INFORME DE PASANTÍA

DISEÑO DE SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE CICLO DOS PARA SER IMPLEMENTADAS POR PROFESORES

LUISA FERNANDA TORRES NAIZAQUE

YESICA SEPULVEDA CARDONA

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO: LUIS ÁNGEL BOHORQUEZ ARENAS

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
(LEBEM)
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

BOGOTÁ DC. 2018

Contenido

INTRODUCCIÓN

El presente informe de pasantía tiene como objetivo mostrar el diseño de una secuencia de actividades de intervención partiendo de la aplicación y análisis de resultados de pruebas diagnóstico en estudiantes de ciclo dos de los colegios SaludCoop Norte y Veintiún Ángeles.

Para el diseño de las actividades se ha tenido en cuenta los gustos, las actividades diarias de los estudiantes, conocimientos previos y las competencias que deben ser abordadas según los estándares básicos de competencias en matemáticas para estudiantes de ciclo dos En cuanto al trabajo en el aula, el modelo constructivista y la resolución de problemas.

Dentro de este informe, no solo se encuentra el diseño de las pruebas diagnóstico, sino a su vez, el análisis respectivo según los resultados arrojados por los estudiantes durante el desarrollo de estas, este se realiza teniendo en cuenta las categorías de análisis creadas partir de la teoría de actividades didácticas de Brousseau y la descripción de lo realizado por los estudiantes punto por punto de manera general, además de errores y dificultades a las que se enfrentaron.

Al finalizar el informe de pasantía se encuentra el diseño de las actividades y sus respectivas tareas, que serán un medio de intervención para el refuerzo, trabajo y cubrimiento de necesidades propias de los estudiantes en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, encontrados en el análisis de resultados de las pruebas diagnostico y el los de las pruebas saber de tercero y quinto en matemáticas en colegios públicos de a nivel Bogotá.

JUSTIFICACIÓN

El presente informe se realiza con el fin de cumplir con una parte del proceso de la pasantía, además de ser uno de los requisitos de la Fundación Nuevos Vientos, como entrega de material elaborado (diseño de una secuencia de actividades y sus respectivas tareas) durante la aplicación de la aplicación de las pruebas diagnostico en los colegios SaludCoop Norte y Veintiún Ángeles.

Este informe de pasantía, se ha llevado a cabo como parte de un proceso de recopilación y diseño, tanto de las pruebas realizadas en cada sesión de la pasantía en relación a lo realizado por los estudiantes, como de los recursos utilizados y su función dentro de cada una de estas, permitiendo favorecer la motivación, participación e interés en los contenidos trabajados para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático; además de unas serie de resultados obtenidos en la utilización del recursos asociados a las pruebas diseñadas, buscando llegar al diseño de actividades de intervención y sus respectivas tareas, en base a estos resultados.

El análisis se ha realizado a partir de las categorías previamente conformadas en base a la teoría asociada, y al diseño actividades en general, ya que con estas, se pretende ir más allá de una simple transmisión de conocimientos a los estudiantes, a partir de la experimentación y ejecución de las actividades, el desarrollo de competencias como la interpretación de instrucciones, el planteamiento de posibles soluciones y/o estrategias de solución y así mismo la resolución final de las actividades planteadas inicialmente, como parte del desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

A su vez, con el diseño de estas actividades se busca desarrollar en los estudiantes niveles de análisis y abstracción con el fin fundamental, de que fuese el estudiante quien construyera el conocimiento con la ayuda pertinente y aprovechamiento de las actividades, apoyándose en las herramientas que los docentes les daban para tal fin. Además, con estas actividades, es posible comprobar si los conocimientos y capacidades se formaron generalmente, y con qué características, para cada uno de los niños/as. Esto es importante porque, fundamentalmente en esta etapa, el progreso se debe no sólo a la intervención escolar y a las experiencias vividas fuera de la escuela, sino también al propio desarrollo cognitivo.

Además, otro objetivo de las actividades es crear en los estudiantes una percepción del aprendizaje y por tanto la consecución del conocimiento, distinto al tradicional; usando como referente, la implementación de situaciones problema relacionadas con el contexto de los estudiantes, que permita en ellos la creación de estrategias que le faciliten construir un conocimiento de calidad.

Problema

En cuanto al diseño de las actividades para los estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto de primaria, nos proponemos distinguir características importantes para llevar a cabo un buen diseño de actividades que permitan desarrollar el pensamiento lógico-matemático en ellos.

Según Godino, Batanero y Font (2004) cuando se refieren al maestro en formación para llevar a cabo su labor, sugieren que es "… necesario diseñar y gestionar una variedad de tipos de situaciones didácticas, implementar una variedad de patrones de interacción y tener en cuenta las normas con frecuencia implícitas, que regulan y condicionan la enseñanza y los aprendizajes". En este sentido, somos conscientes que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene una influencia sociocultural, que efectivamente condicionan dicho proceso. Por eso algunas de las falencias que identificamos son:

- En nuestro país un gran número de profesores de primaria no son licenciados en matemáticas, pues son normalistas o tienen otra preparación profesional, por ende, no tienen las herramientas didácticas necesarias para dictar una clase de matemáticas.
- Los profesores adoptan como modelo pedagógico el tradicional, enseñando conceptos matemáticos y a partir de estos asignan las tareas a los estudiantes, estas tareas son en mayor medida de tipo procesual. Así, sugiere al estudiante una aplicación mecánica de ciertos conceptos, quitándole al estudiante la oportunidad de construir el conocimiento.

Debido a lo anteriormente mencionado, no ha habido un avance significativo en las aulas, pues sigue la creencia de algunos años atrás: los matemáticos profesionales consideraban que el alumno debía adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática, luego sería más sencillo para el estudiante resolver las tareas asignadas. (Godino, Batanero y Font, 2004)

- Como se mencionó, las tareas asignadas son de tipo mecánico y no son enfáticas en la resolución de problemas, ocasionando dificultades en tareas que corresponden a la comprensión de lectura, a la argumentación de ideas, a relacionar diferentes conceptos matemáticos, entre otros. Por ejemplo, los resultados en las pruebas saber evidencian la falta de comprensión de lectura por parte de los estudiantes, además de la falta de interpretación de gráficos y tablas para solución de la mayor parte de los puntos de esta prueba.
- El profesor no hace una reflexión de su práctica, pues esto se ve reflejado en la falta creación de estrategias didácticas, inclusive en ocasiones el profesor debe disponer de su propio presupuesto para el material didáctico sin que la institución lo respalde, si tenemos en cuenta que un profesor tiene en diferentes cursos y cada uno tiene alrededor de 40 estudiantes, no puede, aunque quiera, adquirir material didáctico para todos o por el contrario, no

aprovecha el material didáctico que brinda la institución. Vale la pena aclarar que el apoyo al profesor depende de la institución a la que pertenezca.

A partir de las anteriores falencias mencionadas, se crea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características deben tener el diseño de las actividades que desarrollan el pensamiento lógico-matemático en niños de tercero, cuarto y quinto grado de primaria?

Objetivos

Objetivo general

- Diseñar actividades y tareas dirigidas a profesores de matemáticas, que desarrollen el pensamiento lógico-matemático en estudiantes de primaria, partiendo de la aplicación de pruebas diagnóstico.

Objetivos específicos

- Identificar las características que deben tener las actividades y tareas para que desarrollen el pensamiento lógico matemático en los niños de primaria.
- Reconocer cuales son las dificultades en el aula que limitan el proceso de enseñanza-aprendizaje del pensamiento lógico-matemático.
- Reflexionar acerca de los problemas que se resuelven con la intervención y gestión docente.

MARCO TEÓRICO

Para realizar el planteamiento y elaboración de las actividades partimos del reconocimiento de la primera sesión y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau.

Según Brousseau (2007) la TSD es un instrumento científico que permite ver el proceso enseñanza-aprendizaje como la relación entre:

- El sistema educativo,
- El alumno y
- El saber.

Esta teoría plantea de manea fundamental el medio con el que interactúe el estudiante para adquirir el conocimiento matemático, así, el mismo medio será el que otorgue información necesaria para que él estudiante descarte o refuerce las ideas planteadas por él mismo, pues él, tiene la capacidad de crear diferentes estrategias de solución que le permiten desarrollar el conocimiento matemático que antes no le habían enseñado.

El diseño presentado a continuación, considera primordial el juego como herramienta didáctica. El juego debe ser tal, que el conocimiento aparezca en la forma elegida, como la solución o como el modo de establecer la estrategia óptima para la solución de una situación, todo con base en un objeto matemático determinado y a su vez, permite al profesor observar y analizar todas las situaciones presentadas en las clases, los desarrollos particulares, incluso los menos "satisfactorios". (Brousseau, 1986) Es por esta razón que nos basamos en el juego para la creación de las situaciones fundamentales, de este modo, el juego debe responder a las siguientes condiciones, (Brousseau 2007):

- ❖ El juego debe generar en el estudiante la necesidad de adquirir el conocimiento deseado.
- ❖ El juego debe contar con las condiciones necesarias que enruten al conocimiento que se desea adquirir.
- ❖ El mismo juego debe ofrecer la información necesaria que oriente al estudiante a tomar las decisiones correctas.

En pocas palabras la Situación Didáctica es el modelo que describe la actividad del profesor y del alumno, está, está clasificada de la siguiente manera:

- ❖ Situación de acción
- ❖ Situación de formulación
- ❖ Situación de validación
- ❖ Institucionalización

Además, una elección o respuesta del alumno a partir de la estrategia utilizada en el juego también puede modelizarse mediante varios componentes, como el conjunto de las alternativas consideradas por el alumno y rechazadas por una elección retenida, en particular el espacio de las situaciones engendradas por los valores de las variables pertinentes que conservan en la decisión un carácter de optimización, validación o pertinencia Brousseau (1986).

Para llevar a cabo el análisis de las respuestas de los estudiantes al desarrollar las pruebas diagnóstico-propuestas, se ha utilizado el concepto de "competencia matemática" propuesta por los Estándares básicos de competencias en matemáticas, con el fin de establecer posteriormente, unas categorías de análisis que respondan a las competencias matemáticas que se logran favorecer y/o potenciar al trabajar en las actividades. Abordamos entonces el concepto de competencia matemática:

"(…) conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores". MEN (2006, pág. 49)

A partir de lo anterior se puede decir que se busca encontrar aquellas competencias que hacen que el individuo pueda razonar fácil y claramente acerca de qué debe hacer, cómo lo debe hacer, cuándo y bajo qué contexto realizarlo. Estas competencias son presentadas y descritas por el MEN (2006) de la siguiente manera:

- *"Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes (…)"*

- *"Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista".* En cuanto a los sistemas de notación simbólica, estos podrían ser gráficos o numéricos.

- *"Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración"*

- *"Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz".* MEN (2006)

Teniendo en cuenta las anteriores descripciones, se decidió generar las categorías de análisis de manera que cada una de ellas respondiera a aquellas competencias y/o habilidades que debe tener cualquier individuo para ser "matemáticamente competente", articulando tal finalidad con el objetivo principal de las actividades, logrando que éstas se conviertan en una herramienta didáctica ya sea para generar o reforzar características de las competencias matemáticas como la argumentación, la búsqueda de estrategias, aprendizaje por medio del error, resolución de problemas, entre otras, en los estudiantes.

Categorías de análisis de pruebas diagnostico

Categoría de comprensión: Refiere a la interpretación, como el inicio de la elección o creación de estrategias, y la asociación del problema con la parte matemática y el contexto en el que se encuentra la situación problema. A medida que el estudiante interactúa con el medio comprende y comienza a desarrollar conjeturas o ideas que le permitirán resolver la situación.

Categoría de representación: Refiere a la creación de imágenes mentales, manejo del lenguaje y los códigos de representación simbólica ya establecidos o creados por el estudiante, permitiéndole interpretar y encaminar a una posible solución de situaciones problema.

Categoría de argumentación: Refiere a la habilidad de respaldar las creaciones a partir de la percepción del entorno, viendo la justificación y/o argumentación escrita o verbal como medio para realizar dicho respaldo.

Categoría algorítmica: Refiere a la habilidad para dominar procedimientos de tipo algorítmico (adición-sustracción, multiplicación-división) asumiendo el algoritmo como “una secuencia finita de pasos exenta de ambigüedades, que lleva a la solución de un problema dado” Sánchez & Fonseca (2012, p. 46) apoyándose de las redes de conocimiento ya establecidas en situaciones diferentes anteriormente propuestas.

Pensamiento lógico-matemático

“*Ser matemáticamente competente* se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional”. (MEN, 2006). Ahora bien, dentro el pensamiento lógico-matemático va directamente relacionado con los siguientes pensamientos:

- Pensamiento relacional: Según Godino, el conocimiento lógico- matemático parte de la capacidad del ser humano para establecer relaciones entre objetos o situaciones a partir de la actividad que ejerce sobre los mismos y especialmente en la capacidad de abstraer y tomar en consideración dichas relaciones en detrimento de otras igualmente presentes. Además, adopta el ejemplo de comparar dos objetos “A es más grande que B”, donde no se expresa una propiedad exacta de dichos objetos sino la relación que hay entre la propiedad tamaño. Siendo este ejemplo, muestra de que el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas a partir de la actividad sobre los objetos. “Las relaciones más grandes que, más pequeño que, tres centímetros más que, tres centímetros menos que, etc. Son pues verdaderas construcciones mentales y no una simple lectura de las propiedades de los objetos”. (Godino, Batanero y Font, 2003)

Por otra parte, afirma que “la naturaleza relacional de las matemáticas es la existencia de estrategias o procedimientos generales que pueden utilizarse en campos distintos y con propósitos diferentes”.

En general, “el uso del pensamiento relacional representa un cambio fundamental de un foco aritmético (procedimental, centrado en el cálculo de las respuestas) aun foco algebraico (estructural, centrado en examinar relaciones)” (Molina, 2009).

- Pensamiento algebraico: Según Molina (2009) cita a Hewitt y Mason, Graham y Johnston- Wilder, los cuales presentan como perspectiva que el pensamiento algebraico es necesario para la aritmética, ya que “la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Dicho aprendizaje implica que los alumnos interioricen generalidades que se encuentran implícitas, relativas a la estructura de la aritmética”. A su vez, afirman que la aritmética se concentra en el obtener un resultado, y “es el álgebra el que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado (Hewitt, 1998)”. A partir de ello, Molina (2009) ejemplifica el hecho de contar como un proceso algebraico ya que se necesita tener una forma, estructurada y organizada a la hora de contar.

Enfoque pedagógico

En particular el modelo constructivista, se encarga de la relación entre matemáticas y sus aplicaciones, estas aplicaciones responden al entorno del estudiante, su edad y sus intereses, Así, según Godino, Batanero y Font (2004) se presenta las matemáticas como satisfacción a la necesidad de ciertos conocimientos.
La labor del profesor en el proceso de enseñanza consiste: por un lado, en “partir de un problema y llegar a un conocimiento matemático, parte de un conocimiento matemático y busca uno o varios problemas que le den sentido para proponerlo a sus alumnos **(recontextualización)”** (Godino, Batanero y Font, 2004). Por el otro lado, estos mismos autores dicen que una vez producido un conocimiento, debe ser descontextualizado para que este se vuelva abstracto y se llegue a la adquisición de generalidades.

El constructivismo propone un razonamiento empírico-inductivo, que da lugar a que el estudiante construya por sí mismo el conocimiento mientras busca estrategias de solución por medio de tanteo, ejemplos, contraejemplos, soluciones particulares, replantear condiciones iniciales, entre otros.

Este modelo pedagógico se caracteriza por resaltar que los errores por causa de las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje se presentan de manera natural y de los mismos errores es que se construye el conocimiento. Por lo anterior, nos referimos de manera general a los errores, obstáculos y dificultades que pueden presentarse en la práctica.

Resolución de problemas

De manera general La resolución de problemas es entendida como las "situaciones de incertidumbre que producen el efecto de la búsqueda de una solución y a la resolución como el proceso mediante el cual se realiza" (Pelares, 1993 citado en Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy, 2015)

La resolución de problemas según Godino, Batanero y Font (2004) es el medio esencial para lograr el aprendizaje, los estudiantes por si mismos deben plantear, explorar y resolver problemas, superando las dificultades del problema, los cuales deben tener como contexto aplicación de las matemáticas en otras áreas o en relación con sus experiencias sociales. Vale la pena resaltar que algunos problemas cuya aplicación no es precisamente matemática también permiten resolver problemas e incluso llevar a cabo la modelización matemática.

