DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA A PARTIR DEL ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LA DERIVADA EN LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO

LINA PAOLA HERNÁNDEZ COBOS
YENY CATHERINE SUAREZ SUSA

UNIVERSIDAD FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2018

DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA A PARTIR DEL ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LA DERIVADA EN LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO

LINA PAOLA HERNÁNDEZ COBOS

YENY CATHERINE SUAREZ SUSA

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

ALBERTO FORERO POVEDA

MAGISTER EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2018

Contenido

Tabla de Ilustraciones

INTRODUCCIÓN

La idea de nuestro trabajo "**Diseño de una actividad de enseñanza a partir del análisis de prácticas matemáticas asociadas a la derivada en los fundamentos del cálculo**" se desarrolló en el marco de la práctica docente a partir de evidenciar dificultades en los estudiantes en torno a la interpretación de la derivada, quienes conocen el algoritmo pero no identifican conceptos básicos de este concepto. En el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, algunos estudiantes resuelven muchos problemas y ejercicios y ganan exámenes del área, pero este hecho no garantiza la real comprensión de los conceptos Matemáticos utilizados, ya que muchas actividades evaluativas no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico.

Por tanto el objetivo de este trabajo ha sido identificar prácticas que llevaron a matemáticos a plantear las bases y el desarrollo para la consolidación del cálculo diferencial. La intención de tomar la historia de la matemática como base de investigación y ayuda en el desarrollo de procesos de enseñanza se da a partir de ideas como la de Dolores (2007) que nos dice "para que una persona alcance el nivel de pensamiento que alcanzaron varias de sus generaciones precedentes es necesario que pase aproximadamente por las mismas experiencias de sus antepasados".

Es por ello que se propone una actividad que involucra los tres discursos o ideas en los fundamentos del cálculo establecidas en el análisis previo, con el propósito de identificar en los estudiantes prácticas infinitesimales, geométricas y movimiento. Esta actividad se muestra como un instrumento de ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto derivada a partir de las nociones que poseen los estudiantes.

En el presente documento mostramos algunos trabajos en los que se evidencian propuestas de aprendizaje de la derivada haciendo uso de la historia, se establecen los factores que dieron lugar a la problemática para lo cual es necesario una clasificación de información a partir de un análisis de contenido, seguidamente se encuentra la actividad diseñada, piloteada y finalmente mostramos nuestros análisis y conclusiones al respecto.

1. ANTECEDENTES

Remitiéndonos a las formas de enseñanza del cálculo diferencial utilizadas a lo largo de la historia en la escuela, González (1999) menciona tres modos diferentes de abordar la derivada, las cuales según él se muestra una urgencia de los profesores por que los alumnos aprendan a derivar

1. Como un procedimiento algorítmico conocido con el término de regla de los cuatro pasos.
2. Como un proceso al límite que consiste en llevar una recta secante a una recta tangente, la cual es muy popular en los libros de texto y también muy utilizada por los docentes, pues tal parece que ellos sólo reproducen lo que ya está escrito en otra parte, o bien lo que en su momento hicieron en sus apuntes del pasado, haciendo sólo pequeñas modificaciones al respecto.
3. Como un proceso tendencial de llevar una velocidad promedio a una velocidad instantánea, en este caso solo algunos libros introducen derivada como un problema relativo a la velocidad (González, 1999).

Estas formas de enseñanza evidenciadas en las aulas escolares, según Serna, Castañeda, & Montiel (2012) dan alta importancia a la enseñanza de la teoría y/o en su defecto al uso de estrategias algebraicas para llegar a resultados, lo cual no implica la construcción de conocimiento impidiendo en los estudiantes saber reconocer cuando un problema requiere del uso de algún objeto matemático determinado. Es decir:

> La enseñanza reduce este asunto al nivel de la algoritmia… Ello conduce a una utilización de la definición de la derivada como regla*...”* (Cantoral R. , Farfán, Cordero, & et, 2000).

Por otro lado no se le da importancia a los aspectos visuales como es el caso de las gráficas por considerarse como algo no formal siendo vista la interpretación geométrica de la derivada como una aplicación de la misma y no como el problema que le dio origen (Cantoral, 1988).

Al respecto, Zapico (s.f) establece que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden “contextualizarla y humanizarla” viendo así la matemática como un producto de la actividad humana. Una manera de realizar esa contextualización es identificando el desarrollo de los objetos desde un aspecto histórico lo cual permite al estudiante establecer significado y una mayor comprensión de conceptos y teorías (Barbin & et al, 2000). Tomando palabras de Farfán (1983, citado en Cantoral, 2001) que dice

> …existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible la construcción de un concepto, todos esos andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto para acceder al concepto, andamiajes con vida efímera que circunstancialmente son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto…

A continuación encontramos algunos trabajos que se caracterizan por el tratamiento de la derivada y el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas:

La recta tangente: Notas históricas y actividades para el aula (Martinez de la Rosa, 2009)**,** éste artículo parte de las dificultades que la mayoría de alumnos presentan al momento de identificar la derivada por medio de alguna representación (geométrica) más allá de utilizar la derivada (algoritmo) para hallar la tangente a un curva, a partir de esto plantea una serie de ejercicios o actividades relacionadas con la tangente evitando el cálculo de la ecuación y haciendo uso de subtangentes y rectas de Descartes. La autora estructura sus actividades en tres momentos: exploración, enunciado y prueba guiada teniendo como referencia el desarrollo histórico del concepto (tangente) desde los Griegos hasta Fermat estableciendo que la derivada primero fue usada, seguidamente descubierta, explorada, desarrollada y por último definida.

Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción de límite (Lozano Robayo, 2011)**,** el propósito de este trabajo de grado es describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción de límite, planteando una propuesta didáctica para la enseñanza de este concepto a partir de cociente de incrementos para estudiantes de último año de secundaria y primeros semestres de universidad, con el objetivo de lograr que los estudiantes se apropien del concepto de derivada más allá de su esquema algorítmico que entre otras cosas es generador de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto, y así hallar aplicabilidad en el contexto.

Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de universidad (Vrancken & Engler, 2014)**,** esta investigación plantea una secuencia didáctica enmarcada en la línea de pensamiento y lenguaje variacional con una metodología de ingeniería didáctica, el propósito de estas actividades fue analizar qué cambia, cómo, cuánto cambian, además de estudiar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio; es decir, identificar nociones fundamentales relacionadas con la derivada desde la variación: el cambio, la razón promedio y la razón instantánea de cambio a través de diferentes registros. Éste trabajo ayudó a que los alumnos utilizaran ideas, estrategias y procedimientos relacionados al pensamiento variacional promoviendo la comprensión de la derivada.

También podemos citar algunos trabajos centrados en la importancia del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas:

Gómez, Guacaneme (2011) en su artículo **"la historia de las matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones"** habla de la importancia de la historia de las matemáticas en la constitución del conocimiento, sosteniendo que el estudio de la historia matemática por parte de los profesores, permite una concepción diferente sobre las matemáticas, afirmando que a través de la historia matemática se logra modificar la estimación del mundo de las matemáticas, promoviendo el desarrollo de competencias personales y profesionales que van más allá del conocimiento matemático. Aceptando que el conocimiento de la historia matemática debería hacer parte integral del aprendizaje de las matemáticas porque sin esta su proceso de enseñanza no se considera autentico (Heiede 1992; 1996)

Por otro lado, Bello & Forero (2016) en su libro "***el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas***" muestran el estudio realizado en un curso de Álgebra Geométrica y Didáctica del Álgebra la importancia de pensar la historia de las matemáticas como el espacio de prácticas matemáticas donde surgen aspectos relacionados con el saber de esta ciencia; analizando la práctica matemática desde: el descubrimiento, explicación, formulación, aplicación, justificación y representación. Definen las matemáticas como una práctica social humana que permite visualizar que los objetos matemáticos se conforman en los individuos a partir de una red compleja de sentidos epistemológicos y ontológicos, permitiendo construir un discurso, respecto a los objetos que se usan y, por tanto, a las propias matemáticas; esta práctica social se manifiesta a través de una serie de actividades asociadas al quehacer matemático. Lo anterior sustentado por Glas (2007) afirmando que “Las matemáticas son el producto de una práctica humana común, pero al mismo tiempo este producto es parcialmente independiente de la práctica que la produjo”. Concluyendo que la interpretación de la historia a partir de la idea de prácticas matemáticas facilita un abordaje que sobrepasa las miradas de una historia epistemológica; poniendo en juego las relaciones sobre lo que se espera de las matemáticas socialmente y el desequilibrio que se evidencia en la historia respecto al conocimiento matemático, su validez, rigor, necesidades y conflicto.

2. CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA

Desde la experiencia en las prácticas docentes, eje central de la formación de los estudiantes para profesor de la LEBEM, se ha observado que el proceso de enseñanza de la derivada se ha convertido en un problema, dado que la manipulación y adquisición del concepto se ha dividido en: 1) revisión y mecanización de algoritmos; 2) aplicación en situaciones descontextualizadas (Dolores, 2000), evidenciando junto con el modelo de enseñanza referido por Sena Martinez (2015) el cual afirma que el concepto de derivada es utilizado en las clases de cálculo en las cuales el profesor da una definición, posteriormente resuelve algunos ejemplos con el objetivo de que los alumnos hagan ejercicios similares utilizando como recurso algoritmos para llegar a un resultado sin necesidad que se construyan conceptos por parte de los estudiantes, ya que no hay una justificación del porqué de los pasos a seguir por lo tanto se da un conocimiento procedimental el cual no se justifica y no se establece una conexión con los elementos conceptuales que lo sustentan Andrade, Perry , Guacaneme , & Fernández (2003) y mucho menos se establece una conexión con las practicas matemáticas asociadas a la derivada en sus diferentes interpretaciones generando como lo afirma Sena Martinez (2015) que los estudiantes se mantengan acríticos, sin que puedan percibir de qué forma las matemáticas podrían llegar a ser herramientas con las que puedan percibir la realidad y transformarla, permitiendo únicamente que el estudiante aprenda el nombre del concepto y el procedimiento.

Por ello al usar la matemática como herramienta para percibir la realidad y transformarla, en donde ésta tiene un sentido en el contexto utilizado, nos ha llevado a buscar de donde surgió, viéndola no como un objeto perteneciente a un sistema conceptual sino como un producto de actividades humanas permitiendo un acercamiento a los elementos que constituyen un concepto; soportando esta idea Dolores (2007) nos dice:

> Así pues, el desarrollo histórico de las ideas matemáticas sugiere un camino que pudiera ser explorado en la enseñanza, para que una persona alcance el nivel de pensamiento que alcanzaron varias de sus generaciones precedentes es necesario que pase aproximadamente por las mismas experiencias de sus antepasados.

Es por ello que se propone una actividad en donde se promuevan diversas prácticas que sirvan como fundamento de la derivada, por ejemplo las asociadas al movimiento, el carácter infinitesimal y a las perspectivas geométricas , generando el análisis del concepto, dejando a un lado la idea de que comprender el concepto de derivada es reproducir un algoritmo o mecanizarlo, debido a que los estudiantes no pueden asimilar la compleja estructura de las matemáticas mediante prácticas de memorización las cuales no implican análisis perdiendo en consecuencia una visión de lo que "está detrás" del concepto y sus procedimientos asociados (Cantoral R. , Farfán, Cordero, & et, 2000). Siendo así la transversalidad la que le permitirá al estudiante ver la matemática como una herramienta para la comprensión y modelación de su realidad, siendo un elemento útil en su formación y no simplemente un algoritmo empleado en la clase de matemáticas.

3. OBJETIVOS

3.1.General

Diseñar una actividad de enseñanza basada en la interpretación y análisis de prácticas matemáticas que se identifican e interpretan en los fundamentos del cálculo, asociadas a la derivada.

3.2.Específicos

- Realizar un análisis de contenido de los discursos que presentan los fundamentos del cálculo para identificar prácticas matemáticas asociadas a la noción de derivada.
- Interpretar prácticas matemáticas asociadas a los discursos que fundamentaron la derivada en la construcción del cálculo.
- Identificar los elementos fundamentales de las prácticas matemáticas en los fundamentos del cálculo que pueden ser usados en la enseñanza actual de la derivada
- Realizar un proceso de diseño y pilotaje de una actividad de enseñanza que permita evidenciar el alcance de la relación entre el estudio de las prácticas matemáticas en los fundamentos del cálculo y su enseñanza actual.

4. JUSTIFICACIÓN

Como ejercicio de nuestra labor docente nos preocupamos por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en su totalidad, considerando que la matemática como lo afirma Davis y Hersh (1981) citado por (Ruiz, Alfaro , & Gamboa , APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS, LECCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS., s.f.) Refiere al análisis de situaciones reales y a los procesos para representarlas en una forma simbólica abstracta adecuada, rechazando la propuesta de Thompson (1992) citado por Vilanova (2001) el cual señala que

> Existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido. (Vilanova & et al, 2001)

Teniendo en cuenta estas apreciaciones, a lo largo de las prácticas docentes realizadas en el proceso de formación como estudiantes para profesores en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM) logramos identificar diferentes falencias en la comprensión de la derivada, debido a que como lo afirma Andrade, Perry , Guacaneme , & Fernández (2003) el profesor es el que predomina en la clase , siendo el quien expone, aclara dudas, ilustra, pone énfasis en algunos puntos de instrucciones acerca de los métodos o procedimientos para llegar a los resultados correctos, dejando a un lado a los estudiantes y por ello como lo menciona Sena Martinez (2015) no toma en cuenta el hecho de que es necesario que los estudiantes hagan análisis, inferencias y uso de su razonamiento como un método para determinar lo que es correcto o no a partir de la argumentación. Así que solo se ve al estudiante como un ente receptor y no productor, impidiendo el análisis de sus ideas y la construcción de conocimiento con estas, evidenciando que se realiza un énfasis en los procedimientos algorítmicos y no en el análisis ni la comprensión de estos.

Así que consideramos que una de las formas de mejorar la comprensión de la derivada, es por medio del análisis de las prácticas matemáticas asociadas a la noción de derivada haciendo uso de la historia, ya que como lo afirma Heide (1992;1996 citado por Guacaneme Suaréz, 2011) "no puede haber autentica enseñanza de las matemáticas sin incluir en esta su historia"; debido a que la historia de la matemática posibilita conocer, estudiar y entender prácticas que permitieron el desarrollo y la construcción de un concepto matemático en donde se pueden inspeccionar los principios fundamentales de este razonamiento (Bello Chavez & Forero Poveda , 2016) brindándole un sentido coherente a la derivada.

Considerando esto, se ve la necesidad de que lo anterior no se debe quedar en el papel como una re escritura e interpretación de la historia y las practicas matemáticas, sino que es necesario llevarlo a un aula para que se logre corregir la falta de transversalidad entre el algoritmo y el concepto, por ello consideramos que una actividad es una de las formas de hacer uso de las practicas que fundamentaron la derivada para complejizar la enseñanza actual; pero como lo afirma Bello Chavez & Forero Poveda (2016) eso no implica necesariamente propiciar el recorrido histórico de un concepto sino el análisis de prácticas alrededor de la construcción de las matemáticas que se denotan importantes para comprender aspectos fundamentales de esta por ello la actividad propuesta se enfoca en evidenciar la parte geométrica, infinitesimal y de movimiento que fundamentan el cálculo y sus relaciones entre sí. Adicional a esto involucra el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TICS) por medio del software Geogebra permitiendo como lo afirma Pineda Ruiz (2013) que el estudiante pueda aprender los conceptos matemáticos rápidamente, especialmente aquellos que están relacionados con la derivada de una función ya que tienen contacto directo está y pueden manipularla.

Adicional a esto como lo proponen los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas propuestas por el Ministerio de educación Nacional el estudio de la derivada se debe llevar a cabo en los grados decimo y once, haciendo evidente como lo menciona (Sena Martinez, 2015) su importancia por la relación que guarda con la matemática elemental y la matemática avanzada, así que la actividad diseñada se debe aplicar a estudiantes que estén finalizando el grado decimo o iniciando el grado once.

5. MARCO DE REFERENCIA

5.1.DESARROLLO HISTÓRICO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

El origen del cálculo Entendiéndolo como una forma de trabajo en Matemáticas que pretende desarrollar métodos para resolver problemas de Movimiento, Cuadraturas, Tangencias, Máximos y Mínimos, entre otros, se podría ubicar en la época de las civilizaciones griegas incluso desde antes, haciendo un breve recorrido encontramos que este desarrollo fue motivado por el deseo de resolver cuatro problemas presentes en la época, los cuales describe Ángel Ruiz en su libro "historia y filosofía de las matemáticas"

> El primer problema fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo. El segundo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por superficies. El tercero fue cuando una función alcanza un valor máximo o mínimo y el último problema es asociado a la geometría el cual era calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)

El nacimiento del cálculo –desde su perspectiva moderna- se le atribuye a Newton y Leibniz en el siglo VII desarrollándose en una forma casi que secuencial al solidificarse con ideas propuestas anteriormente. Newton y Leibniz desarrollaron ideas sobre procedimientos infinitesimales previamente planteadas por Barrow y Fermat que a su vez tomaron de sus predecesores Torricelli, Cavalieri, y Kepler, quienes lograron un trabajo operacional con infinitesimales producto de planteamientos de Arquímedes y Eudoxo. Finalmente el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas sugeridos por Aristóteles, Zenón, Demócrito, entre otros.

Haciendo un breve recorrido por los trabajos que llevaron al surgimiento del cálculo tenemos:

- Aristóteles: en un intento por regular el concepto de infinito prohibió el infinito en acto: "no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio", añadió "es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles" de manera que el infinito "existe potencialmente [...] es por adición o división" (Katz, 2009)

- Zenón: Los razonamientos de Zenón constituyen el testimonio más antiguo que se conserva del pensamiento infinitesimal, no obstante, Zenón era ajeno a toda posible matematización, presentando una conceptualización de tal estilo como un instrumento necesario para poder formular sus paradojas. (Barrera García, 2017)
- Demócrito: calculó el volumen de pirámides y conos, considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitamente pequeñas (indivisibles). (De Faria Campos, s.f.)
- Arquímedes: Utilizó el método de Eudoxo (de exhausión) para el cálculo de áreas y volúmenes, es decir, usando figuras líneas inscritas y circunscritas para llenar el área de un volumen. Sin embargo, también utilizó el método indirecto en algún momento de sus demostraciones. Sin poder incursionar en el concepto moderno de límite. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Eudoxo: creó el método de exhausión, antecedente del cálculo integral para calcular áreas y volúmenes, al postular que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la resta de una cantidad determinada". (Katz, 2009) ; El método de Exhausión nace del problema de comparar las figuras curvilíneas y las rectilíneas. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Kepler: se le atribuye el haber contribuido a crear el cálculo infinitesimal y estimular el uso de los logaritmos en los cálculos. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Cavalieri: Publicó en 1635 un tratado Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada método de los indivisibles. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número innito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infnitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infnito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los indivisibles de área y volumen respectivamente. (Martín Suarez, 2008)
- Oresme: Utilizó los conceptos de tiempo, rapidez, distancia y velocidad instantánea representando la velocidad variable con el tiempo, representaba el tiempo sobre una

línea horizontal (le dio el nombre de longitud), y las velocidades en varios momentos con líneas verticales (latitudes). (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)

- Torricelli: Utilizó las representaciones de Oresme para obtener el área bajo la curva a partir de conceptos de movimiento. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Barrow: Para algunos historiadores de las matemáticas, había sido precisamente Barrow quien más cerca estuvo del cálculo diferencial e integral antes de Newton. Por ejemplo, se supone que Barrow era consciente de que los problemas de la tangente y del cálculo de áreas eran inversos. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Fermat: Retomó la ecuación $bx - x^2 = c$ obtenida al dividir un segmento de longitud b en dos partes con producto c y estudiada por Viéte, y el método de "adigualdad" utilizado por Diofanto de Alejandría, para determinar el valor de x que proporcionaba el valor máximo del parámetro c. Posteriormente él generalizó su método para maximizar un polinomio $p(x)$ y para encontrar la tangente a una curva. (De Faria Campos, s.f.). Fermat descubrió un método que le permitía calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica. Un claro antecedente del concepto de derivada. La forma precisa en que Fermat lo realizó se puede reducir al cálculo del siguiente límite: $\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$. (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Newton: realizó una gigantesca hazaña intelectual: la mecánica celeste, es decir aquella síntesis magistral de mecánica y astronomía que integraba las leyes de Kepler. Dentro de sus obras destacadas está Philosophiae naturalis principia mathematica ("Principios matemáticos de la filosofía natural")1687. Esta obra integra matemáticamente las leyes del movimiento planetario a través de la ley de la gravitación de los cuadrados. Trabajó también los infinitesimales (momento de fluxiones) a partir de su teoría de fluentes (funciones x, y, z) y fluxiones (derivada de las funciones). (Ruiz, Historia y Filosofía de las matemáticas, 2003)
- Leibniz: Le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas descubriendo que se trataba de un método inverso al de encontrar las áreas y volúmenes a través de sumas. Su método se recoge por primera vez en un artículo que apareció en la revista

Acta eruditorum en 1684, aquí aparecen los símbolos dx, dy y el término "cálculo diferencial". Para Leibniz dx, dy representaban cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales), y con ellas iría construyendo tanto su cálculo integral (sumas) como su cálculo diferencial (cálculo de tangentes).

