RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL EN UN AMBIENTE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Javier Esteban Leal Carvajal

Cristian Camilo Arenas Espitia

Autores

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2018

RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL EN UN AMBIENTE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Javier Esteban Leal Carvajal

Cristian Camilo Arenas Espitia

Autores

Jaime Fonseca González

Director

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2018

Agradecimientos

Principal agradecimiento a Dios, quien nos brindó sabiduría y fortaleza en nuestro recorrido académico. A familiares y amigos cercanos, por brindarnos lo mejor de ellos, sus palabras de apoyo y su absoluta confianza en nosotros.

A profesores y compañeros de la academia, por enseñarnos y aprender juntos de esta significativa labor. A nuestro director de trabajo de grado el profesor Jaime Fonseca, por su paciencia y dedicación en la dirección de este trabajo.

Dedicatoria

Cristian Camilo Arenas Espitia

Le quiero dedicar este trabajo esta carrera y todos mis éxitos y fracasos primero a Dios, pues gracias a él he obtenido todas estas bendiciones en mi camino y he conseguido éxito en mi carrera educativa. También quiero dedicar este éxito a una persona que influyó en mi crecimiento como profesional y como persona, gracias a ella he logrado cada objetivo que me he propuesto, a mi madre María Cecilia Espitia, la persona a quien le debo la vida a quien le debo como soy, lo que soy y sobretodo mi carácter como persona.

Javier Esteban Leal Carvajal

A mi madre, Flor Carvajal, a quien nunca he dejado de observar con total admiración; siempre que cierro mis ojos y pienso en mis éxitos, aparece su imagen; le dedico este y todos los logros que han de llegar en el futuro. A mi familia más cercana con quienes logramos crear el más extraño ambiente hogareño.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) tiene como propósito formar profesores de Matemáticas; esto bajo un ambiente de resolución de problemas. En esta formación, la LEBEM reconoce una dificultad que comúnmente se presenta en contextos de enseñanza de matemáticas: la poca articulación entre la obra matemática y la matemática escolar. Esto genera que los estudiantes no comprendan la relevancia de los objetos matemáticos desarrollados en clase, motivo por el cual se crea un vacío en la justificación del aprendizaje.

La socioepistemología, es una teoría que evoca la dificultad antes mencionada y despliega un constructo teórico, llamado resignificación, que se desarrolla solo en la medida en que se presenten escenarios de práctica social. El escenario y el constructo teórico logran articular la obra y la matemática escolar por medio de un proceso denominado resignificación progresiva. La resolución de problemas como característica principal de la LEBEM no es un elemento ajeno a la teoría socioepistemológica.

El presente documento tiene como propósito exponer elementos de la teoría socioepistemológica y de los elementos de la resolución de problemas para construir un puente teórico que permita enlazar el ambiente de resolución de problemas con la teoría y generar herramientas que permitan una investigación de las resignificaciones de un concepto matemático para estudiantes para profesor en un ambiente de resolución de problemas.

El concepto matemático que se analiza en este trabajo de grado es la integral, que vista desde la modelación del movimiento se involucra en el espacio de formación de Matemática del

Movimiento III de LEBEM. El desarrollo teórico de este concepto representa la última herramienta necesaria para realizar el posterior proceso de análisis.

Este documento se estructura en seis secciones. La primera, de planteamiento del problema, presenta un marco general de la LEBEM como proyecto curricular susceptible de ser investigado desde la teoría socioepistemológica, particularmente en el espacio de formación de matemática del movimiento III y su relación con el concepto de integral.

La segunda, de marco teórico, elementos teóricos involucrados en el desarrollo de la investigación, que permiten construir una relación entre la resolución de problemas y la práctica social. Esto con el fin de realizar una investigación del ambiente de resolución de problemas desde una postura socioepistemológica.

La tercera, de diseño metodológico, despliega la manera más pertinente de abordar la problemática previamente expuesta, los instrumentos de recolección de datos y las formas de análisis.

La cuarta es referente al análisis realizado a partir de la recolección de datos. En la quinta se exponen los resultados del análisis y a nivel general de la investigación. Por último se realiza una conclusión general del trabajo realizado, desde el planteamiento del problema hasta los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presentan los antecedentes teóricos que permiten identificar y resaltar una problemática en el área de la educación. Aquella, apunta principalmente a responder una pregunta que surge luego de reconocer las intenciones y herramientas de una comunidad educativa específica. Posterior a esto, se plantean objetivos con el fin de generar un recorrido investigativo que concluya en responder a la pregunta planteada.

2.1 Problema de investigación

La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) es un programa de pregrado que ofrece la universidad Distrital Francisco José de Caldas, la cual se propone formar profesionales en Educación Matemática que se desempeñen como profesores en esa área.

Según la misión de la LEBEM, el profesional egresado de este proyecto es comprometido con la construcción y producción del conocimiento en la pedagogía como disciplina fundante, en los saberes disciplinares y de referencia, y con el estudio, transformación e innovación de las prácticas educativas y pedagógicas.

El plan de estudio del programa propone cuatro núcleos problémico/temático de formación de profesores, López (1995) (Citado en el documento de acreditación previa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, 1999) define un núcleo problémico como, "el conjunto de conocimientos afines que posibiliten definir líneas de investigación en torno al objeto de transformación, estrategias metodológicas que garanticen la relación teoría-práctica y actividades de participación comunitaria" (Pág. 54). Considerando es concepto como organizador del currículo, se definen los cuatro núcleos problémico/temático, los cuales son: pensamiento matemático avanzado, matemáticas escolares, formación práctica docente y contextos profesionales. El presente trabajo pretende aportar conocimiento sobre el eje de formación de pensamiento matemático avanzado.

Los espacios de formación en cada núcleo se desarrollan bajo un ambiente de resolución de problemas, por lo que este enfoque de formación guía los procedimientos de planeación, gestión y evaluación de los procesos de formación.

Es entonces válido preguntarse qué es la resolución de problemas y qué implicaciones trae formar profesores bajo este enfoque. Responder esto no es tarea fácil; el término problemas y más aún la expresión resolución de problemas son definidas desde diferentes corrientes y su significado varía considerablemente. Es por tanto coherente entender que dentro del proyecto LEBEM exista diferencias en la forma como se considera la resolución de problemas y sus implicaciones en el desarrollo de procesos de formación.

(Vilanova *et al.*, 2009) Consideran tres principales interpretaciones de la resolución de problemas.

1. La resolución de problemas como medio para un fin. En esta, la resolución de problemas es un contexto, en el cual como señala (Vilanova *et al.*, 2009, pág. 3) “los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares”. La resolución de problemas toma principalmente cinco roles, como justificación para enseñar matemáticas, para proveer especial motivación a ciertos temas, como actividad recreativa, como medio para desarrollar nuevas habilidades y como práctica. Como mencionan (Vilanova, *et al.*, 2009, pág. 3) “la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas”.

2. La resolución de problemas como habilidad. Al desarrollar un currículo de matemáticas se consideran varias habilidades dentro de las cuales se entiende la capacidad de resolver problemas como una habilidad de nivel superior. Esto significa que la resolución de problemas juega un papel de medio para un fin. En palabras de (Vilanova *et al.*, 2009, pág. 3) "los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas".
3. Resolución de problemas como hacer matemáticas. Esta interpretación está principalmente influenciada por Polya quien usa el término heurística para explicar el hacer matemáticas. (Vilanova *et al.*, 2009, pág. 3) consideran que "Para Polya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha".

En cualquiera de estas tres interpretaciones se reconocen tres dificultades a las que se enfrentan los profesores cuando se enseñan por resolución de problemas (Vilanova *et al.,* 2009, pág. 9) señalan:

1. Matemáticamente, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso.

2. Pedagógicamente, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase.

3. Personalmente, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de no saber. Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.

Los profesores encargados de los espacios de formación del núcleo problémico de pensamiento matemático avanzado en la LEBEM, deben sobreponerse a estas dificultades y ayudar a los estudiantes para profesor a construir conocimientos. En este núcleo el proyecto curricular incluye varios espacios de formación entre los cuales se encuentran problemas del continuo, extensiones numéricas, matemática del movimiento I, II y III y validez y modelos.

El presente documento centra su atención en el espacio de formación de matemática del movimiento III, porque en ese espacio el concepto de integral aparece como objeto de estudio y es precisamente éste el que resulta de interés para este trabajo de grado.

El proyecto curricular propone en el syllabus (2016-3) de esta asignatura realizar un estudio del movimiento como fenómeno variacional, para ello se construyen y aplican los ejes temáticos de:

- Sumas de Riemann.
- Integrales de funciones.
- Otras aplicaciones de la integral.
- Técnicas de integración.
- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Esto con la intención de cumplir con los propósitos de formación, que según el Syllabus (2016-3 pág. 2) son:

> 1. Establecer estrategias específicas y generales para la resolución de problemas del movimiento asociados al proceso inverso a la derivación como herramientas útiles para la solución de otros problemas, de modo que el concepto surja en medio de un contexto y no quede como un concepto abstracto del cálculo.
>
> 2. Construir el concepto de integral a partir de la resolución de problemas del movimiento para contextualizarlo en situaciones específica.
>
> 3. Establecer representaciones, procesos, estrategias, técnicas y tecnologías útiles para la resolución de problemas del movimiento enlazados con los conceptos de razón de cambio y la integral.
>
> 4. Emplear razonamiento inverso como mecanismo para determinar soluciones de problemas en los que interviene la integral y validar conjeturas sobre propiedades de este objeto matemático.

El proyecto curricular justifica la pertinencia de esta asignatura realizando especial énfasis en la posibilidad de relacionar las descripciones cuantitativas del área de curvas con fenómenos de cambios, syllabus (2016-3 pág. 1)

> Como consecuencia, se originaron descripciones cuantitativas del área de curvas, que pueden ser interpretadas como fenómenos de cambio si se concibe un punto móvil que cambia de dirección continuamente generando tales curvas.

Esto claramente desemboca a la idea de la integral como elemento fundamental y principal en el estudio del movimiento, Syllabus (2016-3 pág. 1)

> Los estudios y métodos de Newton llevaron a calcular la evolución de los sistemas de movimiento a partir de unas condiciones iniciales. Adicionalmente, Leibniz estudió sumas y diferencias infinitas de números en un contexto discreto y luego las extrapoló a contextos continuos. Así, al considerar la variable x, la diferencia para valores sucesivos es dx, una cantidad despreciable o infinitesimal y la suma de tales diferencias la denota como $\int dx$, para obtener la variable completa x. De esta forma, Leibniz obtiene la noción de diferencial e integral como procesos inversos e interrelacionados.

El estudio de la integral vista desde la perspectiva del movimiento es la idea fundamental de la asignatura y esta prioridad enlaza de manera perfecta con las consideraciones de los estándares básicos de competencias (EBC). Los cuales, consideran la integral como un elemento matemático relevante en el aprendizaje, y por ende, proponen una introducción al cálculo infinitesimal, en el último ciclo se hace especial énfasis en el concepto de derivada y técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

Es además muy común encontrar en programas universitarios cursos en los cuales se estudia el concepto de derivada y antiderivada, particularmente programas estrechamente relacionados con las matemáticas.

Es por eso que construir un conocimiento sobre el tema es importante, pero no es tarea sencilla entender claramente los elementos que componen la integral, y la integral en sí. Como menciona Hitt (2003) (Citado en Cabañas, 2011, pág. 27), "el cálculo implica una gran cantidad de subtemas que están íntimamente relacionados, y el manejo deficiente de algunos subconceptos impide un desarrollo profundo de los conceptos que le son propios, como son, funciones, límite, continuidad, derivada e integral". Por esta razón para desarrollar un aprendizaje del cálculo es necesario comprender todos los elementos que encierra.

En la enseñanza del cálculo surgen varias dificultades para entender el concepto de integral definida, (Cabañas, 2011, pág. 6), señala varias de ellas:

- Problemas para establecer un nexo entre el concepto de área y el de integral definida
- Los procesos límites
- El hecho de entender por qué la integral no siempre representa al área
- Comprender por qué cuando se ha partido del supuesto explícito de que f(x) no es negativa en el intervalo (a,b) a fin de precisar matemáticamente la noción de integral definida (es decir, que ninguna parte de la gráfica de la curva se encuentra por debajo del eje de las x´s), algunos valores de ciertas funciones son tomados negativos.
- Entender por qué, cuando la integral es cero, ¡esta se siga interpretando como área!

Teniendo en cuenta de estas dificultades también se encuentran complejidades en la comprensión de nociones como límite y función, lo que desemboca en una problemática, en respuesta a estas dificultades la educación matemática ha estudiado los motivos y los posibles procesos de solución. No obstante, se considera que la actividad del estudiante no es la única implicada. (Cabañas, 2011, pág. 6), expresa:

> Reconocimos que esta problemática no se limitaba —ni se limita— a la actividad del estudiante, pues también involucra al propio saber matemático y el papel del profesor, a las prácticas que se desarrollan en el aula, así como al contexto social, histórico y cultural en que están inmersos los actores del sistema didáctico. Por tanto, entendimos que no era suficiente identificar y caracterizar nociones o estrategias en los estudiantes.

Se considera que uno de los principales obstáculos que se involucran en el aprendizaje del cálculo, radica en la poca relación que los estudiantes encuentran entre el uso y el aprendizaje de sus elementos. Por esta razón, crear una articulación entre la obra matemática y las matemáticas escolares representa un paso significativo para la construcción de cualquier conocimiento matemático.

El proceso que permite lograr lo mencionado anteriormente es la resignificación, a partir de dar un nuevo significado a los elementos que componen un concepto matemático. Para trabajar con este proceso es prudente considerar una definición sobre el mismo, los autores del presente documento comparten el concepto que atribuyen (Cordero & Morales, 2014, pág. 323)

> …la resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización normado por lo institucional; es decir, es el uso del conocimiento en una situación específica donde se debate entre su funcionamiento y forma acorde con lo que organizan los participantes. La resignificación está articulada con los aspectos funcionales y del uso del conocimiento en cuestión.

Al poner en juego la resignificación es prudente considerar una teoría desde la cual está fundamentada, esta teoría es la socioepistemología. Desde allí se expone los procesos de resignificación, la socioepistemología asegura que se logra resignificar siempre que sea posible atribuir usos. (Cordero & Flores, 2007) Proponen dos categorías que surgen al relacionar un elemento del cálculo con el uso social del mismo, la categoría de la resignificación y la categoría de la justificación funcional.

> La resignificación. Esta categoría muestra la función de la práctica social y el desarrollo del uso del conocimiento en situaciones específicas.
>
> La justificación funcional. Esta categoría se refiere a que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales como contra parte de una

justificación razonada, es decir, lo que norma la justificación no es una proposición lógica sino aquello que le es de utilidad a lo humano. (pág. 10)

De estas categorías se puede comprender que la idea de resignificación y justificación funcional es opuesta a la creencia que las matemáticas son la comprensión del concepto formal. Los conceptos matemáticos compuestos por elementos susceptibles de ser resignificados, permiten un proceso de resignificación que genera la construcción de conocimientos matemáticos.

Al ser la construcción de conocimientos uno de los objetivos en el eje de pensamiento matemático, y en particular, de las asignaturas de matemáticas del movimiento pertenecientes al núcleo problemático/temático de pensamiento matemático avanzado de la LEBEM, es posible hacer la pregunta:

- ¿Cuáles son las resignificaciones al concepto de integral que se produce en un proceso de formación de profesores en un ambiente de resolución de problemas?

2.2 **Objetivos**

Objetivo General:

- Analizar el proceso de resignificación de la integral en un ambiente mediado por la resolución de problemas para la formación de profesores de matemáticas.

Objetivos Específicos:

- Reconocer contextos de la integral empleados para la formación de estudiantes para profesor en ambientes mediados por resolución de problemas.
- Identificar la resignificación de la integral en estudiantes para profesor en un ambiente mediado por resolución de problemas.

- Caracterizar la progresión de resignificaciones del concepto de integral que estudiantes para profesor alcanzan en una formación mediada por un ambiente de resolución de problemas.

2.3 Justificación

Esta problemática se aborda con un trabajo de carácter investigativo y se desarrolla dentro de un contexto de formación de profesores. Es claro que, todo estudio que busque responder a esta problemática es de interés para profesores y formadores de profesores, como lo expresa (Cabañas, 2011, pág. 30)

> Es de interés tanto para profesores de matemáticas como para los investigadores de nuestra disciplina aquellas investigaciones que pongan de relieve las complejidades que tienen lugar en el salón de clases en el momento de introducir conceptos matemáticos; al poner en práctica las recomendaciones de un nuevo currículo, o bien; al poner a prueba determinadas hipótesis.

Para el caso de LEBEM, es de especial interés en esta comunidad el análisis de los procesos de resignificación progresiva en el ambiente de resolución de problemas en los espacios de formación que desarrolla. Si bien el significado de los objetos y la construcción del conocimiento es posible de estudiar desde otras teorías de la Educación Matemática, este trabajo es uno de los primeros en abordar la problemática desde la Socioepistemología, por lo que constituye un referente importante para análisis de los procesos de formación de profesores de LEBEM.

Además de esto, investigaciones realizadas por (Cordero Osorio, 2005) concluyen que la matemática escolar no tiene marcos de referencia para que la matemática sufra una resignificación, esto constituye un problema en la educación matemática que deja en evidencia la poca coherencia entre la matemática escolar y la obra matemática.

El proceso de resignificación por su parte logra realizar la coherencia que (Cordero Osorio, 2005) señala como necesaria para generar un aprendizaje. No obstante, este proceso no siempre es evidente, puede suceder que se genere el proceso de resignificación y ninguno de los implicados se dé cuenta de esto, sino, que centran su atención en el producto generado. Por eso no solo es importante entender el proceso de resignificación, sino, reconocer los criterios bajo los cuales es posible identificar diferentes resignificaciones que ocurren en el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos.

Este documento pretende aportar un estudio de los elementos involucrados en la construcción del concepto de integral, desde la capacidad de categorizarlos según la teoría socioepistemológica que define categorías para los procesos de resignificación. Este aporte enfocado desde un ambiente de resolución de problemas (el cual caracteriza al proyecto curricular LEBEM) enriquece la capacidad de generar condiciones para permitir procesos de resignificación y de esta manera generar la construcción del conocimiento.

La población que será analizada corresponde a un grupo de estudiantes que se encuentra en el espacio de formación matemáticas del movimiento III, en un ambiente de resolución de problemas, que permiten perfectamente el desarrollo de las categorías de la resignificación; dentro de esta institución el autoanálisis significa un punto fundamental en el crecimiento académico e investigativo, como institución y como sociedad académica, por lo tanto la realización y socialización del presente trabajo investigativo tiene relevancia para la comunidad académica, para los profesores, investigadores y estudiantes en general y especialmente para LEBEM.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se encuentran los elementos teóricos que se usan a lo largo de la investigación, entre ellos, la teoría socioepistemológica y sus principios fundamentales, el constructo teórico de resignificación y sus categorías, el escenario de práctica social. También se hace mención a algunos elementos de la resolución de problemas y se concibe la formación de profesores como una práctica social y por lo tanto susceptible de ser investigada desde la teoría socioepistemológica.

El profesor de matemáticas tiene una tarea general: enseñar matemáticas. Para ello, hace uso de elementos que le permitan concretar esta tarea; tanto elementos didácticos como metodológicos que deben complementarse y generar en sus estudiantes la capacidad de construir un conocimiento matemático.

Para llevar a cabo esta tarea el profesor puede guiar su labor con teorías que exponen formas de lograr crear en los estudiantes la oportunidad de construir conocimientos; este documento busca indagar particularmente sobre un proceso que se genera a partir de la teoría socioepistemológica.