> *"…En el aprendizaje significativo la actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos."* (Godino, Batenero y Font, 2004) (p. 66)

Estos mismos autores dicen que el trabajo del estudiante debe ser comparable al de los propios matemáticos, pues él mismo debe investigar, tratar de resolver problemas, predecir soluciones o formular conjeturas, construir modelos matemáticos, usar lenguaje matemático, intercambiar ideas y dependiendo de la cultura en la que se encuentre reconocer cuáles de sus ideas planteadas son correctas.

Aunque las matemáticas sean una ciencia formal y de carácter deductivo no es desligado de acciones de intuición, pues se reconoce, que esta ciencia se caracteriza por ser precisa, formal y abstracta, por su naturaleza deductiva y por su organización a menudo axiomática. Sin embargo, no hay que desconocer el origen histórico de las matemáticas a partir de la experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real que da lugar a contextualizar y personalizar conocimientos. Lo anterior también da lugar a la formalización (Godino, Batanero y Font, 2004)

La resolución de problemas se entiende como uno de los procesos matemáticos en niveles educativos, como también lo son:

- La representación: Uso de recursos verbales, simbólicos gráficos.

- La comunicación: Entre compañeros y profesor, que permite que las ideas pasen a ser objetos de interpretación propia, reflexión y perfeccionamiento convirtiéndose en ideas públicas claras y convincentes.
- La justificación: Que puede valerse de argumentación inductiva o deductiva.
- La conexión: O establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos.
- Institucionalización: Acuerdos y reglas definidas por alumnos y profesor.

Los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 2000) sugiere como método la resolución de problemas para el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, y según el MEN (2000) las situaciones problema deben ser procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias, entendiendo lo anterior como los contextos más propicios para el aprendizaje, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

También afirma que se deben crear situaciones problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos. Los lineamientos Curriculares (MEN, 2000) nos dice que:

> El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás. Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista. (p.18)

Miguel de Guzmán citado en los Lineamientos Curriculares (2000) considera importante:

- Que el alumno manipule los objetos matemáticos
- Que active su propia capacidad mental
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente
- Que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental
- Que adquiera confianza en sí mismo
- Que se divierta con su propia actividad mental
- Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia

El autor anteriormente mencionado también considera las siguientes razones para la resolución de problemas:

- Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- Porque el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos.
- Porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, auto-realizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

Investigadores holandeses del Instituto Freudenthal consideran entre otras las siguientes razones:

- Se puede ver la importancia de distintos tópicos de las matemáticas, como por ejemplo la proporción y la pendiente de una línea y la manera como contribuyen a que los alumnos entiendan cómo se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.
- Los alumnos aprenden a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores. Puesto que es importante que todos los alumnos aprendan matemáticas como parte de su educación básica, también es importante que sepan por qué las aprenden.
- A través del contexto desarrollarán una actitud crítica y flexible ante el uso de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en la vida real.
- Se acerca a los estudiantes a la historia tanto de las matemáticas como de las demás disciplinas e incrementa su interés por ésta.
- Despiertan la creatividad de los alumnos y los impulsa a emplear estrategias informales y de sentido común. Al afrontar un problema en un contexto eficaz, los alumnos desarrollan la capacidad de analizar dicho problema y de organizar la información.
- Las estrategias intuitivas que desarrollan pueden constituir un buen punto de partida natural en la evolución de las matemáticas más formales, es decir de la búsqueda de sentido.
- Un buen contexto puede actuar como mediador entre el problema concreto y las matemáticas abstractas.
- En el proceso de resolución, el problema se transformará en un modelo que puede evolucionar desde un modelo de la situación a un modelo para todos los problemas que se le asemejan desde el punto de vista matemático.

Tarea

Según Godino, Batanero y Font (2004) las tareas en que se involucran los estudiantes, las cuales pueden ser: proyectos, problemas, construcciones, aplicaciones, ejercicios, entre otros, definen la oportunidad de los estudiantes para aprender matemáticas, estas tareas:

- “Proporcionan el estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas, y sus aplicaciones a contextos del mundo real” (Godino, Batanero y Font, 2006)
- Permiten que los estudiantes desarrollen destrezas en el contexto de su utilidad.
- Expresan qué son las matemáticas y da una visión de estas como un medio de investigación.

Permiten a los estudiantes procesos como: razonar y comunicar matemáticas, desarrollando habilidades para la resolución de problemas y para hacer conexiones.

METODOLOGÍA

Metodología de la pasantía

Plan de trabajo

El plan de trabajo presentado a continuación se realiza conforme a los requisitos planteados en el acuerdo N°038 (Julio 28 de 2015) de la Universidad Distrital Francisco José de Calda para realizar trabajo de grado en la modalidad de pasantía.

El objetivo de la pasantía es realizar un diseño de actividades y sus respectivas tareas para desarrollar el pensamiento lógico-matemático en estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto para lograr este objetivo se tendrá en cuenta tres fases:

- Primera fase: Apropiación teórica.
- Segunda fase: Diseño de prueba diagnóstico.
- Tercera fase: Aplicación de pruebas diagnostico en diferentes colegios del distrito.
- Cuarta fase: Diseño de actividades y tareas basadas en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau.

La duración mínima de la pasantía es de 384 horas, se realiza el siguiente cronograma contando con trabajo diario de 4 horas, excepto los días 21 de abril y 5 de mayo donde haremos parte de la organización de espacios de discusión para dar a conocer investigaciones en Educación Matemática dirigida a profesores.

Fecha	Actividad	Tiempo empleado 418 horas	
		Semanas	**Horas**
1 de febrero	Inicio y ejecución de primera fase	2 semanas	40 horas
19 de febrero	Inicio y ejecución de segunda fase y planeación de la tercera fase.	17 semanas	340 horas
21 de abril	Ejecución de cuarta fase.	18 horas. 9 horas cada día	
5 de mayo	Organización de eventos académicos		
8 de junio	Entrega del diseño curricular realizado en la pasantía.	1 semana	20 horas

Tabla 1. Plan de trabajo.

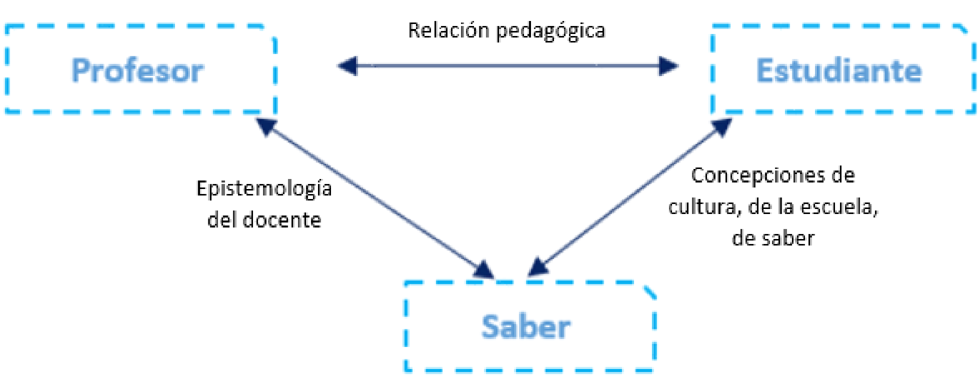
Metodología utilizada en las pruebas piloto

Saber, profesor y estudiante y Teoría de Situaciones Didácticas:

Para comenzar, tuvimos en cuenta el triángulo (Imagen 1) que evidencia la relación entre profesor, estudiante y saber. (Chevallard y Joshua, 1982 citados en D'Amore, 1999)

A continuación, especificamos algunos rasgos de los conceptos principales mencionados en el triángulo (Imagen 1). Según Cornu y Vergnioux(1992) citados en D'Amore (2006):

Imagen 1. *Triángulo didáctico (D'Amore, 2006)*



- El conocimiento de los estudiantes se revela por medio de cuatro tipos de acercamiento: como sujetos biológicos, afectivos, sociales y epistémicos, esta última hace referencia a la psicología del aprendizaje.

- Finalmente, el maestro es considerado como sujeto: social, afectivo, institucional y pedagógico; las dos últimas consideraciones refieren respectivamente a las funciones a las que el profesor responde y a los modelos que él mismo adopta.
- La conveniencia del saber corresponde a la decisión de la institución a cargo, quién establece su estructura y organización.

El autor hace la aclaración de que el saber no es un objeto o idea, sino que es una actividad intelectual humana, hecha por sujetos que se enfocan en dar una razón a lo que hacen y dicen por medio de la demostración y razonamiento.

Por un lado, se distingue entre el saber matemático que pasa por una transposición didáctica[2] para llegar al saber por enseñar y al saber enseñado (Chevallard, 1985) citado en D'Amore,2006) (Imagen 2).

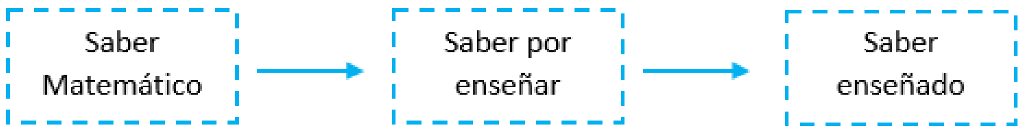


Imagen 2.

Por otro lado, el saber está sujeto a una noosfera que corresponde al ambiente social y cultural. Por ejemplo, las finalidades de la escuela, objetivos de formación, expectativas sociales según la escuela, entre otros. (D'Amore, 2006)

Lo mencionado anteriormente, da lugar a la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Según D'Amore (2006) esta es una teoría de aprendizaje afín con el constructivismo en el cual el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas.

El aprendizaje del estudiante se basa fundamentalmente en la interacción con el medio, el cual presenta algunas dificultades, para que el estudiante supere estas dificultades debe crear estrategias que lo enruten a la adquisición del saber que se pretende enseñar. Brousseau define las siguientes situaciones:

- Situación a-didáctica: Los estudiantes y el conocimiento están presentes, pero no la intervención del profesor.
- Situación no didáctica: Cuando no hay un saber definido.
- Situación didáctica: Cuando existe una intención explicita del saber a enseñar. Se caracteriza porque el estudiante sabe que el profesor le está enseñando y el profesor es consciente de su rol y la manera como se está desarrollando la situación.

Según Brousseau citado por D'Amore (2006) "El estudiante construye el conocimiento solo si se interesa personalmente del problema de la solución de lo que se le propuso por medio de la situación didáctica" lo anterior es lo que se denomina *devolución*.

La *devolución* se caracteriza porque el estudiante no recibe solo estímulos externos a la situación, sino que actúa de manera científica, es decir, que el estudiante entra en el funcionamiento matemático frente a un problema que quiere resolver. El estudiante sabe que al enfrentarse al problema recibe como consecuencia un aprendizaje.

Diseño de actividades:

Para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta las siguientes cuestiones planteadas por Godino, Batanero y Font (2004) que “deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de unidades didácticas, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo”

- *Equidad* en las aulas y apoyo a los estudiantes.
- *Currículo* coherente, centrado en unas matemáticas importantes y articulado a lo largo de los diferentes niveles.
- *Enseñanza* efectiva de las matemáticas, en la cual haya comprensión por parte de los estudiantes según lo que conocen y necesitan aprender.
- *Aprendizaje* construyendo el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
- *Evaluación* que apoye el aprendizaje de las matemáticas y evidencie información importante a los profesores y estudiantes.

DESARROLLO DE LA PASANTÍA

Primer sesión reconocimiento

Se realizó reconocimiento con cada uno de los cursos 3°, 4° y 5° de los diferentes colegios, así, tener una primera visión de los estudiantes, su trabajo individual y grupal, además darnos a conocer como profesoras de matemáticas que los acompañaran eventualmente.

Segunda sesión pruebas diagnostico

Se realizan dos guías diagnósticas de las habilidades y conocimientos previos de los estudiantes.

Diagnostico 1 grados tercero y quinto:

EL PARQUE

Profesora: Luisa Fernanda Torres

¡Diviértete jugando en tu parque y resuelva las siguientes situaciones!

- Observa la imagen y responde las preguntas a, b, c, d y e

a. Ordena de mayor a menor según el peso de los niños y niñas. ¿Cuál pesa más?

b. El sube y baja está inclinado hacia abajo porque Laura pesa más que Andrew ¿Cuántos kilogramos pesa más que Andrew?

c. Si le pones una maleta a Andrew que pese 7 Kg ¿Lograría pasar el peso de Laura y así bajar? ¿Por qué?

d. Si Isis se sube en el mismo lado de Laura y Samir en el lado de Andrew ¿Quiénes quedarían arriba?

2. En los partidos que jugaste de baloncesto, tu equipo realizo las siguientes cantidades de cestas:

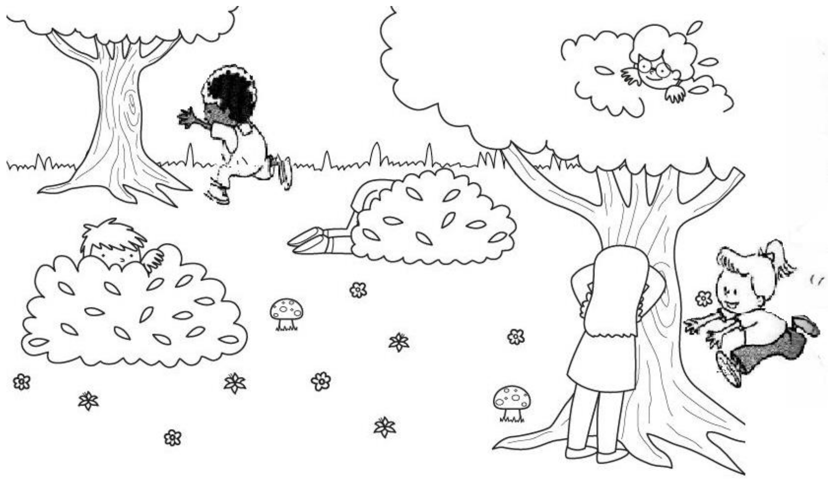
PARTIDOS	CESTAS DE DOS PUNTOS	CESTAS DE TRES PUNTOS	TOTAL DE PUNTOS
PARTIDO 1	7	4	
PARTIDO 2	5	3	
PARTIDO 3	2	6	

a. Completa la tabla calculando el total de puntos de cada partido.

b. ¿En cuál partido marcaron más puntos?

3. En una hoja dibuja un parque e identifica que figuras geométricas se encuentran en él.

4. Ubica y guía a tu amiga para que pueda descubrir a los niños.



a. ¿Hacia dónde debe mirar para descubrir a la niña de gafas?
b. ¿Hacia dónde debe ir para descubrir al niño de pelo negro?
c. ¿Hacia dónde debe ir para descubrir al niño escondido en el arbusto más cercano?

5. Daniela, Nicolás y Carla se encuentran entrenando en la pista de patinaje, los tiempos que tarda cada uno en dar la vuelta a la pista son: Daniela tarda 2 minutos, Nicolás tarda 3 minutos y Carla 5 minutos.
Cada niño da 5 vueltas, completa las tablas de sus tiempos.

TIEMPOS DE DANIELA					
CANTIDAD DE VUELTAS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
TIEMPOS	2 minutos				10 minutos

TIEMPOS DE NICOLAS					
CANTIDAD DE VUELTAS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
TIEMPOS	3 minutos				

TIEMPOS DE CARLA					
CANTIDAD DE VUELTAS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
TIEMPOS	5 minutos				

	**6.** En una tula hay 6 balones de baloncesto y 4 de futbol, de los cuales las niñas sacaron todos los balones de baloncesto. Completa las siguientes frases con las palabras "**imposible**" o "**seguro**" según corresponda: a. Que Diego saque un balón de baloncesto es algo __________________. b. Que Alberto saque un balón de futbol es algo __________________.

Tabla 2. Guía diagnóstico para grados tercero y quinto.

Esta guía fue aplicada en los colegios I.E.D. SaludCoop Norte y Veintiún Ángeles a estudiantes de grado tercero y quinto, grupos de aproximadamente 35 estudiantes. La situación fundamental establecida para esta guía es **el parque** y situaciones asociadas a juegos que los estudiantes realizan dentro de él, de manera cotidiana, este dato se obtuvo mediante la actividad de reconocimiento al realizarles una serie de preguntas donde se pretendía saber sus gustos, rutinas diarias, deportes que practican, materias favoritas, temas que se facilitan y dificultades en algunos temas de matemáticas.

