con miras al análisis y estratificación de la producción, en efecto, aquí se consolidaron los criterios de observación, que significa más una guía tentativa del análisis sin intervención directa sobre la rejilla de análisis.

Tabla 6. Criterios de observación. Construcción propia.

	ESTÁNDAR	COMPETENCIA	NIVEL DE LOGRO	
SITUACIÓN DIAGNÓ**STICO**	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos Aritméticos y geométricos.	La resolución y el planteamiento de problemas La comunicación La elaboración comparación y ejercitación de procedimiento	Cognitivo	
			N1	Se le dificulta interpretar las situaciones, en el sentido de reconocer patrones y generalidades
			N2	Le resulta complejo expresar la generalidad que ha hallado de la situación, recurriendo a casos específicos.
			N3	Identifica la generalidad y logra referirse a lo indeterminado, movilizando medios de expresión (frases clave/ designación simbólica).
			Procesual	
			N1	Recolecta los resultados que se le piden, de manera práctica, recurriendo a las figuras, sin considerar relaciones entre los números.
			N2	Procede a trabajar con los números de la situación, y es capaz de referirse a situaciones específicas

				como la aplicación de una forma que ha hallado, sin aun referirse a lo indeterminado.
			N3	Trabaja con las relaciones entre números de cada una de las situaciones, además de referirse a la generalidad desde los objetos indeterminados.
			Actitudinal	
			N1	Muestra poco interés en la actividad.
			N2	En ocasiones se encuentra disperso hacia la actividad
			N3	Muestra interés en cada una de las actividades que se le propone.
SITUACIÓN FUNDAMENTAL 1	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos Aritméticos y geométricos.	La resolución y el planteamiento de problemas El razonamiento La comunicación	Cognitivo	
			N1	Se le dificulta interpretar las situaciones al asignar valores indeterminados, o en el sentido de reconocer patrones y generalidades
			N2	Le resulta complejo escribir expresiones numéricas que representen las relaciones que ha encontrado en el cuadrado, o la generalidad que ha hallado de la situación, recurriendo a casos específicos.
			N3	Reconoce las relaciones entre los números y su operaciones, e Identifica la generalidad y logra referirse a lo indeterminado, movilizando medios de expresión (frases clave/ designación simbólica).
			Procesual	
			N1	Sus principales formas de solucionar el problema son el ensayo y el error, y para la generalización Recolecta los resultados que se le piden, de manera práctica, recurriendo a las figuras, sin considerar relaciones entre los números.
			N2	Procede a trabajar con los números de la situación, y es capaz de referirse a situaciones específicas como la aplicación de una forma que ha hallado, sin aun referirse a lo indeterminado.

			N3	Trabaja con operaciones entre números concretos e indeterminados para hallar la respuesta, además construye las relaciones entre números de cada una de las situaciones, además de referirse a la generalidad desde los objetos indeterminados.
			Actitudinal	
			N1	Su actitud es distraída por agentes externos a la actividad planteada, y esto le desmotiva de querer realizarla.
			N2	Su atención se dispersa por momentos, y en ocasiones distrae a sus compañeros
			N3	Su participación está enfocada a resolver el problema, y sus aportes, expresiones e intervenciones pretenden colaborar con sus compañeros para desarrollar la actividad.
SITUACIÓN FUNDAMENTAL 2	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos Aritméticos y geométricos. Reconozco y generalizo propiedades de la igualdad entre expresiones.	La resolución y el planteamiento de problemas El razonamiento La comunicación	Cognitivo	
			N1	Se le dificulta interpretar las situaciones al asignar valores indeterminados, o en el sentido de reconocer patrones y generalidades
			N2	Le resulta complejo escribir expresiones que representen la generalidad que ha hallado de la situación, recurriendo a casos específicos.
			N3	Identifica la generalidad y logra referirse a lo indeterminado, movilizando medios de expresión (designación simbólica)
			Procesual	
			N1	Sus principales formas de solucionar el problema son el ensayo y el error, para la generalización le resulta complicado considerar relaciones entre los números.
			N2	Procede a trabajar con los números de la situación, y es capaz de referirse a situaciones específicas como la aplicación de una forma que ha hallado, haciendo uso de paréntesis, sin aun referirse a lo indeterminado.

			N3	Trabaja con operaciones entre números concretos e indeterminados para hallar la respuesta, además puede manipular las expresiones halladas, y mantener presente el concepto de igualdad
			Actitudinal	
			N1	Se mantiene en disgusto con la actividad planteada, lo que refleja en una productividad no aceptable.
			N2	Pretende realizar la actividad, sin embargo en ocasiones genera desorden con sus compañeros lo que impide verdaderos avances.
			N3	Se muestra concentrado, actitud que rectifica con una actitud motivada y que contribuye a su grupo de compañeros.
ITUACIÓN FUNDAMENTAL 3 y 4	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos Aritméticos y geométricos. Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la Solución de ecuaciones.	La resolución y el planteamiento de problemas El razonamiento La comunicación La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Cognitivo	
			N1	Se le dificulta interpretar las situaciones al asignar valores indeterminados, y le resulta complejo operar mantenido presente conceptos y relaciones como las de equivalencia.
			N2	Le resulta complejo escribir expresiones numéricas que representen las relaciones que ha encontrado. La generalidad que ha hallado de la situación sigue siendo recurrente.
			N3	Identifica la generalidad y logra referirse a lo indeterminado, movilizando medios de expresión (designación simbólica) además de poder manipularlas, además comprende cómo puede usar las características de las relaciones de equivalencia a la hora de operar con expresiones.
			Procesual	
			N1	Sus principales formas de solucionar el problema son el ensayo y el error, además opera principalmente con números concretos, ya que le resulta difícil generalizar o asignar símbolos.
			N2	Procede a trabajar con los números de la situación, y es capaz de

