OBSTÁCULOS, ERRORES Y DIFICULTADES PROVOCADOS POR LA POLISEMIA DEL SIGNO “-” EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2022

OBSTÁCULOS, ERRORES Y DIFICULTADES PROVOCADOS POR LA POLISEMIA DEL SIGNO "-" EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS

ORGANISTA NIÑO ALEJANDRO

PRADA ANAYA YESSICA TATIANA

Estudiantes

TRABAJO DE GRADO

JAIME FONSECA GONZÁLEZ

Director

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2022

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

1 INTRODUCCIÓN

Con el paso del tiempo, algunos autores han presentado distintas formas de construir el número entero. Algunos ejemplos se pueden encontrar en las propuestas de enseñanza y modelos concretos de Arcavi y Bruckheimer (1981) citados en Cid (2003) entre otros. En el proceso de construcción de este contenido matemático aparecen sistemáticamente errores que llegan a ser preocupación para el docente, ya que hacen parte del aprendizaje de los estudiantes y la superación han de ser un objetivo de enseñanza. Estos errores se pueden presentar como un esquema cognitivo inadecuado, y pueden venir de diferentes procedencias como lo son la falta determinada del conocimiento, bases sólidas de fundamentación, algunos asociados a la práctica, otros asociados al despiste. En el aprendizaje de las matemáticas, las respuestas incorrectas de los estudiantes son consideradas por parte de quienes los educan como señales de serias deficiencias, e incluso fracaso en el logro de los objetivos propuestos, aunque son a evidencia del aprendizaje y la resignificación del conocimiento de los estudiantes.

Como se mencionó anteriormente, se tomará como contenido matemático el número entero, enfocando la mirada hacia las diferentes interpretaciones del signo "-", pues en este confluyen diferentes significados que en la escuela suele ser reducido a uno solo: la resta. Así, la resignificación del conocimiento algebraico y aritmético del número entero traerá consigo errores, obstáculos y dificultades asociadas al tratamiento de este signo. Este trabajo estará enfocado en esos errores, obstáculos y dificultades que se presentan estudiantes para profesor de matemáticas, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, al comprender las diferentes interpretaciones del signo "-".

En primer lugar, se realiza un estudio exhaustivo sobre la historia y evolución del signo "-". seguido de esto, se encuentran diferentes significados que adquiere "-" el álgebra y aquellos que adquieren los estudiantes con este signo. Finalmente se enfatiza en las definiciones de errores, dificultades y obstáculos, identificando porqué surgen y hacia cuáles interpretaciones recaen. Una vez realizado este recorrido se encontrará el análisis, resultados y conclusiones.

1.1 Planteamiento del problema

Desde nuestra experiencia, y en el momento de iniciar un trabajo de grado, hemos identificado que el paso del número natural al número entero causa dificultades en estudiantes de educación básica y en futuros profesores. A su vez, evidenciamos que la aparición del signo "-" como negatividad para dotar de significado a los números enteros y números negativos, conlleva una ampliación de significados en el estudio aritmético y algebraico del conjunto de los enteros, de modo que los significados como negatividad, resta y opuesto aditivo se ocultan en una misma palabra: "menos".

Esta problemática se extiende a la formación de los futuros profesores, especialmente de tercer semestre del proyecto curricular LEMA de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el espacio de formación de Problemas de la Divisibilidad. En este se realiza, entre otras cosas, la resignificación del álgebra en Z desde una visión como estructura algebraica y ya no como un lenguaje, por lo que las propiedades definen el comportamiento de los objetos y es necesario diferenciar las propiedades de números negativos, de la resta y los opuestos. Con ello, surge la necesidad de adentrarse en la polisemia del signo "-" para comprender el tratamiento algebraico de cada una de estas interpretaciones, lo que constituye una fuente de errores, obstáculos y dificultades en los estudiantes al resolver problemas de demostración, lectura e interpretación de expresiones algebraicas.

La polisemia del signo "-" ha sido objeto de estudio Pujol, Bibiloni & Deulofeu (2010), quienes en un estudio cualitativo aplican y evalúan una propuesta de enseñanza de los números enteros en estudiantes de educación media. Sin embargo, no se encuentra un estudio sobre la comprensión de los diferentes significados de signo “-” en estudiantes de educación superior o estudiantes para profesor de matemáticas, lo que justifica el estudio.

Ahora bien, en la evolución histórica de los números negativos se identifican momentos de ruptura, como lo indican Schubring, (1998, p.3), citado en Gallardo y Bazurto (2010) “los números negativos en tanto concepto matemático legítimo no ha evolucionado de manera continua, sino que ha cambiado de cultura en cultura poniendo incluso, en evidencia rupturas y retrocesos.” De manera, las rupturas que históricamente de observan, aparecen con frecuencia en el aprendizaje a manera de dificultades.

Las dificultades, obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los números enteros y los negativos ha sido objeto de estudio de diferentes investigaciones. Gallardo y Bazurto (2010),

Aponte, Rivera (2017) e Iriarte, Jimeno & Vargas-Machuca (1991). Los primeros, en su investigación sobre la transición de la aritmética al álgebra en estudiantes de secundaria, analizan la construcción de los números negativos, e indican que los estudiantes se enfrentan con ecuaciones y problemas que tienen números negativos como coeficientes en constantes o soluciones no logran expresar y representar lo que sucede.

Aponte, Rivera (2017) identifican errores y obstáculos en el aprendizaje del número entero desde la aplicación de un objeto virtual de aprendizaje a estudiantes de grado octavo en Colombia.

Las investigaciones sobre obstáculos, errores y dificultades encontradas se han aplicado con estudiantes de educación básica y media, pero no en educación superior. Pareciera que estos se superan con el paso a la educación superior, pero la experiencia parece indicar que no es así. Los aprendizajes sobre números enteros y negativos en la escuela llegan a la educación superior, particularmente a la formación de profesores. Como se ha indicado, una fuente de errores, obstáculos y dificultades lo constituye la polisemia del signo “-”, lo que sugiere la siguiente pregunta de investigación.

Pregunta de investigación

¿Cuáles errores, dificultades y obstáculos son provocados por la polisemia del signo “-” en álgebra de los números enteros en la formación inicial de profesores de matemáticas?

1.2 Objetivos

Para dar respuesta a la anterior pregunta de investigación, se proponen los siguientes objetivos.

Objetivo General:

- Caracterizar errores, dificultades y obstáculos provocados por la polisemia del signo “-” en la resignificación del álgebra de los números enteros de estudiantes para profesor en la resolución de problemas por demostrar y en tareas de lectura e interpretación de expresiones algebraicas.

Objetivos específicos:

- Reconocer errores, dificultades y obstáculos documentados en literatura especializada provocados por la polisemia del signo “-”.

- Identificar obstáculos, errores y dificultades asociadas a la polisemia del signo “-” en estudiantes para profesor de matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Clasificar los obstáculos, errores y dificultades asociadas a la polisemia del signo “-” en la resolución de problemas por demostrar y en tareas de lectura e interpretación de expresiones algebraicas.

1.3 Justificación

El propósito de esta investigación recae en la importancia dentro de la comunidad de aprendizaje enfocada a la enseñanza de las ciencias exactas, fundamentalmente las matemáticas, a partir de nuestra experiencia y al momento de iniciar el trabajo de grado, se evidencia la problemática del número natural al número entero. Sin embargo, en nuestra búsqueda de documentos, nos damos cuenta de que en la actualidad carecen de documentación respecto a la negatividad, número entero, entre otros. Es por ello que nace la idea de realizar un trabajo de grado que aporte a su vez a la comunidad LEBEM-LEMA, ya que también se presenta esta problemática.

Las investigaciones que fundamentan el siguiente documento parten de la teoría de Quiroz Betancur (2018). En su tesis respecto al surgimiento de la negatividad desde la antigüedad. En este estudio documental de tratados de matemáticas antiguas concluyen, entre otras cosas que, el lenguaje natural del que emerge el lenguaje matemático ha permitido el nacimiento de la negatividad en matemáticas, hasta que, en la segunda mitad del siglo XIX, con el surgimiento del álgebra abstracta se da cabida a los números enteros con concepto matemático, en la parte de la enseñanza Vílchez, Rico y Ruiz (2017) realizan un estudio exploratorio, cualitativo y descriptivo llevado a cabo con estudiantes de 2° de ESO de un Instituto de Educación Secundaria de la ciudad de Granada. En este estudio se aplica un cuestionario semántico con respuestas abiertas, el cual busca el análisis del contenido de las respuestas dadas por los estudiantes respecto a las concepciones relativas a los números positivos y negativos.

Respecto a la categoría obstáculos, dificultades y errores Aponte, Rivera (2017) indican que el número entero representa una gran dificultad en la mayoría de los estudiantes, a su vez, esto provoca algunos errores y obstáculos en el aprendizaje del número entero. Diseñaron y aplicaron un objeto virtual de aprendizaje (OVA) donde se realizan ciertas actividades para superar las dificultades errores y obstáculos que se pueden presentar en la enseñanza de los números enteros.

Con base a lo anterior y a la necesitan que emerge de los procesos que realizan los estudiantes, y a partir de ello, los obstáculos, errores y dificultades que de allí resultan, se desarrollará un trabajo el cual permita evidenciar esos elementos y conceptualizarlos. Además de que es importante que se realicen este tipo estudios más prácticos y epistemológicos respecto a la naturaleza del número entero y su relación al contexto, ya que si no se enseña desde su origen; en la educación media, esta problemática se puede extender hasta la educación superior. Del mismo modo y a través la práctica docente se deben planear nuevas estrategias de aprendizaje en el aula para enseñar el álgebra de los números enteros para una mejor comprensión y evitar que se sigan generando problemáticas.

2 MARCO TEÓRICO

Las referencias que se presentan a continuación están divididas en tres partes. En primer lugar, se dará a conocer la historia y evolución de los números enteros partiendo desde la idea de negatividad hasta su formalización. En segundo lugar, se muestran los significados de los conceptos de números positivos y negativos, haciendo énfasis en los significados de número entero asociados a una fenomenología y a sus diferentes representaciones. En tercer lugar, se exponen las diferentes interpretaciones del signo "-" y se ponen en manifiesto algunas propuestas de enseñanza de los números enteros, modelos y su desarrollo. Por último, se conceptualizan los términos obstáculo, error y dificultad y se particularizan a aquellos asociados a la comprensión de los números enteros.

2.1 Referente histórico de los números enteros

En esta sección se presentan nociones respecto a los números enteros negativos desarrollados en la cultura de India, China y Grecia, con el fin de presentar una introducción de los números enteros. El primer caso está asociado a la cultura india debido a que Brahmagupta y otros matemáticos idearon una forma de comprender los números negativos; luego se encuentra el segundo caso el cual está asociado a la cultura China y su proceso en el concepto de la negatividad, En el tercer caso se explica la cultura Griega visto desde la retórica. Por último, se expone el caso del continente europeo donde se encuentra la incorporación de los conceptos de números negativos.

2.1.1 Interpretaciones de los números negativos: Fortunas y deudas en el caso de la India

Según Thapar (2001) citado en Quiroz (2018) mencionan que, en el inicio, India estaba constituida por el sistema del Feudalismo como organización social conformada por: el rey, los caballeros, la nobleza, la iglesia y por último los vasallos. Estas relaciones de poder se forjaron a partir del siglo VII haciendo que los pobladores en general tuviesen la necesidad de conocimientos matemáticos enfocados en la comercialización.

En la India, Brahmagupta citado en Quiroz (2018) es conocido como uno de los primeros matemáticos en utilizar cantidades negativas para la representación de deudas y así generar condiciones para operar estas cantidades. Este matemático desarrolló sus teorías sobre la geometría, aritmética y el álgebra, donde uno de sus contenidos de mayor importancia está dedicado al álgebra y presenta reglas para realizar operaciones en números negativos, positivos y cero.

Brahmagupta, citado en Quiroz (2018) se presenta unas reglas para operar las cantidades de la siguiente manera:

- La suma de dos pertenencias es una pertenencia.
- La suma de dos deudas es una deuda.
- La suma del cero y una deuda es una deuda.
- La suma de una pertenencia y el cero es una pertenencia,
- El producto de dos pertenencias o dos deudas es una pertenencia,
- El resultado del producto de una pertenencia por una deuda representa una pérdida (esta regla se aplicaba también para la división)
- El cuadrado de una pertenencia o una deuda es una pertenencia.
- La pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una deuda
- La raíz de una pérdida no existe, ya que tal no puede ser un cuadrado.

Estas reglas permitieron describir en lenguaje natural la relación de números enteros negativos con asuntos comerciales. Por ejemplo: *Una deuda representa una pérdida, la suma de dos deudas es una deuda*. Esto es la suma de dos números negativos es un número negativo.