Desde un enfoque socioepistemológico se logra considerar la complejidad que existe en la naturaleza del saber, en palabras de (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 9):

> La Socioepistemología se caracteriza por ser una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional que toma en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. Al develar la

relación entre saber y vida cotidiana, la Socioepistemología responde a las preguntas: ¿qué es conocer?, ¿qué hacemos cuando construimos y usamos al conocimiento?, ¿cómo construimos nuestros sistemas conceptuales?

Dada esta complejidad la teoría socioepistemológica propone una red nodal formada por cuatro principios fundamentales, entre los cuales se considera la resignificación progresiva; a partir de ella es necesario definir e identificar unas categorías con las cuales es posible construir esquemas de resignificación que permiten resolver la pregunta planteada en la problematización.

En este orden de ideas se considera pertinente exponer las características e implicaciones de la teoría socioepistemológica y a partir de esta desplegar los elementos que ayudarán a crear un camino teórico entre los procesos de resignificación y el ambiente de resolución de problemas.

3.1 **Socioepistemología**

La socioepistemológica es un enfoque teórico que articula la experiencia humana y la enseñanza institucional. Como lo menciona (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 8) “modela la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, esto es, modeliza las dinámicas del saber o <conocimiento puesto en uso>”.

Para lograr articular esto, la teoría introduce las nociones de uso y adquisición por aprendizaje, de modo que la socioepistemología no le interesa solo el aprendizaje o el contenido matemático, sino el estudio del conocimiento puesto en uso.

Es importante aclarar que en esta teoría se tiene en consideración todo tipo de forma de adquisición de saber, ya sea por tradición oral, prácticas técnicas u otra fuente de información, ya que todo esto corresponde a la experiencia humana que es parte importante de la articulación para llegar a la construcción del conocimiento desde el conocimiento puesto en uso.

(Cantoral *et al.*, 2014) Definen cuatro principios fundamentales, aclarando que no son una secuencia lineal, sino una red nodal: El principio normativo de la práctica social, el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico y el principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada.

3.1.1 *El principio normativo de la práctica social*

> (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 10) consideran que para articular la construcción social del conocimiento, es decir, la construcción del saber, se articulan los siguientes principios uno detrás de otro: se pasa de la acción, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una actividad humana situada socioculturalmente, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), la que a la vez es normada mediante cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva.

3.1.2 *El principio de la racionalidad contextualizada*

El momento y lugar en donde se encuentre el sujeto a la hora de racionalizar sobre una experiencia determinan los principios normativos de razonamiento. Por tal motivo, este principio hace especial énfasis en la idea de que la socioepistemología es un proceso sociocultural, donde las conductas y conclusiones siempre están influenciadas por la sociedad en la cual se habita.

3.1.3 *El principio del relativismo epistemológico*

Este principio sostiene que no existe una única verdad universal, sino que existen verdades subjetivas y relativas. En los temas referentes a la humanidad se comprende dos posiciones contrarias: el objetivismo y el relativismo. Donde el sentido de verdad en el objetivismo es independiente del sujeto individual y del sujeto colectivo, mientras que el sentido de verdad en el relativismo está ligado a quien lo experimente y donde lo haga.

Es bien conocido que a través de la historia de la humanidad se han encontrado diferentes puntos de vista y opiniones sobre los mismos hechos, pero el principio del relativismo epistemológico hace una extensión de esta realidad y concluye que no solo son opiniones diversas, sino, que estas opiniones son también verdaderas para cada persona.

Esta conclusión realiza una transformación en el contexto educativo y cultural, como mencionan (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 11):

> Específicamente esto es importante en los asuntos educativos y culturales, pues para un alumno que no entiende por qué está mal, se precisa primero entender por qué él o ella se considera que está bien. El cambio de mirada, desde el error al obstáculo fue un salto de la Matemática Educativa.

Entonces se entiende que la socioepistemología es una teoría contraria al absolutismo epistemológico, el cual entiende una única verdad universal, ya que en la socioepistemología se aceptan varios saberes como verdaderos, (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 111):

> Como señalamos anteriormente aceptamos el saber popular, el saber técnico y el saber culto, todos en su conjunto caracterizan la sabiduría humana, por lo que es válido

> analizar las prácticas de comunidades distintas y buscar en todas ellas sus valores epistémicos de verdad.

3.1.4 *El principio la resignificación progresiva*

Las acciones que realiza un individuo sobre un objeto crean en él conocimientos con base a la experiencia. En ese orden de ideas, el conocimiento que se construye estará influenciado por el contexto, a partir de estas acciones se crean además unos significados sobre deferentes objetos. Con el posterior uso de los objetos previamente significados se logra personalizar y significar de nuevo dichos objetos, a este proceso la teoría socioepistemológica le denomina "resignificación progresiva". (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 103) Aseguran que:

> Este mecanismo de producción de significados, no aísla al individuo del medio, sino que le da una forma de establecer lazos de interacción, pues al momento de ponerlos en uso se precisa además del usuario, de las herramientas, los argumentos, los discursos, los entornos socioculturales que permitirán la emergencia del saber, un saber que por su naturaleza es compartido, es un emergente de un proceso social.

El saber que se construye a partir de ahí, es a su vez el conocimiento de base que servirá para realizar nuevamente un proceso de significación y resignificación. (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 103) Aseguran que esto mismo ocurre con los constructos teóricos de una teoría, los cuales viven procesos de resignificación progresiva:

> En síntesis, la teoría Socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye sensiblemente en el tipo de racionalidad con la cual un

individuo o grupo construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada).

3.2 Resignificación

Para (Cabañas, 2011, pág. 69) la resignificación es definida como:

> La resignificación es un constructo teórico que la socioepistemología ha incorporado con el propósito de formular explicaciones acerca de la construcción social del conocimiento; donde la práctica social deviene en función normativa de las acciones que llevan a cabo determinados grupos humanos en el uso de dicho conocimiento, con intenciones específicas.

(Cabañas, 2011, pág. 69) Comparte la noción de resignificación de Cordero (2008), con la cual el presente documento piensa abordar las problemáticas expuestas:

> La resignificación es interpretada como la construcción del conocimiento en la organización de lo humano, normado por lo institucional, que se manifiesta en el uso del conocimiento dentro de una situación específica. […] La resignificación se manifiesta no solo en el uso del conocimiento, sino también en su desarrollo, que norma la práctica social; ambas se oponen al desarrollo conceptual del conocimiento.

Es posible analizar los procesos de resignificación en un ambiente de aprendizaje, el cual pasa por dos momentos. (Cabañas, 2011, pág. 68)

> La resignificación se estable en dos momentos, a nivel teórico y a nivel de una experiencia de aula. En ambos, emergen roles del profesor: 1) en la concepción de la

> experiencia, en ella se halla inmersa la situación de aprendizaje, y; 2) durante la gestión que hace en la construcción de conocimiento matemático con los estudiantes, la que se instituye por medio de una relación funcional, con fines de aprendizaje.

Adicionalmente, (Cabañas & Cantoral , 2012, pág. 1033) determinan que existen tres categorías que norman los procesos de resignificación: contextos, procedimientos y usos. Al respecto señalan que:

> Entendemos por contextos a los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los procedimientos como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003). La connotación que se le da a la noción uso en esta investigación es en el sentido de Cabañas (2011a, 2011b), quien la caracteriza desde la teoría pragmática, como las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico.

3.2.1 *Contextos*

Para la teoría socioepistemológica la categoría de contextos tiene dos significados desde los cuales es posible generar una acción de resignificación progresiva de un concepto, uno de ellos se refiere a los entornos situacionales, y el segundo las razones o circunstancias por las cuales se generó dicha situación, en palabras de (Cabañas, 2011, pág. 66):

> La noción contextos se concibe en este trabajo como: a) el entorno en que se presenta determinada situación y; b) las circunstancias en que se da o se presenta determinado hecho o situación. Pueden ser materiales, temporales, sociales, institucionales o culturales, mismos que se analizan desde un punto de vista didáctico.

3.2.2 *Usos*

El uso de un conocimiento matemático o también llamada la aplicación, constituye de alguna manera la justificación para la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático, ya que, si un conocimiento no tiene aplicación, pierde importancia.

Pero es válido preguntarse ¿Qué se entiende por uso de un elemento matemático? Y en particular ¿qué se entiende por el uso de la integral?

Desde Cabañas se interpreta que el uso de la integral es la manera como el conocimiento es puesto en práctica dentro de un determinado contexto. En palabras de (Cabañas, 2011, pág. 75)

> La noción uso se adopta en el sentido de Cantoral (2009a; 2010b), quien la caracteriza desde el pragmatismo teórico, como las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico.

De esto se interpreta una dependencia, el uso de una noción matemática está completamente ligado al contexto en donde se aplicará. Por esto, es importante primero entender el contexto en cual está emergiendo el concepto y posterior a esto, analizar los usos que pueden surgir de la noción en el determinado contexto.

Los usos también se ven reflejados a partir de cada procedimiento que se realiza, a modo de ejemplo se puede exponer a (Cabañas, 2011, pág, 436) quien en una reflexión sobre las tres categorías reconoce diferentes usos en determinados procedimientos en un contexto.

> Los usos del área que pusieron en juego en las transformaciones analíticas por medio de sus argumentos, fueron: las medición, comparación, estimación y representación del área. El contexto: las funciones polinómicas continuas y positivas, un intervalo cerrado y la partición del intervalo. Los procedimientos se sustentaron en: a) métodos de aproximación

por exceso y por defecto, b) sumas de Riemann, y: c) métodos y técnicas de integración principalmente. Se observó una tendencia por describir la definición de la integral definida mediante la "resta".

Lo anterior corresponde a un análisis sobre el concepto de integral a partir de la conservación del área. Claramente exponen las tres categorías a partir de un desarrollo realizado por los estudiantes.

De acuerdo a las categorías y aspectos que propone la autora se ha involucrado el rol del profesor normado por la resolución de problemas como ente guiador de la construcción del conocimiento matemático y, por ende, de la resignificación de sus conceptos.

Si bien la resignificación toma en consideración los conocimientos primitivos de los estudiantes y les asigna un nuevo significado; la resolución de problemas permite a los estudiantes hacer obvia esta consideración.

3.2.3 *Procedimientos*

Cordero (2003) deja en evidencia una forma de reconocer resignificaciones al concepto de integral desde un proceso de acumulación, generando dos tipos de elementos, por un lado los contextos y procedimientos y por el otro los usos. Esto muestra la estrecha relación entre los procedimientos y los contextos.

Los estudios posteriores de Cordero lograron enriquecer a la categoría de procedimientos con una definición, (Cordero, 2005, pág. 271) Define los Procedimientos como: "las formas de organización de las situaciones"

Basado en la definición y ejemplos expuestos anteriormente, los autores de este trabajo de grado interpretan y reescriben la definición de la siguiente manera: el procedimiento es la forma como se desarrolla el uso de cierta noción en un contexto específico.

Estas categorías de la resignificación propias de la socioepistemología se desarrollan y evidencian con un escenario que la teoría denomina *práctica social*. (Cabañas, 2011, pág. 68)

> En la resignificación de conceptos matemáticos, la práctica social es fundamental, dado que es por medio de ella que se formulan epistemologías del conocimiento con la intención de hacer posible la construcción de conocimiento matemático.

3.3 **Práctica social**

La práctica social es uno de los elementos claves en la teoría socioepistemológica, involucrando a los estudiantes, al medio y a la cultura; proponiendo como protagonistas acciones que involucren la interacción y la comunicación. (Cabañas, 2011, pág. 68):

> La cognición en esta teoría, es entonces entendida como la capacidad de "hacer emerger" el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción "dialéctica" entre protagonistas. Esta interacción, es socialmente normada y en tal sentido, la práctica es de hecho, inevitablemente, una práctica social.

De esta manera la práctica social permite el desarrollo de la construcción del conocimiento, generando como resultado una convención matemática que descentraliza la atención hacia los conceptos matemáticos, para atender a los mecanismos constructivos de conocimiento. Dicho en palabras de (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez, & Suárez, 2004, pág. 420)

> La atención debe ser puesta en los mecanismos constructivos y no en los conceptos matemáticos en sí. De esta manera la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, adquiere aquí un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un escenario centrado en una práctica

social de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica.

La convención matemática posibilita la integración sistémica de conocimientos mediante el simple hecho de significar, para (Arrieta *et al.*, 2004, pág. 420) esto se puede resumir como "el proceso mediante el cual un significado es convenido para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático (es decir para la integración sistémica de conocimientos)."

Al descentralizar los conceptos matemáticos para enfatizar en la construcción del conocimiento, no implica pasar por alto los conceptos, sino, generar en ellos un mejor status epistemológico.

Con esto la práctica social logra exponer las causas reales del desarrollo social del conocimiento. Sobre la convención matemática para (Arrieta *et al.*, 2004, pág. 420) la convención matemática "…permite señalar que la atención debe ser puesta en los mecanismos constructivos y no en los conceptos matemáticos en sí".

Se han expuesto y explicado varios elementos de la socioepistemología, para llegar a caracterizar el constructo teórico que es la resignificación; es este elemento de la teoría el que se pone principalmente en juego para desarrollar investigaciones en un ambiente de resolución de problemas.

No obstante, para que esto tenga coherencia es necesario generar un puente teórico que permita que un elemento que no pertenece a la teoría socioepistemológica, como lo es la resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas, pueda ser estudiado desde la teoría y generar resultados de investigación. Para construir este puente teórico es importante exponer los elementos y características del ambiente de resolución de problemas, contrastarlos con la teoría socioepistemológica y justificar la relación que permite desembocar en el presente documento de investigación.

En la siguiente sección, se presentan algunos elementos teóricos sobre la resolución de problemas con el objetivo de comprenderla como una práctica social y como tal, ser objeto de estudio desde la socioepistemología.

3.4 Resolución de problemas

Resolver problemas ha sido visto como parte importante del desarrollo matemático, Ministerio de Educacion Nacional (MEN, 1998, pág. 58) asegura que:

> En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.

La resolución debe permitir que sea aprendida la matemática escolar, sus conceptos y herramientas. Según los lineamientos es posible lograrlo, y por eso se considera la resolución de problemas como un buen eje central de los currículos matemáticos.

Los estudiantes que aprenden matemáticas con esta actividad lo pueden hacer desde cualquiera de sus propuestas, ya que la resolución de problemas es una actividad que es entendida y explicada por varios investigadores y cuyos puntos de vista son distintos.

Las tres interpretaciones que el presente documento considera son las propuestas por (Vilanova *et al.*, 2009) la resolución de problemas como contexto, como habilidad y como hacer matemáticas.

De las tres interpretaciones el hacer matemáticas es el que se asemeja más a la resolución de problemas como habilidad, y en esta interpretación interviene la visión de Polya y Schoenfeld.

Aunque se entiende que la resolución de problemas tiene interpretaciones muy diversas existen unos aspectos a los cuales todas convergen y son mencionados por (Vilanova *et al.*, 2009), los cinco aspectos a valorar en la resolución de problemas son: el conocimiento de base, las estrategias de resolución de problemas, los aspectos metacognitivos, los aspectos afectivos y el sistema de creencias, y la comunidad de práctica.

3.4.1 *Conocimiento de base:*

En este primer aspecto se hacen evidentes las herramientas con las que el sujeto se enfrenta al problema, entre las cuales se pueden encontrar conocimientos intuitivos, procesos algorítmicos y conocimientos en lenguaje matemático, no obstante, estos conocimientos e información puede ser incorrecta, pero no dejan de ser las concepciones previas al planteamiento del problema.

3.4.2 *Las estrategias de resolución de problemas:*

Schoenfeld considera que este aspecto corresponde a la parte heurística de la resolución, donde Polya aporta cuatro pasos, que involucran la comprensión del problema, diseño de un plan, ejecución del plan diseñado y validar la solución.

Los aspectos metacognitivos:

Se considera que en algún momento en la actividad de la resolución de problemas se realiza un monitoreo de lo realizado, posterior a esto se concluye lo que progreso intelectual se ha efectuado y con respecto a esto se modifican algunas conductas.

3.4.3 *Los sistemas de creencias:*

Es un aspecto que se desarrolla de una forma muy individual, donde se encuentra involucrada la forma como el individuo cree que conceptualiza y actúa frente a las matemáticas y los problemas. Esto puede considerar un dilema en la articulación entre la parte afectiva y cognitiva de las matemáticas, (Vilanova *et al.*, 2009, pág. 6) aseguran que:

> Thomson (1992) reseñó los estudios que documentan cómo los docentes difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de la matemática, así como en su visión sobre cuáles son los objetivos más importantes de los programas escolares de matemática, el rol de los docentes y los estudiantes en las clases de matemática, los materiales de aprendizaje más apropiados, los procedimientos de evaluación, etc.

3.4.4 *La comunidad de práctica:*

La sociedad en la cual el sujeto se encuentra inmerso, así como sus experiencias, logran crear en él creencias acerca de las matemáticas, en donde el papel de la comunidad y las creencias de cada una de las personas que la conforman juegan un papel importante. Por esta razón las matemáticas deben ser una actividad social, como menciona (Vilanova *et al.*, 2009, pág. 7)

> Las lecciones que los alumnos aprenden acerca de la matemática en el aula son principalmente culturales y se extienden más allá del espectro de los conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan: lo que se piensa que la matemática es, determinará los entornos matemáticos que se crearán y aún la clase de comprensión matemática que se desarrollará.

Vale la pena preguntarse sobre la pertinencia de involucrar la resolución de problemas en la formación de profesores, es decir, ¿es por medio de la resolución de problemas que los estudiantes para profesor (EPP) construyen el conocimiento necesario para formarse como profesores de matemáticas?

3.4.5 *Resolución de problemas y formación de profesores*

Es claro que la formación de profesores de matemáticas implica varios aspectos, a nivel general la capacidad de comprender elementos de las matemáticas y dominar herramientas y procesos didácticos, por tal motivo el proceso de su formación debe estar ligado a desarrollar en especial estos dos aspectos. (Guirado, Mazzitelli, & Maturano, 2013, pág. 822) Mencionan que:

> En la formación inicial de docentes en Ciencias confluyen aspectos que tienen que ver tanto con la disciplina específica como con la Didáctica, siendo ambos de suma importancia y de influencia mutua. Así, en esta etapa de la formación inicial los docentes formadores proponen a los estudiantes actividades o tareas en las que interaccionan estos dos aspectos. Entre éstas podemos destacar la resolución de problemas que conjuga la formación disciplinar y didáctica ya que, por un lado le permite al futuro docente el desarrollo de los procedimientos propios del quehacer científico y al mismo tiempo, constituye un recurso didáctico que influye en su proceso de formación actual y en su futuro desempeño profesional.

Como ya se ha mencionado en este documento, la resolución de problemas representa una columna vertebral en el aprendizaje de las matemáticas, y esto es reconocido por los entes educativos del país, y los profesores de matemáticas no son ajenos a esta realidad, es además cierto que la tarea de resolver problemas es algo que se da de manera transversal en un ámbito de matemáticas, Charnay (1994) (Citado en Piñeiro, Pinto, & Díaz, 2015, pág. 12) menciona que:

> La resolución de problemas es una actividad inherente al ser humano; es una actividad transversal de la matemática; forma parte de la actividad científica; es una actividad de socialización y significación que permite entender la matemática con su propia lógica.

Por tal motivo la implementación de la resolución de problemas en la formación de docentes tiene su importancia en el análisis que se hace de su aplicación, al ser los estudiantes para profesor los resolutores de un problema pueden responder a un auto-análisis que se genera y que (Piñeiro, 2015, pág. 48) caracteriza:

> Sobre las conductas de resolutores exitosos, se encuentran conocimientos referidos a caracterizar o explicar qué hacen estos estudiantes; encontrando: fluidez en cálculos, análisis cuidadoso en términos matemáticos, uso eficiente y eficaz de estrategias, uso de la metacognición (saber qué hacer y por qué se hace), planificar, actuar, buscar soluciones y no entramparse al no conseguir lo que se busca, y capacidad para comunicar su pensamiento.