				referirse a situaciones específicas como la aplicación de una forma que ha hallado, sin aun referirse al caso en general.
			N3	Trabaja con operaciones entre números concretos e indeterminados para hallar la respuesta, además puede manipular las expresiones halladas, y mantener presente el concepto de igualdad.
			Actitudinal	
			N1	Realiza varios intentos de concentrarse, pero prescinde de seguir desarrollando la actividad, y prefiere realizar cualquier otra cosa, puede que se halla frustrado al serle complicada la comprensión de la actividad.
			N2	Le resulta complicado concentrarse con totalidad en la actividad, y en ocasiones su atención se centra en otras cosas, sin embargo no se le ve en desorden o fuera de su grupo.
			N3	Se Encuentra atento al desarrollo de la actividad, promueve la discusión de argumentos en su grupo, y se mantiene interesado por despejar sus dudas y considerar las recomendaciones del docente.
SITUACIÓN FUNDAMENTAL 5 y 6	Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	La resolución y el planteamiento de problemas El razonamiento La comunicación La modelación La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Criterio	
			C1	El estudiante utiliza expresiones aritméticas, y aun se le dificulta hallar el valor de una variable en una ecuación.
			N1	El estudiante comprende las generalidades, pero aun no las expresa usando lenguaje algebraico.
			N2	El estudiante recurre al ensayo y el error para resolver ecuaciones de primer grado.
			Procesual	
			C2	El estudiante representa relaciones de generalidad usando lenguaje algebraico, además de resolver ecuaciones comprendiendo la noción de igualdad

		N1	El estudiante representa las generalidades y el sentido de lo indeterminado haciendo uso del lenguaje algebraico.
		N2	El estudiante resuelve ecuaciones utilizando métodos matemáticos que atienden al sentido de igualdad.
		Actitudinal	
		N1	Realiza varios intentos de concentrarse, pero prescinde de seguir desarrollando la actividad, y prefiere realizar cualquier otra cosa, puede que se halla frustrado al serle complicada la comprensión de la actividad.
		N2	Le resulta complicado concentrarse con totalidad en la actividad, y en ocasiones su atención se centra en otras cosas, sin embargo no se le ve en desorden o fuera de su grupo.
		N3	Se Encuentra atento al desarrollo de la actividad, promueve la discusión de argumentos en su grupo, y se mantiene interesado por despejar sus dudas y considerar las recomendaciones del docente.

De lo que se sigue ahora, es la consolidación del análisis hecho, de este se destacan las producciones de los estudiantes, de tal manera que se realiza el contraste con la rejilla de análisis y lo más importante, con los referentes teóricos y los principales orientadores en lo que llamamos, pensamiento algebraico y razonamiento algebraico.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

En este apartado se colocan los resultados de las observaciones llevadas a cabo a las producciones de los estudiantes, los cuales fueron contrastados con los criterios de análisis

Criterio1. Dominio de los conjuntos numéricos

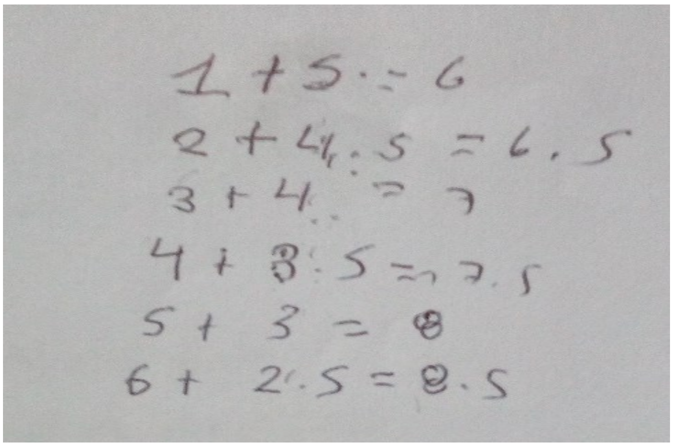


Ilustración 6. Evidencia operaciones con números racionales.

Para el inicio del proceso, existen distintas evidencias en las que se pueden apreciar algunos procedimientos de estudiantes, que no solo se mantienen en el conjunto de los números naturales, ya que intervienen números racionales, tal y como defiende Kieran y Filloy (1989), resulta tener un valor significativo, llevar a los estudiantes a desenvolverse en situaciones, en las que enfrenten problemas que les exijan dominar los conjuntos numéricos, que conozcan sus operaciones, y las propiedades de las mismas, para potenciar el pensamiento matemático y promover bases para la emergencia del razonamiento algebraico.

