INFORME DE LA INVESTIGACIÓN *FACTORES QUE APOYAN O LIMITAN LA AMPLIACIÓN DE UNIVERSO NUMÉRICO* EN FUTUROS PROFESORES EN LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DISTRITAL

A partir del acuerdo 038 de julio del 2015

GILBERTH MENDIETA
Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

JEFERSON DAVID HENAO BÁEZ
Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTOR:
JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C. 2022

Contenido

Dedicatoria.

A mi madre que fue la primera persona, cerca de mí, que me hizo entender que la educación nos haría libres. A Alfonso, porque, aunque no es mi padre biológico, me apoyó como a su propio hijo. A mis hermanos que fueron un apoyo emocional en cada una de las etapas de este proceso. A mi querida profesora Deissy que me enseñó el valor del estudio. A los profesores Jaime y Martha que me dieron la oportunidad de ser un investigador. Y a todas las personas que compartieron conmigo la universidad porque para mí la universidad la hacen las personas.

Gilberth Mendieta.

1. Introducción.

El grupo de investigación Matemáticas Escolares U.D-Mescud, ha investigado la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos que tienen versiones aritméticas, geométricas y algebraicas; estas investigaciones apoyan, tanto la concepción, como el desarrollo de un espacio de formación constitutivo de la malla curricular de la Licenciatura en matemáticas que se llama Transición aritmética-álgebra (Pretexto, 1996; Mescud, 2011). Al describir estas investigaciones se pone en evidencia que sus instrumentos y hallazgos han permitido al grupo adoptar una epistemología de los objetos matemáticos, pero estas teorías locales emergentes no han sido exhaustivamente contrastadas y consolidadas entre ellas. Por tanto, este informe de trabajo de grado, en modalidad investigación-innovación como co-investigadores en el grupo Mescud, muestra algunos resultados obtenidos de un análisis documental de la trayectoria de los términos “refinamiento” y “universo numérico” usados por el grupo Mescud para estudiar esquemas de los estudiantes cuando se ven enfrentados a situaciones que involucran el tratamiento con números y que son apoyados en un experimento de enseñanza (EE) en un ambiente de aprendizaje (AA) realizado en el semestre 2019-3, en donde las prácticas argumentativas y la resolución de problemas son eje central.

Palabras clave: Refinamiento, Universo numérico, Experimentos de enseñanza, Argumentación, Formación de profesores de matemáticas.

2. Objetivos de la investigación.

El presente documento muestra algunos resultados de la investigación titulada *Factores que apoyan o limitan la ampliación del universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital*, dirigida por el grupo Mescud con una metodología basada en los experimentos de enseñanza y que tiene como objetivo general:

> Caracterizar la incidencia de la gestión del debate matemático por parte del profesor de matemáticas cuando éste ocurre en un AA cuyo dispositivo didáctico es la resolución de problemas en trabajo colaborativo, dirigido a promover re-conceptualización del campo conceptual multiplicativo y, particularmente, al refinamiento de los universos numéricos de los estudiantes. (Mescud, 2019, p.11)

El abordaje de este objetivo general planteó de entrada dos problemáticas al grupo investigador. La primera, Caracterización de actividades de gestión de carácter general y específico y su incidencia en el aprendizaje de estudiantes para profesor (Romero, 2022), y la segunda, sistematizar las ideas conceptuales adquiridas por el profesor Jaime Humberto Romero Cruz, a lo largo de su carrera como investigador, en relación con el debate matemático y su incidencia en lo que él denomina el "*refinamiento del universo numérico*". Esta última problemática es la que se desarrolla en el presente informe.

2.1 Objetivos específicos de investigación para la pasantía.

Discusiones precedentes al interior del grupo Mescud enfocadas en la necesidad de disponer de una memoria histórica de algunos constructos usados en los discursos y las prácticas de los profesores-investigadores más una revisión documental preliminar evidenciaron la falta de sistematización y conceptualización en el uso del término *refinamiento del universo numérico* y la posible baja frecuencia de uso de este término y de investigación sobre este constructo en la comunidad de educadores matemáticos. La situación se problematiza y se justifica como una necesidad de indagación en el marco de la investigación en curso. En consecuencia, la pasantía de la que aquí damos cuenta asume los siguientes objetivos específicos:

1. Usar el método *Experimentos de Enseñanza* para caracterizar el diseño del Ambiente de Aprendizaje en tanto herramienta para el refinamiento de los universos numéricos.

2. Caracterizar y precisar los conceptos Universo numérico y Refinamiento del universo numérico.
3. Derivar el refinamiento acaecido en pequeños grupos y en el gran grupo del debate matemático y documentarlo.
4. Acudiendo a la integración y explicitación de esquemas (Vergnaud, 1990), constatar el refinamiento de los universos numéricos de los estudiantes participantes en el Ambiente de Aprendizaje.

3. Cronograma de actividades de la pasantía.

Para desarrollar los objetivos se realizaron una secuencia de actividades en orden cronológico y dirigidas por dos metodologías, una basada en experimentos de enseñanza y la otra documental. Con la metodología basada en experimentos de enseñanza el grupo Mescud diseñó un ambiente de aprendizaje para la sistematización, constitución y sedimentación del constructo "*refinamiento del universo numérico*" que se pueden observar en la fase 1, 2, y 4 de la tabla 1. La metodología documental nos permitió rastrear los usos y cambios que han tenido los términos "universo numérico" y "refinamiento" construidos por el grupo Mescud desde el año 1996, es decir, la fase 2 de la tabla 1.

Tabla 1.

Cronograma de actividades para alcanzar los objetivos específicos de la pasantía.

#	Fases	Actividades	Semanas																	Productos
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
		Toma de audio y video																		Base de datos para la investigación.
1	**Experimentación**	Transcripciones																		Base de datos oportuna para el documento final.
		Primer informe																		Informe parcial.
2	**Caracterización del diseño del espacio de formación**	Estudio documental Entrevistas a los integrantes del grupo Mescud																		Construir biblioteca y dominar algunas de las investigaciones realizadas por el grupo Mescud Dominio de los elementos teóricos construidos en las investigaciones realizadas por por el grupo Mescud.
		Transcripciones																		Base de datos oportuna para el documento final.
		Segundo Informe																		Informe parcial.

#	Fases	Actividades	Semanas																	Productos
			18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
3	**Construcción teórica de los términos refinamiento y universo numérico**	**Estudio de los casos paradigmáticos en la historia**																		Ubicación y delineamiento de 4 casos paradigmáticos
		Construcción del marco teórico																		Marco teórico

		Tercer informe	Informe parcial
		Seminarios	Cronograma y planeaciones de las sesiones
4	**Análisis retrospectivo de los datos**	**Depuración de los datos**	Documento que contiene un análisis descriptivo de los datos
		Contrastes teóricos con los datos	Documento que contiene un análisis teórico de los datos
		Cuarto informe	Informe parcial
5	**Elaboración de productos**	**Elaboración de artículo**	Certificado de envio a una revista
		Informe final	Informe final

Nota. Fuente: propia.

3.1 Metodología basada en experimentos de enseñanza.

Esta metodología es pertinente por varios motivos: 1- "Se hace para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos." (Molina et al., 2011, p.5). En este caso, el experimento de enseñanza se usó para validar una de las hipótesis iniciales de la investigación que consiste en afirmar que los esquemas de los estudiantes (Vergnaud, 1990) al resolver situaciones que involucran el tratamiento con números pueden ser refinados. 2- Porque permite construir elementos teóricos como resultado de la investigación, en este caso particular, justificar conceptualmente los términos "refinamiento" y "universo numérico". 3- Da validez a los modelos empíricos encontrados y posibilidad de contraste con hallazgos en las investigaciones del grupo Mescud. 4- Es flexible y, por tanto, modifica y pone a prueba los diseños e hipótesis iniciales. Con estas motivaciones se constituyó un ambiente de aprendizaje, según las fases de preparación y revisión; experimentación y análisis retrospectivo, solicitadas en los experimentos de enseñanza. Estas fases se describen a continuación.

3.1.1 Preparación y revisión: Contexto y Diseño del espacio de formación.

El diseño del espacio de formación Transición aritmética-álgebra fue realizado por el profesor Jaime Humberto Romero Cruz y nuestro papel como coinvestigadores consistió en identificar algunos elementos del diseño como lo son los problemas, las formas de trabajo, los objetivos y los contenidos a partir de entrevistas estructuradas y semi estructuradas, apoyadas en lecturas de documentos teóricos con la intención de dar a conocer una posible herramienta de diseño que estimula el refinamiento de los universos numéricos de los estudiantes, y que puede ser puesta a prueba en investigaciones futuras.

El experimento de enseñanza (EE) tuvo como objeto el espacio de formación de Transición aritmética-álgebra, durante el periodo académico 2019-III; espacio que contó con

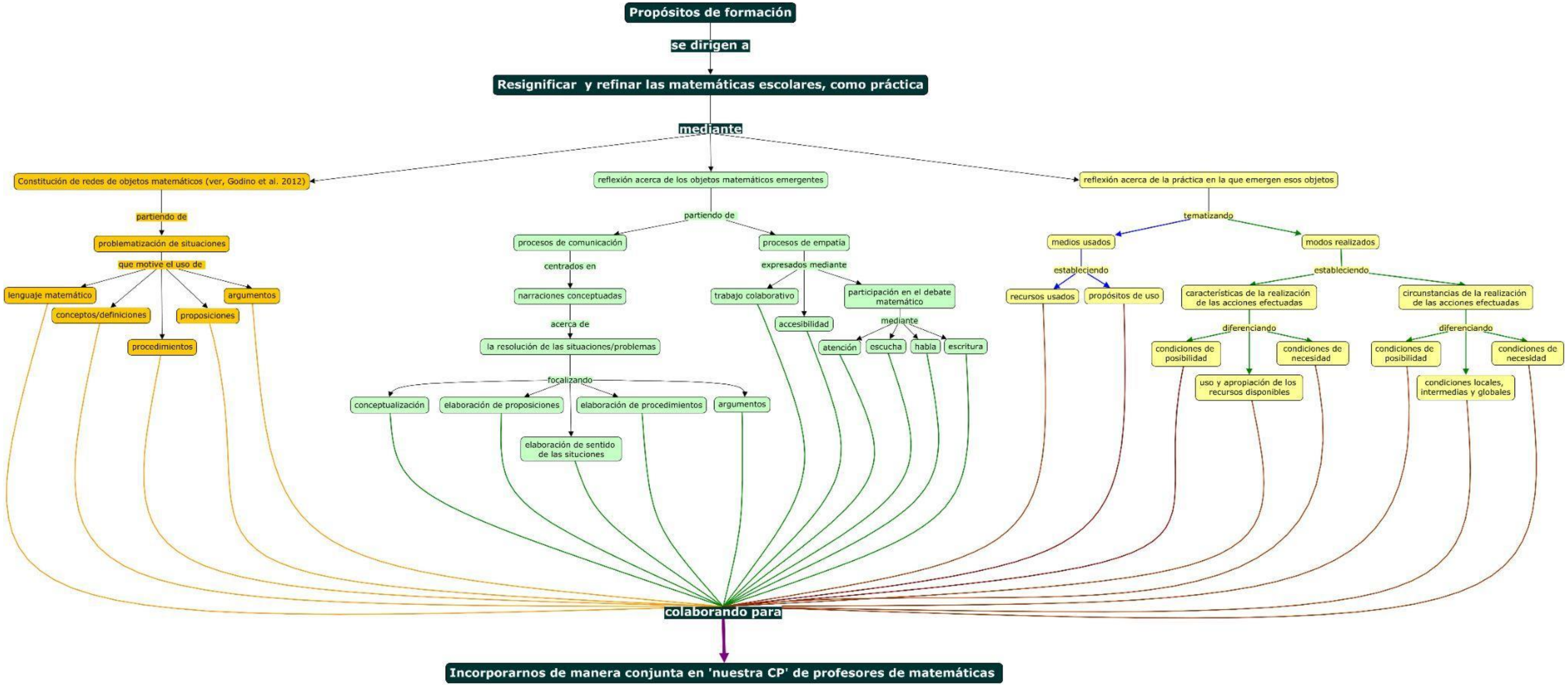
36 estudiantes de entre 18 y 20 años en licenciatura en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Este espacio de formación está ubicado en el tercer semestre, según el trayecto curricular sugerido en la malla curricular. Transición aritmética-álgebra hace parte de un conjunto de espacios de formación, vinculado al núcleo de matemáticas escolares, que tiene como intención tanto estimular refinamiento de conceptos y de concepciones, así como, la resignificación de las matemáticas escolares[1] en tanto actividad humana sistematizada en un cierto tipo específico de práctica.