Por otro lado, los hindúes concibieron los números enteros negativos de manera empírica. Como ya se mencionó anteriormente, esta noción está relacionada con el comercio y su sistema social (Como las deudas y las ganancias).

Finalmente, en el contexto de la India Brahmagupta fue el único que introdujo reglas para su comprensión de los números enteros como se explicaron anteriormente, se especula que fue necesario poseer otros conocimientos matemáticos para así comprender mejor los números enteros negativos en esta civilización. A continuación, se hace referencia al tratamiento de los números negativos o cantidades negativas en la cultura china

2.1.2 Cultura China: Varillas negras

La civilización China se destacó por sus grandes aportes a las matemáticas como: demostraciones, cálculo de aproximaciones a π, resolución de ecuaciones, la noción de negatividad, entre otros. Boyer (1968) citado en Quiroz (2018) indica que la idea de números negativos no causa dificultad para la cultura china, debido a que ellos calculaban con dos conjuntos de barras: El primer conjunto de color rojo para calcular los números positivos y el segundo conjunto de color negro para calcular los números negativos. (p. 223)

Esta representación con conjuntos de barras o varillas fue un método para simbolizar la numeración posicional implementada y utilizada por los administradores, quienes llevaban siempre su colección de varillas de bambú, de marfil entre otros, las cuales le permitían ejecutar los cálculos. Sin embargo, existían formas diferentes de representar los números negativos y positivos: una es la forma convencional representada por colores y la otra tradicional en la que se añadía una diagonal a todos los números negativos.

<table>
<tr><th colspan="2">Forma convencional</th></tr>
<tr><th>Números positivos</th><th>Números negativos</th></tr>
<tr><td>1) | 2) || 3) ||| 4) |||| 5) |||||</td><td>- 1) | - 2) || - 3) ||| - 4) |||| - 5) |||||</td></tr>
<tr><th colspan="2">Forma tradicional</th></tr>
<tr><th>Números positivos</th><th>Números negativos</th></tr>
<tr><td>1) | 2) || 3) ||| 4) |||| 5) |||||</td><td>- 1) |\ - 2) ||\ - 3) |||\ - 4) ||||\ - 5) |||||\</td></tr>
</table>

Ilustración 1 Representación números positivos y negativos en la cultura china de forma convencional y tradicional.

Fuente: Quiroz, L (2018)

.En la cultura china se encontró un método llamado "Fui Zhang" donde se presenta un sistema de numeración chino en el que se expresan de manera vertical y horizontal para calcular el sistema decimal a través de palillos rectos del mismo tamaño en una superficie de la siguiente manera:

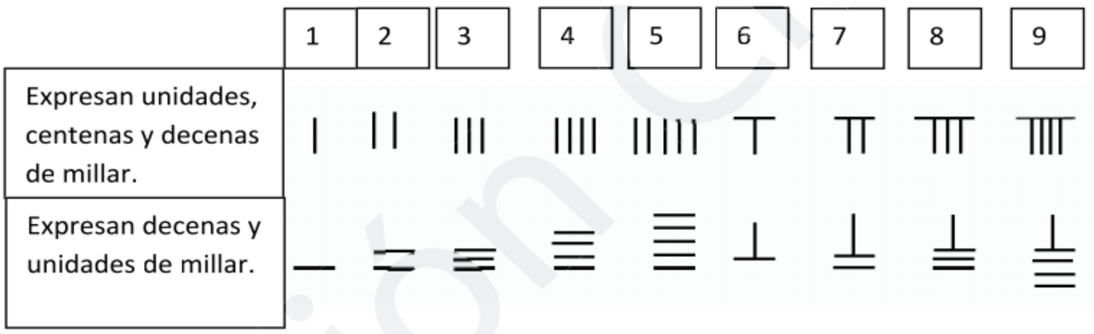


Ilustración 2 Representación de unidades, decenas y centenas en la cultura china.

Fuente: Gallardo A (2010)

Teniendo en cuenta la ilustración 2, se observa que en la primera fila se encuentran las unidades decenas y centenas de manera vertical y en la segunda fila se expresan las unidades de mil de manera horizontal como forma de representación. Es importante mencionar que en este método no se tenía en cuenta el valor 0, por ende, fue reemplazado por un espacio vacío como se muestra el siguiente ejemplo:

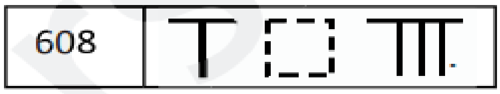


Ilustración 3 Ejemplo de representación del número cero en la cultura china.

Fuente: Gallardo, Basurto (2010)

El espacio entre el 6 y 8 equivale a un “vacío”, correspondiente a una posible representación del cero.

Por otro lado, existe otro método denominado “Fang Cheng” el cuál describe la representación de cálculos por tabulación para la resolución de problemas como un ajuste entre columnas para realizar las operaciones dependiendo el problema a trabajar. Este ajuste se ordena de derecha a izquierda y de arriba a abajo. Con el fin de facilitar las operaciones entre los símbolos numéricos.

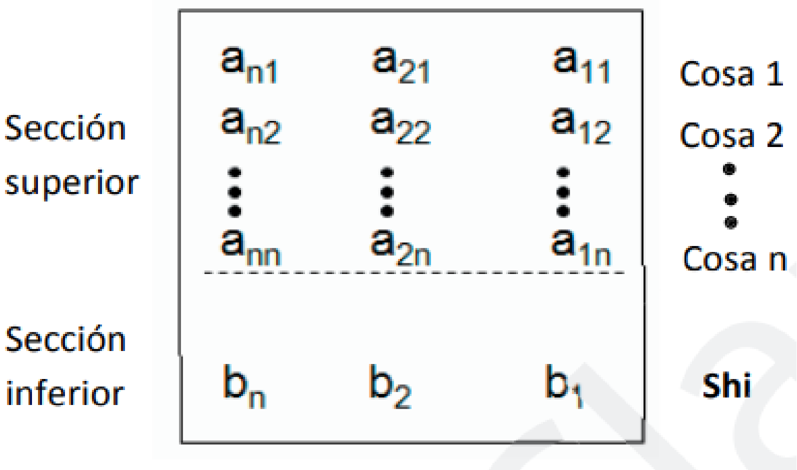


Ilustración 4 Ajuste de los números entre columnas.

Fuente: Gallardo, Basurto (2010)

En cada columna se presenta de manera implícita la función del signo igual, ya que como se mencionó anteriormente estos símbolos numéricos se operan entre sí. Para el desarrollo de este método se da por medio de la eliminación sucesiva de números por medio de sustracciones entre las diferentes columnas.

El método tiene como propósito principal realizar sustracciones repetidamente los números de una columna de los números de otra columna con el fin de cancelar el número de la posición superior. Es decir, obtener ceros en las posiciones superiores a una diagonal del ajuste numérico. Con lo anterior, la adición y la sustracción de esos números que ocupan las correspondientes posiciones en diferentes columnas existen dos reglas:

1) Regla de sustracción “Cuando los nombres son el mismo efectuar la sustracción, Cuando los nombres son diferentes efectuar la suma”.

2) Regla de Adición: *“*Cuando los nombres son diferentes efectuar la sustracción; cuando los nombres son el mismo, efectuar la suma”

Por último los números “barra” se vinculan en la literatura de educación matemática como herramienta para la enseñanza de los números enteros, ya que inicialmente se representaban las cantidades positivas y negativas con colores, o un número positivo, negativo o nulo recibía otra denominación y en ciertos casos planteaban algunas reglas para operar las cantidades.Con esto se finaliza el apartado de los números negativos en la civilización china y se procede a describir el surgimiento de los números negativos positivos en Grecia.

2.1.3 Números negativos y positivos en Grecia

El conocimiento brindado por esta cultura radica sobre ideas de astronomía, física, medicina, política, geometría y aritmética. El conocimiento matemático fue uno de los más estudiados por esta cultura, centrando su atención en la rama de la geometría. A lo largo de la historia se han reconocido ilustres matemáticos, pero el objetivo de este proyecto se centra en el la historia y evolución de los números enteros negativos y se centra la atención en Diofanto y Parménides.

Diofanto de Alejandría fue uno de los matemáticos más importantes de Grecia en el Siglo III por sus contribuciones a la resolución de problemas asociados a ecuaciones, sistemas de ecuaciones y álgebra. Cabe recalcar que el tratamiento de los números negativos se aprecia en la resolución de ecuaciones, como en el siguiente ejemplo: en la ecuación $4x + 20 = 4$ se obtiene un resultado negativo.

$$4x + 20 = 4$$

$$4x = 4 - 20$$

$$4x = -16$$

$$x = -\frac{16}{4}$$

$$x = -4$$

Ahora bien, Díaz (2015) citado en Quiroz (2018) menciona que Diofanto argumentó *"sustracción por sustracción da como resultado una adición."* El argumento anterior se presenta como una idea intuitiva. Esto no quiere decir que Diofanto aceptara la idea de números negativos, dado que la regla de los signos interviene en el procedimiento expuesto como algo transitorio, y su propósito es llegar a un resultado "aceptable", no podía ser otro que un número positivo.

Con esto se puede argumentar que en Grecia no aceptaban los números enteros negativos como respuesta a problemas algebraicos. Sin embargo, Lizcano (1993) citado en Quiroz (2018) presenta una versión sobre la concepción de negatividad vista desde la oposición ser/no ser desarrollada por uno de los filósofos más destacados de la época, es decir, esta noción de negatividad surge desde una forma no matemática, esta noción está asociada al filósofo

Parménides, quien a partir de la oposición anterior (ser/no ser) constituye el modo de pensar griego.

Parménides, citado por Lizcano, (1993) desde su filosofía expuso que desde las creencias y el determinismo entre el ser y el no ser, dicho de otro modo, desde una versión numéricos, si los números enteros positivos presenta ese camino de fe y fiar, lo demás (números enteros negativos) no existe, no puede ser, ni se podría pensar.

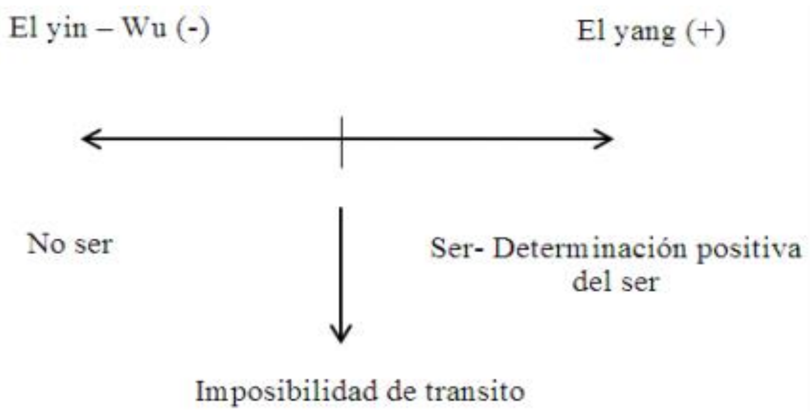


Ilustración 5 Representación de los números enteros en China y Grecia.

Fuente: Quiroz (2018)

De esta manera la cultura griega elimina todo aquello que se sume al lado opuesto derecho de la barra, es decir todo lo que no está en el lado positivo. A su vez, se genera el rechazo de los números negativos. Con esto se finaliza el apartado histórico del surgimiento de la negatividad en India, China y Grecia. Y se continúa con la historia de la negatividad en Europa.

2.1.4 Europa entre los siglos XVI y XVIII

Los números negativos aparecieron en Europa debido a Fibonacci, quién en el siglo XIII, abordaba un problema financiero el cual lo obligó a que la solución a este fuera negativa. Sin embargo, rechazó esta concepción negativa.

Los números enteros negativos fueron utilizados en varios procedimientos algebraicos sin tener la concepción de número, sino como cantidades que daban una solución válida. Se utilizaban para dar solución a algunas ecuaciones, pero estos números no eran considerados como solución. En este periodo de tiempo, se evidencia que no era posible concebir las cantidades negativas, por lo que los denominaban como números inexistentes o falsos, de tal modo que no era posible encontrar cantidades inferiores al número cero. A continuación, se expone un caso más concreto en Europa entre los siglos XVIII & XIX donde la negatividad era concebida y representada a través de fenómenos físicos y situaciones contables.

2.1.5 Europa entre los siglos XVIII & XIX (Caso de España)

(Rico, Mazz, 2007) realizan una revisión de textos escolares españoles en este periodo y encuentran que los números negativos eran representados en fenómenos físicos, situaciones contables, situaciones temporales o cronológicas, y contextos matemáticos.