A partir de los aportes e ideas de estos matemáticos, se evidencian diferentes prácticas Matemáticas construidas y una gran variedad de discursos en relación con los problemas del Cálculo, que profundizaremos más adelante en el análisis e interpretación de los discursos de varios autores.

5.2.DOCUMENTOS BASE

Para la realización de este trabajo fue necesario emplear algunos teoremas, proposiciones y enunciados de diferentes documentos los cuales nos permitieron identificar ideas geométricas, infinitesimales y de movimiento en los fundamentos del cálculo diferencial, entre ellos **The Mathematical Career of Pierre de Fermat** (Mahoney, 1973)**, Philosophiæ naturalis principia mathematica de Newton (**del latín: Principios matemáticos de la filosofía natural**)** traducida al inglés por Adee (2007) y **la polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal** (Durán, 2006) , de los cuales los dos primeros se encuentran en el idioma inglés, así que surgió la necesidad de realizar las siguientes traducciones literales, las cuales se analizarán en el apartado 7 titulado como Análisis. (Las traducciones de los teoremas, proposiciones y enunciados que se presentan en este documento han sido realizadas por los integrantes de este trabajo.)

5.2.1. The Mathematical Career of Pierre de Fermat (pg. 165-169)

Para el método de las tangentes no existe un texto como la investigación analítica, que disipe las sombras que lo rodean en su génesis y fundamentos originales. Por razones que quedaran claras más abajo, los relatos posteriores y más detallados de Fermat sobre el método representan avances en su propio pensamiento formulado posteriormente sobre la base de una visión más clara de la relación de su geometría analítica con su método (método general para determinar máximos y mínimos explicado más adelante). Uno encuentra el relato más antiguo del método, -más antiguo tanto en términos de composición escrita como en términos de contenido- en la segunda parte del método. Citado en su totalidad, el método Fermat de tangentes en la primera versión dice:

El método anterior (máximo y mínimo) se ha reducido a la determinación de las tangentes en puntos dados en una curva.

Por ejemplo, teniendo la parábola BDN, su vértice D, el eje DC, y el punto B en esta, dibujar la línea BE tangente a la parábola y encontrarse con el eje en el punto E.

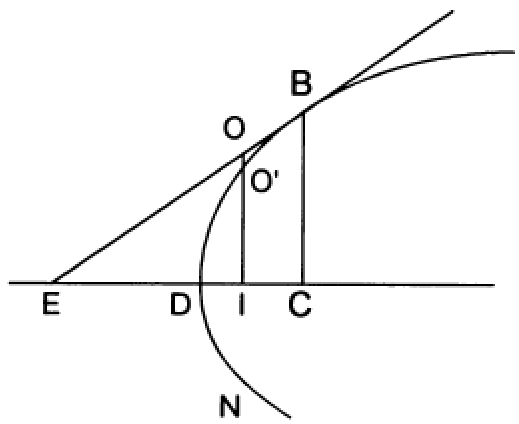


Ilustración 1

Tomando un punto en la línea recta BE dibujar la ordenada OI, y desde el punto B la ordenada BC, la razón de CD a DI será mayor que la razón del cuadrado en BC al cuadrado en OI, porque O está fuera de la parábola. Pero debido a los triángulos semejantes, como el cuadrado de BC es al cuadrado de OI así el cuadrado de CE es al cuadrado de IE. Por lo tanto la razón de CD a DI será mayor que la del cuadrado en CE al cuadrado en IE.

Como el punto B es dado, la línea aplicada BC es dada; el punto C es dado, así como CD. Por lo tanto CD es igual a tener D. Tómese CE como A, CI como E.

Entonces, D tiene una razón mayor a $D - E$ que la que tiene A^2 a $A^2 + E^2 - 2AE$; multiplicando medios y extremos por cada uno, $DA^2 + DE^2 - 2DAE$ serán mayores que $DA^2 - A^2E$. Por lo tanto de acuerdo con el método anterior y con los términos en común eliminados, $DE^2 - 2DAE$ será adigual a $-A^2E$ siendo lo mismo, $DE^2 + A^2E$ será adigual a $2DAE$. Divídase todo por E, por lo tanto $DE + A^2$ será adiqual a $2DA$. Quitando DE¸ A^2 será igual a $2DA$ y asi, A será igual a $2D$. Por lo tanto probamos que A es el doble que CD, que es el caso.

Como en el método de máximos y mínimos esto es un simple hecho para verificar desde el procedimiento dado por los trabajos de Fermat.

Empleando las proposiciones de Papus Fermat pudo haber encontrado valores extremos involucrados en el dibujo de la tangente. Por algún punto O distinto de B, sobre la tangente, la razón $\frac{Oi^2}{DI}$ es mayor que la razón $\frac{BC^2}{CD}$, ya que para O' sobre la parábola $\frac{BC^2}{CD} = \frac{O'I^2}{DI}$ Y $OI > O'I$. Por lo tanto la razón $\frac{BC^2}{CD}$ es en cierto sentido un valor mínimo para la razón $\frac{OI^2}{DI}$. Tratada como tal por el método de los máximos y mínimos. La solución a este problema requiere la determinación de la longitud CE; permitido ser representado por X. Para el análisis el problema es asumido como resuelto; el triángulo BCE es fijo, y la relación $\frac{BC}{X} = m$. Por lo tanto del triángulo $BC = mx$ y de la parábola $\frac{BC^2}{CD} = \frac{m^2x^2}{d}$ (siendo $d = CD$).Tomándose $CE = x - y$ (o $x + y$; el resultado va a ser el mismo, siendo y una cantidad), de donde $DI = d - y$ y $\frac{BC^2}{CD} = \frac{m^{2(x-y)^2}}{(d-y)}$. Continuando con los preceptos del método de máximos y mínimos, se adigualan dos expresiones para $\frac{BC^2}{CD}$:

$$\frac{m^2x^2}{d} \approx \frac{m^2(x-y)^2}{d-y}$$

$$x^2(d-y) \approx d(x-y)^2$$

Que es precisamente la ecuación a la que se llega en el método. Se tiene aquí una reconstrucción posible del recorrido original a lo largo del cual el método de tangentes fue derivado del método de máximos y mínimos afirmado por el autor. Esto es tratando la razón $\frac{BC^2}{CD}$ como si fuese mínimo. Por ello el método de las tangentes puede ser generalizado más allá de su aplicación para la parábola, pero una expresión de advertencia es necesaria primero dicho por el autor.

Los actuales relatos secundarios del método de la tangente tienden a pasar por alto un detalle pequeño pero crucial que es de suma importancia para entender el futuro desarrollo del método. Obsérvese que en el pasaje citado arriba del Método así como en la reconstrucción seguida de esta, Fermat y nosotros (escritores) empleamos la expresión griega clásica de la parábola. Una parábola es una curva tal que, para algunos dos puntos B y O' sobre este, $\frac{BC^2}{CD} = \frac{O'I}{DI}$ este es Apollonius symptoma con los términos medios alternados. Esto fue el único medio de Fermat para expresar las propiedades de las curvas antes de su invención de una geométrica analítica en la introducción. Y esa invención como se mostró en el capítulo II, se produjo alrededor de 1635. Varios años después de la fecha que Fermat asignó a su invención del método de las tangentes. Cuando la necesidad surgió durante las disputas con Descartes, explicó el método de la tangente con bastantes detalles, Fermat no dudó en ajustar el método para tomar en cuenta la nueva posibilidad de expresar curvas en términos de ecuaciones. En particular como se ha descrito en el capítulo III, la invención de la geometría analítica radicalmente alteró los conceptos en matemáticas de las curvas y el basto incremento del número de curvas adecuadas para la investigación matemática. Solo cuando uno está seguro de que cada curva y cualquier curva, tuviera alguna ecuación algebraica que corresponda únicamente a esta y que implícitamente contenga todas sus propiedades, podría generalizar, en el sentido pleno de la palabra, cualquier método algebraico de tangentes. Por lo tanto el discurso de Fermat del método de la tangente después de 1635 o 1636 puede ofrecer la pequeña ayuda historica trabajando sobre el método original. Fermat natural y tácitamente hace el paso de expresiones proporcionales a ecuaciones de curvas y tal vez no se haya dado cuenta de la profundidad del cambio conceptual que acompaño a lo realizado. Al intentar reconstruir una generalización del método origina, una generalización que podía explicar la confidencia de Fermat en este método, nosotros debíamos tener en cuenta las diferentes compresiones de curvas que se presentan en este.

La mayoría de las curvas para Fermat tuvieron las propiedades que se definieron en 1629 como la parábola, cóncava con respecto a sus diámetros. Por lo tanto para esas curvas, las ordenadas $O'I$ eran menos que los segmentos OI dibujados para la tangente. Y uno podría tratar el problema en términos de determinar un mínimo. Para las curvas convexas $O'I$ podría ser mayor que la correspondiente OI , en este caso la principal razón definida podría ser tratada un máximo.

Ahora:

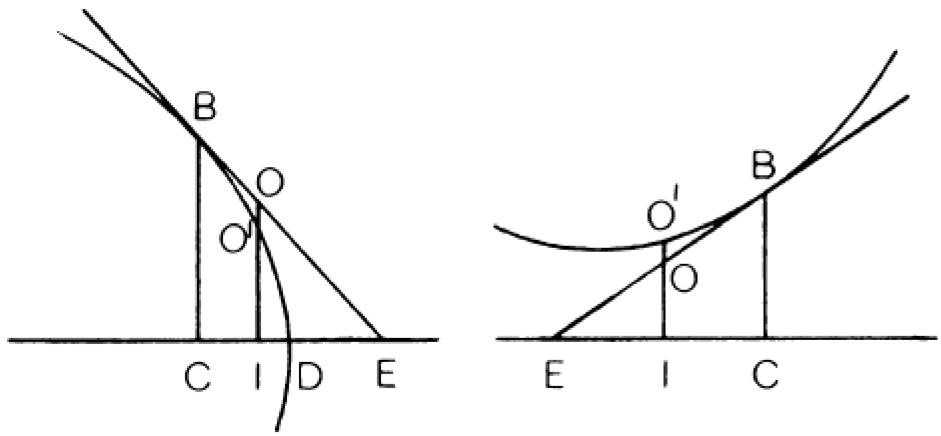


Ilustración 2

Dada la razón $\frac{f(BC)}{g(CD)} = k$ donde k es una constante de proporcionalidad, que sirve como la razón definida de la curva (en el caso de la elipse por ejemplo $\frac{BC^2}{(CD*CD')} = k$), Fermat necesitaba simplemente tomar $BC = mx$ del triángulo y trabajar desde la adigualdad:

$$\frac{f(mx)}{g(CD)} = \frac{f\big(m(x-y)\big)}{g(CD-y)}$$

Para determinar la tangente de cualquier curva para la cual él conocía la proporción definida. De nuevo, en el caso de la elipse la adigualdad inicial podría leerse:

$$\frac{m^2x^2}{d(r-d)} \approx \frac{m^2(x-y)^2}{(d-y)(r-d+y)}$$

El método de las tangentes de Fermat entonces fue en efecto muy general y se derivó de su método de los máximos y mínimos. Infortunadamente él falló en el Método para dar claridad al punto, Contentándose con solo el ejemplo de la tangente a la parábola, rápidamente dibujó el Método y lo terminó.

El método nunca falla afirmación realizada por el autor. En efecto esto puede ser extendido para muchos problemas hermosos, siendo una ayuda para lo que nosotros hemos encontrado en los centros de gravedad de figuras acotadas por curvas y líneas rectas y de sólidas y muchas otras cosas acerca de lo que nosotros quizás hablaríamos de cualquier manera, si el tiempo libre lo permite.

Fermat ha sucumbido a la presión de los colegas que pusieron sus métodos de máximos y mínimos y de tangentes debajo del papel, para darles algunas insinuaciones que el empleo para proveer tales soluciones brillantes a los problemas propuestos por él. Pero el sucumbió en menos de 600 palabras, y allí, con toda probabilidad, tenía la intención de dejar que el asunto concluyera. Cuando un corto año atrás, Descartes lanzó una tormenta de críticas sobre el método de Fermat, la preciada ilusión de que el método sería suficiente para dar cuenta de estos métodos fue lo mejor para desmoronarse.

5.2.2. Philosophiae naturalies Principhia Mathematica.

Sección VII. En cuanto al ascenso y descenso rectilíneo de los cuerpos, PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XXIV.

Suponiendo que la fuerza centrípeta es recíprocamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares desde el centro; se requiere (es necesario u obligatorio) definir los espacios que un cuerpo, cayendo directamente, describe en tiempos dados.

CASO 1. Si el cuerpo no cae perpendicularmente, describirá (por Cor. I Prop. XIII) una sección cónica cuyo foco es situado en el centro de fuerza. Suponiendo que la sección cónica sea ARPB y su foco S. Y, en primer lugar, si la figura es una elipse, sobre el eje mayor, AB describe el semi-círculo ADB, y permitiendo que la línea recta DPC pase a través del cuerpo que cae, formando ángulos rectos con el eje; y dibujando DS, PS, el área ASD será proporcional al área ASP, y por lo tanto también al tiempo. El eje AB permanece siendo el mismo, permitiendo que la anchura de la elipse disminuya continuamente, y el área ASD siempre permanezca proporcional al tiempo. Suponiendo que la anchura disminuye, hasta el infinito; y la órbita APB en ese caso coincide con el eje AB, y el foco S con el punto extremo del eje B, el cuerpo descenderá en la línea recta AC, y el área ABD será proporcional al tiempo. Por lo tanto el espacio AC indicará que el cuerpo describe en un tiempo dado una caída perpendicular desde el lugar A, si el área

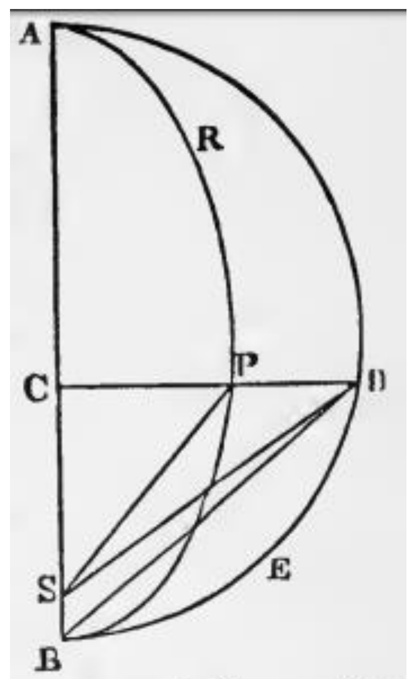


Ilustración 3 Caso 1 proposición XXXII. Problema XXIV. Principia Mathematica

ABD se toma proporcional al tiempo, y desde el punto D la línea recta DC se deja caer perpendicularmente sobre la línea recta AB.

Para la demostración Newton hace uso del Cor. I Prop. XIII que dice

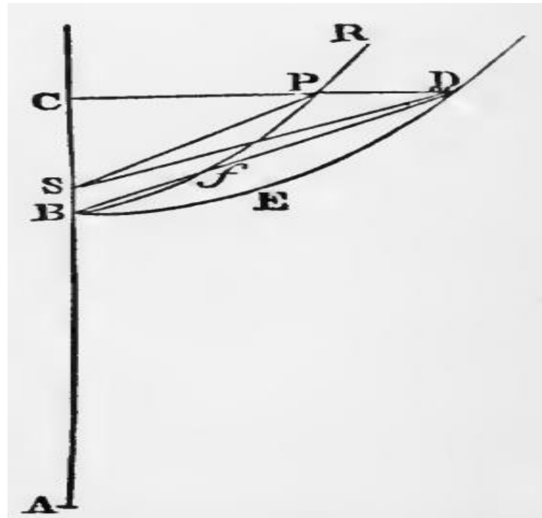


Ilustración 4 caso 2 proposición XXXII. Problema XXIV. Principia Mathematica

CASO 2. la figura RPB es una hipérbola, en el mismo diámetro principal AB se describe la hipérbola rectangular BED; y porque las áreas CSP, CBfP, SPfB, son respectivamente a las diversas áreas CSD, CBED, SDEB, en la proporción dada de las alturas CP, CD y el área SPfB es proporcional al tiempo en el que el cuerpo P se moverá a través del arco PfB. El área SDEB será también proporcional a ese tiempo, permitiendo que el lado recto de la hipérbola RPB disminuya hasta el infinito, y el lado transverso sigua siendo el mismo ; y el arco PB vendrá a coincidir con la línea recta CB, y el foco S, con el vértice B, y la línea recta SD con la línea recta BD. Y por lo tanto el área BDEB será proporcional al tiempo en que el cuerpo C, por su pendiente perpendicular, describe la línea CB.

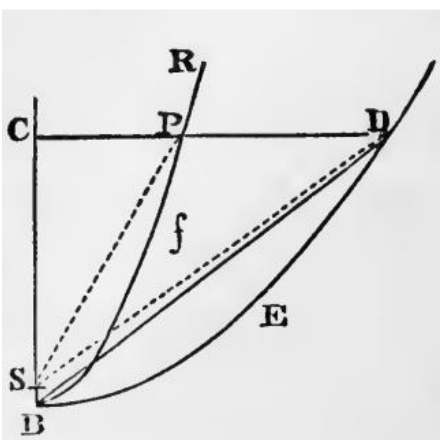


Ilustración 5 Caso 3 proposición XXXII. Problema XXIV. Principia Mathematica

CASO 3. Y por el mismo argumento, si la figura RPB es una parábola, y al mismo vértice principal B otra parábola BED es descrita, que siempre puede permanecer dada mientras que la anterior parábola en cuyo perímetro el cuerpo P se mueve, teniendo su lado recto disminuido y reducido a la nada, viene a coincidir con la línea CB, el segmento parabólico BDEB será proporcional si al tiempo en que ese cuerpo P o C desciende al centro S o B.

5.3.LA DERIVADA

Apóstol en su libro afirma que este método para definir la derivada conduce a la idea geométrica de la tangente a una curva.

Definición. La derivada $f(x)$ está definida por la igualdad $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con tal que el límite exista. El número $f(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x. (Apostol, 1984)

Es decir, la función f es derivable en x si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe. En este caso el límite se designa $f'(x)$ y recibe el nombre de derivada de f en x.

Luego f' es el conjunto de pares ordenados $\left(x, \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ para los cuales existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. La función f' recibe el nombre de derivada de f.

5.3.1. Interpretación geométrica

En la figura se observa una parte de la gráfica de una función f. las coordenadas de los puntos P y Q son respectivamente $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$.

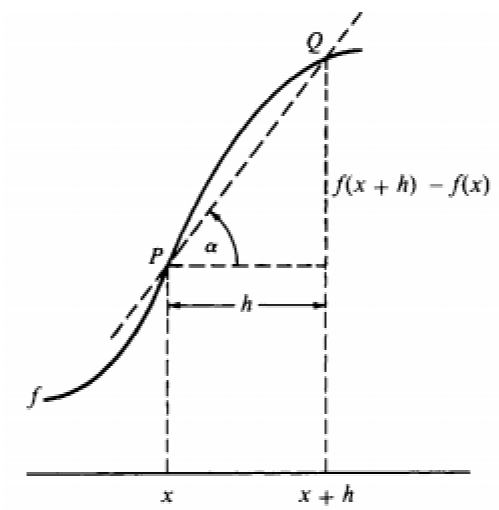


Ilustración 6 interpretación geométrica de la derivada; tomada de Cálculo de Apóstol

Para indicar que la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva, definimos a la gráfica de f en $\left(x, f(x)\right)$ como la recta que pasa por $\left(x, f(x)\right)$ y tiene por pendiente $f'(x)$ Esto significa que la tangente en $(x, f(x))$ sólo está definida si f es derivable en x.

En el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es PQ, la altura es $f(x+h) - f(x)$ y representa la diferencia de las ordenadas de los dos puntos P y Q; en consecuencia, el cociente de diferencias $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma PQ con la horizontal. El número real $tg\ \alpha$ se denomina la pendiente de la curva entre P y Q y da un método para valorar la inclinación de esta línea.

Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender h a cero, el punto P permanece fijo pero 0 se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo αtiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como pendiente de una curva en el punto P el número $f'(x)$. La recta por P que tiene esta pendiente se denomina la tangente a la curva en P.

5.4. USO DE LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La matemática al interpretarse como un conjunto de prácticas humanas, generadas a partir de diferentes necesidades a través de la historia, debe considerarse como un pilar en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula de matemáticas puesto que normalmente se utilizan métodos que incitan a la memorización y mecanización de los estudiantes perdiendo el sentido de lo que hacen, al respecto, Zapico (s.f) establece que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden "contextualizarla y humanizarla".