Para lograr refinar y resignificar las matemáticas escolares como práctica, el profesor titular considera que los diseños de los espacios de formación del núcleo matemáticas escolares deben estar orientados por tres vertientes interrelacionadas entre sí: 1-Constitución de redes de objetos matemáticos, 2-Reflexión acerca de los objetos matemáticos emergentes y 3- Reflexión acerca de la práctica en la que los objetos emergen**.** A continuación, se mostrará cómo el diseño del espacio de formación Transición aritmética-álgebra debe proponer y examinar elaboraciones en cada una de las tres vertientes anteriormente mencionadas. Ver figura 1.

[1] "Los conocimientos matemáticos con los que llegan los estudiantes a la universidad y que fueron adquiridos en la escuela" Núcleo de matemáticas escolares.

Figura 1

Mapa conceptual elaborado por el profesor Jaime Humberto Romero Cruz para explicar el diseño del curso de transición aritmética-álgebra como espacio de formación del núcleo problemático/temático Matemáticas escolares.



Nota. Fuente propia.

3.1.1.1 Vertiente Uno: Constitución de redes de objetos matemáticos.

El espacio de formación está dirigido a resignificar la actividad matemática orientada a constituir redes de objetos matemáticos (Godino et al., 2007) que tienen versiones aritméticas, algebraicas y geométricas. De la inmensa cantidad de estos objetos, adquiridos en la escuela, el espacio de formación busca resignificar aquellos que tienen las ideas que los estudiantes ponen en juego en relación con problemas que requieren modos de existencia (geométricos, aritméticos, y algebraicos) de proporción y proporcionalidad. Este proceso de resignificación implica promover una estructura emotiva (Tall, 2013) para la actividad matemática centrada en la resolución de problemas en comunidades de práctica, que se vinculen a la reconceptualización (Mescud, 2011) de la proporción y la proporcionalidad.

La resolución de problemas en comunidades de práctica junto con la argumentación son pilares para promover la estructura emotiva pretendida (Wenger, 2001; Plantin, 2011). Aprender con otros implica exponerse a la crítica; incorporar de manera crítica las palabras y haceres de otros (atender de manera consciente y voluntaria, desempeñar distintos roles durante la participación en el grupo de trabajo, comprometerse); reconocer y transformar los medios (residuos escolares, (Polo et al., 2016), mnemónicos, mecánicos, rutinarios, etc.), los modos de argumentar (sobregeneralizaciones, inferencias incorrectas, analogías no estructuradas, etc.) y los propósitos de la argumentación (vencer, invalidar, imponer, etc.) cuando se elaboran, expresan y estructuran ideas matemáticas.

Este modo de promover la estructura emotiva posibilita que los estudiantes pasen por distintos niveles de matematización o, dicho de otra manera, transiten por los tres mundos de actividad matemática (Tall et al., 2012), en donde el vínculo realizado entre la percepción, el lenguaje, la simbolización, la repetición y la formalización, condiciona el tipo de matemática que los estudiantes usan al resolver problemas y que pueden ser objeto de refinamiento. Es decir, en el espacio de formación los universos numéricos refinados implican relaciones entre estos sistemas de registros de representación de proporción y proporcionalidad y mundos matemáticos, en dirección de una constitución del continuo con características tematizadas por Zalamea (2000).

Para ello, se diseñan tareas con el objetivo de promover la emergencia de esos modos, medios y propósitos para la argumentación y, también, su refinamiento. La lista siguiente refiere el ámbito específico de las tareas propuestas, y que por medio de la fase 3 fueron encontradas como tareas validadas en informes precedentes de investigación, como Mescud (2011), que permiten experiencias de medición de objetos físicos, conciencia de la inexactitud de las medidas y reconocimiento de la necesidad de aproximación en el acercamiento a:

- Las bases de magnitud como una clase particular de estructuras recursivas.
- Relacionar las bases de magnitud con las bases de numeración, conmensurabilidad e inconmensurabilidad entre magnitudes.
- La problemática de los números con coma.
- La problemática de la elección de una unidad que normalice toda razón.
- Estructuras recursivas, infinitas, con siguiente y punto de acumulación.

Además de responder a la lista anterior, las tareas se organizan en tres paquetes. El primer grupo de tareas corresponde al abordaje de los Elementos, libro I, de Euclides, combinando la resolución de problemas y los grafos proposicionales para promover el razonamiento deductivo y el tratamiento de magnitudes. El segundo grupo, lo conforma un conjunto de tareas que abordan estructuras recursivas con siguiente y punto de acumulación, en algunas de esas tareas, el diseño trabaja las clases de magnitud y numeración como una clase particular de las estructuras recursivas en donde se relacionan la conmensurabilidad e inconmensurabilidad entre unidades. El tercer grupo de tareas, lo integran actividades en torno a la densidad de los reales y la problemática de los números con coma. Además, es necesario aclarar que las evidencias presentadas hacen parte del segundo grupo de tareas, porque fue donde ocurrió el registro de datos. Las tareas son:

1. Dado un rectángulo AB, hallar otro rectángulo igual.
2. Dados el rectángulo AB y RΩ un lado del rectángulo R△, halle el rectángulo R△ igual al rectángulo AB
3. Analizar cuál de los problemas es más restrictivo
4. Dado un rectángulo AB, construir otro rectángulo igual al él; tal que uno de sus lados sea la semisuma de dos lados perpendiculares del rectángulo AB. ¿Cuál es el sentido matemático de este procedimiento?
5. Con el rectángulo construido en 4. Realice el procedimiento, así obtendrá otro rectángulo. Si continúa este proceso, además de obtener rectángulos iguales ¿Qué otra característica observa en ellos?
    a. Realice el 4 y 5 solo mediante construcciones geométricas (uso de software de geometría dinámica)
    b. Realice 4 y 5 solo mediante configuraciones aritméticas (uso de hoja de electrónica)
    c. ¿Qué significa ser más cuadrado? ¿Qué significa que los lados son cada vez más iguales?
    d. ¿Desde el punto de vista numérico qué obtiene este proceso?
    e. ¿Estos procesos son infinitos? ¿Siempre?
    f. ¿Qué tipo de matematización es la pedida?
6. Hacer la matematización de la siguiente situación: Con el lado menor de una hoja tamaño carta medir el lado mayor.
7. Hacer la matematización de la siguiente situación: Medir con el lado AB la diagonal del cuadrado A△.

8. ¿Qué cambia y qué se mantiene si en la matematización anterior se pide medir la diagonal con el siguiente sistema de partes de AB

$$\Omega = \{AB, \frac{1}{2}AB, \frac{1}{4}AB, \frac{1}{8}AB, \frac{1}{16}AB, \frac{1}{32}AB, \frac{1}{64}AB, \ldots, \frac{1}{2^k}AB\},$$

de tal manera que ninguno de los elementos de Ω se usa más de una vez?

9. Realizar el taller refinando la comprensión de sistemas posicionales de numeración:
    a. Recuperación de la unidad
    b. Conexiones y densidades
        i. Contestar individualmente
        ii. Discutir cada solución
        iii. En grupo, presentar un informe describiendo:
            - La estructura del cuestionario Recuperación de la unidad
            - Qué tipo de error y a qué tipo de concepto creen que se debe este error
            - El modo en el que detectaron los errores
            - El modo en el que realizaron las correcciones

3.1.1.2 Vertiente Dos: Reflexión acerca de los objetos matemáticos emergentes.

"Las matemáticas son actividad humana condensada que puede ser dirigida hacia modos específicos de constitución reflexiva del mundo. En estos modos específicos cobran especial relevancia los de producción de conocimiento matemático" (Romero, s.f., p.1). Por tanto, en la formación de educadores en matemáticas es necesario generar experiencias dentro de una comunidad de práctica (Wenger, 2010), en la que toma especial relevancia la naturaleza social del aprendizaje. Según Romero (2020) debe centrarse en 3 tópicos, si se acepta la teoría de Wenger (2010):

1. Régimen de competencia: como producto histórico de evolución de la cosificación de la práctica (Práctica de matematización).

2. Régimen de responsabilidad: como producto histórico personal de la evolución de la identidad en la práctica.
3. Concreción histórica de una comunidad de práctica: como una estructura social, dinámica e informal generada por sus participantes.

En nuestro caso, la relación entre estos tres tópicos es garante de existencia, durabilidad y regenerabilidad de comunidades productoras de matemáticas (Kitcher, 1984). Para así, profundizar en los discursos pedagógicos de los estudiantes. Estos discursos, en tanto narraciones conceptuales, muestran obstáculos, errores, dificultades en los diferentes procesos de la resolución de situaciones problema de la vertiente uno y de aspectos intra-interpersonales en el proceso de objetivación (Sáenz-Ludlow & Zellweger, 2016).

3.1.1.3 Vertiente tres: Reflexión acerca de la práctica en la que los objetos emergen.

Al ser un espacio de formación de didáctica, es necesario que los estudiantes generen conciencia de los diferentes elementos que intervienen en su proceso de aprendizaje como las representaciones, los recursos, las formas y características de trabajo, porque ser consciente de esos elementos es generar estructura matemática, según un enfoque didáctico (Freudenthal, 2002). Como insumo, Romero (2019), el profesor-investugador del EE, elaboró un escrito para los estudiantes del espacio de formación de Transición aritmética-álgebra del semestre 2019-III, que les sirvió para realizar metacognición y reflexión acerca de la práctica en que los objetos emergen. Esa metacognición y reflexión se desarrolló en la tarea de construcción de un documento Ω con las siguientes características:

> Es altamente probable que Ω deba mostrar uno o más de los distintos niveles de elaboración de objetos matemáticos y de comprensión que el resolvente ha constituido para sí. [..] Ha de recuperar los distintos modos y medios con los que desplegó y sistematizó su actividad para exhibir una matematización [..]. En particular, ha de acudir a los artefactos en los que fue dejando el registro de la evolución de su actividad,

para describirla y para analizarla; pero también, ha de recurrir a instrumentos conceptuales. En nuestro caso, vamos a acudir a las ideas acerca de la matematización como práctica, la ontología de objetos matemáticos (Godino et al, 2007) y a los niveles de comprensión (Bressan, 2017).

[..] Los niveles de comprensión conforman una jerarquía, no un orden estricto, de aprendizaje y reinvención de matemáticas (Freudenthal, 1973; 1978; 2002). En relación con el aprendizaje, dan testimonio de la constitución de objetos mentales como producto de la actividad de los aprendices al tratar de resolver la situación planteada incluyéndola como un elemento de una clase de situaciones (Freudenthal, 2002). Por lo tanto, el aprendiz genera, para el tratamiento que él hace de la situación, el sentimiento de estar tratando no solo la situación particular sino, además, una clase de situaciones, que está bien representada por la situación tratada. En relación con la reinvención de las matemáticas, los niveles dan testimonio de la constitución de redes de objetos y estructuras matemáticas por parte del aprendiz; a la vez, la constitución de las estructuras matemáticas da cuenta de la restructuración del objeto mental del aprendiz (Freudenthal, 2002). (Romero, 2019, pp.1-2)

3.1.2 Experimentación.

En la fase de experimentación se encontraban en el aula el investigador titular (profesor del espacio de formación), los 36 estudiantes y dos co-investigadores que grabaron un total de doce sesiones de clase, con 3 cámaras de audio y video, una cámara grabando al grupo en general y dos cámaras grabando a dos grupos de estudiantes, dando como resultado un total de 40 horas de grabación. De forma paralela, los co-investigadores realizaron un diario de campo identificando las dificultades de los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos que sería discutida con los investigadores para reformular el diseño o hipótesis de investigación.

