

**UNA EXPLORACIÓN DE LA INCIDENCIA DE PATRONES CORPORALES EN
LA DETERMINACIÓN DE ESTADOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO CON
EL JUEGO DE LA ESCALERA**

AUTOR
CLAUDIA PAOLA CÁRDENAS HOYOS

DIRECTOR
JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN INNOVACIÓN

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2018

UNA EXPLORACIÓN DE LA INCIDENCIA DE PATRONES CORPORALES EN LA DETERMINACIÓN DE ESTADOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO CON EL JUEGO DE LA ESCALERA

Contenido

1.	Resumen ejecutivo	4
2.	Descripción del problema.....	7
3.	Objetivos	9
3.1.	General.....	9
3.2.	Específicos	9
4.	Fundamentación teórica del trabajo	10
4.1.	Diseños didácticos para todos y con todos.	10
4.2.	Formación matemática en el aula	11
4.2.1.	Aprendizaje matemático.....	11
4.2.2.	Inclusión en el aula de matemáticas	13
4.3.	Aprendizaje de la aritmética	14
4.3.1.	Aproximación a la noción de cantidad	15
4.3.2.	El proceso de subitización y la numerosidad	16
4.4.	Trayectorias hipotéticas de aprendizaje THA.....	16
4.4.1.	Trayectoria Hipotética de aprendizaje de Subitización	18
4.4.2.	Trayectoria Hipotética de aprendizaje de Conteo	20
4.5.	El juego como dispositivo didáctico.....	24
4.5.1.	Aspectos macroestructurales del juego	24

4.5.2. Aspectos microestructurales del juego	25
4.6. Componentes y momentos del juego	27
4.7. El juego de la escalera, instrumento didáctico accesible	28
5. Metodología de trabajo.....	32
6. Desarrollo de las fases de investigación.....	34
7. Referencias	56

1. Resumen ejecutivo

La educación en América Latina ha ido cambiando con el transcurso de los años. En la década de los ochenta surgen políticas relacionadas con la cobertura, que pretendían llevar a todos los niños en edad escolar a la escuela. Sin embargo, con esta política en marcha llegan a las escuelas diversos tipos de poblaciones; accedieron alumnos que hasta el momento habían sido excluidos del sistema educativo. Al garantizar mayor acceso a la educación empieza a ser necesario implementar políticas que promuevan una educación de calidad en la diversidad de las aulas; en la década de los noventa se proclaman políticas en torno a la equidad y la inclusión consistentes en la actualización del currículo, desarrollo de materiales didácticos y la formación de docentes para la puesta en práctica de los nuevos currículos (UNESCO/OREALC, 2001). En la primera década del siglo XXI es evidente el requerimiento de una re-conceptualización profunda del sistema educativo conducente al acogimiento de la diversidad (ONU, 2008; MEN, 1998).

Los ambientes de enseñanza suelen no tener en cuenta diferencias de aprendizaje de los estudiantes, ni incluir variedad de recursos de aprendizaje en las aulas, una de las razones es atribuible a la formación docente que no tematiza estos aspectos y por lo tanto no refina su puesta en práctica (Opertti, 2009); a pesar de la puesta en marcha de los experimentos de enseñanza aún falta investigación que intente integrar nuevas posibilidades de instrumentación que ayude al profesor a tramitar las complejidades del aula y su gestión (Llinares, 2014). Es por esto que se hace necesario indagar acerca de diferencias en características de las personas durante los procesos de aprendizaje y cómo tenerlas en cuenta en el diseño de ambientes de aprendizaje que promuevan una educación con equidad e inclusión, es decir una educación con todos y para todos.

Para la constitución de estos ambientes de aprendizaje Bransford, Brown y Cocking (2003) citados por Laurillard (2012) mencionan algunos principios de enseñanza que deben tener en cuenta los docentes considerando los conocimientos previos de los estudiantes. Los docentes deben investigar el pensamiento de los estudiantes y así poder proporcionarles retroalimentación hacia la modificación y el refinamiento de sus pensamientos. Se trata de aprovechar e intervenir la zona de desarrollo próximo de cada

estudiante hacia el objetivo de aprendizaje planteado inicialmente. Laurillard (2012) promueve ambientes de enseñanza/aprendizaje basados en aprendizaje experimental (Ausubel, 2000) e informado mediante elaboraciones provenientes de las didácticas específicas. El ambiente de enseñanza/aprendizaje trabaja más en atraer el interés de los estudiantes compartiendo la meta del docente, haciendo uso de cuestiones intrigantes que para ellos finalicen en una creación (explicación, toma de posición, forma de hacer, artefacto, etc.) plausible y concisa.

Con la intención de elaborar elementos hacia posibilitar aprendizaje experimental en el aula de matemáticas, en el presente trabajo se realiza una exploración de maneras en que algunos jugadores evolucionan en estados iniciales del juego de la escalera –juego con potencial matemático vinculable con matematización (Freudenthal, 1999) así como con aprendizaje experimental en el sentido de Ausubel (2000)–. Para dicha exploración es fundamental observar el comportamiento de los jugadores, determinar características, semejanzas y diferencias que contribuyan desde el análisis de la información al reconocimiento de estados de aprendizaje, generando opciones para tenerlos en cuenta en diseños didácticos (2014) en el aula de matemáticas.

Durante el desarrollo del juego el jugador prueba y modela conceptos vinculados con sus acciones; a medida que se familiariza con el juego se genera una experiencia significativa, apareciendo una retroalimentación de los procesos. Una práctica desconocida se torna en una experiencia de aprendizaje experimental buscando la solución ideal a la situación, en este caso dominar el juego. En el diseño educativo Laurillard (2012) propone el uso de un conflicto cognitivo como puente en un aprendizaje experimental; en el juego de la escalera los intentos de salir victorioso del juego le van a permitir al jugador pasar por un ciclo de objetivo-acción-retroalimentación-aprendizaje experimental, en el que la reflexión y crítica le permitirán decidirse entre opciones que darían solución a diferentes conflictos en la medida en que pasan por un proceso de observación, predicción y explicación de sucesos que lo lleven a lograr el objetivo propuesto.

En el diseño educativo los docentes tendrían que proporcionar un ambiente de aprendizaje que fomente la reflexión y la autocrítica de los estudiantes, estimulando un proceso metacognitivo en ellos; la instrucción puede ayudar a los estudiantes a aprender a tomar el control de su propio aprendizaje mediante una presentación esmerada, parsimoniosa e incluida en tareas dirigidas a configurar actividades de aprendizaje acerca de los objetivos de aprendizaje y el seguimiento de su progreso en el logro de estos últimos (Bransford, 2006 citado por Laurillard, 2012). Para esto es fundamental tener en cuenta los objetivos y contenidos del curso, las características de las tareas, los roles tanto del docente como de los estudiantes, alineando lo que se pretende lograr con la forma en que se hace y se juzgará el éxito de la acción.

En el presente escrito se pretende indagar sobre características, semejanzas y diferencias en el aprendizaje de las matemáticas que le permita al profesor monitorear las acciones del estudiante y realizar una retroalimentación significativa, construyendo un ambiente de práctica apropiado fundamentado en la idea de una educación con todos y para todos, favoreciendo un ambiente de aprendizaje bajo un diseño pedagógico enfocado en el alumno Laurillard (2012).

Este trabajo se mueve en relación con las siguientes cuestiones:

¿Cuáles expresiones corporales y cognitivas presentan diferentes jugadores al evolucionar en el juego de la escalera? ¿Cuál es la relación entre estas expresiones y los diferentes momentos del juego?

¿Existen particularidades o generalidades en los procesos de aprendizaje de los jugadores durante el juego? ¿Cómo reconocerlas?

¿Existen expresiones corporales características actuadas por los jugadores que permitan relacionarlas con un proceso de aprendizaje matemático? Si existen ¿cómo reconocerlas para comprender estados de aprendizaje de los jugadores?

2. Descripción del problema

En América Latina se han propuesto diversas políticas educativas en las últimas décadas. Desde los años ochenta se ha pretendido mejorar el ámbito educativo con el fin de generar mayor acceso a la educación, promulgándose una educación de calidad para todos. Este cúmulo de propuestas hace que lleguen a las aulas personas provenientes de grupos sociales diversos, con distintas costumbres y condiciones. El aprendizaje matemático basado en la adquisición y refinamiento de competencias ocurre de manera heterogénea, quien llega a las aulas trae consigo un aprendizaje implícito que debe ser valorado, estimulado y refinado en ellas. El acceso a la educación no debe suponer ni grupos sociales, ni poblaciones, ni aprendizajes homogéneos; al contrario, diversidad de todos ellos ingresando a las instituciones educativas.

El Proyecto Principal de Educación (PPE) en América Latina difunde dos dimensiones para la calidad, una asociada a la equidad y la atención a la diversidad y otra referida a la eficiencia y modernización de los sistemas educativos; para favorecer dicha calidad se proponen algunos campos de acción tales como la investigación socioeducativa orientada a la acción, desarrollo de materiales didácticos e innovaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje (UNESCO/OREALC, 2001).

Bajo esta mirada se promulga una educación equitativa, en igualdad de oportunidades para todos de acuerdo a sus expectativas de vida, sus necesidades y su potencial; al incluir diversidad poblacional se debe garantizar oportunidades para todos sin alterar las condiciones de participación y aprovechamiento de acuerdo a las características individuales de los que fuesen incluidos, ya que, “si se llegasen a alterar”, se ofrecerían oportunidades desiguales a personas con necesidades diferentes. Así pues, estas oportunidades deben expresar la transformación del sistema educativo para que pueda dar cuenta de condiciones equitativas en relación con diferentes grupos de personas (IESALC, 2008), una transformación basada en una re-significación acerca de la educación inclusiva:

La educación inclusiva, más que un tema marginal que trata sobre cómo integrar a ciertos estudiantes a la enseñanza convencional, representa un enfoque que examina cómo transformar los sistemas educativos y otros entornos de

aprendizaje, con el fin de responder a la diversidad de los estudiantes. El propósito de la educación inclusiva es permitir que los maestros y estudiantes se sientan cómodos ante la diversidad y la perciban no como un problema, sino como un desafío y una oportunidad para enriquecer el entorno de aprendizaje (Opertti, 2009).

La UNESCO/OREALC (2001) señala que la necesidad de transformar el sistema educativo y elevar su calidad, eficiencia y equidad exige planes de acción que contribuyan a la modificación de los currículos, a la creación de programas que atiendan la diversidad, gestión y formación docente y programas de evaluación de la calidad de los aprendizajes; presentan siete cuestiones de debate en relación con la educación inclusiva mostrando que las modificaciones y creaciones pedidas en 2001 no se han realizado, todo esto debido a algunos aspectos (Opertti, 2009):

- Fuerte resistencia de los docentes a trabajar en escuelas y aulas heterogéneas.
- Falta de competencias y conocimientos sobre cómo abordar las diversidades en los perfiles y en las maneras de aprender de los alumnos.
- Los currículos de formación docentes no abordan en general el análisis de las diversidades.

El predominio del discurso de la desviación que establece jerarquías situando a cada estudiante según sus competencias cognitivas por sobre el discurso inclusivo, pone énfasis en el potencial de aprendizaje de cada estudiante que debe ser descubierto y estimulado de manera progresiva.

Desde este punto de vista se deben forjar procesos educativos que contribuyan a una formación integral con todos y para todos. El proyecto “Desarrollo didáctico y tecnológico en escenarios didácticos para la formación de profesores que acogen la diversidad: factores para su implementación y su validación en la UDFJC” hace parte del programa nacional de investigación AIDETC, que intenta responder cuatro preguntas alineadas con el enfoque de la educación inclusiva. A partir de esta relación de alineación de cada pregunta emergen factores problemáticos. Para la segunda pregunta el factor problemático hace explícito el

requerimiento de establecer hipótesis de aprendizaje compatibles con una matemática para todos (León y otros, 2014).

Enmarcado en esta preocupación es pertinente elaborar elementos que ayuden a poner en acción propuestas de actividad matemática para el ámbito escolar, que promuevan tratos equitativos e incluyentes, es decir, que contribuyan a una educación con todos y para todos, que establece la diversidad de las personas como eje fundante de la interacción y construcción de sociedad haciendo uso de la actividad matemática y las nuevas tecnologías como base para estas interacciones.

En este trabajo de grado se pretende aportar a la constitución de un instrumento didáctico automatizado que, involucrado en la formación de profesores de matemáticas que acogen la diversidad (León y otros, 2017), permita reconocer diferentes estados de aprendizaje de un estudiante en relación con un juego con potencial matemático dentro de una actividad de matematización (Freudenthal, 1999). En particular se pretende elaborar elementos dirigidos a establecer patrones secuenciales de actividad de jugadores durante el desarrollo del juego y estilos de jugador; al mismo tiempo, se pretende que estos elementos sirvan para contrastar una base de conocimiento con la que se ha de proveer a un prototipo robótico que contribuya a un análisis de información de los estados iniciales en los primeros acercamientos de una persona en el juego de la escalera o salto de la rana.

3. Objetivos

3.1. General

Identificar elementos que permitan describir el potencial matemático que surge en el juego de la escalera y en el uso de las reglas de éste para dominar el juego y salir victoriosos, aportando a estados de aprendizaje matemático en quienes lo juegan.