En este sentido, si conocemos la evolución de las ideas podremos identificar sus consecuencias y aplicaciones, es decir, comprender el trasfondo de las cosas y no quedarnos en lo obvio y superficial.

La comprensión del desarrollo histórico de las matemáticas según Ávila puede contribuir en cuatro áreas específicas de la investigación y el aprendizaje. Estas áreas son:

1. Obteniendo ideas acerca de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.
2. Suministrando modos de instrucción.
3. Incorporando propuestas y resolución de problemas en la instrucción.
4. Llamando la atención a factores emocionales y afectivos en la creación y aprendizaje de las matemáticas. (Avital, 1995)

Una manera de ver la intervención directa de la Historia en la enseñanza de las matemáticas es a través de la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico, respecto a esta idea Anacona hace el siguiente análisis:

> La utilización de textos históricos resulta muy atractiva para los estudiantes, quienes se sorprenden con las técnicas, los símbolos y lenguajes utilizados, ampliando así su panorama de resolución del problema. La demostración y el rigor, por ejemplo, conceptos transversales en las matemáticas y su enseñanza, se dinamizan enormemente al comparar varias pruebas de un mismo resultado en momentos históricos distintos. El análisis de estas pruebas muestra, entre otras, que las nociones de demostración y rigor no son estáticas e inamovibles, sino que han sido construcciones ligadas a concepciones filosóficas acordes con la época y la cultura. (Anacona, 2003)

En otras palabras, el uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza permite al estudiante aclarar dudas y llenar vacíos en cuento a la conformación de las ideas y conceptos que normalmente trabaja como una definición o una expresión.

5.5.ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

Un modelo de enseñanza-aprendizaje bastante utilizado en las clases de Cálculo tradicionales según (Parra, 2005) es aquel en que “el docente da una definición, posteriormente resuelve un ejemplo para que finalmente los estudiantes realicen una serie de ejercicios”, siendo un modelo que transmite habilidades por medio de la repetición y la mecanización de algoritmos. Mientras que la interpretación geométrica es dada después considerando la derivada como la pendiente de la tangente a la gráfica de una función, sin detenerse demasiado en esta parte.

En el proceso de implementación del algoritmo los profesores en la mayoría de los casos utilizan problemas de aplicación que están presentes en diferentes medios (libros de texto, internet) que como lo afirma Dolores (2007) “nada tienen que ver con problemas reales puesto que no relacionan al cálculo con otras ciencias ni con otros problemas de tipo variacional”. Esto implica diferentes dificultades en el estudiante puesto que al momento de enfrentarse a problemas diferentes a los vistos en la clase no es capaz de identificar cuando es que hay que utilizar la derivada.

El continuo uso de algoritmos permite que los estudiantes aprendan a derivar, encontrar límites, máximos y mínimos entre otras cosas pero como se mencionó anteriormente esto no garantiza que el estudiante construya el concepto, es más, se convierte en una barrera que según Cantoral (2000) va dejando de lado otro tipo de recursos como por ejemplo el visual por no considerarlo matemático.

Observando a partir de esto que el proceso de enseñanza-aprendizaje esta delimitado por las concepciones y la didáctica del profesor puesto que la mayoría de estrategias que utiliza van encaminadas al uso del algoritmo, mientras no haya un cambio en la forma de impartir el concepto se hace difícil que el estudiante comprenda o identifique su significado y las ideas que lo fundamentaron.

5.6. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

El conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos. Un obstáculo epistemológico según Bachelard (1962) no refieren a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada se ha podido identificar algunas dificultades tales como:

La formación del concepto de derivada por la vía geométrica es la concepción griega de tangente formada en los estudiantes desde la escuela elemental. Según Cantoral :

> Esta concepción puede obstaculizar el paso de una concepción global (propia de la Geometría Euclidiana) a una concepción local (propiedad fundamental del cálculo), puede dificultar la aceptación de que la recta (además de tocar) pueda cortar a la curva y ser tangente en la zona del corte. El carácter estático de su determinación en la Geometría Euclidiana (pues es dada como un lugar geométrico) también puede dificultar el arribo a una concepción dinámica (sucesión de secantes). (Cantoral R. ,

HIstoria del Cálculoy su Enseñanza: Trazado de Tangentes al concepto de Derivada, 1988)

Además de ello se privilegia el uso de algoritmos, dejando de lado otro tipo de recursos por no considerarlos matemáticos. (Cantoral R. , 2000) lo cual implica que el estudiante no profundice en las ideas que fundamentan el concepto.

Como se mencionó anteriormente el tratamiento de la derivada se da a partir de su definición y la puesta en práctica con problemas de aplicación que nada tienen que ver con la realidad, cuando un estudiante adquiere un conocimiento a través de un ejemplo simple, no podrá contrastarlo con la complejidad real del objeto quedándose con una explicación superficial siendo esto un obstáculo epistemológico.

Dificultades en la comprensión de la derivada son comunes en el surgimiento de obstáculos epistemológicos, Contreras, Luque, & Ordoñez, (s.f.) muestran unas concepciones comunes en los estudiantes por ejemplo Considerar que una función es derivable porque su función derivada lo es, además de estas concepciones, en los manuales y en las respuestas de los alumnos se han detectado:

• La concepción geométrico-gráfica, donde el estudiante utiliza las gráficas y la tangente en sus razonamientos

• La concepción algebraica, asociada a la idea de que la derivada de una función consiste en realizar operaciones mecánicas algebraicas de las reglas de derivación.

Según Azcarate, Bosh, Casasdevall, & Casellas (1990), para que la enseñanza y aprendizaje del concepto de la derivada tenga éxito el docente debe tener en cuenta cuatro factores claves que son:

1. Partir de las concepciones previas que los alumnos tengan del concepto de velocidad.
2. Usar gráficos de funciones que permitan visualizar claramente las ideas especialmente cuando se habla de pendiente de una recta y tasas medias de variación.
3. Usar problemas concretos en los cuales el estudiante relacione lo que aprende con situaciones de la vida diaria.
4. Tener claro las dificultades que se presentan cuando se realiza el proceso de paso al límite en una función y entender que el límite no es solo un proceso de sustitución de una variable por un valor y realizar unas operaciones, ya que este concepto va más allá de esto.

5.7.LAS MATEMÁTICAS COMO UN CONJUNTO DE PRÁCTICAS

Glas entiende las matemáticas como el “producto de una práctica humana común, pero al mismo tiempo este producto es parcialmente independiente de la práctica que la produjo” (Glas, 2007)

Las matemáticas son un conjunto de saberes y de prácticas asociadas en la estructuración de conocimiento que se obtiene de la realidad, Cantoral, Reyes, & Montiel (2014)

La historia de la matemática debe algo a la herencia educativa de su periodo. Cada época en la historia de la enseñanza produce, mediante sus prácticas sociales compartidas, conocimiento, por lo tanto, las matemáticas deben asumirse como un espacio revelador de prácticas; en este sentido Bello & Forero (2016) mencionan dos tipos de prácticas para el matemático: “las que permiten formalizar las matemáticas y las que permiten crearlas”

Al hablar de prácticas matemáticas la mayoría de veces se suele pensar en las acciones que desarrolla un matemático en su quehacer, pero esto no es solo eso; Kitcher (1984) propone una práctica matemática como un quíntuple de componentes <L, M, Q, R, S>, que contiene un lenguaje (L), un conjunto de declaraciones aceptadas (S), Razonamientos (R), un conjunto de preguntas importantes (Q) y un conjunto de puntos de vista filosóficos o matemáticos (M). Además, se encuentra una clasificación de las actividades que configuran la práctica matemática según Giaquinto (2005):

- Descubrimiento: hace referencia a la posibilidad de revelar propiedades de los objetos matemáticos en la resolución de una situación.
- Explicación: (subjetiva y objetiva): hace referencia a la posibilidad de argumentar el razonamiento que se establece en la solución del problema. Si es subjetiva, las razones que se incluyen obedecen a la misma manipulación de la situación; es objetiva si los argumentos obedecen a conocimientos matemáticos construidos en el desarrollo de otra situación.
- Formulación: hace referencia a la construcción y enunciación de algoritmos que permitan el desarrollo de diferentes situaciones parecida o análogas a la que se está resolviendo, al igual que a la adopción y la construcción de un sistema simbólico que permita comunicar las conclusiones en la resolución de una situación.

- Aplicación: esta actividad se sitúa en la posibilidad de aplicar las conclusiones producto de la práctica matemática a otro tipo de situaciones.
- Justificación. Prueba de teoremas. Definiciones y axiomas: hace referencia al acondicionamiento al modelo permite justificar matemáticamente propiedades o definiciones de un objeto matemático, lo que permite argumentar en una teoría la ubicación, el orden en el que se adopta y se relacionan los objetos con sus propiedades y axiomas de la teoría.
- Representación. Sistemas simbólicos y sistemas de diagramas: la adopción de sistemas de representación propios de los objetos matemáticos, como por ejemplo los adoptados en el sistema cartesiano o en la teoría de grafos, permiten actividad matemática alrededor del desarrollo de una situación problema.

6. METODOLOGÍA

Inicialmente se identificaron los documentos importantes referidos a la historia de la matemática con relación a los fundamentos de la derivada y las practicas matemáticas asociadas a este concepto, buscando aquellos que nos mostraran las diferentes formas de interpretar la derivada y el contexto en el que se desarrolló dándole un sentido coherente a lo que hoy se conoce, encontrando que según Avila Godoy, Avila Godoy, & Parra Bermudez (2013)

> algunas prácticas asociadas al surgimiento de la derivada, se desarrollaron a partir de la necesidad de resolver diversas situaciones problemáticas planteadas por los Griegos, entre ellas la velocidad (determinar la velocidad y la aceleración instantáneas de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo y viceversa), hallar la recta tangente a una curva en un punto, encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinadas por curvas o superficies (área bajo una curva) junto con el de máximos y mínimos.

Permitiéndonos identificar ideas geométricas, infinitesimales y de movimiento en los fundamentos de la derivada. Teniendo en cuenta que en la historia de la matemática encontramos diferentes autores que realizaron aportes a estas ideas, por la variedad en cuanto a las estrategias que utilizaron el presente documento pretende enfatizar el análisis de las prácticas en los discursos alrededor de los fundamentos de la derivada más allá de centrar la atención en autores específicos. Para profundizar en estas ideas se hace necesario un análisis de contenido a los textos: philosophiae naturalis principia de newton, the mathematical career of Pierre de Fermat de Michael sean mahoney y la polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal de Antonio J. Duran.

Entiéndanse por análisis de contenido según (Andréu Abela, s.f):

> Una técnica de interpretación de textos los cuales leídos e interpretados adecuadamente nos abre las puertas al conocimiento de diversos aspectos,[…] consiste en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información, lectura que a diferencia de la lectura común debe realizarse siguiendo el método científico, es decir, debe ser, sistemática, objetiva, replicable, y valida[…] No obstante, lo característico del análisis de contenido y que le distingue de otras […], es que se trata de una técnica que combina intrínsecamente, y de ahí su complejidad, la observación y producción de los datos, y la interpretación o análisis de los datos. (Andréu Abela, s.f).

7. ANÁLISIS

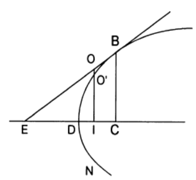
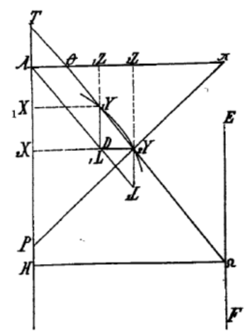
Para sintetizar la información obtenida de cada uno de los anteriores textos se proponen las siguientes tablas como una forma de Sistematización de algunas prácticas Matemáticas en los fundamentos del Cálculo.

7.1.1. Actividad Matemática

Tabla 1 Análisis de Tipos de actividad Matemática

Tipo de actividad matemática	Geométrico-estático	Movimiento	Limite-Infinito
Descubrimiento	Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva dada en un punto.	Representar el movimiento de cuerpos celestes.	Encontrar el área bajo la curva. Definiendo la velocidad aparece lo infinitamente pequeño.
Explicación subjetiva y objetiva	La posibilidad de expresar ideas matemáticas en relación con la recta tangente a una curva. Cada una de las relaciones geométricas presentes en la situación es fundamental el trabajo inicial entre razones y proporciones que le permiten llegar a	La identificación de aspectos relacionados con el uso de relaciones matemáticas a partir del movimiento de los cuerpos celestes alrededor del sol. Comprende relaciones entre magnitudes distancia- tiempo.	Basado en aspectos geométricos se analizan intervalos de velocidades que cada vez son más pequeños teniendo en cuenta el comportamiento de la curva.

	expresar algebraicamente las relaciones.		
Formulación	El papel de las representaciones algebraicas para darle solución al problema geométrico de tangentes, buscando un lenguaje universal y la aplicabilidad a cualquier curva generalizándolo.	Calculo de la tangente viendo esta como el cociente de las velocidades con que varían las coordenadas (distancia-tiempo). Identificar la velocidad de un cuerpo en un instante de tiempo.	El proceso de resolución trae consigo el empleo de expresiones simbólicas para interpretar las relaciones entre distancia-tiempo de las suma de la diferencia.
Aplicación	Las expresiones algebraicas se convierten en un instrumento fundamental para el análisis de situaciones geométricas con relación a las tangentes en cualquier curva.	Encontrar la velocidad con la que una variable fluye con el tiempo. El movimiento continúo de un punto que traza una curva.	Resolver los problemas en cuanto a ecuaciones reducidas a series infinitas, áreas y longitudes de curva, máximos y mínimos, como si fueran geométricos. Calculo de tangentes basado en los infinitesimales.

Justificación	Comprender que las expresiones algebraicas se convierten en una representación de lo geométrico	Entender el movimiento de un objeto partiendo de la relación distancia-tiempo.	Concebir una relación entre la suma de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos geométricamente a través del triángulo característico.
Representación	Geométrico- estático algebraico  $\frac{m^2x^2}{d(r-d)} \approx \frac{m^2(x-y)^2}{(d-y)(r-d+y)}$	Geométrico-dinámico	geométrico 

7.1.2. Práctica Matemática

Tabla 2 Práctica Matemática en la interpretación de Movimiento

Newton	**Componentes de la práctica**	Interpretación
	Lenguaje L.	Establece cantidades fluyentes definiéndolas como aquellas cantidades que aumentan gradualmente y de manera indefinida, representándolas por las letras

		x, y, z y fluxiones a la velocidad con la cual aumenta cada fuente en su movimiento generador, representándolas por las mismas letras pero punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ a lo cual se le conoce como derivada.
	Conjunto de declaraciones aceptadas S.	Principios matemáticos de la filosofía natural (philosophia naturalis principia mathematica) de Newton.(2007 traducción del latín al ingles) Empleando la proposición 32 problema 24 sección 7 del libro primero. philosophia naturalis principia mathematica :Consideraciones en torno a su estructura matemática de Marquina e.t. (1996) en donde hacen un análisis de las formulaciones matemáticas realizadas por newton abarcando la geometría tradicional hasta la teoría de fluxiones..
	Razonamientos R.	Determinación de fluxiones y fluentes donde Las cantidades infinitamente pequeñas eran tratadas de forma dinámica con el fin de relacionarlo con la notación de una fluxión como un punto en movimiento.
	Conjunto de preguntas importantes Q.	El surgimiento de su razonamiento se produjo a partir de la necesidad de resolver el problema griego poder determinar la velocidad y la aceleración de un cuerpo en

		un instante de tiempo. Hallar la recta tangente a una curva en un punto.
	Conjunto de puntos de vista filosóficos o matemáticos M.	Su estilo matemático fue permeado por el conservatismo y se caracterizaba por la falta de interés en el uso de algoritmos.

Tabla 3 Análisis de Práctica matemática en la interpretación Infinitesimal

Leibniz	**Componentes de la práctica**	Interpretación
	Lenguaje L.	Utilizó un lenguaje algebraico que le permitió el desarrollo de su método de cálculo diferencial donde Introdujo la letra d para denotar diferencias
	Conjunto de declaraciones aceptadas S.	La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal de Antonio J. Duran (2006). Orígenes y evolución histórica del cálculo Infinitesimal de Pedro Miguel González Urbaneja (s.f) empleando el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz (pg.225)
	Razonamientos R.	Identificó que la derivada y la integral son procesos inversos. Determino la relación entre la suma de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el triángulo característico.

	Conjunto de preguntas importantes Q.	El surgimiento de su razonamiento se produjo a partir del trabajo realizado alrededor del tercer problema griego que consistía en identificar cuando una función alcanza un valor máximo y mínimo.
	Conjunto de puntos de vista filosóficos o matemáticos M.	La edad media estuvo permeada por una idea cristiana que inspiro a este matemático pues pensaban que por medio de las matemáticas se descifraba el diseño divino.

Tabla 4 Análisis de Practica Matemática en la interpretación Geométrica

Fermat	**Componentes de la práctica**	Interpretación
	Lenguaje L.	Emplea el simbolismo literal introducido por Vieta, que consistía en el uso exclusivo de letras mayúsculas: las vocales, para las cantidades conocidas. La adigualdad es hacer dos expresiones tan aproximadamente iguales como sea posible.
	Conjunto de declaraciones aceptadas S.	the mathematical career of Pierre de Fermat de Michael sean mahoney (1973). Empleando el dudoso parentesco del método de las tangentes (of dubious parentage: the method of tangents).

	Razonamientos R.	Estableció una regla o método que permite caracterizar los puntos donde una función derivable alcanza su mínimo y su máximo.
	Conjunto de preguntas importantes Q.	El surgimiento de su razonamiento se produjo teniendo como base uno del problema griego que consistía en calcular rectas tangentes o normales a una curva en un punto.
	Conjunto de puntos de vista filosóficos o matemáticos M.	El creía en una continuidad con la tradición griega y creía que su trabajo era una reformulación de la obra de Apolonio. Junto con la idea del cristianismo el cual promovía que de las matemáticas descifraban el diseño divino. Siendo las matemáticas permeadas por ideas religiosas.

A partir de este análisis de contenido e identificando a la derivada como una herramienta matemática construida e implementada con el fin de dar solución a un cierto tipo de problemas y teniendo en cuenta que (Bell & Puig Adam, 2004) afirma que la forma de utilizar la Historia de las Matemáticas como un instrumento didáctico colaborador puede llevarse a cabo de muy diversas maneras, se construye una actividad (primera versión caída de una gota de agua) considerándola como una de las herramientas para hacer uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas, la cual tiene como objetivo identificar en los estudiantes practicas matemáticas a la luz de las ideas anteriormente mencionadas en los fundamentos de la derivada; haciéndose necesario un pilotaje de esta para definir si lo propuesto logra que se desarrolle el objetivo. Este pilotaje se desarrolló en estudiantes de grado decimo (que estén finalizando su grado escolar) y once (que estén iniciando el grado escolar) ya que es necesario que los estudiantes no tengan conocimiento concreto de la derivada en el colegio Rodrigo Lara Bonilla Institución Educativa distrital (IED), ubicada en candelaria la Nueva con estudiantes de la jornada de la tarde el día 5 de diciembre del 2017.

Después de realizar este pilotaje se realiza un análisis de resultados observando la intensión de cada uno de los puntos y las respuestas de los estudiantes evidenciando diversas falencias en la actividad en tanto al diseño de esta ya que la interpretación de los puntos no era la que deseábamos. Así que se re diseñó esta (segunda versión caída de la gota de agua) y se aplicó en el colegio Técnico Tomás Rueda Vargas IED ubicado en la localidad de San Cristóbal, con estudiantes de grado once en la jornada de la mañana. Seguido por un segundo análisis de resultados analizando el cumplimiento de los objetivos a partir de la actividad.

7.2. ASPECTOS FUNDAMENTALES SOBRE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN LOS FUNDAMENTOS DE LA DERIVADA

7.2.1. Perspectivas Geométricas

Lo matemáticos y científicos del siglo XVII estaban enfocados en solucionar diversas situaciones problemáticas que como lo afirma (Avila Godoy, Avila Godoy, & Parra Bermudez, 2013) dieron lugar al surgimiento de las ideas y métodos del cálculo, entre ellos:

> Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva dada en un punto (problemas de diseño de lentes ópticos y la determinación de la velocidad y dirección de un móvil), problemas de máximos y mínimos (cómo encontrar el ángulo de inclinación del tubo de un cañón que maximiza el alcance de un proyectil), y problemas de integración (como hallar el área de figuras con lados curvos).

La interpretación y trabajo sobre estos problemas dio origen a la que hoy en día se conoce como el método geométrico para algunas curvas; una de estas interpretaciones previas se presenta desde la perspectiva de Apolonio el cual trabaja ideas fundamentales sobre curvas que pueden tener un alcance simbólico algebraico y un alcance geométrico generándose desde la época griega antigua dos formas de interpretación.