Criterio 2. Generalización de patrones

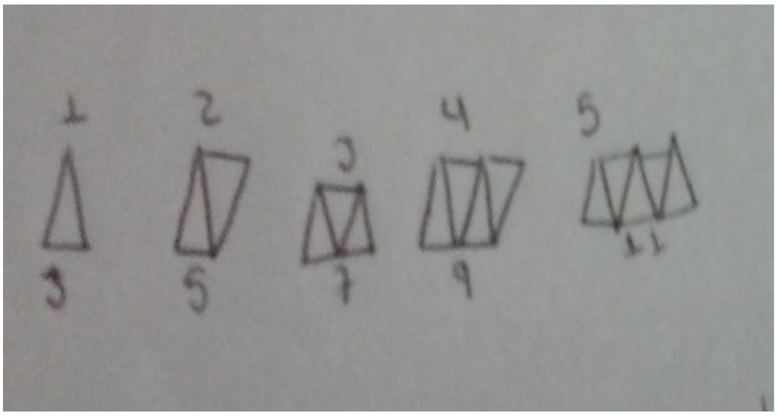


Ilustración 7. Representación secuencia figural.

Dentro de las producciones encontradas, se hallaron procedimientos similares al mostrado en la ilustración 3, en el cual el estudiante toma los tres primeros casos del problema, y en una organización de manera horizontal ubica los siguientes casos, recurriendo a una forma práctica para darle solución al problema planteado. En esta manera de proceder se pueden identificar las intenciones de varios estudiantes, como lo afirma Radford (2013) de llegar a una solución, en la que el estudio de las variables se ve opacado por la recurrencia a los iconos y los dibujos.

Reconocimiento de relaciones de cambio y variación.

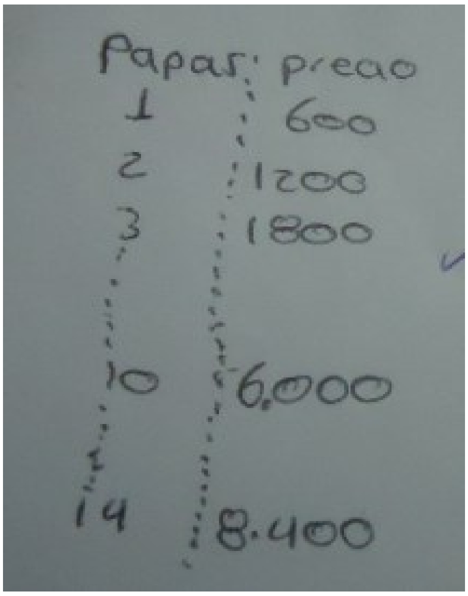


Ilustración 8. Representación patrón aritmético.

Dentro de algunos procedimientos analizados, para el caso del problema de las frituras, se pueden destacar este tipo de producciones, en las cuales se encontraron casos de números cada vez más grandes y, que demuestran independencia de los casos anteriores, por lo que se destaca el hallazgo de una forma general de encontrar el resultado, Tal y como defiende Radford (2013) respecto al componente epistemológico, procedente del estudio de la relación entre las columnas, dentro de una estructura que el estudiante ha encontrado provecha para organizar los datos y, que posiblemente haya agilizado procedimientos para encontrar una regularidad, de un patrón aritmético que ya no depende del caso anterior, entendida como una relación funcional, en la que multiplicar por 600 el número pedido de papas, resultara en el precio de tal cantidad de paquetes.

Criterio 1. Generalización Factual.

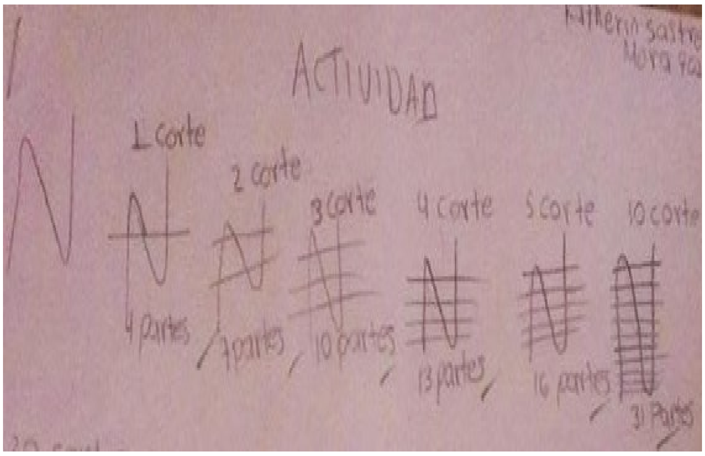


Ilustración 9. Relaciones recursivas.

De la evidencia anterior, se destaca como el estudiante, realiza casos consecutivos, en los que las relaciones establecidas, dependen únicamente de la representación de los casos, y de tener el caso anterior, además del acompañamiento escrito de la cantidad de cortes (superior) y del resultado de la cantidad de partes (inferior), este tipo de relaciones denominadas recursivas, reflejan procedimientos en los que los estudiantes plantean una estrategia, que les permite a través de la práctica, hallar el número de partes, sin embargo, es notable la ausencia de abstracción respectos a las características numéricas entre las variables (cantidad de cortes y cantidad de partes).

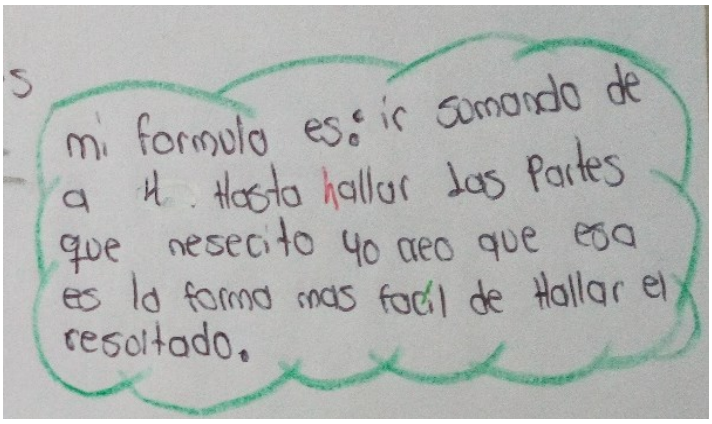


Ilustración 10. Expresión verbal.