3.2. Específicos

- ✓ Construir un tipo de registro escrito que permita analizar los tipos de jugador en relación con la incorporación de lo aprendido cuando se incrementa el número de fichas, la posición en la que éstas se encuentran, y el tiempo empleado por cada uno de los movimientos; es decir, en relación con estados del juego.

- ✓ Realizar una práctica experimental con personas de diversas poblaciones, para indagar por la relación entre los gestos y los estados de aprendizaje presentes durante el juego de la escalera.
- ✓ Identificar el potencial matemático presente en los diferentes momentos del juego.
- ✓ Determinar algunos patrones corporales de los jugadores que proporcionen información en relación a los diferentes momentos del juego y el estado en el que se encuentran.
- ✓ Identificar elementos que permitan reconocer el estado del juego de un jugador y dar cuenta del estado de aprendizaje presente en ese momento.

4. Fundamentación teórica del trabajo

A continuación se presentan aspectos teóricos relevantes involucrados en el trabajo de grado.

4.1. Diseños didácticos para todos y con todos.

Las nuevas políticas de inclusión fundamentadas en la idea de una educación para todos, han contribuido con la llegada a las aulas de poblaciones diversas; para los profesores es un reto tener la formación necesaria y adecuada que le permita a sus estudiantes lograr un aprendizaje significativo sin importar las características sociales, cognitivas, culturales, físicas y/o emocionales que puedan tener. Es por esto que es fundamental una formación docente en la creación de ambientes de aprendizaje enfocados a la diversidad.

Con el propósito de fomentar ambientes de aprendizaje fundamentados en una enseñanza con todos y para todos se hace necesario pensar en la creación, desarrollo o implementación de recursos que contemplen diferentes necesidades acordes a todo tipo de población; para el área de matemáticas (León, Díaz Celis, & Guilombo, 2014) proponen que los diseños didácticos para todos y con todos deben contemplar los siguientes aspectos de la educación matemática inicial:

- ✓ La práctica matemática, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar construcciones y reconocer construcciones útiles a prácticas matemáticas en cada cultura.
- ✓ La cantidad, la forma y la magnitud como campos que estructuran la matemática escolar y en consecuencia hacen parte de la práctica matemática.
- ✓ Exigencias de orden epistemológico, que refieren a quiénes son “todos”, cuando se consideran diseños curriculares y didácticos en matemáticas.
- ✓ Exigencias de orden práctico, en tanto que la acción didáctica requiere vincular el potencial de enseñanza y aprendizaje con la realización de una acción cultural en un contexto escolar específico, en un tiempo limitado y con grupos de estudiantes con diversidad de condiciones para aprender (León et al, 2013), citado por (León, Díaz Celis, & Guilombo, 2014).

Los diseños con todos, deben considerar el aprendizaje de las matemáticas en una interacción de estudiantes con diferentes condiciones, garantizando unas exigencias en diversos ámbitos de accesibilidad, por audición, por visión, por aspectos táctiles o por aspectos perceptuales de otros órdenes (León, Díaz Celis, & Guilombo, 2014); al manejo de la información de la situación, al registro visogestual; a las formas de representar y operar las relaciones y los objetos matemáticos emergentes desde la información; y a las formas de comunicar y cooperar en el estudio de la información que propone la situación.

4.2. Formación matemática en el aula

4.2.1. Aprendizaje matemático

Para pensar en proponer desde la enseñanza un proceso de aprendizaje matemático se hace necesario tener en cuenta las habilidades matemáticas a desarrollar en los estudiantes, (Rodríguez Molina, 2016) refiriendo a Clements y Sarama (2015) describe cinco aspectos relacionados con habilidades matemáticas, de éstos se resaltan, aquí, dos:

- Fluidez en el procedimiento: habilidad en llevar a cabo la flexibilidad, precisión, eficiencia y conveniencia de los procedimientos.

- Razonamiento adaptativo: capacidad para el pensamiento lógico, la reflexión, la explicación, y la justificación.

Estas habilidades deben ser observadas en un proceso matemático; bajo la perspectiva de la educación matemática realista (EMR) se debe pensar la matemática como una actividad humana de modo tal que debe existir una matemática para todos, donde la comprensión matemática tiene distintos niveles influenciados por el contexto y los modelos bajo un proceso didáctico guiado en un ambiente de heterogeneidad cognitiva, requiriendo una fenomenología didáctica como metodología de investigación desde un punto de vista curricular, fundamentado en la idea de Freudenthal que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola, reconociendo que no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos pero que la mayoría la usarán para resolver situaciones en la cotidianidad (Bressan, s.f)

Por otro lado, Bressan (s.f) plantea que en una idea inicial no se puede matematizar la matemáticas ya que no hay objeto matemático que proporcione una experiencia real, es por esto, que en los ambientes de aprendizaje se debe posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas matemáticas, durante este proceso es importante que el docente anticipa, observe y reflexione acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de los estudiantes, hecho que le permitirá organizar la actividad matemática en el aula reconociendo las habilidades de sus estudiantes.

La EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, Freudenthal (1971, 1991) y Gravemeijer (1994, 2002) citados por Bressan (s.f) proponen los siguientes niveles sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada entre ellos:

i) En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia; ii) en el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o notacionales y las descripciones, conceptos y

procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular; iii) en el nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto, y iv) en el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

El uso de modelos en la EMR no es el mismo usado en la modelización matemática. En la EMR se respetan los modelos propios de los alumnos, siendo usados como puente para acortar la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal, contribuyendo a la construcción de nuevos modelos, avanzando a través de los diferentes niveles para resolver situaciones variadas, posibilitando un razonamiento matemático más formal. Todo esto sin pensar en una clase homogénea, sino una en la cual los estudiantes siguen su propio camino pero manteniendo la clase junta como una unidad que contribuye al trabajo cooperativo.

Bajo esta idea, la didáctica realista ve al estudiante como un sujeto activo y no pasivo, que participa junto con otros en la organización matemática, Freudenthal (1999) citado por Bressan (s.f), menciona que la tarea del estudiante es matematizar, mientras que la del docente es didactizar, trabajando en torno a fenómenos de enseñanza/aprendizaje que emergen en sus aulas, reflexionando y generalizando a partir de estas situaciones hasta modificar su propia práctica, proporcionando oportunidades al estudiante de experimentar la matemática como actividad de reinención.

4.2.2. Inclusión en el aula de matemáticas

Para cumplir este reto actual de la educación es necesario pensar en las diversas necesidades educativas que se pueden presentar en una clase de matemáticas, pensar en diferentes tipos de poblaciones, teniendo presente que estas necesidades educativas no son discapacidades que impidan un aprendizaje, simplemente se debe reconocer que las estrategias de enseñanza deben ser diferentes; que la didáctica sirve para favorecer aprendizajes colectivos, seleccionando o adecuando materiales y herramientas que se

puedan involucrar en el aula para contribuir al de todos los estudiantes, y quizás sin tener que modificar los objetivos de aprendizaje (CAST, 2011).

Se trata de considerar el acceso a todos los aspectos del aprendizaje: En los ambientes de aprendizaje, como colegios o universidades, la variabilidad individual es la norma y no la excepción. Cuando los currículos son diseñados para atender la media imaginaria no se tiene en cuenta la variabilidad real entre los estudiantes. Estos currículos fracasan en el intento de proporcionar a todos los estudiantes unas oportunidades justas y equitativas para aprender, ya que excluyen a aquellos con distintas capacidades, conocimientos previos y motivaciones, que no se corresponden con el criterio ilusorio de “promedio”. (CAST, 2011, p. 3)

Para lograr una inclusión en el aula de matemáticas se debe pensar en la transformación de los materiales, herramientas y recursos que se usan en el aula, es necesario pensar en una adaptación de las estrategias que permitan a todos los estudiantes obtener conocimientos, ya que es necesario considerar las características individuales de cada estudiante para establecer relaciones inter a intra personales que permitan un aprendizaje a través de la interacción con los otros y el descubrimiento por medio de nuevas experiencias, así pues se trata de buscar una adaptación del proceso de enseñanza/aprendizaje que permita el uso de diferentes herramientas y procesos.

4.3. Aprendizaje de la aritmética

Para desarrollar un proceso de enseñanza/aprendizaje de la aritmética es necesario pensar en los procesos matemáticos como una actividad propia del ser humano, el reconocimiento de cantidades sería una actividad fundamental para el desarrollo de actividades que requieran mayor exigencia y conectadas con asuntos sociales cotidianos (Schwartz, 1988; León et al., 2014).

La percepción de la cantidad permitiría modelar problemas cuantitativos cotidianos y tomar decisiones; si se quisiera hablar de situaciones problemas de tipo aditivo o multiplicativo es necesario tener en cuenta ciertas habilidades matemáticas que se deben

adquirir antes de llegar a estos procesos, estas habilidades enfocadas a conteo, subitización, reconocimiento de cantidades y su comparación.

4.3.1. Aproximación a la noción de cantidad

Para llevar a cabo un proceso adecuado con los estudiantes es necesario que ellos comprendan los sistemas de numeración, su estructura, organización y regularidades, para ello deben identificar la noción de cantidad, Dickson (1991) citado por el MEN (1998) menciona que:

“Antes de ingresar a la escuela la mayoría de los niños están familiarizados de manera intuitiva con el sistema de ‘unidades y decenas’ para expresar los números en forma oral. Sin embargo, es necesario proporcionar en la escuela experiencias apreciativas del tamaño de los números para que comprendan la importancia de la posición de las cifras dentro de los mismos números” (p.28-29)

Para lograr la comprensión de la importancia de las cifras se proponen tres actividades: contar, agrupar y el uso del valor posicional, enfocadas en la interpretación y reconocimiento del sistema de numeración decimal.

El conteo permite la ordenación y comparación de números, se podría realizar contando hacia adelante, hacia atrás o a saltos reconociendo que antes de la enseñanza formal del valor posicional, el significado que los niños le atribuyen a los números mayores se basa normalmente en la cuenta de uno en uno.

“Se podría pensar que el proceso de contar, se genera de una forma natural y rápida en los niños de tres años, debido a la relación establecida cuando el niño recita de forma ascendente los primeros tres o cuatro números naturales. Sin embargo, el proceso de contar involucra aspectos como: qué elementos ya contó en una colección dada, para que este elemento no vuelva a ser contado; realizar conteos de dos en dos, tres en tres; comenzar a contar en un número natural diferente de 1” (Calderón & León, 2016, p. 89)

Así pues, se piensa en procesos que ayuden a los estudiantes a comprender la noción de número, realizando estrategias de conteo y descomposición numérica que favorezcan el

aprendizaje de cantidades para un posterior uso y aplicación en procesos aditivos, Castro, Cañadas, & Castro-Rodríguez (2013) establecen tres pilares en el conteo: correspondencia biunívoca, principio de orden estable y principio de cardinalidad. El primero de ellos es que tiene que comprender la naturaleza ordinal de los números, es decir, que se encuentran en un orden de magnitud ascendente; el segundo es la comprensión del procedimiento que se sigue para el conteo basado en que cada objeto debe contarse una vez y sólo una sin importar el orden; y el tercero es que el número final comprende la totalidad de elementos de la colección.

4.3.2. El proceso de subitización y la numerosidad

Subitizar es reconocer la numerosidad de una colección pequeña de objetos «de una ojeada» el número surge en la mente de forma instantánea; ésta se divide en dos procesos, uno perceptual y otro conceptual (Clements & Sarama, 2009)

En la subitización perceptual se percibe la numerosidad de la colección de objetos intuitiva y simultáneamente, mientras que en la subitización conceptual percibe un todo como un conjunto de partes. Las ideas y el desarrollo de las habilidades de subitización inician en edades tempranas para el niño y “la subitización introduce ideas de cardinalidad, ideas de partes y todo con sus relaciones, son el inicio de la aritmética, y, en general, ideas de cantidad” (p.21)

El reconocimiento de ideas de cardinalidad, partes y conjunto total permite a los niños desarrollar destrezas que le permitan comprender el valor posicional en el sistema de numeración decimal, el proceso de subitización se complementa con el conteo, para ello es importante que el niño tenga la destreza de contar, ordenar y comparar números, comprender el valor posicional de los dígitos de cantidades numéricas más grandes.

4.4.Trayectorias hipotéticas de aprendizaje THA

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) hacen parte de una propuesta para reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista, desde una visión constructivista del aprendizaje que requiere de instrucción y planificación

encaminados a la búsqueda de objetivos predeterminados y en el diseño de tareas que permitan lograrlos (Gómez & Lupiáñez, 2007). Una THA consiste en los objetivos, tareas a implementar y diferentes hipótesis en relación al aprendizaje de los estudiantes; el objetivo del profesor para el aprendizaje de los estudiantes es seleccionar tareas de aprendizaje y formular hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas.