- Los fenómenos físicos localizados corresponden a desplazamientos, deformaciones, fuerzas resultantes, temperaturas y capacidades.
- Los fenómenos contables mostraban ejemplos de deuda.
- Los fenómenos temporales, al igual que en el caso de la temperatura, permiten fijar un punto de referencia, a partir del cual los avances son positivos y los retrocesos son negativos.
- Los fenómenos matemáticos se ponen en juego la estructura algebraica que procede de la ecuación $a + x = b$, y se obtienen las implicaciones de dar valor numérico a su solución en el caso en que $b < a$.

En Europa surgieron un par de años para que se aceptara la negatividad, sin embargo, fueron representados en los contextos como los fenómenos mencionados anteriormente por ende desde esta época los autores plantean introducción de los números negativos de diversas formas.

2.2 Significados de los conceptos de números positivos y negativos

Lizcano (1993) citado en Vilchez (2017). Menciona que una idea intuitiva de los números enteros genera dificultades en el aprendizaje, por lo cual se requiere una serie de estrategias para su enseñanza. Aun cuando los estudiantes hayan sido instruidos sobre números negativos, esto no garantiza que los defina, los representen y los usen de manera coherente, que los entiendan y utilicen. En pocas palabras, la instrucción no garantiza un aprendizaje significativo o conceptual.

Con la enseñanza tradicional de los números enteros es esperables la aparición de obstáculos, junto a otros que son propios de la evolución del objeto mismo; esto además de los errores y las dificultades en tareas poco rutinarias. No obstante, estos obstáculos, errores y dificultades son susceptibles de enfrentarse y tratarse para superarse, aunque tal actividad, propia de la resignificación del conocimiento matemático escolar, no se logra con facilidad. De tal manera se busca dar significados a los números que sean apropiados para la conceptualización de los números enteros.

Los conceptos matemáticos escolares se caracterizan por su gran variedad de significados, ya sea por complejidad matemática o por la diversidad de comprensiones que logran los estudiantes en su paso por la escuela y la vida diaria.

La génesis y desarrollo de lo que aprende y entiende un estudiante no se limita a lo que transmite el profesor ni tampoco a los contenidos de los libros de texto; trasfondo hay un trabajo de reflexión personal, la incorporación de un lenguaje específico, la adaptación e integración de nuevos conocimientos y esto relacionarlos con los ya adquiridos. El estudiante incorpora sus propias apreciaciones y aporta nuevos significados.

2.2.1 Significados que adquieren los estudiantes sobre un objeto matemático

En este apartado se pone en manifiesto la preocupación de determinar qué y qué tipo de significados son entendidos y utilizados por los estudiantes cuando tienen que implementar conceptos matemáticos en situaciones inusuales. específicamente, al significado del concepto de matemáticas conocido por los estudiantes, el concepto de números enteros en este caso; no es de interés determinar el desempeño de este concepto si no resaltar que para que los estudiantes aumenten sus significados es necesarios dotarlos de instrucciones previas donde estas instrucciones se articulen con los nuevos conceptos tanto de modo individual como grupal, estos nuevos significados vienen dotados de nuevos lenguajes, nuevas maneras de describirlos, de referirlos, de desarrollarlos, etc. Con lo anterior se da una breve conceptualización del término “significado y se pone en evidencia las concepciones que emergen al momento que los estudiantes comprenden el concepto de números positivos y negativos. se considera que el significado de un concepto matemático se constituye desde tres componentes tomado de Miguel Vílchez Marín (2017):

- ***Referencia:*** consiste en la estructura formal en que el concepto se ubica, sus elementos, las relaciones y propiedades, las cuales permiten valorar la veracidad o falsedad de aquellos enunciados.
- ***Los sistemas de representación:*** refiere a los aspectos sintácticos determinado por signos, formas y reglas usuales de expresión y transformación de las representaciones.
- ***Sentidos y modos de uso:*** consisten en los elementos semánticos, dados por el contexto que emplean, las situaciones en las que aparecen, los fenómenos que están en su origen y sus aplicaciones.

Con lo anterior se establece el proceso que establecen los estudiantes como base para las posibles interpretaciones que logran construir desde su proceso escolar. Dicho esto, se procede a identificar los significados que aparece en el número entero.

2.2.2 Significados del número entero:

Para este apartado Maz y Rico (2005) presentan una categorización acerca de los fenómenos y los tipos de sistemas de representación utilizados para presentar los números negativos en libros de texto de matemáticas publicados en España. Estos autores justifican la introducción de los números negativos desde diversas perspectivas, que van desde la interpretación de situaciones concretas tales como desplazamientos, hasta la ampliación formal de la sustracción, pasando por interpretaciones operativas y explicaciones retóricas propias de la aritmética. Las situaciones que utilizan para ejemplificar y caracterizar las cantidades negativas se encuentran en cuatro grupos:

- Fenómenos Físicos: Recurren con frecuencia a fenómenos que se dan en la naturaleza y son explicados mediante leyes físicas. Estas situaciones están asociadas a desplazamientos, deformaciones, fuerzas, capacidad o temperaturas.
- Situaciones contables: Estas situaciones están relacionadas con el manejo de capitales mediante la relación de debe-haber o de deudas y ganancias, esto permite ilustrar cantidades negativas desde la idea “una cantidad menor que la nada”.
- Situaciones temporales o cronológicas: Se refieren a la comparación de un periodo o época a una fecha determinada.
- Fenómenos o contextos matemáticos: Recurre a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos de esta categoría se presentan cinco de ellos: i*) comparaciones de orden. ii) operaciones aritméticas. iii) operaciones algebraicas. iv) secuencias numéricas. v) posiciones o desplazamientos geométricos*

Por otro lado, Gallardo y otros (2010) citados en Vilchez organizan contextos y modos de uso que se atribuyen a los números negativos.

- Número sustractivo**:** la noción de número se subordina a la de la magnitud. En una resta de cantidades $a - b$, siempre b será menor que a donde a, b son números naturales, es decir que el signo menos solo tiene un carácter binario a nivel de la operación sustracción.
- Número signado**:** Número natural al que se le designa con un signo más o menos. Surge así la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- Número Relativo: Se concibe la idea de opuestas, en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.
- Número aislado: Se acepta un número negativo como resultado de una operación o solución de un problema o ecuación.

Teniendo en cuenta lo anterior, también existen sistemas de representación de los números enteros, dado que los conceptos se muestran mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituyen una representación del concepto Castro y Castro (1997) citado en Mazz y Rico (2007) sus representaciones son:

- Verbal: son todas aquellas expresiones o términos que refieren a alguna modalidad de número entero. Los dos términos principales utilizados para comunicar acerca de los números enteros de positivos y negativos. Este modo de representación recurre a dar explicaciones sobre los números negativos mediante descripciones verbales con una alta carga retórica.
- Numérica: se utilizan combinaciones de números y signos para dar idea y explicar las cantidades negativas. Todos los autores utilizan notaciones numéricas para presentarlas.

- Simbólica: son aquellas notaciones, signos y reglas que hacen referencia a los números enteros (+ o -).
- Gráfica: son aquellas representaciones que denote como un esquema o dibujo los números enteros, como lo es en el caso de la recta numérica. los ejes cartesianos (coordenadas enteras), el color (números rojos para resaltar los números negativos).
- Algebraica: estas representaciones combinan los números con los signos y las letras; se utilizan las ecuaciones como recurso para mostrar cómo surgen y se operan las cantidades negativas.

En los primeros años de escolaridad, se les enseña a los estudiantes la noción de suma, la cual está relacionada con la acción de añadir y se representa con el signo +, del mismo modo se enseña la noción de resta la acción de quitar y se representa con el signo -. La acción de quitar, la operación de restar y el signo - toman una profunda vinculación entre sí, debido a que el estudiante al escuchar una situación problema asociado a alguna de las representaciones directamente lo relacionan con la acción de restar o quitar. Esto genera una posible interpretación "general" de este signo, por ende, en el siguiente apartado se pretenden trabajar y exponer todas las posibles interpretaciones de "-".

2.3 Interpretaciones del signo "-"

Este apartado presenta algunas nociones respecto a las interpretaciones que se le asignan al signo "-".

2.3.1 Primera interpretación: Negatividad

En el surgimiento de la negatividad matemática, los números negativos eran representados con colores distintos, como la acción de "deber" o en otros casos no eran concebidos ni se tenía como una posibilidad de los números. Años más adelante se establece que este mismo signo pasa a ser una denotación de los números negativos. Estas interpretaciones se exponen en el apartado histórico en las culturas China, Gracia E India

2.3.2 Segunda interpretación: Operación "resta"

El aprendizaje de la suma y la resta comienza en la etapa infantil de una manera informal a través de situaciones cotidianas, a lo largo de la escolaridad y a medida que se introducen los sistemas numéricos, en ocasiones los niños se apoyan en las "palabras clave" como (más, menos, añadir, quitar…) y con esas palabras resuelven el problema con una suma o una resta.

Ejemplo:

Miguel tenía 8 caramelos, se comió algunos y ahora tiene 3, ¿cuántos se comió?

$$8 - 3 = 5$$

Con frecuencia, los estudiantes que cometen errores al efectuar operaciones simples con restas. Las respuestas erróneas son debidas a malas aplicaciones de las reglas, a veces los alumnos inventan reglas falsas que las pueden llevar a resultados correctos o incorrectos, según sean los signos de los números, es por ello, que les resulta complicado modificarlas generando una serie de dificultades:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos:

- Hay una nueva notación para los números positivos: +2 = 2.
- El signo menos tiene dos significados distintos, como signo del número y como operación de resta.
- Aparece una mayor complejidad sintáctica: paréntesis y signos.
- Se dan nuevas reglas para las operaciones.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:

- Los números negativos tienen menos usos que los números positivos. Por ejemplo, con los números negativos no podemos establecer el cardinal de un conjunto.
- Se identifican las operaciones de suma y resta.
- Hay un cambio en el efecto de las operaciones: sumar (multiplicar) no siempre es aumentar, restar (dividir) no siempre es disminuir.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza:

- La enseñanza basada sólo en las reglas que rigen la operatoria puede causar problemas a muchos estudiantes que necesitan situaciones concretas en las que apoyarse.
- No se conecta con el conocimiento previo de los estudiantes sobre los números positivos.

Este concepto de resta como "quitar" se sigue utilizando en los problemas con números negativos, como se evidencia en la siguiente situación:

$$(-3) - (-4) = 1$$

En el ejemplo anterior el estudiante ignora el signo "-" que acompaña al número cuatro y solo presente el signo que antecede el termino (-4) el cual hace referencia a la operación resta, pese a que la resta está implícita el estudiante no interpreta el trasfondo de la situación, sino que solo tiene presente el signo menos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta el caso más extenso en donde los números están acompañados por el signo "-".

Según Cid (2002) citado en Pujol (2011) “Los estudiantes al enfrentarse $(+70) - (-10) = +70$, su resultado es positivo, debido a que si se tienen 70 pesetas y se perdona la deuda de 10 pesetas se obtiene como resultado las mismas 70 pesetas”, debido a que el estudiante asocia “-” con la acción de deber (operación resta). Este razonamiento es válido desde un punto de vista de sentido común, porque los estudiantes gran parte de su escolaridad están familiarizados con este tipo de ejercicios.

2.3.3 Tercera interpretación: Número entero

Para entender la interpretación del número entero González., M (1995) expresa que el punto central de los números se encuentra en el número cero, debido a que posee una la propiedad de “extensible en el sentido positivo y en el sentido negativo, puesto que se considera que el cero tiene dos caras, una estará denotada por β, que es la base de la extensión hacia la parte positiva de 0 y la segunda denotada por α, que marca la posibilidad de disminución de 0.”

Cid (2002) citado en Pujol (2011) menciona que para llegar a la construcción del número entero es necesario hacer uso del método deductivo para así relacionar a los estudiantes con el contexto, ya que no conciben la idea de que antes del número 0 existen más números y que estos sean negativos. Teniendo en cuenta lo anterior se presenta el siguiente ejemplo (el cual está asociado a una situación de ascensores) que muestra en su medida el razonamiento del método.