Así que desde la Grecia antigua, la búsqueda de la recta tangente a una curva en un punto ha sido uno de los asuntos que más ha interesado a los matemáticos, como lo menciona (Avila Godoy, Avila Godoy, & Parra Bermudez, 2013):

> Al abordar los problemas mencionados, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, René Descartes y otros, diseñaron métodos específicos para resolver los casos que se les iban presentando y de esta manera fueron construyendo estrategias más generales, pero no lograron establecer la relación existente entre los problemas de la diferenciación y la integración, que hoy se expresa en el Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo, su trabajo representó un aporte muy importante para el diseño de un método general por Newton y Leibniz.

Así que observando el trabajo realizado por los anteriores matemáticos mencionados se encontró que el trabajo realizado por Pierre de Fermat nos brinda la idea geométrica de la derivada; pero para realizar el análisis de sus logros es importante conocer que según (Sean Mahoney, 1973) en el recuento de la vida de Fermat menciona que por la época del siglo XVII los matemáticos no tenían unas normas que los delimitaran, no había jerarquización, por ello cada uno tenía la libertad de elegir su propio estilo y validez. Así que Fermat realizó la mayoría de sus discursos buscando un reconocimiento interno, y por ello los documentos usados en el presente trabajo son referenciados por otros matemáticos de su época debido a que casi siempre se rehusó a hacer públicos sus discursos impidiendo que en la época actual encontremos un registro propio ninguna interpretación ajena a él.

Adicional a esto su pensamiento matemático como lo menciona (De la Torre Gomez, Suescún Arteaga, & Alarcón Vasco, 2005) fue influenciado por los trabajos de Vieta, por ello en el método de la tangente usa el simbolismo literal de Vieta que consistía en el uso exclusivo de letras mayúsculas; las vocales, para las incógnitas, y las consonantes, para las cantidades conocidas.

Teniendo claros estos aspectos previos, en el discurso Of Dubious Parentage: The method of tangents del libro The mathematical career of Pierre de Fermat, Fermat realiza un tratamiento para la determinación de rectas tangentes empleando relaciones geométricas fundamentadas en la razón y la proporción (lo veremos más adelante), haciendo uso de un lenguaje simbólico (algebraico), aplicado principalmente en secciones cónicas, como una forma de análisis para cualquier curva. Pero para lograr una correcta comprensión de lo propuesto en este discurso es importante tener claro los componentes del *Methodus*, el cual no había sido aprobado por la comunidad de matemáticos de la época pero aun así era la forma en la cual Fermat trabaja en el problema siendo este:

> El primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, el cual es un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, que a pesar de ello se reconoce como una forma de proceder frente a la resolución de problemas en los trabajos de Fermat en donde introduce la técnica de adigualdad que había sido empleada por Diofanto en la escuela de Alejandría. (De la Torre Gomez, Suescún Arteaga, & Alarcón Vasco, 2005)

El cual propone:

> “Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:
>
> 1. Sea "a" una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
>
> 2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de "a" en términos que pueden ser de cualquier grado.
>
> 3. Se sustituirá a continuación la incógnita original "a" por " a+e", y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de "a" y "e", en términos que pueden ser de cualquier grado.
>
> 4. Se "adigualarán", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
>
> 5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de "e" o de una de sus potencias.
>
> 6. Se dividirán todos los términos por "e", o por alguna potencia superior de "e", de modo que desaparecerá la "e" de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

7. Se suprimirán a continuación todos los términos donde todavía aparece la "e" o una de sus potencias y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de "a", que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original." (De la Torre Gomez, Suescún Arteaga, & Alarcón Vasco, 2005)

Como se puede observar en el paso 7 anteriormente mencionado las cantidades que tienen “e” desaparecen porque es una cantidad infinitesimal y cuando está converge a cero se hace cero y cualquier cantidad multiplicada por él va a seguir siendo cero por ello se elimina haciendo evidente pensamientos y tratamientos infinitesimales los cuales se trabajaran en el apartado de Análisis de interpretaciones infinitesimales asociadas a los fundamentos de derivada**.**

Adicional a esto se puede observar que en algunas ocasiones cuando se presentaba que la cantidad máxima o mínima contenía una raíz cuadrada, Fermat elevaba al cuadrado la adigualdad (dos expresiones se hacen tan aproximadamente iguales como sea posible según Andersen citado por (De la Torre Gomez, Suescún Arteaga, & Alarcón Vasco, 2005)) antes de aplicar el paso 6, dividiendo todos los términos por una misma potencia de E (que lo veremos a continuación), generando que uno de los términos resultantes no contuviera E.

En el desarrollo de su discurso, Fermat inicia con un método puramente geométrico tomando como eje central su construcción la parábola, en donde la tangente siempre cortará al eje de simetría en un punto E, nunca podrá ser paralela a este eje y el punto D será el punto medio entre los puntos E y C (mirar ilustración 1); estableciendo todo esto por relaciones de semejanza y congruencia evidenciando que ello era fundamentado en ideas Euclidianas y más que semejanza y congruencia era razón y proporción permitiéndole a Fermat llegar a establecer relaciones algebraicas entre segmentos como $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$, y triángulos.

Establecidas estas relaciones geométricas Fermat inicia con un desarrollo puramente algebraico usando el simbolismo de Vieta anteriormente descrito, y para lograr su entendimiento nos hemos tomado la libertad de realizar el siguiente proceso algebraico:

Dadas las relaciones:

$$CE = A$$
$$CD = D$$
$$CI = E$$

Se establece:

$$DA^2 + DE^2 - 2DAE > A^2(D - E)$$
$$\mathrm{DA}^2 + \mathrm{DE}^2 - 2\mathrm{DAE} > \mathrm{A}^2\mathrm{D} - \mathrm{A}^2\mathrm{E}$$
$$DE^2 - 2DAE > -EA^2$$
$$DE^2 + EA^2 > 2DAE$$
$$\frac{DE^2 + EA^2 > 2DAE}{E}$$
$$DE + A^2 > 2DA$$
$$DE + A^2 < 2DA$$
$$A^2 = 2DA$$
$$A = 2D$$

Donde hace evidente el uso de la proposición 35 del libro Cónicas de Apolonio:

> *"Si una línea recta toca a una parábola, encontrando el diámetro fuera de la sección,* la línea recta dibujada desde el punto de contacto de manera ordenada al diámetro cortará al diámetro, iniciando desde el vértice de la sección de la línea recta igual a la línea recta entre el vértice y la tangente, y la línea recta no caerá en el espacio entre la tangente y la sección.
>
> Permita que haya una parábola cuyo diámetro sea la línea recta AB, y que la línea recta BC sea levantada de forma ordenada, y deje que la línea recta AC sea tangente a la sección.
>
> El autor afirma entonces que la línea recta AG es igual a la línea recta GB.
>
> De ser posible, que sea desigual, y que la línea recta GE se haga igual a AG, y que la línea recta EF se levante de forma ordenada, y permita que la línea recta AF se una. Por lo tanto AF producida se encontrará con la línea recta AC (i.33); y esto es

imposible. Para dos líneas rectas tendrán los mismos fines, por lo tanto, la línea recta AG no es desigual a la línea recta GB; por lo tanto es igual.

Luego el autor dice que ninguna línea recta caerá en el espacio entre la línea recta AC y la sección.

Por imposible, deje que la línea recta CD caiga en el medio, y deje que GE se haga igual a GD, y deje que la línea recta EF se levante de forma ordenada. Por lo tanto, la línea recta unida de D a F toca la sección (i.33); por lo tanto, probó que caerá fuera de él. Y entonces se encontrará con DC, y dos líneas rectas tendrán el mismo final; y esto es imposible. Entonces la line recta no caerá dentro del espacio entre la sección y la línea recta AC.”

Ya que esta en esta proposición Apolonio logra establecer qué condiciones han de tener dos rectas para que ellas sean iguales, dependiendo la parábola, la tangente y las líneas rectas que la preceden. Facilitándole el trabajo a Fermat, ya que le está dando las condiciones con las que debe cumplir para que establezca que el segmento A será igual a dos veces el segmento D haciendo uso de otro tipo de registro de representación. Evidenciando aquí la importancia de los desarrollos previos y la influencia de estos.

Adicional al uso de lo propuesto por Apolonio se evidencia también el uso de su *methodus* ya que “quita” (manera simbólica de trabajar esas expresiones para Fermat) el DE para llegar a la anterior igualdad. Evidenciando que dentro de su desarrollo algebraico tenía bastante claro las desigualdades, los procesos algebraicos que podría realizar para no alterar esta y llegar a lo deseado. Logrando así el uso de su método para llegar a una expresión que le permitiera llegar al análisis de las curvas que se están trabajando.

Pero su desarrollo no concluye ahí, continúa con las relaciones de congruencia, semejanza e igualdad $\frac{BC^2}{CD} = \frac{O'I^2}{DI}$ la cual también la deduce por la proposición 35 de Apolonio, Fermat establece dos expresiones para $\frac{BC^2}{CD}$:

$$\frac{m^2x^2}{d} \approx \frac{m^2(x-y)^2}{d-y}$$

$$x^2(d-y) \approx d(x-y)^2$$

Siendo este un claro ejemplo de adigualdad ya que teniendo las dos expresiones, hace que estas sean tan aproximadamente iguales como sea posible, buscando establecer la razón que debe darse para cuando la recta que está pasando por la curva sea tangente, determinando que esta razón va a tener que ser igual cuando la recta sea tangente, convirtiéndose esta razón en una proporción.

Fermat no solo realizo en trabajo para una curva en específico si no que la hizo para otras secciones cónicas como en el caso de la elipse realizando un proceso homologo al anterior, llegando a que la adigualdad que se debería establecer para la tangente debería ser:

$$m^2x^2(\mathrm{d}-\mathrm{y}) \approx \mathrm{m}^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2\mathrm{d}$$
$$\frac{m^2x^2(\mathrm{d}-\mathrm{y})}{m^2} \approx \frac{\mathrm{m}^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2\mathrm{d}}{m^2}$$
$$x^2(d-y) \approx d(x-y)^2$$

Por lo tanto el trabajo realizado por Fermat en relación con la derivada fue un discurso basado en lo geométrico y gestionado en lo simbólico, ya que el empleaba todas las relaciones de razón y proporción puestas en estas construcciones para lograr un lenguaje algebraico que le permitiría llegar a las adigualdades anteriormente expuestas desde otros registros de representación, evidenciando que sus ideas se fundamentaron en desarrollos Euclidianos y de Apolonio.

Por otro lado Newton hizo uso de la geometría en el desarrollo de sus trabajos pues sentía admiración hacia los antiguos como fuente de sabiduría. Newton visualizó la tangente a una curva como la dirección en la que la partícula se mueve en un instante concreto, asociando la tangente con el vector velocidad de la partícula. Trabajando las tangentes a partir de la idea de considerar la circunferencia como la trayectoria recorrida por un punto en el borde de una rueda giratoria.

Newton dedicó grandes esfuerzos en suministrar demostraciones geométricas proponiendo un enfoque más riguroso al llamó que el “método sintético de fluxiones” como lo confirma Guicciardini (2006), en este método no aparecen infinitesimales o “momentos” y tampoco se hace uso de símbolos algebraicos; todo estaba basado en procedimientos geométricos límites que Newton llamó “método de las primeras razones de las cantidades nacientes y las últimas razones de las cantidades evanescentes” (refiere a cantidades infinitesimales) el cual aparece en diferentes demostraciones del Principia.

7.2.2. Perspectivas de movimiento

La Historia reconoce que es la Física, la ciencia que en todo este período impulsa el desarrollo de la formalización matemática para describir las leyes de los objetos que estudia, en particular el movimiento de los cuerpos bajo un enfoque dinámico. (Delgado & Ruiz, 2017). Entiéndase el movimiento como un fenómeno físico que define todo cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia, variando la distancia de dicho cuerpo con respecto a ese punto o sistema de referencia, describiendo una trayectoria. (Graterol, Sánchez, Álvarez, & Montero, 2009)

Desde los griegos encontramos algunas ideas de movimiento, por ejemplo Kepler establece tres leyes de movimiento basándose en el movimiento de cuerpos celestes alrededor del sol donde establecía que las orbitas planetarias describen una elipse con el sol en un foco. Su primera ley habla de la forma del movimiento de los planetas alrededor del sol siendo esta elíptica, en la segunda deja establecido que los planetas no giran con un movimiento circular uniforme sino que se desplazan con mayor velocidad a medida que se aproximan al sol recorriendo áreas iguales en tiempos iguales y por último determina que los cuadrados de los tiempos empleados en las revoluciones de los planetas son entre sí como los cubos de sus distancias medias al Sol.

Por esta época Newton comenzó su trabajo en el cálculo de fluxiones influenciado por Barrow, Wallis y el método de Fermat de trazar tangentes a las curvas. Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables representados por $x, y, e\ z$ son “fluentes” y sus velocidades, designadas por $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$ son sus “fluxiones” (análisis hecho anteriormente por en análisis de Ruiz (2003)). Trabajo que realizo a partir de dos problemas:

1. Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.

2. Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones. (Martín S, 2008)

Aunque el trabajo de Newton fue principalmente geométrico representó en su libro Principia Matemática ideas de movimiento del sistema solar a partir del hecho de ¿cómo describir el cambio observado en la bóveda celeste?

Donde trabaja el concepto de fuerza centrípeta siendo esta fuerza la que actúa sobre un objeto en movimiento sobre una trayectoria curvilínea, y que está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria estableciendo así la Teoría de la Gravitación Universal que establece que entre dos cuerpos cualesquiera se manifiesta una fuerza de atracción mutua, con intensidad directamente proporcional a ambas masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros y sus tres Leyes de movimiento: principio de Inercia, Principio de Masa, Principio de Acción y Reacción

1. Todo cuerpo continuará en su estado de reposo o de movimiento uniforme (no acelerado), en línea recta en tanto que no sea obligado a cambiar ese estado por una fuerza exterior.
2. La razón del cambio del momentum ("masa - tiempo - velocidad", siendo medidas en unidades apropiadas la masa y la velocidad) es proporcional a la fuerza impresa y tiene lugar en la dirección en que la fuerza actúa.
3. Acción y reacción (como en la colisión sobre una mesa sin fricción de bolas de billar perfectamente elásticas) son iguales y opuestas (el momentum que una bola pierde es ganado por la otra) (Barros, sf)

Barrow (s,f) establece que a partir de la segunda ley, Newton obtuvo un método matemático para investigar la velocidad de cualquier partícula que se mueve en cualquier forma continua, método que le proporcionó la llave maestra de todo el misterio de las razones y su medida, el Cálculo diferencial.

Se puede identificar en el libro II de Principia trabajo con la denominada "geometría fluyente" (Marquina & et, 1996), que basándose en la geometría tradicional y aceptando que el movimiento interviene en los razonamientos, introduce elementos que la acercan a lo que hoy en día conocemos como Cálculo. Como se observa en el siguiente ejemplo:

> PROPOSICIÓN XXXII. PRODLEMA XXIV, SECCIÓN VII, LID RO PRIMERO
>
> Suponiendo que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, determinar los espacios que, en tiempos dados, recorre un cuerpo cayendo en línea recta.

Siendo un problema que implica describir el comportamiento de un cuerpo que cae directamente en algún lugar dando una idea de movimiento rectilíneo, para su demostración, newton establece tres casos donde hace uso de ideas de convergencia, de variación y de cantidades evanescentes (Lema VII, ideas de cantidades infinitamente pequeñas). Encontrando a partir de esto relaciones entre el movimiento del cuerpo formando secciones cónicas cuya curva está dada por la velocidad y la fuerza centrípeta del cuerpo (Cor 2, Prop XIII).

Llegando finalmente a decir que todas las trayectorias al estar en el mismo plano tendrán áreas iguales, deducción planteada por Kepler en su segunda ley de movimiento “en tiempos iguales se describen áreas iguales en un plano inmóvil"

Fue a partir de resolver el movimiento en componentes rectilíneos que Newton pudo determinar la tangente mediante la composición de los movimientos, siendo así el movimiento un fundamento en el desarrollo del cálculo diferencial.

7.2.3. Lo infinitamente pequeño

Las expresiones infinito o infinitésimo actual o potencial que se utilizan hoy en día llevan el sello de los trabajos de los matemáticos griegos, especialmente Arquímedes, se desarrollaron técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes. En una primera etapa se introducen los conceptos de indivisibles e infinitésimo. (López, 2014)

Leibniz realizo estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas llegando a decir que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra, idea que según Martín S (2008) puesta en el plano geométrico llevó a Leibniz a incursionar en su cálculo diferencial.

A partir del hecho de considerar una curva como un polígono de infnitos lados de longitud infnitesimal a la cual se asocia una sucesión de abscisas $x1, x2, x3, x4,$ . . . y una sucesión de ordenadas **y1, y2, y3, y4,** . . .Resulta así el triángulo característico de Leibniz que es el mismo el cual ya había establecido Barrow anteriormente.

Se llama triángulo característico según Durán & Arántegui (2006) a un triángulo rectángulo infinitesimal cuya hipotenusa es la propia curva -o la tangente a la curva- y los catetos son las diferencias de abscisas *dx* y ordenadas *dy*, respectivamente. Como vemos en el siguiente ejemplo:

Considérese el triángulo ADC que resulta de un incremento AD, como este triángulo es semejante a AEF siendo la pendiente de la tangente $AE{:}EF$ igual a la pendiente $CD{:}AD$.se Según afirmaciones de Leibniz decimos que cuando el arco AB es cada vez más pequeño, podemos identificarlo con el segmento AC de la tangente en B.

El triángulo ABD en el cual AB es considerado a su vez como un arco de la curva y como parte de la tangente., es el triángulo característico.

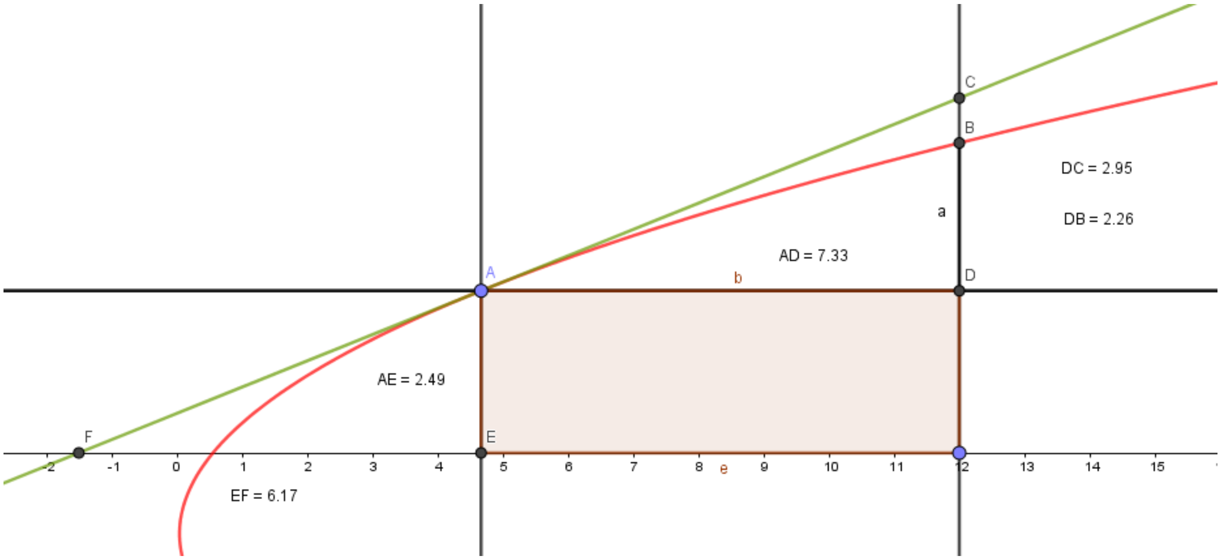


Ilustración 7 Triángulo Característico

De la figura tomando un caso específico podemos determinar las siguientes relaciones:

AE =2,49 $\frac{AE}{EF} = \frac{2{,}49}{6{,}17} = 0{,}40$

EF =6,17

$CD = 2{,}95$ $\frac{CD}{AD} = \frac{2{,}95}{7{,}33} = 0{,}40$

$AD = 7{,}33$

$AE{:}\,EF \therefore CD{:}\,AD\ \Delta AEF \approx \Delta ABD$ Dicho anteriormente

Siendo este un abordaje a los infinitesimales a partir de prácticas geométricas e, el cual otros

Además según Durán & Arántegui (2006) a partir del triángulo característico de una curva, Leibniz asocia otra curva llamada cuadratriz de la siguiente manera:

> Si ponemos $y(x)$ para la curva inicial la cuadratriz $z(x)$ verifica la ecuación: $z(x) = y - xdy/dx$. Ahora bien, siguiendo también las indicaciones de Leibniz vemos que el área de la curva $y(x)$ entre los puntos de abscisa a y b, equivale a la mitad del área encerrada por la cuadratriz más la del triángulo rectángulo de catetos b$-a$ y $y(b) - y(a)$. Este teorema, que Leibniz llamó de trasmutación -lo menciona más adelante en la Historia et origo-, le puso de manifiesto la relación inversa entre tangentes y

> cuadraturas: la cuadratriz, que sirve para encontrar la cuadratura de una curva, se define a partir de sus tangentes. (Durán & Arántegui, La Polémica sobre la Invensión del Cálculo, 2006)

Por otro lado, Newton hace un abordaje a las cantidades infinitesimales al tratar de evitar el uso infinitesimales geométricos, pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes, surgiendo así su teoría de las razones primera y última de cantidades evanescentes, término utilizado por Newton según Martín S (2008) desde la intuición mecánica del movimiento:

> Entendiéndose por velocidad última aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. (Martín S, 2008)

A partir de esto se llega a ideas que señalan al concepto matemático de límite. Definido por Newton como:

> Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infnitum. (Martín S, 2008)

Lo anterior se relaciona con el primer Lema del libro primero de sus Principia Mathematica que establece:

> Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales. Si lo niegas, sean al final desiguales y sea su diferencia final D. Luego no pueden acercarse a la igualdad más que hasta una diferencia dada D. Contra la hipótesis. (Adee, 2007)

Donde según Medrano & Pino (2016) se puede apreciar estrecha similitud conceptual en la forma de establecer la 'igualdad final' entre dos cantidades variables que tienden la una a la otra constantemente en el tiempo, y la definición formal del límite de una función real.