Clements & Sarama (2009) consideran tres partes de las THA:

- a) Las metas o propósitos matemáticos, entendido como el conjunto de los conceptos y habilidades que son matemáticamente centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y generadoras de futuros aprendizajes.*
- b) La ruta de desarrollo a lo largo de la cual los niños progresan, constituida por los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior y que conducen a la meta geométrica.*
- c) Un conjunto de actividades instruccionales o tareas, relacionadas para cada uno de los niveles de pensamiento, que fomentan el paso de un nivel a otro (p. 15).*

En la formación de profesores de matemáticas Steffe (2004) citado por Gómez & Lupiáñez (2007) argumenta que “deben ser los profesores, al participar directamente en las actividades de construcción de los niños, quienes deben producir sus trayectorias hipotéticas de aprendizaje”; es en la formación inicial de los futuros profesores donde se comienzan a desarrollar las competencias para construir THA que les permitan diseñar y llevar a la práctica actividades de aprendizaje, sin embargo, algunos de los futuros profesores no tienen experiencia docente o acceso a la práctica en aulas de matemáticas, por lo que no tienen una participación directa en las actividades de construcción de los niños.

A partir de las THA propuestas por Clements & Sarama (2009) se consolidaron tres THA: Forma, Subitización y Conteo, vinculadas a juegos y talleres, siendo el aspecto

fundamental de desarrollo el progreso en los niveles que se presentan independiente de la edad del aprendiz.

4.4.1. Trayectoria Hipotética de aprendizaje de Subitización

Para el aprendizaje de la aritmética se deben tener algunos conceptos fundamentales como el de cantidad, número y subitización; esta última es definida por Clements & Sarama (2015) citados por Rodriguez (2016) como la habilidad fundamental en el desarrollo de la comprensión del número por parte de los estudiantes, puede ser perceptiva o conceptual, en la primera se pone en juego la observación para identificar el cardinal de un conjunto, mientras que en la segunda se evidencia que el estudiante ve las partes y logra ponerlas juntas para hallar el total.

En una THA de Subitización, Clements & Sarama (2009) proponen algunos niveles de evolución de la subitización, configurando la promoción entre cada uno de estos a partir del desarrollo de ciertas actividades con objetivos específicos establecidos en un rango de edad promedio. La tabla I sintetiza elementos de dicha propuesta. .

Nivel	Descripción	Actividades regulares
Numérico Pre-Explicito. Edad 0-1	En el primer año, el niño (a) no está habituado al número, no tiene conocimiento explícito e intencional del número. Para los niños, están primero las colecciones de un objeto rígido.	Proporciona un ambiente rico sensorialmente para la manipulación de objetos
Nominador de Pequeñas Colecciones. Edad 1-2	Nombra grupos de 1 a 2 algunas veces, 3. Construye expresiones relacionadas con cantidades con función nominativa	El niño puede responder a la pregunta, “¿Cuánto hay?”
Constructor de Pequeñas	Construye una colección pequeña no verbalmente con el mismo	Preguntar por el número correcto de una colección.

Colecciones. Edad 3	número de otra colección, siguiendo modelo mental, es decir, que no necesariamente realiza emparejamiento.	
Constructor de Pequeñas Colecciones. Edad 4	Reconoces instantáneamente colecciones hasta 4, mostradas por un tiempo breve	Presentar arreglos de colecciones hasta 4, preguntar por la cantidad de la colección.
Subitizador Perceptual hasta 5. Edad 5	Reconoce instantáneamente colecciones hasta 5, mostradas por un tiempo breve.	Presentar arreglos de colecciones hasta 5, preguntar por la cantidad de la colección.
Subitizador Conceptual hasta 5. Edad 5	Expresan nombres para todos los arreglos de 5, cuando son mostrados por un tiempo breve	Usar diferentes arreglos que desarrollan subitización conceptual con ideas de adición y sustracción.
Subitizador Conceptual hasta 10. Edad 5	Expresan en LSC nombres para todos los arreglos de 6 a 10, usando grupos. Establece relaciones entre los nombres de las cantidades y los numerales indo-arábigos	Usar diferentes arreglos que desarrollan subitización conceptual usando números hasta 10, y solicitar al niño identificar el numeral arábigo que le corresponde al total de puntos.
Subitizador conceptual hasta 20. Edad 6	Verbaliza, expresa nombres de tamaños de cantidades estructurando arreglos hasta 20, usando grupos. Establece relaciones entre los nombres de las cantidades	Usar estructuras de cinco y dieces para ayudar a los niños a visualizar las combinaciones aditivas.
Subitizador conceptual con	Nomina tamaños de cantidades, hasta cincuenta, en profunda	Solicitar al niño identificar el numeral arábigo que le

conteo de saltos, y valor posicional. Edad 7	relación con los objetos que ve y que puede evocar.	corresponde al total de puntos
Subitizador Conceptual con Valor Posicional y Multiplicación. Edad 8	Expresa nombres de arreglos estructurados usando grupos, multiplicación, y valor posicional.	Solicitar al niño identificar el numeral arábigo que le corresponde al total de puntos.

Tabla I. Niveles de evolución en una THA de subitización

4.4.2. Trayectoria Hipotética de aprendizaje de Conteo

En una trayectoria de aprendizaje aritmético la identificación de cantidades juega un papel muy importante, bajo esta mirada el conteo funciona como una herramienta que ayuda a desarrollar el conocimiento de la clasificación y la seriación, llegando a constituirse en el algoritmo más básico e importante (Clements & Sarama, 2015; Rodríguez, 2016). El conteo puede dividirse en verbal o de objetos, en el primero el niño aprende la lista de palabras que describen a los números y en el segundo el estudiante toca los objetos a medida que realiza el conteo estableciendo una relación entre el conteo verbal y la cantidad de objetos.

En una THA de conteo Clements & Sarama (2009) proponen unos niveles de conteo y uso de la subitización con objetivos específicos y con un rango de edad promedio, la *tabla II* los sintetiza.

Nivel	Descripción	Actividades regulares
El Pre-contador (Verbal). Edad 1	Expresa algunos nombres de números sin secuencia alguna	Asociar los nombres de números con las cantidades
El Corista (Verbal). Edad 5	Realiza movimientos rítmicos o algunas veces expresa números difíciles de diferenciar.	Repita la experiencia con la secuencia de conteo en varios contextos.

El Recitador (Verbal). Edad 2	Cuenta verbalmente, con nombres de números, no necesariamente en el orden correcto después de “cinco”.	Generar experiencias repetidas y frecuentes con la secuencia de conteo en varios contextos. Los estudiantes cuentan verbalmente al mismo tiempo con algún juego como el parqué o algún juego del computador
El Recitador (10) (Verbal). Edad 3	Cuenta verbalmente hasta 10, con algo de correspondencia con los objetos, pero es posible que continúe una correspondencia muy rígida, o que muestre errores en la ejecución	Todos los niños cuentan de 1 a 10 o hasta un número adecuado, efectuando movimientos en cada cuenta.
El Correspondedor. Edad 3	Mantiene correspondencias uno-a-uno entre nombres de números y objetos	Contar y mover, para indicar cantidades.
El Contador (Números Pequeños). Edad 4	Cuenta objetos en fila hasta 5 con precisión y responde la pregunta “cuántos” con el último número contado acercándose a entender el concepto de cardinal.	Contar conjuntos pequeños e indicar el cardinal del conjunto.
El Contador (10). Edad 4	Puede estar en capacidad expresar que el antecesor o sucesor de un número, pero solamente cuando comienza a contar desde 1.	Conteo y selección de número antecesor y sucesor.
El Productor	Cuenta objetos uno a uno	Contar conjuntos e indicar el

(Números pequeños). Edad 4	hasta 5. Reconoce que el conteo es relevante en situaciones en las cuales cierto número debe ser reconocido.	cardinal del conjunto.
Contador y productor (10+). Edad 4	Cuenta y produce por conteo grupo de objetos de forma precisa hasta 10. Tiene una comprensión explícita de lo cardinal. Reconoce los errores en los conteos de los otros y es capaz de eliminar la mayoría de los errores en su propio conteo	En parejas, pueden jugar a formar torres con monedas. Colocar monedas en la torre según el número que indique el dado.
Contador regresivo desde 10 (Verbal y Objeto). Edad 4	Cuenta regresivamente desde 10 hasta 1 verbalmente, o al ir removiendo objetos de un grupo.	Contar y mover
Contador desde N (N+1, N-1) (Verbal y Objeto). Edad 6	Cuenta verbalmente y con objetos desde números diferentes a 1 (pero no puede mantener el número de conteos).	Adición de objetos a un conjunto y preguntar por el nuevo cardinal.
Contador en saltos de 10 hasta 100 (Verbal y Objeto). Edad 6	Cuenta de decena en decena con comprensión hasta 100 o más	Construir escaleras de cubos omitiendo un escalón. El niño debe identificar el numeral que corresponde a la cantidad de cubos del escalón.
Contador hasta 100 (Verbal). Edad 6	Hace transiciones entre decenas (ej., de 29 a 30)	“Contando Todos los Días de Colegio” Durante todo del año.

	comenzando en cualquier número.	
Contador progresivo Usando Patrones (Estrategia). Edad 6	Mantiene un registro de algunas acciones de conteo, únicamente cuando utiliza patrones numéricos	Entregar a los estudiantes un numeral y una estructura de puntos. Ellos cuentan los puntos a partir del número representado en el numeral. Se puede usar en juego de mesa que requieran desplazamientos en un tablero
Contador en saltos (Verbal y Objeto). Edad 6	Cuenta con manejo de saltos de cinco y de dos.	Usa el conteo de saltos para contar objetos
Contador de objetos imaginarios. Edad 6	Cuenta imágenes mentales de objetos ocultos.	Esconder algunos objetos, y decirles a los niños, ¿cuántos objetos están escondidos?
Contador progresivo manteniendo el número de Conteos (Estrategia): Edad 6	Mantiene un el número de conteos, primero con los objetos, después mediante el “conteo de conteos.”	Usar un tablero con numerales al 50, y dos dados con numerales indio-árabigo en sus caras. Lanzar los dados, y mover el total de la suma de los números que indicen los números de los dados. Iniciar en uno.
Contador de Unidades Cuantitativas / Valor Posicional. Edad 6	Entiende el sistema de numeración en base 10 y el concepto de valor posicional, incluyendo ideas de conteo por unidades y múltiplos de centenas, decenas y unidades.	Usando cosas que están compuestas de dos partes iguales (cajas de huevos con tapa, naranjas, crayolas), muestra algunas todos y algunos mitades, y pregunta cuánto hay.
Contador hasta 200	Cuenta con precisión hasta	Conteo teniendo en cuenta valor

(Verbal y Objeto). Edad 6	200 y más, reconociendo los patrones de unidades, decenas y centenas.	posicional.
Conservador de Número. Edad 7	Conserva el número de forma consistente incluso al enfrentar distracciones de tipo perceptivo tales como la dispersión de los objetos de una colección	Actividades de conteo y relación de cantidades.
Contador Progresivo y Regresivo (Estrategia). Edad 7	Cuenta en cualquier dirección. Reconoce que las secuencias de decenas son un reflejo de las secuencias de unidades.	Mostrar una tarjeta con un numeral de dos dígitos. Preguntar cuánto es diez más, o diez menos, o 1 más, o 1 menos de este número. Hacer la actividad varias veces con números diferentes

Tabla II. Niveles de evolución de una THA de conteo

4.5. El juego como dispositivo didáctico.

El juego como dispositivo didáctico, implica una búsqueda para estimular un tipo de acción en los estudiantes para favorecer la movilización de sus procesos cognoscitivos y comunicativos donde el juego va encaminado a fines educativos para ser implementado en una relación de enseñanza/aprendizaje, con condiciones de tipo macroestructural y microestructural como exigencias para un diseño didáctico (Vergel, Rocha & León, 2006 citado por Calderón & León, 2016).

4.5.1. Aspectos macroestructurales del juego

En los *aspectos macroestructurales del juego* Calderón & León (2016) toman como referencia dos vertientes del juego que complementan la educación, una cultural – antropológica y una psicológica. La primera enfatiza el desarrollo social del ser humano y la segunda enfatiza el desarrollo individual. En la primera vertiente se considera que el ser humano juega por placer y es el jugador quien da sentido a su propio acto de jugar, donde

este acto es la capacidad racional de orientar el actuar de cada persona en la relación con su entorno. En la segunda vertiente Jean Piaget (1986) citado por Calderón & León, (2016) propone la caracterización del juego; explicando el desarrollo cognoscitivo del niño y la formación de estructuras mentales a partir de estadios de aprendizaje.

Para Piaget “el juego es una relación entre el niño y el entorno, es un modo de conocerlo, aceptarlo y construirlo” a partir de esta idea presenta una clasificación para dar razón de la naturaleza de la actividad de jugar que se resume en *ejercicio, símbolo y regla*. El *ejercicio* es la primera actividad que aparece en la vida del niño, posteriormente aparece poco a poco el juego simbólico, en este proceso no se requiere un gran desarrollo del pensamiento ni ninguna estructura representativa lúdica. El *símbolo* requiere una estructura representativa, comienza por las conductas individuales que hacen posible la interiorización de la imitación y la *regla* implica la aprehensión de regularidades por parte del grupo, la violación de una regla lleva a una falta (Calderón & León, 2016).