3.1.3 Análisis retrospectivo.

Después de la recolección de la información, se hizo la transcripción de cada una de las entrevistas y de los videos de clase, usando la simbología de Silverman (2008), dado que esta simbología permite representar en texto las intervenciones de los estudiantes que dan cuenta no solo de las concepciones de los objetos matemáticos, como esquemas, sino, además, de gestos y emociones, que están ligados al aprendizaje.

Una vez creada la base de datos, estos se depuraron. Empezando por un análisis descriptivo que nos permitió seleccionar un primer conjunto de datos posibles que respondieron al sentido numérico de los estudiantes y a conocimientos de residuo escolar, y que era observables en el trabajo con bases de numeración y bases de magnitud. Seguido a esto, junto con los investigadores del grupo Mescud, se seleccionaron los fragmentos de videos desde la teoría de Análisis de aprendizaje microgenético desde Parnafes y Disessa (2013) que tiene características como: 1) ser método para construir o mejorar teoría existentes sobre el aprendizaje 2) mostrar en diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje la existencia del universo numérico y su refinamiento, y 3) al ser un método de investigación cualitativa se busca descubrir y no demostrar, por tanto, se tuvo la mirada abierta a cualquier tipo de detalle que influenciara, por ejemplo, gesto, tonos de voz y el contexto que sirviera para explicar lo que estaba sucediendo en los fragmentos de video seleccionados. Y, por último, se estudiaron los resultados obtenidos reconociendo hallazgos, limitaciones y futuras investigaciones.

3.2 Metodología Documental

3.2.1 Momento 1 (Revisión histórica de casos similares a la trayectoria del refinamiento y universo numérico).

Este primer momento documenta casos de dificultades, dudas y rectificaciones sufridas por investigadores e investigaciones famosas en la historia de las ciencias o de las profesiones.

Esta documentación evidencia que en la investigación es normal abandonar ideas, refutarlas, reformularlas, retomarlas y volver a empezar cuando así se requiera, para llegar a conclusiones sólidas y expresarlas de modo comprensible y eficaz. Algunos ejemplos son:

Gottlob Frege realizó aportes en geometría, la lógica y la filosofía de las matemáticas en tres principales obras: Begriffsschrift, Grundlagen y Grundgesetze. Que fueron resultado de intentar demostrar que la aritmética es una rama de la lógica y que está desvinculada de razonamientos intuitivos. En esa trayectoria, Frege trabajó sobre análisis del lenguaje para constituir una sintaxis o sistema lingüístico en matemáticas basada en fundamentos como sentido y referencia. Además, desarrolló una teoría de cuantificadores para eliminar la ambigüedad del lenguaje común en proposiciones y pensamiento deductivo. Luego de su primer documento recibió bastantes críticas entre ellas la hecha por Schröder en 1880 que argumentó que Begriffsschrift tenía poca "originalidad", por lo que Frege entró a la etapa del Trienio (1880-1883) estructurando las definiciones usadas sobre función y argumento, y renovó la conceptografía en diferentes documentos, que pueden ser observados en Bertran (2015), hasta escribir su obra Grundgesetze.

Carl Friedrich Gauss en 1799, en su tesis doctoral abordó la demostración del teorema fundamental del álgebra y criticó las demostraciones de sus antecesores, sin embargo, "los intentos de demostración hechos por los matemáticos como D'Alembert, Euler y Laplace, fueron un gran aporte para las demostraciones formales hechas por Gauss" (Lucero, 2017, p__). Gauss no quedó satisfecho con su primera demostración pues esta se basaba en aspectos geométricos no generalizables casi intuitivos y el poco conocimiento de los números complejos los cuales había criticado a sus antecesores. La segunda demostración fue presentada en 1815 caracterizada por ser fuertemente algebraica, la tercera demostración en 1816 y actualmente es conocida como el teorema de la integral de Cauchy. En 1821 Bolzano y Cauchy mostraron avances sobre la continuidad, así en 1847, por medio de las construcciones y definiciones ya aceptadas por los matemáticos, Gauss después de 50 años generalizó la primera demostración formal para coeficientes complejos para el TFA (Lucero, 2017).

Ludwig Wittgenstein: Estudió la falta de compresión de la lógica en el lenguaje. En ese estudio profundizó en la filosofía tradicional y las ciencias que emplean el uso de proposiciones. Mostrando que las soluciones tradicionales eran incorrectas porque empleaban de forma errónea el simbolismo y el lenguaje. Logrando aportes en psicología, epistemología y filosofía tradicional. En su carrera se pueden encontrar dos momentos importantes 1) el primer Wittgenstein de la obra el tractatus escrito en 1921 quien considera que el lenguaje es una representación del mundo, el mundo está constituido por hechos, y los hechos son relaciones entre los objetos. 2) el segundo Wittgenstein de la obra investigaciones filosóficas de 1953 quien se apropia de ideas de Pierce, James y Ramsey para incluir en su trabajo la naturaleza pragmática, es decir, incluir la “universalidad” del lenguaje.

Charles Sanders Peirce retomó el problema de la interpretación de la realidad propuesto por Immanuel Kant. Por medio de una teoría basada en signos y categorías pudo desarrollar una propuesta de semiosis que ha servido en diferentes disciplinas. La obra peirceana empezó a ser publicada por la universidad de Harvard años después de su muerte, que sintetizó sus escritos en ocho volúmenes conocidos como The Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Tuvo varios cambios a lo largo de su carrera 1) al principio pensaba que la lógica era una rama de la semiótica, pero luego consideró que la lógica era realmente semiótica; 2) en 1905 denominó pragmaticismo a su idea de pragmática, diferente a la de su colega Willian James. El pragmaticismo intenta determinar la función del significado de los signos y no solo los conocimientos intelectuales, aceptando dos cosas: la existencia del objeto como una concepción que una mente lleva a efecto, y la idea de un consenso intersubjetivo (Horta, 2019).

Así, es posible afirmar que a lo largo de la historia dentro de una práctica de investigación el desarrollo del conocimiento pasa por diferentes etapas en su constitución y/o construcción, para desarrollar teorías que implican aspectos históricos, personales y académicos de ese momento. Por tanto, el tiempo que conlleva el tratamiento de las dificultades, dudas y rectificaciones estará expresado en corto, mediano o largo plazo dependiendo de los alcances de los proyectos que se quieran plasmar y de los factores sociales.

3.2.2 Momento 2 (Revisión histórica de los documentos donde se usa el refinamiento y universo numérico).

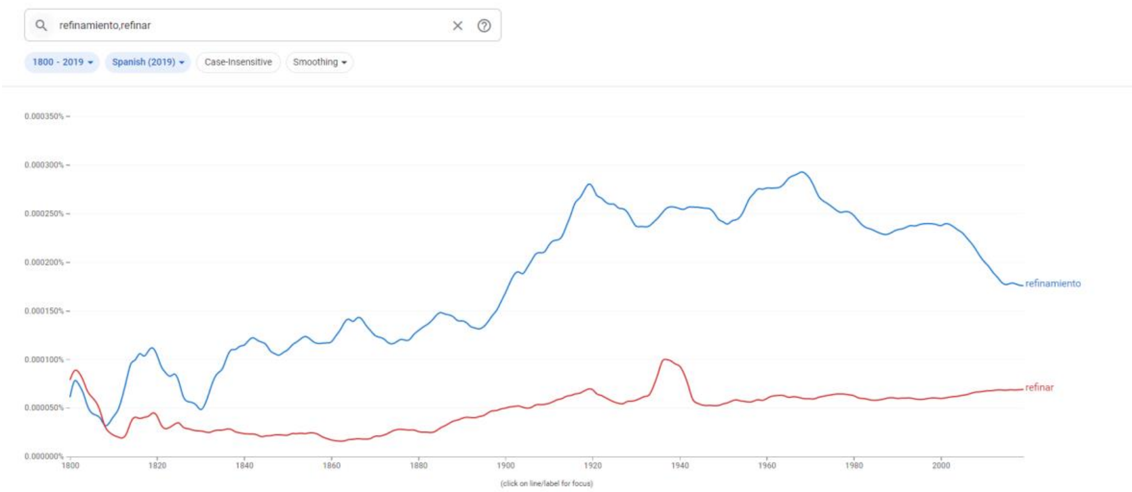
En este apartado se mostrará como los términos refinamiento y universo numérico son usados en diferentes disciplinas sociológicas y científicas sin aparente carga conceptual, y para ello primero indagamos el número de casos encontrados registrados en la historia por medio de la herramienta ngrams de google dispuesta en la página https://books.google.com/ngrams.

> Lo que muestra el eje y es esto: de todos los bigramas contenidos en nuestra muestra de libros escritos en inglés y publicados en los Estados Unidos, ¿qué porcentaje de ellos son las palabras buscadas? y de todos los unigramas, ¿qué porcentaje de ellos son la palabra buscada? (Google books, 2022)

En la figura 2. Se muestra el diagrama del término refinamiento y refinar, en él podemos concluir que desde 1800 el término “refinamiento” ha presentado una variación, aunque con picos constantes, creciente hasta 1968 y que después de 1968 ha decrecido su uso. Por su parte, el término “refinar” presentó un pico en 1801 y después decrece hasta 1811, después de eso ha presentado una variación creciente leve, pero siempre menor al término refinamiento.

Figura 2

Diagrama de los términos refinamiento y refinar encontrado en google books 1800-2019

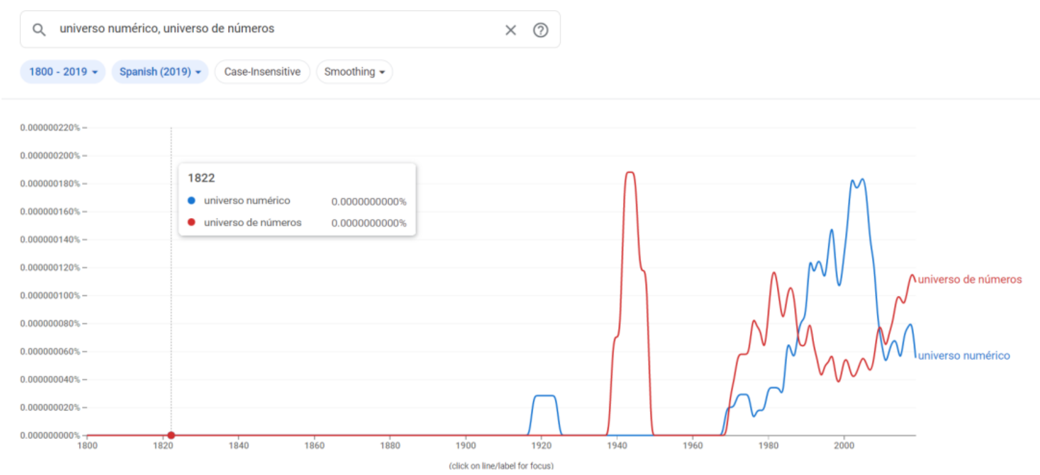


Nota. Fuente Propia.

En la figura 3. Se muestra el diagrama del término universo numérico y universo de números, en él podemos concluir que el término universo numérico no se usaba prácticamente nada antes de 1967 y que después de 1967 se ha usado por la comunidad científica con mayor fuerza, sin embargo, sigue siendo mínima. Por su parte, el término universo de números no fue usado hasta 1916 y presentó un pico en 1943, después de eso se dejó de usar entre 1949 y 1968 y de ahí en adelante ha presentado variaciones, pero con un aumento constante.