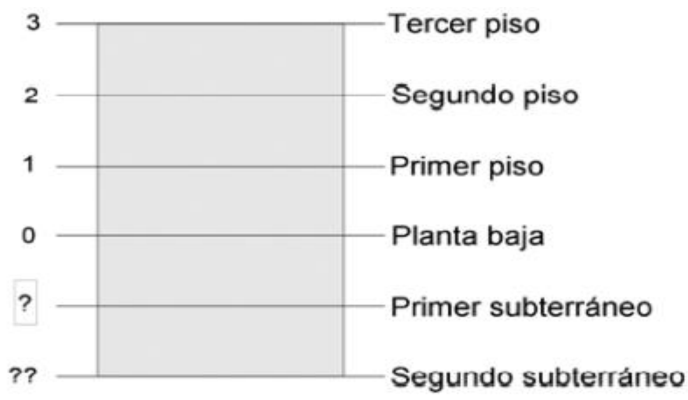


Ilustración 6 Una introducción híbrida de los números enteros

Fuente: Pujol, Matos, Piquet (2011)

Si se encuentra un estudiante en el segundo piso y desea subir un piso más, se encontrará en el tercer piso, esta afirmación se representa como: 2+1=3.

Otro ejemplo es que el estudiante se encuentre ubicado en el primer subterráneo y desea subir un piso más, lo anterior se puede expresar por $? + 1 = 0$.

Con la expresión los estudiantes no se encuentran familiarizados porque no existe ningún número que al ser operado con otro dé como resultado el cero o la nada, ya que su aprendizaje está ligado a los números naturales. En los ejemplos mostrados anteriormente, se evidencia una relación entre los pisos, debido a que están expresados de forma ascendente, porque desde un piso determinado se suma o se agregan determinados pisos que se desean subir.

Este suceso se interpreta como: Un número al ser sumado, se expresa como si se estuviera restando, es decir que desde esta afirmación se da un primer acercamiento a la expresión (-1).

Si estamos en el segundo subterráneo y se desea subir tres pisos estaremos en el primer piso, lo anterior se expresa como:

$$“? + 3 = 1”$$

De la misma forma que si estamos en el primer piso y se desea bajar tres pisos más, lo anterior se expresa como:

$$1 - 3 \ = ?$$

Con las expresiones anteriores se interpretan que los estudiantes al analizar estos ejercicios encuentran el valor conocido:

$$? + 3 = 1$$

$$? + 3 - 3 = 1 - 3$$

$$? = 1 - 3$$

$$? = \ -2$$

En el ejemplo mostrado, se tiene en cuenta que, si un número al cumplir con estas relaciones pareciera que se suma, en realidad se están restando dos. Con los ejemplos presentados anteriormente y el análisis realizado concluimos la tercera interpretación que se da en la escuela del signo "-" y seguimos con una última interpretación.

2.3.4 Cuarta interpretación: Opuesto aditivo

El opuesto de un número es el número que al ser sumado con primero da como resultado el módulo de la suma (el 0 en este caso). Cada número entero tiene su opuesto. El opuesto de un número tiene el mismo valor absoluto, pero signo contrario. El opuesto del número 0 es 0.

Según Cid (2002) citado en Pujol (2011) "El estudio de la epistemología de los números negativos hace un énfasis en el seno del álgebra, ya que su aceptación se dificultó por la matemática clásica de interpretar objetos algebraicos como objetos de la aritmética elemental" Seguido de esto se encuentran operaciones como " $-5 \ + \ 7$ "o "$-5 - 7$", donde su respuesta se obtiene al realizar la operación resta "-". Ahora si se considera "-5", el signo "-" puede interpretarse como el opuesto aditivo de 5 o como el negativo de 5. Lo cierto es que en el caso de $-(-5)$, el primer signo "-" representa el opuesto aditivo de -5, y no se puede expresar como el negativo del negativo, sino como el opuesto aditivo de un número negativo.

La introducción abordada desde un punto de vista hibrido, nos permite visualizar los resultados obtenido a través del ejemplo del ascensor, debido a que si tenemos en cuenta los valores presentados en la recta numérica y en los demás modelos, podemos aceptar fácilmente que el efecto que posee la resta en los numero naturales satisface el modelo del ascensor, por lo que si se tiene " $-5-7=-12$" el camino lógico indica que podemos aplicar la ley de signos, por medio de los cuales los signos iguales se suman, así como los signos diferentes se restan, del modo que el estudiante aplica la misma suma, pero al final sabemos que el signo "-" representa la acción de restar

Finalmente, la polisemia del signo "-" muestra los diferentes significados de este signo, debido a que como se evidenció en este apartado, fue posible interpretarlo a partir de un modelo híbrido, sus posibles interpretaciones desde un método descriptivo representaciones como la resta, la ley de signos, y el inverso de un número positivo. Sin embargo, a través de los años varios autores describen una idea o propuesta de enseñanza para trabajar los números enteros. Uno de ellos se presenta a continuación.

2.4 Propuestas de enseñanza de los números enteros

Según Arcavi y Bruckheimer (1981) citados en Cid (2003) realizan una clasificación de algunas propuestas de introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela. Estas clasificaciones son:

Introducción memorística: Se basa en presentar las reglas de las operaciones con números enteros con el fin de memorizarlas.

Introducción inductiva: Se basa en el descubrimiento y generalización de regularidades, por ejemplo:

Tabla 1.Ejemplo de una introducción inductiva

5 - 3 = 2	4 x 3 = 12
5 - 2 = 3	4 x 2 = 8
5 - 1 = 4	4 x 1 = 4
5 - 0 = 5	4 x 0 = 0

Fuente: Elaboración Propia

Sabemos que en la parte izquierda aumenta de a 1, y en la parte derecha aumenta de a 4.

Del mismo modo se introducen los números negativos de la siguiente manera:

Tabla 2. Ejemplo de los números negativos

$5 - (-1) = 6$	$4\,x\,(-1) = -4$
$5 - (-2) = 7$	$4\,x\,(-2) = -8$
$5 - (-3) = 8$	$4\,x\,(-3) = -12$

Fuente: Elaboración Propia

Teniendo en cuenta la tabla 2, nuevamente en la parte izquierda aumenta de a 1, en la parte derecha aumenta de a 4, y la regularidad permite inducir unas reglas o comportamiento del signo de los factores en la multiplicación de dos números enteros.

Introducción Deductiva: Se basa en añadir a los números naturales los simétricos de la suma, definiendo sus operaciones entre los números, como por ejemplo las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de inverso aditivo, etc.

Introducción constructiva: Consiste en construir los números enteros como un conjunto de pares ordenados con una relación de equivalencia.

Los elementos mencionados anteriormente estaban enfocados a una breve introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela. Por otro lado, existen algunas propuestas de enseñanza de los números negativos que me permiten relacionar este número con el contexto actual, como se presenta a continuación.

Cid (2003) estableció modelos de neutralización o modelos de desplazamiento de la enseñanza de los números enteros.

En los modelos de neutralización se consideran cantidades de magnitud. Cuando dos cantidades son iguales en el valor absoluto, pero de sentidos opuestos, es aquí donde se neutralizan entre sí. Algunos ejemplos de modelos de neutralización son: Las deudas, acciones de añadir, quitar, reunir o separar.

Un modelo de desplazamiento de los números enteros indica desplazamientos o posiciones de uno a otro lado de la posición origen. Algunos ejemplos de modelos de desplazamiento podemos son: el termómetro, el ascensor, las escaleras que se suben y bajan, las posiciones y desplazamientos sobre la recta real. Llegados a este punto procedemos a dar por concluido el apartado de propuestas y métodos de enseñanza en estudiantes de números enteros.

2.5 Obstáculos, errores y dificultades.

En el proceso de construcción de un conocimiento matemático surgen sistemáticamente errores los cuales son un mecanismo de aprendizaje basado en el ensayo y la repetición, por lo que para el docente debido a que influyen en el aprendizaje de los estudiantes para la adquisición de los diferentes contenidos matemáticos; es tambien importante mencionar que hacemos referencia a los posibles errores así como dificultades, las cuales son el resultado de las dificultades de los estudiantes al enseñarles contenido relacionado con las matemáticas

Existen investigaciones que indagan por estas dificultades, obstáculos y errores de manera general, para así reconocer problemáticas que se están cometiendo y al mismo tiempo a realizar acciones que corrijan este proceso.

Socas Robayna (1997) en su tesis doctoral cuenta de manera general sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas.

2.5.1 Dificultad:

Siguiendo los enunciados del autor, la palabra dificultad hace referencia al problema que surge cuando una persona intenta lograr algo, por lo tanto, una dificultad se entiende como un

inconveniente o barrera para superar o conseguir un determinado objetivo. Las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar desde distintas perspectivas. Estas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: (Socas Robayna, 1997)

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

2.5.2 Obstáculo:

Es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, es decir un conocimiento en construcción, que es válido en un cierto momento o circunstancia, pero inválido en otras. Ahora bien, un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar, son errores que aparecen repetitivamente, son reconocibles, se percibe cuando van a parecer y persisten.

2.5.3 Error:

Los errores a menudo son el resultado de concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentados en las matemáticas. Se pueden presentar cuando el estudiante utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el docente.

Teniendo en cuenta, las definiciones de dificultad, obstáculo y error se procede a realizar un esquema que permite reconocer las diferencias entre ellas.

Tabla 3 Diferencia entre dificultad, error y obstáculo

DIFICULTAD	ERROR	OBSTÁCULO
Puede ocurrir que el alumno no tenga los conocimientos precisos necesarios para poder aprender el nuevo contenido y, por lo tanto, la distancia entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. (Villalobos, 2011)	En ocasiones el error no se produce por falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente.	Las dificultades se presentan como puerta de oportunidad para reflexionar sobre las metas alcanzadas y decidir que pasos tomar para la adquisición de nuevo conocimiento.
Una fuente de dificultades de	Socas (1997) señala que el	Es aquel conocimiento que ha sido

aprendizaje de los estudiantes de primaria hay que buscarlas en el hecho de que algunos alumnos aún no han superado la etapa preoperatoria y realizan operaciones concretas, o bien que aquellos que todavía están en la etapa de las operaciones Concretas realicen operaciones formales.	error es la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente una consecuencia de una falta específica de conocimiento.	en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas específicos y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el estudiante se enfrenta con nuevos problemas.
Las dificultades se presentan por los siguientes motivos Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos matemáticos.	Algunas falencias que se presentan son los siguientes puntos a tener en cuenta Datos mal utilizados: Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno; esto puede presentarse porque añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario o se hace una lectura incorrecta de la situación. Interpretación incorrecta del lenguaje: Son errores se deben a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico distinto.	Algunos obstáculos están asociados hacia: La tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas. La tendencia a generalizar, esto puede ocultar la particularidad de la situación. El lenguaje natural. Esto relacionándose a la propuesta del Autor Guy Brousseau quien desde la didáctica los clasifica de origen ontogénico, o psicogénico, de origen didáctico y de origen epistemológico.

	Inferencias no válidas lógicamente: Estos errores se deben a fallas en el razonamiento y no se debe al contenido específico. Falta de verificación en la solución. Se presenta cuando se realiza todo el procedimiento completo, excepto el resultado final del problema planteado. Errores técnicos: En esta categoría se incluyen los errores de cálculo, al tomar de una tabla en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos. (Villalobos, 2011)	

Fuente: Elaboración Propia

Sin embargo, permite que se logre realizar un acercamiento sobre la polisemia del signo “-”, ya que desde la antigüedad se implementó el término de negatividad, y fue evolucionando en el transcurso de los años. Con estas interpretaciones se logran identificar dificultades, errores y obstáculos que se presenta a lo largo del aprendizaje de los números enteros dentro de la enseñanza de ciencias exactas a nivel de secundaria y media académica

3 MARCO METODOLÓGICO

Este trabajo de grado es un estudio en el paradigma de investigación cualitativo, ya que la pregunta de investigación sugiere un objeto que se observa y describe desde la realidad que vive un grupo de personas durante su aprendizaje y no tiene el objetivo de medir los fenómenos estudiados con el fin de ser analizados; en este caso, reconocer los tipos y características de las dificultades, errores y obstáculos en los estudiantes para profesor de matemáticas durante la resignificación del signo “-”.

A su vez, el trabajo se desarrolla desde el enfoque descriptivo porque el interés principal es rastrear, sin juzgar, las diversas descripciones que subyacen a las acciones, las interacciones y la realidad, de modo que se profundiza en la comprensión del objeto de estudio.

Por otro lado, el trabajo es de tipo exploratorio, ya que estos se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes. En la revisión de literatura realizado se identifican trabajos sobre el aprendizaje o la enseñanza del álgebra en estudiantes de educación básica y en algunos casos la universitaria, pero ninguno aborda la polisemia de los símbolos algebraicos, especialmente el de “-” en estudiantes para profesor de matemáticas.