4.5.2. Aspectos microestructurales del juego

Los *aspectos microestructurales del juego* se refieren principalmente a la relación que el juego puede ejercer sobre la interacción entre estudiante – saber – profesor. Calderón & León (2016) destacan algunos aspectos importantes de dicha interacción desde una perspectiva didáctica, además identifican exigencias del juego para la implementación de éste en un diseño didáctico. Por esta razón, se describe a continuación los requerimientos didácticos que necesita un diseño didáctico.

Dimensión epistemológica: Los diseños didácticos deben tener una fundamentación teórica de tipo disciplinar e histórico que permita la reflexión sobre los conocimientos que se pondrán en juego en el diseño y por ende en el aula. En relación al dispositivo juego, esta dimensión requiere considerar un análisis de la tradición lúdica en el desarrollo sociocultural e histórico del saber en cuestión.

Dimensión cognitiva. Para esta dimensión es necesario identificar las condiciones cognitivas y afectivas antecesoras al conocimiento a enseñar, ya que cada conocimiento

tiene conceptos y procesos previos que se deben tener en cuenta a la hora de llevar a la práctica.

En el caso del juego, es necesario indagar acerca de otras actividades que relacionen la enseñanza del conocimiento en específico con el juego escogido o con otros juegos.

Dimensión comunicativa. Un diseño didáctico necesita dos modelos: discursivo y textual, además de las formas de interacción que el profesor ha de poner en práctica en el aula de clase, Calderón (2010) citado en Calderón & León (2016). En cuanto al modelo discursivo, es importante tener en cuenta la forma de los enunciados y usos del lenguaje ya sea del profesor como de los textos escolares; en cuanto al modelo textual se refiere a las estrategias comunicativas que escoge el profesor para desenvolverse en el aula de acuerdo a los contenidos que se propongan en las actividades.

Dimensión socio – cultural del aula. En esta dimensión se desarrollan aspectos culturales y sociales, como normas, reglas y una cultura propia en el aula de clase, debido a las constantes interacciones entre estudiantes, docente y entorno, derivadas de los diferentes roles de cada persona en el aula de clase.

Ahora, cuando el dispositivo juego ingresa en esta dimensión aparecen grandes características del juego, estas son: ser una actividad reglamentada, libre y con metas propias; cada juego tiene sus propias características dada su normatividad y complejidad, Navarro (2002) citado por Calderón & León;Corredor (2016) propone las cualidades para el juego: libre, separada, incierta, improductiva, reglamentada y ficticia, desarrolladas en el marco de las relaciones socioculturales y comunicativas para un aula en donde se incluye el juego como dispositivo didáctico. Dichas cualidades son definidas por Callois (1986), citado por Calderón & León (2016), de la siguiente manera:

Libre: *El jugador no podría estar obligado, el juego perdería su naturaleza de diversión, atractiva y alegre.*

Separada: *Cada juego está delimitado en espacio y tiempos precisos y determinados por anticipado.*

Incierta: *El desarrollo y resultado del juego no podría estar determinado de antemano.*

Improductiva: *por no crear ni bienes, ni riqueza, ni tampoco elemento nuevo de ninguna especie; y salvo desplazamiento de propiedad en el círculo de los jugadores, porque se llega a una situación idéntica a la del principio de la partida.*

Reglamentada: *El juego está sometido a convenciones que suspenden las leyes ordinarias e instauran momentáneamente una nueva legislación, que es la única que cuenta.*

Ficticia: *El juego es acompañado de una conciencia específica de la realidad secundaria o de una franca irrealidad en comparación con la vida corriente.*

4.6. Componentes y momentos del juego

En la metodología se tendrá en cuenta los momentos y componentes del juego (Ver tabla III), desarrollados para desarrollar el propósito de la investigación (Calderón & León, 2015) citados por Rodriguez (2016).

Componentes	Momentos del juego		
	<i>Manipulación de los objetos del juego</i>	<i>Conocimiento de las reglas</i>	<i>Jugar</i>
Afectivo	Auto reconocimiento y valoración de “lo otro” y del “otro”.	Transformación de las reglas en deseos	Desarrollo de un “yo” ficticio. Tensión y alegría.
Actitudinal	Uso voluntario y libre de los objetos del juego. Disposición a la creatividad. Reconocimiento del contexto de juego.	Aceptación libre de reglas. Respeto por los Jugadores.	Sorpresa admiración y creatividad. Participación intencional y autocontrol. Admiración por los buenos jugadores.

Estratégico	Delimitación espacial y temporal de los contextos. Apreciación profunda de los objetos, sus atributos y sus relaciones.	Partir de lo fácil a lo difícil. Supongamos resuelto el problema. Identificación de los tipos de reglas y de los roles de los jugadores.	Uso de relaciones entre reglas. Identificación, selección y jerarquización de las jugadas.
Motriz	Subordinación de las acciones a los objetos.	Subordinación de las acciones a las reglas.	Subordinación de las acciones a las reglas y a los objetos.
Instrumental	Uso de objetos y sistemas de representación de objetos aritméticos.	Adecuación de los usos de los objetos a las condiciones de las reglas.	Optimización de los objetos según las intenciones de las jugadas.

Tabla III. Momentos y componentes del juego

4.7. El juego de la escalera, instrumento didáctico accesible

El juego la “escalera” o conocido también como “el salto de la rana” es un solitario perteneciente a la familia de juegos de intercambio de fichas colocadas sobre un tablero (Rodríguez Molina, 2016).

En tanto artefacto, la escalera a utilizar se conforma por 11 casillas o escalones para las respectivas 10 fichas, cabe resaltar que siempre se encontrará un escalón sin ficha. Además estas fichas conforman dos clases equinumerosas distinguibles por una característica específica. De manera general, la cantidad de escalones está dado por un número impar de éstos ($2n + 1$) donde n es el número de fichas de una sola clase. Así que la escalera adaptada está capacitada para cinco fichas de una clase y cinco de otra clase. Al comienzo del juego cada clase de fichas está acomodada en uno de los lados, izquierdo o derecho, de la escalera.

Este juego proviene del juego del salto de la rana que en su versión original se puede jugar sobre una hoja de papel usando fichas de dos colores diferentes para ser diferenciadas. El juego de la escalera fue adaptado en una versión donde el tablero de juego es tridimensional permitiendo interactuar mejor con cada una de las casillas del juego, sin embargo, esto no era suficiente para que el juego pudiera ser accesible, por lo que se ha desarrollado un prototipo de este juego que cumpliera con características que lo hicieran accesible, este prototipo consta de la escalera tridimensional atribuida con propiedades de sonido, vibración y color que permiten a todas las poblaciones reconocer el movimiento a través de cada uno de sus escalones, adicional a eso las fichas ya no se diferencian únicamente por color, sino que tienen texturas diferentes y son diferenciables al tacto, este prototipo ha hecho del juego un instrumento accesible (ver la *Imagen 1*).



Imagen 1: Juego de la escalera accesible.

El objetivo del juego es intercambiar la posición de cada clase de fichas; las del lado izquierdo al lado derecho y viceversa.

El juego consiste entonces en hacer los movimientos necesarios y suficientes para el intercambio de las fichas. La *tabla IV* muestra la cantidad de movimientos necesarios y suficientes con un determinado número de fichas, lo que conduce a una formalización matemática.

Número de fichas	1	2	3	4	5	n
Número de movimientos	3	8	15	24	35	$(n + 1)^2 - 1$

Tabla IV. Número de movimientos cuando el juego es exitoso

En la tabla anterior se puede evidenciar que el patrón que sigue la fila del número de movimientos es de los números cuadrados menos 1, entonces la cantidad de movimientos necesarios para tener éxito en el juego de la escalera con n fichas es:

$(n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$, en donde n es la cantidad de fichas de una misma clase en la escalera; por ejemplo, para 3 fichas en cada lado, se realizan 15 movimientos en total:

$$(3 + 1)^2 - 1 = (3^2 + 2(3) + 1^2) - 1$$

$$(3 + 1)^2 - 1 = (9 + 6 + 1) - 1$$

$$(3 + 1)^2 - 1 = 16 - 1$$

$$(3 + 1)^2 - 1 = 15$$

Por consiguiente,

$$15 = 3^2 + 2(3)$$

$$15 = 9 + 6$$

Como todo juego estructurado, éste también cuenta con reglas que lo constituyen. El proceso del juego sigue las siguientes reglas que norman el movimiento de las fichas:

Manual de instrucciones.

Regla 1: Cada ficha puede desplazarse a la casilla que está inmediatamente adelante, es decir, a la casilla adyacente si ésta está libre; si la casilla adyacente está ocupada por una ficha de diferente clase, la ficha puede saltar a la casilla inmediatamente siguiente a la casilla adyacente si ésta se encuentra vacía (ver imagen II)

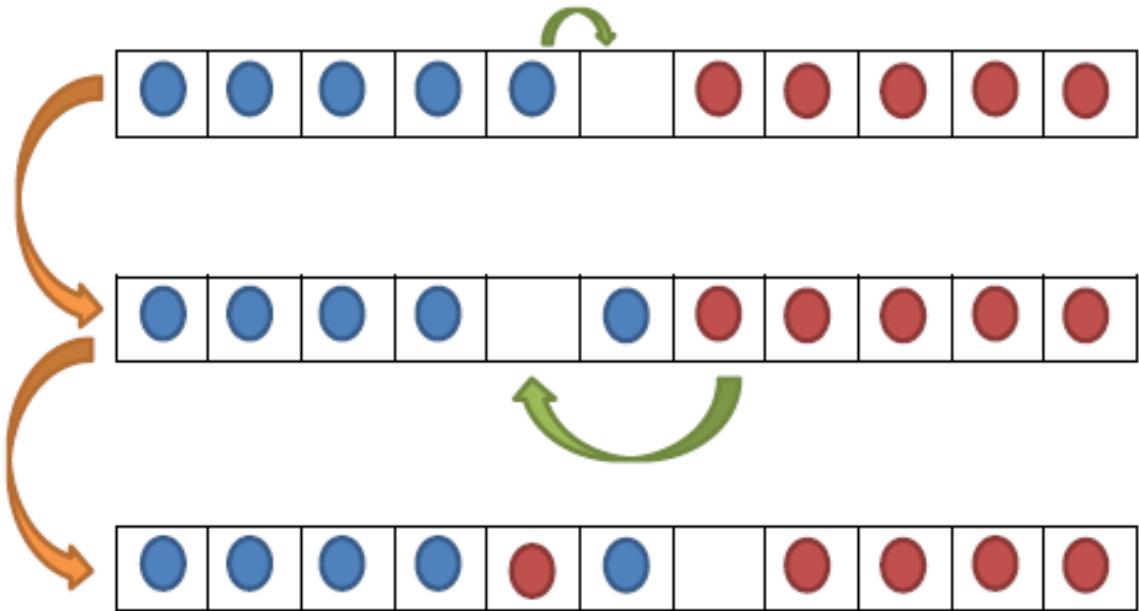


Imagen II: Regla No.1 del juego la escalera

Regla 2: Se puede desplazar únicamente una ficha a la vez a través de los escalones realizando un movimiento legítimo, cada uno de los desplazamientos es considerado un movimiento en el juego (Imagen IV)

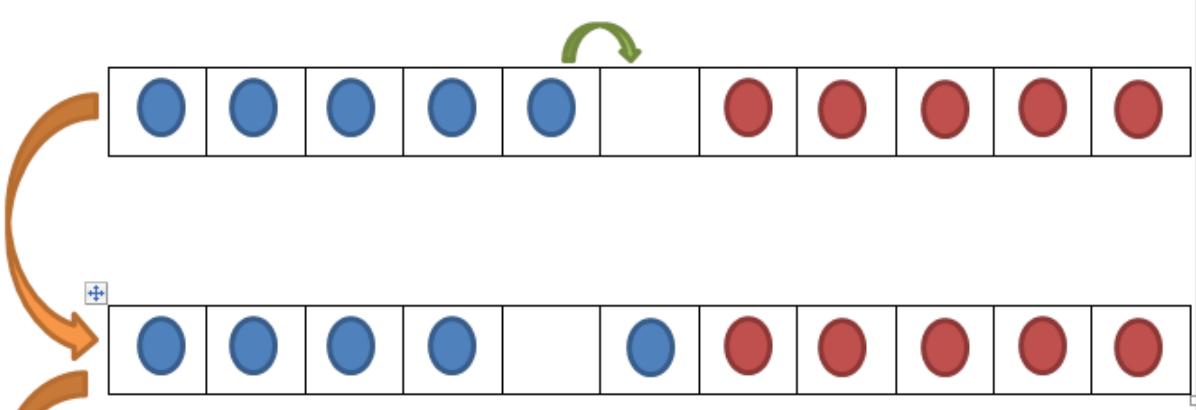


Imagen III. Regla No. 1 del juego la escalera

Regla 3. Las fichas no pueden retroceder, una vez se haya realizado un desplazamiento este no puede ser devuelto, generara perdida de juego por lo que el jugador deberá empezar nuevamente.