Figura 3

Diagrama de los términos universo numérico y universo de números encontrado en google books

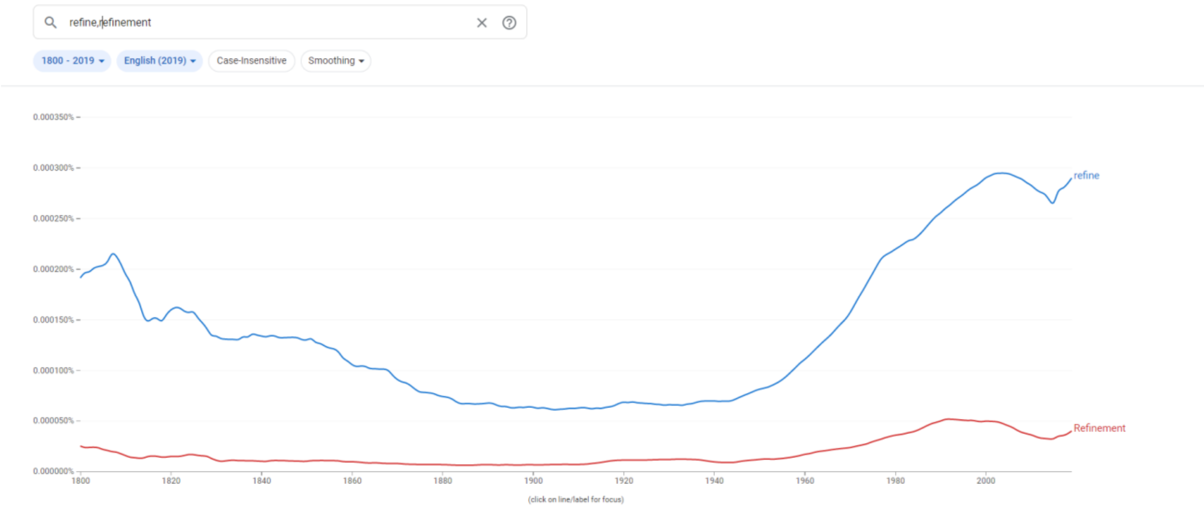


Nota. Fuente Propia.

En la figura 4. Se muestra el diagrama de la búsqueda del término refinamiento en su traducción al inglés (refine o refinement), en él podemos encontrar que el uso “refine” presenta un intervalo decreciente 1800 a 1900 y que después de 1900 se han presentado variaciones crecientes y decrecientes, pero con una mayor tendencia de aumento. Por su parte, “refinement” se ha usado por la comunidad, de forma aparente, con la misma frecuencia en la historia.

Figura 4

Diagrama de los términos refine y refinement encontrados en google books.

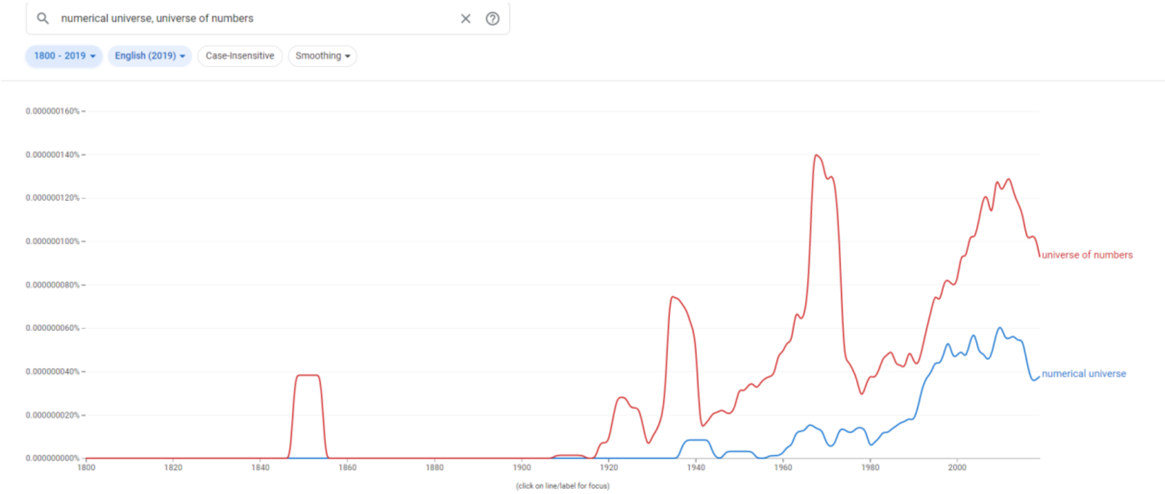


Nota. Fuente Propia.

En la figura 5. Se muestra el diagrama de la búsqueda del término universo numérico en su traducción al inglés (universe of numbers o numeric universe), en él podemos concluir que el término universe of numbers no se usaba prácticamente nada antes de 1916 y que después de 1916 se ha usado por la comunidad científica con mayor fuerza, sin embargo sigue siendo mínima. Por su parte, el término *numeric universe* no fue usado sino hasta 1936 y, de ahí en adelante, ha presentado variaciones crecientes y decrecientes, pero con una tendencia al aumento.

Figura 5

Diagrama de los términos numerical universe y universe of numbers encontrado en google books



Nota. Fuente Propia.

Por medio de las gráficas obtenidas en google books, se presenta a continuación una tabla que compila los porcentajes máximos y años en los que estuvieron más presentes los términos "refinar, refinamiento, universo numérico y universo de números" en español e inglés:

Tabla 2

Valores máximos de los términos Refinar, Refinamiento, Universo numérico y Universo de números en español e inglés.

	Refinar	**Refinamiento**	**Universo numérico**	**Universo de números**
Español	(1936, 0.0001007713%)	(1968, 0.0002936764%)	(2005, 0.0000001868 %)	(1943, 0.0000001880 %)
Inglés	(2004, 0.0002945982%)	(1806, 0.0002055925%)	(2009, 0.0000000578 %)	(1968, 0.0000001387 %)

Nota. Fuente: Datos encontrados en los diagramas de google books. Fuente propia.

A partir de los datos obtenidos, podemos concluir que en los libros en español hay un uso mayor de los términos "universo numérico, universo de números y refinamiento" que en los libros en inglés. Por otra parte, el término refinar se usa con mayor frecuencia en los libros en inglés.

Además, si se comparan con el uso de términos como: conceptualizar (1998, 0.000088) reconceptualizar (2001, 0.000013%) potenciar (2008, 0.00058%) evolucionar (2013, 0.00032%) transformar (2004, 0.0013%) modificar (2007, 0.00209%) se logra evidenciar que refinar y refinamiento son usados con menor frecuencia, asimismo, los valores máximos encontrados de los términos de refinamiento y universo numérico se dieron hace varios años en comparación a los otros términos ya mencionados. Lo mismo ocurre si se comparan los resultados obtenidos para universo numérico con conjuntos numéricos (2017, 0.00000148%). Así es posible concluir que el uso de refinamiento y universo numérico tiene menor frecuencia que otros términos en los libros de estados unidos.

Por su parte, en los libros de google books, Google Scholar, ResearchGate y varios textos de educación matemática editorializados por Springer es posible encontrar algunos documentos que usan los términos refinamiento o universo numérico. En Educación matemática y Educación en ciencias es posible encontrar el término refinamiento usado según distintos enfoques. Por ejemplo, con un enfoque cognitivo, Steffe (1994) afirma:

> The counting scheme […] that undergoes continuous development and refinement as children progresses and is not limited to counting by ones. Its elaboration to include composite units (e.i., units whose numerosity is greater than one) is crucial in learning multiplication and division. (p. 7).

Sepúlveda y Santos (2006) utilizan ese término, para referir un posible resultado, en relación con los cambios o transformaciones de los modelos iniciales que exhiben los estudiantes cuando resuelven problemas, encontrando frases como; “permitió refinar y robustecer sus acercamientos iniciales y, eventualmente, utilizar distintos caminos de solución de los problemas ”(p.1389) “oportunidad de expresar y refinar sus acercamientos iniciales a los problemas” (p.1390); “¿de qué manera los modelos iniciales de solución de los problemas se robustecieron o refinaron, como resultado de la participación de los estudiantes?” (p.1391). Otro documento encontrado, que tiene un enfoque instruccional, es el de Ashkenazi y Weaver (2007), ellos afirman que:

> […] La enseñanza debe ayudar a los alumnos a reflexionar sobre sus planteamientos actuales, a encontrar nuevos contextos productivos para los conocimientos existentes y a refinar partes de sus conocimientos con fines científicos específicos. El refinamiento implica la diferenciación de los contextos en los que los elementos del conocimiento son aplicables y, ayudar a los alumnos a utilizar la terminología científica adecuada para distinguir estos contextos. (p. 187).

Por otra parte, el término universo numérico aparece en sólo tres entradas según consultas en Google Scholar, ResearchGate y la revisión de varios textos de educación matemática editorializados por Springer. Lurduy et al. (2006) lo usan para describir la pertenencia de una solución a un conjunto numérico; aquí, el término universo numérico refiere un concepto estrictamente matemático. Desde nuestro punto de vista, Recalde (2004) lo usa mientras describe una evolución histórica de constitución y uso de distintos agregados de tipos de números, que según Recalde constituyen el concepto de número para los antiguos:

> Durante el período que va de Euclides a Cantor se dan cambios conceptuales que permiten extender cada vez más el universo de los números aunque de una manera informal. Las transformaciones se dan no sólo atendiendo a la operatividad, sino también a la representación geométrica. En este sentido es significativo el aporte de Descartes al definir, en su Geometría, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada de segmentos. (p. 52).

También se encontró que el Ministerio de Educación Nacional usa el concepto de universo numérico en un único momento, para mencionar aspectos importantes en el desarrollo del pensamiento numérico, específicamente: “Otro aspecto fundamental sería la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones" (MEN, 1998, p. 17); aquí, universo numérico parece referir un concepto matemático.

La tercera entrada proviene del estudio sobre los saberes previos de jóvenes y adultos. Mariño (1997) estudia cómo las personas con diferentes experiencias configuran saberes previos y estrategias de solución propios, que no dependen de espacios de formación intencionales, ya sean formales o informales. En esta investigación Mariño afirma que "El universo numérico en el que se mueve con pericia un pequeño campesino no es el mismo que el de un mediano comerciante" (p.1); aquí, universo numérico parece referir un concepto sociocognitivo.

3.2.3 Momento 3 (Indagación teórica de los documentos producidos por el grupo Mescud).

Dicho lo anterior, a modo de contraste, se expondrá un recorrido cronológico por las investigaciones del grupo Mescud, construido desde el análisis documental y entrevistas a los integrantes del grupo, en relación a la epistemología de los objetos matemáticos. Es decir, a partir de una revisión de documentos producidos por el Grupo se observan y extraen los cambios que han tenido ciertos términos hasta convertirse en "universo numérico" y "refinamiento", además de estudiar elementos teóricos que los sustentan como herramienta necesaria para caracterizar las concepciones de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que involucran el tratamiento de números. Para empezar a rastrear los documentos oportunos, se hizo una primera entrevista al profesor Jaime Humberto Romero Cruz encontrando que el universo numérico:

> **Jaime:** […] Surgió en la primera investigación que hicimos cuando nosotros no éramos el grupo Mescud, si no cuando éramos el grupo Pretexto, eso hace muchos años, 96.

[…] y surgió debido a varias cuestiones que nosotros vimos en esa investigación. Esa investigación fue hecha en un curso de cada uno de tres Colegios del distrito, entonces examinamos, cerca de 100 chinos y 3 profesores.

Jaime: […] Entonces empezamos a ver que los estudiantes del colegio contaban, para su trabajo de matemáticas, relativamente solo con algunos números naturales y con algunas herramientas para manejar esos números naturales.