Frente a este análisis se puede crear un conocimiento en el estudiante para profesor que responde a preguntas: ¿Cómo debe acompañar el profesor el proceso? De igual manera se logra entender la importancia de las representaciones en el proceso de la resolución de problemas, pues se entiende por representaciones, una forma de pensar e interpretar del estudiante, así lo menciona (Piñeiro, 2015, pág. 49)

> El uso de representaciones indica una forma de pensar del estudiante, y se debe exponer al resto; dar oportunidades para representar problemas; fomentar la comunicación y escuchar sus formas de representar; conocer las diferentes maneras de representar de los estudiantes.

Todas estas implicaciones en la resolución de problemas toman relevancia para el estudiante para profesor cuando él mismo es participe de las acción de resolver problemas, en este orden de ideas se justifica este eje vertical no solo para la enseñanza escolar de las matemáticas sino para la formación de docentes de matemáticas.

A pesar de que estos son aspectos a los cuales todas las interpretaciones de resolución de problemas convergen, y de la justificación que se ha planteado frente a la pertinencia de involucrar la resolución de problemas para la formación de EPP, siguen siendo elementos alejados del contexto en donde se desarrolla la investigación, es por ello prudente apreciar la interpretación y el desarrollo que la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM) le asocia a la resolución de problemas, y las justificaciones para desarrollar este ambiente.

3.4.6 *Resolución de problemas en la LEBEM*

En (LEBEM, 2010) como proyecto curricular anuncia la resolución de problemas como un ambiente en donde los estudiantes para profesor (EPP) se forman. No obstante, la formación del EPP de la LEBEM se considera en el desarrollo de cuatro ejes problémico/temáticos. Para cada uno de estos ejes la concepción de resolución de problemas tiene sus propias características.

3.4.6.1 *Resolución de problemas en el núcleo problémico: La práctica en el aula de clase.*

En este núcleo problémico se proponen las asignaturas de: investigación en el aula I, II y III, práctica intermedia I, II, II, IV y V, y práctica intensiva. En ellas la concepción de resolución de problemas es la comprensión de los problemas que emergen en todos los tiempos de la acción del profesor. Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM, 2010, pág. 14)

En cuanto a la resolución de problemas, ésta se concibe como una forma de intervención, que implica comprender los problemas que se presentan antes, durante y después de la acción del profesor en el aula.

3.4.6.2 *Resolución de problemas en el núcleo problémico: Contextos profesionales*

En este eje se proponen la asignaturas de: profesión docente, ambientes y mediaciones I, II, III y IV, educación cultura y política, problemas sociales y culturales en el ambiente escolar, políticas educativas y PEI, ética docente y competencias comunicativas. En el desarrollo de las asignaturas, la resolución de problemas se concibe como una estrategia metodológica que complementa la visión de resolución de problemas en el aula. (LEBEM, 2010, pág. 36)

La resolución de problemas en el eje de contextos se orienta a resolver aquellos que son propios de la labor docente en el contexto escolar, complementando la visión de resolución de problemas en el aula.

3.4.6.3 *Resolución de problemas en el núcleo problémico: Didáctica de las matemáticas*

Según el (LEBEM, 2010, pág. 58), este eje está enmarcado en el eje problémico de pensamiento matemático escolar y avanzado, permitiendo responder a la pregunta ¿Qué conocimiento didáctico debe saber un profesor de matemáticas? El papel que juega la resolución de problemas logra ser expuesto a manera de características:

Emergen algunas concepciones sobre la resolución de problemas

Se declara, en el contexto de la resolución de problemas, estar apartado de la clase tradicional, en el sentido de que:

- Los estudiantes no están vacíos.

- Podemos iniciar discusiones desde un problema.
- Se considera relevantes las ideas que traen y construyen los estudiantes a partir de las discusiones.
- Las ideas que se discuten posibilitan reconstruir conceptos.

3.4.6.4 *Resolución de problemas en el núcleo problémico: Matemáticas escolares/pensamiento matemático avanzado*

La LEBEM reconoce que busca formar profesores investigadores en su propia práctica, en concordancia con esto, el proyecto expone consideraciones respecto a la concepción de la resolución de problemas para la comunidad que integra la LEBEM, aclarando que dichas consideraciones no deben ser asumidas como conclusiones finales, sino, como aportes en la intención de asumir la resolución de problemas como una actividad importante en el aula. (LEBEM, 2010, pág. 21) Expone estas consideraciones:

> Se parte por compartir que la resolución de problemas es un medio para aprender matemáticas y por ende, un generador de conocimientos y un instrumento que propicia la participación-interacción de los estudiantes entre ellos y con el profesor.
>
>]…] más aún si se tiene en cuenta que en dicho proceso (resolución de problemas) interesa –entre otros– que el estudiante dé cuenta de un dominio de las diferentes formas de representación de un objeto matemático, su interacción con otros objetos, sus propiedades, su naturaleza, etc.

En los párrafos anteriores se expone la concepción que tiene la LEBEM frente a la resolución de problemas, con estas concepciones es posible nombrar características y propósitos de dicho ambiente dentro de la comunidad LEBEM, y a partir de allí realizar un análisis de la resolución de problemas para definir este ambiente como un elemento que no es ajeno a la teoría de la socioepistemología. Teniendo en cuenta que la teoría socioepistemológica considera la práctica social como su principal escenario, la relación que se pueda crear entre ella y la resolución de problemas permitirá construir el puente teórico al cual se ha hecho referencia.

3.4.7 *Resolución de problemas como práctica social.*

La práctica social es caracterizada dentro de la teoría socioepistemológica como un escenario, mientras que la resolución de problemas se concibe en la LEBEM como un ambiente. La aplicación de estos elementos tiene unos propósitos en el contexto en donde se desarrollan.

Tabla 1: paralelo entre la resolución de problemas y la práctica social (fuente: creación propia).

AMBIENTE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	ESCENARIO DE PRÁCTICA SOCIAL
La resolución de problemas es un medio para para aprender matemáticas y por ende, un generador de conocimientos y un instrumento que propicia la participación-interacción de los estudiantes entre ellos y con el profesor. (LEBEM, 2010, pág. 21)	Entendido como la capacidad de “hacer emerger” el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción “dialéctica” entre protagonistas. (Cabañas, 2011, pág. 68)
[…] más aún si se tiene en cuenta que en dicho proceso (resolución de problemas) interesa –entre otros– que el estudiante dé cuenta de un dominio de las diferentes formas de representación de un objeto matemático, su	La atención debe ser puesta en los mecanismos constructivos y no en los conceptos matemáticos en sí. De esta manera la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, adquiere aquí un marco de

interacción con otros objetos, sus propiedades, su naturaleza, etc. (LEBEM, 2010, pág. 21)	referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un escenario centrado en una práctica social de integración sistémica de conocimientos matemáticos. (Arrieta *et al.*, 2004, pág. 420)

El ambiente y el escenario en cuestión comparten una estrecha relación, entre los cuales se pueden destacar principalmente dos:

Relación 1: tanto el ambiente como el escenario permiten que se genere y/o emerja significados y conocimientos por medio de la interacción entre los protagonistas (estudiantes, profesores, medios y contextos).

Relación 2: tanto el ambiente como el escenario descentralizan el concepto matemático para interesarse en los mecanismos constructivos como la representación de un objeto matemático en la interacción con otros objetos.

Estas dos relaciones permiten que se reconozcan características de un elemento en el otro, dicho esto es posible afirmar que el ambiente de resolución de problemas que se considera en la LEBEM tiene las características necesarias para entenderse como un escenario de práctica social según la socioepistemología. Lo anterior genera la construcción del puente teórico que valida la posibilidad de analizar las resignificaciones (constructo teórico de la socioepistemología) del concepto de integral (involucrado en un espacio de formación de la LEBEM) en un ambiente de resolución de problemas (ambiente característico de la LEBEM).

3.4.8 *Resignificación y resolución de problemas.*

La resignificación es un elemento de la teoría socioepistemológica, según la cual se desarrolla a partir de las prácticas sociales. Anteriormente se argumentó la posibilidad de entender la resolución de problemas como una práctica social dadas sus características y sus propósitos. De esta manera, es válido afirmar que la resignificación es un constructo teórico normado por la resolución de problemas. (Cabañas, 2011, pág. 14):

> Una noción fundamental en la construcción de conocimiento matemático desde la teoría Socioepistemología es la de práctica social, que cumple el carácter de función normativa. Es así que la resignificación de la integral definida, estuvo normada por una práctica social.

La resignificación solo es posible dentro de un escenario de práctica social (resolución de problemas en este caso particular), el cual no centra su atención en las acciones de los protagonistas, sino, en el motor impulsador de estas acciones, en palabras de (Cantoral *et al.*, 2014, pág. 100)

> La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la práctica ejecutada), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la orientación de la práctica). Con este esquema se explican los procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático basado en prácticas sociales.

Es imposible separar la resignificación de la teoría socioepistemológica, ya que los elementos de la socioepistemología logran dar una definición a la resignificación. Cordero (2005) (Citado en Cabañas, 2011, pág. 67)

> Un interés de la Socioepistemología es modificar el centro del discurso matemático escolar, pasar de los objetos a las prácticas, a fin de que el saber en juego se manifieste como un saber funcional centrado en prácticas. Con lo anterior, se desea romper con la “centración” de los conceptos que normalmente se evidencia en el discurso matemático escolar y crear otro tipo de discurso que ofrezca marcos o prácticas de referencia donde se construya el conocimiento matemático en la organización del grupo humano normado por lo institucional.

La resolución de problemas es sinónimo de cambio; este ambiente reemplazó a la denominada enseñanza tradicional, que consistía en una clase magistral, donde se exponían los elementos relevantes y los estudiantes solo eran observadores. Pero actualmente la apuesta pedagógica consiste en que el estudiante construya su propio conocimiento, (Muñoz, 2015, pág. 26)

> No obstante, las teorías actuales apuestan por que sea el estudiante quien construya sus propias estructuras de conocimiento, basándose en las que previamente posee, mientras que la labor del profesor debe consistir fundamentalmente en orientar.

Es evidente que en la resolución de problemas se hace uso de un conocimiento base, y que a partir de este se logra resolver el problema, pero en ese proceso se crean nuevos conocimientos, que a su vez serán base para posteriormente generar otros, a esta actividad se le denomina resignificación, que desde la teoría socioepistemológica es un proceso que se genera al darle un uso útil al conocimiento.

Desde la teoría socioepistemológica esta relación de resolución de problemas y resignificación se da siempre y cuando se cree un problema con dos características: que sea complejo y que el individuo no logre relacionar inicialmente el problema con un algoritmo. (Muñoz, 2015, pág. 27):

Primero, se está frente a un problema matemático cuando la relación individuo-tarea representa dificultad o desafío para el individuo al momento de intentar resolverla y, segundo, cuando no existe un esquema, proceso, algoritmo o cálculo preestablecido, que dirija al individuo inmediatamente a la solución.

De esta manera se relacionan tres elementos en el aprendizaje de matemáticas, todo esto para el caso particular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) y en particular para la asignatura de matemática del movimiento III; la resolución de problemas, la teoría socioepistemológica y la resignificación.

El espacio de formación, matemática del movimiento III, considera la integral como principal concepto matemático a desarrollar a través problemas del movimiento, es por ello relevante mencionar la construcción de este concepto en una mirada histórica.

3.5 **Concepto de Integral**

Las primeras aproximaciones a la noción de integral se encuentran en los trabajos de Leibniz, quien desarrolla ejercicios con diferencia de progresiones numéricas finitas, esto lo logra a partir de sucesiones dadas y considerando la sucesión de sus diferencias, Leibniz amplía su trabajo y realiza el procedimiento con muchos conjuntos numéricos finitos y llega a varias conclusiones importantes. Con ello, logra generalizar la diferencia de algunas sucesiones, esto no fue un descubrimiento nuevo pero involucrar y considerar estas conclusiones desemboca más adelante en la idea propia de los diferenciales del cálculo. (Grijalva, 2007, pág. 82)

Leibniz partió de una sucesión dada

$$A, B, C, D, E$$

Y consideró la sucesión de diferencias

$$L, M, N, O$$

En la cual L=B-A,M = C-B, y así sucesivamente.

Entonces L+M+N+O = (B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D) = E-A

De aquí que la suma de las diferencias consecutivas es igual a la diferencia del primero y último términos de la sucesión original. A manera de ejemplo, observó que la suma de los primeros n números naturales impares puede obtenerse a partir de la siguiente consideración: si tomamos la sucesión de los primeros cuadrados

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$$

Obtenemos que la sucesión de diferencias es precisamente la de los primeros *n* naturales impares.

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1$$

En estos resultados aparecen pues, de forma relacionada, las diferencias entre términos de las sucesiones y la suma de las diferencias como la diferencia del último y primer término de la sucesión original. Estos resultados se convertirán después, en su principio fundamental del cálculo (y a la postre en el teorema fundamental del cálculo). Así mismos, notemos que las nociones de diferencias y las sumas son extendidas a segundas, terceras, etc., diferencias y sumas. Esta extensión jugará también un papel importante en la construcción del cálculo diferencial e integral de Leibniz.

Posterior a esto Leibniz involucra una notación para representar el primer y el último término de una sucesión y determina que la suma de toda la sucesión es en realidad la diferencia entre el primer y segundo término. Con esto, más adelante en sus trabajos realizados sobre la geometría aplicando los mismos desarrollos, se empieza a crear el cálculo infinitesimal, antes de que ocurra, Leibniz menciona que resolvió unos problemas que fueron planteados por Christian Huygens, de los cuales podemos rescatar el de encontrar la suma de la serie:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

A partir de las conclusiones sobre su propio trabajo lleva su desarrollo al campo de la geometría apoyado en un descubrimiento que se genera a partir del estudio de un trabajo presentado por Pascal. Se trata del método usado por Pascal para encontrar el área de la superficie de una esfera o partes de ella, el cual consiste en usar el teorema de Arquímedes para representar un sólido como la rotación de una figura plana equivalente, de allí construye un teorema general, (Grijalva Monteverde, 2007, pág. 89) cita a Leibniz (S.F.)

> Porciones de una línea recta normal a una curva, interceptadas entre la curva y un eje, cuando son tomadas en orden y aplicadas en ángulos rectos al eje, conducen a una figura equivalente al momento de la curva alrededor del eje.

La figura usada por Pascal es un triángulo que es a su vez la figura geométrica plana en la cual Leibniz se fija y que llama “triángulo característico”

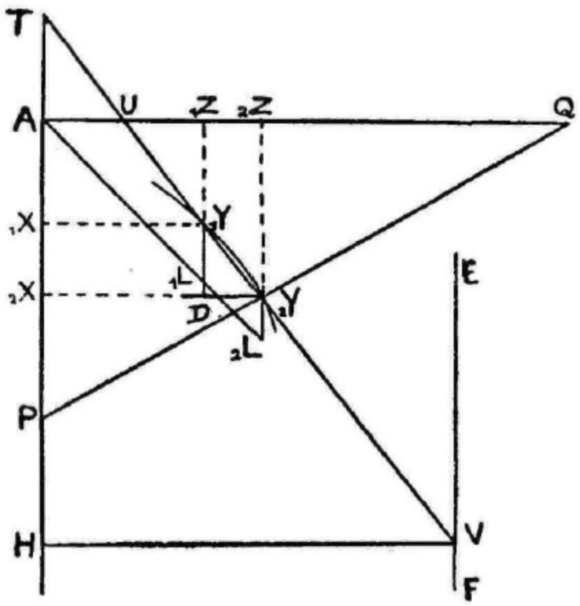

Ilustración 1: representación del triángulo característico,

Fuente: Fuente Grijalva Monteverde, 2007, pág. 91

Leibniz asegura que pueden construirse infinitos triángulos semejantes al triángulo característico, esto para realizar procesos de rectificación de curvas. Afirma que las curvas son polígonos infinitos angulares y que si la tarea es hallar el área rodeada por una curva basta con hacer los mismos procedimientos que se realizan con polígonos con algunas modificaciones. Esto lo explica en su segundo libro partiendo de una figura que podría ser más familiar para cualquier estudiante del cálculo.

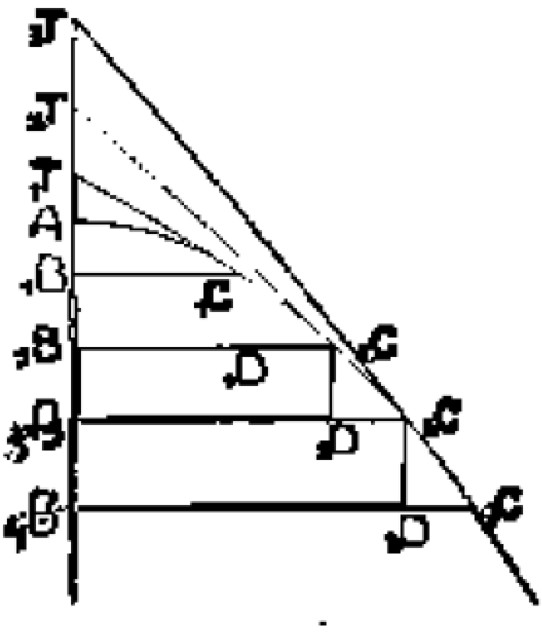

Ilustración 2: representación de polígonos infinitos angulares

Fuente Grijalva Monteverde, 2007, pág. 95

Leibniz (S.F.) (Citado en Grijalva, 2007, pág. 95) Cita a "sea *CC* una línea, de la cual su eje es *AB*, y sean *BC* ordenadas perpendiculares a este eje, éstas llamadas mediante *Y*, y sea *AB* la abscisa cortada a lo largo de este eje, siendo llamado *X"*

Leibniz toma entonces las diferencias de las abscisas y de las ordenadas y argumenta que son infinitamente pequeñas y las bautiza como *by* y *bx*. Entonces la distancia entre dos puntos sobre *AB* crea una "recta" con el comportamiento *CC* que es a su vez un lado del polígono angular, esta "recta" se convierte en la tangente de una diferencia *CC* más pequeña que la anterior. Finalmente Leibniz concluye que encontrar la diferencia entre series es encontrar la diferencia entre tangentes.

Este aporte de Leibniz tiene una relevancia que ha perdurado hasta la actualidad así como lo afirma (Grijalva, 2007, pág. 96)

> Con lo expuesto hasta aquí tenemos elementos suficientes para mostrar cómo es que las prácticas desarrolladas por Leibniz en su análisis de sucesiones y las series numéricas fueron extrapoladas a un nuevo contexto y con ello generó la construcción de su propuesta de cálculo infinitesimal.
>
> Por esa razón, aun cuando en un principio se refería a los elementos del cálculo mediante el lenguaje ordinario o en prosa, la introducción de su notación, es vigente hasta la actualidad, obedece a su concepción de diferencias y sumas.
>
> Una vez concebidos los diferenciales como lo hace y la consecuente concepción de las figuras como polígonos infinito angulares, su extrapolación consiste en atribuirle a los diferenciales propiedades similares a las diferencias de las series infinitas, en las cuales los términos decrecen continuamente hacia el 0. La extrapolación condujo entonces a nuevos problemas, algunos de carácter filosófico y otros de carácter práctico.

En conclusión, Leibniz logró resolver los problemas de las cuadraturas y de las tangentes; adicional a esto desarrolló un método analítico para la manipulación de objetos matemáticos de diferencial.