En cuanto al objetivo de la guía, se pretendía reconocer e identificar los conocimientos previos de los estudiantes y así poder plantear futuras actividades para el desarrollo de pensamiento lógico y matemático en los estudiantes, por ello en la guía se encuentran puntos que relacionan varios pensamientos, ya que, según los estándares curriculares "ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional". MEN (2006).

Ahora bien, en el **primer punto** de la guía pretendíamos evaluar comparación de cantidades y su con la unidad de medida, para este caso el peso, suma y resta de cantidades, correspondiendo a los siguientes estándares y su respectivo pensamiento:

- *"Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones".*
- *"diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas".*
- *"Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles".* MEN (2006, pág. 80-81).

En el **segundo punto**, se pretendía que los estudiantes realicen interpretación de tabla de datos, así mismo, suma y multiplicación a la hora de completarla y comparación de cantidades, temas que corresponde a las siguientes competencias:

- *"Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos".*

- *“Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar”*
- *“Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas”.* MEN (2006, pág. 80-81).

En cuanto al **tercer punto**, el objetivo era que los estudiantes no solo graficaran el parque, sino que hicieran una relación e identificación de figuras bidimensionales y tridimensionales que se encuentran inmersas en él, cumpliendo con los siguientes estándares:

- *“Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales”*.
- *“Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figura geométricas bidimensionales”.* MEN (2006, pág. 80-81).

En un **cuarto punto**, se pretendía evaluar nociones topológicas de dirección como derecha, izquierda, arriba, abajo lejos de y cerca de, relaciones espaciales y ubicación en cierto plano, dentro de un contexto conocido para los estudiantes “el juego de las escondidas”, haciendo alusión a las siguientes competencias:

- *“Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia”.*
- *“Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales”.* MEN (2006, pág. 80-81).

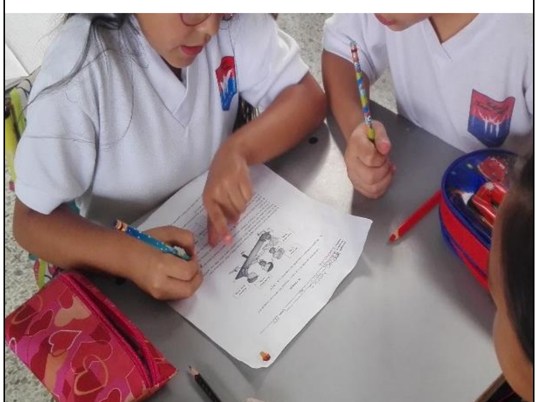
En **quinto punto**, es una situación en la que se pretende relacionar la interpretación de tabla de datos, con los múltiplos de un número, para este caso los múltiplos del 2, 3 y 5, donde el estudiante sea quien busque la estrategia que le facilite completar las tablas de datos, teniendo en cuenta los siguientes estándares:

- *“Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas”.*
- *Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).*
- *“Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos”. MEN (2006, pág. 80-81).*

Finalmente, en el **punto seis**, planteamos una situación donde el estudiante debe hacer uso de comprensión lectora de los datos de esta, para completar las frases propuestas con dos posibles palabras “imposible” y “seguro”, haciendo alusión al pensamiento aleatorio y sistemas de datos donde las competencias a evaluar son:

- *“Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos”.*
- *“Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro”.* MEN (2006, pág. 80-81).

Análisis de resultados (diagnostico 1)

PUNTO	ANALISIS POR CATEGORÍAS
1	**CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN:** Este punto se encuentra dividido en cuatro ítems (**a**, **b**, **c** y **d**) con preguntas frente a la imagen que se encuentra inmersa en este punto. En cuanto al ítem  **IMAGEN 1** **a**, los estudiantes de grado tercero y quinto toman como estrategia, empezar a observar el peso de cada uno de los niños de la imagen y compararlo por pares para hallar quien es el niño con mayor peso, el que le sigue y así sucesivamente, para empezar a establecer el orden del peso de los niños de mayor a menor. En el ítem **b,** al igual que en el ítem anterior los estudiantes observan la imagen para realizar la comparación de los dos niños, teniendo en cuenta, primero la postura del sube y baja y el peso de los dos niños para así llegar a la solución de la pregunta. En el ítem **c** y **d**, al preguntar cómo hacer esos puntos, la mayor parte de los estudiantes de grado tercero se imaginan en el punto **c**, al niño de la imagen (Andrew) con la maleta puesta y dicen que al poner la maleta el sube y baja, bajará y en el ítem **d**, realizan el mismo proceso de imaginar a los cuatro niños en el sube y baja; para una minoría de los estudiantes es difícil comprender e interpretar las preguntas de estos ítems, por ende las dejan en blanco, a diferencia de los estudiantes de grado quinto, los cuales tomaron la estrategia observar las cantidades según la imagen y seguido de esto la respectiva operación para dar solución a las preguntas.

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN:

En cuanto a esta categoría, los estudiantes de grado tercero y quinto, en el ítem **a**, representaron el orden del peso de los niños de manera simbólica y numérica, colocando ya sea solo el nombre de los niños en orden y el peso de cada uno (**IMAGEN 2**) o tan solo el nombre de los niños según el orden de su peso (**IMAGEN 3**). en el ítem **b**, la mayoría de los estudiantes destacaron de manera numérica el peso de los dos niños a comparar para establecer su diferencia en peso como se muestra en las (**IMAGEN 2** e **IMAGEN** **3**) y dar el resultado final de la comparación en kilogramos. En el ítem **c** al igual que en el ítem **d**, los estudiantes representan de manera simbólica la operación que se debe llevar a cabo para dar una respuesta.

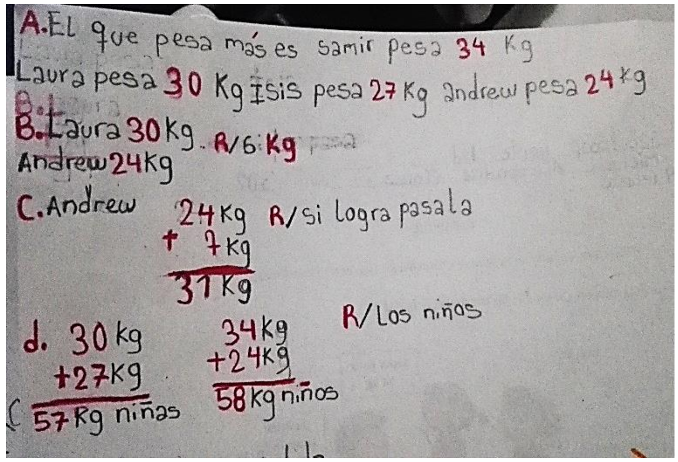


IMAGEN 2

en (**IMAGEN 2** e **IMAGEN 3**) y dar el resultado final de la comparación en kilogramos. En el ítem **c** al igual que en el ítem **d**, los estudiantes representan de manera simbólica la operación que se debe llevar a cabo para dar una respuesta.

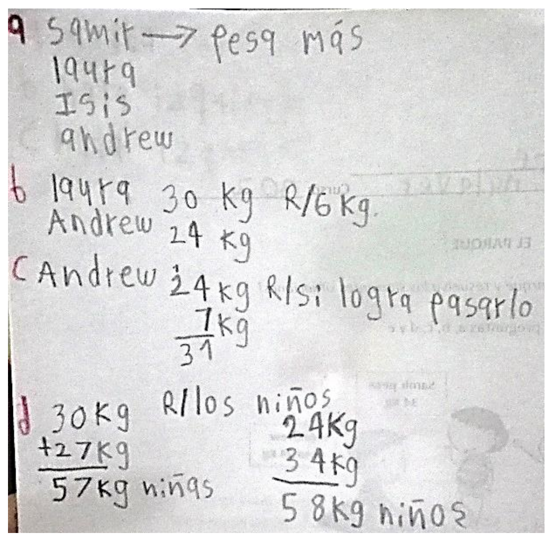


IMAGEN 3

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN:

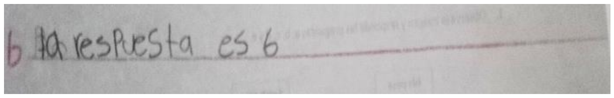


IMAGEN 4

En esta categoría la mayoría de los estudiantes, en los puntos **a** y **b**, se apoyan del valor numérico del peso de los niños y sus respectivos nombres para realizar la comparación de los mismos como lo muestran las (**IMAGEN 2** e **IMAGEN 3**), pero hay casos particulares en los que los niños sólo ponen como respuesta solo el valor numérico sin realizar alguna justificación y olvidando de paso la unidad de medida correspondiente a la situación, como muestra la (**IMAGEN 4**) al responder el ítem **b**.

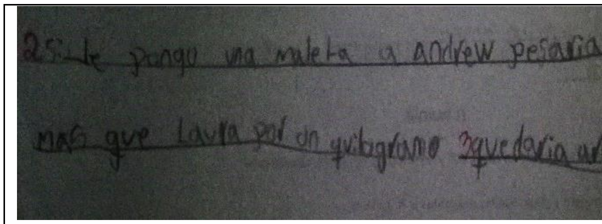


IMAGEN 5

Por otra parte, en los ítems **c** y **d**, algunos estudiantes realizan las operaciones necesarias para dar sustento a la respuesta (**IMAGEN 2** e **IMAGEN 3**) y por el contrario otros estudiantes solo expresan de manera escrita la justificación a su respuesta, como ocurre en el ítem **c** (**IMAGEN 5**) donde el estudiante muestra que por un kilogramo uno de los niños pesa más que el otro al poner los 7 kg que pesa la maleta en él, sin hacer uso de algún algoritmo u operación matemática escrita, tal vez llegando a la misma, llevando a cabo un proceso mental, pues no hay registro escrito de cómo llegaron a la respuesta, esto según **Godino(2004, Pag.24.)**"*Los elementos del conjunto numérico pueden ser objetos físicos (piedrecillas, semillas, marcas en una varilla o en un segmento, partes del cuerpo), palabras, símbolos, etc. Pueden también ser imaginados por una persona, es decir, ser representaciones internas de objetos para realizar comparaciones o cálculos".* Lo mismo pasa en la (**IMAGEN 6**) donde el estudiante tampoco hace uso operaciones.

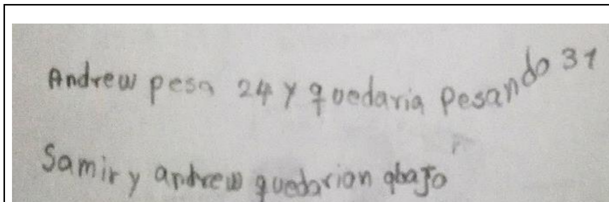


IMAGEN 6

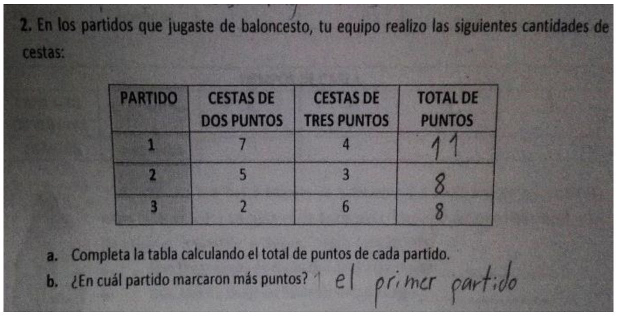
CATEGORÍA ALGORITMICA:

Esta categoría se evidenció en la mayoría de los estudiantes, ya que no sólo se llevó a cabo el proceso de análisis y comprensión, sino que producto de éste, se pudo observar que el algoritmo tradicional de la suma fue la herramienta principal para dar solución a las respuestas de los ítems **c** y **d** (**IMAGEN 2** e **IMAGEN 3**), ya que los estudiantes luego de empezar a crear estrategias de solución asocian el contexto de la situación con la parte matemática.

2

CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN:

La finalidad de este punto era la comprensión e interpretación de los datos establecidos en la tabla para llegar al valor total de puntos y así saber en qué partido se marcaron más puntos, dentro de las soluciones que dieron los estudiantes, encontramos tres casos en particular, el primero es la mal interpretación de los datos de la tabla, teniendo en cuenta que lo que había que sumar eran la cantidad de puntos no de cestas, como lo muestra la (**IMAGEN 7**) en este caso el estudiante no tiene en cuenta el enunciado de los datos de cada celda de la tabla donde dice "**CESTAS DE DOS PUNTOS**" y "**CESTAS DE TRES PUNTOS**", por ende, no realiza la conversión que hay que hacer antes de sumar y hallar un total.



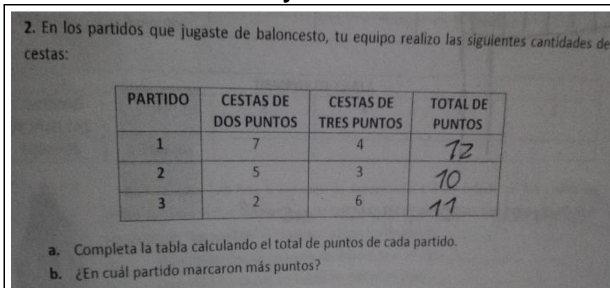
2. En los partidos que jugaste de baloncesto, tu equipo realizo las siguientes cantidades de cestas:

PARTIDO	CESTAS DE DOS PUNTOS	CESTAS DE TRES PUNTOS	TOTAL DE PUNTOS
1	7	4	11
2	5	3	8
3	2	6	8

a. Completa la tabla calculando el total de puntos de cada partido.
b. ¿En cuál partido marcaron más puntos? el primer partido

IMAGEN 7

El segundo caso que se presentó en niños de grado quinto fue, interpretar el número denegado para cada partido como puntos a sumar (**IMAGEN 8**) sin tener en cuenta los demás enunciados de la tabla. Por último, un tercer caso que se presenta es que algunos de los estudiantes de grado tercero comprenden los datos dados en la tabla, realizando las operaciones necesarias en cada caso, primero haciendo uso de la multiplicación y luego la suma respectiva de puntos (**IMAGEN 9**). Cabe resaltar que gran parte de los estudiantes no llegaron a la solución de este punto pues no supieron interpretar la tabla de datos, o esta no fue entendible.

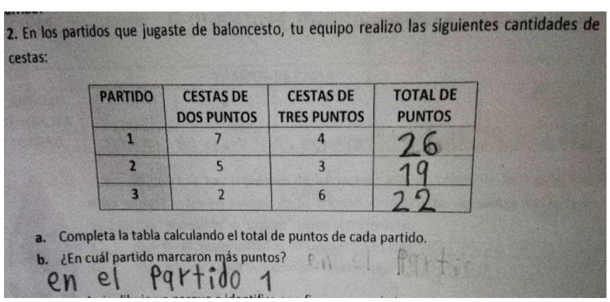


2. En los partidos que jugaste de baloncesto, tu equipo realizo las siguientes cantidades de cestas:

PARTIDO	CESTAS DE DOS PUNTOS	CESTAS DE TRES PUNTOS	TOTAL DE PUNTOS
1	7	4	12
2	5	3	10
3	2	6	11

a. Completa la tabla calculando el total de puntos de cada partido.
b. ¿En cuál partido marcaron más puntos?

IMAGEN 8



2. En los partidos que jugaste de baloncesto, tu equipo realizo las siguientes cantidades de cestas:

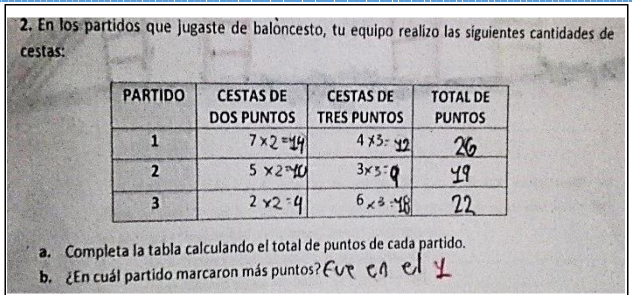
PARTIDO	CESTAS DE DOS PUNTOS	CESTAS DE TRES PUNTOS	TOTAL DE PUNTOS
1	7	4	26
2	5	3	19
3	2	6	22

a. Completa la tabla calculando el total de puntos de cada partido.
b. ¿En cuál partido marcaron más puntos? en el partido 1

IMAGEN 9

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN:

En esta categoría los estudiantes usan la representación simbólica de los datos al realizar de una u otra manera la suma o multiplicación de estos (**IMAGEN 10**), explícitos o implícitos dentro de la tabla de datos, además en el caso de las (**IMAGENES 9, 8 y 7**) realiza el proceso por medio de imágenes mentales, realizando los cálculos mentales necesarios para llegar a un resultado.