Dentro de los resultados evidenciados, se lograron encontrar múltiples producciones, como la expuesta en la figura, en cual se resalta, como el estudiante escribe a forma de mensaje, la generalidad que ha encontrado, en lenguaje natural, en el cual el patrón de ir "sumando de a 4" constituye una expresión del pensamiento factual, como defiende Radford (2013) el reconocimiento de este tipo de patrones, dentro de la actividad matemática, conocida como inducción, permite introducir nuevas estrategias que enfoquen la intención del estudiante, hacia la generalización de atributos como el que describe en el mensaje, sin aun dar uso a lenguaje algebraico.

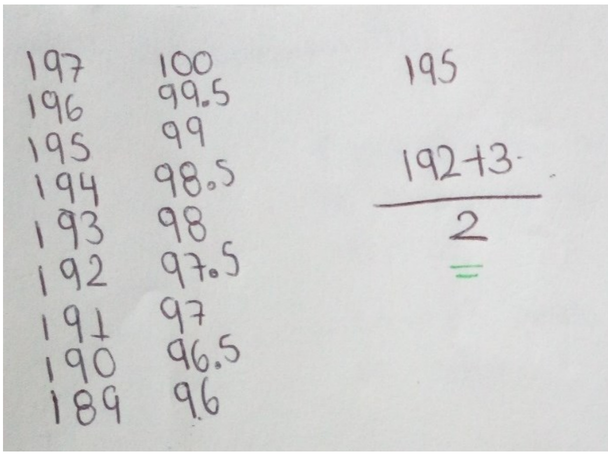


Ilustración 11. Formula general.

De manera similar al expuesto en la ilustración 6. Existen abordajes, en los que varios estudiantes, como muestra la ilustración 7, realizan cálculos y procedimientos, en una organización que resulta semejante a una representación tabular, de la que consiguen destacar una generalización aritmética, expresada en palabras como "y voy sumándole de a 0.5", además de llegar construir una especie de fórmula que aplican para un caso particular, resaltada en la parte derecha de la imagen, esta generalidad para los estudiantes, aparece como el resultado de observar un patrón, de una abstracción, que corresponde al campo fenomenológico, como se defiende en Radford (2013) para el cual, esta especie de formulaciones reflejan el resultado de la observación sobre el comportamiento de los números, y el significado de las operaciones que les permiten llegar conjeturar relaciones entre las variables, es decir las dos columnas.

Criterio 2. Generalización contextual

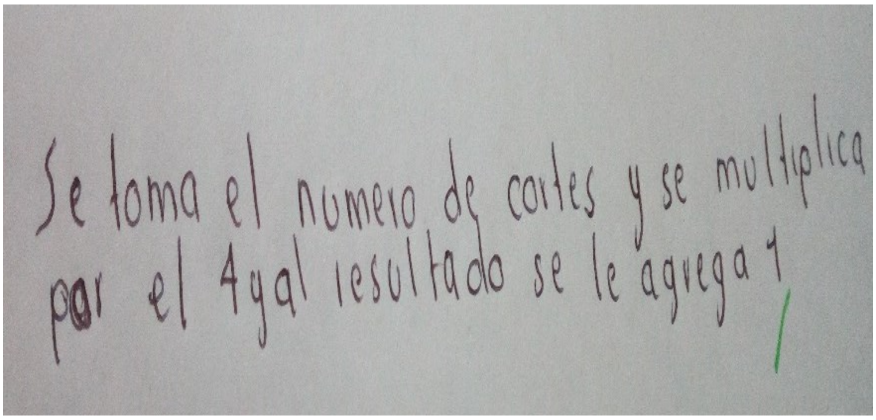


Ilustración 12. Generalización contextual.

En pruebas como la mostrada en la ilustración 8, el mensaje descrito por el estudiante devela una expresión matemática, con la que puede describir una generalidad, de la cual se destaca la frase “toma el número de cortes” en la cual el estudiante refiere directamente a lo indeterminado, como plantea Radford (2013) esta manera de aludir de forma explícita a lo desconocido, compone una parte importante dentro del campo semiótico, ya que el estudiante puede ubicar una palabra dentro de una expresión, con la cual otorga un valor operatorio a un objeto que no tiene determinación numérica, además de lograr realizar manipulaciones con este término, continuando en las siguientes líneas con “se multiplica por el 4 y al resultado se le agrega 1”, expresiones del razonamiento contextual.

Este tipo de formulaciones, no son resultados espontáneos, sino producciones crecientes con el trabajo de generalización de patrones, que se fueron promoviendo durante el desarrollo de las actividades, y que pasaron desde la inducción, al reconocimiento, expresión y socialización de estrategias.