No es posible dejar atrás los aportes de Newton quien se dedicó a intentar realizar la cuadratura del círculo, para ello tomó como base los trabajos realizados por Wallis. De esto surge el teorema binomial que lleva su nombre y que es publicado por primera vez en un libro de Wallis reconociendo la autoría de Newton; no obstante, el físico reconocía que su forma de razonar por analogía carecía de rigurosidad, por ese motivo comprobó de varias maneras la validez de sus procesos, pronto logró realizar un procedimiento con el cual podría cuadrar una curva, esto lo explicaba en tres pasos, (Martín, 2008, pág. 54):

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es $\frac{na}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y1 + y2 + y3 + \cdots$, el área bajo la cura y es igual a la suma del área de todos los términos y1, y2, y3…
3. Si la curva tiene una forma más complicada entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum akx^{rk}$ donde rk es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

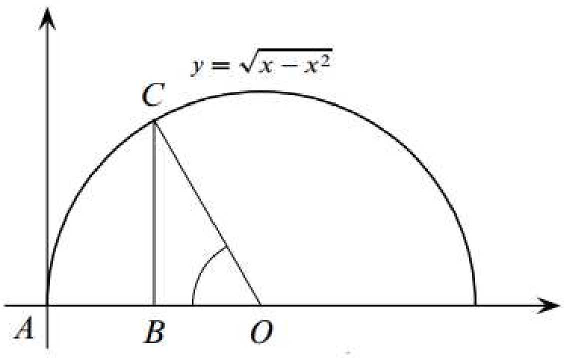

Ilustración 3: representación de la tercera parte del área de la semicircunferencia. Fuente (Martín, 2008, pág. 22)

Newton considera que puede escribir cualquier expresión analítica con la sumatoria expuesta en el paso 3, y se puede crear una serie gracias al punto 1. De esta manera la imagen que se observa corresponde a un semicírculo donde el área de la región ACO es la tercera parte del semicírculo, en palabras de (Martín, 2008, pág. 22)

> … por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo. Es decir $\frac{\pi}{24}$ como *BC*= $\frac{\sqrt{3}}{4}$, el área del triángulo *BOC* es $\frac{\sqrt{3}}{32}$, por otra parte, la integral calculada en (22) es el área de la región *ACB* por tanto:

$$\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2} dx + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}$$

De esto Newton obtiene una serie infinita que converge, y que además es la expresión de la cuadratura del círculo.

Leibniz, Euler y Newton enriquecieron y ampliaron las posibilidades de aplicar cálculo diferencial, posterior a estos autores Cauchy y Riemann logran avanzar en el rigor del cálculo, usan los elementos desarrollados por sus antecesores y a partir de ellos desarrolla su obra del cálculo.

En síntesis el trabajo histórico del cálculo según (Grijalva, 2007, pág. 193) puede explicarse de la siguiente manera (entendiendo que una síntesis así de resumida no encierra todos los elementos relevantes del estudio)

> Como hemos visto. Leibniz desarrolló un cálculo analítico cuyos objetivos primarios eran de naturaliza geométrica y sus resultados se referían fundamentalmente a objetos geométricos. Hablaba de segmentos de longitud "inasignable" infinitamente pequeños y por otra parte, cantidades infinitamente grandes, como en el caso de las sumas de segmentos de áreas.
>
> Por su parte Euler estableció el cálculo para variables generalizadas, fueran o no de carácter geométrico, basándose en el concepto de función. Continuó con los planteamientos de Leibniz, considerando que los diferenciales o cantidades infinitamente pequeñas eran "realmente 0" y aceptando también la existencia de cantidades infinitamente grandes.
>
> Asimismo, en los trabajos de Newton y sus seguidores, quienes desarrollaron el cálculo con base en las nociones de fluxiones y fluentes (conocido como "cálculo

fluxional”), en el cual también se involucra a las cantidades infinitamente pequeñas o “evanescentes”, así como “razones primeras” y “razones últimas” para establecer el valor de lo que, en notación moderna escribimos como $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h es una cantidad “evanescente”. Este cociente fue desarrollado en muchos casos por medio del binomio de Newton. $(x+h)^n$, tratado no sólo para números naturales, sino también para enteros negativos y números fraccionarios precisamente por Newton.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se exponen los elementos metodológicos implementados en el presente trabajo de grado. Con estos elementos se espera dar solución a los objetivos planteados y así los investigadores definan una teoría pertinente que aporte a la construcción de saberes dentro de la comunidad educativa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM).

4.1 Enfoque de la investigación: Cualitativo.

Esta investigación se realiza a través de la recolección y análisis de datos no numéricos, pues al realizar un trabajo que requiere de una intervención activa entre los participantes, se debe tener una recolección de datos que sustente lo que cada estudiante vaya dando a conocer y de esta manera analizar los procesos de resignificacion que se generan durante el transcurso de la formación.

Por esta razón la naturaleza de la investigación es de enfoque cualitativo, el cual está definido como un método que "utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación" (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010, pág. 7).

4.2 Diseño de la investigación: Teoría Fundamentada

La investigación que se presenta en el documento pertenece a la teoría empíricamente fundamentada, la cual tiene como objetivo según Hirschman y Thompson (1997) (Citado en Páramo Morales, s.f.) "…adaptar los resultados precedentes al resultado del estudio en cuestión, más que sean las pre-concepciones basadas en la literatura existente las que influyen en la interpretación de los datos".

La investigación cuenta con la participación de dos investigadores, siguiendo la línea de la teoría empíricamente fundamentada, ya que para realizar este tipo de investigación se necesita más de un investigador, porque las producciones muchas veces suelen ser subjetivas y por tal razón es de importancia la interacción de mínimo dos investigadores. De acuerdo a la teoría fundamentada los investigadores tienen como objetivo debatir en un espacio de análisis y dar resultados que puedan aportar a la investigación.

4.3 **Técnicas de recolección de información**

Sudabby (2006) (Citado en Páramo Morales, s.f.) afirma que "la realidad empírica es vista como una interpretación en curso de significaciones producidas por los individuos insertos en un proyecto común de observación". Por esta razón a través de la observación e interpretación de los investigadores sobre las significaciones generadas en los individuos analizados, es posible evidenciar el proceso de resignificación de los mismos.

Con ayuda de la observación los investigadores logran identificar el proceso evolutivo de las concepciones de los estudiantes, porque si fuera una recolección parcial algunos fragmentos de la construcción de dichas concepciones no estarían plasmados en la recolección, por lo que se perderían datos fundamentales en la construcción de la teoría a través de la interpretación de los datos por parte de los investigadores.

4.4 **Instrumentos de recolección de información**

En el caso de esta investigación, los instrumentos de recolección son la bitácora (VER ANEXO, Formato de Bitácora) y la entrevista (VER ANEXO ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN

(Estudiantes) y ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN (Docente)). En la primera se anotan los sucesos relevantes dentro de la sesión, como las intervenciones del docente, el surgimiento de una nueva idea por parte de uno de los integrantes, los momentos de interacción en el grupo sobre una idea, entre otras; estas sesiones fueron registradas en audio y video a lo largo de seis sesiones de clase.

La entrevista se empleó con el fin de indagar sobre los significados del concepto de integral con que los estudiantes iniciaban la resolución del problema en el espacio de formación. Esta entrevista se realizó antes y después de comenzar del proceso y finalizar el abordaje respectivamente. Las preguntas son abiertas para que los estudiantes reflexionen sobre la pregunta y en dado caso, hablen entre ellos para dar una respuesta, siendo una estrategia adecuada para conocer los conocimientos base del grupo a investigar. Esta entrevista se aplicó al inicio del problema fundamental y al finalizar nuestra intervención de recolección de datos.

4.5 **Participantes**

Por otra parte, la muestra para esta investigación fue de cuatro jóvenes, quienes son estudiantes para profesor con edades que oscilan entre los 22 y los 26 años de edad y están culminando la carrera de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

4.6 **Técnica de muestreo**

La selección de participantes se realizó con la técnica “participantes voluntarios”. Ellos, aceptan ser grabados a lo largo de las seis sesiones, siendo acorde al enfoque metodológico elegido para realizar la instigación ya que nos propone que “este tipo de muestras se usa en estudios experimentales de laboratorio, pero también en investigaciones cualitativa” (Hernández *et al.,* 2010, pág. 397).

Como se mencionaba anteriormente, esta investigación se realiza a un grupo de cuatro estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital dentro del espacio de formación de Movimiento III y que están cursando los últimos espacios de formación la carrera, es decir, están a portas de la culminación de su pregrado.

Ahora bien, cabe aclarar que el espacio de formación en donde se realizó este trabajo de grado, es un espacio en donde se establece el estudio de la integral en el contexto de los problemas del movimiento como pilar principal de acuerdo al syllabus, por tanto, la comunidad educativa viene limitada en cuanto al concepto a trabajar y por este motivo los estudiantes buscan la manera de relacionar la integral desde el primer problema que el docente les propone.

4.7 Fases de la investigación

La acción tomada en la investigación se dirigió teniendo en cuenta las fases de la teoría fundamentada, que según Glaser y Anselm (1967), consta de tres fases, (1) La codificación abierta de los datos o información, (2) La codificación axial de la información y (3) Codificación selectiva.

4.7.1 La codificación abierta de los datos o información

En esta fase se busca organizar los datos de manera que "*…el investigador revisa todos los segmentos del material para analizar y genera —por comparación constante— categorías iniciales de significado*" (Hernández *et al.,* 2010, pág. 494). De esta manera, el investigador reduce los datos recolectados, a través de los videos, y los categoriza eliminando la redundancia y seleccionando los datos que aporten a la investigación, es decir realiza un proceso de codificación.

4.7.2 La codificación axial de la información

En esta parte del proceso lo que se realiza es identificar la categoría principal dentro de las categorías codificadas de manera abierta, y a partir de esta se busca realizar una relación con las demás categorías. Al respeto, (Hernández *et al.*, 2010, págs. 494-495), señalan que "*La codificación axial concluye con el esbozo de un diagrama o modelo llamado "paradigma codificado que muestra las relaciones entre todos los elementos (condiciones causales, categoría clave, condiciones intervinientes, etcétera)"*

4.7.3 Codificación selectiva

Una vez que se revisa el esquema generado y se analiza la relación entre la categoría principal y las categorías que la apoyan surgirán hipótesis que serán las que se utilicen en la investigación, *"De esta comparación también surgen hipótesis (propuestas teóricas) que establecen las relaciones entre categorías o temas. Así, se obtiene el sentido de entendimiento."* (Hernández *et al.*, 2010, pág. 496) Es decir, en esta codificación se busca formar los elementos del marco teórico y clarificar la historia que tiene el lector con respecto al fenómeno en estudio.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presentan los análisis realizados por los autores de este trabajo de grado, bajo la guía del diseño metodológico y las categorías de análisis previamente presentadas. Se expone las ideas iniciales que tienen los estudiantes frente al concepto de integral y la evolución de las mismas al pasar de seis sesiones de clase, esto presentado en tablas denominadas "esquemas de resignificación".

El análisis de la información sobre la resignificación del concepto de integral en un ambiente de resolución de problemas para la formación de profesores de matemáticas, empleó tres categorías de análisis propuestas en el marco teórico: el contexto, el uso y el procedimiento. Adicional a esto, se generó un análisis presentado a modo de paralelo entre los resultados de una misma entrevista semiestructurada, planteada a los mismos protagonistas al inicio y final del planteamiento del problema.

5.1 Significado inicial de Integral

Para poder establecer las resignificaciones del concepto de Integral, fue necesario hacer un reconocimiento del significado al iniciar el proceso. Para ello, se planteó la entrevista "**SIGNIFICADOS DE LA INTEGRAL**" con la que se busca identificar los contextos, usos y procedimientos con los que los estudiantes asocian al concepto de integral.

A la pregunta: ¿con qué concepto relaciona el problema del recubrimiento de áreas? Los estudiantes responden que la integral es "entendida como el área recubierta por demás figuras, en este caso las circunferencias que están recubriendo un cuadro". A pesar de que el profesor en ningún momento especificó el concepto involucrado en la resolución del problema, los estudiantes saben que en la asignatura ese es el concepto que se involucra con los problemas propuestos, aunque no tienen claro cómo aparece.

A pesar que los estudiantes expresan que el concepto asociado es la integral, cuando se les pregunta ¿qué saben sobre el concepto? ¿Cómo lo pueden utilizar? los estudiantes no responden con seguridad; luego de un tiempo, uno de ellos afirma que: "encontrando la sumatoria de cada una de las circunferencias independientemente de las sumatorias, pero primero hay que encontrar la regularidad de las tres circunferencias para ahí sí implementar una idea de integral". Puede notarse que los estudiantes ya tienen un camino trazado para la posible solución y lo que buscan al final de este proceso es poder encontrar la manera de aplicar una técnica de integración que les permita llegar a la respuesta.

De lo anterior, el significado inicial de integral en los estudiantes se asocia con el **contexto** del recubrimiento de figuras planas. Un primer **uso** que se reconoce son las sumas infinitas de áreas y el **procedimiento** que les permite llegar a esta sumatoria es identificar la suma de cada conjunto de circunferencias.

A la pregunta ¿qué saben de la integral?, uno de ellos da una respuesta muy común afirmando que es "el área bajo la curva". Otro compañero interviene para aclarar que su función es "calcular el área debajo de una curva". Así se entiende que los estudiantes reconocen el **uso** de la integral desde el significado asignado con frecuencia en los libros de texto, como el área de una curva.

A partir de esta respuesta se busca que los estudiantes expresen otros **usos** que le asignan a la integral. A pesar de ello, afirman que no recuerdan otro uso que tenga este objeto matemático.

En cuanto a los **contextos** uno de ellos la relaciona con la probabilidad. Afirma que "también tiene que ver con probabilidad… la curva esa de Gauss… distribuciones normales y no me acuerdo más". Lo anterior indica que los estudiantes identifican otros contextos de la integral, pero a pesar de identificarlos siguen relacionándola visualmente como "el área bajo la curva".

De acuerdo a esto se encuentra que los estudiantes inician este proceso reconociendo el **contexto** del recubrimiento de figuras planas. Un **uso**: sumas infinitas de áreas. Un **procedimiento** que es el de hallar las regularidades en cada conjunto de circunferencias.

5.2 Resignificaciones progresivas del concepto de integral

Como es habitual en las asignaturas del eje problémico pensamiento matemático avanzado en la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM), se plantea una situación fundamental, con la cual, se pretende generar un ambiente de resolución de problemas y con ello construir conocimientos sobre los elementos involucrados en dicha situación; para proponer la situación fundamental el profesor debe tener en cuenta, entre otras cosas, los conceptos matemáticos que el syllabus de la asignatura indique deben ser desarrollados. Para la asignatura matemática del movimiento III, se plantea como propósito construir el concepto de integral a partir de la resolución de problemas del movimiento.

En este orden de ideas, el profesor a cargo de la asignatura plantea una situación fundamental, expuesta a continuación:

Dado un triángulo isósceles con dos de sus lados iguales a 1 unidad, recubrirlo con cuadrados mediante el método de exhaución. Luego de trabajar en este problema, el profesor plantea una nueva situación-problema con las mismas características de la primera, cambiando las figuras geométricas involucradas y reuniendo a los estudiantes en grupos de trabajo de tal forma que a cada grupo le corresponda una combinación de figuras distinta.

Primera sesión

Es importante aclarar que la primera sesión en la que los investigadores empezaron a recolectar datos corresponde a la segunda sesión de la asignatura, en ella los estudiantes (organizados por grupos de trabajo) tienen la tarea de exponer lo realizado para llegar a la solución del problema planteado al finalizar la clase anterior, el cual corresponde a la situación fundamental expuesta anteriormente.

Tres son los grupos encargados de realizar las exposiciones. Se evidencia los diferentes métodos usados para resolver un mismo problema, el cual permite que compartan el **contexto**: recubrimiento de figuras planas.

El primer grupo dibuja el triángulo isósceles en el tablero y dentro dibuja un cuadrado; se considera que de forma implícita el estudiante está comparando las áreas, el simple hecho de reconocer una figura más pequeña que otra genera una acción de comparar. En este momento se evidenció que la **noción** de área se emplea para comparar y constituye el **uso** del área como instrumento de comparación.

El cuadrado que construyen dentro del triángulo tiene ciertas condiciones. Esto lo señala el grupo expositor cuando afirma que: "construimos el cuadrado de mayor área [posible]", haciendo referencia a que construyen el cuadrado más grande posible dentro del triángulo. Aseguran que el cuadrado tiene por lados la tercera parte de la base del triángulo (la base del triángulo mide $\sqrt{2}$) dando así un resultado de $\frac{\sqrt{2}}{3}$ obteniendo como área del cuadrado $\frac{2}{9}$. Pretenden extender este procedimiento en los triángulos que resultan al construir el cuadrado.

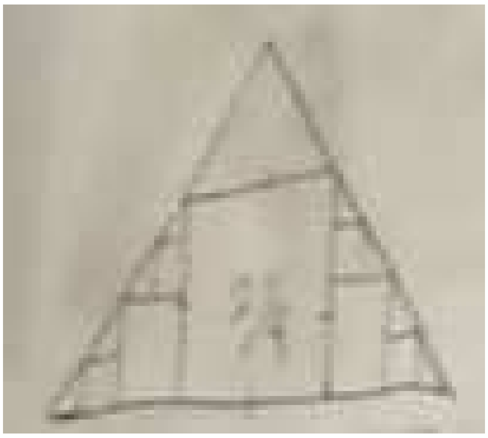

Ilustración 4: representación gráfica de un abordaje del problema realizado por el primer grupo de estudiantes.

Sobre los cuadrados que construyen a los lados del cuadrado inicial indican que: "pensábamos que eran la mitad del cuadrado grande, pero hicimos la construcción en geogebra y nos dimos cuenta que era un cuarto".

Sobre esta confesión cabe resaltar que los estudiantes reconocen dos tipos de procedimientos. En un primer momento estimaron que los segundos cuadrados eran la mitad del primero y en un segundo momento con el ánimo de comprobar la información, midieron las áreas con una herramienta tecnológica y se dieron cuenta que en realidad correspondía a una cuarta parte. Esto significa que utilizaron **procedimientos** de estimación y medición para comparar áreas de figuras planas.

Al generar las comparaciones correspondientes afirman que: "este proceso se repite y por tal motivo pueden calcular las áreas de los siguientes cuadrados y de los siguientes y de los siguientes…" y que no solo pueden saberlo sino que además pueden sumar las áreas de la cantidad infinita de cuadrados, para hacer esto utilizan otro **procedimiento,** la suma de áreas, y la representan por medio de una sumatoria. Con esto afirman haber encontrado una forma de describir el recubrimiento del triángulo por medio de cuadrados.

En la siguiente tabla se exponen los componentes de la primera resignificación del concepto de integral que se identifica en los estudiantes y se evidencia en lo anteriormente dicho.

Tabla 2: Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de estimación, medición y suma.

Recubrimiento de figuras planas			Contexto
Área			Noción
Área como instrumento de comparación			Uso
Estimación	Medición	Suma de áreas	procedimientos

El segundo grupo en exponer presenta un abordaje distinto. Particularmente, no involucran la estimación y la mayoría de los procesos lo hacen aritméticamente y con precisión: la estrategia de solución tiene tres fases: la primera es encontrar los cuadrados a los lados del cuadrado inicial: la segunda es construir los cuadrados sobre el cuadrado inicial teniendo siempre un triángulo semejante al triangulo inicial: la tercera es construir los cuadrados a partir de los triángulos laterales que se forman al realizar la segunda fase, de manera que se cubren todas las posibles formas de construir cuadrados en el triángulo.