2. En los partidos que jugaste de baloncesto, tu equipo realizo las siguientes cantidades de cestas:

PARTIDO	CESTAS DE DOS PUNTOS	CESTAS DE TRES PUNTOS	TOTAL DE PUNTOS
1	7×2=14	4×3=12	26
2	5×2=10	3×3=9	19
3	2×2=4	6×3=18	22

a. Completa la tabla calculando el total de puntos de cada partido.
b. ¿En cuál partido marcaron más puntos? Fue en el 1

IMAGEN 10

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN:
En cuanto a esta categoría la mayoría de los estudiantes justifican su respuesta, por medio de los datos puestos al completar la tabla y a la hora de responder la pregunta de ¿En cuál de los partidos se marcaron más puntos? Como se observa en las (**IMÁGENES 10, 9, 8 y 7**), aunque cabe resaltar que gran parte de los estudiantes no llegaron a la solución de esta pregunta pues no supieron interpretar la tabla de datos, o esta no fue entendible.

CATEGORÍA DE ALGORITMICA:
En esta categoría pocos estudiantes usaron algoritmos como tal, pues la mayoría realizo el cálculo mental, en el único caso en el que se presenta un algoritmo, es en el de la (**IMAGEN 10**), siendo este, el algoritmo de la multiplicación de manera horizontal, como guía para llegar al total de puntos de cada una de las cestas según la indicación "**CESTAS DE DOS PUNTOS**" y "**CESTAS DE TRES PUNTOS**", y después sumar y llegar al resultado total de puntos.

3

CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN:
En esta categoría se presentan algunos casos particulares de comprensión de este punto, iniciando con grado quinto, donde los estudiantes interpretan lo que hay que desarrollar en él, de diferente manera, en el primer caso un estudiante dibuja el parque y encierra en círculos las figuras geométricas inmersas en él, (**IMAGEN 11**) hace buen uso de la palabra "identificar" ya que esto es lo que pide el punto, más no las nombra. Un segundo caso que se presenta es la mal interpretación de lo que se pide hacer en el punto a realizar, donde los estudiantes, sólo nombran las

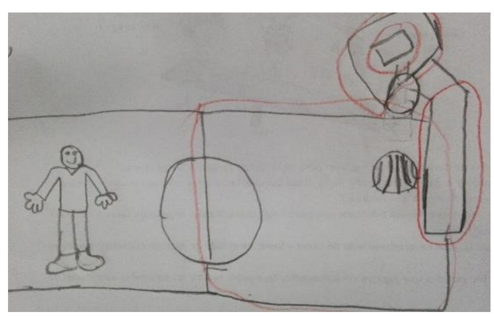


IMAGEN 11

figuras geométricas de manera escrita o las realizan de manera gráfica como muestra la (**IMAGEN 12**). Por otra parte, en los resultados de los niños de grado tercero se presentan tres casos en particular, el primero es la identificación de figuras solidas en el parque dibujado como muestra la (**IMAGEN 13**), el segundo es la identificación de manera explícita e implícita de manera gráfica y verbal (**IMAGEN 14**) y por último la comprensión del punto solo queda en la parte gráfica, donde el estudiante sólo realiza el dibujo del parque mas no realiza la identificación de las figuras geométricas inmersas en él (**IMAGEN 15**).

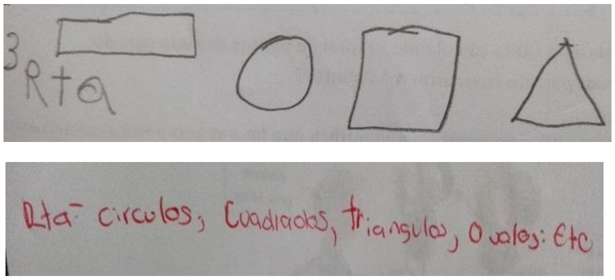


IMAGEN 12

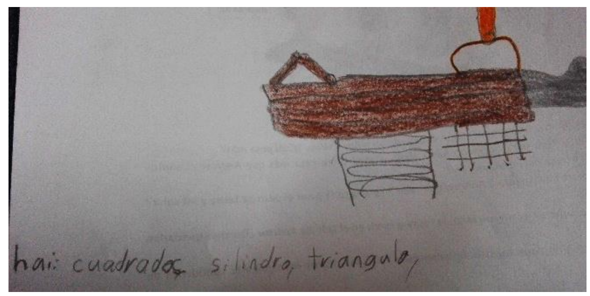


IMAGEN 13

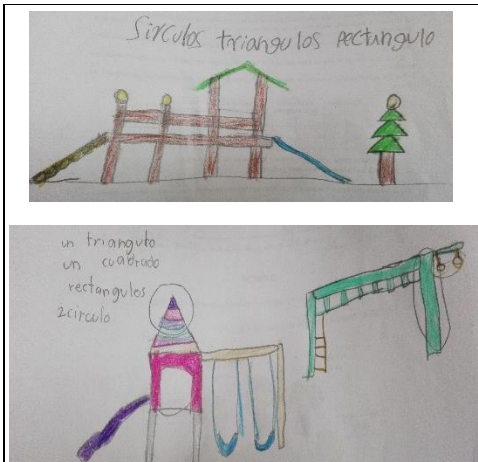
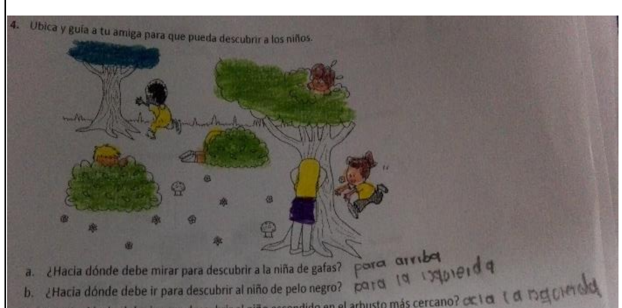


IMAGEN 14

IMAGEN 15

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN:

En cuanto a esta categoría los estudiantes de grado tercero como los de grado quinto, usan dos tipos de representaciones en los resultados de este punto, ya que según (Kaput, 1987) "Una escritura, una notación, un símbolo representando un objeto matemático, las figuras geométricas... son ejemplos de representaciones". sea contrario o no a lo que se tiene como objetivo en este punto, una de las representaciones es la escrita, donde el estudiante hace

	el reconocimiento de las figuras geométricas inmersas en un parque, pero no las grafica como podemos observar en la (**IMAGEN 12**); otra es de manera únicamente gráfica, donde los estudiantes solo realizan el dibujo del parque sin realizar alguna identificación de las figuras (**IMAGEN 15 y 12**)o de manera gráfica pero de alguna manera resaltando las figuras geométricas como muestra la (**IMAGEN 11**) en este caso encerrando con círculos y finalmente el complemento de la parte escrita y gráfica como medio de representación de los interpretado con el enunciado del punto(**IMAGEN 13 y 14**).
	CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN: Esta categoría se presenta en el caso de los niños que respaldaron su respuesta de manera escrita acompañando la gráfica realizada del parque, ya que, al resaltar las figuras geométricas inmersas en él, complementan lo realizado, esto se observa en casos como los de las (**IMÁGENES 13 y 14**).
	CATEGORÍA ALGORITMICA: En esta categoría no hay algo que resaltar pues el proceso que se esperaba que hiciera estudiante era netamente gráfico y no requería de parte algorítmica.
4	**CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN:** La interpretación que le dieron los estudiantes que respondieron a este punto, fue de tratar de ubicar a la niña que necesitaba descubrir a los niños que se esconden de ella, este juego es popular entre los niños, y el objetivo es saber si los niños reconocen nociones topológicas de dirección como: derecha, izquierda, arriba, abajo, centro de y lejos de ya que según Bourel (1995) “las relaciones espaciales posición y orientación se dividen dependiendo de la dirección, estas direcciones en el espacio abstracto son tres: arriba/ abajo, cerca de/ lejos de, izquierda/ derecha” . Cabe resaltar, que la solución a este punto fue realizada por pocos estudiantes de grado quinto, los cuales no entendían como responder a las preguntas, en cuanto a los niños de grado tercero, usaron la imaginación para asociar esta situación con la vida real, “*cuando juegan en el parque o en el colegio*” palabras textuales de los mismos.
	CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN: En esta categoría se presentaron dos tipos de representación en estudiantes de grado quinto, uno de manera escrita, respondiendo a las preguntas establecidas en el punto (**IMAGEN 16**) y la otra de manera gráfica, señalando los lugares en los que estaban escondidos los niños, pero sin sustento escrito (**IMAGEN 17**);  **IMAGEN 16** en cuanto a los niños de grado tercero, la mayoría uso representación escrita e

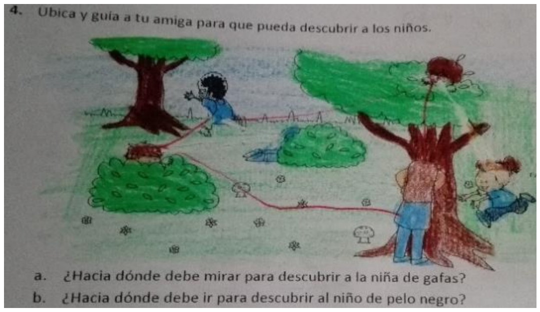


IMAGEN 17

imágenes mentales para recrear el punto en la vida real.

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN:

A la hora de resolver este punto, los estudiantes utilizaron en un primer caso, los objetos que se encuentran dentro de la imagen para ubicar a la niña de la situación como se puede observar en la (**IMAGEN 18**) sea uno de los arbustos o uno de los arboles como referente de ubicación; en segundo lugar, usaron nociones topológicas de dirección para

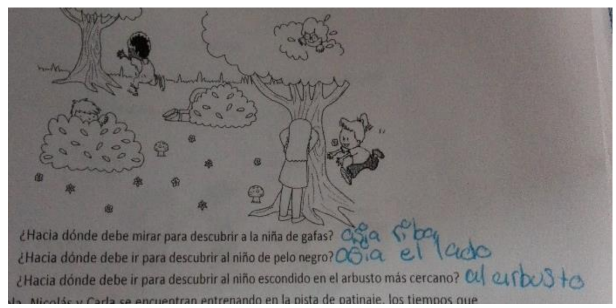


IMAGEN 18

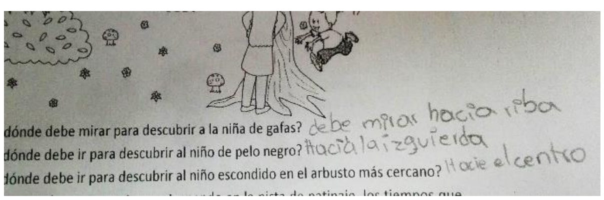


IMAGEN 19

responder a cada una de las preguntas como muestra la (**IMAGEN 19**) y también presentaron confusiones en cuanto a distinguir la dirección derecha de la izquierda (**IMAGEN 20**).

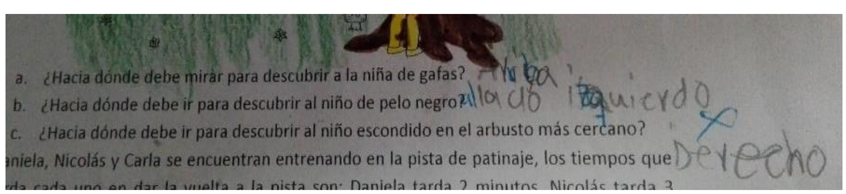


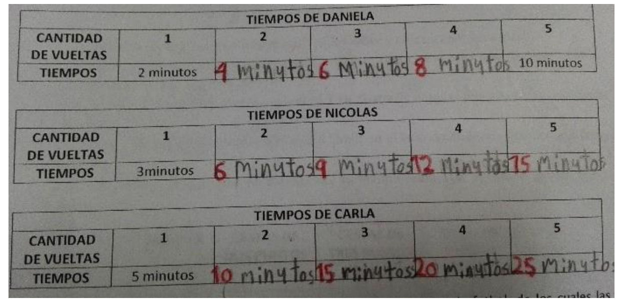
IMAGEN 20

CATEGORÍA ALGORITMICA:

En esta categoría no hay algo que resaltar pues el proceso que se esperaba que hiciera estudiante era netamente visual y textual, por ende, no requería de procesos algorítmicos.

5

CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN:



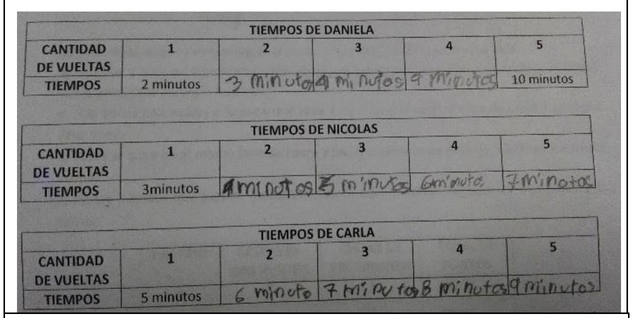
TIEMPOS DE DANIELA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	2 minutos	4 minutos	6 Minutos	8 minutos	10 minutos

TIEMPOS DE NICOLAS					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	3minutos	6 Minutos	9 Minutos	12 Minutos	15 Minutos

TIEMPOS DE CARLA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	5 minutos	10 minutos	15 minutos	20 minutos	25 Minutos

IMAGEN 21

En esta categoría los estudiantes interpretaron la situación de manera adecuada en la mayoría de los casos, llenando los datos de la tabla usando los múltiplos de los números según correspondiera, algunos estudiantes de grado tercero tomaron como estrategias, para llegar a una respuesta, el conteo de los dedos para hallar el valor que correspondía a la celda, como proceso de suma reiterada ya que según Godino (2004) "Las estrategias más frecuentes para obtener algunos resultados de dicha tabla son: Sumar reiteradamente. Se multiplica sumando el multiplicando tantas veces como indique el multiplicador", otros realizaron la multiplicación mental de la cantidad de vueltas por los minutos que demoraba en dar una vuelta cada uno de los niños propuestos en el punto y otros simplemente se dieron cuenta que se trataba de los múltiplos de los numero 2, 3 y 5, respectivamente (**IMAGEN 21**). Ahora bien, también se presentaron casos particulares, uno de ellos el de dos niños que llenaron la tabla de datos siguiendo la secuencia numérica, pero sin tener en cuenta que cada niño tarda cierto tiempo por cada vuelta (**IMAGEN 22**) y por último en que el estudiante suma la cantidad de vueltas con los minutos sin tener en cuenta que son magnitudes distintas (**IMAGEN 23**).

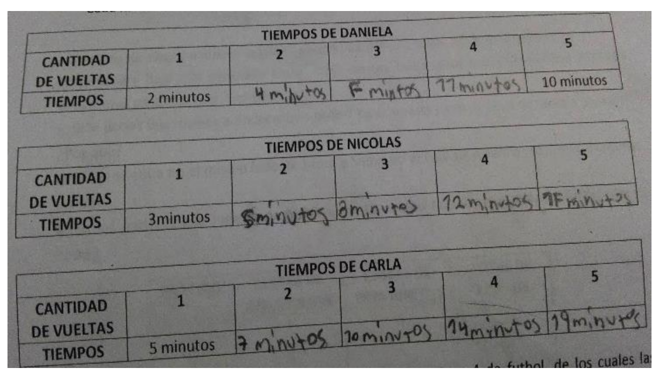


TIEMPOS DE DANIELA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	2 minutos	3 minutos	4 minutos	9 minutos	10 minutos

TIEMPOS DE NICOLAS					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	3minutos	4 minutos	5 minutos	6minutos	7minutos

TIEMPOS DE CARLA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	5 minutos	6 minuto	7 minutos	8 minutos	9 minutos

IMAGEN 22



TIEMPOS DE DANIELA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	2 minutos	4 minutos	F mintos	11 minutos	10 minutos

TIEMPOS DE NICOLAS					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	3minutos	5minutos	8minutos	12minutos	1F minutos

TIEMPOS DE CARLA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	5 minutos	7 minutos	10 minutos	14minutos	19minutos

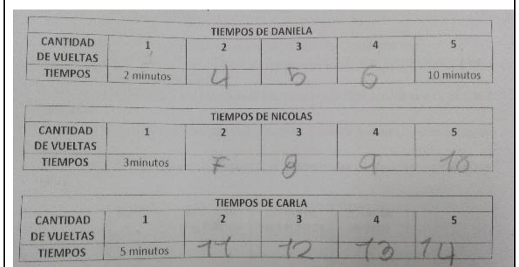
IMAGEN 23

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN:

Los estudiantes en esta categoría usaron la representación escrita para describir la

IMAGEN 24

magnitud que correspondía, en este caso "los minutos" (**IMÁGENES 21, 22 y 23**), además utilizaron imágenes mentales a la hora de calcular múltiplos o realizar el conteo de los números y llegar al resultado, los dedos también fue una manera de representar el proceso de conteo y por último (**IMAGEN 24**), algunos estudiantes sólo hicieron uso del símbolo "número" como medio de representación del resultado que obtuvieron (**IMAGEN 25**).