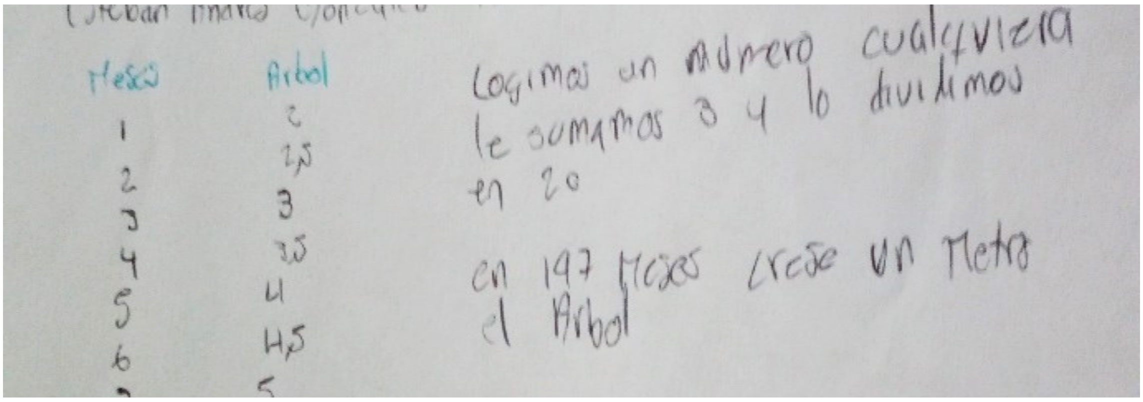


Ilustración 13. Trabajo con racionales.

Además de lo anterior, desde algunas situaciones era posible incluir un trabajo que conllevara a operaciones con números racionales, que exigiera a los estudiantes a reflexiones más profundas, sobre el estudio de la variación, como muestra la evidencia, resulto común encontrar organizaciones en forma de tabla, y mensajes que expresaban las regularidades encontradas, de las que se pueden destacar las palabras “un número cualquiera”, vista desde las ideas propuestas por Radford (2013), este tipo de expresiones constituyen un paso que permite la abstracción de objetos indeterminados, a la designación explicita de los mismos, por lo tanto “un número cualquiera” encierra un conjunto variable de cantidades, que para los estudiantes tiene sentido desde el proceso de generalizar.

Criterio 3. Generalización Simbólica

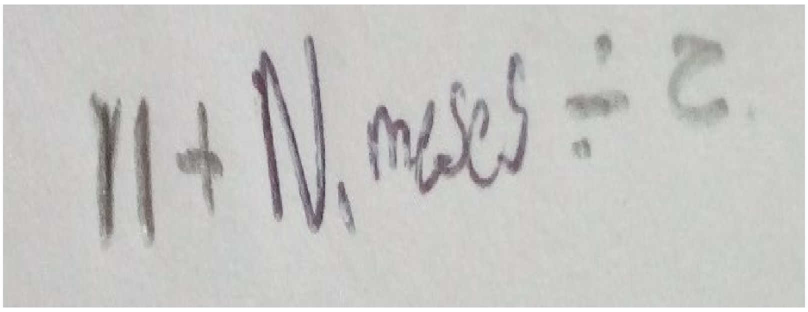


Ilustración 14. Expresión simbólica.

Llegar a irrumpir en la realidad de los estudiantes, con los símbolos alfanuméricos, pudo lograrse, a partir del trabajo con las generalizaciones, creando en los estudiantes la necesidad de encontrar una forma de representación, (o en palabras de los alumnos, una “formula”), que lograra recoger las propiedades matemáticas que habían hallado del problema. Como muestra la evidencia, existen estrategias que combinan al lenguaje natural, por la escritura de “N meses” refiriéndose al número de meses, con las operaciones encontradas en el patrón de la situación, que refleja un acercamiento al lenguaje algebraico, en el que los símbolos tienen un significado, más cercano al de variable u objeto que representa indeterminación (Radford, 2006)

Después de haber logrado provocar expresiones como las presentadas con anterioridad, se desarrollaron situaciones, que tenían como principal intención, potenciar la habilidad de los estudiantes para expresar generalidades y buscar revertir el problema, de usar la fórmula para encontrar un número (resolver la ecuación asignando un valor a la incógnita), para en su lugar descubrir qué valor tiene la cantidad indeterminada, dado un valor numérico (es decir, buscar el valor de la incógnita, resolver una ecuación).

Frente a lo anterior, los resultados obtenidos durante la resolución de las situaciones, y la socialización de dichos resultados, en la confrontación con las categorías planteadas dentro del marco inspirado por las propuestas realizadas por Kieran y Filloy (1989) nos llevaron, a los siguientes resultados:

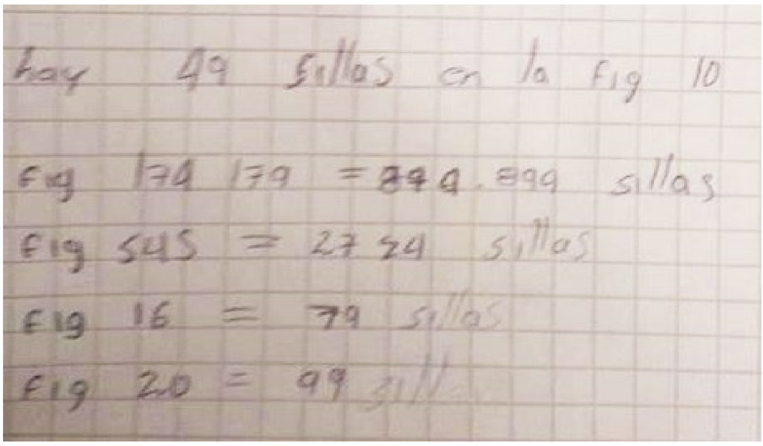


Ilustración 15. Interpretación de equivalencia.