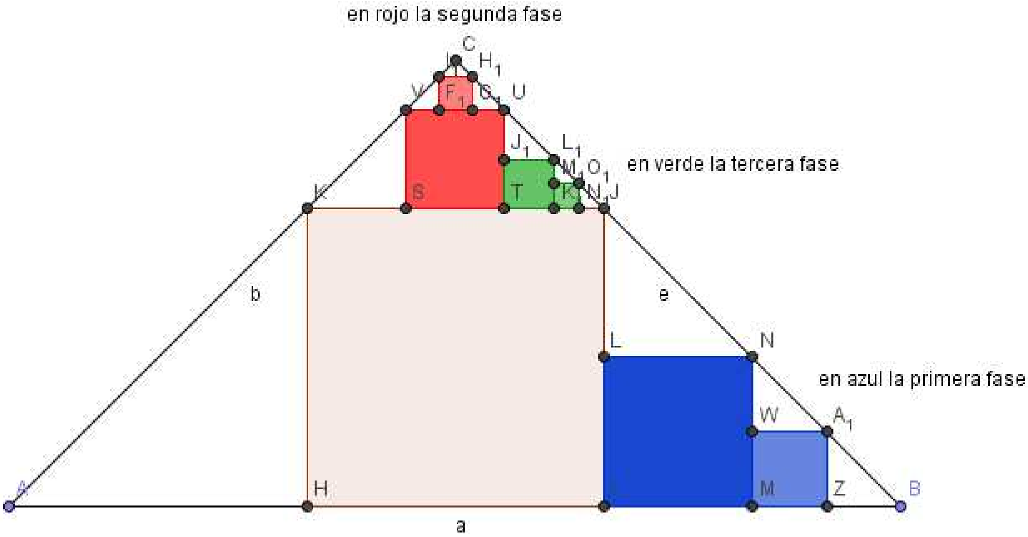

Ilustración 5: representación de la construcción de las tres fases que permitieron elaborar los cuadrados. Realizada por los autores del documento.

De lo anterior se infiere que el grupo introduce el uso del área como instrumento de comparación, en el que realizan el cálculo del área de las figuras, lo que corresponde a los procedimientos de medición, representan los comportamientos de las sumas de las áreas en cada una de las tres fases por medio de expresiones algebraicas.

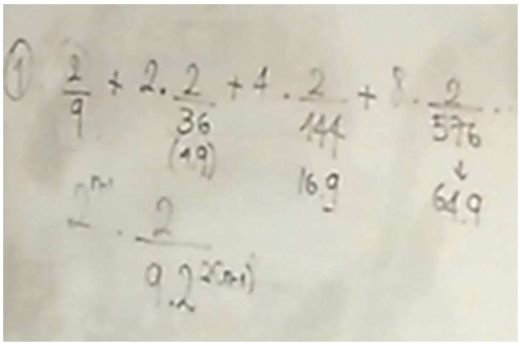

Ilustración 6: expresión algebraica de la primera fase de construcción

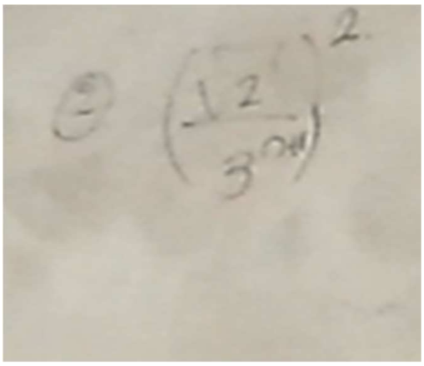

Ilustración 7: expresión algebraica de la segunda fase de construcción

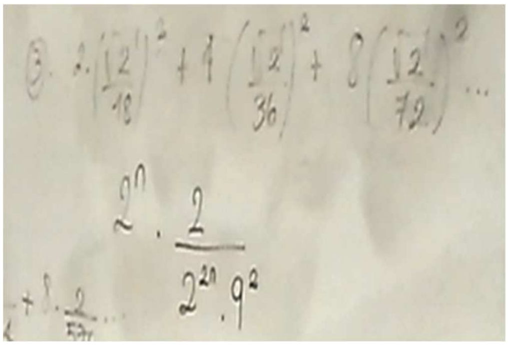

Ilustración 8: expresión algebraica de la tercera fase de construcción

En total obtienen tres expresiones algebraicas a modo de sucesiones.

1) $2^{n+1}\left(\frac{2}{9(2)^{2(n+1)}}\right)^2$

2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}\right)^2$

3) $2^{n}\left(\frac{2}{2^{2n}(81)}\right)$

Al realizar estas expresiones de sumatorias e identificar la convergencia, logran realizar otro procedimiento que permite comparar las áreas, que denominaremos suma infinita de áreas. Esto deja de ser visual y se convierte en una expresión algebraica que determina un conjunto infinito de figuras con las cuales se rellana la figura inicial (triangulo isósceles-rectángulo). En este orden de ideas, el segundo grupo mantiene la misma estructura de categorización del primer grupo, salvo por el procedimiento de estimación.

Tabla 3: Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de medición y suma.

<table>
<tr><td colspan="2">Recubrimiento de figuras planas</td><td>Contexto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Noción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área como instrumento de comparación</td><td>Uso</td></tr>
<tr><td>Medición</td><td>Suma de áreas</td><td>procedimientos</td></tr>
</table>

Al terminar las intervenciones, el profesor le propone a cada grupo el mismo problema de recubrimiento, pero cambia las figuras geométricas dadas y la figura con la que se debe rellanar. Para el caso del grupo observado, le correspondió el problema de recubrir un cuadrado con círculos.

De la primera discusión en el grupo, los estudiantes concluyen que deben construir el círculo de mayor área posible que quede inscrito en el cuadrado, dado que los lados del cuadrado miden 1 unidad, entonces el diámetro del círculo máximo medirá lo mismo y por ende el radio del círculo es 0,5 unidades. Es importante aclarar que en este momento el problema sigue pidiendo lo mismo que el problema anterior: recubrimiento de figuras planas, siendo este el **contexto**.

Los estudiantes intentan buscar la manera de generalizar procedimientos para llegar a una expresión que les indique la suma del área de las infinitas figuras que recubren a la figura inicial. Consideran que al poner el primer círculo quedan cuatro espacios iguales en los cuales crean cuatro triángulos congruentes y construyen el círculo máximo en cada uno de ellos. Estos dos avances los realizan con la ayuda de la tangente y polígonos circunscritos.

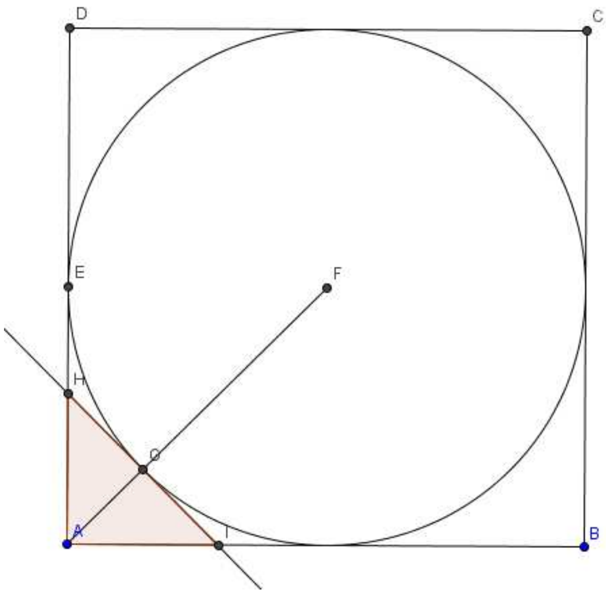

Ilustración 9: representación del uso de la tangente para la construcción de círculos.

Fuente: propia

En la ilustración 9 se traza una tangente al círculo inicial que además es perpendicular a una de las diagonales del cuadrado, esta tangente interseca a dos lados del cuadrado, las intersecciones junto con el vértice del cuadrado son los vértices de un triángulo. . El siguiente paso que realizan es la creación de círculos dentro de los triángulos, a esta construcción se le denomina círculo inscrito en un triángulo o triángulo circunscrito.

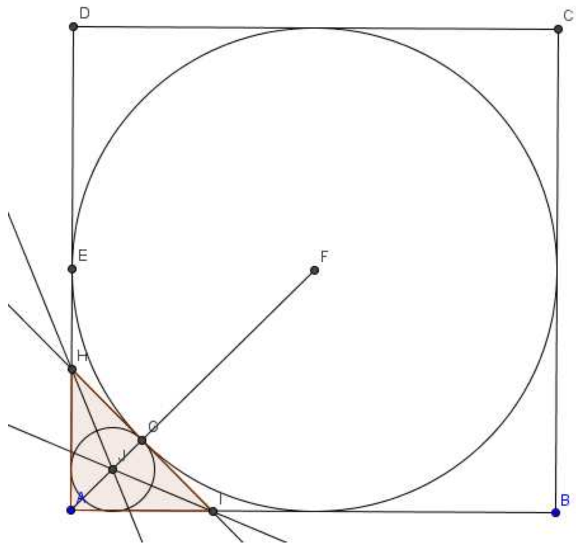

Ilustración 10: representación del uso de bisectrices para la construcción de círculos máximos.

Fuente: propia

Todo triangulo es circunscrito, para hallar el centro de la circunferencia inscrita en él basta con bisecar los ángulos, siendo el centro de la circunferencia la intersección entre la bisectrices.

Aunque el grupo no lo menciona, estas construcciones consideran la idea implícita de comparación de áreas al reconocer figuras más pequeñas que otras, es por tanto, esta acción de construir figuras un **procedimiento**: construcción de figuras planas con condiciones dadas.

5.2.1 *Segunda Sesión*

En la segunda sesión el grupo de estudiantes hace un recuento de lo que discutieron en la clase anterior, para recubrir el cuadrado de lado 1 unidad con círculos, deben construir el círculo máximo que puede inscribirse en él, el cual corresponde a un círculo cuyo radio es 0.5 unidades y por lo tanto el diámetro es congruente a la longitud del lado del cuadrado. De lo anterior, los investigadores notan que el **contexto** es el mismo: *recubrimiento de figuras planas.* Un **uso** que se vincula es: *el área como instrumento de comparación,* a partir de esta solución el grupo concluye que deben construir círculos en los espacios vacíos que resultan siendo iguales en cada esquina y con cada círculo que se trazaba.

Estos espacios estaban delimitados por un círculo y dos rectas y en los espacios laterales por dos círculos y una recta, lo que representa una condición en la construcción. Lo anterior se constituye en un procedimiento que ayuda a desarrollar el uso ya mencionado: el **procedimiento** *de construir una figura con condiciones dadas*. Si se logra construir estas figuras se estaría realizando la tarea de recubrir figuras planas y se estaría usando el área de estas figuras como instrumento de comparación.

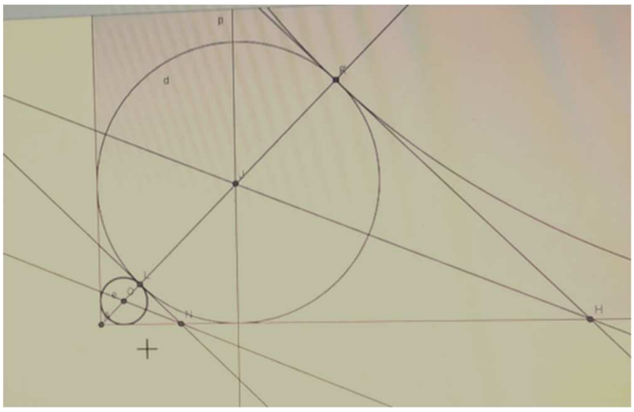

Ilustración 11: representación de la construcción de círculos cuyos centros están sobre la diagonal de un cuadrado.

En la ilustración 11 se observa la representación geométrica que realizan los estudiantes con ayuda del software Geogebra, en el cual trazan una diagonal del cuadrado y determinan que en esa diagonal se encontraran los centros de los infinitos círculos.

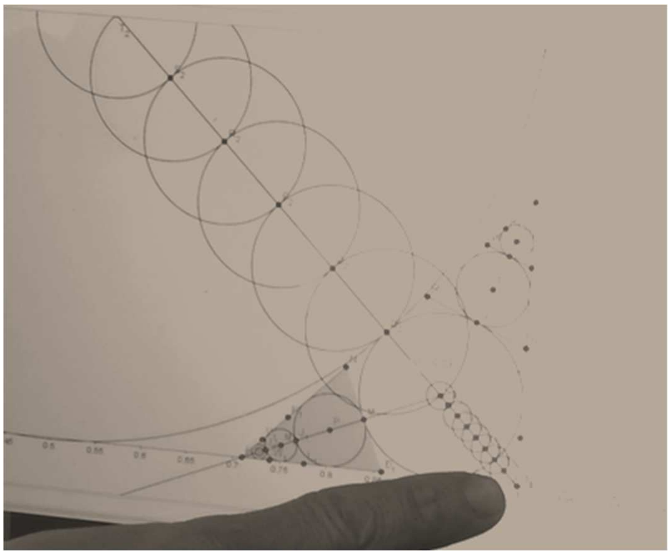

Ilustración 12: representación del procedimiento para construir los infinitos círculos sobre la diagonal del cuadrado.

Además, en este contexto se observa el **procedimiento** de la *estimación* para establecer las relaciones entre los radios como se observa en la ilustración 12, en donde el estudiante propone que la razón entre los radios consecutivos es de 1/6, pero observa que es una razón inconmensurable, ya que la parte sobrante es irracional.

A partir de ésta, aparece el segundo **procedimiento** que es el de la *medición* para encontrar la longitud de los radios, ya que los estudiantes con estas medidas aseguran que pueden obtener la sumatoria de las áreas de los círculos que se ubican sobre la diagonal del cuadrado, como se muestra en la ilustración 12.

Otro **procedimiento** que se encuentra en este abordaje es el *cálculo*, porque para encontrar la generalidad hacen uso de variables para determinar la posible medida de los radios consecutivos, de esta manera:

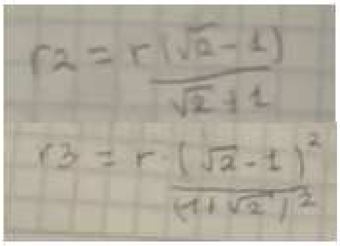

Ilustración 13: representación algebraica de los radios consecutivos de los círculos cuyos radios se encuentran sobre la diagonal del cuadrado. .

$$r_2 = \frac{r(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} \quad r_3 = \frac{r(\sqrt{2}-1)^2}{(1+\sqrt{2})^2}$$

Y con ayuda del software Wólfram Alpha encontraron el cuarto radio, cuando se conoce la suma de los radios, es decir:

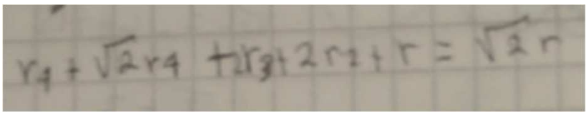

Ilustración 14: representación de la suma de los radios.

Procedieron a copiarla en el software pidiendo que despejara $r4$ obtuvieron el siguiente termino con el cual hicieron la sucesión estableciéndola así.

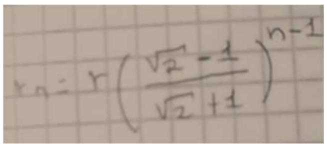

Ilustración 15: sucesión que expresa los radios de los círculos que están sobre la diagonal.

De esta manera estaban representados los radios de las circunferencias que se ubican sobre la diagonal.

Al continuar, el problema los lleva a pensar en el recubrimiento de figuras, sin embargo, lo reducen a una manera de graficar un círculo tangente a dos círculos y una recta, siendo este el contexto donde se desarrolla la actividad.

En este caso el área es nuevamente la noción que se evidencia, por lo que el **uso** representado en este momento es el de *área visto como un instrumento de comparación*, puesto que los estudiantes están analizando una manera de inscribir un circulo máximo de tal manera que sea tangente a dos círculos que están sobre la diagonal y uno de los lados del cuadrado.

Para este problema, los estudiantes realizan acciones de estimación con el propósito de hacer una relación de radios, con el radio del tercer círculo como incógnita y de esta manera hacer un sistema de ecuaciones.

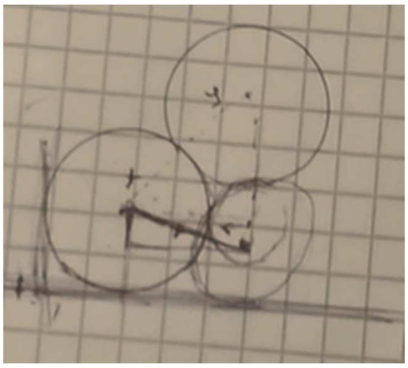

Ilustración 16: representación de la construcción de un círculo tangente a una recta y dos círculos

.

Como se ve en la ilustración 16, este proceso de estimación no les permite encontrar algo que puedan usar para el desarrollo del problema, por tal razón piden la intervención del docente, quien haciendo uso de lo que pensaban los estudiantes y ciertas preguntas, los lleva a pensar en que este problema ya ha sido tratado en la historia visto como el Noveno problema de Apolonio.

Se involucra la idea de inscribir el círculo, basados en el método del Noveno problema de Apolonio. Para esto, el docente les propone hacer uso de Internet y buscar una explicación de la construcción y de esta manera analizar la relación de los radios de los círculos.

5.2.2 *Tercera Sesión*

En esta sesión los estudiantes encontraron una manera de construir el radio de un tercer círculo a partir de dos círculos dados, haciendo uso del teorema de las circunferencias tangenciales, esto con el fin de seguir recubriendo el cuadrado con círculos, con ello, generalizar la medida de las áreas de los círculos que se van construyendo, y a partir de eso construir la sumatoria que les permite encontrar el área total de la suma de las áreas de los círculos.

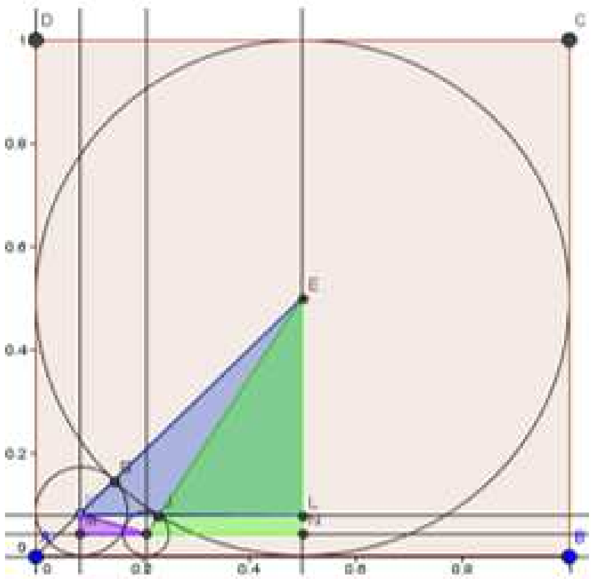

Ilustración 17: representación del teorema de las circunferencias tangenciales.

Por tal razón, al contexto de recubrimiento de figuras planas, se encuentra estrechamente vinculada la noción de área. A partir de esta noción se reconoce que el **uso** que se presenta en esta sesión es el *área vista como un instrumento de comparación*, ya que, los estudiantes buscan crear el tercer círculo a partir de establecer la relación entre los radios, y así encontrar la regularidad que existe en la construcción de las círculos tangentes a dos círculos y un segmento.

El proceso que usaron los estudiantes para la construcción del círculo tangente a dos círculos y un segmento, fue la relación entre radios de círculos tangenciales planteado por Descartes.

Específicamente, los estudiantes encontraron la serie de radios de círculos con las cuales se cubre el cuadrado, y la expresaron algebraicamente como se observa en la ilustración 18.

Los estudiantes encontraron que estos radios tienen una regularidad con los dos radios anteriores, y la expresan como:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

Específicamente, los estudiantes encontraron la serie de radios de círculos con las cuales se cubre el cuadrado, y la expresaron algebraicamente como se observa en la siguiente ilustración.