TIEMPOS DE DANIELA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	2 minutos	4	5	6	10 minutos

TIEMPOS DE NICOLAS					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	3minutos	7	8	9	10

TIEMPOS DE CARLA					
CANTIDAD DE VUELTAS	1	2	3	4	5
TIEMPOS	5 minutos	11	12	13	14

IMAGEN 25

"El uso de estrategias intermedias para obtener multiplicaciones y divisiones básicas es mucho menos frecuentes que en la suma y resta debido a que la escuela ejerce una fuerte presión para que los niños memoricen la tabla de multiplicar. Las estrategias más frecuentes para obtener algunos resultados de dicha tabla son: Sumar reiteradamente (…) Recitar las tablas (…) Calcular con los dedos" **Godino (2004, Pag.79.)** "

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN:

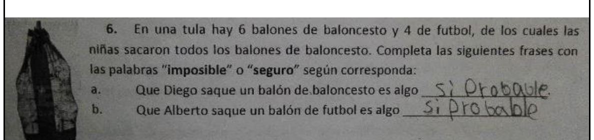
En cuanto a esta categoría, los estudiantes usan para respaldar el proceso de conteo, multiplicación o suma reiterada al hallar los múltiplos de los números, la justificación escrita de los números como se observa en la (**IMAGEN 25**) que corresponden a cada celda y su respectiva magnitud, que en este caso serían los minutos (**IMAGEN 21, 22 y 23**).

CATEGORÍA ALGORITMICA:

En esta categoría no hay registro escrito como tal del proceso algorítmico que realizaron los estudiantes para calcular los múltiplos de los números, pues se realizó conteo mental y con los dedos, además del uso de suma reiterada y conocimientos previos de las tablas de multiplicar de los números que establece el punto a realizar.

6

CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN: En este punto la mayoría de los estudiantes tanto de grado quinto como de grado tercero, fallaron, pues no realizaron la interpretación debida de los datos inmersos en él, donde era necesaria la comprensión lectora para establecer cuál de las palabras "**imposible**" o "**seguro**" se acomodaba a la respectiva frase, siguiendo la lógica de la situación; en este caso el estudiante hace uso



6. En una tula hay 6 balones de baloncesto y 4 de futbol, de los cuales las niñas sacaron todos los balones de baloncesto. Completa las siguientes frases con las palabras "**imposible**" o "**seguro**" según corresponda:

a. Que Diego saque un balón de baloncesto es algo Si Probable.

b. Que Alberto saque un balón de futbol es algo Si Probable

IMAGEN 26

de la palabra “***si probable”*** en ambas frases, sin tener en cuenta el enunciado (**IMAGEN 26**) lo mismo ocurre en el caso de este estudiante el cual dé lugar de corresponder a lo planteado usa la palabra “***inseguro***” como se observa en la (**IMAGEN 27**).

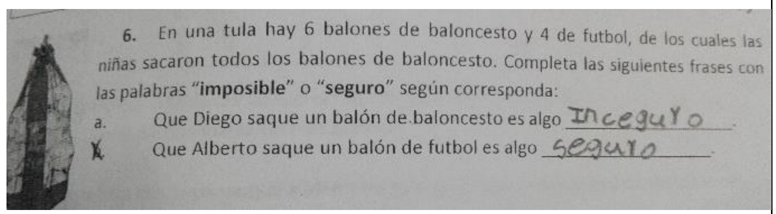

6. En una tula hay 6 balones de baloncesto y 4 de futbol, de los cuales las niñas sacaron todos los balones de baloncesto. Completa las siguientes frases con las palabras “**imposible**” o “**seguro**” según corresponda:
a. Que Diego saque un balón de baloncesto es algo Inceguro.
b. Que Alberto saque un balón de futbol es algo seguro.

IMAGEN 27

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN:
En cuanto a la representación que usan los estudiantes en este caso, sólo es de manera escrita, al escribir la palabra correspondiente a la frase dada como podemos observar en las (**IMÁGENES 26, 27 y 28**).

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN:
Para esta categoría los estudiantes usan la justificación de manera escrita al respaldar lo analizado en la situación por medio de las palabras dadas, según la frase correspondiente como muestra la (**IMAGEN 28**)

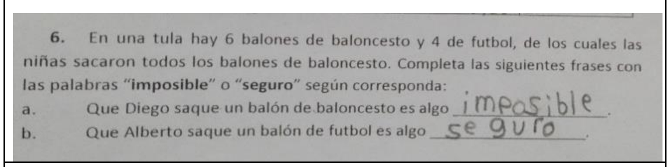

6. En una tula hay 6 balones de baloncesto y 4 de futbol, de los cuales las niñas sacaron todos los balones de baloncesto. Completa las siguientes frases con las palabras “**imposible**” o “**seguro**” según corresponda:
a. Que Diego saque un balón de baloncesto es algo imposible.
b. Que Alberto saque un balón de futbol es algo se guro.

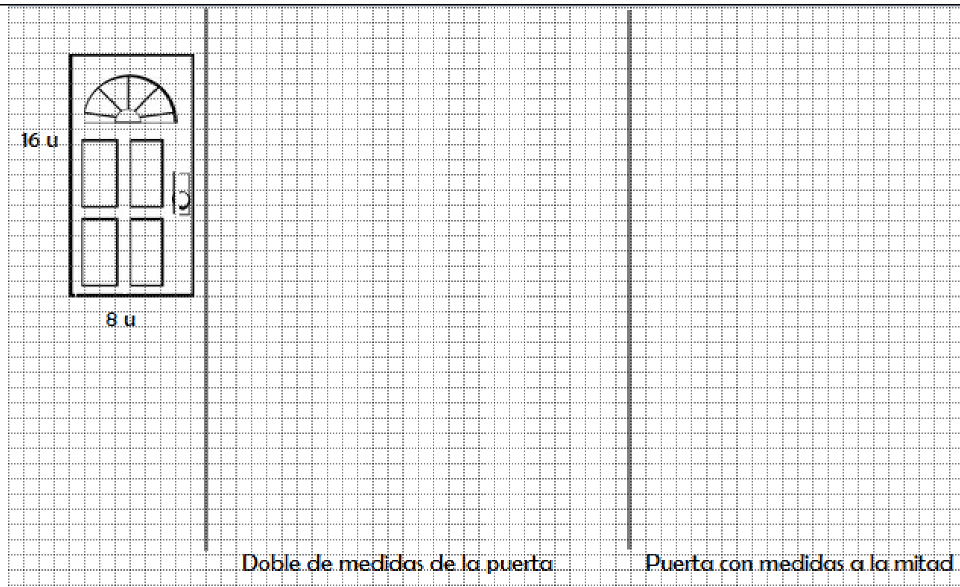
IMAGEN 28

CATEGORÍA ALGORITMICA:
En esta categoría no hay algo que resaltar pues el proceso que se esperaba que hiciera estudiante era netamente visual y textual, por ende, no requería de procesos algorítmicos.

Tabla 3. Análisis de resultados de prueba diagnóstico.

Diagnostico 2 grado cuarto:

JUGUEMOS CON NUESTRAS HABILIDADES
Profesora: Yesica Sepúlveda Cardona **1.** A continuación, tienes el dibujo de una puerta cuyas medidas son 16 u de alto y 8 u de ancho, dibuja esta puerta con el doble de sus medidas y sus medidas a la mitad.



2. A continuación, encontraras dos secuencias que deberás completar:

Secuencia 1.

Completa la tabla

- Dibuja los siguientes términos de la representación.
- Indica la posición a la que corresponden y la cantidad correspondiente.
- Sin necesidad de la tabla, responde que cantidad representaría la posición 7° y 11°.

POSICIÓN	1°	2°			
REPRESENTACIÓN	• • •	• • • • •	• • • • • • •		
CANTIDAD SEGÚN REPRESENTACIÓN	3				

Secuencia 2.

Completa la tabla

- Dibuja los siguientes términos de la representación
- Indica la posición a la que corresponden y la cantidad correspondiente.
- Sin necesidad de la tabla, responde que cantidad representaría la posición 7° y 11°

POSICIÓN	1°				
REPRESENTACIÓN	• • • •	• • • • • • • •			
CANTIDAD SEGÚN REPRESENTACIÓN					

3. ¿Qué número colocarías en la rayita para completar las siguientes expresiones y que estas sean iguales?

33 + 7 = ____ + 15

______– 12 = 7+9

120 – 18 = 10 + ___

4. En el transcurso de tu vida puedes encontrarte con situaciones como las siguientes. Resuélvelas.
   - El colegio SaludCoop y 7 colegios más se inscribieron en un torneo de fútbol. Cada colegio eligió a 23 de sus mejores estudiantes para que jugaran y los representara. ¿Cuántos estudiantes en total fueron al torneo de fútbol?

   - La mamá de Sebastián le regaló 16 videojuegos para que disfrutará luego de hacer cada una de sus tareas del colegio. Sebastián ha jugado 5 videojuegos ¿Cuántos le faltan por jugar?

   - Emily, Nicolás, Mariana y Felipe van a jugar UNO, el juego de Cartas. Sí en total hay 46 cartas, 10 de ellas son para robar y las sobrantes para repartir ¿Cuántas cartas quedan para repartir? ¿Cuántas cartas le corresponde a cada uno?

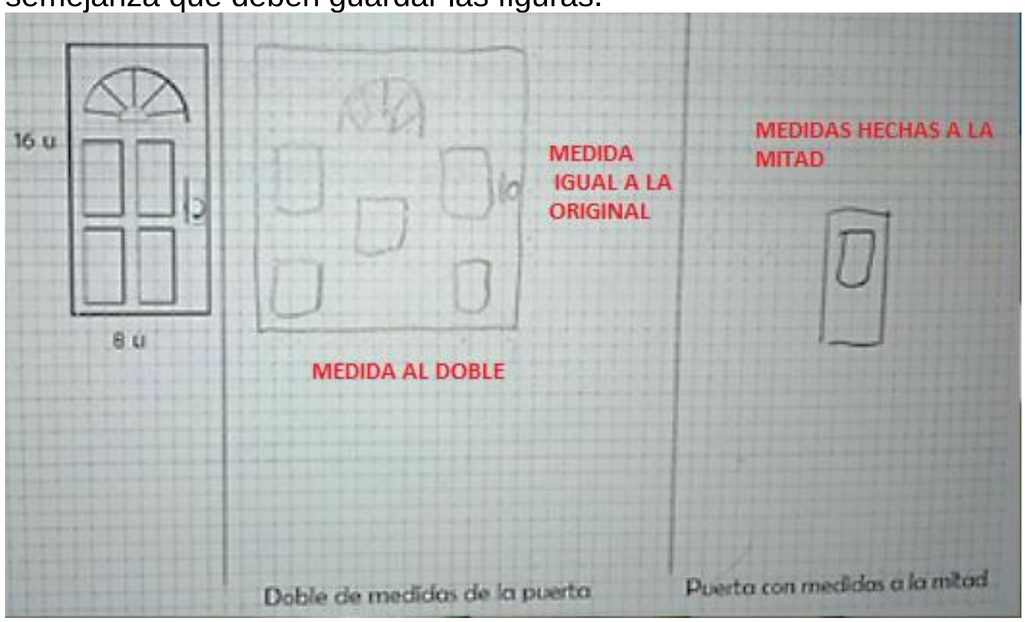
Tabla 4. Guía diagnostico grado cuarto.

Análisis de resultados (diagnostico 2)

PUNTO 1. PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

Este punto fue diseñado con el fin de conocer los conocimientos previos de los estudiantes en cuanto al pensamiento multiplicativo, en este caso implícito estaba el concepto de proporcionalidad directa con doble y proporcionalidad inversa con mitad, además teniendo en cuenta que la introducción al pensamiento algebraico tiene dos rutas la proporcionalidad y la generalización de patrones Butto y Rojano (2004) en este caso se propone una actividad de proporcionalidad para analizar los conocimientos previos de los estudiantes.

Para esta situación también se tuvo en cuenta el cambio de tamaño conservando la misma unidad de medida, indicado en la clasificación de problemas multiplicativos asimétricos según Bell y otros (1989) citado en Castro, Castro y Rico (1995, p.58).

Categorías y Descripción.	**Análisis según pruebas piloto**
CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN Teniendo en cuenta que fueron diferentes colegios, los resultados variaron según el colegio, estos fueron: -Para los estudiantes fue más sencillo recordar el concepto de doble que el de mitad, por tanto, hacer su dibujo considerando la cuadricula que se les daba. -Algunos estudiantes no lograban asociar ni el concepto de doble ni mitad. -Otros estudiantes tenían claro el concepto de doble y mitad. **CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN** Los estudiantes utilizaron la cuadricula para realizar la representación gráfica de la puerta.	***El estudiante realiza el doble o la mitad de solo uno de los lados de la puerta.*** De este caso, fueron pocos los que se presentaron. Se interpretar de la siguiente manera: 1. El estudiante conoce por memorización el doble o mitad de algunos números, pero no sabe cómo hallar los que no ha memorizado. 2. El estudiante conoce o sabe cómo hallar el doble o mitad de los números, sin embargo, el error que se evidencia es en la precisión de la representación, es decir que implícitamente el estudiante no reconoce la semejanza que deben guardar las figuras.  ***La representación gráfica utilizando la cuadrícula responde solo al doble o solamente la mitad, no los dos.*** La mayoría de los estudiantes realiza la representación del doble de las medidas de la casa, la mayoría tiene claro que deben sumar dos veces el mismo número, por ejemplo: 8+8= 16 y 16+16=32. Así también saben que deben recurrir a la tabla del 2 para hacer más simple el proceso. Pocos son los que realizan la representación de la casa con sus medidas a la mitad, al ver esto, se hacen preguntas orientadoras cómo: ¿Cuál es la mitad de

<table>
<tr>
<td>

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN

Cuando lo estudiantes tenían duda sobre mitad o doble, se hacían preguntas orientadoras como: ¿Cuál es el doble de dos? ¿Cuál es del doble de 3? Y así sucesivamente, en principio los estudiantes sabían cuál era el doble, pero no como lo obtenían, finalmente deducían que era el mismo número sumado dos veces, así mismo para hallar la mitad buscaban dos números que sumados dieran el número que necesitaban.

Otro argumento era que iban a mirar la tabla del dos para hallar el doble, pero para hallar la mitad no hubo acercamiento a la división en ninguno de los casos.

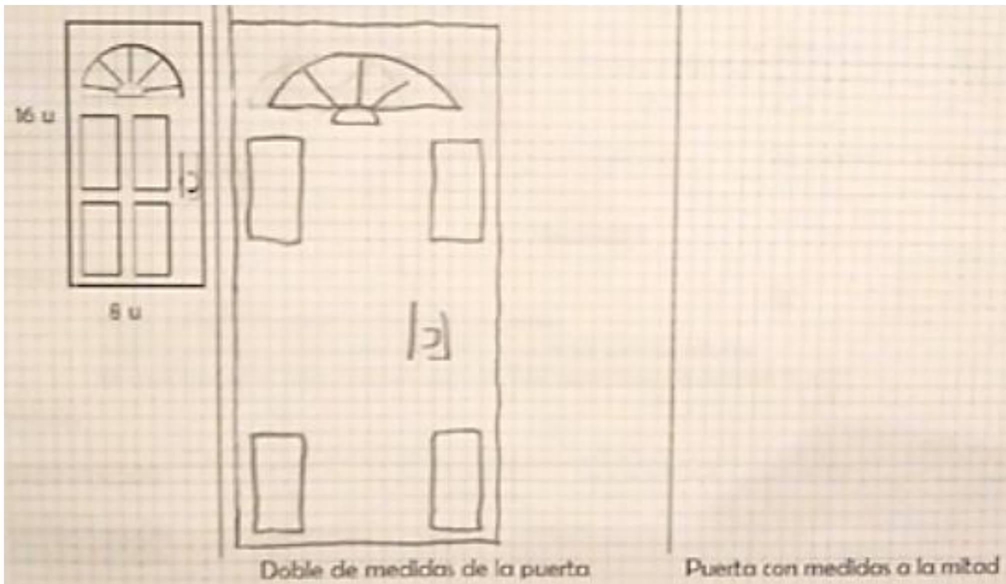
CATEGORÍA ALGORÍTMICA

Los estudiantes realizaban la suma reiterada dos veces, o recordaban la tabla del dos.