3.1 Población

La población de estudio son los estudiantes de tercer semestre del espacio de formación Problemas de la Divisibilidad del proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del periodo académico 2021-I en modalidad virtual, pues allí uno de sus objetivos es *generar diversas experiencias que potencien y posibiliten un tratamiento estructural al concepto de entero, ubicándolo como objeto matemático que posee propiedades específicas.* Así, la resignificación del papel de las propiedades de las operaciones en el estudio del conjunto de los números enteros, así como el tratamiento simbólico del álgebra de ese conjunto numérico, se hace imperativo. Siendo conscientes de que los estudiantes asistentes al espacio de formación ya tiene una formación previa en simbolismo algebraico y el estudio de los números enteros, son una población en la que la resignificación de estos asuntos aparece de manera natural para avanzar en la problematización y estudio de los problemas de la división en Z; más concretamente, la resignificación signo “-”, propio del álgebra de Z, impone un ambiente de resignificación que deja expuestos errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes para profesor al tratar este signo.

3.2 Fuentes de información

La información recolectada sobre la resignificación, obstáculos errores y dificultades de los estudiantes se obtiene de grabaciones de Google Meet de cuatro sesiones de la clase del espacio de formación de problemas de la divisibilidad. Se analizaron las producciones grupales de tres equipos de estudiantes, que consistieron de demostraciones y lectura o escritura de expresiones algebraicas en el conjunto de los números enteros.

3.3 Técnicas de recolección de información

Recolectar los datos implica elaborar un plan detallado de procedimientos que nos conduzcan a reunir datos con un propósito específico**.** Para esto se presentan las siguientes características:

- ¿Cuáles son las fuentes de las que se obtendrán los datos? La información será proporcionada por estudiantes y profesores en el que se encuentran grabaciones de clases, producciones de los estudiantes a los problemas y tareas propuestas por el profesor en trabajos y parciales.
- ¿En dónde se localizan las fuentes? En los estudiantes de tercer semestre que pertenecen al espacio de formación Problemas de la Divisibilidad del proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- ¿De qué forma vamos a prepararlos para que puedan analizarse y respondamos al planteamiento del problema? Se emplea una técnica de categorización, la cual busca reducir la información para expresarla y describirla de manera conceptual, mediante un estudio de caso a partir de la información de las grabaciones de trabajo colaborativo de algunos grupos de estudiantes, se desea realizar un análisis profundo y detallado de los errores, obstáculos y dificultades que emergen durante el trabajo colaborativo.

3.4 Fases de investigación

Este trabajo se desarrolla en cuatro fases. La primera está enfocada al diseño del marco teórico, en donde se buscan documentos relacionados a la historia de la negatividad, polisemia del signo "-", significado de los números enteros, enseñanza y aprendizaje de los números enteros y finalmente errores, obstáculos y dificultades. En la segunda fase se realiza un diseño metodológico para resolver la pregunta de investigación, destacando fuentes de información, técnicas, métodos e instrumentos de recolección de información, categorías de análisis previas y método de análisis de la información. En la tercera fase, se realiza un análisis de la información recolectada, específicamente grabaciones de clase, trabajos y parciales de los estudiantes del espacio de formación de Problemas de la divisibilidad. La cuarta fase está enfocada a la obtención de resultados y conclusión de la investigación, así como de la finalización del informe de trabajo de grado.

4 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Se analizaron, entre otras cosas, cuatro sesiones de clase. La **primera sesión** de clase tiene por objetivo identificar las diferentes interpretaciones que dan los estudiantes al signo "-" en el álgebra y la aritmética de los números enteros. Por esto, el profesor inicia con la pregunta:

En la expresión -2 ¿Qué viene a su cabeza cuando la ve?¿En qué situaciones aparece? ¿Qué interpretación le da al signo "-"?

Los estudiantes exponen sus respuestas en el chat de la clase y es una de las principales fuentes de información. Luego, le profesor busca que los estudiantes identifiquen similitudes y diferencias en las respuestas, a la vez que los estudiantes amplíen verbalmente sus respuestas. En la segunda parte de la sesión se realiza el mismo tratamiento, pero con la siguiente pregunta:

En la expresión -x ¿Qué viene a su cabeza cuando la ve? ¿En qué situaciones aparece? ¿Qué interpretación le da al signo "–"?

El tratamiento de las respuestas a esta pregunta sigue el mismo esquema de la anterior.

En la **segunda sesión** de clase se realiza un análisis de las interpretaciones de los estudiantes, pero en esta ocasión el docente discute la validez de las interpretaciones expresadas por los estudiantes. En la discusión, vuelven a aparecer ideas, afirmaciones o respuestas a preguntas que exponen obstáculos, errores y dificultades por la polisemia de signo "-", por lo que constituyen una fuerte de abundante información.

En la **tercera sesión** de clase se retoman las nociones encontradas en las sesiones de clase anteriores y se enfatiza en dos conceptos asociados a la interpretación del signo "-": opuesto aditivo y negatividad y se realiza una formalización de estas dos interpretaciones, identificando y asignado las propiedades algebraicas de cada una.

La **cuarta sesión** de clase tiene el objetivo de formalizar la interpretación de "-" como resta, así como estudiar y aplicar sus propiedades en la demostración de proposiciones sobre las operaciones en Z.

Como segundo lugar del análisis se tuvieron en cuenta trabajos grupales conformados por tres estudiantes del espacio de formación, el cual consistía en demostrar la validez de un conjunto de identidades algebraicas de Z. En el desarrollo de los trabajos los estudiantes resolvían los ejercicios con ayuda de las propiedades del álgebra de los números enteros que fueron socializadas en el transcurso de las sesiones de clase.

Por último, se analizaron unas sesiones de tutorías desarrolladas en clase con el objetivo de que el grupo presentaran el trabajo elaborado e identificar la forma en que los estudiantes explicaba su trabajo a través del lenguaje natural. Al momento de realizar un proceso de reflexión para analizar la información presentada respecto a los errores, obstáculos y dificultades identificadas en las sesiones de clase, se procede a organizar la información según la interpretación del signo "-" identificada en las respuestas de los estudiantes.

El análisis de estas cuatro sesiones de clase permitió identificar obstáculos, errores y dificultades que presentan los estudiantes al tratar el signo "-" en el álgebra de Z en tareas de demostración de propiedades y tratamiento algebraico de expresiones algebraicas. Los resultados se organizan y presentan según la interpretación de "-" y luego se relacionan entre sí. En el siguiente esquema se presentan los obstáculos, errores y dificultades identificados, y en esa misma estructura se conceptualizan y evidencian en lo que sigue de esta sección.

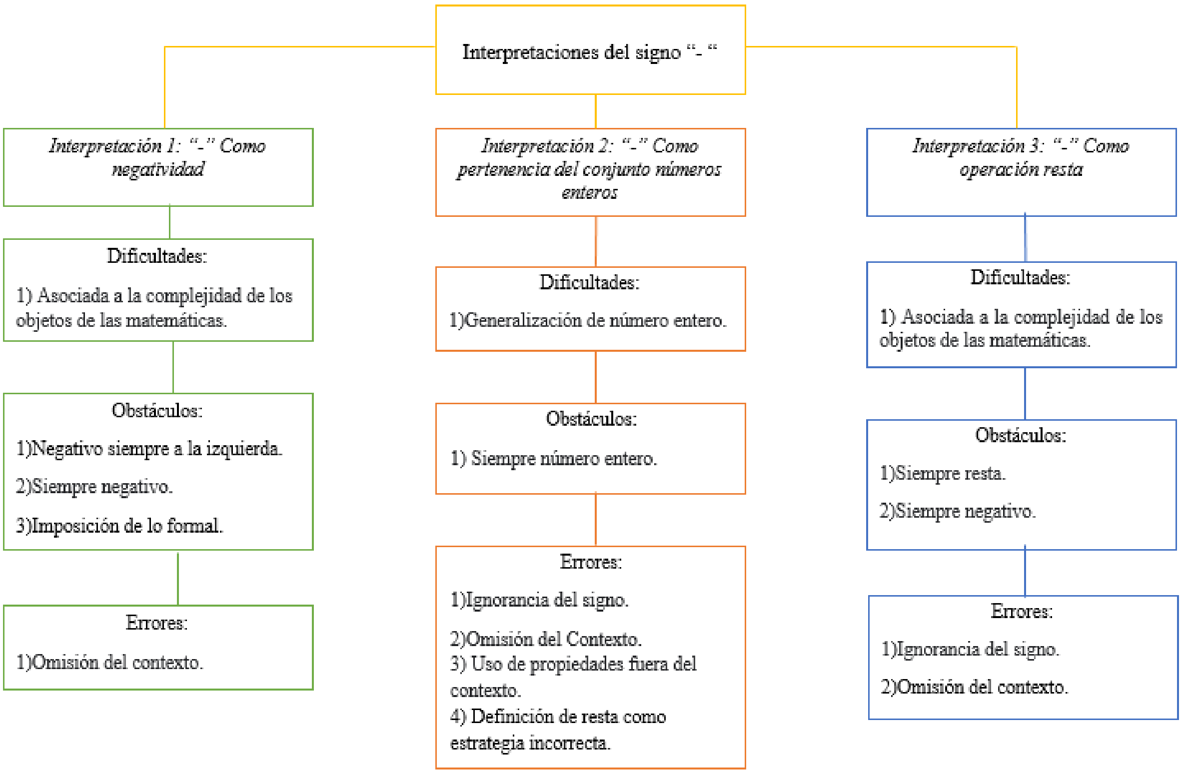


Ilustración 7 mapa de categorías de resultados
Elaboración propia

El grafico anterior es el mapa de categorías que se encontraran a lo largo de la lectura del análisis de las diferentes evidencias, el cual está expone los obstáculos, errores y dificultades identificadas por cada interpretación encontrada sobre el signo "-".

En una primera rama se encuentra la interpretación del signo "-" como negatividad en ella se describe una dificultad, tres obstáculos y un error.

En la segunda rama encontramos la interpretación del signo "-" como condición de pertenencia al conjunto de los números enteros, aquí se describen dos dificultades, un obstáculo y cinco errores.

Y por último se encuentra la interpretación del signo "-" como operación resta en el cual emerge una dificultad, dos obstáculos y dos errores.

Las interpretaciones mencionadas anteriormente se evidencian desde diferentes fuentes analizadas: las diferentes producciones de los estudiantes y grabaciones de clase. A continuación, se encuentran cada una de las interpretaciones del cuadro, descritas detalladamente con sus respectivas dificultades, obstáculos y errores encontradas.

4.1 Primera interpretación: "-" como negatividad

Basados en el gráfico la primera interpretación consiste en relacionar el signo "-" con negatividad, es decir que se realiza la diferencia entre los números positivos y números negativos**.** Esta interpretación puede observarse en las siguientes respuestas de los estudiantes a la pregunta:

¿Qué entiende, o que se le viene a la cabeza cuando ve -2?

4.1.1 Dificultades

La primera dificultad encontrada en la interpretación de "-" como negatividad se encuentra en la siguiente interpretación:

"La expresión -2 significa con el símbolo "-" un número negativo, esto quiere decir dos negativos, pero cuando se trata de la interpretación pues cuando esta esté símbolo en la parte de la izquierda junto a un número, esto para mi significa número negativo, pero cuando el símbolo "-" está a la derecha significa resta"

En esta respuesta se aprecia que el estudiante concibe correctamente que "-" al lado izquierdo de un número positivo representa negatividad, pero considera que puesto a la derecha significa resta, sin tener en cuenta sus condiciones, propiedades, etc. El estudiante asemeja la posición del signo con una operación básica, lo cual no es válido ya que cuando se presenta la expresión 2- pierde su significado, la expresión no tiene sentido o interpretación algebraica o aritmética. Por lo anterior, se logra identificar una dificultad *asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas* donde interviene la comunicación de los objetos matemáticos principalmente de forma escrita. Esta dificultad se presenta a través de los signos matemáticos y con ayuda del lenguaje natural se intenta explicar cada interpretación o pensamiento. Hace referencia al lenguaje de los signos ya que son fuente de confusión en los estudiantes debido a sus diversos significados, a sus reglas formales en las distintas operaciones. Esta dificultad recae en la respuesta del estudiante debido a que está ignorando las características principales para que el signo "-" actúe como resta; como operación binaria.

A su vez se identifica esta misma dificultad en otra interpretación:

"-2 un número negativo por el signo menos (-), número que se puede hacer participé de una resta"

En esta respuesta se aprecia que el estudiante concibe por separado el signo "-" y el número 2, pues sustenta que cuando ve el signo "-" acompañando una expresión de una vez lo asemeja a la negatividad, y está la ve asociada a la recta numérica. En esta acotación se identifica el uso de la palabra "menos", que en el contexto de la resta es válida, pero inválida para esta interpretación, y sigue generalizando que todo número acompañado de "-" refiere a menos, donde esta palabra tiene otro significado. Es válido decir "menos dos" en el contexto de la resta y en el de la negatividad sería el negativo de dos.