Resumiendo su trabajo, Newton usaba sus infinitesimales en la derivada misma, donde los infinitesimales estaban asociados directamente al cálculo de velocidades instantáneas.

Fermat también hace uso de prácticas infinitesimales a partir de su método de máximos y mínimos, y según él, aplicándolo a su método de las tangentes apareciendo la llamada adigualdad (explicada en el apartado geométrico). Estos procedimientos dan un acercamiento o más bien tienen un parecido a los procedimientos actuales para el límite. En los análisis de Gonzalez Urbaneja (2004) aunque Fermat parece encontrar la solución en el desprecio de potencias infinitesimales, nunca atraviesa, en el tema de máximos y mínimos y tangentes, la barrera entre lo finito y lo infinitesimal.

8. PROPUESTA DIDÁCTICA

La derivada como la entendemos hoy en día ha sido fruto de un conjunto de prácticas y razonamientos alrededor de diferentes discursos, como se mencionó en los anteriores capítulos se hace un reconocimiento de ideas geométricas, infinitesimales y de movimiento en los fundamentos de la derivada que deben ser tenidas en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto.

Estos planteamientos se han tenido en cuenta al desarrollar la actividad que se propone en este capítulo. La actividad está enfocada en significados, interpretaciones y comprensiones que tiene el alumno alrededor de las ideas que fundamentaron la derivada.

La población de aplicación pueden ser estudiantes que estén finalizando grado decimo o iniciando grado once, teniendo como requisito que aún no se haya formalizado la idea de derivada como una expresión analítica o procedimiento algebraico para lograr el objetivo de la actividad.

8.1.OBJETIVO

Identificar en los estudiantes prácticas matemáticas a la luz de ideas geométricas, infinitesimales y de movimiento en los fundamentos del cálculo diferencial.

8.2.DESARROLLO

El tiempo estimado para el desarrollo de esta actividad es de dos horas, donde los estudiantes pueden estar organizados en parejas o en tríos como máximo, de tal forma que puedan discutir y socializar sus ideas frente al desarrollo de la actividad.

Es necesario que cada grupo cuente con: una guía de 11 puntos, computadores que permitan el uso del software Geogebra y hoja de procedimientos.

Iniciando se les dará la explicación de la composición de la guía indicando que los puntos deben resolverse en orden y todos los procedimientos realizados deben quedar registrados en la hoja de procedimientos. Al llegar al séptimo punto el estudiante necesitará el uso del software, por lo cual se realizara una explicación básica de su funcionamiento y lo que debe realizar.

8.3. PRIMERA VERSIÓN ACTIVIDAD CAÍDA DE UNA GOTA DE AGUA

Se desea estudiar y analizar las diferentes formas de interpretar, para diferentes tiempos, la velocidad a la que cae una gota en una antena parabólica, para esto es necesario que responda de la forma más explícita las siguientes cuestiones.

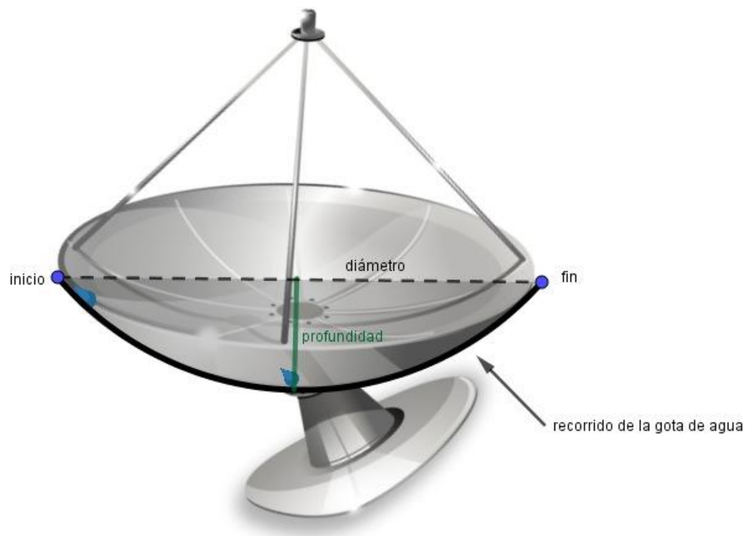


Ilustración 8 La gota de Agua

En la siguiente tabla se presenta una descripción de la profundidad a la que se encuentra la gota de agua para diferentes tiempos:

PROFUNDIDAD	TIEMPO
0 cm	0 seg
7.14 cm	0.78 seg
13.8 cm	1.81 seg
18 cm	3.5 seg
7.14 cm	6.22 seg

0 cm	7 seg

1. Represente gráficamente el comportamiento de la gota en términos de la relación entre la profundidad y el tiempo.
2. ¿Qué curva describe el comportamiento de la profundidad y el tiempo de la gota? ¿por qué? (represéntela)
3. Según la representación ¿en qué momentos cree usted que va más rápido y más lento la gota?
4. Encuentre la velocidad a la que varía la profundidad de la gota en los siguientes intervalos de tiempo:

INTERVALO	**VELOCIDAD**
1.2 seg – 3 seg	
1.94 seg- 3 seg	
2.25 seg- 3 seg	
2.68 seg- 3 seg	

5. Estime la velocidad a la que varía la profundidad de la gota exactamente a los 3 segundos.
6. Que diferencias en términos de la situación encuentra entre los valores determinados en los ítems 4 y 5.
7. Es posible encontrar un método general para estimar la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para un tiempo específico.

En el siguiente enlace se encuentra una representación de la relación entre la profundidad y el tiempo para la situación de la caída de la gota de agua.

https://ggbm.at/v6ERxMsc

A partir de esta representación, realice la siguiente construcción:

- Construya una recta tangente a la curva en cualquier punto A entre 0 segundos y 3.3 segundos.
- Construya el eje de la parábola.
- Encuentre el punto de intersección B entre el eje y la parábola.
- Encuentre el punto de intersección C entre la tangente y el eje.
- Construya una paralela al eje x que pase por el punto de tangencia A.
- Halle el punto de intersección entre la paralela y el eje de la parábola.

Ubique el vértice de la parábola Estudie la relación entre las distancias BD y CD. Exprésela simbólicamente.

8. Según la relación determinada anteriormente ¿Cómo hallar la pendiente de la recta tangente para cualquier tiempo?
9. Según la posición del punto A sobre la curva ¿qué relación encuentra entre la recta tangente y la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para cualquier tiempo?
10. Represente el comportamiento de la velocidad a la que varía la profundidad de la gota de agua para cualquier tiempo.
11. ¿Qué análisis puede realizar de este movimiento?

8.3.1. Pilotaje y Análisis

La sesión se realizó el martes 5 de diciembre del 2017, con 22 estudiantes de los grados decimo y once. Se organizaron dos grupos de 3 estudiantes y 8 parejas. Se dieron las instrucciones para el desarrollo de la guía y se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Represente gráficamente el comportamiento de la gota en términos de la relación entre la profundidad y el tiempo.

La intensión de este punto era que los estudiantes interpretaran los datos tabulados con el problema y se generara una interpretación geométrica (gráfica de parábola) de estos. Buscando que en el eje x se encontrara el tiempo y en el eje Y se encontrara la profundidad, identificando que se repiten las profundidades en algunos tiempos obteniendo la construcción de una parábola.

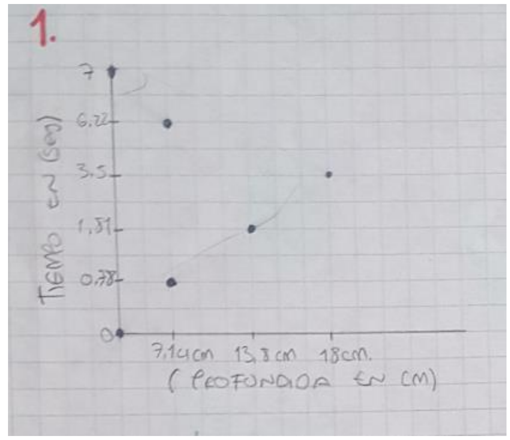


Ilustración 9 Solucion primer punto

En los resultados encontramos que algunos estudiantes tomaron los datos tabulados y los registraron en una gráfica colocando en el eje X la profundidad y en el eje Y el tiempo generando una parábola horizontal (ilustración 1) .

Al obtener varios registros de esta forma identificamos que el lenguaje simbólico y el uso de variables carecen de sentido para los estudiantes. Sin importar su naturaleza u origen, los estudiantes no atribuyen algún significado a las variables.

Teniendo en cuenta que la escala numérica es parte importante del gráfico, ya que proporcionan información contextual de las variables representadas y unidades de medida utilizadas **Fuente especificada no válida.** Encontramos que algunos estudiantes no la tienen en cuenta (ilustración 2).

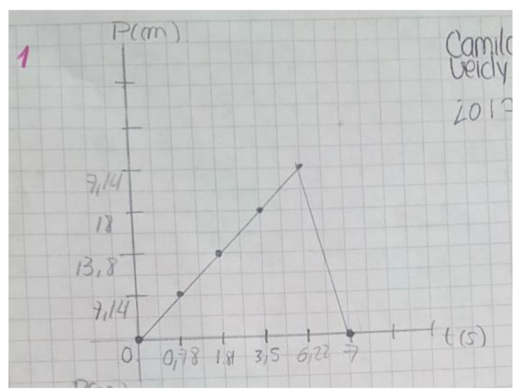


Ilustración 10 solución primer punto

Cuando construyen escalas no proporcionales a las magnitudes representadas, las distancias que deberían ser iguales entre pares distintos de puntos no lo son, lo que dificulta el desarrollo y la interpretación de la actividad.

otros estudiantes realizaron una gráfica de barras identificando de manera adecuada las variables pero la representación utilizada no es acorde a los datos suministrados (ilustración 3); y para finalizar encontramos a los estudiantes que lograron realizar la representación tomando el eje x como el tiempo, el eje y como la profundidad, haciendo un uso más coherente de la escala, no pueden identificar qué curva se forma puesto que los puntos propuestos no permiten a algunos la correcta visualización de la parábola, quedando en palabras de los estudiantes una “montaña”. (Ilustración 4)

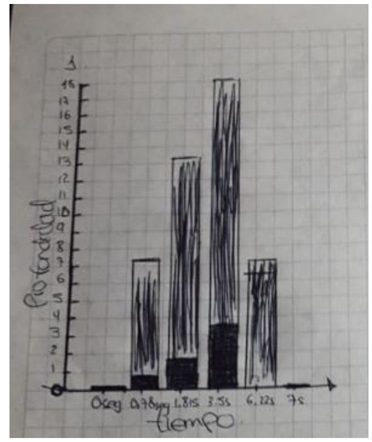


Ilustración 11 solución primer punto

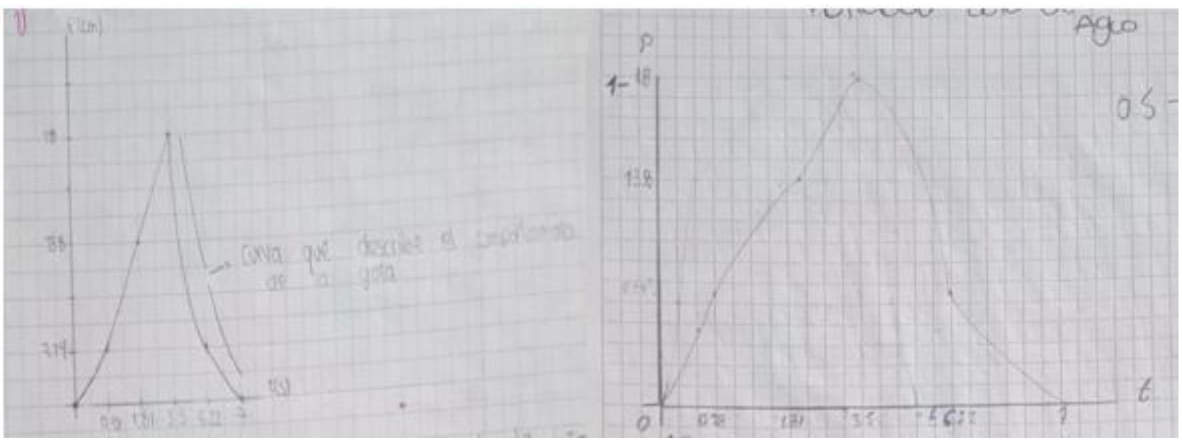


Ilustración 12 solución primer punto

2. ¿Qué curva describe el comportamiento de la profundidad y el tiempo de la gota? ¿por qué? (represéntela)

La intensión de este segundo punto era que los estudiantes lograran describir la parábola formada con los datos de la tabulación, y lograran relacionar el hecho de que la gota está en una antena parabólica.

Por los diferentes problemas enunciados en al análisis del primer punto (escala, variables, ubicación de los puntos, tipo de representación) no fue posible que la mayoría de los estudiantes lograrán la correcta representación de la curva.

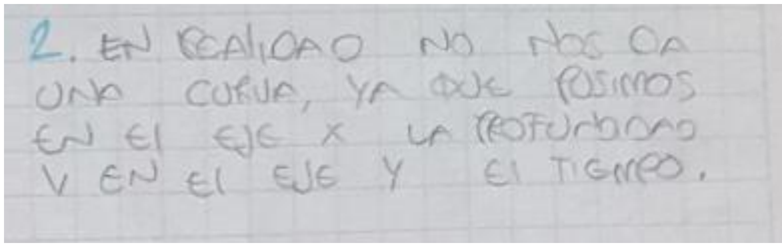

2. EN REALIDAD NO NOS DA UNA CURVA, YA QUE PUSIMOS EN EL EJE X LA PROFUNDIDAD Y EN EL EJE Y EL TIEMPO.

Ilustración 13 solución segundo punto

Los estudiantes son conscientes de no obtener una curva pero no identifican las causas (Ilustración 5).

En otras respuestas se encuentra que dan el nombre a la curva pero no tienen los argumentos necesarios para justificar porque es una parábola

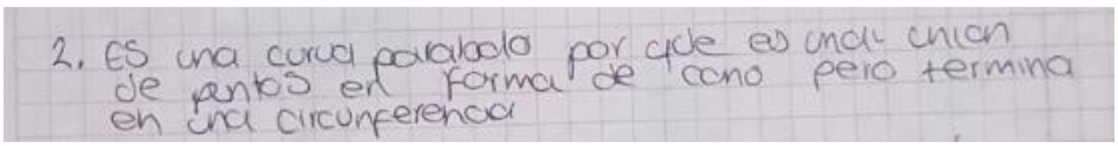
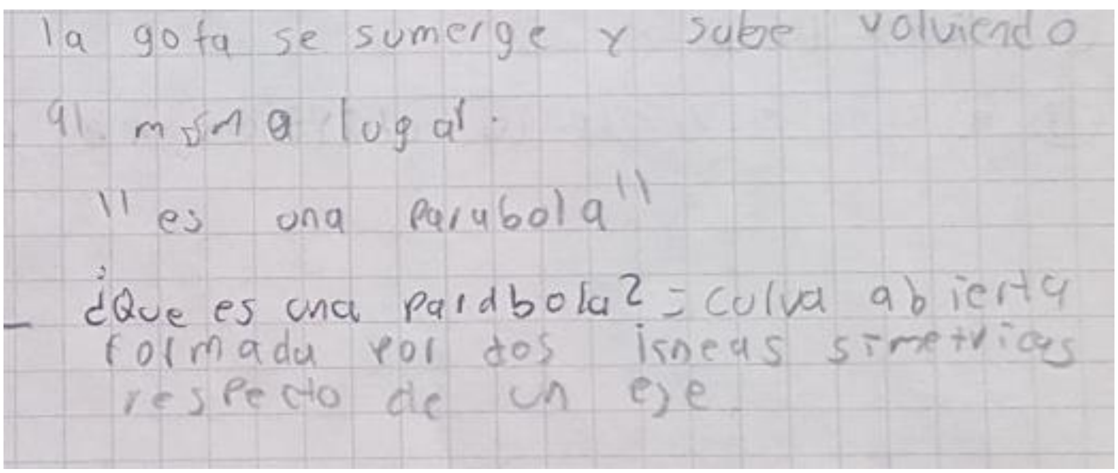

2. Es una curva parabola por que es una union de puntos en forma de cono pero termina en una circunferencia

Ilustración 14solución segundo punto


la gota se sumerge y sube volviendo al mismo lugar.

"es una parabola"

¿Que es una parabola? = curva abierta formada por dos lineas simetricas respecto de un eje

Ilustración 15 solución segundo punto

Al observar estos resultados se concluye que los errores generados en el primer punto se deben a falta de interpretación y representación de datos alterando el resultado del segundo punto el cual es más importante para potenciar el pensamiento geométrico de la derivada, así que se decide darles a los estudiantes la gráfica para que ellos la analicen, cambiar el orden de las variables en la tabulación y aumentar los datos de esta.

3. Según la representación ¿en qué momentos cree usted que va más rápido y más lento la gota?

Teniendo en cuenta la representación de los anteriores puntos se esperaba que los estudiantes identificaran la rapidez de la gota según la inclinación o pendiente de la curva y los datos mostrados en la situación.

Dentro de los resultados encontramos que los estudiantes basaron sus respuestas en la representación que elaboraron en el primer punto, determinando mayor rapidez en el intervalo que desciende después de la mitad de la curva mientras que el que asciende implicaba menor velocidad por que según ellos la gota hace más esfuerzo al subir, siendo Una de las dificultades lograr que los estudiantes vinculen el movimiento con la gráfica.

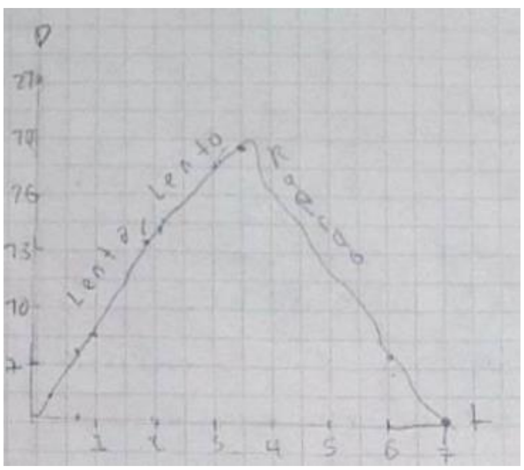


Ilustración 16solución tercer punto

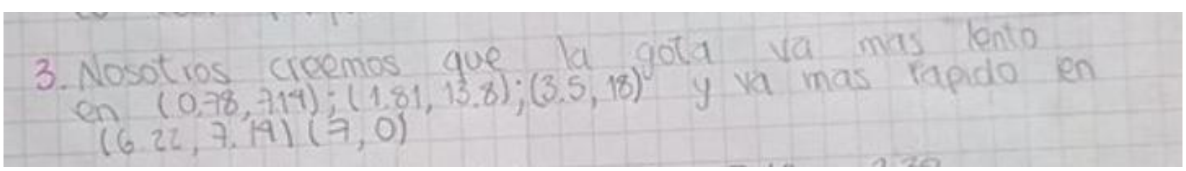

3. Nosotros creemos que la gota va mas lento en (0.78, 7.14); (1.81, 13.8); (3.5, 18) y va mas rapido en (6.22, 7.19) (7, 0)

Ilustración 17 solución tercer punto

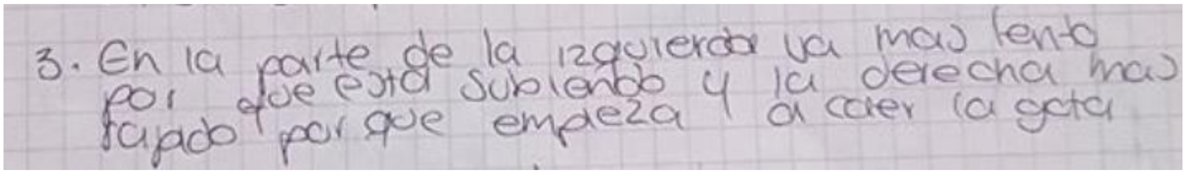


Ilustración 18 solución tercer punto

Solo un grupo no coincidió con sus demás compañeros pues las variables en su representación quedaron opuestas, por lo tanto la gota iba más rápida en el intervalo de 0 a 3,5 seg.