</td>
<td>

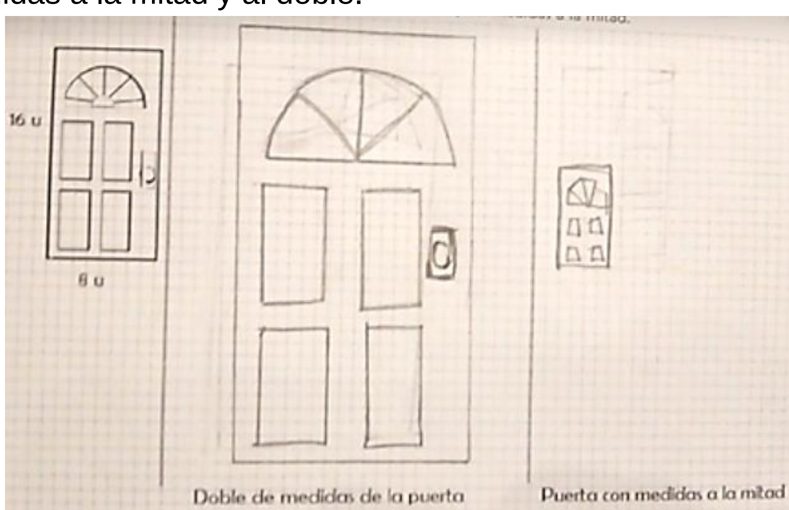
2, 4, 6, 8 y 10? Los estudiantes daban la respuesta correctamente, así concluían que debían buscar un número que al sumarlo dos veces obtuvieran el pedido, por ejemplo, para hallar la mitad de 6, buscaban por ensayo y error 2+2=4 y luego llegaban a la respuesta 3+3=6.

En el mejor de los casos (según el colegio) ocurría lo descrito anteriormente, pero ningún estudiante (en ningún colegio donde se realizó la prueba piloto) dijo que debía dividir el número en 2 para obtener el resultado.



El estudiante realiza las dos representaciones correspondientes al doble y la mitad de las medidas de la puerta.

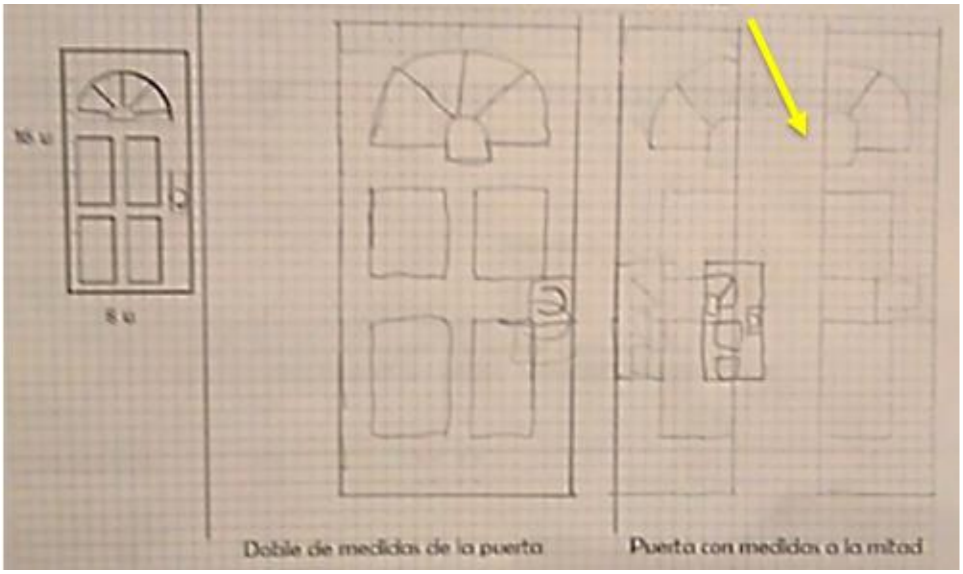
Varios estudiantes realizaron la representación de la puerta teniendo en cuenta sus medidas a la mitad y al doble.



</td>
</tr>
</table>

Tabla 5. Análisis de resultados punto 1, diagnostico 2.

Hubo un caso aparte en que el estudiante dibujo la mitad de la puerta, es decir, la partió a la mitad, luego calló en cuenta de que era la mitad de las medidas. Es decir que la idea de mitad la tenía, sin embargo, su representación responde a la mitad de la puerta, no a la mitad de las medidas, lo que sugiere que el estudiante requiere precisión en la interpretación del problema, pero los conocimientos previos los tiene.



Gracias a este diagnóstico se pudo notar la necesidad de que se refuerce situaciones donde el estudiante perciba evidentemente que el doble y mitad son procesos inversos, así poco a poco ir construyendo conceptos como proporcionalidad directa e inversa.

PUNTO 2: GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Si bien en este punto no se esperaba que los estudiantes llegaran a una generalidad, o a manifestar lo indeterminado con un lenguaje simbólico formal, si era de interés, percibir cómo los estudiantes se referían a la lo indeterminado, además identificar que habilidades manifestaban por medio de su representación acerca de lo que Stacey (1989) citada en Callejo, Garcia-Reche y Fernández (2016, p.8) llama:

- ❖ Generalización cercana: Refiere al siguiente término de la sucesión, o los términos que pueden ser encontrados por medio del recuento.
- ❖ Generalización Lejana: Por referirse a una posición distante y el recuento resulta dispendioso, sea hace necesario encontrar el patrón o regla general.

<table>
<tr><th>Categorías y Descripción</th><th>Análisis según pruebas piloto</th></tr>
<tr><td>

CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN

Este punto permitió que los estudiantes identificaran que debían buscar la cantidad de puntos en cada posición que respondiera a una regla general. Así, fue necesario dibujar en el tablero el patrón para que entre todos los estudiantes visualizara, y dieran ideas que les permitiera analizar mejor la regla general.

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN

Para esta categoría se tuvo en cuenta algunos aspectos del desarrollo del proceso del pensamiento algebraico (Radford, 2011; 2014; Rivera, 2010; Vergel, 2014; Warren, 2005) citados en Callejo, Garcia-Reche y Fernández (2016) dicen que uno de estos aspectos es la *coordinación entre la estructura espacial y numérica,* es decir, para que el estudiante continúe con el patrón debe cumplir con las siguientes estructuras:

-Espacial: Debe haber distribución de los elementos de las figuras.

-Numérica: Número de elementos que componen cada figura.

Efectivamente algunos estudiantes lograron representar gráficamente el patrón teniendo en cuenta lo anterior, y otros solamente tuvieron en cuenta la estructura numérica.

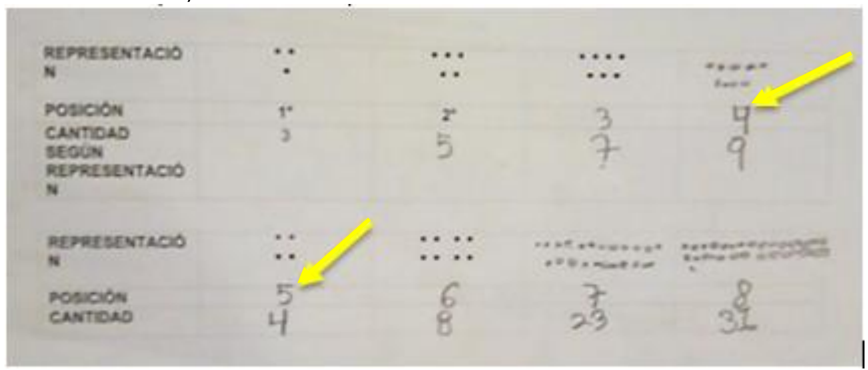
CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN

La argumentación que los estudiantes daban era verbal en su mayoría, éstas eran conjeturas que le permitían avanzar en el hallazgo de la regla general. Pues

</td><td>

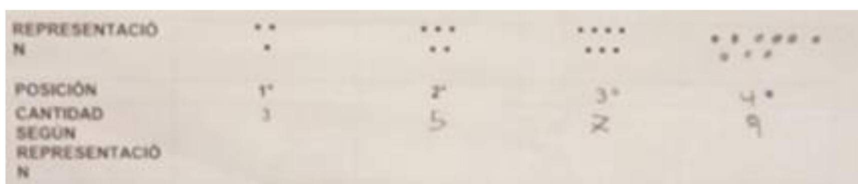
Confusión ocasionada por el material didáctico

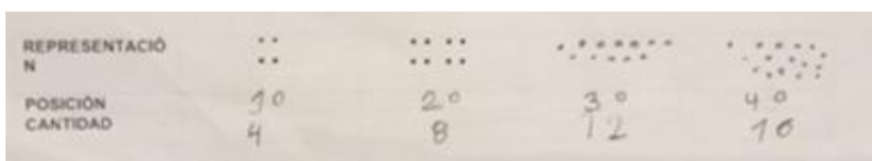
Como se dijo anteriormente la primera guía diagnóstica fue cambiada porque los estudiantes interpretaron cada una de las tablas como una sola tabla, por lo tanto, si el estudiante comenzaba bien con el análisis del patrón se confundía, a continuación, la evidencia del error didáctico.



El estudiante reconoce la cantidad de puntos que debe haber según la posición, pero no hay una relación con la representación gráfica.

La representación hace evidente la estructura numérica pero no la espacial (Radford, 2011; 2014; Rivera, 2010; Vergel, 2014; Warren, 2005) citados en Callejo, Garcia-Reche y Fernández (2016)





El estudiante logra la representación correctamente sin expresar que conoce el patrón.

La mayoría de los estudiantes logró hacer la representación teniendo en cuenta la estructura numérica y espacial, sin embargo, no daban cuenta de la generalidad lejana, pues esto sugiere que el estudiante comience a referirse a lo indeterminado.

</td></tr>
</table>

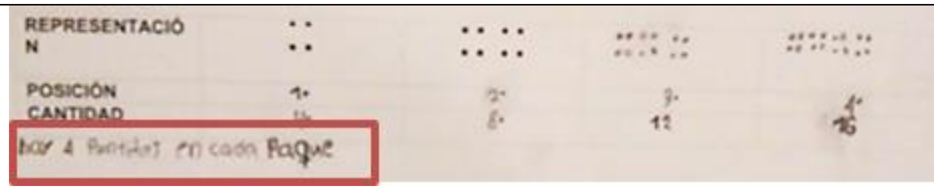
realizaban la representación de la siguiente posición, pero les costaba dar la razón de porqué sabían que era exactamente esa representación. **CATEGORÍA ALGORÍTMICA** Si bien los estudiantes lograban implícitamente reconocer el patrón, no todos lograban crear un algoritmo de solución. Sin embargo, otros creaban algoritmos de multiplicación sin necesidad de escribirlo en un lenguaje formal.	 En el caso de la imagen, una estudiante argumentó que “hay 4 puntos en cada paquete” de esto se puede interpretar la analiticidad, según Radford (2010) citado en Vergel (2015) la analiticidad es la “forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos”.

Tabla 6. Análisis de resultados punto 2, diagnostico 2.

PUNTO 3: BIDIRECCIONALIDAD DEL SIGNO IGUAL.

Este punto fue realizado considerando dos aspectos:

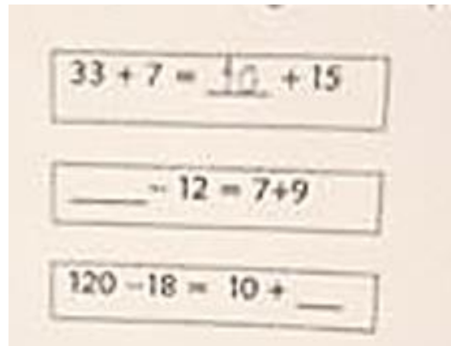
- ❖ En primer lugar, analizar cómo veían los estudiantes el signo igual pues Behr, Erlwanger y Nichols (1976) citados en Parodi, Ochoviet y Lezama (2017) distingue la interpretación de manera operacional (cuando el signo igual es un indicador de respuesta de una operación) y de manera relacional (signo igual como indicador de equivalencia)
- ❖ En segundo lugar, se quería analizar la estructura aditiva, en el caso de que los estudiantes pueden obtener la misma cantidad de elementos a un lado del igual que al otro, utilizando la adición o sustracción según convenga para conservar la equivalencia. Según Castro, Castro y Rico (1995)

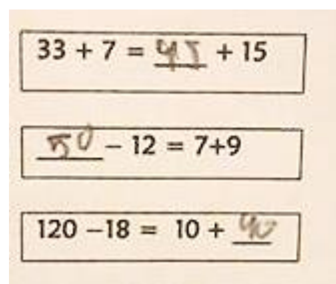
> *“…los niños no reconocen que el efecto de añadir elementos a una colección pueda ser neutralizado separando el mismo número de elementos y que añadir elementos a una colección equivalente a otra puede compensarse añadiéndole a la otra el mismo número de elementos”. (p.28).*

<table>
<tr><th>Categorías y Descripción</th><th>Análisis según pruebas piloto</th></tr>
<tr><td>
CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN
En esta categoría la mayoría de los estudiantes dio por hecho que el signo igual indicaba dar solución, en lugar de ver el signo igual como una representación de equivalencia. Por tanto, el diagnóstico evidenció que los estudiantes no tienen clara la direccionalidad del igual.

CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN
En esta categoría los estudiantes sitúan el resultado de la operación sobre la línea.

CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN
El estudiante verbaliza que el número sobre la línea es resultado del otro lado del igual. Para los demás resultados

CATEGORÍA ALGORÍTMICA
En esta categoría se puede identificar las habilidades en la estructura aditiva del estudiante, considerando que para los estudiantes hay mayor dificultad en el proceso de sustracción que en el de adición.
</td><td>
El signo igual no representa una relación de equivalencia.
Como se dijo anteriormente el estudiante ve el signo igual de manera operacional, además en algunos casos por haber resta, represento una diicultad mayor, como la siguiente evidencia donde el estudiante se abstiene de responder.


O el siguiente caso donde el estudiante evidencia dificultad en la estructura aditiva, tanto en adición como sustracción por el hecho de considerarlos como número muy grandes.


</td></tr>
</table>

Tabla 7. Análisis de resultados punto 3, diagnostico 2.

PUNTO 4: ACTIVIDADES DE ESTRUCTURA ADITIVA Y MULTIPLICATIVA.

Este último punto fue pensado en situaciones problema que pudieran dar evidencia de la comprensión de lectura de los estudiantes, su habilidad para reconocer el carácter operatorio de cada situación si este corresponde a adición, sustracción, multiplicación o división, además de la representación que evidenciaran.

Al crear las situaciones problema se tuvo en cuenta el primer encuentro con los estudiantes, el que llamamos reconocimiento, éste dio una pauta para poder hacer los problemas relacionados con el entorno de los estudiantes, pues Nesher *citada en Castro, Castro y Rico (1995)* “critica el hecho de no estar dados en lenguaje ordinario y no tener relación con las experiencias de los niños*”*. También se tuvo en cuanta que según Castro, Castro y Rico (1995) la resolución de problemas aritméticos puede estar condicionada por algunas variables, por ejemplo:

- La manera como esta presentada la información. (Expresión, representación, cantidad de datos, entre otros)
- Los datos numéricos que proporcione el problema
- Contexto real o no de la situación.
- Extensión de la pregunta, sí es todo el enunciado o solo una parte de este.

Situación 1:

El colegio SaludCoop y 7 colegios más se inscribieron en un torneo de fútbol. Cada colegio eligió a 23 de sus mejores estudiantes para que jugaran y los representara. ¿Cuántos estudiantes en total fueron al torneo de fútbol?

Esta situación fue pensada en la estructura multiplicativa *grupos iguales,* se este modo la cantidad de grupos son los 8 colegios, y el tamaño de cada grupo es la cantidad de estudiantes, es decir 23 estudiantes. Así el resultado es el total de elementos.