Esta dificultad *se asocia a la complejidad de los objetos matemáticos* debido a que esta dificultad está relacionada a la comprensión y comunicación de estos objetos de forma escrita y se realiza a través de los signos matemáticos. Es decir que se genera un conflicto ya que se rompe una regla gramatical en donde no siempre el signo "-" me asocia negatividad.

4.1.2 Obstáculos

Para esta primera interpretación se encuentra el obstáculo ***"negativo siempre a la izquierda".*** En el cual se evidencian las siguientes interpretaciones:

"Para mí en el conjunto Z, -2 describe un número que por la rayita interpreto que este número es negativo, y el valor absoluto me indica la posición del número".

Puede apreciarse que el estudiante asigna a la "-" el número negativo, pero además asocia la negatividad con la posición del número en la recta numérica, pues como tradicionalmente se le presenta los números negativos van a un lado respecto del cero y los números positivos al lado opuesto de ello. Esta interpretación es válida siempre y cuando se emplee la recta numérica como representación de los números enteros, y es claro que la dirección de la recta ha de ser siempre la misma y en no sería aceptado un cambio en la ubicación de los números. Esto genera un obstáculo denominado ***“negativos siempre a la izquierda”*** pues se asume que en la recta numérica los números positivos están a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. Sin embargo, cuando se le presentan los números negativos desde un plano cartesiano ya no es válido por qué existen números negativos que están ordenados verticalmente. Tampoco se aceptaría que, en una vista de la recta desde otro punto, los números negativos se ubicaran a la derecha.

Este obstáculo se identifica en la respuesta de otro estudiante, quien afirma

“Cuando veo esta expresión me imagino un plano cartesiano e interpretó el -2 como el opuesto de 2, es decir, el negativo de 2.”

En esta afirmación se evidencia que el estudiante interpreta el signo “-” como algo opuesto donde asigna al signo “-” el número negativo, pero además asocia la negatividad con la posición del número en la recta numérica, pues como tradicionalmente se le presenta los números negativos van a un lado respecto del cero y los números positivos al lado opuesto de ello. Esta afirmación es válida siempre y cuando se emplee la recta numérica como representación de los números enteros. Esto genera un obstáculo denominado *“negativo siempre a la izquierda”* pues se asume que en la recta numérica los números positivos están a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. Sin embargo, cuando se le presentan los números negativos desde un plano cartesiano ya no es válido por qué existen números negativos que están ordenados verticalmente.

El segundo obstáculo, basados en la ilustración 7 pertenece a ***“siempre negativo”***. En este se evidencian las siguientes interpretaciones:

“Al ver esta expresión, la rayita la interpreto como un negativo, en este caso hace que el dos se convierta en un número negativo”

Esta interpretación de “-” se asocia a un obstáculo denominado *“-” siempre negativo*, el cual nace cuando el estudiante generaliza el uso de “-” como negatividad para todos los casos. Si bien “-” como negativo es válida cuando el número que acompaña es un entero positivo como el en caso de$-2, -3, . -4$, no en todos los casos esta interpretación es válida; En la expresión $-(-2), -(-3)$. la primera “ $-$ ” no representa negatividad sino por el contrario hace que el número sea positivo.

Otra interpretación asociada a este mismo obstáculo recae cuando los estudiantes mencionan:

En la expresión -x ¿Qué viene a su cabeza cuando la ve? ¿En qué situaciones aparece? ¿Qué interpretación le da al signo “-”

A lo que un estudiante responde “*x puede ser un número cualquiera, pero con la "rayita" ya lo interpreto como un número cualquiera NEGATIVO”*

Esta interpretación de “-” se asocia a un obstáculo denominado *“-” siempre negativo*. El cual nace cuando el estudiante generaliza para todos los casos el uso de “-” como negatividad. Si bien “-” como negativo es válida cuando el número que acompaña es un Z positivo como el en caso de-2, -3, -4, no en todos los casos esta interpretación es válida; En la expresión -(-2), -(-3). la primera “-” no representa negatividad, sino por el contrario hace que el número sea positivo.

Por otro lado, se encuentra:

“como el menos dos no tenía ningún contexto lo asocie a la negatividad”

Esta interpretación de “-” se asocia a un obstáculo denominado *“-” siempre negativo*. El cual nace cuando el estudiante generaliza para todos los casos el uso de “-” como negatividad. A su vez el estudiante está ignorando las características principales de la operación resta. Y asocia cualquier número que esté acompañado de “-” como **“menos”.**

Por último, se describe el tercer obstáculo relacionado a ***“imposición de lo formal”*** en las siguientes interpretaciones:

“Cuando veo la expresión -x lo interpreto como un número negativo desconocido. O, en el plano cartesiano como uno de sus ejes (los ejes horizontales se representan con la x y con la -x, pero desde el cero hacia la derecha está la x y los números positivos y desde el cero hacia la izquierda está la -x y los números negativos).”

Se observa que hay una falsa generalización de la interpretación de “-” como negativo del caso aritmético al caso algebraico, de modo que todo aquello que lleve la “-” es un indicador de negatividad. Pero además es un obstáculo i*mposición de lo formal* provocado por la generalidad que se mencionó, pues en este caso *x* es cualquier número entero y “-” puede representar -2 o -(-2). En el primer caso “-” representa negatividad, pero en el segundo no .

Otra interpretación que pertenece a este obstáculo es:

> *“La interpretación que le doy al signo es la de ser la que le asigne un valor (positivo o negativo) al término expresado, en este caso sería el negativo de x, y puede aparecer en situaciones en las que estemos operando o trabajando sobre una expresión algebraica.”*

“Por la expresión -2, entiendo que es una "transformación" realizada a una medida o punto de referencia "inicial", al signo "-", lo entiendo como un indicador de que el número que lo acompaña es un número negativo.”.

El estudiante agrega una nueva palabra la cual es asociada a una transformación; esta es entendida como el signo, también tiene una interpretación en su aplicación, ya no como una posición, sino como un movimiento respecto de una posición, de modo que, si solo hay dos sentidos desde el punto inicial, uno será positivo y el otro es negativo; es decir que el *movimiento es asociado a la transformación.*

De lo anterior se identifica que en primera instancia se identifica el signo “-” como operación resta, pero presenta confusión al relacionarlo con el contexto de la negatividad, por ende, se asocia al obstáculo *imposición de lo formal*, ya que en la enseñanza tradicional de los números enteros se concibe la “-” como negatividad y esta permite clasificar los números enteros en dos conjuntos: los positivos y los negativos. Así el estudiante concibe solo una interpretación de la “-” que no siempre es válida.

4.1.3 Errores

Ahora una vez identificados los obstáculos y dificultades, se procede a identificar el error recurrente en esta interpretación, que fue denominado ***“omisión del contexto”,*** el cual ocurre y persiste cuando el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos para referirse a “-”. Este error es evidenciado en las siguientes respuestas de los estudiantes:

Cuando pienso en el signo “-”, pienso en una sustracción o resta y en los números negativos, se pueden ver en situaciones como restar 3 - 4, otra es para decir que un número es negativo por ejemplo que el número -2 es un número negativo, o para diferenciar un número positivo de un negativo. Por esto, la expresión -2 la interpreto como un número negativo.” De esto se identifica el siguiente error el cual es asociado a la *“omisión del contexto”*. El estudiante interpreta el signo “-” como un diferenciador de números positivos y negativos sin tener en cuenta las condiciones de los mismos y de la operación resta.

Otro error manifestado se evidencia en la siguiente respuesta de un estudiante:

“como el menos dos no tenía ningún contexto lo asocie a la negatividad”

Debido a la falta de contexto el estudiante asume en primera instancia este símbolo representa un número negativo, pero sin lograr dar una respuesta más detallada. Seguramente este hecho se remonta a su experiencia educativa pues a lo único que hace alusión es que hay algo que es negativo.

En lo anterior se asocia al error *"omisión del contexto"*. Este error recae cuando el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos, es decir en los casos anteriores se ha logrado evidenciar que la mayoría de los estudiantes cuando ven expresiones del tipo "-x" lo leen en primera instancia como "menos x", y lo asocian incorrectamente al contexto de la operación resta, pues la palabra "menos" hace alusión a esta operación, dejando de lado el contexto de la negatividad.

4.1.4 Obstáculos, errores y dificultades relacionados en la interpretación de "-" como negatividad.

En este apartado el objetivo es relacionar de manera general los obstáculos, errores y dificultades en la primera interpretación del signo "-" como negatividad.

Para esto, la primera relación que se encuentra aparece en la siguiente interpretación:

"Cuando veo la expresión -x lo interpreto como un número negativo desconocido. O, en el plano cartesiano como uno de sus ejes (los ejes horizontales se representan con la x y con la -x, pero desde el cero hacia la derecha está la x y los números positivos y desde el cero hacia la izquierda está la -x y los números negativos)."

Como se mencionó anteriormente, observamos que una falsa generalización de la interpretación de "-" como negativo del caso aritmético al caso algebraico, de modo que todo aquello que lleve la "-" es un indicador de negatividad. Pero además es un obstáculo i*mposición de lo formal* , pues en este caso *x* es cualquier número entero y "-" puede representar -2 o $-(-2)$. En el primer caso "-" representa negatividad, pero en el segundo no .En esta misma interpretación se encuentra un error asociado a la *"-" como punto en la recta* debido a que los estudiantes manifestaban que cualquier número acompañado por "-" está ubicado a la izquierda de 0, pero si nos vamos al plano cartesiano nos damos cuenta de que en el eje y los números negativos no están a lado izquierdo del cero sino debajo del cero.

La segunda relación identificada se describe en la siguiente interpretación:

"-2 un número negativo por el signo menos (-), número que se puede hacer participé de una resta"

En primer lugar, como se mencionó en el primer apartado de dificultades, la interpretación pertenece a la *dificultad de complejidad de los objetos matemáticos* debido a que esta dificultad está relacionada a la comprensión y comunicación de estos objetos de forma escrita y se realiza a través de los signos matemáticos. Es decir que se genera un conflicto, ya que se rompe una regla gramatical en donde no siempre el signo "-" me asocia negatividad. A su vez se genera un error asociado a la *"omisión del contexto"*, pues este error recae cuando el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos, en este caso se evidencia que los estudiantes cuando ven expresiones del tipo "-2" lo leen en primera instancia como "menos 2" donde hacen caso omiso del contexto de la operación resta, pues la palabra "menos" hace alusión a esta operación, dejando de lado el contexto de la negatividad.

También se genera un obstáculo es de tipo *imposición de lo formal como obstáculo*, ya que en tanto en la enseñanza tradicional de los números enteros se concibe la "-" **como negatividad** y esta permite clasificar los números enteros en dos conjuntos: Los positivos y los negativos de modo que "-" es el descriptor del negativo y pocas veces se ha reflexionado sobre otras interpretaciones que pueda traer la "-" en el mismo contexto formal. Así, el estudiante queda con solo una interpretación de la "-" que no siempre es válida.

4.2 Segunda interpretación: "-" como pertenencia del conjunto números enteros

Para esta segunda interpretación el estudiante tiende a relacionar el signo "-" con la pertenencia a un conjunto numérico, siendo más explícitos al conjunto de los números enteros, desde esta analogía se evidencian obstáculos, dificultades y errores:

4.2.1 Dificultades:

Las dificultades encontradas en la segunda interpretación aparecen en la respuesta:

> *lo primero que se me viene a la cabeza fue que el conjunto Z está formado por dos subgrupos positivos y negativos y que la manera de identificar los negativos de los positivos es con esta rayita*

La dificultad es ***"generalización de número entero"*** en esta interpretación recae en la falta de conceptos en la vida escolar, ya que no se socializa este tipo de información cuando se introduce un conjunto numérico. En la escuela se parte desde la idea de que la recta numérica tiene números antes del cero a los cuales los asocian a números negativos, pero no se enfatiza en su necesidad o surgimiento de este conjunto numérico, es desde este momento el estudiante va generando "vacíos" de información convirtiendo esto en una dificultad y posiblemente en un obstáculo porque asocia todo número que esté acompañado de "-" a un número entero, aun cuando puede ser un elemento de cualquier conjunto numérico, el cual debería indicarse en la expresión; no obstante, no es común en el álgebra escolar indicar el conjunto al cual pertenecen los elementos que se indican en la expresión algebraica.

4.2.2 Obstáculos:

El obstáculo encontrado *"-" "siempre número entero"* de la segunda interpretación se evidencia en la siguiente respuesta

> *Aquella condición a un número (negativo, opuesto) que lo puede hacer pertenecer a Z y que este número es un elemento incógnito (cualquiera) en Z, valga la redundancia (caso -x)*

Puede apreciarse que el estudiante interpreta un número negativo como el opuesto, y al ser número negativo lo asocia directamente al conjunto de los Z, ya que estos están compuestos por números positivos, negativos y cero.