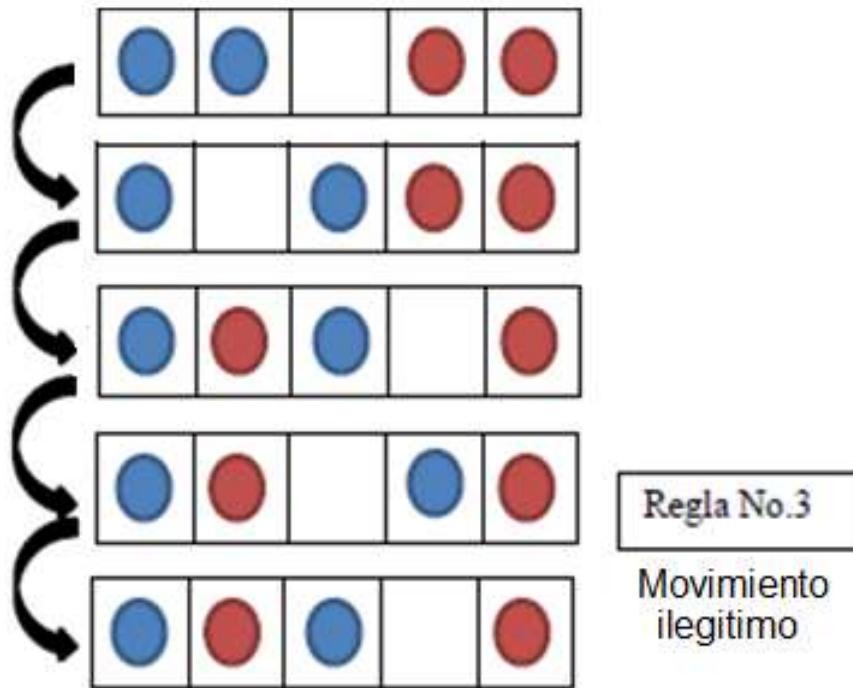


Imagen IV. Regla No. 3 del juego la escalera

5. Metodología de trabajo

La investigación se desarrolla en tres fases como se describen a continuación:

Fase 1: Aprendices determinando características del juego

Fase de reconocimiento en la cual se realiza una práctica experimental con diferentes personas. En ésta se permite al jugador explorar el juego; la experimentación con el instrumento es esencial para que el aprendiz se familiarice con el dispositivo y logre determinar sus propias conclusiones acerca del desarrollo del juego; durante esta fase cada jugador tiene la posibilidad de interactuar con el juego, reconociendo características del mismo, estrategias de triunfo en el juego, situaciones de pérdida, entre otras cosas. En esta fase se realizan actividades de reconocimiento y acercamiento. Este acercamiento será registrado a través de videogramación para un posterior análisis, que permita establecer si existe o no una relación entre los gestos y los estados de aprendizaje presentes durante el juego de la escalera.

Fase 2: Constitución de un sistema de representación de tiempos, movimientos y tipos de jugador

En esta fase se pretende construir un tipo de registro escrito que permita analizar los tipos de jugador en relación con la incorporación de lo aprendido cuando se incrementa el número de fichas. En esta fase se explora el material audiovisual obtenido en la primera fase de investigación; para ello se hará uso del programa ELAN en su versión 4.9.4 que permite determinar minuciosamente tiempos, etiquetar y explorar el material a analizar; de esta manera se discriminan tiempos de realización de jugadas y posición de las fichas y se les puede tabular de manera estructural en Microsoft Excel para determinar tipos de jugador de acuerdo a estados y dinámica de los momentos del juego.

Fase 3: Determinación de patrones corporales de los aprendices.

Fase de determinación de patrones. Una vez realizado la recolección de información acerca de los movimientos, tiempos y momentos del juego, se realiza una exploración del material audiovisual obtenido en la fase 1 con ayuda del programa ELAN; así se determinan diferentes señales corporales de los aprendices durante el desarrollo de juego, para poder establecer relaciones entre dichas señales y los estados de aprendizaje que tienen los jugadores durante el desarrollo del juego.

A partir del material audiovisual y el registro escrito obtenidos en las fases 1 y 2 se pretende realizar un análisis de elementos que permitan establecer relaciones entre los patrones corporales de los jugadores y los momentos del juego, reconociendo el potencial matemático presente en los diferentes momentos del juego para dar cuenta del estado de aprendizaje del jugador.

6. Desarrollo de las fases de investigación

- *Aprendices determinando características del juego*

En esta fase se hace un laboratorio experimental, en el cual varios aprendices tienen sus primeros acercamientos con el juego de la escalera (Ver imagen V), durante este acercamiento se les permite interactuar con el juego: se les da a conocer las reglas de éste y se les proporciona un intervalo temporal que les permita la exploración del mismo; durante este intervalo de tiempo los aprendices se dedican a jugar, realizando sus primeros acercamientos con el juego, buscando estrategias para salir victoriosos alterando las condiciones iniciales del juego, como el número de fichas de cada color.

Durante el desarrollo de los momentos del juego se pueden observar los componentes del mismo: afectivo, actitudinal, estratégico, motriz e instrumental propuestos por Calderón & León (2015) citados por Rodríguez (2016) expuestos en apartados anteriores.

Los aprendices se encuentran en el componente afectivo del juego cuando reconocen el dispositivo y lo exploran; es decir, manipulan la escalera y sus fichas, así pues se les hizo entrega del juego y se les proporcionaron las reglas de éste para generar en ellos curiosidad y ganas de jugar, una vez reciben el juego tienen la oportunidad de interactuar con éste para identificar características propias del mismo, como colores, clases, dimensiones, estructura, material, entre otras, por lo que se llega a establecer la parte afectiva del juego a partir de la exploración y el interés del jugador por comprender el uso que le puede dar al material que está conociendo.

Imagen V. Aprendiz jugando el juego de la escalera.



Luego del primer acercamiento para reconocer el juego y sus reglas, los jugadores pudieron empezar a jugar de manera libre, buscando los posibles movimientos que se pueden hacer en el juego, cometiendo errores, volviendo a intentar, aceptando las reglas y sus momentos de triunfo o pérdida, poniendo en juego su capacidad de autocontrol, percepción, creatividad y determinación para conseguir un triunfo del juego respetando las características del mismo, poniendo en juego el componente actitudinal del juego, además de reconocer la dimensión socio afectiva de mismo, ya que éste no pierde su esencia de ser algo libre y autónomo, donde el jugador decide si quiere jugar o no.

Durante los diferentes momentos del juego, los aprendices pusieron en juego estrategias, determinaron patrones cruciales de fracaso o triunfo del mismo, delimitaron sus posibilidades, aplicaron jugadas, cambios de movimientos buscando cuál de los realizados generó fracaso en el juego, establecieron dificultades que intentaron superar cambiando la dificultad del juego, empezando por el menor número de fichas posibles, logrando triunfos para un posterior intento de aplicación de los movimientos realizados en éstos con un número mayor de fichas, así pues los aprendices estuvieron en un componente estratégico de los diferentes momentos del juego.

Los aprendices al desarrollar los diferentes momentos del juego manifiestan el componente motriz e instrumental haciendo uso del material manipulativo tangible del juego; adaptándose a las reglas y estableciendo acciones para salir victoriosos; usando sistemas de representación para el desarrollo del mismo, aunque los movimientos del juego no necesariamente fueron realizados físicamente con las fichas, sino que realizaron un proceso mental, determinando los movimientos antes de realizar jugadas, analizando posibles movimientos luego de uno efectuado para anticipar las jugadas que contribuyeran a salir victoriosos en el juego.

Durante el desarrollo del juego y al pasar por los diferentes componentes del mismo, los aprendices admiten diferentes niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal de la educación matemática realista propuestos por Freudenthal (1971, 1991) y Gravemeijer (1994, 2002) citados por Bressan (s.f) mencionados en apartados anteriores;

ya que usan estrategias de acuerdo al contexto haciendo uso de conocimientos informales e intuitivos para salir victoriosos en el juego, además de realizar una representación mental de los posibles movimientos que le permite la exploración y reflexión de los procesos a seguir. Dichos niveles de comprensión son evidenciados en diferentes momentos del juego por los aprendices, son ellos quienes manifiestan sus dudas, aciertos y desaciertos durante el juego y las posibles estrategias para salir victoriosos, esbozando esquemas mentales de su proceder en el juego permitiéndoles analizar cada uno de los movimientos y las regularidades allí presentes.

- *Constitución de un sistema de representación de tiempos, movimientos y tipos de jugador*

Luego de recolectar información a través de material audiovisual de primeros acercamientos de los aprendices con el juego de la escalera, se procede a elaborar los datos y registrarlos. Se esboza una manera estructural de recolectar los datos teniendo en cuenta dos aspectos:

- *Establecimiento y enumeración de las posiciones (escalones)*

Cada uno de los escalones del juego se enumera de manera ascendente de un lado a otro, es decir, el primer escalón de uno de los lados es la posición 1 y el último la 11, esto para una escalera para cinco fichas de cada color, tal y como se puede observar en la *Imagen VI*.



Imagen VI. Posiciones del juego de la escalera

- *Denominación de las clases de fichas por clase*

Para diferenciar las fichas de acuerdo a su clase se nombran de diferente manera, las fichas de una clase con la letra *a* y las de otra clase con la letra *b* (*Ver imagen VII*), las

fichas están nominadas de acuerdo a la clase y la posición inicial en el juego tal como lo muestra la *tabla V* y la *Imagen VII*.



Imagen VII Enumeración de las fichas del juego de acuerdo a la posición inicial

Posición inicial	Ficha	Posición inicial	Ficha
1	1a	7	5b
2	2a	8	4b
3	3a	9	3b
4	4a	10	2b
5	5a	11	1b

Tabla V. Posición de las fichas en la escalera.

A partir de esta representación se puede realizar un registro escrito de los movimientos realizados durante el juego, en las tablas VI, VII y VIII se puede observar los movimientos de juegos victoriosos cuando se usan 1, 2 y 3 fichas de cada clase respectivamente.

Número del movimiento	Posición		
	1	2	3
Inicio	1a		1b
1		1a	1b
2	1b	1a	
3	1b		1a

Tabla VI. Movimientos de un juego victorioso de una ficha de cada clase

Número del movimiento	Posición				
	1	2	3	4	5
Inicio	1a	2a		2b	1b
1	1a		2a	2b	1b
2	1a	2b	2a		1b
3	1a	2b	2a	1b	
4	1a	2b		1b	2a
5		2b	1a	1b	2a
6	2b		1a	1b	2a
7	2b	1b	1a		2a
8	2b	1b		1a	2a

Tabla VII. Movimientos de un juego victorioso de dos fichas de cada clase

Número del movimiento	Posición						
	1	2	3	4	5	6	7
Inicio	1a	2a	3a		3b	2b	1b
1	1a	2a		3a	3b	2b	1b
2	1a	2a	3b	3a		2b	1b
3	1a	2a	3b	3a	2b		1b
4	1a	2a	3b		2b	3a	1b
5	1a		3b	2a	2b	3a	1b
6		1a	3b	2a	2b	3a	1b
7	3b	1a		2a	2b	3a	1b
8	3b	1a	2b	2a		3a	1b
9	3b	1a	2b	2a	1b	3a	
10	3b	1a	2b	2a	1b		3a
11	3b	1a	2b		1b	2a	3a
12	3b		2b	1a	1b	2a	3a
13	3b	2b		1a	1b	2a	3a
14	3b	2b	1b	1a		2a	3a
15	3b	2b	1b		1a	2a	3a

Tabla VIII. Movimientos de un juego victorioso de una ficha de cada clase

Para establecer el número de movimientos y el tiempo de realización de los mismos, se hace uso de las opciones y herramientas brindadas por el programan ELAN en la

versión 4.9.4 como zoom, reducción de velocidad, establecimiento de marcadores en el video, pausar y reanudar y desplazarse a través de éste en intervalos de tiempo muy cortos para tener un mayor acceso a los pequeños detalles presentes en el video; así pues, se hace un registro de los tiempos de cada uno de los movimientos usando un formato de hh:mm:ss.mmm (Formato brindado por ELAN) ubicando las fichas en la posición de inicio y enumerando cada uno de los movimientos desde que mueve la primer ficha hasta que finaliza el juego, bien sea de manera victoriosa o por un cierre de derrota.

El proceso de recolección de datos se hace inicialmente de forma manual (*ver imagen VIII*), haciendo uso de lápiz y papel, haciendo uso de diferentes colores para diferenciar los movimientos, fichas y espacio vacío en la escalera, de igual manera se usa una representación similar con el programa Microsoft Excel (*Ver tabla IX*).