C.1 .1 De la forma, en la que expone la ilustración 11, se hallaron producciones de estudiantes en los que se devela como interpretaban al signo igual, como una convención para relacionar magnitudes, es decir, generar una correspondencia entre la cantidad de casos y el resultado en sillas para cada figura, desde lo planteado por Kieran y Filloy (1989) para el estudiante el signo igual, más que ser una relación de equivalencia, que denota igualdad en matemáticas, es un signo que le permite enlazar resultados, dentro de una organización de los datos, que parece una tabulación.

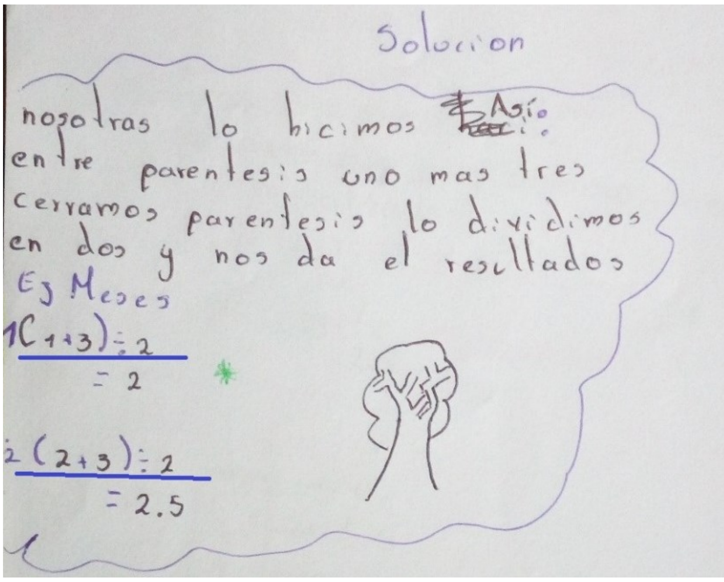


Ilustración 16. Uso de los paréntesis.

C2.1 Las principales dificultades emergían de las formas de escritura, del uso de un lenguaje algebraico no estandarizado (Kieran y Filloy, 1989), sin embargo, existen producciones en las que el estudiante, como en el caso de la evidencia en la ilustración 12, hace un uso adecuado de las notaciones simbólicas, como los paréntesis, para escribir expresiones que traen diferentes operaciones, y lograr jerarquizarlas, dentro de este tratamiento, como es señalado por las líneas en azul, existe una separación marcada entre las operaciones y el resultado, como especie de niveles en el que el estudiante, logra dar un uso correcto al signo igual.

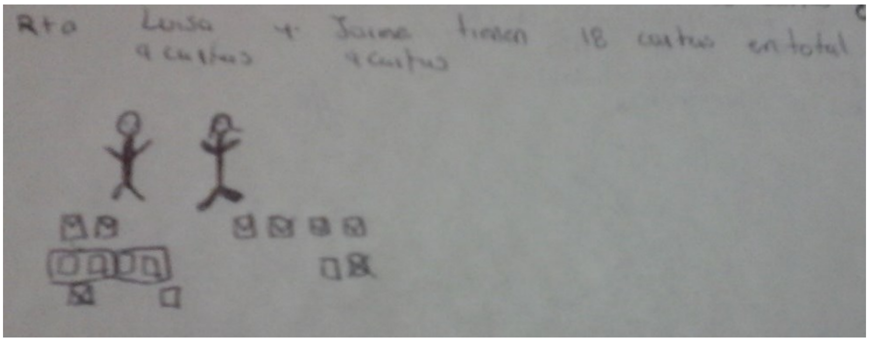


Ilustración 17. Operaciones icónicas.

C.3 Planteadas algunas situaciones, que pretendía provocar la emergencia de escribir expresiones algebraicas, como se muestra en la evidencia anterior, el estudiante realiza operaciones matemáticas sobre registros o símbolos, que el mismo ha dibujado. Estas operaciones como “quitar una carta” las realiza por cada lado, es decir reflejando una interpretación que incluye al signo igual, más como una relación, o en palabras del estudiante “lo que hago aquí, también lo hago al otro (lado)”

Estas expresiones en la resolución de problemas, reflejan la implicación de distintas nociones, que dan cabida, junto con la construcción de variables a través de la generalización de patrones, a proceso más fuertes que lleven sus procedimientos basados en la intuición, a la resolución de ecuaciones y el planteamiento de expresiones en lenguaje algebraico.