Situación 2:

La mamá de Sebastián le regaló 16 videojuegos para que disfrutará luego de hacer cada una de sus tareas del colegio. Sebastián ha jugado 5 videojuegos ¿Cuántos le faltan por jugar?

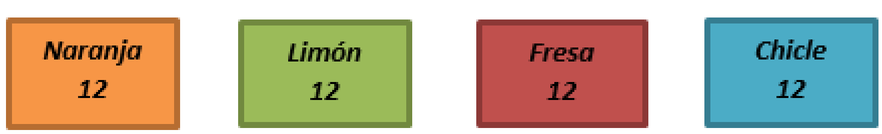
Esta situación corresponde a la estructura de adición correspondiente a *Igualación,* pues se pregunta "Cuánto falta" es decir los videojuegos faltantes por jugar para completar la colección de videojuegos.

Situación 3:

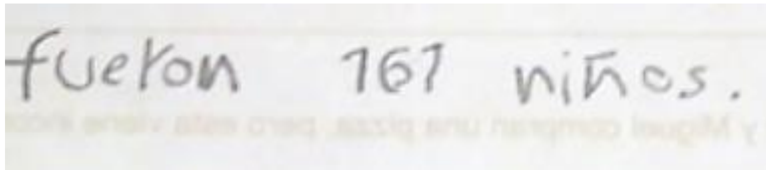
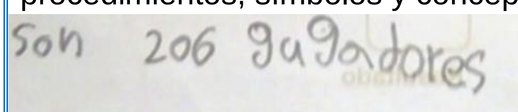
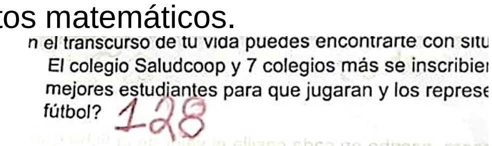
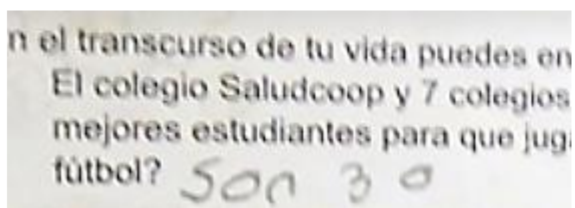
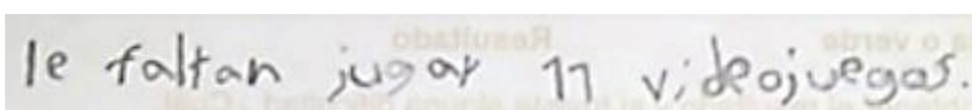
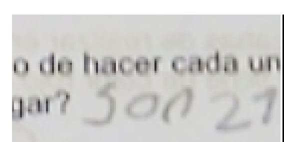
Emily participó en las olimpiadas de ajedrez de su colegio, ella obtuvo como premio una caja sorpresa. Esta caja sorpresa tenía golosinas de los siguientes sabores: Naranja, limón, fresa y chicle. Sí por cada sabor había 12 golosinas ¿Cuántas golosinas ganó Emily en total?

Si Emily hubiera ganado la mitad de golosinas por cada sabor ¿Cuántas golosinas tendría en total?

La situación anterior fue pensada igual que el anterior en *grupos iguales*, pues cada uno de los cuatro sabores tenía 12 golosinas, para hacer más explícito lo anterior ver imagen ____

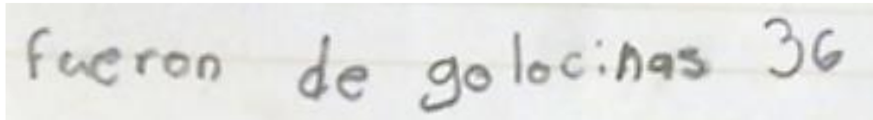


Para la segunda pregunta *Si Emily hubiera ganado la mitad de las golosinas por cada sabor ¿Cuántas golosinas tendría en total?* Es suficiente con que el estudiante halle la mitad del resultado final o halle la mitad de cada grupo y este lo multiplique por 4.

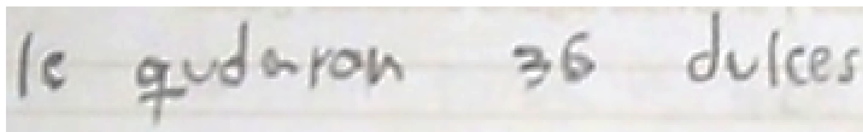
Categorías y Descripción	Análisis según pruebas piloto
CATEGORÍA DE COMPRENSIÓN Estas situaciones se enfocaban en la comprensión del enunciado por parte del estudiante, en cuanto a la comprensión de lectura y la habilidad de distinguir la operación matemática que a la que la situación se refería. **CATEGORÍA DE REPRESENTACIÓN** La representación hecha por los estudiantes en general fue manifestar la respuesta, pero no evidenciaron el método de solución o la estrategia que utilizaron para llegar a la respuesta. **CATEGORÍA DE ARGUMENTACIÓN** En la mayoría de los casos, los estudiantes argumentaban de manera verbal que recurrían a la suma. Se solicitó que escribieran y justificaran la estrategia de solución. **CATEGORÍA ALGORÍTMICA** En estas situaciones hubo comprensión general de la operación que pedía el problema, una vez entendido este, el método de solución que utilizaron los estudiantes en la mayoría de los casos fue el algoritmo de multiplicación y sustracción. Es decir que el proceso de construcción de estos conceptos ya se ha hecho.	***Situación 1*** Esta situación hizo que la mayoría de los estudiantes utilizará el algoritmo de multiplicación, resolviéndolo correctamente, sin embargo, no tuvieron en cuenta que el enunciado decía, el colegio SaludCoop es decir un colegio ya incluido y 7 colegios más, en total serían 8 colegios. De manera que los estudiantes se guían por los números que ven en el enunciado, pero no detallan la información.  También hubo casos donde el estudiante asumía que había nueve colegios, de nuevo por la carencia de interpretación en la lectura, además presentó error en el algoritmo. Según Radatz (1979) (citado por Rico, 1995) citado en Del Puerto y Seminara (2004) clasifica algunos errores, uno de estos corresponde a un aprendizaje deficiente de los hechos, conceptos o destrezas previos, se refiere precisamente al que ocurre en este caso como deficiencias en el manejo de algoritmos, también refiere a las deficiencias en hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.   Hubo un caso en que el estudiante solo sumo cada número del enunciado.  ***Situación 2*** Esta situación en la mayoría de los casos no presentó ninguna dificultad, pues para los estudiantes fue sencillo aplicar el algoritmo de sustracción y comprender la intención del problema.  Hubo un caso en que el estudiante solo sumo cada número del enunciado. 

Situación 3

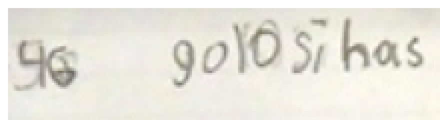
De manera similar a la situación 1, los estudiantes manifiestan no tener compresión de lectura de manera que efectúan el algoritmo 3 cajas x 12 golosinas= 36 golosinas, cuando en realidad son 4 cajas.



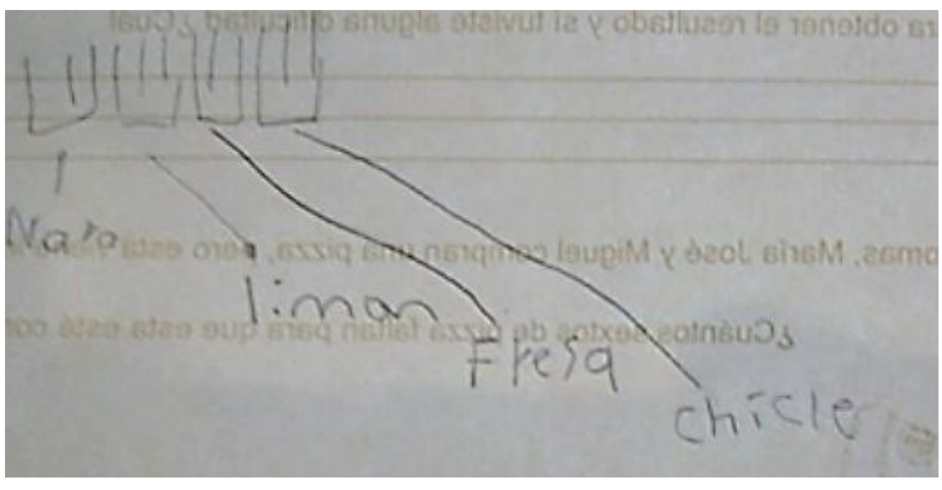
Un caso en particular, donde los estudiantes dicen "quedaron 36 golosinas" la palabra *quedaron* da a entender que hay una reducción de la cantidad total, sin embargo, el estudiante utiliza el termino indistintamente.



En algunos casos hubo buena interpretación del enunciado, pero errores en el algoritmo.



Otros estudiantes intentaron hacer la representación gráfica pero no lograron concluir.



Se hace la aclaración que este último punto fue realizado a estudiantes de grado cuarto, por motivos de la disposición de cursos en el Colegio donde se realizó la prueba piloto, además se realizó en grupos de dos estudiantes para observar el intercambio de ideas entre los niños.

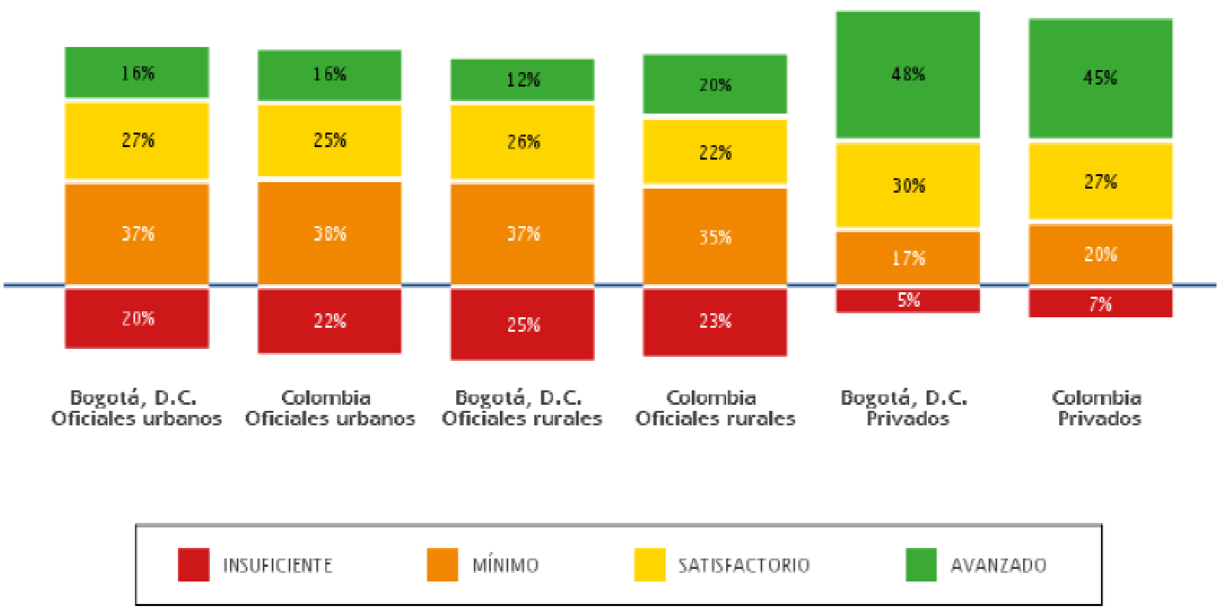
Tabla 8. Análisis de resultados punto 4, diagnostico 2.

En conclusión, los resultados de los diagnósticos evidencian la necesidad de trabajar para reforzar en los siguientes aspectos:

- Lectura e interpretación de tablas de frecuencia.
- Uso de nociones topológicas respecto a un objeto.
- Calculo del término desconocido en proporciones directas en contextos de medida.
- Determinación de posibilidad e imposibilidad de eventos.
- Concepción de doble y mitad de manera ligada y como procesos inversos.
- Procesos de generalización es fundamental trabajar los tipos de representación espacial y numérico, así, cuando el estudiante realice el análisis tenga precisión en los datos que ha hallado.
- Es necesario reforzar las situaciones problema, pues es frecuente que los estudiantes realicen las tareas de tipo procesual, pero al encontrarse una situación no saben qué tipo de operación matemática realizar. Lo anterior, se da porque en el aula frecuentemente se deja de lado lo conceptual, y el estudiante comienza a perder el sentido de lo que está aprendiendo.

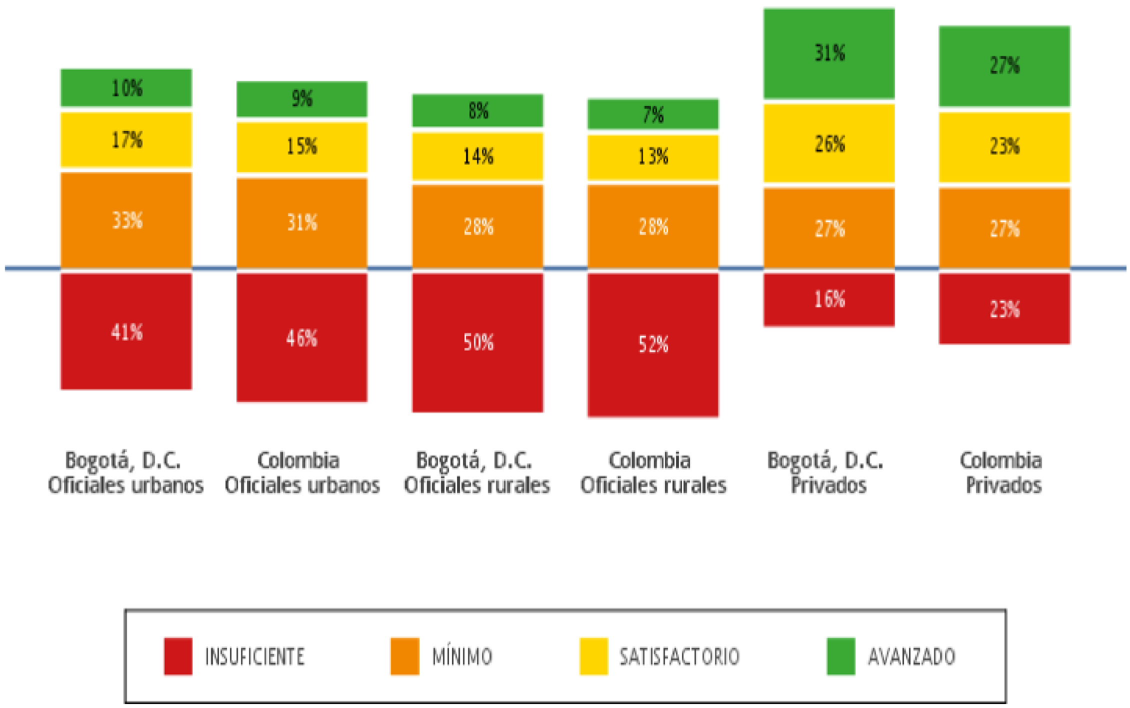
Además de lo encontrado en los anteriores diagnósticos, podemos observar los resultados de las pruebas saber de grados tercero y quinto en matemáticas del año 2017.

Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en la entidad territorial certificada y el país por tipos de establecimientos en matemáticas, tercer grado.



(ICFES, 2017)

Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en la entidad territorial certificada y el país por tipos de establecimientos en matemáticas, quinto grado.



(ICFES, 2017)

Encontramos que en grado tercero el 57% de estudiantes de colegios oficiales a nivel Bogotá, se encuentran en nivel insuficiente o mínimo, solamente un 16% se encuentran en un nivel avanzado; en cuanto a grado quinto el 74% de los estudiantes de colegios oficiales a nivel Bogotá, se encuentra en nivel insuficiente o mínimo, tan sólo el 10% se encuentra en nivel avanzado.

ACTIVIDADES DE INTERVENCIÓN

Partiendo de los resultados de las pruebas diagnóstico anteriormente analizadas y de los resultados del ultimo año de las pruebas saber de grados tercero y quinto, se crean las siguientes actividades de intervención, para el desarrollo del pensamiento lógico- matemático en grados tercero, cuarto y quinto para ser implementadas por profesores de colegios públicos en Bogotá.