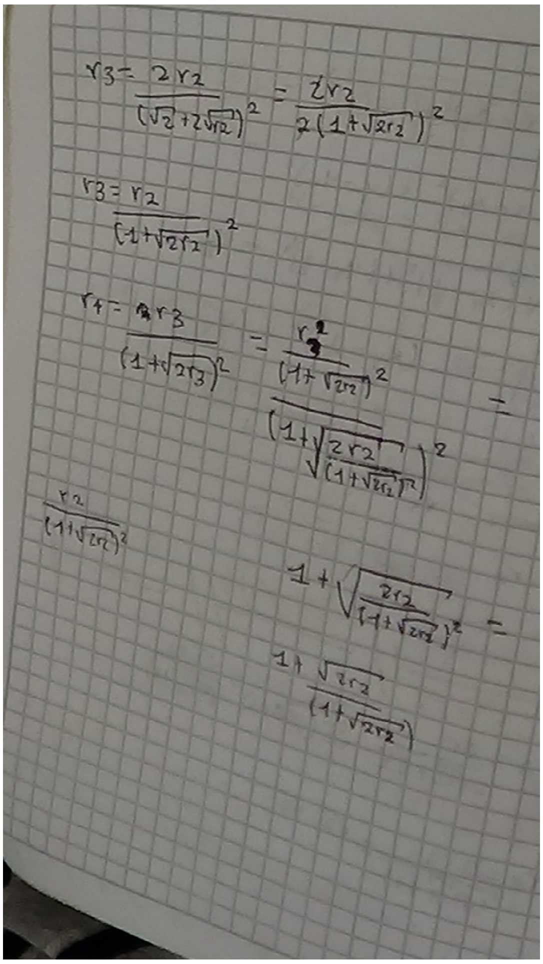

Ilustración 18: expresiones algebraicas, de los círculos tangentes a dos círculos y una recta.

$$r_3 = \frac{2r_2}{\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{r_2}\right)^2} = \frac{2r_2}{2\left(1 + \sqrt{2r_2}\right)^2}$$

[A partir de la igualdad establecida donde r_3 representa el radio de la circunferencia que querían hallar, r_2 la circunferencia que es tangente a la circunferencia máxima y a uno de los segmentos del cuadrado.]

$$r_3 = \frac{r^2}{(1 + \sqrt{2r^2})^2}$$

[Concluyendo con la representación del tercer radio a partir del radio inicia -1- y el segundo radio, que ya estaban dados.]

$$r_4 = \frac{r_3}{(1 + \sqrt{2r_3})^2} = \frac{\frac{r_2}{(1+\sqrt{2r_2})^2}}{(1 + \sqrt{\frac{2r_2}{(1+\sqrt{2r_2})^2}})^2} =$$

[De igual manera representaron el cuarto radio buscando relaciones entre los radios dados como los son el máximo y el segundo radio.]

$$1 + \sqrt{\frac{2r_2}{\left(1 + \sqrt{2r_2}\right)^2}} =$$

	[Y a partir de esta relación encontraron que el cuarto radio estaba representado por la siguiente igualdad.] $$r_4 = 1 + \frac{\sqrt{2r_2}}{\left(1 + \sqrt{2r_2}\right)}$$

Sin embargo lo que los estudiantes querían hallar no era únicamente la sucesión de radios de los círculos con las cuales se cubre el cuadrado, sino la suma del área de los círculos cuyo radio es cada término de la sucesión. Con lo anterior, en esta sesión se observa que el **procedimiento** usado fue: *procesos algebraicos,* que le permitieron solucionar esta expresión en forma general a partir de las regularidades.

De esta forma encontrar que la forma general de los radios se comportaba así:

$$r_k = \frac{r_2}{(\sqrt{r_2}(k-2) * \sqrt{2} + 1)^2}$$

5.2.3 *Cuarta sesión*

En esta sesión los estudiantes deben socializar su abordaje y posible solución al problema planteado. A todos los grupos de estudiantes se les pidió recubrir una figura plana con otra, pero cada grupo tuvo una combinación distinta de figuras planas. El primer grupo de estudiantes en exponer fue el observado en esta investigación.

El grupo de estudiantes tuvo como tarea recubrir un cuadrado de 1 unidad de lado con círculos, para ello los estudiantes explicaron su proceso. La primera parte consiste en una representación geométrica donde se evidencia la construcción del primer círculo como ya se había explicado en páginas anteriores; para construir el segundo círculo trazaron una tangente al primero que pasara por un punto de intersección formado por la diagonal del cuadrado y el primer círculo. Obteniendo como resultado un triángulo, y a partir de éste bisecar dos de sus ángulos para encontrar el incentro y trazar a partir de allí el círculo (ver la siguiente ilustración).

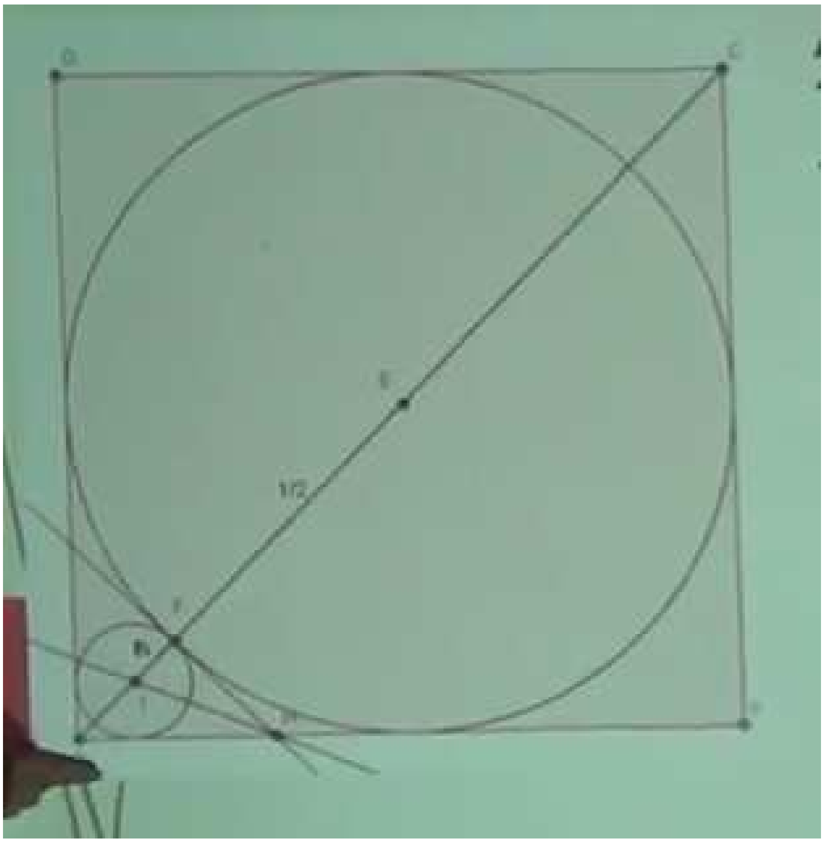

Ilustración 19: representación de la construcción de un círculo tangente a dos rectas y un círculo, desde la presentación del grupo expositor.

Con este proceso, el grupo solucionó un problema que había surgido en la sesión uno y dos, donde por la intención de desarrollar el uso del área como instrumento de comparación, se evidenció la necesidad de involucrar un **procedimiento** llamado *construcción de figuras planas dadas unas condiciones*. Este procedimiento sufre una transformación dada la dificultad de su tarea (para los involucrados), mediante la pregunta que se realizan los estudiantes ¿Cómo construir una figura plana con esas condiciones dadas? El procedimiento mencionado transforma su naturaleza en contexto, esto se genera a partir de la dificultad para realizar dicho procedimiento, y desembocar en una pregunta. ¿Cómo construir un círculo tangente a dos rectas y un círculo?

Al proponer este problema el grupo comprende, admite y relaciona un nuevo contexto asociado a la integral, que es el **contexto** de la *construcción de figuras planas dadas unas condiciones*. Esto no implica que el contexto general de todo el problema desaparezca, sino que estos problemas auxiliares involucran nuevos contextos que a su vez se vinculan con el concepto de integral y el contexto del recubrimiento de figuras.

En este nuevo contexto, los estudiantes tuvieron que reconocer y usar esas propiedades para lograr la construcción de figuras, vinculado al nuevo contexto, surge el **uso** de *propiedades de las figuras planas para la construcción de otras*, en la cual, para lograr construir este nuevo círculo el grupo debió reconocer propiedades como la tangente de una circunferencia y el incentro de un triángulo cualquiera. A su vez, los procedimientos que hicieron posible desarrollar el uso, fueron: el **procedimiento** de *bisecar ángulos* y el **procedimiento** de *trazar tangentes a una curva por un punto*.

Este nuevo contexto es de vital importancia, aparece en dos momentos con naturalezas distintas: en un primer momento su naturaleza es de **procedimiento**, el cual busca desarrollar el uso del área como instrumento de comparación en un contexto de recubrimiento de figuras planas; y en un segundo momento se transforma en un contexto con sus respectivos usos y procedimientos. Cabe aclarar que este nuevo contexto no es un elemento ajeno al contexto original (recubrimiento de figuras planas), por el contrario, es un elemento inmerso en él que debe ser desarrollado, no obstante, este desarrollo implica un proceso infinito de construcción de figuras, por lo que el contexto de construcción de figuras planas con condiciones dadas está involucrado en los infinitos pasos, con sus correspondientes usos y procedimientos.

Tabla 4: representación de la evolución de un procedimiento a contexto, involucrando dos esquemas de resignificación, uno inmerso en otro.

<table>
<tr><td colspan="3">Recubrimiento de figuras planas</td><td>Contexto</td></tr>
<tr><td colspan="3">Área</td><td>Noción</td></tr>
<tr><td colspan="3">Área como instrumento de comparación</td><td>Uso</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="2">Construcción de figuras planas</td><td>Procedimientos</td></tr>
<tr><td>Noción</td><td colspan="2">Propiedades de figuras planas</td><td></td></tr>
<tr><td>Uso</td><td colspan="2">Propiedades de figuras planas como base para la construcción de otras figuras planas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td>Bisecar ángulos</td><td>Trazar tangentes a curvas por un punto dado.</td><td></td></tr>
</table>

En azul el esquema de resignificación inicial, en naranja el elemento con dos naturalezas: procedimiento y contexto. En gris los elementos que conforman el nuevo esquema de resignificación a partir de la transformación del procedimiento. Todos los elementos grises se despliegan del elemento naranja que a su vez surge del desarrollo del esquema azul.

Tabla 5: Resignificación mediante el uso de propiedades de figuras planas para la construcción de otras, generado por medio de procedimientos de bisección de ángulos y rectas tangentes a curvas.

Construcción de figuras planas con condiciones dadas	Contexto
Propiedades de figuras planas	noción
Propiedades de figuras planas como base para la construcción de otras figuras planas.	uso

Bisecar ángulos	Trazar tangentes a curvas por un punto dado.	procedimientos

La edificación del anterior esquema de resignificación surge a partir de la necesidad de construir círculos con condiciones dadas, dichas condiciones corresponden a la construcción de un círculo tangente a dos rectas y un círculo, lo cual posibilita la creación de todos los infinitos círculos cuyo centro se ubica sobre la diagonal del cuadrado. Sin embargo, estos no son los únicos círculos que se necesitan para recubrir en su totalidad al cuadrado, es necesario construir círculos que llenen los espacios vacíos que surgen en la construcción de los círculos ya descritos.

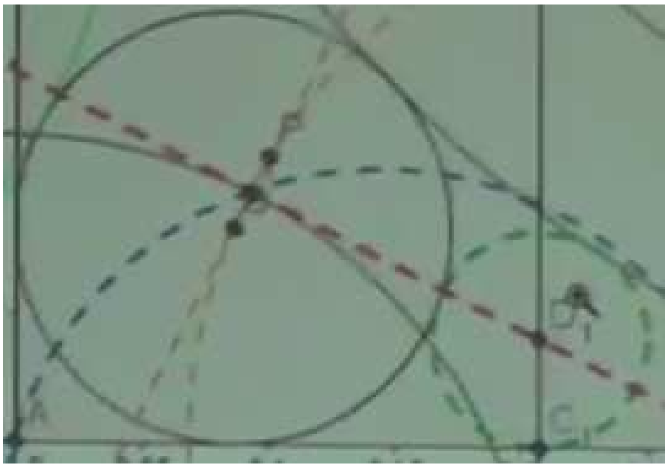

Ilustración 20: representación de la construcción de círculos tangentes a dos círculos y una recta.

En la parte izquierda de la ilustración 20, el círculo que se construye bajo la condición de ser tangente a dos rectas y un círculo, a la derecha el círculo que se construyen bajo la condición de ser tangente a una recta y dos círculos (círculo delimitado con color verde).

La construcción de este círculo verde es un procedimiento en el contexto de recubrimiento de figuras planas, que desarrolla el **uso** del *área como instrumento de comparación*. No obstante, sucede lo mismo que el procedimiento anterior, se convierte en una pregunta que es entendida como el nuevo contexto, el **contexto** de *construcción de figuras planas con condiciones dadas*, cambian las condiciones respecto al contexto anterior; en este caso los estudiantes se preguntan: ¿cómo construir un círculo tangente a dos círculos y una recta?

Los estudiantes hacen una documentación sobre el problema, considerando fuentes como internet y algunos libros de matemáticas, y reconocen que ese es uno de los diez problemas de Apolonio. Específicamente el que propone:

> *Dados tres objetos que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.* (Ortega, 2004, pág. 67)

En este tratado sobre tangentes, se encuentra un problema referente a la construcción de un círculo tangente a dos círculos y una recta, específicamente el problema número nueve. A partir de la explicación de Apolonio y la interpretación de otros autores, los estudiantes logran realizar la construcción geométrica de esta circunferencia.

Tabla 6: Resignificación mediante el uso de propiedades de figuras planas para la construcción de otras, generado por medio de procedimientos de bisección de ángulos y rectas tangentes a curvas.

Construcción de figuras planas con condiciones dadas.		Contexto
Propiedades de figuras planas.		Noción
Propiedades de las figuras planas en la aplicación de teoremas para la construcción de otras figuras planas.		Uso
Bisección de ángulos	Trazo de tangentes a círculos.	procedimientos

Alcanzado este desarrollo, el grupo de estudiantes se preguntó: ¿qué relación tienen los círculos que se van construyendo a partir de círculos anteriores? para ello, centran su atención en el radio de estos.

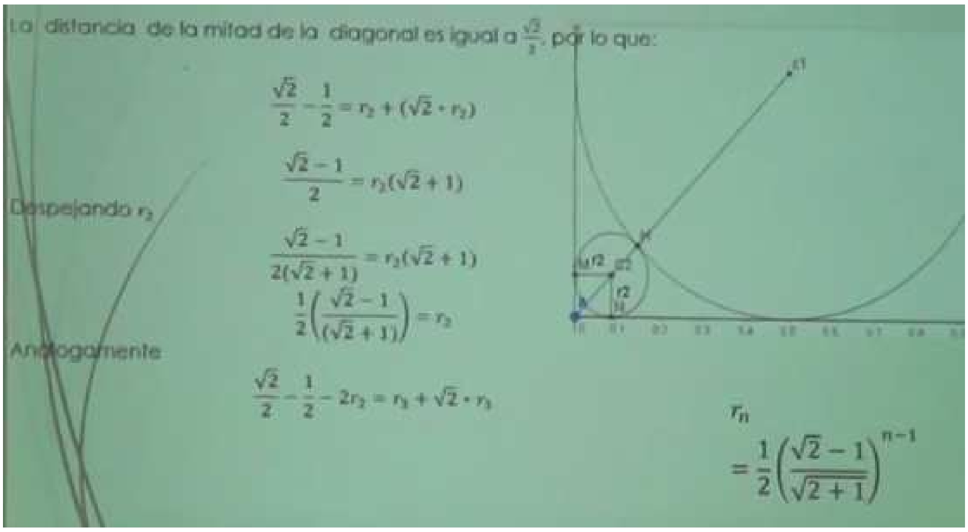

Ilustración 21: representación de la generalización de los radios de los círculos ubicados sobre la diagonal.

El cálculo de la diagonal del cuadrado se realiza con el teorema de Pitágoras y obtienen la medida de la mitad de la diagonal que es igual que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por esto, los estudiantes trazan una relación de igualdad, al expresar la diferencia de la diagonal y el radio del primer círculo y escribiendo la misma diferencia de una forma distinta, de esta manera logran despejar r_2. Lo que se concluye al final es una expresión que puede indicar el radio de cualquier círculo solo con saber el orden en que es construido y reemplazándolo por la variable n.

Posterior a esto, los estudiantes desarrollan otra forma de expresar los radios que se crean por medio de ecuaciones de distancia, haciendo uso de un teorema de Descartes.

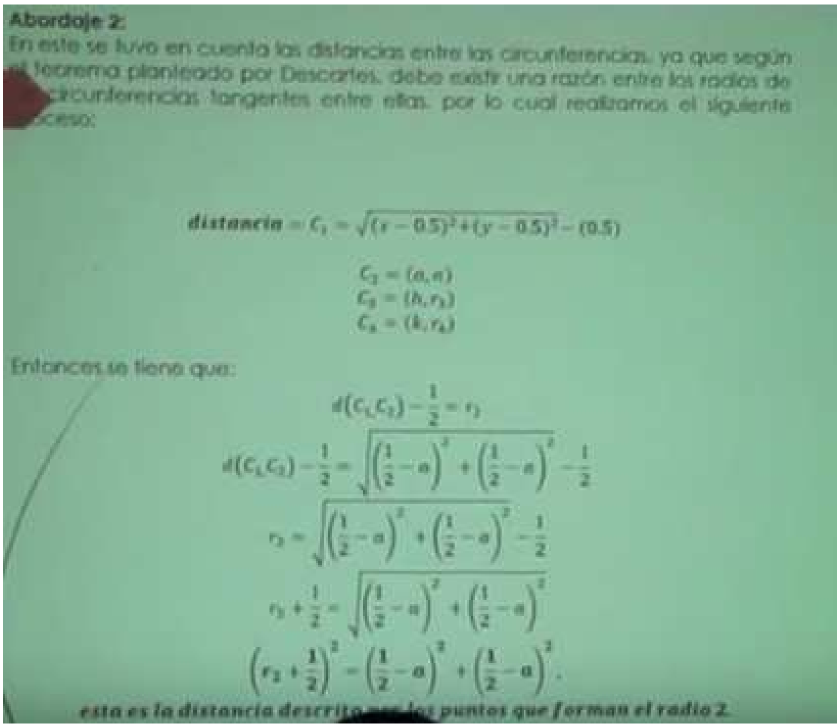

Ilustración 22: representación de la distancia entre los centros de dos círculos consecutivos.

En la ilustración 22 se observa que los estudiantes a partir del radio de los primeros dos círculos, determinan de forma general la distancia entre dos centros de círculos cualquiera, y sabiendo las coordenadas del centro de cada una de los círculos, encuentran las coordenadas del centro de la siguiente.

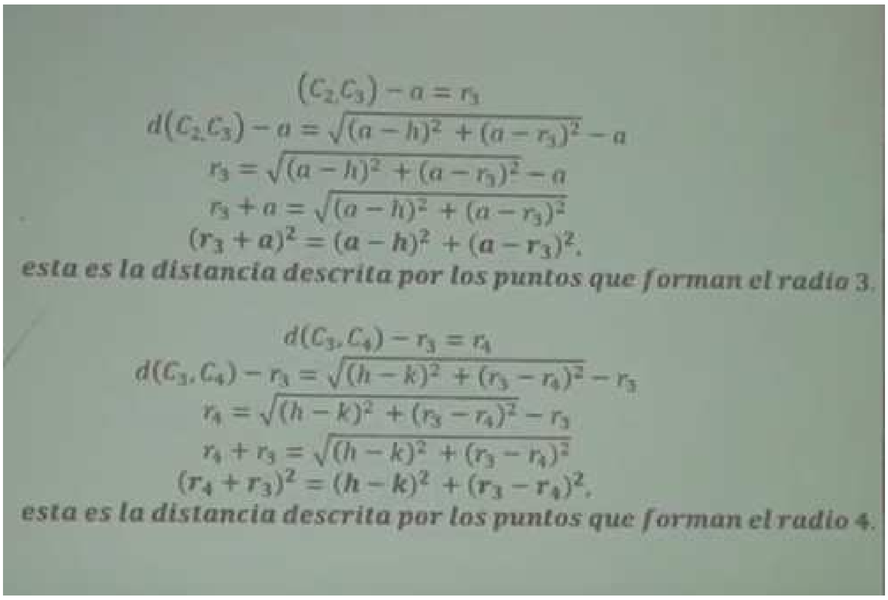

Ilustración 23: representación del cálculo de la distancia de los radios de los círculos 3 y 4.