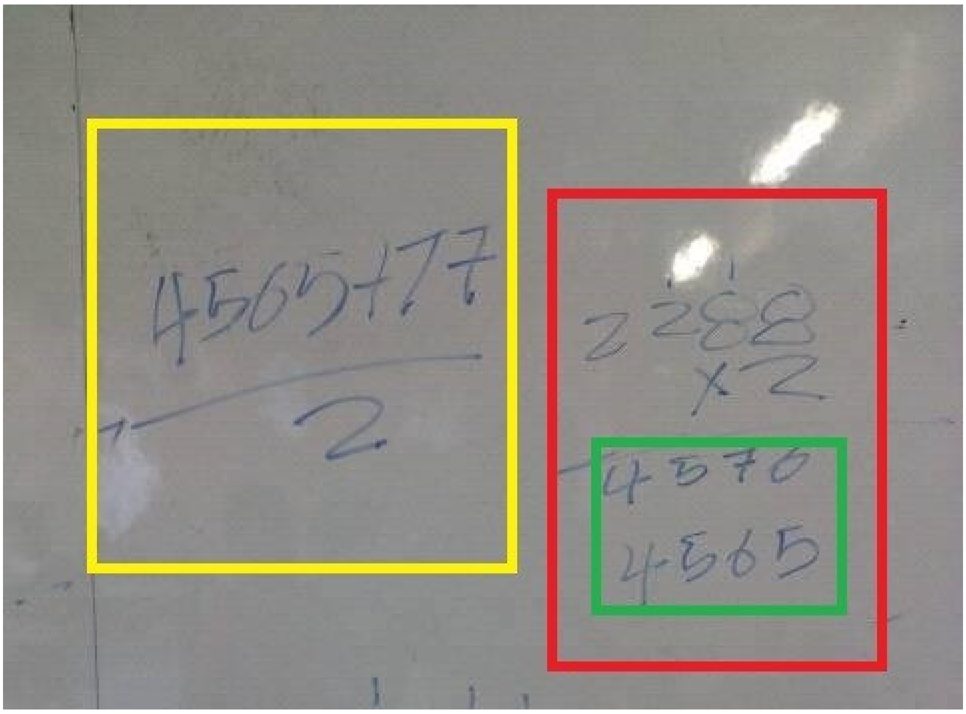


Ilustración 18. Operaciones inversas.

Durante las situaciones finales, se les pidió a los estudiantes encontrar la solución a un problema que consistía en: dada una expresión o formula, que permitía conocer la cantidad de abejas en un jardín, por día, encontrar los días que tendrían que pasar para hallar en el jardín, una cantidad de abejas, de los resultados, pudieron reconocerse procedimientos de estudiantes, que, frente a el planteamiento de la resolución de una ecuación, como el expuesto en la ilustración 14, en el cual un estudiante realiza las operaciones inversas (en la parte resaltada en rojo), a las propuestas en la formula (que se encuentra resaltada en amarillo), destacando como primero si en la formula se encuentra dividir por dos, él multiplica por dos, y al resultado resta 17, en una especie de cálculo mental (que ubicamos con la operación en verde).

A partir de las generalizaciones simbólicas, encontradas en situaciones anteriores, logro llevarse a una reducción de la cantidad de símbolos usados, solicitando a los estudiantes maneras todavía más prácticas de simbolizar una formula. Obteniendo como resultado, la construcción de generalidades del tipo evidenciado, de las que se destaca la analiticidad, el trabajo explicito con lo indeterminado tal y como plantea Radford (2006).

CONCLUSIONES

Poder llevar a cabo en la práctica este tipo de secuencias didácticas, ha permitido reflexionar respecto a las tensiones que al inicio de este documento se han presentado, sin llegar a una conclusión definitiva sobre tales inquietudes, puesto que resultan bastante amplias. En cuanto a la primera, la transición de los contenidos aritméticos a lo algebraicos, parecen estar distanciados por el tratamiento estipulado desde las temáticas propuestas en el currículo, desarrolladas en la escuela por medio del trabajo directo con la inclusión de un lenguaje que incorpora símbolos carentes de un significado o de un carácter histórico, esta irrupción en la realidad matemática, parece exigir a los estudiantes a comprender las nuevas representaciones desde la pertinencia al momento de operar con estas.

Por lo tanto y en contra posición con lo anterior, partiendo de las situaciones y de los análisis que se pueden brindar a los abordajes que realizaron los estudiantes, de sus respectivas producciones y con la oportunidad de socializar los avances que iban elaborando, es posible destacar aproximaciones al desarrollo del razonamiento algebraico, en los que la principal incentivación se basaba en la observación de la variación y del cambio, el estudio de regularidades, que conllevara a abstracciones, las cuales eran manifestadas en palabras del leguaje natural con claras alusiones a los objetos indeterminados que pretendían denominar, con las que también realizaban operaciones y conjeturaban formulas.

Un aspecto destacable de estas producciones y evidencias, son los marcos reales y el sentido que cobraban para los estudiantes las situaciones, la forma de aplicar sus conocimientos matemáticos sobre planteamientos que les demandaban el desarrollo de nuevas estructuras, además, del planteamiento en las expresiones que reflejaban la emergencia de procesos de generalización, enmarcados en el constante cambio de opiniones, en la reflexión de procedimientos que nace de la comunicación de las ideas y los abordajes.

De la segunda tensión expuesta, se concluye que se pueden consolidar distintas estrategias en la enseñanza del álgebra escolar, teniendo en cuenta la autonomía en la resolución de problemas por parte de los estudiantes, ya que este tipo de situaciones, permite al niño enfrentarse con su conocimiento y, lo incita a una continua renovación de las concepciones que se van generando, teniendo en cuenta que el medio (situaciones-problema) crea retroacciones didácticas en respuesta a las operaciones del sujeto sobre la situación. Por consiguiente, se da cuenta en el análisis de los resultados, que los sujetos adoptan diferentes posturas en la búsqueda de una respuesta, que para este trabajo no resulta ser única sino multivariada por la diversidad de formas de proceder y, que a la luz de esta investigación es posible adaptar diferentes procesos de enseñanza del álgebra escolar, para crear una estructura sólida en el transcurso del aprendizaje sin vacíos cognitivos, en la aceptación y manejo de nuevos símbolos alfanuméricos.