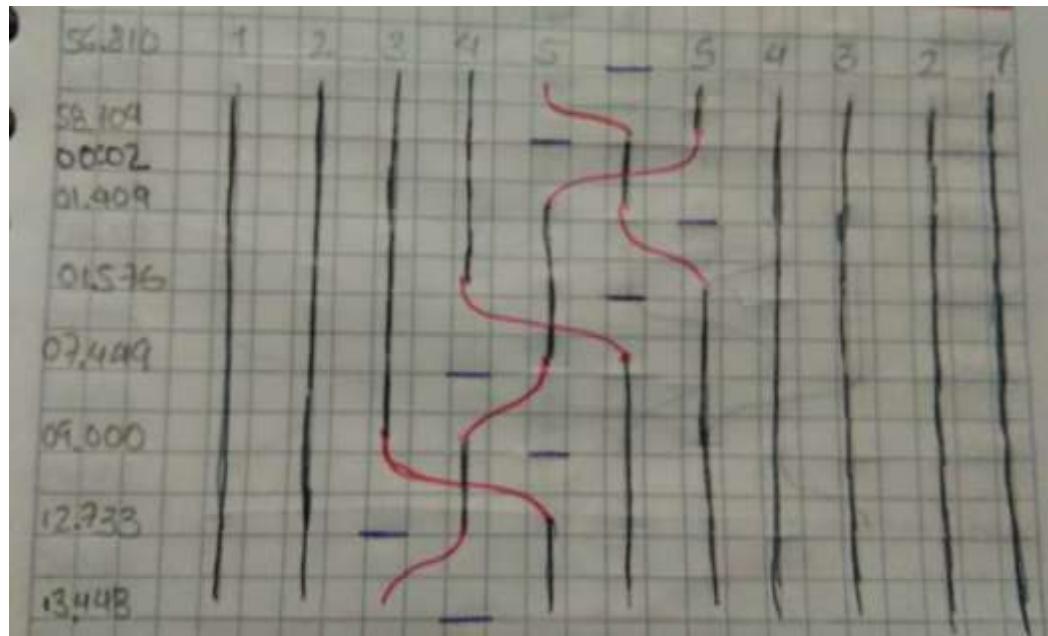


Imagen VIII. Recolección manual de movimientos del juego

Número del movimiento	Tiempo de realización	Posición										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Inicio	00:00:00.000		2a	3a	4a	5a		5b	4b	3b	2b	
1	00:00:03.050		2a	3a	4a		5a	5b	4b	3b	2b	
2	00:00:05.118		2a	3a	4a	5b	5a		4b	3b	2b	
3	00:00:06.953		2a	3a	4a	5b		5a	4b	3b	2b	
4	00:00:13.855		2a	3a		5b	4a	5a	4b	3b	2b	
5	00:00:17.132		2a	3a	5b		4a	5a	4b	3b	2b	
6	00:00:38.660		2a		5b	3a	4a	5a	4b	3b	2b	
7	00:01:16.859		2a	5b		3a	4a	5a	4b	3b	2b	
8	00:01:33.471			5b	2a	3a	4a	5a	4b	3b	2b	
9	00:01:34.344		5b		2a	3a	4a	5a	4b	3b	2b	

Tabla IX. Recolección de datos de desarrollo del juego

A través de esta recolección de datos se pueden extraer tiempos de realización entre cada uno de los movimientos y el número de movimientos realizados por cada uno de los aprendices durante el desarrollo del juego. Esto contribuye a la elaboración del sistema de representación de tiempos y movimientos. Apoyado en este sistema de representación, el investigador puede realizar una determinación de los tipos de jugador, reconociendo los componentes matemáticos inmersos en el juego de la escalera.

Durante los diferentes momentos del juego los aprendices manifestaron componentes del mismo, como se trabajó en el desarrollo de la primera fase de la metodología; durante estos momentos los aprendices exploraron el juego y buscaron estrategias para salir victoriosos. Durante esta exploración y búsqueda ellos tuvieron los primeros acercamientos a un aprendizaje de tipo aritmético a través del juego en mención. De manera implícita e inconsciente los aprendices pasaron por algunos de los niveles de evolución de un THA de subitización (Clements & Sarama, 2009); los aprendices determinaron cantidades de

movimientos, así como su ordinalidad y cardinalidad para establecer el triunfo en el juego, garantizando salir victoriosos en el con el menor número de movimientos.

Los aprendices se encontraron en diferentes niveles de evolución de una THA de subitización propuestos por Clements & Sarama (2009). Inicialmente en los niveles 2 y 3 donde logran establecer relaciones de ordinalidad, reconociendo el número de fichas presentes en el juego y estableciendo el número de escalones que requerían para jugar con ellas. Una vez logran establecer esta relación empiezan a jugar. Inicialmente sólo se les pide jugar, luego se les pregunta por el número de movimientos realizados, para dar respuesta a esto los aprendices realizan procesos de conteo de movimientos, agrupándolos de acuerdo a propias decisiones, realizando conteo de todos los movimientos o separándolos por la característica propia de cada ficha, pasando por los niveles 6, 7 y 8; con todo esto al finalizar el juego el aprendiz lograría encontrarse en los niveles 9 y 10 llegando a ser capaz de determinar el número de movimientos que realizó durante el juego y si éste es el menor número posible, poniendo en consideración reflexivamente las reglas del juego para garantizar su razonamiento.

Los aprendices al encontrarse en los últimos niveles de evolución de una THA de subitización pasan además por algunos de los niveles de evolución una THA de conteo propuestos por Clements & Sarama (2015) citado por Rodriguez (2016) ya que el conteo es un proceso indispensable para establecer el cardinal de un conjunto, en este caso el conjunto es el número de movimientos realizados durante el desarrollo del juego, durante los primeros diez niveles el aprendiz asocia los nombres de números con las cantidad de fichas o el número de movimientos, repitiendo la experiencia en varias ocasiones con la ayuda del juego de la escalera, durante esta asociación los aprendices mueven las fichas para indicar el cardinal de conjunto, si realizan un movimiento erróneo logran devolver el movimiento reconociendo número antecesor, y finalmente el cardinal final del conjunto una vez finalizado el juego.

Al haber determinado los niveles de evolución de una THA de subitización y una THA de conteo se puede decir que el juego de la escalera permite hacer una idea

estructural del aprendizaje matemático; el sistema de representación de tiempos y movimientos permite tener una idea del tipo de jugador que está realizando el juego.

Por otra parte el registro escrito de los movimientos del desarrollo del juego le permitiría al investigador o a los aprendices tener una idea del juego realizado y las características inmersas en éste, éste permite notar las características presentes en el registro escrito de un juego victorioso, anteriormente se establecieron los registros de dichos juegos con diferente número de fichas de cada clase, al analizar estas tabulaciones se pudo observar que la representación de los juegos victoriosos presentan algunas transformaciones isométricas respecto a un punto específico.

Las imágenes IX y X muestran las figuras obtenidas del registro de movimientos realizados en el juego victorioso con una y dos fichas de cada clase respectivamente (se deja únicamente el color para diferenciar las clases y la casilla en blanco para señalar la casilla vacía).

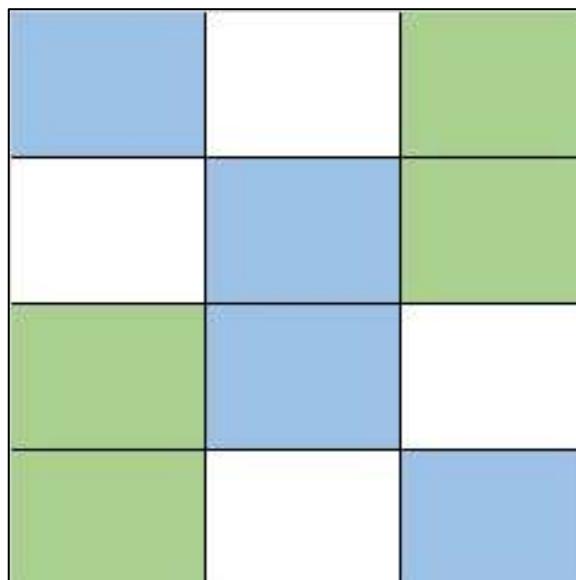


Imagen IX. Representación gráfica de un juego victorioso de una ficha de cada clase.

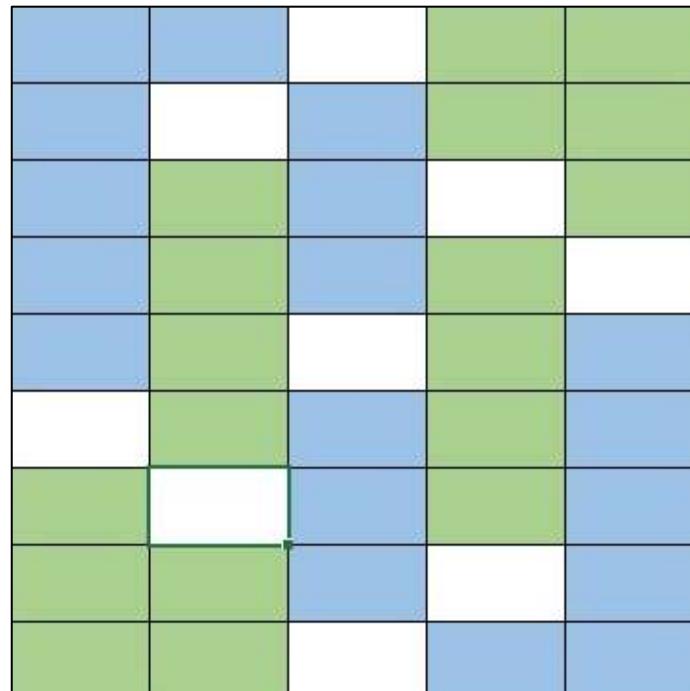


Imagen X. Representación gráfica de un juego victorioso de dos fichas de cada clase.

Al partir las imágenes de estos registros a la mitad horizontalmente se pueden obtener dos figuras congruentes, donde una es transformación isométrica de la otra, y juntas conforman la imagen completa del registro, al realizar el corte horizontal a la mitad se pueden ver dos transformaciones isométricas en ellas, la primera una rotación y la segunda una simetría central. La imagen XI muestra la figura sobre la que se deben realizar las transformaciones para obtener la imagen completa del registro, teniendo en cuenta el juego de una ficha de cada clase.

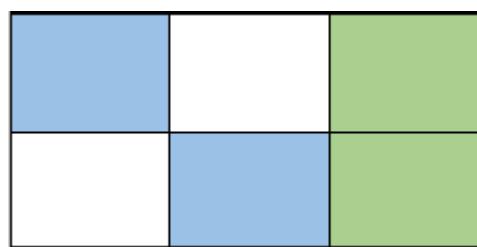
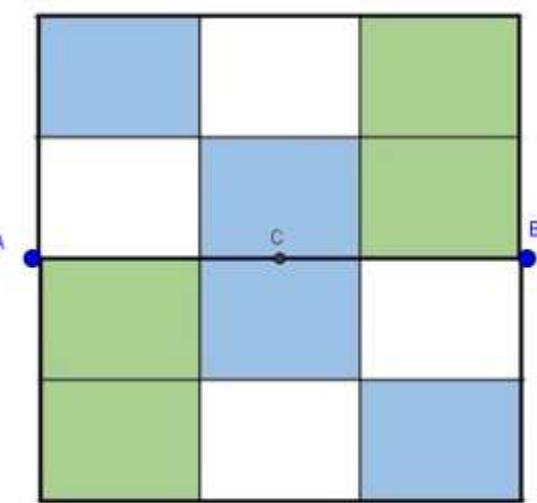


Imagen XI. Figura sobre la que se realizarán las transformaciones isométricas.

Rotación en el registro escrito del juego victorioso de la escalera:

A partir de la figura expuesta en la imagen *XI* se realiza una rotación de 180° respecto al punto medio del segmento ubicado en la parte inferior de la figura, para dicha representación se hizo uso del programa Geogebra, allí se incorporó la imagen en mención, se nombraron los vértices A y B y se estableció C como punto medio entre ellos, realizando la rotación mencionada que se puede observar en la imagen *XII*, dicha transformación permite obtener la representación del juego victorioso de una ficha de cada clase.



Nombre:

Definición:

Imagen XII. Rotación 180° respecto al punto C de la figura en la imagen XI.

Rotación en el registro escrito del juego victorioso de la escalera:

A partir de la figura expuesta en la imagen *XI* se realiza simetría central respecto al punto medio del segmento ubicado en la parte inferior de la figura, para dicha representación se hizo uso del programa Geogebra, allí se incorporó la imagen en mención, se nombraron los vértices A y B y se estableció C como punto medio entre ellos, realizando simetría central de la figura respecto a este último punto (Ver imagen *XIII*), dicha transformación permite obtener la representación del juego victorioso de una ficha de cada clase.