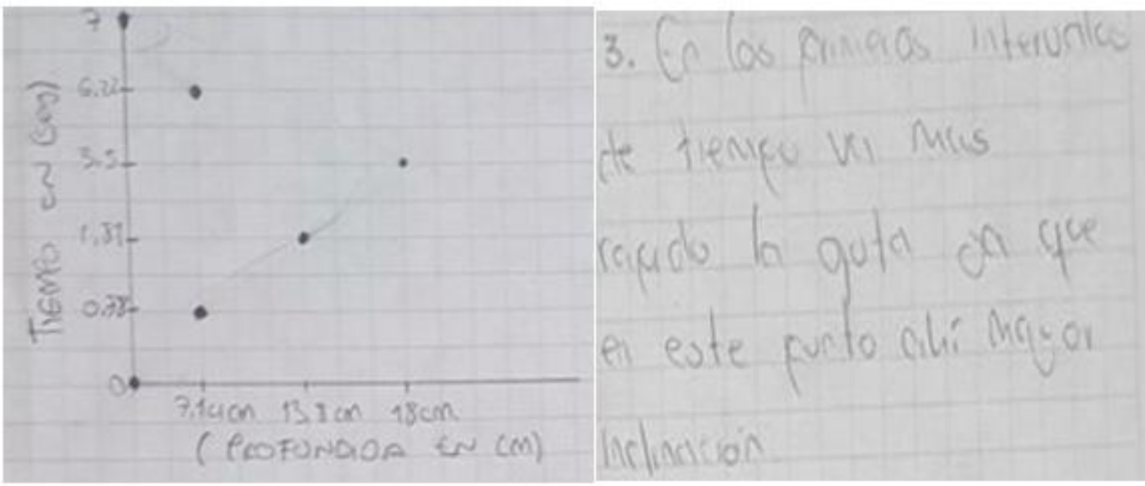


Ilustración 19solución tercer punto

4. Encuentre la velocidad a la que varía la profundidad de la gota en los siguientes intervalos de tiempo:

INTERVALO	**VELOCIDAD**
1.2 seg – 3 seg	
1.94 seg- 3 seg	
2.25 seg- 3 seg	
2.68 seg- 3 seg	

La intensión de este punto era que los estudiantes por medio de la información dada en la primera tabla y la representación gráfica realizada lograran encontrar la velocidad en diferentes intervalos de tiempo cada vez más cortos o de menor longitud.

Dentro de los resultados se identificó el uso de la fórmula de $v = \frac{d}{t}$ por parte de algunos estudiantes estableciendo la diferencia entre el tiempo final menos el inicial, y por medio de su grafica identificaban la distancia en ese tiempo reemplazando en la formula (ilustración 12 y 13).

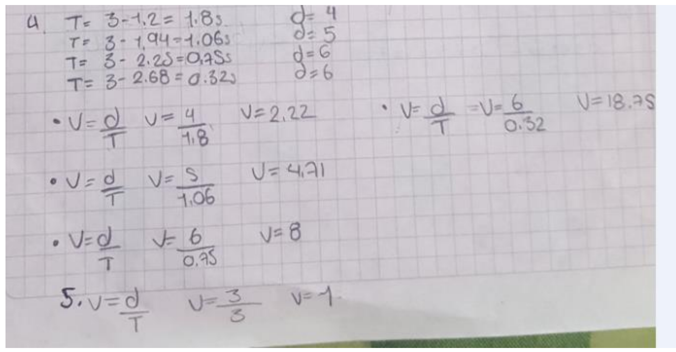


Ilustración 20solución cuarto punto

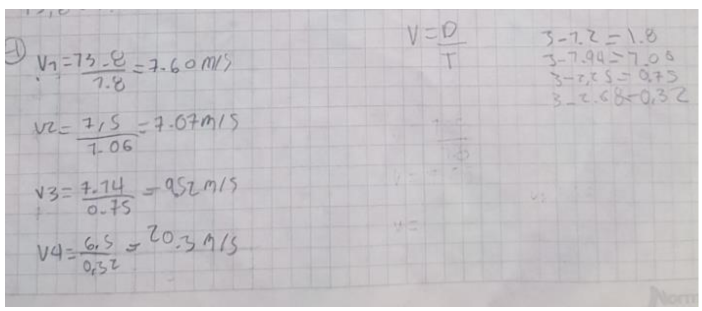


Ilustración 21solución cuarto punto

Algunos estudiantes solo caracterizaron si la velocidad era alta o media por medio de la observación de las representaciones realizadas en los anteriores puntos y la ilustración dada en la guía

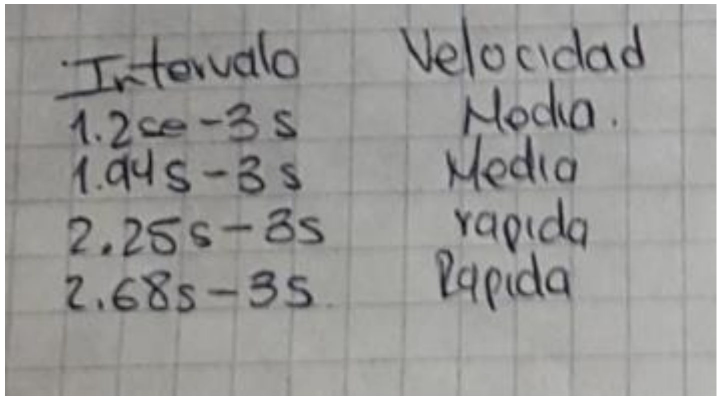


Ilustración 22 solución cuarto punto

Otro uso que dieron a la fórmula de la velocidad fue tomando los tiempos por separados y las profundidades dadas en la primera tabulación, y una vez aplicada la formula sumaron las velocidades, evidenciando que no es claro el concepto de intervalo o simplemente tomaban los tiempos y la profundidad dada en la primera tabulación y tratando de reemplazar en la fórmula de velocidad.

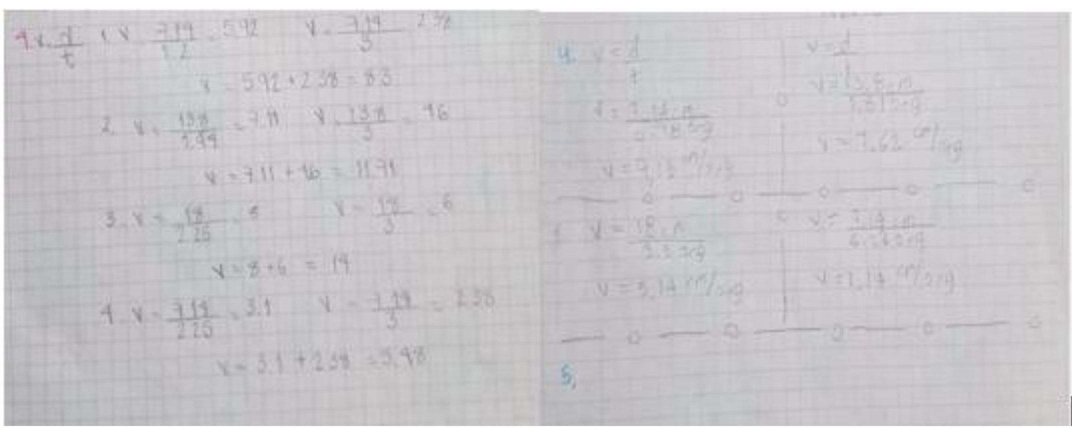


Ilustración 23 solución cuarto punto

5. Estime la velocidad a la que varía la profundidad de la gota exactamente a los 3 segundos.

En el punto anterior se debía hallar la velocidad de la gota en algunos intervalos de tiempo, aunque no utilizaron correctamente la fórmula sabían que con esa expresión al remplazar los datos obtenían un valor mientras que la velocidad en un punto específico no era muy claro para ellos, manifestando algunos estudiantes que la gota no llevaría velocidad en el punto 3 porque encontrarse quieta la gota en ese instante. Por el contrario otros intentaron utilizar el razonamiento anterior con formula $v = \frac{d}{t}$.

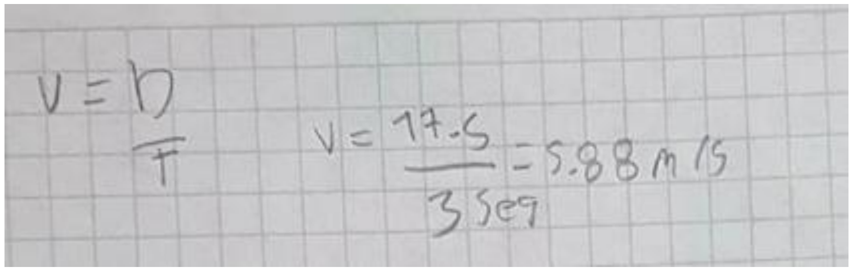


Ilustración 24 solución quinto punto

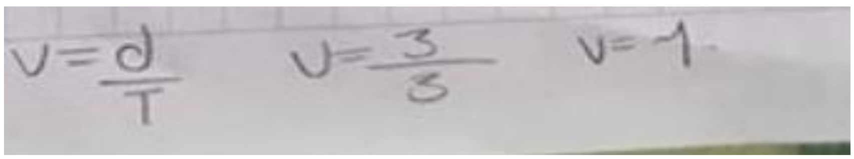


Ilustración 25 solución quinto punto

6. Que diferencias en términos de la situación encuentra entre los valores determinados en los ítems 4 y 5.

La intensión de este punto era que el estudiante lograra identificar qué es lo que pasa cuando se mira la velocidad en un intervalo, y en un punto fijo, identificando que pasa cuando el intervalo se hace cada vez más pequeño.

Un grupo de estudiantes respondió que si varía el tiempo varía la velocidad, pero no realiza como tal el análisis de la diferencia que existe dentro de los ítems 4 y 5.

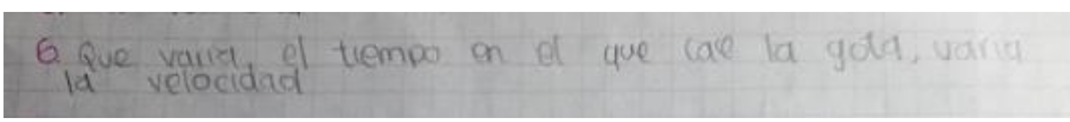


Ilustración 26 solución sexto punto

la velocidad media se puede definir como el desplazamiento de un cuerpo en un lapso de tiempo determinado siendo el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo mientras que a velocidad instantánea es el límite de la velocidad cuando el tiempo tiende a cero es decir calcular la velocidad en un intervalo de tiempo lo más pequeño posible.**Fuente especificada no válida.**

7. Es posible encontrar un método general para estimar la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para un tiempo específico.

En el siguiente enlace se encuentra una representación de la relación entre la profundidad y el tiempo para la situación de la caída de la gota de agua.

https://ggbm.at/v6ERxMsc

A partir de esta representación, realice la siguiente construcción:

- Construya una recta tangente a la curva en cualquier punto A entre 0 segundos y 3.3 segundos.
- Construya el eje de la parábola.
- Encuentre el punto de intersección B entre el eje y la parábola.
- Encuentre el punto de intersección C entre la tangente y el eje.
- Construya una paralela al eje x que pase por el punto de tangencia A.
- Halle el punto de intersección entre la paralela y el eje de la parábola.

Ubique el vértice de la parábola Estudie la relación entre las distancias BD y CD. Exprésela simbólicamente.

La idea central de este punto era determinar por medio de relaciones el comportamiento de una recta tangente a la parábola en un punto, para ello era necesario el uso del software Geogebra.

Este punto aunque no tiene evidencias físicas pudimos detectar conversaciones entre los estudiantes donde determinaban que CD era el doble de BD sin importar en que parte de la parábola se encontrara.

Los problemas que surgieron en el desarrollo de este punto se debieron al poco conocimiento que los estudiantes poseen en el manejo de este software, desviando la intención del punto a solo la construcción.

A partir de las dificultades evidenciadas se toma la decisión de modificar el punto, donde ya no hacen la construcción los estudiantes si no es suministrada en un documento o archivo Geogebra para la manipulación, centrando así la atención en las relaciones presentes.

8. Según la relación determinada anteriormente ¿Cómo hallar la pendiente de la recta tangente para cualquier tiempo?

La intensión de este punto es que el estudiante por medio de la manipulación realizada anteriormente logre encontrar una generalidad de la recta tangente identificando las variables que influyen en esta.

Solo un grupo de estudiantes resolvió este punto colocando la fórmula de la pendiente, pero no realizó ningún análisis ni reemplazo valores por lo tanto no se puede realizar un análisis de ello.

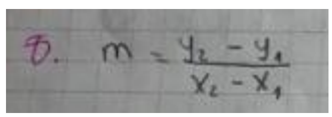
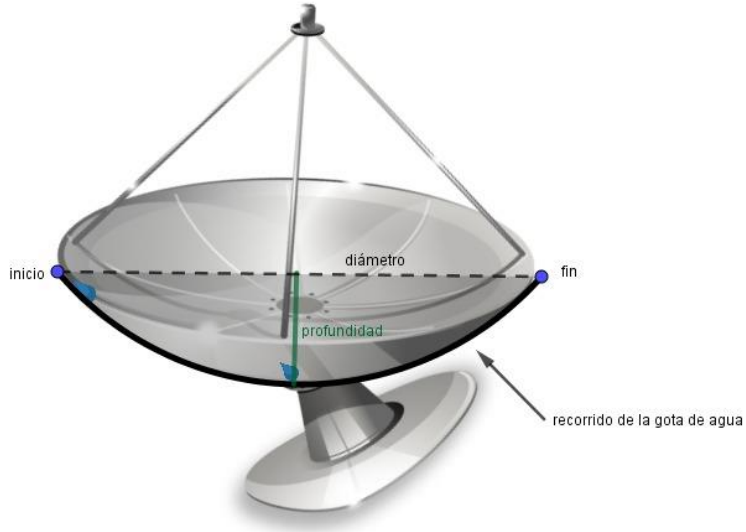


Ilustración 27 solución octavo punto

De los tres últimos puntos no contamos con evidencias físicas puesto que el tiempo de la sesión no fue suficiente por actividades que se estaban realizando en el colegio.

8.4.SEGUNDA VERSIÓN ACTIVIDAD CAÍDA DE UNA GOTA DE AGUA

Una gota de agua cae en una antena parabólica, se desea estudiar y analizar el comportamiento que describe su caída, así como su rapidez en diferentes tiempos.



En la siguiente tabla se presenta una descripción de la profundidad a la que se encuentra la gota de agua para diferentes tiempos:

Tabla 5

TIEMPO	**PROFUNDIDAD**
0 seg	0 cm
0.78 seg	7,13 cm
1.2 seg	10,23 cm
1.94 seg	14,42
2.25 seg	15,7
2.68 seg	17,24
3 seg	17,63
3.5 seg	18 cm
5,06 seg	14,42
5.8 seg	10,23
6.22 seg	7,13 cm
7 seg	0 cm

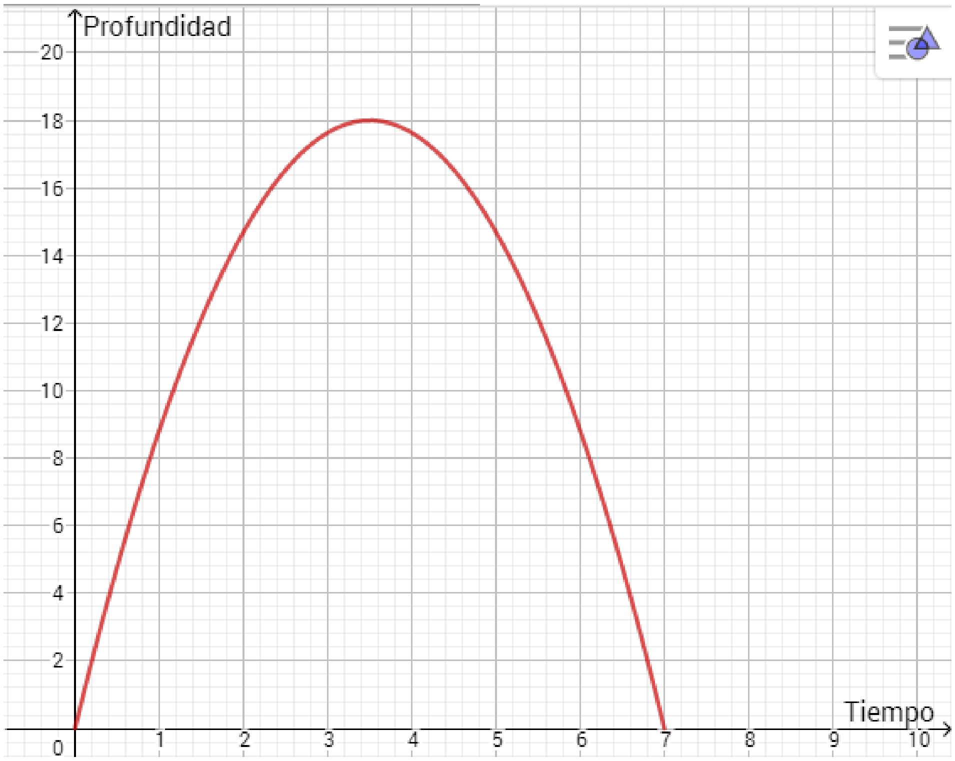


Ilustración 28 profundidad vs tiempo

1. ¿Qué curva describe el comportamiento de la profundidad y el tiempo de la gota? ¿por qué?
2. Según la representación (ilustración 2) ¿en qué momentos cree usted que va más rápido y más lento la gota?
3. Teniendo en cuenta la tabla 1, encuentre la velocidad (expresada en cm/seg) a la que varía la profundidad de la gota en los siguientes intervalos de tiempo:

INTERVALO	**VELOCIDAD**
1.2 seg – 3 seg	
1.94 seg- 3 seg	
2.25 seg- 3 seg	
2.68 seg- 3 seg	

4. Estime la velocidad a la que varía la profundidad de la gota exactamente a los 3 segundos.

5. Que diferencias en términos de la situación encuentra entre los valores determinados en los ítems 4 y 5.
6. Es posible encontrar un método general para estimar la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para un tiempo específico.

En el siguiente enlace se encuentra una representación de la relación entre la profundidad y el tiempo para la situación de la caída de la gota de agua.

https://ggbm.at/nksDXcZP

Sabiendo que la recta AC es tangente a la curva en el punto A; la recta CB es el eje de la curva; la recta AD es paralela al eje X y pasa por el punto de tangencia A.

7. Estudie la relación entre las distancias BD y CD. Exprésela simbólicamente.
8. Según la posición del punto A sobre la curva ¿qué relación encuentra entre la recta tangente y la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para cualquier tiempo?
9. Represente el comportamiento de la velocidad a la que varía la profundidad de la gota de agua para cualquier tiempo.
10. ¿Qué análisis puede realizar de este movimiento?

8.4.1. Pilotaje y Análisis

El día 26 de enero del 2018, se aplicó la segunda versión de la actividad propuesta en el colegio Técnico Tomas Rueda Vergas IED ubicado en la localidad de san Cristóbal, a 23 estudiantes de grado once.

Esta segunda aplicación tiene unos re ajustes con respecto a la primera actividad debido a que en la primera actividad se evidencio que los estudiantes necesitaban conceptos de paso de una interpretación a otra, o la realización dela grafica de la función, aspectos que no permitían observar el cumplimiento de la actividad respecto a los objetivos propuestos, por ello en esta segunda versión se les dio a los estudiantes las representaciones gráficas a analizar concentrando su atención en lo que realmente es importante, para este caso, brindándonos los siguientes resultados:

La mayoría de los estudiantes en el desarrollo del primer punto pusieron en evidencia la práctica geométrica, debido a que principalmente interpretaron el comportamiento de la profundidad y el tiempo como datos que se podían representar en el plano cartesiano en los ejes X,Y, generando como resultado que la curva que describe a este movimiento es una parábola (ilustración 29); hecho identificando también en palabras dichas por un estudiante "parábola porque la profundidad aumenta y luego disminuye a través del tiempo ", haciendo evidente que la profundidad no simplemente aumenta a medida que transcurre el tiempo, notando un cambio en los resultados a comparación de los estudiantes que desarrollaron la primera versión de la actividad donde afirmaron que el movimiento de la gota generaba una recta, sin identificar que la profundidad aumentaba hasta el vértice de la antena parabólica y luego empezaba a disminuir. Adicional a esto unos estudiantes en su análisis describieron que el vértice de la parábola se encontraba en el tiempo 3,5 segundos logrando su profundidad máxima realizando su respectiva representación geométrica (ilustración 30) .