Así mismo, esas herramientas con que cuentan los estudiantes sobre los números naturales fueron observadas, de la misma forma, con el tratamiento de números racionales y reales en investigaciones posteriores. Lo que llevó a pensar:

Jaime: Entonces uno no puede decir, *ellos tienen un conjunto numérico*, porque no es una estructura formalizada. Entonces, ¿cómo decir que tienen algo que puede estar vuelto pedazos desde el punto de vista conceptual, sin decir que son sólo errores, sino que también son posibilidades de trabajo? Entonces, algo así que empezamos a decir como que no tienen el conjunto de los números reales, porque ese tipo de objetos ellos no los, ni los distinguen ni nada de eso, pero tampoco son completamente ignorantes del todo y los usan de algunas maneras, y a veces bien y otras muchas veces mal. […] ¿cómo hablamos de eso que tienen? Entonces, para nosotros fue claro que no estamos hablando de que tienen una estructura matemática en el sentido de que los matemáticos hablan de estructura […] Pero que hay algún conocimiento y alguna experticia con la que se manejan algunos números.

También en dicha entrevista se afirmó que el universo numérico no había sido descrito de forma consistente en las investigaciones, porque no se habían encontrado los referentes teóricos apropiados para describirlo. En adición a esto, en las investigaciones de Pretexto (1996) y Rojas et al. (1999) se encontró el uso del término universo numérico desde aquellos universos a los que recurren los estudiantes para resolver cierto tipo de situaciones, de manera consciente o inconsciente.

Por su parte, en esa revisión de los documentos también se encontraron algunos indicios, que fueron confirmados por algunos integrantes de Mescud, sobre la evolución conceptual que ha tenido el término refinamiento en documentos como: Pretexto (1996); Rojas et al. (1999); Lurduy y Romero (1999); Mescud (2002); Rojas y Romero (2006); Bonilla et al. (2010); Mescud (2011); Bonilla et al. (2015) y León et al. (2017). Encontrando que:

Lurduy y Romero (1999) consideran que el desarrollo cognitivo y la constitución de conocimiento están ligados a la resolución de problemas, según la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990); entonces, cuando una o varios estudiantes enfrentan situaciones problemáticas, aparecen filiaciones y rupturas con sus saberes previos. De forma paralela, Pretexto (1996) y Rojas et al. (1999) manifiestan que en el contexto de aula los estudiantes enfrentados a situaciones nuevas producen interpretaciones de algunos elementos novedosos de la situación; que estas interpretaciones, similares a trozos de información, dejadas a su libre constitución, regulada únicamente por el éxito o por el fracaso según la valoración escolar recibida, conduce al estudiante a integrar paulatinamente esos trozos progresivos (Rojas et al. 1999). Es decir, el conocimiento personal generado en contexto de aula es adaptación operativa, evoluciona de forma más o menos simultánea con las interpretaciones del escolar, que van acercándose a la estructura de conocimiento promovida por las valoraciones de éxito escolar.

En documentos posteriores, Mescud (2002); Rojas y Romero (2006) y Bonilla et al. (2010) continúan afirmando que el conocimiento se construye o reconstruye a partir del conocimiento anterior. Mescud (2011) siguió trabajando con objetos matemáticos que tienen versiones aritméticas, geométricas y algebraicas; para ello, es necesario estudiar las transformaciones que deben hacer los escolares para tratar con estos objetos en tanto objetos de aprendizaje y las que deben hacer los estudiantes para profesor en tanto objetos de aprendizaje y de enseñanza. También estudia las implicaciones didácticas y cognitivas para tratar en el aula la multiplicación como cambio de unidad; analiza los resultados obtenidos en pruebas externas (PISA, OCDE), los modelos intuitivos que configuran el actuar de los estudiantes y los aspectos históricos que condicionaron el objeto matemático. Con estos estudios y análisis diseña actividades que sirven para reconceptualizar, potenciar y modificar los esquemas multiplicativos de los jóvenes escolares, a través de un acercamiento a sistemas posicionales de numeración, la teoría de la proporcionalidad, la convergencia de series, la propiedad de densidad de los números racionales y relaciones de carácter lógico y matemático que vinculan los primeros cuatro ítems de acercamiento, antes aludidos, junto con la comunicación en matemáticas.

Por su parte, Bonilla et al. (2015) y León et al. (2017) introducen las comunidades de práctica (Wenger, 2001) como necesidad en el diseño de ambientes de aprendizaje que promuevan la resignificación o la reconceptualización, en tanto modos, para elaborar conocimiento matemático y concepciones acerca de los objetos matemáticos. Mescud ha mantenido una postura frente a la naturaleza de los objetos matemáticos como requerimiento didáctico, según la cual es posible afirmar que el conocimiento posee un carácter operatorio, los conocimientos son el resultado de filiaciones y rupturas con conocimientos previos de un sujeto, y que es necesario introducir la comunidad de práctica en los ambientes de aprendizaje y, además, que estas características están relacionadas con el refinamiento.

4. Marco teórico.

En la búsqueda de los documentos que hablan de refinamiento y universo se pudo encontrar que para el grupo de investigación Mescud surge la necesidad de caracterizar los términos universo numérico, refinamiento y refinamiento del universo numérico. Debido a que, en la comunidad de educadores de matemáticas son usados sin carga teórica aparente. Pero que el grupo ha mostrado que sirven, o se adecuan bastante bien, para caracterizar las acciones, junto con su refinamiento, de los estudiantes al resolver situaciones que involucren el tratamiento con números, aunque el grupo Mescud las haya referido en investigaciones con otras terminologías como conceptualizar, reconceptualizar, construir, reconstruir, potenciar, evolucionar, filiar, transformar y modificar. Es por eso que a continuación se presenta un marco teórico construido a partir de las investigaciones previas de Mescud y de las entrevistas realizadas a los integrantes del grupo para caracterizar: "universo numérico", "refinamiento" y "refinamiento del universo numérico".

4.1 Universo Numérico.

En las matemáticas del siglo XX se construyeron los números naturales, enteros, racionales y reales acudiendo a una axiomatización rigurosa, evidenciable en los trabajos de Dedekind, Cantor, Peano y Hilbert. Estos sientan bases para la disposición hacia las estructuras algebraicas (campos, anillos, grupos, etc.) como conjuntos numéricos con operaciones y relaciones, que cumplen ciertas propiedades. En este nivel de formalización "se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos" (Radford, 2004, p.6). Pero este nivel no es el de partida para los aprendices (Tall et al., 2012). así que, para la educación matemática importa indagar y adoptar una teoría de los objetos matemáticos y, como parte esencial de esta indagación, profundizar en las maneras en que los objetos sirven para representar, organizar e interpretar la realidad; es decir, hay que profundizar en los procesos de constitución de tal ontología y, muy probable, también examinar su semántica y semiótica. En el presente documento se decidió tomar la semiótica de Peirce como instrumento para indagar esta ontología.

Charles Sanders Peirce [1839-1914] construyó su semiótica apoyándose en tres ramas según West (2015): la fenomenología (S,O,I); la ontología, que también puede denominarse como sus categorías de primeridad, segundidad y terceridad; y por último, el pragmaticismo. La fenomenología establece que la interpretación del signo, como fenómeno, se encuentra en una relación triádica entre signo (S), objeto (O) e interpretante (I). Dado que para Peirce el signo puede ser cualquier imagen, concepto, icono, símbolo, señal, relación, expresión, entonces, no es posible distinguir a priori entre signos y no signos, pero tal distinción es posible en una relación semiótica.

Aunque, el autor dio diferentes definiciones del signo a lo largo de su vida, decidimos tomar una definición frecuentemente usada, también citada por Darin (2016):

> Un Signo, o Representamen, es un Primero que está en tal relación triádica genuina con un Segundo, llamado su Objeto, que es capaz de determinar un Tercero, llamado su Interpretante, de modo que éste asume la misma relación triádica con su Objeto en la que él mismo [el signo] se encuentra con el mismo Objeto. La relación triádica es genuina, es decir, (sus tres miembros se relacionan entre sí de tal forma que no puede reducirse a ningún complexus de relaciones diádicas (Peirce, 1931). (p.55)

Dado que cualquier cosa puede ser un signo, el representamen es un signo, al igual que el objeto y el interpretante, para evitar confusiones se distinguen dependiendo de las funciones que asuman en la relación triádica en un contexto específico; para ello, los denominaremos signo-vehículo, signo-objeto, signo-interpretante y SIGNO a la relación triádica (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2016). La función del signo-vehículo es representar un signo-objeto y puede ocurrir que el signo-vehículo represente de forma verídica (signo genuino) o no (signo degenerado) a un signo-objeto específico, en un proceso semiótico dado. En adición a esto, existen diferentes niveles de representación de un signo-objeto, que están vinculadas a sus categorías ontológicas primeridad, cualisigno; segundidad, sinsigno; y terceridad, legisigno (Gorlée, 1992).

El signo-objeto es lo que está siendo representado por el signo-vehículo; y para definirlo es necesario recurrir a la máxima pragmática, o pragmaticismo. Según la cual, la comprensión del signo-objeto vincula las concepciones que de este conforma cada persona, ya sea de manera intrasubjetiva o intersubjetiva; es decir, para el pragmaticismo, la comprensión del signo objeto no se puede definir sin tener en cuenta las experiencias individuales y colectivas. La máxima pragmática fue planteada por Peirce como un método:

> Parece, pues, que la regla para alcanzar el tercer grado de claridad de aprehensión es la siguiente: Considerar qué efectos, que podrían tener una importancia práctica, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de estos efectos es el conjunto de nuestra concepción del objeto (Garcia 2014, p.173).

En un signo-vehículo quedan representados algunos aspectos del objeto real, pero no es posible que los represente en su totalidad, y alcanzar la comprensión del objeto real implica el estudio ilimitado de todos los efectos prácticos en toda experiencia actual y posible, por tanto, su estudio conlleva una cadena infinita de SIGNOS. Cuando una persona utiliza un signo-vehículo para representar algunos aspectos del objeto real, queda codificada su interpretación del objeto real y se le denomina objeto-inmediato. Cuando un intérprete decodifica, por medio del signo-vehículo generando un signo-interpretante, se crean en la mente de dicho intérprete algunas ideas sobre el objeto real a eso se le denomina signo-dinámico. También el signo-objeto se relaciona con el signo-vehículo por medio de diferentes niveles de complejidad, ligados a sus categorías ontológicas: ícono, índice y símbolo (Sáenz-Ludlow & Zellweger, 2016; Gorlée, 1992).

Aun cuando el concepto de signo-interpretante no requiere mente o acción humana, en los ambientes de aprendizaje como el aquí considerado, los interpretantes son constructos mentales personales o esquemas sociales de uso desde los que las personas interpretan. Para Peirce, es tan importante que el objeto se interprete como que se le represente; es decir, “nada es un signo a menos que sea interpretado como signo" (Peirce, 1902, citado por Gorlée, 1992). El signo-interpretante es un mediador entre el signo-vehículo y el signo-objeto, convirtiéndose, en muchas ocasiones, en un signo-vehículo más desarrollado. Al igual que el signo-vehículo, el signo-interpretante y el signo-objeto tienen tres diferentes modos de existencia: primeridad, ícono; segundidad, índice; y terceridad símbolo (Darin, 2016).

La clasificación de los signos puede resumirse en la siguiente tabla, pero es necesario aclarar que para Peirce las categorías de primeridad, segundidad y terceridad se relacionan de forma ordinal; dicho de otra forma, no puede existir segundidad sin primeridad, y tampoco puede existir terceridad sin segundidad y primeridad (Darin, 2016):

Tabla 3

Clasificación de los Signos

SIGNO	Primeridad		Segundidad	Terceridad
Signo-Vehículo	Cualisigno		Sinsigno "Token"	Legisigno "Tipo"
		Imagen		
Signo-Objeto	Ícono	Diagrama	Índice	Símbolo
		Metáfora		
Signo-Interpretante	Posibilidad Rhema		Hecho Decisigno	Razón Argumento

Nota. Fuente: Extraída de Pereira (2017).