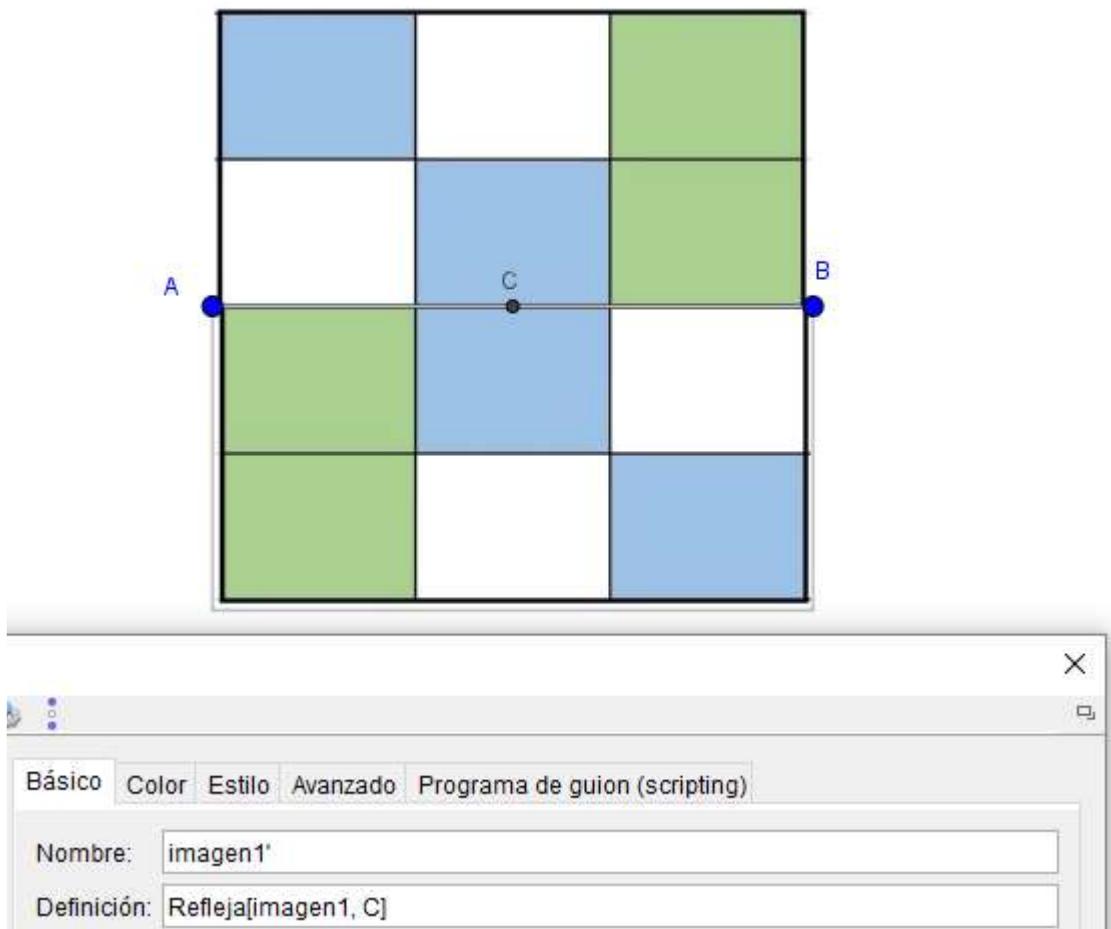


Imagen XIII. Simetría central respecto al punto C de la figura en la imagen XI.

Este mismo proceso se puede aplicar a la representación de los movimientos de juegos victoriosos de n fichas de cada clase, reconociendo las transformaciones isométricas como potencial matemático del juego; sin embargo, a pesar de ser un hecho observado luego de un registro escrito de los movimientos se puede ver durante el desarrollo del juego cuando los aprendices reconocen un cierre del juego, muchos de ellos al ir realizando diferentes movimientos reconocen que si se obtienen dos fichas de la misma clase en dos casillas adyacentes luego de realizar alguna jugada, el juego finaliza, este hecho haría perder la transformación isométrica del juego, por lo que no generaría un juego victorioso.

- *Determinación de patrones corporales de los aprendices.*

Para determinar si existe una relación entre los estados de aprendizaje presentes durante el desarrollo del juego y algunos gestos que realizan los aprendices, se explora el material audiovisual de la fase 1, y se analiza a través del programa ELAN en la versión 4.9.4. Para ello se toma inicialmente uno de los aprendices y se observan las diferentes señales corporales que realiza durante el desarrollo del juego, estas señales corporales son usadas para establecer inicialmente la relación entre la ocurrencia de éstas y los diferentes momentos del juego, para constituir una posible relación entre dichas señales y los estados de aprendizaje del jugador. Una vez se ha realizado el análisis con este jugador se parte de estas mismas señales para analizar y categorizar el desarrollo del juego de los otros aprendices para indagar si existe una relación entre las señales corporales de ellos o si son discrepantes entre sí.

Para realizar el análisis en relación a las señales corporales respecto a los estados de aprendizaje presentes en el juego se determinan dos categorías, la primera de éstas es el Desarrollo del juego y la segunda Señales corporales, cada una con unos parámetros a observar, que fueron etiquetados a través del programa ELAN para un posterior análisis, este proceso se realizó a través de dicho programa ya que permite relacionar las dos categorías de análisis a través de los tiempos en los que suceden, como se puede observar en la imagen XIV.



Imagen XIV. Etiquetas de parámetros del juego en el programa ELAN

Para la categoría Desarrollo del juego se determinan tres etiquetas que constituyen un momento específico de dicho desarrollo, Inicio, Cierre y Gana, haciendo énfasis sobre el comienzo del juego, la terminación por un movimiento que cierra el juego o por un movimiento que hace triunfador al jugador. Para la categoría de señales corporales se establecen las siguientes etiquetas: risa nerviosa, chasqueo dedos, movimiento con los ojos

y sonrisa, relacionando algunas acciones que hace el aprendiz durante el desarrollo del juego.

Para etiquetar cada uno de los parámetros se hace uso de las herramientas ofrecidas por el programa para disminuir la velocidad de reproducción del video y aumentar zoom para ofrecer un mayor acceso a las características presentes en el video.



Imagen XV. Movimiento de ojos



Imagen XVI. Risa nerviosa



Imagen XVII. Chasqueo dedos



Imagen XVIII. Sonrisa

A partir de las etiquetas obtenidas en el análisis del primer aprendiz se analizan los otros aprendices bajo las mismas etiquetas; una vez se han realizado todas las etiquetas de

acuerdo al tiempo del juego en el que suceden se procede a contrastarla con la información recolectada en Microsoft Excel acerca de los movimientos realizados por los aprendices, para ello se usa el tiempo arrojado por el programa ELAN para ubicar las etiquetas en las celdas correspondientes, tal como se puede observar en la *tabla X*.

Número del movimiento	Tiempo de realización	Posición											Desarrollo del juego	señales corporales
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
Inicio	00:00:00.000	1a	2a	3a	4a	5a		5b	4b	3b	2b	1b	Inicio	
1	00:00:00.846	2a	3a	4a	5a		5a	5b	4b	3b	2b	1b		
2	00:00:02.500	3a	4a	5a	6a	5b	5a		4b	3b	2b	1b		
3	00:00:04.671	4a	5a	6a	7a	5b		5a	4b	3b	2b	1b	Cierre	Risa nerviosa y chasqueo
Inicio	00:00:15.537	1a	2a	3a	4a	5a		5b	4b	3b	2b	1b	Inicio	
1	00:00:17.118	2a	3a	4a	5a		5a	5b	4b	3b	2b	1b		
2	00:00:18.745	3a	4a	5a	6a	5b	5a		4b	3b	2b	1b		
3	00:00:19.650	4a	5a	6a	7a	5b		5a	4b	3b	2b	1b	Cierre	Risa nerviosa
Inicio	00:00:30.517	1a	2a	3a	4a	5a		5b	4b	3b	2b	1b	Inicio	
1	00:00:31.217	2a	3a	4a	4a		5a	5b	4b	3b	2b	1b		
2	00:00:32.837	3a	4a	5a	4a	5b	5a		4b	3b	2b	1b		
3	00:00:36.391	4a	5a	6a	4a	5b		5a	4b	3b	2b	1b		
4	00:00:37.509	5a	6a	7a		5b	4a	5a	4b	3b	2b	1b		
5	00:00:38.363	6a	7a	8a	5b		4a	5a	4b	3b	2b	1b	Cierre	Risa nerviosa
Inicio	00:00:44.740	1a	2a	3a	4a	5a		5b	4b	3b	2b	1b	Inicio	
1	00:00:45.558	1a	2a	3a	4a		5a	5b	4b	3b	2b	1b		
2	00:00:49.556	1a	2a	3a	4a	5b	5a		4b	3b	2b	1b		
3	00:00:51.419	1a	2a	3a	4a	5b	5a	4b		3b	2b	1b		
4	00:00:54.721	1a	2a	3a	4a	5b		4b	5a	3b	2b	1b		
5	00:00:55.853	1a	2a	3a		5b	4a	4b	5a	3b	2b	1b		
6	00:00:59.219	1a	2a	3a	5b		4a	4b	5a	3b	2b	1b		
7	00:00:59.932	1a	2a	3a	5b	4b	4a		5a	3b	2b	1b		
8	00:01:00.891	1a	2a	3a	5b	4b	4a	3b	5a		2b	1b		Chasqueo dedos
9	00:01:00.891	1a	2a	3a	5b	4b	4a	3b		5a	2b	1b	Cierre	

Tabla X. Posición y parámetros de análisis

Teniendo en cuenta la información recolectada y ordenada como se mostró anteriormente, se procede a observar regularidades. Entre éstas se destacan:

- La risa nerviosa se asocia al momento en el que aprendiz comete un movimiento de cierre de juego.

- La sonrisa se asocia al momento en el que el jugador gana el juego o en el momento en el que sabe que tiene los movimientos claros para poder ganarlo.
- El movimiento de ojos se asocia a los grandes intervalos de tiempo entre un movimiento y otro, se cree que con este movimiento de ojos el jugador sigue mentalmente un posible movimiento antes de ejecutarlo.
- El chasqueo de dedos se presentó en dos momentos particulares del juego, el primero cuando se realizaron movimientos que cerraron el juego y el segundo cuando se empleaba el movimiento de ojos para determinar próximos movimientos.

Los diferentes aprendices mostraron patrones comportamentales similares durante el desarrollo del juego, éstos fueron clave para la constitución de patrones rítmicos asociados a la exploración y aprendizaje en el juego, tanto de reglas, como de regularidades. A partir de estas regularidades se podría pensar en determinar algunas señales corporales para establecer momentos del juego, es decir que sólo con observar los movimientos corporales de los aprendices se podría determinar el momento del juego en el que se encuentran y respectivamente el aprendizaje que han logrado obtener hasta ese momento, para ello se hace necesario integrar la producción de secuencias de movimientos y patrones como una relación parte-todo a partir de subsecuencias que conforman una totalidad.

La anterior relación es tan sólo una hipótesis que se debe poner a prueba; durante este trabajo de grado se ha puesto a prueba con varios aprendices y se han obtenido similitudes, patrones comportamentales similares. Sin embargo, surgen las preguntas en relación a ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué pasa cognitivamente cuando se está desarrollando el juego? ¿Las señales corporales indican algún tipo de estado cognitivo en los aprendices o son tan sólo señales indiscriminadas?

Para responder estas preguntas se hace necesario indagar sobre el funcionamiento del cerebro humano cuando se está realizando alguna actividad que involucre razonamiento, ¿la actividad matemática presente en el juego podría hacer que el cerebro se active de una manera específica provocando la emisión de esas señales corporales que se emiten?

Existen muchas teorías de aprendizaje, de funcionamiento del cerebro, algunas basadas en modelos constructivistas o conductuales, fundamentadas en una visión del cerebro única, ambas defienden la idea de que un sólo proceso de aprendizaje de domino general explica el desarrollo posterior en todos los aspectos del lenguaje y el conocimiento; sin embargo, Karmiloff (1994) ha propuesto la teoría de re-descripción representacional, en la que la mente se describe como modular. Esta perspectiva supone hacer uso de creencias, deseos, intenciones, sentimientos, etc., para dar cuenta del comportamiento de las personas, evidenciando una actitud proposicional que conlleva a un contenido proposicional que permite describir el mundo, expresando un estado mental o la postura de una persona en relación con el mundo, sin suponer que esta postura o estado sean verdaderos o falsos (García, 2005). Según esta perspectiva, las interacciones crean experiencias que serán transformadas en conocimientos:

Asumir que otro individuo conoce, cree, duda, quiere, desea, engaña, simula, etc., implica atribuir estados que no son directamente observables y que gracias a ellos comprendemos, o anticipamos la conducta de los otros. Estas inferencias, que se integran en una teoría de la mente, son comunes a todos los adultos normales humanos. Aunque es razonable suponer que la experiencia y aprendizajes pueden desempeñar algún papel, ciertamente no se trata de una enseñanza explícita. Las inferencias sobre los estados mentales para explicar las conductas propias y ajenas no se enseñan a los niños, como se les enseñan las matemáticas, la historia, la lectura, etc. El proceso de adquisición de esa capacidad mentalista recuerda más a la forma como aprenden a hablar o caminar. (García, 2005)

En la teoría de la mente se tiene una visión modular del aprendizaje (Baron-Cohen (1998) citado por García (2005), esta visión diferencia una psicología intuitiva y una física intuitiva; gracias a la psicología intuitiva comprendemos y predecimos el comportamiento de las personas y damos sentido a las interacciones sociales atribuyendo estados mentales. La psicología intuitiva atribuye causas (mentales) a las acciones de las personas posibilitando el conocimiento del mundo físico-natural, las dos están inmersas en los procesos neurosensoriales del cerebro.

La capacidad de la mente para meta representar sigue siendo noción clave, esa capacidad no es propia de un módulo específico y especializado, sino una capacidad general de la mente para entender las representaciones o conocimientos tanto del mundo físico (fotos, dibujos, mapas, etc.) como del mundo interpersonal y de los estados mentales. La mente tiene una capacidad general para producir teorías sobre cualquier ámbito de la realidad, sea natural o sociocultural (García, 2005)

Desde esta visión modular del cerebro se entiende que el conocimiento no se da en un proceso único, es conformado a través de largas cadenas que generan conexiones cerebrales diferentes, algunas conectadas otras disyuntas, haciendo que el aprendizaje de los seres humanos sea diferente entre unos y otros, el conocimiento no estaría ligado a todos de la misma manera, sino que sería único en cada persona a partir de su propia experiencia, a partir de sus interacciones con el medio que los rodea.