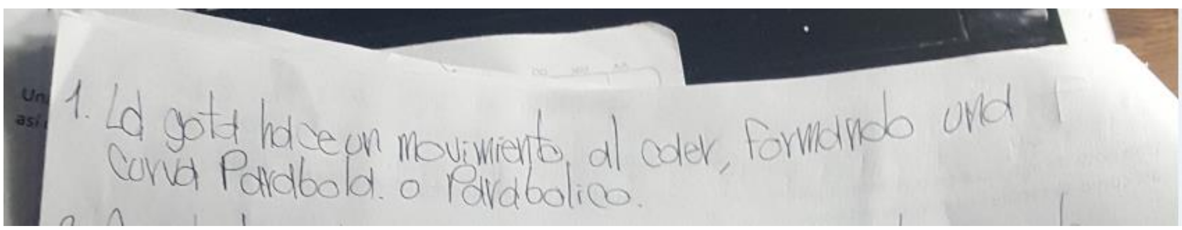


Ilustración 29

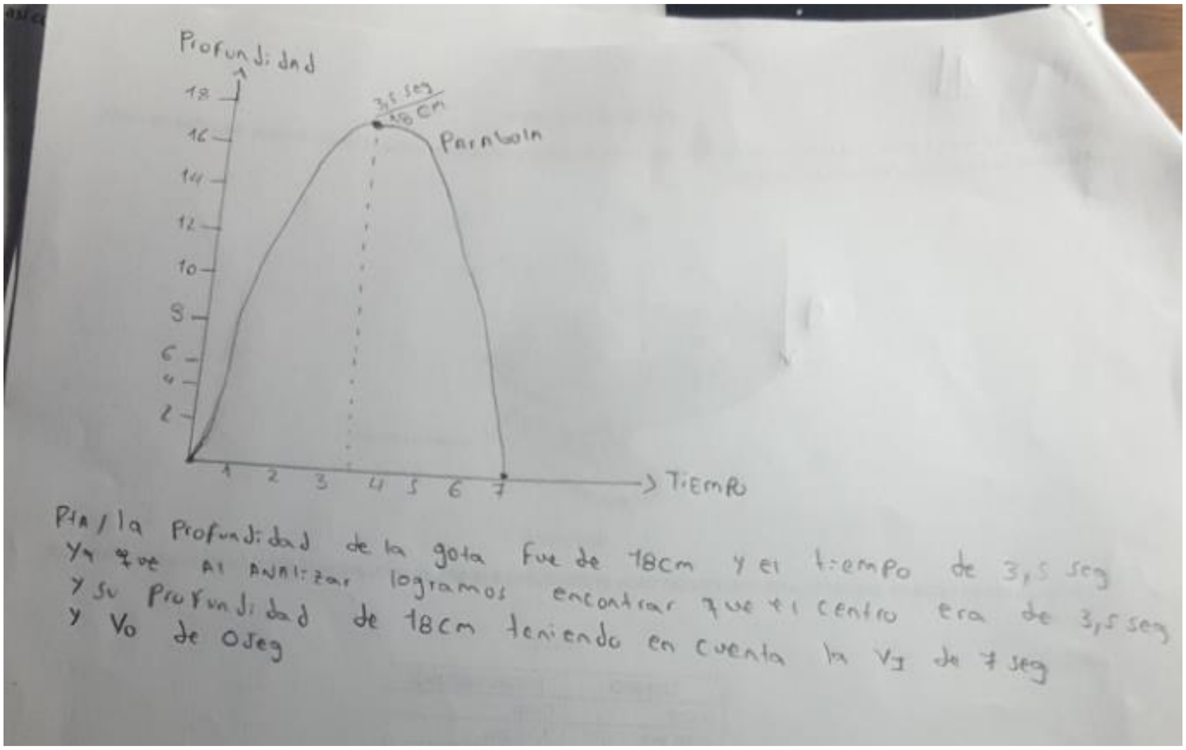


Ilustración 30

En el segundo punto todos estudiantes lograron evidenciar un poco la transversalidad entre la práctica del movimiento y la práctica geométrica; cuando hablamos de transversalidad nos referimos que al realizar el análisis de este punto el estudiante evidencia las dos prácticas ya sea una seguida de la otra o las dos al mismo tiempo.

Consideramos que esta transversalidad se logra debido a que por medio de la representación de la profundidad vs tiempo los estudiantes determinan el movimiento de la gota; observamos que un grupo de estudiantes tomaron la ilustración 2 (profundidad vs tiempo) de la actividad y la relacionaron con la primera (descripción del problema), interpretando que de los 0 segundos a los 3,5 segundos la gota iba cayendo y a partir de los 3,5 segundos hasta los 7 segundos la gota va subiendo, por lo tanto llegaron a la conclusión que "la velocidad inicial de la gota fue la más rápido que la velocidad final" (ilustración 31), por ello consideramos que los estudiantes lograron relacionar el movimiento de la curva con la gráfica propuesta, afirmando que en el intervalo de tiempo de 0 a 3,5 segundos la gota va más rápido mientras y del intervalo restante es decir de 3,5 a 7 segundos la gota va más lento; mientras que otros estudiantes los cuales consideramos que no relacionaron el movimiento de la gota con la gráfica afirman que *"la gota va más rápido de 3,5 a 7 porque es caída libre, la gota va más* *lento de 0 a 3,5 porque va en subida"*, identificando solamente la practica asociada a lo geométrico dejando a un lado el movimiento de la gota.

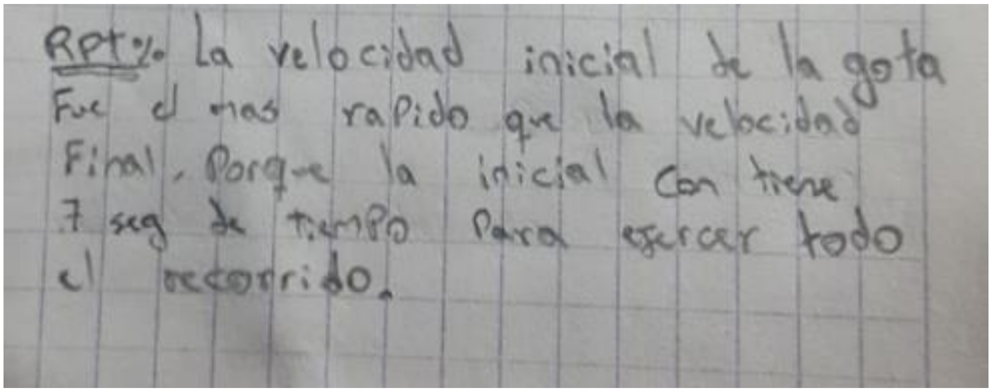

Rpt/. La velocidad inicial de la gota Fue el mas rapido que la velocidad Final, Porque la inicial Con tiene 7 seg de tiempo Para ejercer todo el recorrido.

Ilustración 31

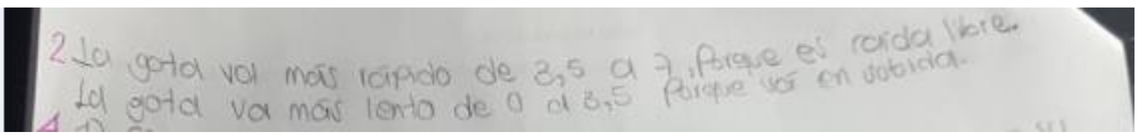

2 La gota va más rápido de 3,5 a 7, Porque es caida libre.
La gota va más lento de 0 a 3,5 Porque vá en subida.

Ilustración 32

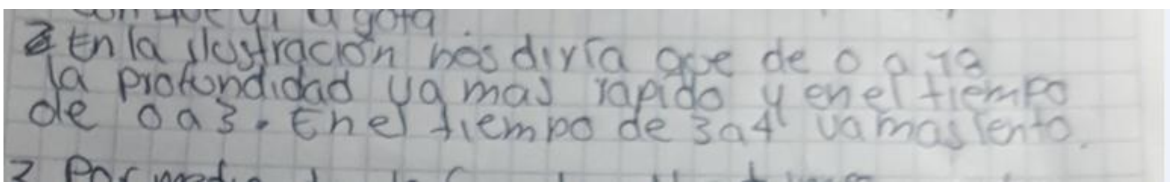

3 En la ilustración nos diría que de 0 a 18 la profundidad va mas rápido y en el tiempo de 0 a 3. En el tiempo de 3 a 4 va mas lento.

Ilustración 33

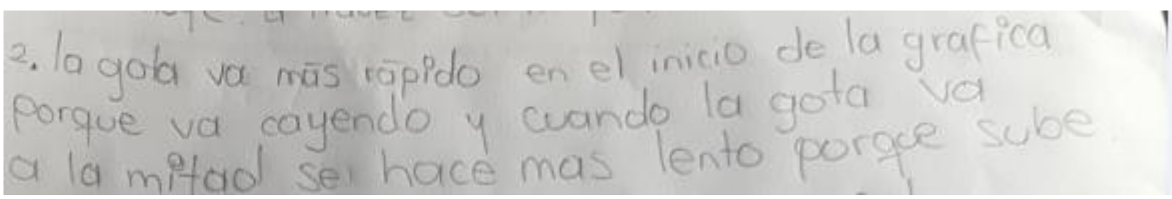
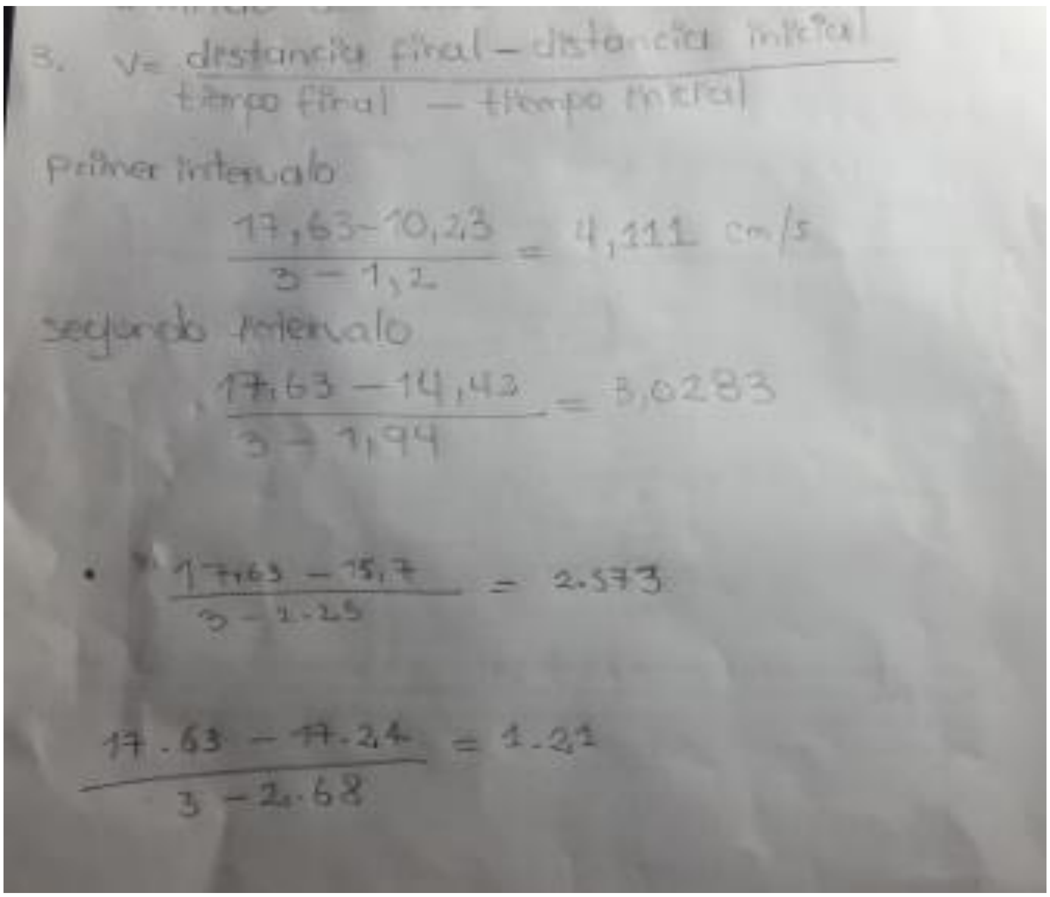

2. la gota va más rápido en el inicio de la grafica porque va cayendo y cuando la gota va a la mitad se hace mas lento porque sube

Ilustración 34

En el desarrollo del tercer punto no se logra evidenciar la perspectiva infinitesimal ya que los estudiantes a partir de los datos dados en la tabla 1 relaciona los intervalos de tiempo y los intervalos de profundidad con la formula $velocidad = \frac{distancia\ final - distancia\ inicial}{tiempo\ final - tiempo\ inicial}$, reemplazando los datos dando como resultado cuatro velocidades diferentes (ilustración 35). Por ello consideramos como necesario la intervención del docente para que le pregunte al estudiante que es lo que pasa con las velocidades a medida que el intervalo de tiempo cambia, si este intervalo de tiempo aumenta o disminuye, generando la identificación de que si el tiempo es demasiado cercano esta variación va a tender a cero, llegando a profundizar en la practica infinitesimal.

Adicional a esto es necesario resaltar que algunos estudiantes no lograron identificar la correcta variación de la velocidad (ilustración 36) debido a que no aplicaron bien el algoritmo de la velocidad obteniendo resultados que inicialmente disminuyen y luego aumentan; por ello consideramos que el error de estos estudiantes no tiene relación con la interpretación del punto si no que ya son preconceptos que deberían tener los estudiantes con respecto a las expresiones algebraicas



3. $V = \frac{\text{distancia final} - \text{distancia inicial}}{\text{tiempo final} - \text{tiempo inicial}}$

primer intervalo:

$\frac{17,63 - 10,23}{3 - 1,2} = 4,111$ cm/s

segundo intervalo

$\frac{17,63 - 14,42}{3 - 1,94} = 3,0283$

$\frac{17,63 - 15,7}{3 - 1.25} = 2.573$

$\frac{17.63 - 17.24}{3 - 2.68} = 1.21$

Ilustración 35

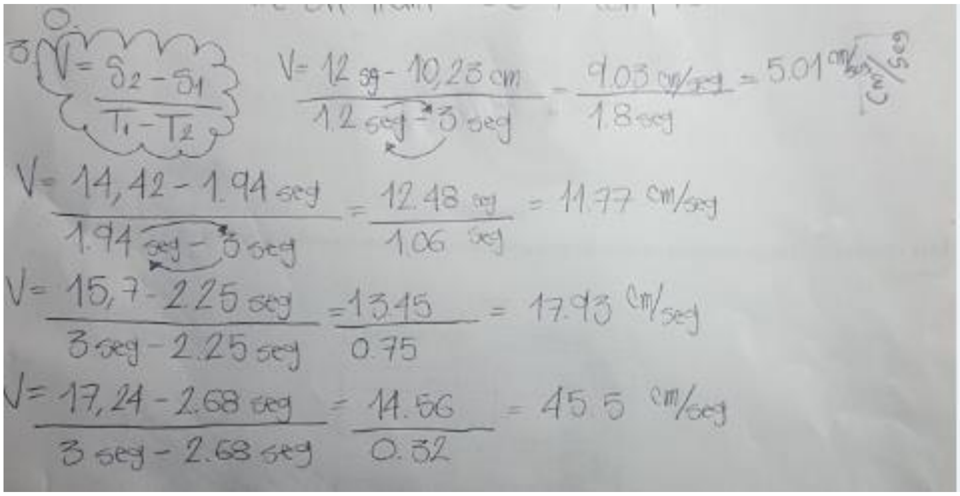


Ilustración 36

En el cuarto punto los estudiantes no evidenciaron la práctica del movimiento debido a que emplearon el algoritmo $velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$, reemplazando los valores dados por la tabla 1; pero algunos estudiantes emplearon la fórmula del tercer punto $velocidad = \frac{distancia\ final - distancia\ inicial}{tiempo\ final - tiempo\ inicial}$ tomando como tiempo inicial 0, llegando al mismo resultado que los estudiantes que aplicaron la formula inicial mencionada. Evidenciando que en el momento en que la distancia inicial y el tiempo inicial es cero la fórmula de la velocidad se convierte solo en una relación de distancia y tiempo que no tiene una variación. Por ello consideramos necesario la intervención del docente para que este le pregunte al estudiante qué relación tiene este algoritmo con el movimiento de la partícula.

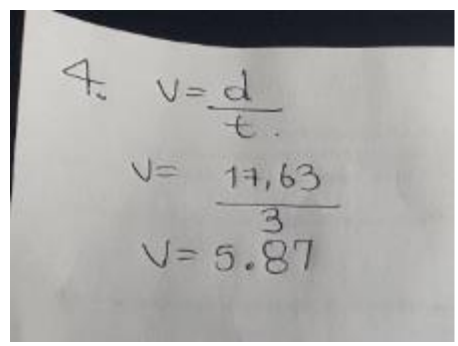


Ilustración 37

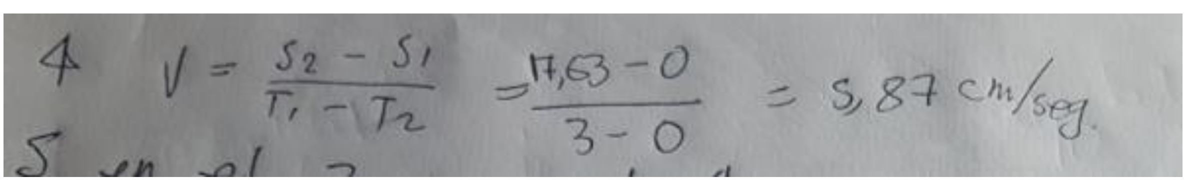


Ilustración 38

En el quinto punto muy pocos estudiantes lograron evidenciar la transversalidad entre lo infinitesimal y el movimiento ya que al comparar lo realizado con el tercero y el cuarto punto el estudiante afirma que en el tercer punto debía encontrar velocidades en dos intervalos de tiempo distintos, pero en el cuarto punto solamente debían encontrar la velocidad de un punto el cual simplemente se reemplaza; por lo tanto consideramos que para lograr esta transversalidad es importante la intervención del docente el cual puede cumplir la función de orientador o desarrollador a partir de los datos obtenidos por los estudiantes evidenciando la diferencia de los resultados cuando se observa la velocidad de un objeto en un tiempo específico y cuando se observa la velocidad de un objeto en un intervalo de tiempo que cada vez se hace más reducido.

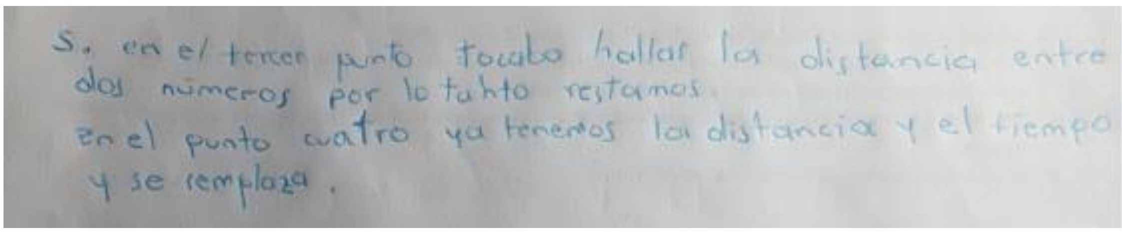


Ilustración 39

En el sexto punto algunos de los estudiantes evidenciaron la práctica del movimiento, ya que identifican que la fórmula que les permite encontrar un método general para estimar la velocidad a la que varía la profundidad de la gota para un tiempo específico es la de la velocidad $velocidad = \frac{distancia\ final - distancia\ inicial}{tiempo\ final - tiempo\ inicial}$. Tomando la gota como un movimiento ya que varía su velocidad dependiendo el tiempo y la distancia en donde se encuentre, observando la partícula como dinámica y no estática.

En el séptimo punto los estudiantes hacen evidente la práctica geometría e infinitesimal ya que principalmente afirman que:

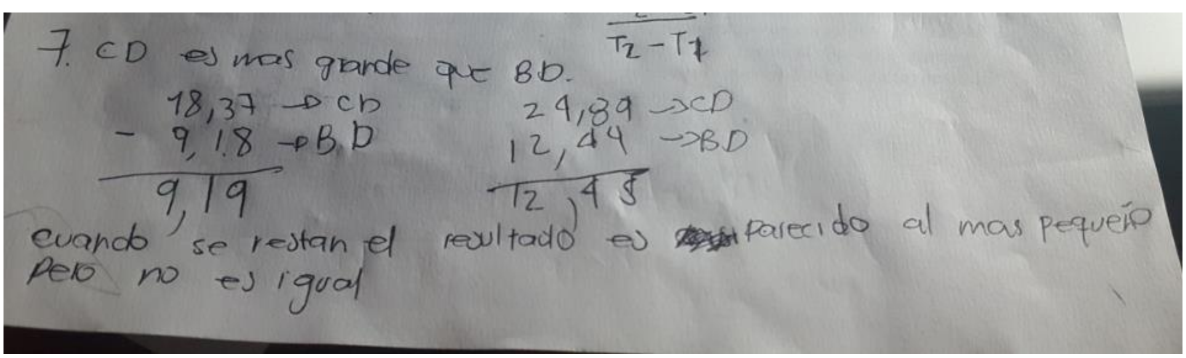


Ilustración 40

Mostrando que hay una relación geométrica en el segmento CD y BD, pero no logran establecerla debido a que los decimales no les coinciden olvidándose de las aproximaciones.