ACTIVIDAD 1 CARRERA DE OBSERVACIÓN "JUGANDO EN EL PARQUE"

Recursos: Lazos, cinta métrica, tiza, cuaderno, cartuchera y regla.

Tarea 1: ¿Quién es el más veloz saltando?

Vamos a saltar lazo durante un minuto. Gana en cada pareja quien realice más saltos en dos de tres rondas.

Esta prueba se desarrolla en parejas, se realizan tres rondas, en cada ronda hay dos turnos de un minuto; en el primer turno un estudiante salta lazo mientras el otro registra la cantidad de saltos completos y en el segundo turno cambian de rol. Gana esta prueba el estudiante que tenga más saltos en dos rondas. El profesor lleva el tiempo y anuncia el inicio y final de cada minuto.

Se les presenta la siguiente tabla, la cual deben elaborar en parejas para el registro de los datos:

Nombre	**Cantidad de saltos en un minuto.**		
	Ronda 1	**Ronda 2**	**Ronda 3**

Con esta tarea se pretende que los estudiantes registren y comparen datos por medio de tablas de frecuencia. Puede que algunos estudiantes fallen en el conteo y registro de los saltos de su compañero.

Tarea 2: ¿Quién salta más veces de manera continua?

Vamos a saltar lazo, cuentan los saltos que se hacen de manera continua, sin fallar, parar o enredar el lazo. Gana en cada pareja quien realice mayor cantidad de saltos en las tres rondas.

En esta prueba los estudiantes siguen trabajando en parejas, se realizan tres rondas, en el primer turno un estudiante salta lazo mientras el otro registra la cantidad de saltos completos, cambian de turno al fallar, parar o enredar el lazo. Gana esta prueba el estudiante que realice mayor cantidad total de saltos en las tres rondas. El profesor supervisa el desarrollo normal de la prueba en todas las parejas y presenta la siguiente tabla, para el registro y cálculo de los datos:

Nombre	**Cantidad de saltos de manera continua**			
	Ronda 1	**Ronda 2**	**Ronda 3**	**Total de saltos.**

Esta tarea tiene como objetivo que los estudiantes registren y totalicen datos por medio de tablas de frecuencia. En esta tarea puede que algunos estudiantes fallen al totalizar la cantidad de saltos realizados en las tres rondas.

Tarea 3: ¿Cuántos saltos harías en diferentes tiempos?

Teniendo en cuenta el registro de saltos realizados en un minuto de cada ronda. ¿Cuántos saltos posibles realizarían en dos, tres, cuatro, cinco y seis minutos? ¿Encuentras alguna regularidad entre estos datos?

En esta tarea los estudiantes deben tener en cuenta el registro de datos realizados en la primera tarea, pues a partir de estos, deben calcular la posible cantidad de saltos propios y de su compañero que realizarían en dos, tres, cuatro, cinco y seis minutos, asumiendo que mantienen la cantidad de saltos por minuto de la prueba en cada ronda; además de llegar a alguna regularidad entre estos datos. El papel del profesor en esta tarea es el de formulador de preguntas, observador de posibles estrategias de cálculo y validador de resultados. Él presenta a los estudiantes la siguiente tabla para el registro de los cálculos realizados respecto a los datos iniciales:

Nombre	**Ronda**	**Cantidad de saltos en**					
		1 minuto	**2 minutos**	**3 minutos**	**4 minutos**	**5 minutos**	**6 minutos**
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						

Con esta tarea se pretende que los estudiantes calculen el término desconocido en proporciones directas en contextos de medida, (el tiempo en minutos respecto a la cantidad de saltos), además de que realicen procesos de generalización a partir de regularidades entre los datos. En esta tarea puede que algunos estudiantes presenten falencias a la hora de calcular los datos que se piden y a la hora de encontrar regularidades entre estos, o que por el contrario lleguen a alguna generalización.

Tarea 4: ¿Cuál es el salto más largo?

Salto largo en parejas por relevos.

En esta tarea los estudiantes deben saltar largo en relevo con su compañero, de manera que el primero que salte marca con una tiza hasta donde salto y a partir de esa marca salta su compañero, éste marca también el largo de su salto, después usaran la regla para medir la longitud del salto total de la pareja, deben registrar la medida en centímetros. El docente será quien socialice con los estudiantes los datos de todas las parejas para determinar la pareja que más largo salto, ésta será quien gane.

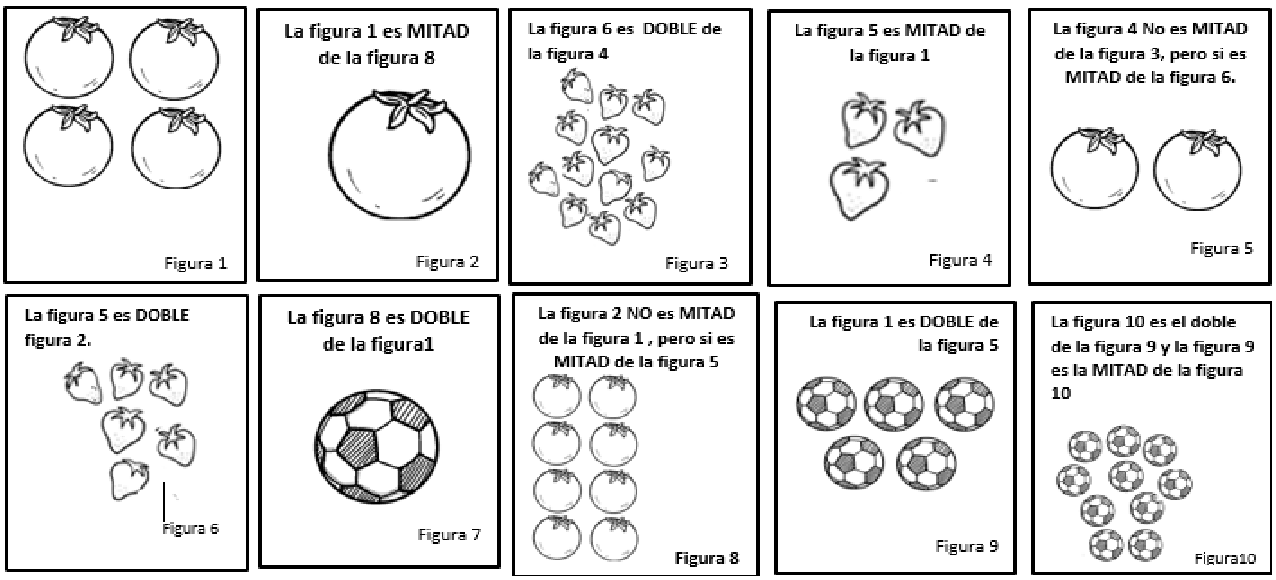
Con esta tarea se pretende que los estudiantes registren y comparen datos que recolectaron midiendo longitud con un instrumento estandarizado como lo es la regla y usando el centímetro como unidad de medida.

ACTIVIDAD 2: LA MAGIA DE LOS NÚMEROS

Recurso: Fichas, palillos, cuaderno y cartuchera.

Tarea 1: Dobles y mitades.

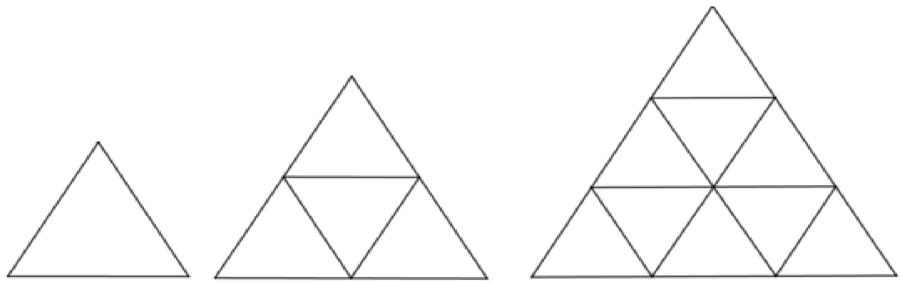
Analiza las siguientes fichas.



Esta tarea pretende desarrollar el pensamiento lógico matemático desde lo relacional, además, es pensado para desarrollarlo en parejas. Dicha actividad se llama DOBLES Y MITADES este juego es una adaptación del juego RASH creado para la enseñanza de semejanza de triángulos (Navia, Sepúlveda y Vega, 2015). A partir de este juego se pretendía relacionar doble y mitad, pues estos conceptos no son aislados, se sugiere que dicha relación sea resaltada en la fase de institucionalización, pues para algunos estudiantes puede no ser tan evidente que una figura es la mitad de otra. El docente entrega a los estudiantes las fichas por separado, ya que estos, deben abstraer el significado de doble y mitad a partir del análisis e interacción con las instrucciones e imágenes del juego.

Tarea 2: El número secreto

A continuación, encontraras la siguiente secuencia



1 2 3 4 ...

Utiliza los palillos que te fueron asignados para continuar la secuencia y responde:

1. *¿Cuántos triángulos hay en la primera posición?*
2. *¿Cuántos triángulos hay en la segunda posición?*
3. *¿Cuántos palillos hay en la tercera posición?*
4. *En el caso de que se te acaben los palillos ¿Cómo sabrías la cantidad de triángulos que hay en la posición 14?*
5. *Realiza una carta a tu mejor amigo o amiga contándole que debe hacer para saber la cantidad de triángulos que hay en cada posición, ten en cuenta que tu amigo o amiga no tiene palillos para hacer la representación.*

Esta tarea fue diseñada para potenciar el pensamiento algebraico por medio de patrones, con preguntas orientadoras que permitan al estudiante hacer el proceso de generalización, y analizar el sentido delo indeterminado. La actividad también fue pensada para realizar la construcción de las figuras con palillos, así, los estudiantes que tienen dificultad con la representación numérica o espacial pueden desarrollar mejor esta tarea.

ACTIVIDAD 3: JUGANDO CON PACMAN

Recursos: Guías y tablero de juego.

Tarea 1: Atrapando fantasmas.

Ayuda a Pacman a atrapar a los fantasmas y responde las siguientes preguntas:

(20 Minutos, 2008)

a. *¿Qué movimientos debe hacer Pacman para comerse al fantasma azul? Descríbelos.*
b. *¿Qué movimientos debe hacer Pacman para comerse al fantasma rojo? Descríbelos.*
c. *¿Qué movimientos debe hacer Pacman para comerse al fantasma morado? Descríbelos.*

En esta tarea el estudiante observa y describe los movimientos que debe realizar pacman para cumplir con cada objetivo “atrapar a los fantasmas”, dentro de este proceso el estudiante puede hacer uso de nociones topológicas como derecha, izquierda, arriba, abajo y ejercitar algunos movimientos en el plano como giros y translaciones. El docente entrega la guía o tablero de juego a cada estudiante y en ella responde las preguntas.

Esta tarea tiene como finalidad afianzar el uso de nociones topológicas respecto a un objeto.

Tarea 2: Rescatar a la señora Pacman.

Observa las imágenes y completa la frase con las palabras “posible” o “imposible” según corresponda:

Tablero 1

(20 Minutos, 2008)

Tablero 2

(20 Minutos, 2008)

Pacman tiene que rescatar a la señora Pacman y para ello no puede atrapar o atravesar a ningún fantasma.

a. *Que Pacman rescate a la señora Pacman en el tablero 1 es algo ____________. En caso de ser posible, describe sus movimientos para llegar a ella.*

b. *Que Pacman rescate a la señora Pacman en el tablero 2 es algo ____________. En caso de ser posible, describe sus movimientos para llegar a ella.*

Compara tus respuestas con un compañero.

En esta tarea el estudiante debe observar las imágenes para determinar en cada caso es si posible o imposible y generar la descripción de los movimientos en el tablero para llegar a la señora Pacman en el caso de que sea posible, con la condición de que Pacman no puede atrapar o atravesar a ningún fantasma. El docente en esta tarea debe ser quien presente la guía de manera individual y luego controle la parte organizacional de los estudiantes al realizar la comparación de los resultados entre pares. Puede que algunos estudiantes caigan en el error de no hacer una debida comprensión de lectura de el enunciado y se confundan con la tarea 1.

En objetivo de esta tarea es que el estudiante determine la posibilidad e imposibilidad de eventos y el uso de nociones topológicas respecto a un objeto, en este caso Pacman.

Tarea 3: Fin del juego.

Ayuda a Pacman y a la señora Pacman a cumplir con la misión de comer todas las galletas y atrapar a los fantasmas para ganar el juego.

(20 Minutos, 2008)

En esta tarea el docente puede imprimir o dibujar el tablero de juego grande, para realizar una socialización de posibles estrategias para cumplir con la misión del juego la cual es que Pacman y la señora Pacman coman todas las galletas y atrapar a los fantasmas para ganar el juego; por medio de una competencia, puede ser entre géneros, atribuyendo a un grupo el personaje de Pacman y al otro el de la señora Pacman.

A su vez, es posible realizar una institucionalización de nociones topológicas y de movimientos en el plano, tales como rotación, translación y simetrías de manera participativa y guiando a los estudiantes a que lleguen a estos conceptos.

BIBLIOGRAFÍA

BOUREL, F. (1995). MANIPULAR, ORGANIZAR, REPRESENTAR. MADRID: NARCEA.

BROUSSEAU G. (1986). FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, FACULTAD DE MATEMÁTICA ASTRONOMÍA Y FÍSICA, SERIE B, TRABAJOS DE MATEMÁTICA, NO. 19 (VERSIÓN CASTELLANA 1993).

CALLEJO, M.J., GARCÍA-RECHE, A., & FERNÁNDEZ, C. (2016). PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA (6-12 AÑOS) EN PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES LINEALES. AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10, 5 – 25.

CASTRO E., CASTRO, E. Y RICO, L. (1995) ESTRUCTURAS ARITMÉTICAS ELEMENTALES Y SU MODELACIÓN. UNA EMPRESA DOCENTE- GRUPO EDITORIAL IBEROAMÉRICA. BOGOTÁ.

D'AMORE (2006) DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. BOGOTÁ. COLOMBIA: EDITORIAL MAGISTERIO.

GODINO, BATANERO Y FONT (2003) "FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS" UNIVERSIDAD DE GRANADA.

GODINO, D. CID, E & BATANERO, C. (2004) "DIDÁCTICA PARA MAESTROS". UNIVERSIDAD DE GRANADA.

GODINO, D. CID, E & BATANERO, C. (2004) "MATEMÁTICAS PARA MAESTROS". UNIVERSIDAD DE GRANADA

ICFES. (2017). ICFES INTERACTIVO. OBTENIDO DE HTTP://WWW.ICFESINTERACTIVO.GOV.CO/REPORTESSABER359/PAGINASINTERMEDIASBUSQUEDAAVANZADA/PAGINAENTIDADTERRITORIAL.JSPX

KAPUT, J.J. (1987). REPRESENTATION SYSTEMS AND MATHEMATICS. IN JANVIER (ED.), PROBLEMS OF REPRESENTATION IN THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS, 19-26. HILLSDALE: LEA.MADRID, ESPAÑA

COLOMBIA., MEN (1998). SERIE LINEAMIENTOS CURRICULARES. RECUPERADO DE: HTTP://WWW.MINEDUCACION.GOV.CO/CVN/1665/ARTICLES-89869_ARCHIVO_PDF9.PDF

MEN. (2006). Estándares Básicos de Matemáticas: Los cinco procesos generales de la actividad matemática. Recuperado el 23 de marzo de 2018, de Ministerio de Educación Nacional, disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
MEN. (2006). Estándares Básicos de Matemáticas: Los cinco procesos generales de la actividad matemática. Recuperado el 23 de marzo de 2018, de Ministerio de Educación Nacional, disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
Molina, Marta (2009) Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación `primaria.

PANIZZA. Mabel. II Conceptos básicos de la teoría de situaciones Didácticas. Recuperado el 23 de marzo de 2018. Disponible en http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Parodi, S., Ochoviet, C., Lezama, J., (2017) La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. Enseñanza de las Ciencias, 35.3, pp. 51-67

Piñeiro, J., Pinto, E. y Díaz-Levicoy, D. (2015) ¿Qué es la resolución de problemas? EDITORIAL Revista Virtual Redipe: Volumen 2.

Sánchez & Fonseca (2012) Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano (pág. 46)

Vergel, R. (2015) Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9(3), 193-215.

Vergel, R. (2016) Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

20 Minutos. (29 de 04 de 2008). Obtenido de https://www.20minutos.es/videojuegos/noticia/parche-para-pacman-374174/0/