Karmiloff (1994) sostiene que si la mente humana tiene una estructura modular, esta postura tiene en cuenta la plasticidad del desarrollo temprano del cerebro, podría así plantearse la hipótesis de que con el tiempo se seleccionan progresivamente circuitos cerebrales para conformar diferentes dominios, circuitos que estarían formados por la interacción con la información proveniente del medio ambiente, dicha teoría es llamada redescipción representacional (RR) mediante la cual la información implícita de la mente llega a convertirse en conocimiento explícito, este conocimiento es producido en un dominio específico y con el tiempo se usa rutinariamente hasta ser expresado de manera explícita.

El modelo se basa en la idea de que la forma específicamente humana de obtener conocimiento consiste en que la mente explote internamente la información que tiene almacenada mediante el proceso de redescibir sus representaciones (o volviendo a representar interactivamente) en formatos de representación diferentes, lo que se encuentra representado por sus representaciones internas (Caldeiro, 2005).

El modelo RR pretende explicar de qué manera se hacen progresivamente más manipulables y flexibles las representaciones de los niños, este modelo implica tres fases recurrentes

i) El niño se centra fundamentalmente en la información proveniente del mundo externo. La fase culmina cuando se alcanza la "maestría conductual", lo que significa alcanzar la capacidad de ejecutar sistemáticamente de forma correcta las conductas de cualquier microdominio que se haya alcanzado en ese nivel. ii) El niño ya no se centra en los datos externos. La dinámica del sistema pasa a controlar la situación de manera que las representaciones internas se convierten en el centro del cambio. Durante esta fase predominan las representaciones internas que el niño tiene de un microdominio y ésta predomina sobre la procedente de otros datos que vienen de afuera. iii) En esta fase, las representaciones internas se reconcilian con los datos externos alcanzándose un equilibrio entre la búsqueda del control interno y externo. (Caldeiro, 2005).

El modelo RR da cuenta de una organización modular del cerebro que permite tener plasticidad a la hora de aprender; no todos los seres humanos desarrollan los mismos conocimientos, son las experiencias y las interacciones con el medio las que establecen esas diferencias. En el juego de la escalera los diferentes aprendices tuvieron diversas experiencias que les permitieron realizar varias conexiones cerebrales, conexiones diferentes para cada uno, el uso de los diferentes sentidos y la implicación de la búsqueda del triunfo hacen activar regiones cerebrales que permiten analizar lo que está ocurriendo para dar cuenta de los procesos llevados a cabo, las características del entorno y los propósitos finales del juego; durante el aprendizaje por el juego se activan regiones del cerebro, nuevas conexiones que permiten explicitar y transformar interacciones en conocimiento.

Lakoff & Nuñez (2000) hicieron una investigación relacionada al aprendizaje de las matemáticas; en laboratorios con ratas, chimpancés y humanos descubrieron que hay partes del cerebro que se activan al realizar diferentes procesos de razonamiento, al realizar estos laboratorios y analizar lo que sucede en el cerebro, observaron que puede haber una

correlación entre las capacidades numérico simbólicas con la corteza parietal inferior del cerebro, en esta zona se encuentran conexiones neuronales provenientes de la visión, la audición y el tacto, localizando habilidades numéricas que son comunes a todos los sentidos; estudio que es una certeza científica de acuerdo a los estudios realizados por (Harvey, Klein, Petridou, & Dumoulin, 2006), quien afirma que la representación neuronal de los números reside en las cortezas de asociación de orden superior, basándose en los estudios de neuroimagen que muestran consistentemente que esta parte de la corteza parietal responde a las manipulaciones de numerosidad y las lesiones parietales pueden causar déficits de procesamiento de números.

Las habilidades matemáticas provenientes del juego están en el cerebro desde muy niños. De acuerdo a varios estudios realizados con niños entre los 3 y 4 meses de nacidos se pudo determinar que a esta edad el cerebro ya logra detectar características numéricas activando regiones del mismo que permiten identificar características de los objetos que son percibidos a través de la visión, características que desde muy pequeños quedan arraigadas en el cerebro humano; desde una simple percepción del entorno hasta un proceso de subitización al contar colecciones de objetos, como en el caso del conteo presente en el juego de la escalera, que aunque no se haga de manera consciente y explícita, el cerebro tiene la capacidad de asociarlo con el cambio perceptual de los elementos del entorno, en el juego asociando el proceso de conteo como forma de asociación del número de movimientos, o el establecimiento implícito de reglas y regularidades para salir victoriosos, hecho que surge a través de la visión o del tacto y es expresado con signos corporales diversos.

De acuerdo a la investigación realizada por Lakoff & Nuñez (2000) los números están conectados a los dedos porque los niños aprenden a contar con ellos, pero también se relacionan con la escritura y con el espacio ya que el cerebro debe relacionar la cantidad de objetos distribuidos en un entorno o agrupar procesos de escritura como una colección de objetos para darle significado, esto debido a que las ideas humanas están basadas en gran medida en la experiencia sensorio-motriz, las ideas humanas abstractas hacen uso de mecanismos cognitivos fundamentados en la experiencia sensorio motriz, así que las ideas

matemáticas son de carácter empírico; desde una perspectiva neurocientífica el cerebro y el cuerpo evolucionaron de manera que el cerebro pudiera hacer que el cuerpo funcione y viceversa.

De esta manera, se puede pensar que la estructura de la mente es modular, donde cada módulo procesa información de manera autónoma, independiente y específica del dominio que esté desarrollando; tal información pasa de una percepción a una representación en un formato común, que son llevadas al sistema central donde son procesadas de manera general; este sistema recibe información de diferentes tipos de memorias del sujeto integrando datos provenientes de los sistemas modulares perceptivos interpretando la realidad y las interacciones (García & Carpintero, 2000), dichas percepciones e informaciones pueden tener los siguientes rasgos:

- *Obligatoriedad*: Los módulos operan de manera obligatoria y automática siendo un proceso inconsciente e involuntario del sujeto.
- *Rapidez*: Los módulos son más rápidos que los sistemas cognitivos centrales ya que procesan información muy restringida.
- *Superficiedad computacional*: los módulos realizan aproximaciones de la información ya que el conocimiento más pleno requiere de los sistemas centrales.
- *Innatismo*: Los módulos siguen un patrón genético más cerrado, mientras que los sistemas centrales usan la información para convertirlo en conocimiento a través de la experiencia y el entorno.
- *Especificidad neural*: Los módulos están físicamente realizados en estructuras neurales fijas y separadas en el cerebro.
- *Pautas de deterioro*: Los módulos se dañan o se deterioran de manera independiente.

Mediante los módulos se procesa la información de entrada o la percepción del mundo y del propio cuerpo, vinculados al control de la acción en movimientos rápidos, mientras que los procesos cognitivos como el razonamiento son realizados por los sistemas centrales.

A partir de lo anterior, se puede pensar que el razonamiento atribuible al desarrollo del juego es dado a partir de la experiencia y la interacción con el medio (características y reglas del juego), los diferentes aprendices tuvieron la oportunidad de explorar el juego, mirar sus características, pensar estrategias y modificar sus conductas para salir victoriosos, durante este proceso se activa la capacidad receptora de información de los diferentes módulos del cerebro, para ser procesada en los sistemas centrales que dan cuenta del proceso de razonamiento inmerso en el juego, este procesamiento de información para ser convertido en un conocimiento pasa por diferentes conexiones cerebrales que dan cuenta de varias características que finalmente convergen en el mismo punto, contribuyendo en el caso de la escalera a un razonamiento matemático que es observable en el desarrollo del juego a través de los gestos corporales correspondiente a diferentes momentos del juego.

Cada uno de los procesos llevados a cabo en los módulos dan cuenta de una percepción del entorno, de la recolección de información del medio para ser analizada en los sistemas centrales; desde esta perspectiva neurocientífica, la única matemática que los seres humanos podrían conocer es una basada en la mente, limitada y estructurada por el cerebro, el único relato científico de la naturaleza de las matemáticas es aquella que se pueda justificar a partir de las teorías cognitivas explicadas por la mente humana, donde la mayoría de pensamientos humanos son procesos cognoscitivos inconscientes, estos pensamientos son metafóricos, permitiendo al ser humano conceptualizar conceptos abstractos en términos concretos utilizando ideas y modos de razonamientos fundamentados en el sistema sensorio-motor, esta conceptualización es llamada por el autor como metáfora conceptual. La metáfora conceptual es un mecanismo cognitivo que nos permite razonar sobre un tipo de cosa como si fuera otra, esto significa que la metáfora no es simplemente un fenómeno lingüístico sino que hace parte del pensamiento humano. De esta manera, las matemáticas serían mucho más accesibles y comprensibles, dado que las metáforas se basan en experiencias comunes, así pues, las ideas matemáticas podrían entenderse fácilmente a partir de la interacción con el medio.

7. Referencias

- Bressan, A. (S.F). *Principios de la educación matemáticas realista*. Obtenido de <https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf>
- Caldeiro, G. P. (2005). *Desarrollo y aprendizaje: Enfoques alternativos*. Obtenido de Idoneos: <https://educacion.idoneos.com/289908/#actividad-cognitiva-y-contexto-cultural>
- Calderón, D. I., & León;Corredor, O. (2016). *Elementos para una didáctica del lenguaje y las matemáticas en estudiantes sordos de niveles iniciales*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Obtenido de http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/elementos_para_una_didactica_del_lenguaje_y_las_matematicas_en_estudiantes_sordos_de_niveles_iniciales.pdf
- Castro, E., Cañadas, M. C., & Castro-Rodríguez , E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia* , 1-11.
- Castro, E., Rico , L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
- Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learnign trajectories approach*. New York: Routledge.
- Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. London:: Kluwer Academic Publishers.
- Frontera Sancho, M. (2002). *Errores cometidos en la solución de problemas aritméticos de enunciado verbal*. Bogotá.
- García García, E. (2005). *Educación, desarrollo y diversidad* (Vol. 8 (1)). ISSN 1139-9899. Obtenido de http://eprints.ucm.es/5553/1/REVISTA_DEA%C3%91O.pdf
- García, E., & Carpintero, H. (2000). *La modularidad de la mente: Aproximación multidisciplinar*. Madrid: Universidad Complutense.
- Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Obtenido de [http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gomez2007PNA1\(2\)Trayectorias.pdf](http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gomez2007PNA1(2)Trayectorias.pdf)
- Harvey, B., Klein, B., Petridou, N., & Dumoulin, S. (2006). Topographic Representation of Numerosity in the Human Parietal Cortex. *Science*, 341. Obtenido de <http://science.sciencemag.org/content/341/6150/1123.full>
- IESALC. (2008). *Tendencias de la Educación Superior en América Latina y el Caribe*. Caracas.
- Karmiloff, S. (1994). *Más allá de la modularidad*. Madrid: Alianza.

- Lakoff, G., & Nuñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic books.
- Laurillard, D. (2012). *Teaching as a Design Science, Building Pedagogical Patterns for Learning and Technology*. New York: Taylor & Francis.
- León Corredor, O. L. (2014). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad*. Bogotá: Universidad Distrital Fransisco José de Caldas. Obtenido de http://209.177.156.169/libreria_cm/archivos/pdf_288.pdf
- León, O. L. (2014). *INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO*. Bogotá: Documento no publicado.
- León, O., Díaz Celis, F., & Guilombo, M. (junio-septiembre de 2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 9-28.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, 31-51.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá.
- MEN, Ministerio de Educación Nacional . (1994). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá.
- ONU. (2008). LA EDUCACIÓN INCLUSIVA: EL CAMINO HACIA EL FUTURO" PRESENTACIÓN GENERAL DE LA 48^a REUNIÓN DE LA CIE. *Conferencia internacional de educación*. Ginebra. Obtenido de http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Policy_Dialogue/48th_ICE/General_Presentation-48CIE-4__Spanish_.pdf
- Opertti, R. (2009). De Salamanca a la CIE 2008: ventanas de oportunidades para la Educación Inclusiva. *Conferencia Mundial sobre Educación Inclusiva*. Salamanca: OIE-UNESCO. Obtenido de http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/COPs/News_documents/2009/0910Salamanca/Salamanca_PPT.pdf
- Parra, C. (2010). Educación inclusiva: Un modelo de educación para todos. *ISEES*(8), 73-84.
- Rodriguez Molina, L. F. (2016). *TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE: APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES SUMA Y RESTA EN AULAS INCLUSIVAS CON INCORPORACIÓN TECNOLÓGICA*. Bogotá: Universidad Distrital Fransisco José de Caldas.
- Schwartz, J. (1988). Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations. In: Number Concepts and Operations in the Middle Grades (James Hiebert & Merylin Behr. Eds). *National Council of Teachers of Mathematics*, 41-52.

UNESCO/OREALC. (2001). *Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura*. Obtenido de Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura: <http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001354/135468s.pdf>