Una vez descrita de forma general la clasificación de los signos en la teoría de Peirce, se procede a explicar su importancia para este documento y su relación con el diseño. Para ello, es necesario decir que permite estudiar las diferentes formas de razonamiento "en términos de una interpretación pragmática de signos" (Darin, 2016, p.54) vinculadas a las experiencias de cada individuo, que se dan dentro de una comunidad. De manera particular, el curso Transición aritmética-álgebra ha mostrado que los estudiantes traen del colegio y de sus experiencias en cursos anteriores diferentes tipos de esquemas (Coba et al., 2013; Romero et al., 2014; Saavedra et al., 2015) que se reflejan cuando los estudiantes interpretan una situación problema y utilizan números, procedimientos, proposiciones, definiciones, conceptos, formas representacionales y argumentos. Cada uno de estos elementos puede ser signo-vehículo, signo-objeto o signo-interpretante dependiendo de la función semiótica que desempeñe.

Son signos-vehículos cuando se le manifiestan al estudiante mediante personas o recursos. Pero pueden ser, también, signos-interpretantes cuando son resultados de un proceso de aprendizaje, que sirven para evidenciar las concepciones conformadas por los sujetos acerca de los objetos reales. Esto sucede por ejemplo, en las explicaciones expresadas por un grupo de estudiantes a una situación problema, a través de narraciones conceptuales; en las expresiones plasmadas en un documento escrito por los estudiantes, como producto de una vivencia; en el cuaderno resolutor; o en una participación grupal sobre un tema de discusión.

En el curso Transición aritmética-álgebra los signos-vehículos son representaciones de algunos signos-objetos como: aritmetización del continuo, proporción, proporcionalidad y estructuras recursivas. Que no son interpretados de forma consistente, según un punto de vista matemático, en la mayoría de casos; por tanto, no se convierten en signos genuinos para el signo-objeto de estudio. Otros ejemplos son la problemática de la elección de una unidad normalizadora de una o de toda colección de razones y la problemática de los números con coma.

Debido a que el universo numérico de una persona se manifiesta en sus hábitos, cuando interpreta signos-vehículos en los problemas que involucran el tratamiento con números y a que los hábitos, esquemas, la pueden conducir a acciones que considera correctas y adecuadas a las situaciones, según sus experiencias previas, aunque para la comunidad matemática comporten razonamientos o procedimientos no válidos, entonces la didáctica se enfrenta a la disyuntiva de considerar estos interpretantes y hábitos como errores a eliminar o como signos-vehículos de oportunidades de refinamiento hacia signos genuinos y, más aún, argumentos, que son signos de terceridad sostenidos en leyes. Entonces, la opción del refinamiento está vinculada a la constitución de un marco teórico y a una configuración epistémica similar a la de los conceptos cristalinos (Tall et al., 2012).

4.2 Refinamiento.

El término refinamiento, en este documento, está expuesto desde tres ideas que se encuentran en constante relación:

1. Los seres humanos cuentan con matemáticas encuerpadas (set-befores) que se desarrollan, a lo largo de la vida, con diferentes grados de complejidad (met-befores) (Tall et al. 2012);
2. Este desarrollo ocurre de forma continúa recogiendo el conocimiento previo y las experiencias individuales que se dan dentro de una comunidad, para ser consolidadas en conocimientos mejor desarrollados (pragmaticismo) Peirce y aceptados por una comunidad. Por lo que en el aula existen procesos semióticos y, por tanto, de argumentaciones (Sáenz-Ludlow y Zellweger 2016);
3. y que es necesario reconocer que ser continuo no es sinónimo de linealidad, es decir, en los procesos de aprendizaje ocurren retrocesos y en muchas ocasiones el proceso es lento, pero es normal y natural (Parnafes y Disessa, 2013)

Para autores como Tall et al. (2012) las pruebas entendidas como argumentaciones que sostienen la corrección de procedimientos o la verdad de las aseveraciones o la plausibilidad de las explicaciones o conjeturas son centrales, incluso definitivas, dentro de la actividad matemática; tal vez por el carácter de generalidad que los matemáticos imprimen a sus objetos de trabajo, incluyendo los básicos de uso más común y distribuido. Esta centralidad permite tomarlas como índices de refinamiento de actividad matemática según Tall y Mejía-Ramos

(2012) “partiendo de la percepción primitiva, hacia concepciones más refinadas, descripciones y luego hacia definiciones utilizadas para hacer inferencias, construyendo un marco deductivo coherente, característico de la Geometría Euclidiana” (p. 138).

4.2.1 Las matemáticas ‘encuerpadas’ de David Tall.

En este apartado, expondremos la transformación de la actividad matemática como un proceso de refinamiento, acudiendo a relacionar las ideas de Tall et al. (2012), Tall y Mejía Ramos (2012) y Tall (2014) con las matematizaciones según Freudenthal (2002). Con esta intención acudiremos a investigaciones del cerebro, ciencia cognitiva, semiótica y argumentación. Además, consolidaremos un instrumento didáctico que servirá para examinar el discurso pedagógico de los estudiantes en el aula.

4.2.1.1 Argumentación y narraciones conceptuales.

Aunque el refinamiento tiene elementos de individualidad, como los procesos cognitivos, gran parte del trabajo se da en comunidad, tal como solicita Horta (2017) "considerar la noción de realidad y verdad (desde Peirce) como una concepción mental, resultado de la manera de conocer el mundo mediante el “sentido común crítico”; es decir, por medio del conocimiento aceptado dentro de una comunidad" p. (137). Transportar estas ideas al aula genera vivencias en trabajo colaborativo, en el que los estudiantes discuten, contrastan y consolidan conocimiento en relación con los objetivos del curso, de forma eficaz, y en algunos casos, eficiente; considerar la comunidad implica el “tránsito desde la filosofía de la conciencia, centrada en estructuras subjetivas necesarias para el conocimiento de los objetos, a una filosofía del lenguaje donde la primacía se sitúa en las prácticas de los seres capaces de lenguaje y acción” (Habermas et al., 2008, p.18).

Tall et al. (2012) establecen unas definiciones de prueba en un marco más general que "mostrar", "justificar", "explicar", “argumentar”, pero dado que el espacio de formación

Transición aritmética-álgebra fue diseñado desde los procesos de argumentación y el debate, nuestras definiciones estarán centradas en el trabajo de Toulmin et al. (1984). Este establece que existen dos sentidos de argumentación, el primero desde la autorreflexión del sujeto y el segundo, que se tomará en este documento, desde escenarios de confrontación en donde se discuten posturas y razonamientos entre dos o más personas (González, 2015). Los argumentos se estructuran según varios tipos de razonamiento: Analogía; generalización; signo (índice, síntomas; análisis, en un sentido lógico); causalidad (hipótesis que deben someterse a testeos: abducción); autoridad; clasificación (conjuntos, silogismos oposiciones (contradicción, contraejemplo, refutaciones), grado (usa escalas establecidas, provenientes del uso común de las ciencias y las matemáticas) y casos posibles o particulares (Toulmin et al., 1984).

4.2.1.2 Ciencia cognitiva e investigaciones del cerebro.

Las diferentes maneras de realizar pruebas en matemáticas están condicionadas al desarrollo cognitivo alcanzado por los estudiantes, existen varias teorías cognitivas en educación matemática, por ejemplo, Van Hiele (1986) muestra que la evolución que tienen los estudiantes en el estudio de geometría escolar, o geometría euclídea, va desde los niveles intuitivos y perceptuales hasta las estructuras deductivas. Por su parte, Bressan et al. (2016) y Romero (2019), desde el campo de estudio de la educación matemática realista, reconocen que los estudiantes pasan por diferentes niveles de compresión de un problema desde las relaciones que se pueden realizar dentro de la situación hasta las estructuras formales.

Para Vergnaud (1990) el conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento, y adquiere sentido cuando se intenta resolver una situación o problema. Se consideran dos clases de situaciones: en la primera, el sujeto puede resolver la situación de forma inmediata y usa un esquema único; y en la segunda clase de situaciones, el sujeto se ve obligado a usar diferentes esquemas que compiten, se acomodan, cambian y fusionan para generar un nuevo esquema más general que los anteriormente constituidos por el sujeto.

Clements (1999) ha mostrado que los bebés cuentan con habilidades matemáticas de conteo muy parecidas a las de los animales; Pérez-Echeverría y Scheuer (2005) muestran que el sentido de número está anclado a nuestra naturaleza biológica; Cruz et al. (2016) muestran evidencias de que infantes entre 0 y 2 años tienen ciertas habilidades aritméticas (de suma y resta) relacionadas con la naturaleza humana y que, además, cuentan con un desarrollo progresivo a lo largo de su vida.

Los hallazgos antedichos son apoyados por investigaciones sobre la corteza parietal. Estas evidencian zonas cerebrales específicas para distinguir cantidad y realizar operaciones matemáticas (Harvey et al., 2013; Dehaene, 2019). También, Tall et al. (2012) dan cuenta de ello:

> El pensamiento humano es una mezcla de procesos perceptivos globales que nos permiten "ver" los conceptos como una gestalt (Hoffmann, 1998) y operaciones secuenciales que podemos aprender a realizar como procedimientos matemáticos. El cerebro funciona mediante el paso de información entre las neuronas, cuyas conexiones se excitan a un nivel superior cuando están activas. El uso repetido refuerza las conexiones químicamente, de modo que es más probable que reaccionen en el futuro y construyan estructuras de conocimiento sofisticadas. (p.17)

Las investigaciones anteriormente descritas nos permiten considerar que los seres humanos están preconfigurados con habilidades matemáticas (embodiment), que posteriormente evolucionan por medio de la función adaptativa del conocimiento, cuando se enfrentan a diferentes tipos de situaciones. Entonces, podemos afirmar que la experiencia de una persona con situaciones matemáticas o matematizables son fuente de constitución y cambio de esquemas; por lo tanto, de constitución, reestructuración y explicitación de conceptos y argumentaciones matemáticas. Cuestiones que también reconocen Tall y Mejía-Ramos (2012) "A medida que se va sofisticando, este conocimiento previo se comprime en *conceptos pensables* que, conectados entre sí *en esquemas de conocimiento*, enmarcan la forma en que los individuos piensan" (p. 137). Así pues, la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) sirve para precisar y ejemplificar trayectorias de complejidad cognitiva que pueden ser presentadas a los estudiantes y promovidas en ambientes de aprendizaje; particularmente, los pasos desde conceptos y teoremas en acto hacia conceptos y teoremas definidos. En este último sentido, sirve para el paso entre los distintos mundos matemáticos propuestos por Tall (2014).

Esas habilidades (embodiment) se pueden resumir en tres facetas o categorías (set-before): el reconocimiento a través de la percepción, la repetición y el desarrollo del lenguaje. Las facetas se combinan para desarrollar pensamiento matemático y pruebas (Tall et al., 2012) en los siguientes seis niveles:

1. Reconocimiento perceptual como gestalts completas con relaciones percibidas.
2. Descripción verbal, representación pictórica o simbólica
3. Definición y deducción utilizando principios apropiados
4. Equivalencia de definiciones y propiedades específicas
5. Conceptos cristalinos con relaciones restringidas de prueba
6. Estructuras de conocimiento deductivo que relacionan conceptos cristalinos

Estos niveles están dirigidos a establecer un refinamiento de las concepciones actuales del estudiante hacia la constitución de conceptos cristalinos. Un concepto cristalino "[…] tiene una estructura interna de relaciones restringidas que hacen que tenga propiedades necesarias como parte de su contexto" (Tall et al., 2012, p. 20).