Realizando un contraste final, entre los objetivos presentados para esta investigación y los insumos obtenidos, es posible brindar una aproximación de lo llevado a cabo. Respecto a la secuencia de actividades, resultó importante clasificar las posibilidades de las estrategias de los estudiantes a la hora de abordar un problema, desde lo cual era posible potenciar el estudio del cambio, y a su vez provocar las expresiones que reflejaban un sentido de objetos indeterminados y, la forma de operar con esos objetos partiendo del lenguaje natural.

Ahora bien, de esta experiencia investigativa, se obtienen insumos que propenden un cambio en el tipo de enseñanza, específicamente en la iniciación al álgebra escolar; con situaciones que están presentes en la cotidianidad es posible inducir al niño en la ampliación del conocimiento, tal como fueron los patrones y las secuencias figúrales presentes en las situaciones-problema, de las cuales se obtuvo diferentes procedimientos y caminos para llegar a diferentes registros de generalización, así como la interiorización de los símbolos que emergieron de la actividad matemática (índice de la presencia del razonamiento algebraico), y como se puede apreciar en los resultados, la operacionalidad de los símbolos por parte de los estudiantes.

Por último, al reconocer el factor del contexto socio-cultural en el aprendizaje de los niños, fue una tarea imprescindible en la formación de nuevos conocimientos. En la especialidad de este trabajo, no se enfocaron los medios de recolección de información, para evidenciar la comunicación, en cambio, se lograron recoger expresiones en lenguaje natural y simbólico, que ejemplifica las relaciones fundamentales, entre las construcciones culturales de los objetos, por medio de la socialización y, el desarrollo del lenguaje formal. Pero desde la postura de profesores investigadores, manifestamos la importancia de la interacción en los grupos de trabajo, la herramienta elemental de la Teoría de las Situaciones Didácticas –sus fases de gestión- determinaron en cierto punto, que el aprendizaje mediado por la comunicación entre ellos mismos, fueron mecanismos de transiciones rápidas del pensamiento al razonamiento, todo esto logrado a través de las relaciones sociales de conocimiento que se fueron instaurando en la resolución de las situaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros de Zorzal.

Callejo, L. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Uno.1* (68), 5-8.

Fumagalli, L. (2000). COMISIÓN I: Alternativas para superar la fragmentación curricular en la educación secundaria a partir de la formación de los docentes. *Informe final del seminario internacional organizado conjuntamente por la oficina internacional de educación y la administración nacional de educación pública del uruguay*, 78-83.

González, E. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Godino, J., Blanco, T., y Pegito, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista onto-semiotico. *Bolema, 26*(42A).39-63.

Kieran, C. (2017). Cognitive Neuroscience and Algebra: Challenging Some Traditional Beliefs. En S. Stewart. (Ed), *And the Rest is Just Algebra* (pp.157-172). Norman, USA: Springer.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva Psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

Martínez, A., Cobos, C., y Yebara, J. (En prensa). Cortes y partes, *VI encuentro nacional estudiantil en educación matemática y física.* Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Puig, L. (1994). *Semiótica y Matemáticas.* Valencia, España: Eutopías Series.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, *1*, p. 2-21.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización [Concerning three problems of generalization] Rico, L, Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. & Segovia, I. (Eds), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encamación Castro.* Granada, España: Editorial Comares.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., y Earnest, D. (2012). Algebra in Elementary School. *National Science Foundation under Grant, 1*(1). 127-134.

Socas., M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, 77*(2), 5-34.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). *Educación científica y tecnológica*, 225-231.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 2*(39), 65-76.

Vergel, R. (2015a). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno, 1* (68), 9-17.

Vergel, R. (2015b). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

LISTADO DE LAS TABLAS

Tabla 7.Cuadro elementos del Razonamiento Algebraico. Construcción propia...15

Tabla 8. Estándares básicos de competencia en matemáticas grado séptimo, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Tomado de (MEN, 2006) ………………………………………………………………………………19

Tabla 9. Recolección de las situaciones. Construcción propia…………………..24

Tabla 10. Elementos teóricos para el análisis de las producciones………………27

Tabla 11. Rejilla de categorías de análisis. Construcción propia…………………28

Tabla 12. Criterios de observación. Construcción propia………………………….29

LISTADO DE LAS ILUSTRACIONES

Ilustración 6.Relación sociocultural-cognitiva en el desarrollo del pensamiento y razonamiento algebraico. Construcción propia……………………………………12

Ilustración 7.Estructura de la generalización algebraica de secuencias figúrales. Tomado de Radford (2013) ……………………………………………………………14

Ilustración 8. Cubo de los procesos, conocimientos básicos y el contexto. Tomado de (MEN, 2006) ……………………………………………………………20

Ilustración 9. Ruta metodológica. Construcción propia…………………………...21

Ilustración 10. Triada generada para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tomado de (Brousseau, 2007) ………………………………………………..…...22

Ilustración 6. Evidencia operaciones con números racionales…………………35

Ilustración 7. Representación secuencia figural………………………………….36

Ilustración 8. Representación patrón aritmético………………………………….36

Ilustración 9. Relaciones recursivas……………………………………………….37

Ilustración 10. Expresión verbal……………………………………………………38

Ilustración 11. Formula general…………………………………………………….38

Ilustración 12. Generalización contextual…………………………………………39

Ilustración 13. Trabajo con racionales……………………………………………..40

Ilustración 14. Expresión simbólica………………………………………………...41

Ilustración 15. Interpretación de equivalencia……………………………………42

Ilustración 16. Uso de los paréntesis………………………………………………42

Ilustración 17. Operaciones icónicas……………………………………………43

Ilustración 18. Operaciones inversas……………………………………………….44