Sin embargo, se presenta un obstáculo de tipo *"-" siempre número entero* debido a que cuando el estudiante afirma que cualquier número que esté acompañado de "-" pertenece al conjunto de los números enteros, lo cual genera que la afirmación sea falsa puesto a que hay números racionales e irracionales que están acompañados del signo "-". Este obstáculo se evidencia con frecuencia dado a que los estudiantes al observar el signo "-" acompañado de cualquier número lo asemejan a la pertenencia del conjunto de los números enteros, ya que desde el proceso escolar se enfatiza que el reconocimiento de estos números es mediante el signo "-".

4.2.3 Errores:

El primer error se encuentra en la *"ignorancia del signo"*, y se describe en la siguiente interpretación:

"Cuando observo el -2, se me viene a la cabeza los enteros negativos, es decir, la extensión de los naturales, este signo "-" convierte al número en un negativo. Puesto sin un contexto me representa la situación de pérdida de cantidades enteras. Situación: al perder o tener una deuda de cantidades enteras como: lápices, canicas, frutas (naranja, manzana, peras). Ej. Lore me ha pagado 2 manzanas, pero me debía 8 manzanas, por lo tanto, me debe 6 manzanas (tienen que ser verde, si no cuenta)"

En esta interpretación aparece el error frecuente en la interpretación de números enteros y es la relacionada a la *ignorancia del signo* esto refiere a que el estudiante olvida por completo el signo y comprende como entero todo aquel número que solo esté acompañado del signo "-".
En esta misma interpretación se presentan los trabajos realizados por los estudiantes.
El segundo error aparece cuando hay *"omisión del Contexto"*: Este error recae cuando el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos. La siguiente imagen fue tomada de una **tutoría,** donde los estudiantes **leer** la expresión $aa + ab + (-ab) + (-(bb))$ dicen *"a por a, más ab, más menos, factor de ab* […]*"* en el cual identificamos el *error "omisión del contexto"*, en tanto verbalizan de manera incorrecta y desconocen el concepto de resta y de opuesto. Por eso siempre lo asocian a "menos".
El tercer error consiste en *"uso de propiedades fuera del contexto"*: Este error aparece en la siguiente imagen , ya que al momento de realizar demostraciones algebraicas con los números

enteros, los estudiantes implementan la propiedad asociativa para eliminar algunos signos presentes en la demostración, con el fin de reducir la expresión y llegar a la hipótesis planteada, omitiendo que esta propiedad es utilizada para relacionar tres términos en parejas distintas y en la evidencia solo se observa dos términos a y b . Este error se denomina como *"uso de propiedades fuera de un contexto"*. Este tipo de error se presenta cuando el estudiante omite el contexto de la demostración y busca reducir expresiones por medio de las diferentes propiedades de los números enteros de manera errores. En la siguiente imagen también recaen en el tercer error de *"uso de propiedades fuera de un contexto"* para lograr continuar con su demostración y argumentación; pues en este caso, los estudiantes la omiten implementando las propiedades de la resta debido a que solo centran su atención en la operación suma de tal manera que su argumentación resulta siendo insuficiente debido al contexto que se está aplicando.

Trabajos

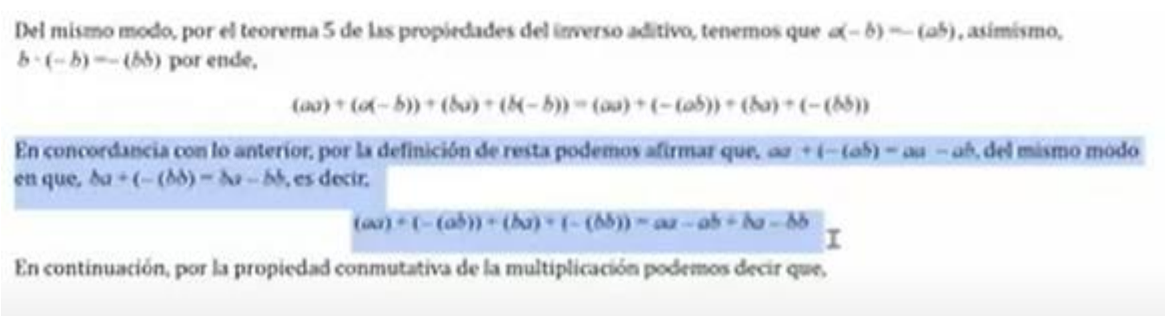
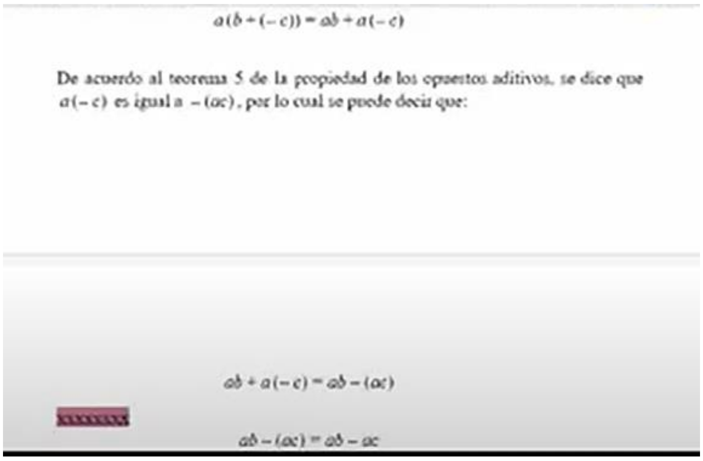

$$aa - ab + ba - bb = aa - ab + ab - bb$$

Ahora, por la propiedad asociativa de la suma tenemos que,

$$aa - ab + ab - bb = aa + (ab - ab) - bb$$

Después, por la propiedad de existencia del inverso aditivo tenemos que, $ab + (-ab) = 0$, o sea,

Continuamos con el cuarto error *"definición de resta"*. A continuación, se evidencia el error *"definición de resta como estrategia incorrecta"*, el cual se presenta cuando el estudiante sigue la práctica escolar de reducir los opuestos a resta para eliminarlos y mejor tratarlos como resta. No obstante, la expresión a demostrar no tiene restas, sino que todas son sumas de expresiones u opuestos de expresiones. En este caso, este error se aprecia en la siguiente imagen, en la que todas las expresiones con opuestos los reduce a restas, que, si bien no es un error algebraico, como debe llevar la expresión solo a sumas nuevamente, y hacer algunas conmutaciones de sumandos, no los puede hacer pues la resta no es conmutativa y requiere volver a ponerlos como suma.

Trabajos
 Del mismo modo, por el teorema 5 de las propiedades del inverso aditivo, tenemos que $a(-b)=-(ab)$, asimismo, $b\cdot(-b)=-(bb)$ por ende, $(aa)+(a(-b))+(ba)+(b(-b))=(aa)+(-(ab))+(ba)+(-(bb))$ En concordancia con lo anterior, por la definición de resta podemos afirmar que, $aa+(-(ab)=aa-ab$, del mismo modo en que, $ba+(-(bb)=ba-bb$, es decir, $(aa)+(-(ab))+(ba)+(-(bb))=aa-ab+ba-bb$ En continuación, por la propiedad conmutativa de la multiplicación podemos decir que,  $a(b+(-c))=ab+a(-c)$ De acuerdo al teorema 5 de la propiedad de los opuestos aditivos, se dice que $a(-c)$ es igual a $-(ac)$, por lo cual se puede decir que: $ab+a(-c)=ab-(ac)$ xxxxxxxx $ab-(ac)=ab-ac$

4.2.4 Obstáculos, errores y dificultades relacionados en la interpretación de "-" como pertenencia del conjunto números enteros

Las relaciones encontradas en la segunda interpretación del signo "-" como pertenencia del conjunto de los números aparece en la interpretación:

Aquella condición a un número (negativo, opuesto) que lo puede hacer pertenecer a Z y que este número es un elemento incógnito (cualquiera) en Z, valga la redundancia (caso -x)

En primer, se presenta un obstáculo de tipo *"-" siempre número entero* debido a que cuando el estudiante afirma que cualquier número que esté acompañado de "-" pertenece al conjunto de los números enteros, lo cual genera que la afirmación sea falsa puesto a que hay números racionales e irracionales que están acompañados del signo "-". A su vez, este tipo de obstáculo da paso a cometer un error frecuente en la interpretación de números enteros y es la relacionada a la *ignorancia del signo* esto refiere a que el estudiante olvida por completo el signo y comprende como número **entero** todo aquel número que solo esté acompañado del signo “-”

La segunda relación encontrada aparece en el siguiente trabajo elaborado por los estudiantes.

Trabajos
En continuación decimos que, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, tenemos que $(a+(-b))a+(a+(-b))b=a(a+(-b))+b(a+(-b))$ Nuevamente, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, nos permitirá realizar la “distribución” del factor multiplicador entre los sumandos, de la siguiente manera $a(a+(-b))+b(a+(-b))=(aa)+(a(-b))+(ba)+(b(-b))$ Del mismo modo, por el teorema 5 de las propiedades del inverso aditivo, tenemos que $a(-b)=-(ab)$, asimismo, $b\cdot(-b)=-(bb)$ por ende, $(aa)+(a(-b))+(ba)+(b(-b))=(aa)+(-(ab))+(ba)+(-(bb))$ Ahora, por la propiedad asociativa de la multiplicación tenemos que $(a\cdot a)+(-(ab))+(b\cdot a)+(-(bb))=(aa)+(-(ab))+(ba)+(-(bb))$ En concordancia con lo anterior, por la definición de resta podemos afirmar que, $aa+(-(ab)=aa-ab$, del mismo modo en que, $ba+(-(bb)=ba-bb$, es decir,

Como se mencionó anteriormente, se presenta un error de tipo *“uso de propiedades fuera de un contexto”.* Debido a que omite el contexto de la demostración y busca reducir expresiones por medio de las diferentes propiedades de los números enteros de manera errores, Por ejemplo: *“usamos la propiedad asociativa para eliminar los puntos (multiplicación),algunos paréntesis y llegar a la siguiente conjetura”* Por lo anterior, se logra identificar la dificultad ya mencionada anteriormente es la *asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas* la cual hace referencia al lenguaje de los signos ya que son fuente de confusión en los estudiantes debido a sus diversos significados, a sus reglas formales en las distintas operaciones.

4.3 Tercera interpretación: "-" como operación resta

Esta interpretación consiste en relacionar la "-" como ejecutor de la operación resta, es decir que asocian el signo "-" a la operación resta sin tener en cuenta la naturaleza de la misma. Para esta interpretación se tomaron en cuenta los ejercicios de lectura en clase.

4.3.1 Dificultades

La primera dificultad emerge de una intervención en clase, en un ejercicio de lectura. Donde un estudiante menciona que:

"Sí está a la derecha esta interpretación se basa en la operación resta"

En esta respuesta se aprecia que el estudiante concibe correctamente que "-" al lado izquierdo de un número positivo representa negatividad, pero considera que puesto a la derecha significa resta, sin tener en cuenta sus condiciones, propiedades, etc. El estudiante asemeja la posición del signo con una operación básica, siguiendo con este punto de vista no es válido ya que cuando se presenta la expresión 2- pierde su significado; la expresión no tiene sentido o interpretación algebraica o aritmética. Esta dificultad *asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas* se presenta a través de los signos matemáticos y con ayuda del lenguaje natural se intenta explicar cada interpretación o pensamiento. Hace referencia al lenguaje de los signos, ya que son fuente de confusión en los estudiantes debido a sus diversos significados, a sus reglas formales en las distintas operaciones.

4.3.2 Obstáculos

El primer obstáculo de esta interpretación es "siempre *resta*". La primera respuesta para esta interpretación es*:*

"Lo interpreto como sustraer 2 unidades a cualquier número".

Esta interpretación del signo “-” se asocia al obstáculo denominado *“-” siempre resta* debido a que interpreta la expresión -2 como la sustracción de algo, cabe recalcar que para ejecutar una resta es necesario tener dos elementos ya que es una operación binaria.

Este mismo obstáculo se evidencia en la siguiente intervención:

“cuando el símbolo "-" está a la derecha significa resta”

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante omite las condiciones básicas para que esta interpretación sea válida; dicho de otro modo, se necesita de dos elementos puesto que en una resta de cantidades $a - b$, siempre b será menor que a donde a, b son números naturales, es decir que el signo “menos” “-” solo tiene un carácter de operación binaria a nivel de la operación.