El proceso de la construcción de círculos es infinito y aunque el cálculo que se estaba haciendo era correcto, no se encontró ninguna regularidad para lograr llegar a una expresión que permitiera encontrar el radio de cualquier círculo sin necesidad de conocer el radio del círculo anterior; por esta razón, ese proceso se descartó.

El propósito de los estudiantes es bastante claro, al inicio, el contexto y los usos concluyen como resultado, entre otras, la necesidad de usar un procedimiento de suma de áreas. No obstante, las áreas que pretenden sumar corresponden a áreas de círculos, los estudiantes se realizan una pregunta con el fin de continuar con la solución del problema. ¿Cómo sumar el área de infinitos círculos? Con esta pregunta el procedimiento mencionado se transforma en un contexto. El surgimiento de este nuevo **contexto**: *suma infinita de áreas de círculos*, implica el desarrollo de un nuevo esquema de resignificación, que se vincula al contexto de integral en recubrimiento de figuras.

Es claro que dentro de este contexto se involucra la noción de área, y como es respecto a los círculos, también se menciona la noción de longitud (como elemento que mide el radio), por tal motivo se encuentran los **usos**: *expresión de área como elemento de la sumatoria*, y *longitud del radio como herramienta para expresar el área.*

Los intentos por expresar el comportamiento de los radios hacen parte de los **procedimientos,** entre los que ya se han mencionado se encuentra la *ecuación de distancia entre puntos para relacionar radios*, y *sucesión numérica para representar el radio.*

Ninguno de los dos procedimientos ha logrado tener total éxito frente al problema que se plantea dentro del problema global: sumar una cantidad infinita, y tampoco se desarrolla ninguno de los usos, por tal motivo el grupo propone una nueva manera de expresar la razón entre los radios y por ende entre las áreas.

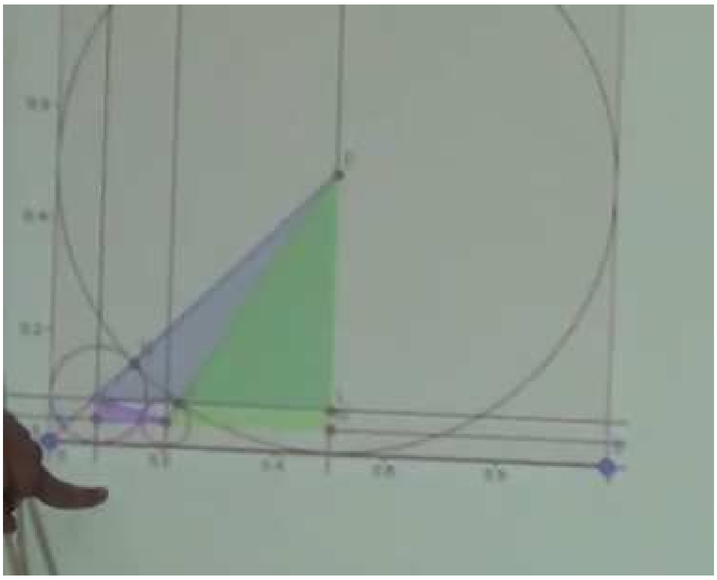

Ilustración 24: representación del teorema de las circunferencias tangenciales; usadas como elemento de relación de distancias.

Dada la construcción de los primeros tres círculos trazaron tres triángulos y los relacionaron entre sí, reescribiendo ciertas distancias con la suma o resta de otras dos distancias.

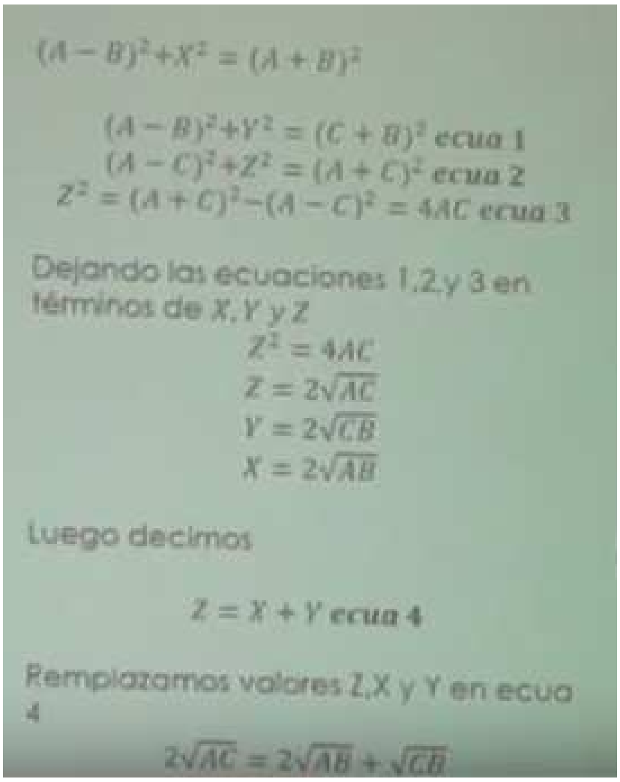

Ilustración 25: relaciones construidas a partir de las distancias de los triángulos construidos.

El radio de cada circunferencia se nombró: al radio de la circunferencia mayor se le llamó C; al radio de la circunferencia mediana se le llamó; A y al radio de la circunferencia más pequeña se le llamó B.

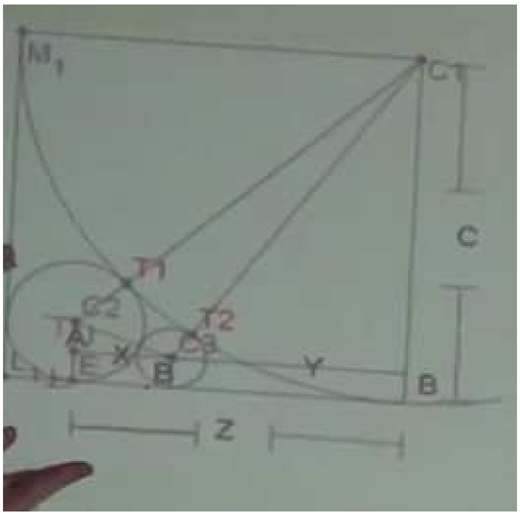

Ilustración 26: representación de la relación de distancias entre centros de círculos y longitud de catetos de triángulos.

El grupo explica cada una de las relaciones obtenidas por medio de la visualización y los cálculos algebraicos, donde la altura de un triángulo se puede expresar por medio de una operación entre las medidas de los otros dos triángulos o los radios de las circunferencias.

Luego de tener estas expresiones el grupo explica que realizó procesos algebraicos que le permitieron llegar a una generalidad de tal forma que podían representar el radio (y por lo tanto el área) de cualquier círculo respecto a las primeros dos construidos.

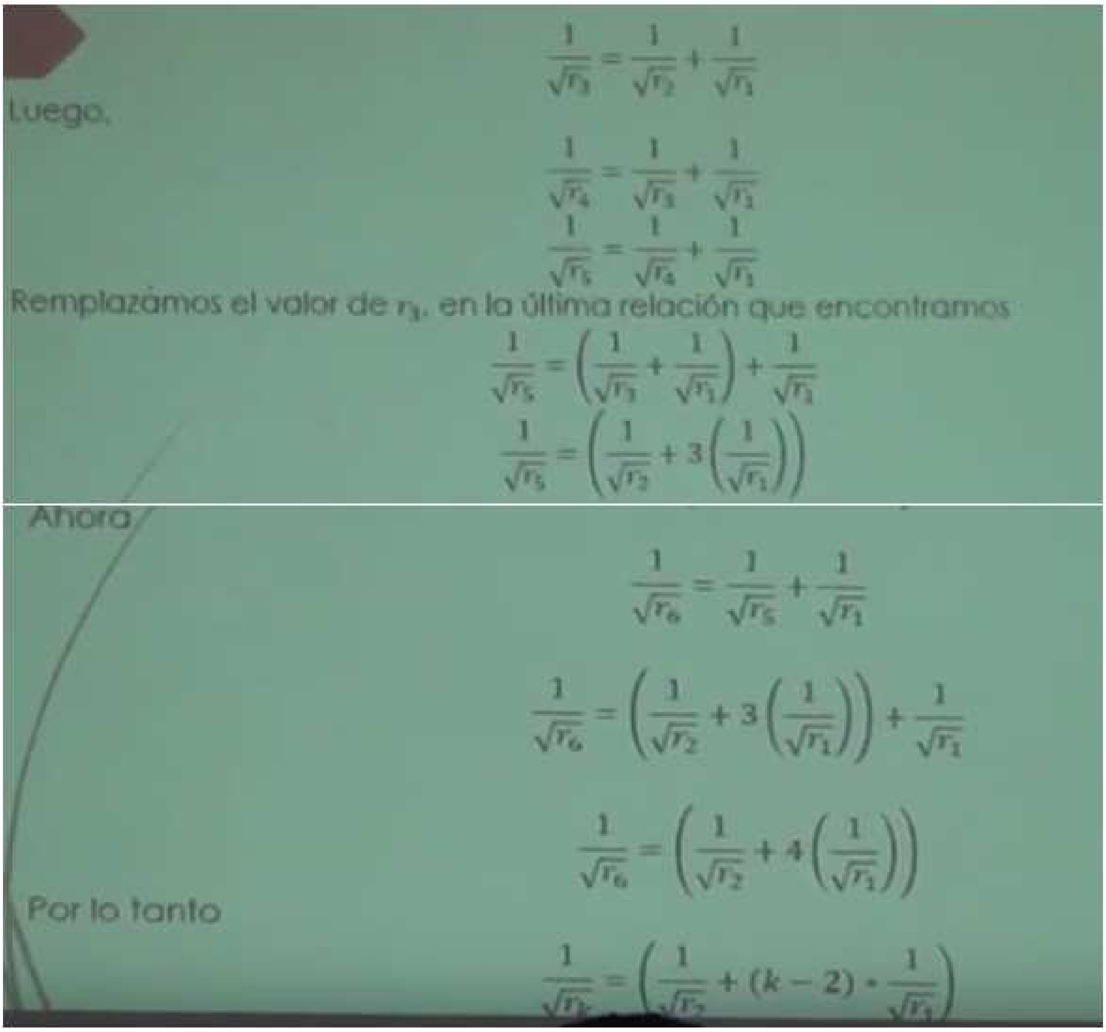

Ilustración 27: representación de las longitudes de los radios mediante procesos algebraicos.

Todo esto para llegar a la sumatoria que determina la suma del área de los infinitos círculos construidos con la condición dada de ser tangente a dos círculos y una recta.

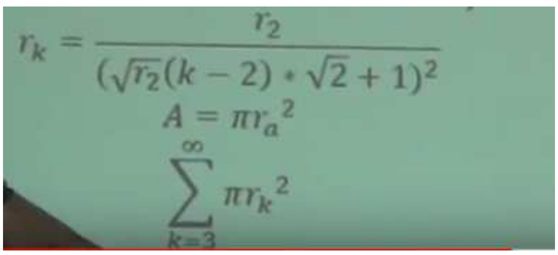

Ilustración 28: sumatoria de las áreas de los infinitos círculos.

Con esto, el grupo concluye su exposición, argumentando que estos dos procesos de construir círculos en orden diagonal y las de orden lateral, unas tangentes a dos rectas y un círculo y otras tangentes a dos círculos y una recta se realizan no solo en la parte inferior izquierda del espacio del cuadrado sino que en cada una de las otras tres partes, ya que el proceso es simétrico.

Lo anterior permite sugerir un nuevo esquema de resignificación asociado a la integral.

Tabla 7: resignificación generada a partir del uso de área como elemento de sumatoria y la longitud como herramienta para expresar el área, todo esto por medio de ecuaciones de distancia y sucesiones numéricas.

Suma infinita de áreas de circunferencias		Contexto
Área	Longitud	Nociones
Expresión del área como elemento de la sumatoria	Longitud del radio como herramienta para expresar el área	Usos
Ecuación de distancia entre puntos para relacionar radios	Sucesión numérica para representar radios	procedimientos

5.2.4 *Quinta sesión*

En esta sesión expone otro de los grupos de estudiantes, quienes tuvieron la tarea de recubrir un triángulo equilátero de lado 1 unidad usando círculos, inicialmente la tarea está involucrada en el mismo contexto en donde se desarrolló el primero problema grupal, el **contexto** de recubrimiento de figuras planas.

En este orden de ideas los estudiantes explican la metodología con la cual resolvieron la tarea planteada, según ellos siguieron el siguiente camino:

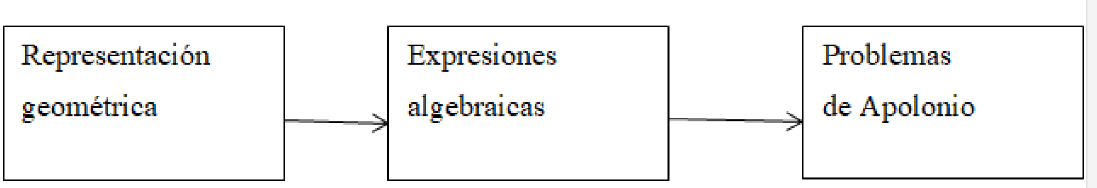

Ilustración 29: representación de la metodología empleada por los estudiantes para resolver el problema planteado.

Es evidente que lograron hacer una construcción geométrica donde se representa la forma como construyeron los círculos dentro del triángulo.

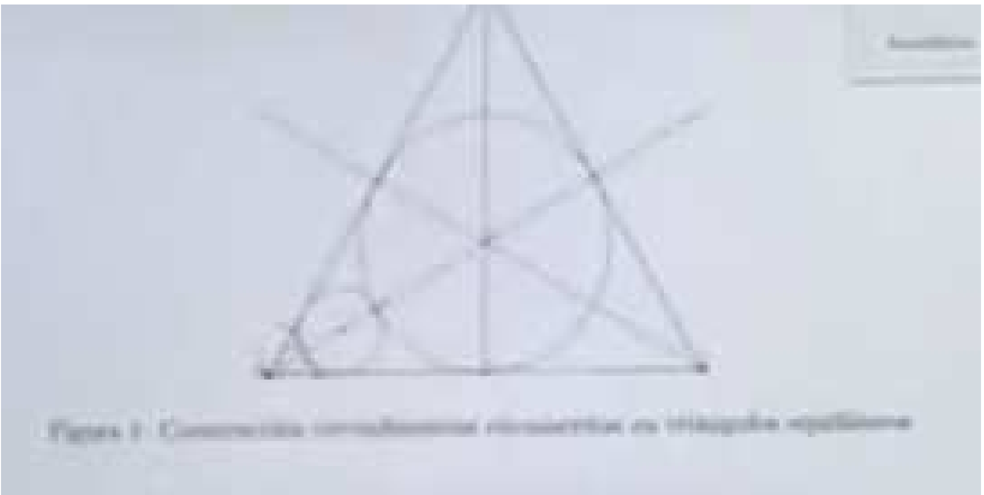

Ilustración 30: construcción de un círculo inscrito en un triángulo equilátero.

A la hora de construir el círculo se observa que el grupo de estudiantes usó propiedades del triángulo equilátero, se trazan las mediatrices de cada uno de los segmentos del triángulo para encontrar su baricentro que resulta ser el centro del círculo inscrito y su radio es un tercio de la altura del triángulo equilátero.

Esta última afirmación es la que mencionan en la exposición porque será punto clave para continuar con el abordaje del problema. El grupo expositor menciona que: “nos dimos cuenta que el radio del círculo era un tercio del triángulo que tenemos”

Se observa que existen dos elementos importantes en la resolución del problema, un elemento que está de manera implícita y otro que está de manera explícita, los elementos a los cuales se hace alusión son dos conceptos, uno es el concepto de área y el otro el concepto de longitud.

El área se involucra de la misma manera como se ha involucrado a lo largo del desarrollo de las actividades de la clase, donde no mencionan la palabra área salvo al finalizar el desarrollo, pero la noción está presente en el simple hecho de recubrir una figura con otra.

La longitud, por otro lado, sí está involucrada de manera explícita en el desarrollo, los estudiantes mencionan en varias ocasiones la palabra "radio", toman en consideración el radio de cada uno de los círculos que van construyendo, y parten de esos radios para construir una generalidad.

Por tal motivo estas nociones ayudan a desarrollar unos **usos** dentro del contexto de recubrimiento de figuras planas, **uso** del *área como herramienta de comparación* y **uso** de *longitud como herramienta para la generalización*.

Dada la medida del lado del triángulo equilátero fue posible encontrar la medida de la altura y con ello la medida del radio del círculo más grande construido dentro del triángulo, el grupo lo expresó como la deferencia de la altura del triángulo con la parte no tomada como el radio; de esta manera, podían partir la altura en tres partes iguales.

$$r_1 = \overline{AD} - \overline{AO} = \frac{\sqrt[2]{3}}{2} - \frac{\sqrt[2]{3}}{3} = \frac{\sqrt[2]{3}}{6}$$

Ilustración 31: representación algebraica para determinar la longitud del radio de un círculo inscrito en un triángulo.

Con esta expresión se da inicio al trato algebraico en el que nombran r_1 al radio del primer círculo, de esta manera $r_1 = \frac{\sqrt[2]{3}}{6}$. A partir de este primer círculo se construyen otros triángulos equiláteros, tales que cada uno de sus lados son tangentes a la circunferencia y paralelos a otro lado del triángulo.

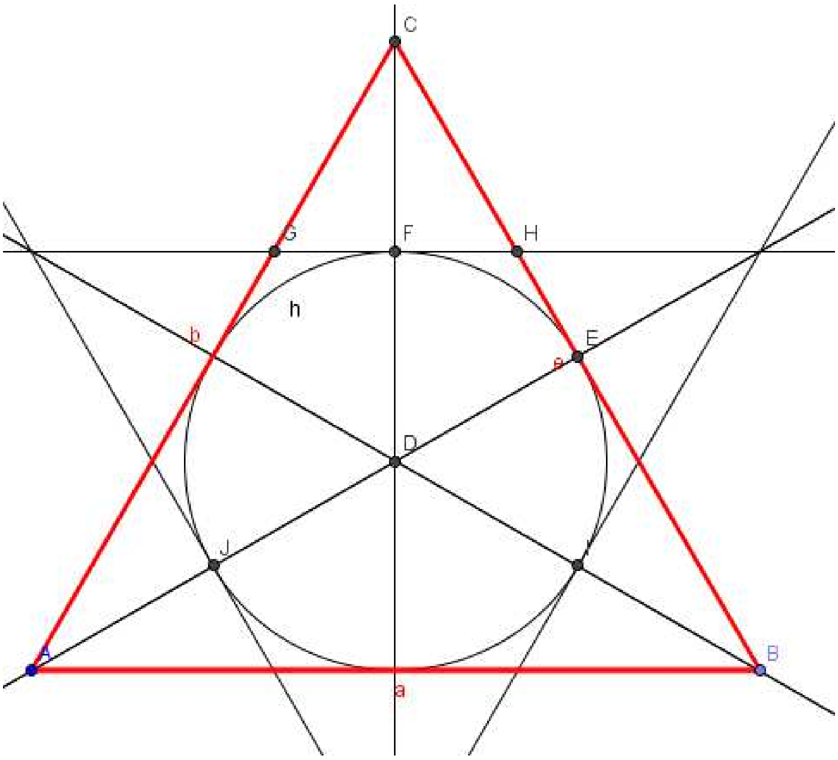

Ilustración 32: construcción de triángulos equiláteros en los espacios vacíos generados por la construcción de los círculos inscrito en el triángulo equilátero inicial.