Pero otros estudiantes si logran identificarla específicamente afirmando que “BD es la mitad de CD” realizando lo siguiente:

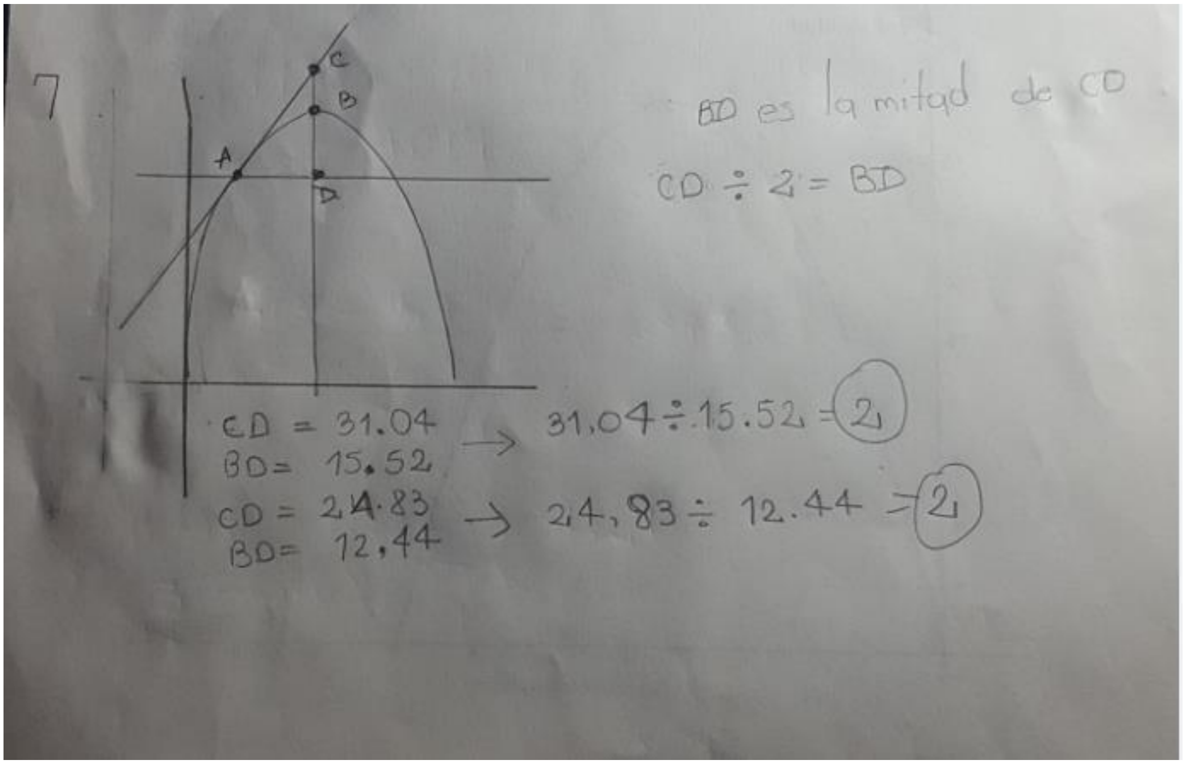
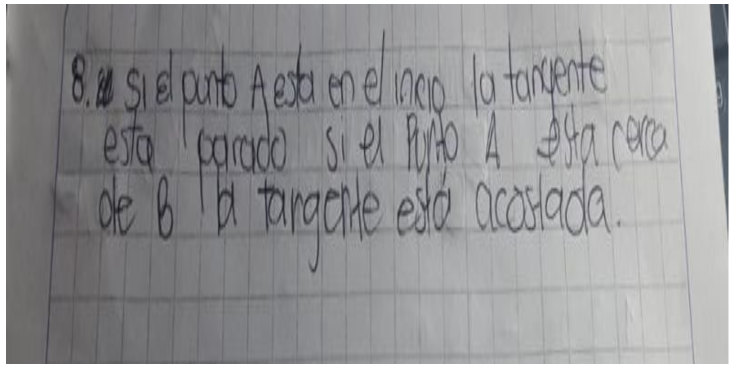


Ilustración 41

Realizando la operación de división identificando que el segmento CD es el doble que BD, consideramos que implícitamente se hace uso de la proposición de Apolonio usada por Fermat y explicada anteriormente lo que le permitió identificar la razón a la que debe darse para lograr que la recta que está pasando por la curva sea tangente; adicional se logra desarrollar la idea infinitesimal ya que cuando el punto A se hace más cercano a B las distancias son más pequeñas hasta volverse cero.

En el punto ocho se evidenciaron la transversalidad entre el movimiento y lo infinitesimal igual que en el punto siete, debido a que parten de la construcción geométrica. En este punto los estudiantes respondieron:

Ilustración 42


8. Si el punto A esta en el inicio la tangente esta parado si el Punto A esta cerca de B la tangente está acostada.

Evidenciando que hay una variación en la inclinación de la recta tangente y que cuando el punto A llega a estar sobre puesto al punto B la tangente no tiene "inclinación" ya que esta "acostada"; resaltando que la "inclinación" de la recta tangente depende del movimiento de la gota ya que si esta en los primeros tiempos su "inclinación será mayor".

Pero otros estudiantes afirmaron lo siguiente:

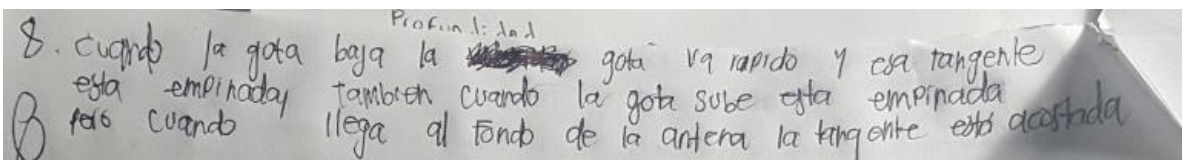

Profundidad
8. cuando la gota baja la gota va rapido y esa tangente esta empinada y tambien cuando la gota sube esta empinada pero cuando llega al fondo de la antera la tangente está acostada

Ilustración 43

Haciendo evidente que ellos consideran que la inclinación de la recta va a ser igual cuando la gota está cayendo que cuando la gota está subiendo; por ello consideramos necesario la intervención del docente con diversas preguntas para que el estudiante logre encontrar la relación que tiene la inclinación de la recta tangente con la velocidad y que pasa cuando el punto A se acerca al punto B, haciendo que las distancias de estos dos puntos sobre las curvas sean más pequeños hasta hacerse cero ó que pasa cuando A sobre pasa a B, generando que el estudiante analice casos específicos y los relacione con la velocidad de la gota.

En el punto nueve el estudiante evidencia la práctica de lo infinitesimal con lo de movimiento, ya que principalmente respondieron que para representar el comportamiento de la velocidad a la que varía la profundidad de la gota es la relación de distancia dividida tiempo, involucrando directamente el movimiento ya que este hace que estas dos variables cambien; pero otros estudiantes realizaron la siguiente gráfica:

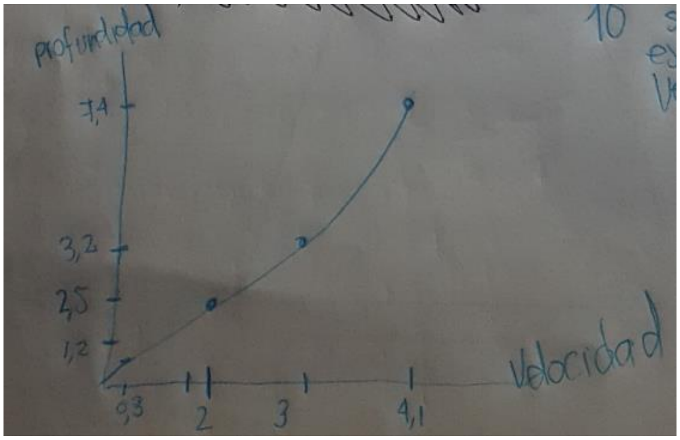


Ilustración 44

En la cual encontramos una relación de velocidad vs profundidad, la cual realizaron con los datos obtenidos en el tercer punto y las profundidades utilizadas para encontrar esa velocidad determinada evidenciando que a medida que el tiempo cambia ya que este tiene estrecha relación con la velocidad, la relación de la velocidad con la profundidad va tendiendo a cero. En este caso también consideramos la necesidad de la intervención del docente pero no solo realizando preguntas específicas si no que es necesario que el evidencie la forma en la que espera que el estudiante represente la relación de la velocidad a la que varía la profundidad, y si es necesario construir la solución a esta pregunta por medio de la socialización y el aporte de los demás estudiantes.

Y en el punto 10 los estudiantes evidencian la transversalidad entre la práctica infinitesimal, de movimiento y geométrica, ya que afirman que:

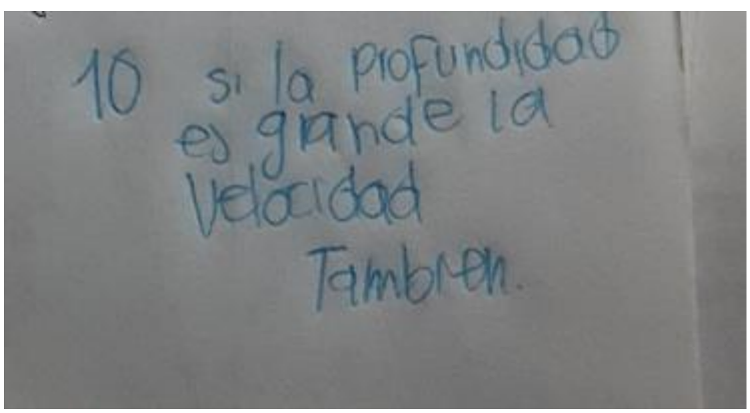


Ilustración 45

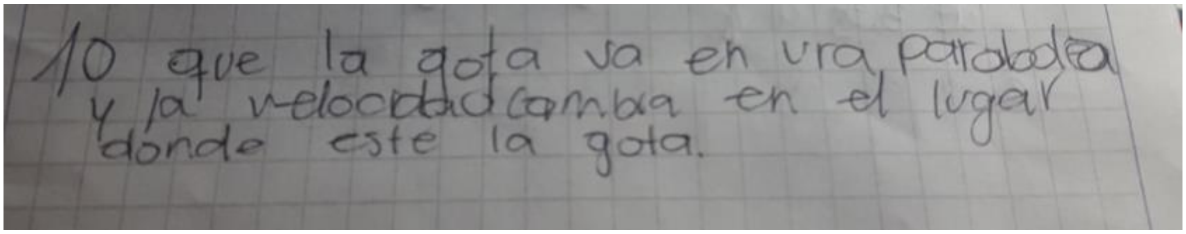


Ilustración 46

Generando una dependencia entre la profundidad y la velocidad por medio de todos los análisis realizados previamente en los anteriores puntos.

Por lo tanto podemos afirmar que la actividad si genera el análisis de prácticas matemáticas (geométrica, infinitesimal y de movimiento) asociadas a la derivada en los fundamentos del cálculo por separadas y en conjunto generando la relación entre ellas y la transversalidad. Pero adicional a esto afirmamos que esta actividad es una herramienta de apoyo al estudiante la cual le permite el análisis de las practicas matemáticas; que se debe desarrollar en diversas sesiones ya que es necesario que el estudiante analice más a fondo para llegar a resultados más concretos y que es necesario la intervención del docente en los anteriores puntos mencionados.

9. CONCLUSIONES

Las consideraciones que se realizaron en el presente trabajo nos permitieron evidenciar que la interpretación de la historia de los fundamentos de la derivada a partir de la idea de prácticas matemáticas facilita el abordaje del concepto de derivada en los estudiantes. Abre un espacio de interpretación y análisis propio de los estudiantes, permitiéndoles ver más allá que un simple algoritmo, ya que en el sentido de cada una de las prácticas encontramos el desarrollo de diferentes autores que permiten que el estudiante interprete y analice cada práctica de diferentes formas.

En la enseñanza de la derivada encontramos un sinfín de actividades que permiten llegar al concepto que hoy en día se conoce en los libros de cálculo; pero recomendamos la búsqueda de actividades que le permitan al estudiante el análisis de las practicas matemáticas encontradas en los fundamentos del cálculo ya que como anteriormente lo mencionamos es importante que el estudiante entienda el sentido de lo que está haciendo y no simplemente desarrolle un algoritmo que no fomenta el análisis. Identificando así el porqué, el cómo y el para qué del uso de las matemáticas, hallándole sentido a los objetos que conforman su formación académica.

Los aspectos que logran configurarse en esta experiencia hacen evidente que el uso y conocimiento de la historia permite entrever asuntos que se usan y son comunes en la matemática, pero que no son estipulados en la enseñanza escolar de la derivada como las prácticas geométricas, infinitesimales y de movimiento de la derivada.

Con respecto al instrumento diseñado (la actividad de enseñanza basada en la interpretación y análisis de prácticas matemáticas que se identifican e interpretan en los fundamentos del cálculo, asociadas a la derivada), a partir de la experiencia es visible que esta fomenta las practicas geométricas, infinitesimales y de movimiento, junto con el software Geogebra, ya que en este se puede evidenciar el movimiento de la caída de la gota de agua en todos los instantes de tiempo propuestos, permitiéndole acercarse al concepto de derivada implícitamente, pero esto solo se logra con un buen acompañamiento del docente, ya que este debe estar en la capacidad de observar diferentes practicas e intentar relacionarlas para lograr mejorar su comprensión y análisis por parte de los estudiantes. .

Para llegar a la realización del diseño de la actividad se tuvo en cuenta que a pesar de que el análisis se fundamentó en las prácticas matemáticas y discursos, hacemos hincapié en el hecho de buscar a profundidad las formas de interpretar los discursos, contextos y prácticas que fundamentaron los tratamientos que hicieron los autores en la antigüedad, como un medio para ampliar las perspectivas de aplicación de la enseñanza actual del Cálculo.

En el diseño y pilotaje de esta actividad se evidencio la necesidad de llevar las prácticas anteriormente identificadas al aula ya que permite un desarrollo implícito de la noción de derivada, dándole una visión más amplia al estudiante de lo que le brinda un simple algoritmo y evidenció el alcance de la relación entre el estudio de las prácticas matemáticas en los fundamentos del cálculo y su enseñanza actual.

Por lo tanto nosotros como futuros docentes de matemáticas deberíamos pensar en nuevas formas de manifestar la actividad Matemática en diversas situaciones de aplicación donde los estudiantes logren obtener un significado verdadero de los elementos que usan al trabajar en Cálculo, brindándole un sentido a todo lo que se haga en el aula con el fin de que el estudiante analice y entienda el uso que tienen las matemáticas; haciendo evidente que esté presente trabajo es tan solo un intento del uso e incremento de la historia de la matemática en el aula y en la formación de estudiantes , quedando por diseñar muchas más actividades que se usen como herramienta para el desarrollo de la historia matemática pero como lo dijimos anteriormente no se espera el relato histórico de la matemática si no que se espera el análisis de acontecimientos y prácticas que permitan desarrollar objetos matemáticos con sentido.

BIBLIOGRAFÍA

Adee, D. (2007). *Philosophiæ naturalis principia mathematica. .* New York.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, vol 8*, 30-46.

Andréu Abela, J. (s.f). *Las técnicas de Análisis de Contenido:Una revisión actualizada.* España: Fundación Centro Estudios Andaluces.

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducciòn al álgebra lineal* (segunda ed., Vol. 1). REVERTÉ.

Avila Godoy, J., Avila Godoy, R., & Parra Bermudez, F. (2013). DESARROLLO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN. *Clame. Capítulo 3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar*, 1223-1230.

Avital. (1995). En L. Lupiañez, *Reflexiones Didácticas sobre la Historia de la Matemática.* SUMA.

Barbin, & et al. (2000). En M. Martínez Rodríguez , & J. Chavarría Vásquez , *Usos de la historia en la enseñanza de la matemática.* Costa Rica: VIII FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA.

Barrera García, F. (30 de 11 de 2017). *Historia del cálculo.* Obtenido de http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CalculoDiferencial/documents/material/historia_calculo.pdf

Barros, P. (sf). *Los Grandes Matemáticos. capitulo 6 Newton.* Recuperado el 20 de 12 de 2017, de http://www.cienciamatematica.com

Bell, E., & Puig Adam, P. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturamente su enseñanza. *SUMA*, 12.

Bello Chavez , J., & Forero Poveda , A. (2016). *El conocimiento Didactico del profesor de matemáticas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Cantoral. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En Serna, Castañeda, & Montiel, *Construcción de la recta tangente variacional a traves de los usos del conocimiento del siglo XVII y XVIII.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (1988). HIstoria del Cálculoy su Enseñanza: Trazado de Tangentes al concepto de Derivada. *Memorias de la segunda Reunión Centroamericana ydelCaribe sobre Formaciónde Profesores e InvestigaciónenMatemática Educativa*.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, 83-102.

Cantoral, R., Reyes, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,*, 91-116.

De Faria Campos, E. (s.f.). *Elementos de HIstoria delCálculoDiferenciale Integral.* Costa Rica: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

De la Torre Gomez, A., Suescún Arteaga, C. M., & Alarcón Vasco, S. A. (2005). El método de máximos y mínimos de Fermat. *Lasallista de investigación*, 31-37. Obtenido de El mpetodo de máximos y mínimos de Fermat.

Delgado, R., & Ruiz, F. (20 de 12 de 2017). *La Revolución de la Fisica y su impacto en las Ciencias del siglo XVII.* Obtenido de http://www.galeon.com/histofis/7REV1F.htm

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada.* Mexico: Diaz de Santos.

Durán, A. (2006). *La polémica sobre la invensión del cálculo infinitesimal.* Barcelona: Crítica S.L.

Durán, A., & Arántegui, J. (2006). *La Polémica sobre la Invensión del Cálculo.* Barcelona: Crítica, S. L.

Farfán. (1983). En R. Cantoral, *Un estudio de la formación social de la analiticidad.*

Glas, E. (2007). En J. Bello, & A. Forero, *El conocimiento Didáctico del Profesor de matemáticas* (pág. 31).

González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de la resignificación. En L. Serna, *Estudio socioepistemológico de la tangente como objeto escolar.*

Graterol, J., Sánchez, Y., Álvarez, A., & Montero, D. (2009). *Fisica: Movimiento.* Obtenido de http://www.monografias.com/trabajos75/fisica-movimiento/fisica-movimiento.shtml

Guicciardini, N. (2006). *LA ÉPOCA DEL PUNTO: EL LEGADO MATEMÁTICO DE NEWTON EN EL SIGLO XVIII.* Universidad de Siena .

Hawking. (2003). En Á. Ruiz, *Historia y filosofía de las matemáticas.* San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Katz. (2009). En E. De Faria Campos, *ELEMENTOS DE HISTORIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.*

Kitcher. (1984). The Nature of Mathematical Knowledge. En J. P. Van Bendegem, & B. Van Kerkhove, *The Unreasonable Richness of Mathematics.*

Lozano Robayo, Y. (2011). Desarrollo del concepto derivada sin la noción de límite. *Tesis de pregrado*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Mahoney, M. S. (1973). *The mathematical career of Pierre Fermat* (Segunda ed.). Universidad de Princenton.

Marquina, J., & et. (1996). Philosophiae Naturalis Principia Mathematica: consideraciones en torno a su estructura matemática. *Revista Mexicana de Física*, 1051-1059.

Martín S, M. (2008). *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral.* España.

Martinez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: Notas históricas y actividades para el aula. *SUMA*, 7-15.

Parra, H. (2005). *Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. .* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (1), 69-90.

Pineda Ruiz , C. (2013). *una propuesta didactica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria.* Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas.* San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Ruiz, Á., Alfaro , C., & Gamboa , R. (s.f.). *APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS, LECCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.* Obtenido de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte12/articulo22.html

Sean Mahoney, M. (1973). *The mathematical career of Pierre de Fermat.* New Jersey: Priceton University press.

Sena Martinez, L. (2015). *Estudio Socioepistemológico de la tangente como objeto escolar.* Mexico D.F.: Instituto Politecnico Naciona.

Serna, L. A., Castañeda, A., & Montiel, G. (2012). *CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE VARIACIONAL A TRAVES DE LOS USOS DEL CONOCIMIENTO DEL SIGLO XVII Y XVIII.* Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa CLAME.

Vilanova, S., & et al. (2001). LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 10.

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer añoi de la universidad. *BOLEMA vol 28*, 449-468.

Zapico, I. (s.f). *Enseñar matemática con su historia*. Recuperado el 20 de Octubre de 2017, de http://soarem.org.ar/Documentos/29%20Zapico.pdf