En la misma idea, Tall (2014) establece que el desarrollo del pensamiento matemático personal se da durante la vivencia en tres mundos de las matemáticas (embodiment, simbólico y formal) que se construyen acudiendo a los set-befores y los met-befores de las experiencias previas. En el mundo embodiment las entidades mentales son construidas como imágenes verbalizadas desde la percepción y acción humana; en el mundo de las matemáticas simbólicas, un concepto cristalino toma la forma de un procepto que permite pensamiento operatorio flexible; en las matemáticas formales, las relaciones proceptuales se tornan formulables verbalmente, ganan generalidad y extienden la coherencia, es decir, en el mundo formal un concepto matemático es cristalino para una persona cuando ella reconoce, expresa verbalmente, generaliza y distingue dominios de validez para distintas propiedades del concepto, que al ser verdaderas e irrefutables pueden convertirse en aseveraciones demostradas, teoremas (Tall et al., 2012). Por tanto, la compresión de las matemáticas en tanto tránsito por los mundos matemáticos implica: estructura de conocimiento combinada, conceptos cristalinos sofisticados, grados de generalidad de entendimiento, prácticas matemáticas diferenciadas, refinamiento de los conocimientos previos que se modifican vía la generalización, la coherencia y la prueba, cuya irrefutabilidad proporciona un criterio de estabilidad y coherencia. Aunque, según Lakatos (1986)

> Al probar, no mejoramos necesariamente. Las pruebas mejoran cuando la idea de la prueba descubre aspectos inesperados de la conjetura ingenua que aparecen entonces en el teorema. Pero, en las teorías *maduras*, podría no ocurrir así. Ocurre de manera efectiva en el caso de teorías jóvenes *en desarrollo*. Este entretejido de descubrimiento y justificación, de mejora y prueba, es principalmente característico de las últimas.

Por su parte, en el campo de estudio de la educación matemática realista, Bressan et al. (2016) evidencian la posibilidad de evolucionar en la comprensión de un problema matemático que tienen los estudiantes de secundaria. Esta evolución está relacionada con niveles de comprensión que van desde el entendimiento de relaciones dentro de una situación específica hasta la constitución de estructuras formales que incluyen dicha situación. Romero (2019) propone indicadores de argumentación y uso estructural de lenguajes en estos niveles de comprensión, para promover una práctica de matematización (Freudenthal, 2002) en un ambiente de aprendizaje universitario dirigido a la formación de profesores de matemáticas. Estos niveles para Romero (2019), en lo que refiere al ambiente de aprendizaje diseñado, son:

Situacional: los argumentos están estrictamente relacionados con la situación específica que fue formulada o con variaciones simples de ella; es decir, los argumentos usan garantías empíricas obtenidas de manera directa como datos numéricos, figurales o algebraicos.

Referencial: los argumentos están estrictamente relacionados con preguntas y respuestas a preguntas que a) usan la situación como referente para la constitución de clases de esa situación; b) aparecen esquemas iniciales como representaciones icónicas o diagramáticas idiosincrásicas así como representaciones simbólicas convencionales, vinculadas a los argumentos antes referidos; c) los argumentos centrales pueden estar vinculados a teoremas y conceptos en acto; d) las cantidades tratadas están claramente identificadas y expresadas.

General: los argumentos están estrictamente relacionados con preguntas y respuestas a preguntas que usan la clase de situaciones constituida; los argumentos centrales empiezan a estar vinculados a teoremas y conceptos definidos. Los esquemas y representaciones diagramáticas se refieren a la clase de situaciones y están complementadas con representaciones simbólicas; las cantidades o las magnitudes tratadas están claramente identificadas y expresadas, así como las relaciones matemáticas entre ellas. El uso de lenguaje algebraico, geométrico y aritmético es explícito y sistemático.

Formal: los argumentos están vinculados a teoremas y conceptos definidos, pero en tanto forma de expresión y estructuración de teoremas, conceptos y representaciones producidos en la matematización general. Las representaciones diagramáticas están complementadas con representaciones simbólicas; se logra establecer, explícitamente, nichos teóricos para el problema. Las cantidades, magnitudes y las relaciones entre ellas obedecen a una sintaxis clara y, sistemáticamente [pe., siguen la propuesta de Schwartz (1988)]. El uso del lenguaje algebraico alfanumérico, geométrico y el aritmético en cada caso es correcto. (pp. 2-3)

y se relacionan de manera estrecha con los primeros cinco niveles de evolución del pensamiento matemático, según la lista de Tall et al. (2012) presentada y, por lo tanto, con el paso por los distintos mundos matemáticos (Tall, 2014). En tanto en cada mundo existen modos, medios y circunstancias diferenciadas para la actividad matemática, cada mundo matemático exige prácticas matemáticas diferenciadas, entonces el paso por estos distintos mundos es, a la vez, un refinamiento de las prácticas matemáticas. Así mismo, sucede con las matematizaciones al modo de Freudenthal (2002).

5. Análisis de los datos y matriz de análisis.

La teoría presentada puede ser compilada en una matriz que es un instrumento que sirve para estudiar los discursos pedagógicos en el aula. Las columnas son independientes, no se relacionan entre sí, pero en todos los discursos pedagógicos hay elementos provenientes de cada columna que permiten describir y situar al estudiante en una localidad dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

La primera columna sirve para determinar de qué lugar vienen los conocimientos que se están poniendo en acción, porque como se dijo en párrafos anteriores, todo conocimiento es el refinamiento del conocimiento previo y, por tanto, proviene de algún lugar de una experiencia. Las investigaciones del grupo Mescud y la experiencia del profesor encargado del ambiente de aprendizaje sirvieron para localizar algunas fuentes habituales de los estudiantes cuando enfrentan situaciones que involucran el tratamiento con números, entre ellas están: Residuo escolar; Sobre-generalización; Sentido numérico; Sentido del infinito; Académica.

La segunda columna sirve para identificar el estatuto lógico de distintas piezas que conforman el discurso del estudiante. No se trata de evidenciar el grado de conciencia con que usa los elementos de la columna, sino de identificar el papel de las definiciones (D), conceptos, proposiciones (P) y caracterizaciones (C), que están inmersos en la argumentación que construye y desarrolla el estudiante en el aula, cuando debate o discute. Esta columna sirve, además, para evidenciar qué tipo de matemática están usando los estudiantes y, por tanto, el mundo matemático en el que se encuentran (Tall, 2014).

La tercera columna es un reflejo del diseño del espacio de formación transición aritmética-álgebra, dado que uno de los objetivos en el diseño es la *reflexión acerca de la práctica en que los objetos emergen*, en palabras de Freudenthal (2002), es generar estructura matemática, y añadimos, según un punto de vista didáctico. Esa estructura matemática pasa por diferentes niveles de matematización que sitúan la comprensión de los estudiantes en distintos niveles del proceso de enseñanza-aprendizaje. Pero para el grupo los niveles de matematización y los seis niveles propuestos por Tall et al. (2012) son similares, dado que los primeros niveles corresponden a las ideas intuitivas y los últimos a las estructuras formales. Por tanto, se decide tomar lo propuesto por Tall et al. (2012) en la columna para analizar la actividad matemática de los estudiantes a lo largo del espacio de formación.

La cuarta columna identifica las relaciones de los significados contenidos en los esquemas que permiten la organización del comportamiento en una situación (Vergnaud,1990), y a su vez categorizar los conocimientos matemáticos de referencia que usa el estudiante en el discurso. Dichos conocimientos pueden ser categorizados como; especializado, cuasi-especializado, común-calle y erróneos.

Tabla 4

Elementos del saber creer (ESC)

Fuente (F)	Nivel lógico (NL)	Grado de generalidad (GG)	Relación con los conocimientos de referencia (RCR)	
Residuo escolar; Sobre-generalización; Sentido numérico; Sentido del infinito; Académica.	Definición (D); Caracterización (C); Concepto, Proposición (P)	Nivel 1; Nivel 2; Nivel 3; Nivel 4; Nivel 5; Nivel 6.	Proposición en acto; Concepto en acto; Doxales (ley de la oreja; carita feliz; R3… con poco contenido conceptual, p.e. proporción: +, +; -,-)	Especializado; Cuasi-especializado; Común-calle: distribuido en cada sociedad específica; Erróneos

Nota. Fuente: Adaptado de Polo et al. (2016). Fuente propia.

Las evidencias se presentarán en 3 momentos y se acudirá a utilizar la tabla 3 como instrumento de análisis y a las ideas del signo Peirceano. Para ello, es necesario aclarar que cada una de las evidencias tiene signo-vehículo, signo-objeto y signo-interpretante pero el lector deberá encontrar los signos-interpretantes en las siguientes evidencias más o no en la que se está analizando. Por ejemplo, los signos interpretantes de las evidencias 1 y 2, se pueden observar en las evidencias 3 y 4.

5.1 Momento 1.

El espacio de formación Transición aritmética-álgebra, espacio de formación del núcleo de Matemáticas escolares, tiene como propósito que los estudiantes refinen sus conocimientos adquiridos en la escuela (fuente, residuo escolar) hasta convertirse en conocimientos coherentes y eficientes de un buen sentido numérico. Entendido este último como las "destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los números, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas" (Godino et al., 2009. p.1).

Para mostrar evidencia de ello, se extrajeron fragmentos de video desde el comienzo de la tarea 8 (expuesta en el diseño). Lo que implicaba que los estudiantes habían trabajado las 7 primeras tareas del diseño y, por tanto, tenían experiencias en la medición de objetos usando diferentes unidades, además, estaban comenzando a reconocer las bases de magnitud como una herramienta potente para realizar mediciones y estimaciones. De forma paralela a la tarea 8 los estudiantes debían responder unas preguntas hechas por el profesor, que fueron: ¿Cuáles bases de numeración han manejado? ¿Qué tipo de situaciones que involucran conceptualmente base de numeración han enfrentado? y ¿Qué es una base de numeración? Como respuesta a la primera pregunta se encontró que los estudiantes habían trabajado previamente con base dos, tres, cuatro, cinco, siete, diez, doce y hexadecimal. En la segunda pregunta se pudo observar que los estudiantes han tenido experiencias con las bases desde lo procedimental (operaciones) y asocian algunas aplicaciones de las bases con el estudio del lenguaje de programación en base dos y la navegación.

La tarea 8 junto con las preguntas hechas por el profesor permitieron observar las concepciones de los estudiantes, sobre las bases de numeración, que fueron adquiridas en la escuela al interpretar diferentes signos-vehículos y producir signos-interpretantes. El estudiante o el intérprete relaciona esos signo-interpretantes con una expresión elegible según un modo de expresión, quizás escogido, para continuar la comunicación (codificar). Tanto la expresión como el modo escogido dependen del conocimiento específico del hablante sobre el objeto-real (bases de numeración) referido por el signo-vehículo y de su interpretación de las condiciones del escenario en que se encuentra y del auditorio al que se dirija. Algunas concepciones encontradas fueron:

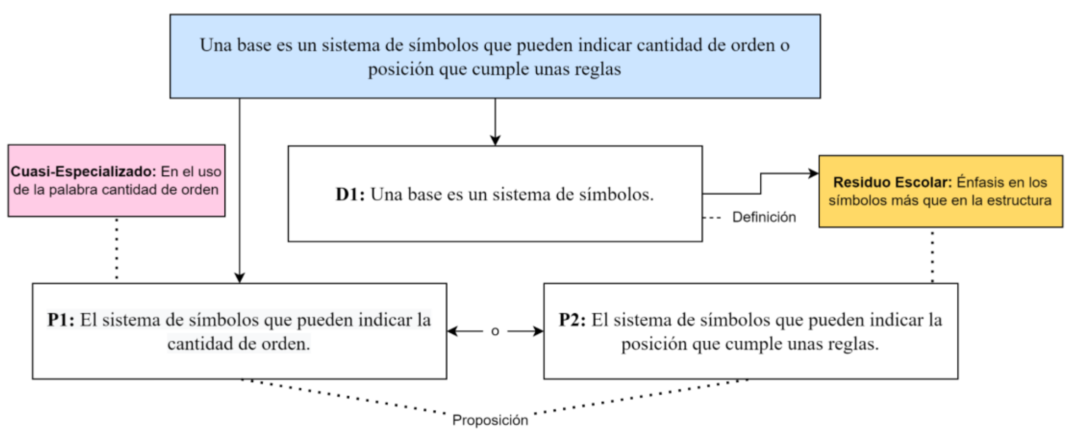
Evidencia 1

Estudiante 1: Una base es un sistema de símbolos que pueden indicar cantidad de orden o posición que cumple unas reglas.