El segundo obstáculo encontrado en la tercera interpretación se denomina *“siempre negativo*” y se identifica en la siguiente intervención:

“el símbolo¨-¨ tiene como significado según lo visto para expresar menos”

Inicialmente el estudiante tiende a resignificar el signo “-” y asociar cualquier expresión que posea este signo a la palabra “menos”. Dado que desde su proceso educativo se enseña que la resta es asociada a palabras como *“tenía” “quitar” “menos” “sustraendo” “deuda”* entre otros. Por este aprendizaje los estudiantes asocian “-” con la operación resta obviando elementos y características básica de la operación.

Es aquí donde aparece un obstáculo denominado *“siempre negativo*”. Puesto que el estudiante generaliza el uso de “-” como negatividad para todos los casos. Si bien “-” como negativo es válida cuando el número que acompaña es un entero positivo como el en caso de$-2, -3, . -4$, no en todos los casos esta interpretación es válida; En la expresión $-(-2), -(-3).$ la primera “ $-$ ” no representa negatividad sino por el contrario hace que el número sea positivo.

4.3.3 Errores

En el primer error aparece *"ignorar el signo"*, pues como se mencionó en apartados anteriores el signo pierde su validez si se lee o se interpreta de manera errónea. Esto se evidencia en la siguiente respuesta a un ejercicio de lectura donde el docente les pedía que interpretaran las expresiones $-(-2)$

Expresión	**Interpretación en lenguaje natural**
$-(-\mathbf{2})$	Menos, Menos dos

Debido a la falta de contexto el estudiante asume en primera instancia este símbolo representa un número negativo, pero sin lograr dar una respuesta más detallada. Seguramente este hecho se remonta a su experiencia educativa pues a lo único que hace alusión es que hay algo que es negativo. Y este error consiste en *ignorancia del signo* esto refiere a que el estudiante olvida por completo el signo y comprende como entero todo aquel número que solo esté acompañado del signo "-".

El segundo error *"Omisión del contexto"* también se deriva de un ejercicio de lectura con estudiantes de las siguientes expresiones.

Expresión	**Interpretación en lenguaje natural**
$\mathbf{-2}$	Menos dos
$\mathbf{-3}$	Menos tres

El error consiste en el uso inadecuado de los símbolos y términos matemáticos, generalmente se presenta en la práctica verbal de los estudiantes ya que tienden a referir que cualquier expresión que posea el signo "-" es "menos".

Este mismo error ocurre en una intervención de otro estudiante, en el que menciona:

"Lo interpreto como un menos es decir menos 2" "me imagine una recta numérica donde menos 2 es menor que cero y a su vez está a la izquierda de la recta"

En lo anterior se asocia al error *"omisión del contexto"*. Este error recae cuando el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos, es decir en los casos anteriores se ha logrado evidenciar que la mayoría de los estudiantes cuando ven expresiones del tipo "-2" lo leen en primera instancia como "menos 2", y lo asocian incorrectamente al contexto de la operación resta, pues la palabra "menos" hace alusión a esta operación, dejando de lado el contexto de la negatividad. A su vez relaciona los números con la recta numérica, pero si nos vamos al plano cartesiano nos damos cuenta de que en el eje y los números negativos no están a lado izquierdo del cero sino debajo del cero.

Otra interpretación es cuando:

"en caso que tenga un contexto, lo interpreto como la sustracción de un número entero desconocido a otro número entero."

En esta interpretación se evidencia la persistencia del error *"omisión del contexto"* debido a que igual que en las interpretaciones anteriores el estudiante aún cae en el error de relacionar e interpretar el -2 como un número negativo ya que para ellos el signo "-" es una resta.

4.3.4 Obstáculos, errores y dificultades relacionados en la interpretación de "-" como pertenencia del conjunto números enteros.

Para esta interpretación, la primera relación encontrada fue donde los estudiantes tienden a resignificar el signo "-" y asociar cualquier expresión que posea este signo a la palabra "menos". Dado que desde su proceso educativo se enseña que la resta es asociada a palabras como "tenía", "quitar", "menos", "sustraendo", "deuda", entre otros; por este aprendizaje, los estudiantes asocian "-" con la operación resta obviando elementos y características básica de la operación. Es aquí donde aparece un obstáculo denominado *"siempre negativo*". Puesto que el estudiante generaliza el uso de “-” como negatividad para todos los casos. A su vez se relaciona con el error *“ignorar el signo”*, pues como se mencionó en apartados anteriores el signo pierde su validez si se lee o se interpreta de manera errónea

5 CONCLUSIONES

A partir de estos resultados obtenidos se identifican tres interpretaciones de "-" en los estudiantes: *"-" Como negatividad*; *"-" como condición de pertenencia al conjunto de números enteros* y *"-" como operación resta.*

Cada interpretación del signo "-" trae consigo obstáculos, errores y dificultades, en parte por no considerar el contexto de uso del signo "-" o por asumir solo una interpretación, sin conciencia de las diferentes interpretaciones que tiene.

En la interpretación de *"-" como negatividad* encontramos que los estudiantes al ver la expresión -2 se encuentran dificultades asociadas a *asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas* Esta dificultad se presenta a través de los signos matemáticos y con ayuda del lenguaje natural se intenta explicar cada interpretación o pensamiento. Hace referencia al lenguaje de los signos, ya que son fuente de confusión en los estudiantes debido a sus diversos significados, a sus reglas formales en las distintas operaciones.

En segundo lugar, obstáculos relacionados a *"negativos siempre a la izquierda"* debido a que relacionan y afirman que los números positivos están al lado derecho del cero y los negativos al otro. Sin embargo, la afirmación cambia de contexto en un plano cartesiano, puesto a que existen números positivos y negativos que no están a la derecha y a la izquierda del cero, sino arriba o abajo; además, no hay ningún error al cambiar esta posición, siempre y cuando se razone con los objetos y sus relaciones. A su vez, hablar de negativos o negatividad también genera otro obstáculo denominado *"-" siempre negativo,* puesto a que los estudiantes generalizan la idea de "-" como negatividad para todos los casos. Si bien en el caso de un número positivo acompañado de un signo esta idea es válida, pero en otro contexto como $-(-3)$ ya no es válido.

Los errores asociados a la primera interpretación son relacionados a *"omisión del contexto"*. Debido a que el error persiste en lenguaje natural al momento de leer expresiones de tipo -2

o $-x$ lo relacionan con la palabra **“menos”,** de modo que omiten la naturaleza de la operación resta, debido a que como hemos mencionado a lo largo del documento, para realizar una resta se necesitan dos elementos, a su vez existen errores en el contexto de la recta numérica debido a que los estudiantes manifestaban que cualquier elemento o número que posea en signo “-” está a la izquierda del cero.

Una de las relaciones encontradas en esta primera interpretación emerge cuando existe una falsa generalización de la interpretación de “-” como negativo del caso aritmético al caso algebraico, de modo que todo aquello que lleve la “-” es un indicador de negatividad. Pero además es un obstáculo i*mposición de lo formal* , pues en este caso *x* es cualquier número entero y “-” puede representar $-2\ o\ -(-2)$. En el primer caso “-” representa negatividad, pero en el segundo no .En esta misma interpretación se encuentra un error asociado a la *“-” como punto en la recta* debido a que los estudiantes manifestaban que cualquier número acompañado por “-” está ubicado a la izquierda de 0, pero si nos vamos al plano cartesiano nos damos cuenta de que en el eje y los números negativos no están a lado izquierdo del cero sino debajo del cero.

En la segunda interpretaciones interpretación *“-” como condición de pertenencia al conjunto de números enteros.* Evidenciamos que existen dificultades de tipo *generalización de número entero”* en esta interpretación recae en la falta de conceptos en la vida escolar, ya que no se socializa este tipo de información cuando se introduce un conjunto numérico. En la escuela se parte desde la idea de que la recta numérica tiene números antes del cero a los cuales los asocian a números negativos, pero no se enfatiza en su necesidad o surgimiento de este conjunto numérico, es desde este momento el estudiante va generando “vacíos” de información convirtiendo esto en una dificultad y posiblemente en un obstáculo porque asocia todo número que esté acompañado de “-” a un número entero.

Obstáculos de tipo *"-" siempre número entero,* ya que los estudiantes condicionan a que cualquier elemento o número que esté acompañado de "-" pertenece al conjunto de los números enteros, lo cual es falsa puesto a que existen números racionales que también están acompañados del signo "-".

Se identificaron cuatro errores en el tratamiento del signo "-": El primero *"ignorancia del signo"*, en el cual el estudiante olvida el signo "-" y comprende como entero todo aquel número que lo acompaña por este signo. En el segundo caso aparece *"omisión del Contexto"*, en el cual el estudiante hace uso de un lenguaje específico en contextos no válidos. El tercer error se manifiesta cuando hace *"uso de propiedades fuera de un contexto"* y se evidencia cuando el estudiante empieza a implementar las propiedades de las operaciones para poder simplificar expresiones, es decir aplica las propiedades con el fin de eliminar paréntesis, sin tener en cuenta que estas afectan tanto al número como al signo que lo acompaña. En el cuarto lugar está *"definición de resta como estrategia incorrecta"*. Este error se presenta cuando el estudiante es limitado frente a los argumentos se ve "obligado" a hacer omisión del uso de esta debido a que la resta carece de propiedades y se tiene a implementar las propiedades de la suma como si fuesen de la resta. Este tipo de error se presenta cuando se implementa la definición de resta para expresar sumas con los opuestos como restas. Este tipo de error es asociado más a la práctica matemática.

La interpretación *"-" como condición de pertenencia al conjunto de números enteros* emergen del obstáculo de tipo *"-" siempre número entero* debido a que cuando el estudiante afirma que cualquier número que esté acompañado de "-" pertenece al conjunto de los números enteros, lo cual genera que la afirmación sea falsa, puesto a que hay números racionales e irracionales que están acompañados del signo "-". A su vez, este tipo de obstáculo da paso a cometer un error frecuente en la interpretación de números enteros y es la relacionada a la *ignorancia del* *signo* esto refiere a que el estudiante olvida por completo el signo y comprende como número **entero** todo aquel número que solo esté acompañado del signo “-”

La dificultad *asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas* es común en las diferentes interpretaciones. Esta dificultad consiste en la intervención de la comunicación de los objetos matemáticos principalmente de forma escrita.

La mayoría de los estudiantes resignifican el signo “-” y asociar cualquier expresión que posea este signo a la palabra “menos”. Es aquí donde aparece un obstáculo denominado *“siempre negativo*”. Puesto que el estudiante generaliza el uso de “-” como negatividad para todos los casos. A su vez se relaciona con el error *“ignorar el signo”*, pues como se mencionó en apartados anteriores el signo pierde su validez si se lee o se interpreta de manera errónea. Además, obliga a expresar todo opuesto aditivo como resta, como una estrategia para eliminar esta interpretación y poderla tratar como operación, aunque el estudiante se vea obligado a caer en errores de argumentación por la falta de propiedades que cumple la resta.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aponte Bello, P. A., & Rivera Martínez, M. Á. (2017). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje*. Bogotá

Cabello, A. G., & Torres, O. (2006). *La negatividad permitida: George Peacock en la historia y en la enseñanza*. In Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Huesca, 6-9 de septiembre de 2006 (pp. 161-170). Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Castro, E. C. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del Seminario Matemático*" García de Galdeano", (25), 1-40.

Gallardo, A., & Basurto, E. (2010). *La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13(4-II), 255-268.

Hernández-Sampieri, R., & Torres, C. P. M. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4, pp. 310-386). México^ eD. F DF: McGraw-Hill Interamericana.

Iriarte, D., Jimeno, M., & Vargas, I. (1990). *Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros.* Suma, 7, 13-18.

Lizcano, E., (1993). Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y Grecia: Gedisa. MEC

Machado, A. M., & Romero, L. R. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *7*(17), 537-554.

Marín, M. V. Romero, L. R., & Hidalgo, J. F. R. (2017). *Significados de los conceptos de número positivo y de número negativo manifestados por estudiantes de secundaria obligatoria*. Education Siglo XXI, 35(1 Mar-Jun), 99-124.

Marí, J. L. G. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Pericat, A. (1994). Lizcano, E.(1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, del espacio y lo imposible en China y Grecia.* Papers. Revista de Sociología, 44, 135-137.

Pujol, R., Bibiloni Matos, L., & Deulofeu Piquet, J. (2010). *Polisemia del signo «–» en la introducción del número entero*. Didac, (56-57), 36-42.

Quiroz Betancur, L. M. (2018). *Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano*.

Socas R. M. (1997. Capitulo V. *Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Obtenido de Capitulo V. Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*.