El triángulo inicial está en color rojo, y en las esquinas se observan los nuevos triángulos que se forman siendo estos últimos también equiláteros y su altura es la tercera parte de la altura del triángulo inicial, por tal motivo el radio del círculo que se forma en los triángulos pequeños es también la tercera parte del radio del círculo inicial. Estas aclaraciones le sirven al grupo para que por medio del **procedimiento:** construcción de una sucesión de longitudes tal que la razón entre dos términos sucesivos están a una misma razón; logren aproximarse a la generalización de las longitudes de los radios. La escriben como:

$$r_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad r_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \qquad \ldots \qquad r_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ilustración 33: procedimiento para generalizar las longitudes de los radios.

En la imagen se observa cómo a partir del radio del primer círculo determinan el siguiente y logran construir una expresión algebraica que determine el radio de cualquier círculo dada su posición de construcción.

$$A_{Cn} = \pi[r_n]^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ilustración 34: expresión de la generalización de las longitudes de los radios.

Como ya es posible encontrar el radio de r_n entonces también es posible encontrar el área del círculo de subíndice n.

$$A_{C1} = \pi\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 \qquad A_{C2} = \pi\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]^2 \qquad \ldots \qquad A_{Cn} = \pi\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} A_{Cn}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{3\pi}{36}\left[\frac{1}{3}\right]^{n-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} S_n = \frac{\frac{3\pi}{36}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3\pi}{36}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Ilustración 35: proceso de la elaboración de la expresión que determina el área de un círculo dado su posición de construcción.

A continuación el grupo de estudiantes reemplaza el radio por la expresión que lo determina y completa así la expresión del área de cualquier círculo dado su posición de construcción. Esta conclusión representa un nuevo esquema de resignificación respecto al desarrollo realizado por el grupo de estudiantes anterior.

El último paso fue realizar el **procedimiento** de la suma de una cantidad infinita. Con esto, es posible encontrar el área total de todas las circunferencias que se construyeron sobre los segmentos que bisecaron los ángulos del triángulo equilátero inicial.

Tabla 8: resignificación generada a partir del uso del área y la longitud como herramientas de comparación y generalización, desarrolladas por la suma de áreas y la construcción de sucesiones.

Recubrimiento de figuras planas		Contextos
Área	Longitud	Nociones
Área como herramienta de comparación	Longitud como herramienta de generalización	Usos
Suma infinita de áreas mediante la convergencia de la serie geométrica	Construcción de una sucesión de longitudes con una misma razón entre dos términos consecutivos	Procedimientos

5.3 **Análisis segunda entrevista.**

Esta entrevista tiene como fin identificar la evolución del significado de integral expresado por los estudiantes, dicha evolución se identifica a partir del análisis de la percepción que tiene los estudiantes respecto a las categorías (contextos, usos y procedimientos) de resignificación de la integral; durante el proceso de solución de una situación fundamental.

Esta entrevista se realizó con el mismo instrumento de recolección de información para la primera entrevista, de modo que los datos puedan ser comparables con los recolectados en la primera y con ello, evidenciar el cambio en el significado expresado por los estudiantes sobre concepto de integral.

Al finalizar la situación fundamental los estudiantes se refieren a la integral con frases como "la integral se nota en los procesos infinitos de sumas y construcciones", a partir de esta respuesta se evidencia que los protagonistas ubican a la integral en contextos de procesos infinitos.

Los investigadores indagan en los estudiantes respecto a los usos, contextos y procedimientos de la integral. A lo que responden asegurando que la integral es usada para "determinar el resultado de una suma infinita" y "representar el resultado de recubrir completamente figuras con otras figuras".

Estas ideas surgen a partir de lo experimentado en el problema, por tal razón los estudiantes aseguran que todo lo que responden está involucrado en el desarrollo de la solución del problema planteado.

Los estudiantes reconocen haber buscado inicialmente alguna expresión que pudieran integrar para llegar a la solución "creíamos que era un problema típico de optimización, como si lo único necesario fuera encontrar la expresión correcta y aplicarle el boleo de la integral". Sin embargo, con el paso del tiempo notaron que el problema planteado no permitía desarrollar el proceso que habían considerado, "la cosa es que el problema lo lleva a uno a pensar de manera más primitiva en la integral, como a salirse de la idea de aplicar el algoritmo y llegar a la solución".

Los investigadores cuestionan a los estudiantes respecto a las expectativas que tenían frente a la asignatura y en particular al desarrollo de la situación fundamental propuesta; ellos advierten no haber esperado los resultados, "pensé que íbamos a utilizar todos los métodos de integración, pero si se pone a pensar, eso se aprende mirando videos por YouTube".

Es evidente que surgen para los estudiantes contextos, procedimientos y usos en los cuales se involucra la integral.

Comparando los dos resultados de las entrevistas se puede asegurar que:

- Luego de la resolución del problema, los estudiantes tienen una visión más amplia respecto a los usos que le atribuyen a la integral, adicionando usos como: determinar el resultado de una suma infinita y representar el resultado de recubrir completamente figuras con otras figuras, y soslayando el uso que generalmente se atribuye a este término: es usada para hallar el área bajo la curva.
- Los estudiantes descentralizan la intención de la asignatura de los conceptos matemáticas puramente algorítmicas y se concentran en el significado de las cosas, esto es evidente en el poco interés que se aprecia a la hora de explicar que no se trabajaron métodos algorítmicos para integrar.
- Los estudiantes eliminan de su discurso la frase *área bajo la curva*, e involucran otras frases como *sumas* y construcciones infinitas.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS

En este capítulo se mencionan los resultados obtenidos de la recolección de datos, las diferentes resignificaciones construidas por los estudiantes y una breve descripción de ellas. Adicional a esto, se exponen los cambios entre cada uno de los esquemas de resignificación.

El profesor a cargo de la asignatura matemática del movimiento III plantea en las primeras sesiones de clase una situación fundamental, en ella, los estudiantes desarrollan estrategias con las cuales pretenden resolver el problema planteado. Durante la resolución se reconocen algunos aspectos importantes vistos como elementos separados que por su naturaleza pueden ser categorizados bajo unas categorías de análisis propuestas desde la resignificación.

Al constructo de la categorización de los elementos en contextos, usos y procedimientos se le ha denominado **esquemas de resignificación,** estos esquemas buscan organizar los elementos que permiten el surgimiento de la resignificación de un concepto matemático, para este caso en particular, la resignificación del concepto de integral.

A continuación, se presentan los esquemas de resignificación observados en el desarrollo de los problemas planteados a estudiantes para profesor en un ambiente de resolución de problemas.

Tabla 9 Resultados de resignificaciones identificadas

Resignificación	Descripción

Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de estimación, medición y suma.	Este esquema de resignificación se construye cuando en el proceso de recubrir figuras planas con otras, se involucra la idea implícita de comparación de áreas, convirtiéndose la estimación, la medición y la suma de áreas como los procedimientos que permiten la comparación mencionada anteriormente.
Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de medición y suma	Este esquema de resignificación se construye cuando en el proceso de recubrir figuras planas con otras, se involucra la idea implícita de comparación de áreas, convirtiéndose la medición y la suma de áreas como los procedimientos que permiten la comparación mencionada anteriormente
Resignificación mediante el uso de propiedades de figuras planas para la construcción de otras, generado por medio de procedimientos de bisección de ángulos y rectas tangentes a curvas	Este esquema de resignificación se construye a partir de la necesidad de construir círculos con condiciones dadas, usando las propiedades de las figuras como elementos para la construcción de dichas figuras, por medio de procedimientos de bisección del ángulo y el trazo de tangentes a curvas por un punto dado.
Resignificación generada a partir del uso de área como elemento de sumatoria y la longitud como herramienta para expresar el área, todo esto por medio de ecuaciones de distancia y sucesiones numéricas	Este esquema de resignificación se construye con la intención de sumar una cantidad infinita, usando el área y la longitud del radio como elemento de sumatoria y herramienta para expresar el área, respectivamente. Dichos usos se logran mediante dos procedimientos: ecuación de distancia entre puntos para relacionar radios y sucesiones numéricas para representar radios.

Resignificación generada a partir del uso del área y la longitud como herramientas de comparación y generalización, desarrolladas por la suma de áreas y la construcción de sucesiones	Este esquema de resignificación se construye con la intensión de recubrir figuras planas con otras figuras planas, haciendo uso del área como instrumento de comparación desarrollado con el procedimiento de Suma de una cantidad infinita mediante la convergencia de la serie geométrica y la longitud como elemento de generalización desarrollado con la construcción de una sucesión de longitudes con una misma razón entre dos términos consecutivos.

Los anteriores esquemas de resignificación representan las resignificaciones del concepto de integral en un ambiente de resolución de problemas con estudiantes para profesor. Lo anterior es de notable relevancia, pues con ello no solo se articulan los elementos involucrados en la integral, sino, que además se responde a la pregunta problémica planteada inicialmente.

Los cambios que surgen en cada uno de los esquemas significan el desarrollo de la resignificación de la integral. El primer cambio es muy sutil, se consideran los mismos contextos, los mismos usos, pero se entiende uno de los procedimientos como "poco relevante" para la solución del problema e implícitamente para la noción de integral.

El segundo cambio es bastante significativo, en él se transforma el contexto inmediato, es decir, un procedimiento del esquema de resignificación se convierte en el contexto de un esquema de resignificación inmerso en el primero. Esto genera que el nuevo contexto se desarrolle por medio de usos distintos y procedimientos distintos, todo esto en busca del desarrollo del primer esquema de resignificación. De lo anterior se puede concluir que la profundización de usos y procedimientos permite generar resignificaciones del concepto de integral.

El siguiente cambio se condiciona a la manera en que es percibido el contexto, primero como las propiedades que permiten la construcción de una figura, y segundo la manera de sumar las áreas de dichas figuras construidas. Esto representa la importancia de la interpretación para los procesos de resignificación del concepto de integral.

El último cambio genera la posibilidad de interpretar la suma de áreas como instrumento para realizar la acción de recubrimiento, esto es, llegar al génesis de los esquemas de resignificación con un desarrollo profundo de cada categoría. Se exponen de manera más detallada los usos y procedimiento en el mismo proceso que dio inicio a la creación de los esquemas. La resignificación debe permitir reescribir las categorías luego de profundizar en ellas.

Lo anterior responde a resultados del constructo de esquemas de resignificación, exponiendo la progresión de la resignificación del concepto de integral en la formación de profesores mediado por un ambiente de resolución de problemas. A pesar que estos esquemas significan un resultado importante y casi central respecto a la investigación, es también relevante resaltar y mencionar otros resultados obtenidos.

El análisis de la información recolectada pone en evidencia una herramienta de la socioepistemología llamada convención matemática, con ella es posible descentralizar el concepto matemático para centrarse en el escenario donde este es usado. Esta herramienta no se menciona de manera explícita en el análisis, pero es indudable que en los procesos involucrados tanto en el planteamiento como en la solución del problema se recurre a ella.

El concepto de integral no se desarrolla de manera directa, en cambio, el profesor propone situaciones en donde su uso está implícito. Esto ocurre con el recubrimiento de figuras y posterior a esto con todos los procedimientos identificados en el análisis: suma de una cantidad infinita, construcción de figuras planas, comparación de áreas, entre otras.

Esta realidad implica que se descubran las causas reales del desarrollo social del conocimiento, ubicando a los conceptos en un mejor estatus epistemológico. El análisis deja en evidencia la evolución del concepto de integral que adquirieron los estudiantes observados, todo esto mediado por un ambiente de resolución de problemas que permitió la aplicación de la herramienta convención matemática.

Por último, se demostró y explicó la forma como un elemento involucrado en el concepto de integral puede evolucionar de procedimiento a contexto, y de esta manera generar nuevos usos y procedimientos.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En este capítulo se adelantan las conclusiones del trabajo de grado realizado, se expone la respuesta a la pregunta propuesta en el planteamiento del problema, y se identifica la realización o no de los objetivos planteados.

Al inicio del documento se presentó una pregunta como resultado del planteamiento de un problema, en respuesta a ello se propuso unos objetivos con los cuales se pretendía abordar la pregunta. Para desarrollar esto se diseñó una metodología que involucra elementos de recolección y análisis de datos.

La pregunta planteada fue: ¿Cuáles son las resignificaciones al concepto de integral que se produce en un proceso de formación de profesores en un ambiente de resolución de problemas?

En respuesta a esta pregunta se construyeron los **esquemas de resignificación,** realizados a partir del análisis de los datos obtenidos en la observación de unos estudiantes del curso movimiento III de la LEBEM. En ellos, se categorizan elementos relacionados con la integral, con el fin de explicar por medio del desarrollo de cada una de las categorías la evolución de dicho concepto.

En total se obtienen 5 esquemas de resignificación:

- Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de estimación, medición y suma.
- Resignificación mediante la comparación de áreas generada de procedimientos de medición y suma

- Resignificación mediante el uso de propiedades de figuras planas para la construcción de otras, generado por medio de procedimientos de bisección de ángulos y rectas tangentes a curvas.
- Resignificación generada a partir del uso de área como elemento de sumatoria y la longitud como herramienta para expresar el área, todo esto por medio de ecuaciones de distancia y sucesiones numéricas.
- Resignificación generada a partir del uso del área y la longitud como herramientas de comparación y generalización, desarrolladas por la suma de áreas y la construcción de sucesiones.

El cumplimiento de los objetivos es clave para lograr resolver la pregunta expuesta en el planteamiento del problema, los objetivos específicos deben poder ayudar a desarrollar el objetivo general. El objetivo general al que se hace referencia es: Analizar el proceso de resignificación de la integral en un ambiente mediado por la resolución de problemas para la formación de profesores de matemáticas.

Con los datos recolectados fue posible realizar un análisis guiado por las categorías de la resignificación: contextos, usos y procedimientos. Con ello, se realizaron apuntes y observaciones respecto a los procesos que permiten que el concepto de integral sufra una resignificación en un ambiente mediado por la resolución de problemas.

Los objetivos específicos propuestos en el presente documento buscan en su desarrollo, aportar al cumplimiento del objetivo general. Son tres los objetivos específicos

Primer objetivo específico: Reconocer contextos de la integral empleados para la formación de estudiantes para profesor en ambientes mediados por resolución de problemas. Los contextos de la integral se reconocieron gracias a un análisis realizado a los resultados obtenidos de la observación de la solución de un problema propuestos a estudiantes del espacio de formación matemática del movimiento III, en la LEBEM.

Estos contextos han sido expuestos de varias maneras, de forma más sintetizada en los esquemas de resignificación, en donde se comprenden tres contextos:

- Contexto de recubrimiento de figuras planas.
- Contexto de construcción de figuras planas con condiciones dadas.
- Contexto de suma infinita de áreas de circunferencias

Segundo objetivo específico: Identificar la resignificación de la integral en estudiantes para profesor en un ambiente mediado por resolución de problemas. En este documento se logra realizar un paralelo entre la noción de la integral que tienen los estudiantes al inicio de la sesión con la noción que construyen al finalizar esta.

Con ello, se logra identificar que existe un cambio respecto al concepto de la integral y los usos y contextos en donde se emplea. No obstante, el solo hecho de identificar esta resignificación global no permite dar cuenta de todas las resignificaciones que ocurren en el proceso.

Tercer objetivo específico: Caracterizar la progresión de resignificaciones del concepto de integral que estudiantes para profesor alcanzan en una formación mediada por un ambiente de resolución de problemas. Con la construcción de los esquemas de resignificación fue posible reconocer y caracterizar los elementos que permiten que ocurra una resignificación del concepto de integral.

Esto se expone en los resultados del presente documento, en ellos se menciona la progresión de las resignificaciones que ocurren en un ambiente mediado por la resolución de problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, C., Ruiz, A., & Gamboa, R. (2006). CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2-4.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., & Suárez, L. (2004). LAS PRÁCTICAS SOCIALES COMO GENERADORAS DEL CONOCIMIENTO. México.

Cabañas Sánchez, M. G. (2011). El papel de la noción de conservación del área. México.

Cabañas Sánchez, G., & Cantoral, R. (2012). EL PAPEL DE LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LA. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Reyes Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática.

Cordero Osorio, F. (2005). Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal.

Cordero Osorio, F., & Flores Estrella, R. (2007). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto).

Cordero Osorio, F., & Morales Soto, A. (2014). LA GRAFICACIÓN - MODELACIÓN Y LA SERIE DE TAYLOR. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Grijalva Monteverde, A. (2007). el papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos: El caso de la integral de una función. México.

Guirado, A. M., Mazzitelli, C., & Maturano, C. (2013). La resolución de problemas en la formación del. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.

Hernández Sampieri, R., Fernández Callado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la Investigación. México: Mc. Graw Hill.

LEBEM, S. d. (2010). Sistematización de prácticas y Construcción de Lenguaje Común en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Bogotá.

Martín Suárez, M. (2008). Orígenes del cálculo diferencial e integral: historia del análisis matemático. Granada.

MATEMÁTICAS, L. E. (2016). Syllabus Problemas y Pensamiento Matemático.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). lineamientos curriculares de educación matemática. Bogotá.

Muñoz León, J. J. (2015). No obstante, las teorías actuales apuestan por que sea el estudiante quien construya sus propias estructuras de conocimiento, basándose en las que previamente posee, mientras que la labor del profesor debe consistir fundamentalmente en orientar. Barcelona.

Ortega, I. (2004). Los diez problemas de Apolonio. SUMA.

Páramo Morales, D. (s.f.). Scielo. Obtenido de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1657-62762015000200001

Piñeiro Garrido, J. L. (2015). Resolución de problemas desde una perspectiva curricular: implicaciones para la formación de profesores. Granada, España.

Piñeiro Garrido, J. L., Pinto Marin, E., & Díaz Levicoy, D. (2015). Revista Virtual Redipe Año 4 Volumen 2.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Vecino, S., Oliver, M., Vecino, S.,. . . Álvarez, E. (2009). LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Revista Iberoamericana de Educación, 2-4.

ANEXO 1

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

Para realizar la investigación se propone una entrevista semiestructurada que será en su totalidad documentada en video; la cual contiene elementos que buscan indagar sobre el abordaje de un problema que involucra el concepto de integral.

Por tal motivo la entrevista debe dar cuenta de los abordajes realizados por los estudiantes. Para esto se utilizará los niveles de abordaje propuestos por Mason, Burton y Stacy (1982), en donde se explica que para realizar un buen abordaje se debe contestar estas tres preguntas:

- ¿Qué es lo que se?
- ¿Qué es lo que quiero?
- ¿Qué es lo que puedo hacer?

A raíz de estas preguntas se plantean otras para indagar en profundidad los elementos del abordaje que surgen a medida que se desarrollan estrategias para la solución del problema.

- ¿Qué es lo que sabe del problema?
    - ¿Qué sabe de la derivada?
    - ¿Qué sabe de la integral?
        - Usos, contextos y procesos
- ¿Cómo se ve lo mencionado anteriormente en el problema?
- ¿Qué espera obtener con la resolución del problema?
    - ¿Cuáles son las estrategias que piensa utilizar?
        - ¿Qué cree que puede utilizar?
- ¿Qué es lo que están haciendo y como lo van a hacer?

Las anteriores preguntas tienen características distintas (guion, viñeta sin sombrear y viñeta sombreada) en donde las preguntas principales son las numeradas con el guion, las preguntas numeradas con la viñeta sin sombrear son emergentes de las preguntas principales y las numeradas con la viñeta sombreada son preguntas emergentes.

Se aclara que las preguntas se harán en la primera y última sesión para realizar un análisis en la evolución de las respuestas. Del mismo modo se pedirá a los estudiantes que piensen en voz alta para que los procesos meta-cognitivos puedan ser estudiados.

ANEXO 2

FORMATO DE BITÁCORA

FECHA	TIEMPO	CATEGORÍA DE ANALISIS