El nivel lógico de la evidencia puede ser expresado a través de una definición y dos proposiciones que está usando el estudiante. D1: Una base es un sistema de símbolos. P1: El sistema de símbolos pueden indicar cantidad de orden P2: El sistema de símbolos puede indicar posición que cumple unas reglas.

Figura 6

Esquema argumentativo del estudiante 1



Nota. Fuente Propia.

En D1 se puede deducir un residuo escolar que en RCR es entendido como un conocimiento doxal debido a que son las creencias y estrategias mnemotécnicas que el estudiante aprende sobre un concepto matemático; en este caso particular, privilegiando la memorización de símbolos más que las relaciones.

Tabla 5

Relación semiótica de la Definición 1 usada por el Estudiante

Signos	Análisis
Signo-vehículo	Los estudiantes al haber trabajado con base dos, tres, cuatro, cinco, siete, diez, doce y hexadecimal relacionan los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 0 y algunas letras que representan otras cantidades para representar el concepto de **número** (Vergnaud, 1990). Al referenciar sólo algunos dígitos como representación de los números podemos decir que está usando tokens, y por tanto, son sinsigno según la tabla 3. Esto implica que el estudiante identifica la base de numeración con dígitos necesarios y suficientes para referir todos los números expresables en una base dada.
Signo-objeto	El trabajo con los dígitos a muestra de forma implícita que el universo numérico del estudiante tiene un cierto grado de conocimiento sobre el manejo de las agrupaciones en las bases de numeración, por tanto, se puede deducir que relacionar las bases de

	numeración con el tratamiento de los dígitos es un tipo de signo-objeto, dado que los signos-objetos relacionan los signos-vehículos con las concepciones que tienen las personas sobre los objetos-reales. De forma más específica, y acudiendo a la tabla 3, podemos decir que el signo-objeto representa un ícono-diagramático.

Nota. Fuente: propia.

P1 muestra que el estudiante usa un conocimiento cuasi-especializado al referirse a cantidad de orden, debido a que utiliza sinónimos para expresar la utilidad que tienen las bases para hallar la cardinalidad de colecciones concretas. En P2 no es posible identificar los conocimientos de referencia que el estudiante esta pensando, debido a que el estudiante no es explícito con las reglas que deben cumplir los símbolos en la base.

Tabla 6

Relación semiótica de la Proposición 1 usada por el Estudiante 1

Signos	**Análisis**
Signo- vehículo.	Al utilizar el término "cantidad de orden" sabemos que está usando un sinónimo de una condición matemática (peso posicional) y, por tanto, es un token de la condición matemática y eso lo convierte en un Sinsigno.
Signo-objeto	Por su parte, las palabras son signos y en ellas hay significados aceptados dentro de comunidades, todo signo establecido como acuerdo es un símbolo, según la categoría de los signos de Peirce. En esta evidencia, podemos ver el uso del término "cantidad de orden" aceptado localmente por la comunidad; sin embargo, para la comunidad matemática ese término no es el habitualmente usado. Esto lleva a pensar que podría ser un signo-objeto simbólico, pero al no estar aceptado por la comunidad matemática, es un signo-objeto indéxico en vía de ser simbólico.

Nota. Fuente: propia.

El estudiante se encuentra en un nivel 1 de grado de generalidad, debido a que percibe las bases de numeración como una totalidad respecto a la escritura, dando mayor peso a los símbolos reforzados previamente mediante el trabajo algorítmico con representaciones simbólicas. Además, es posible considerar que el estudiante está razonando por generalización, debido que ha extraído de cada una de estas vivencias elementos particulares de las bases de numeración hasta crear un hábito según Peirce o esquema para Vergnaud (1990) en donde ha generalizado las bases de numeración como conjunto de dígitos que cumple unas reglas (Toulmin et al., 1984).

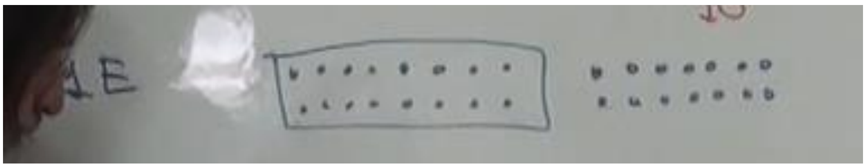
Evidencia 2

Esa forma de percibir las bases da comienzo a una primera problemática conceptual: "*la necesidad del uso de letras para diferenciar el cardinal que refieren los dígitos en bases mayores a diez*". La cual está dirigida por la pregunta que realiza un estudiante ¿después de la base nueve, la diez ya se tratan con letras? Algunos estudiantes consideran que el uso de las letras es por conveniencia y permite distinguir el cardinal que refieren los símbolos, a modo de ejemplo específico se propone caracterizar la diferencia entre 1E y 114 en base diez y seis dado que E es el catorceavo símbolo en el orden asignado en la base catorce. Para hacer la distinción el estudiante 10 hizo la siguiente intervención:

Estudiante 10: Como en el primero hay un uno significa que antes se llegó a un tope de diez y seis, y la **E** representa:: (....) Haga diez y seis puntitos [Dirigiéndose al profesor] y enciérrelos en un rectángulo. Luego uno hace otros °catorce puntos°, entonces… (..)

Figura 7

Representación icónica de 1E



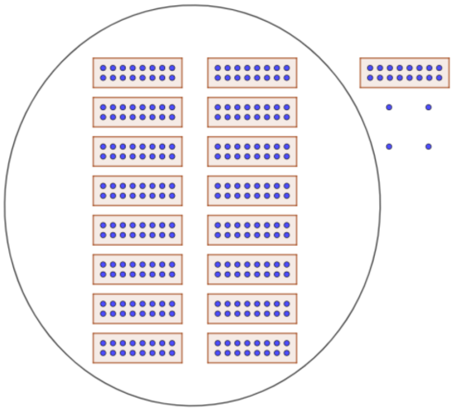
Nota. Fuente Propia.

Profesor: Esto es 1E [Señala Figura 7] ¿114 qué da?

Estudiante 10: Espere, digamos que el rectángulo representa los grupos de diez y seis puntos, tendríamos que hacer diez y seis rectángulos. Todos estos estarían metidos en en un círculo, Y por último otro rectángulo, y cuatro puntos. [Dibuja en el tablero la Figura 8]

Figura 8

Representación icónica de 1.1.4 [Figura elaborada por el transcriptor para mejor interpretación]

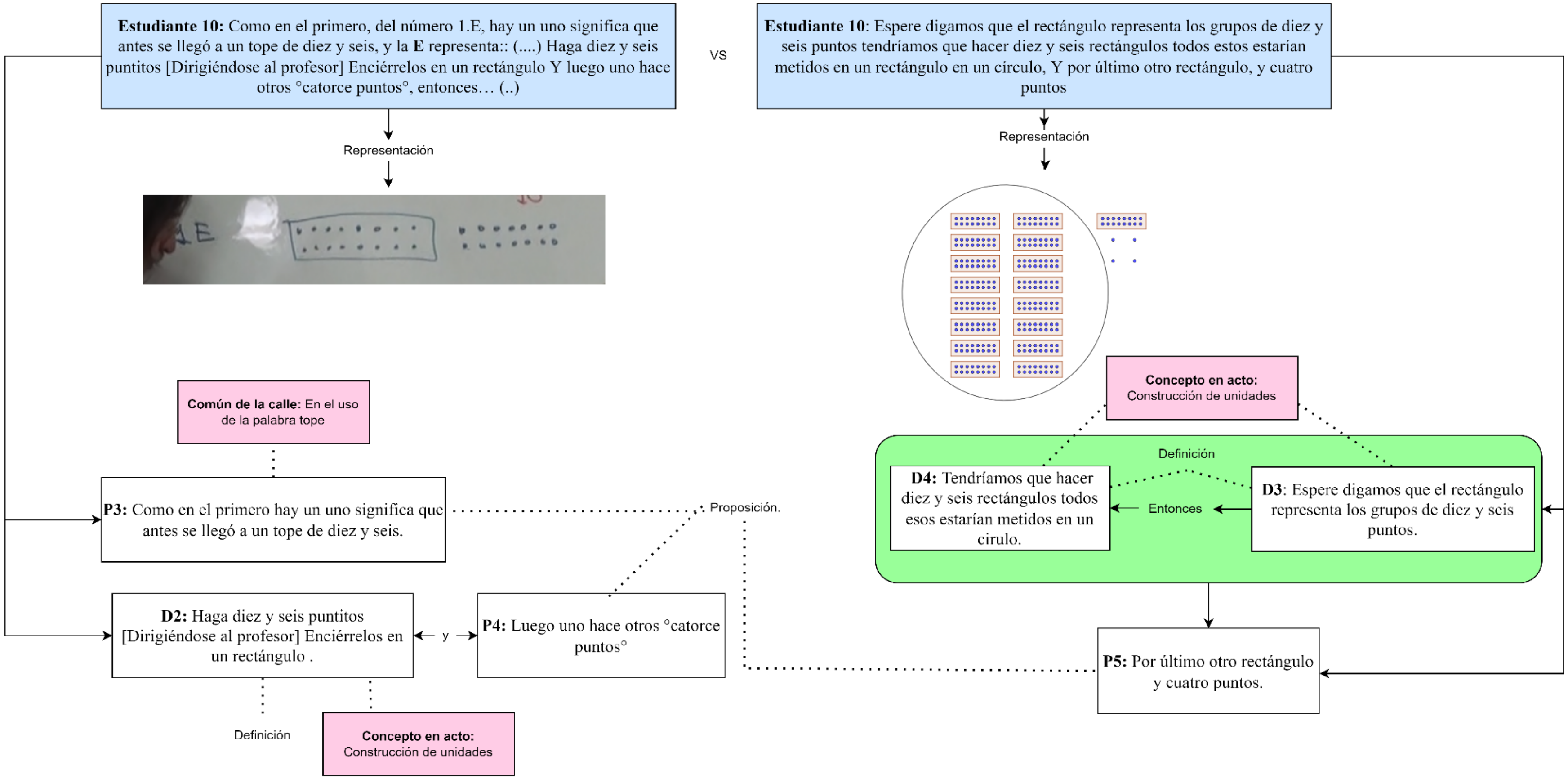


Nota. Fuente Propia.

El nivel lógico de la evidencia puede ser expresado a través de tres proposiciones y tres definiciones que está usando el estudiante las cuales son: P3: Como en el primero hay un uno, significa que antes se llegó a un tope de diez y seis. D2: Haga diez y seis puntitos y enciérrelos en un rectángulo. P4: Y luego uno hace otros catorce puntos. D3: Digamos que el rectángulo representa los grupos de diez y seis puntos. D4: Tendríamos que hacer diez y seis rectángulos todos estos estarían metidos en un círculo. P5: Y por último otro rectángulo, y cuatro puntos.

Figura 9

Esquema argumentativo del estudiante 10



Nota. Fuente Propia.

En P3 se observa que el estudiante utiliza el término tope que proviene del uso común de la calle y sirve para expresar las relaciones presentes entre los símbolos que están ocupando una posición relativa en la escritura y el cardinal que refieren.

Tabla 7

Relación semiótica de la Proposición 3 usada por el Estudiante 10

Signos	**Análisis**
Signo-vehículo	Al utilizar el término "tope" sabemos que está usando un sinónimo de peso posicional, y por tanto, es un token de una condición matemática aceptada por la comunidad (peso posicional) y eso lo convierte en un Sinsigno.
Signo-objeto	Por su parte, las palabras son signos y en ellas hay significados aceptados dentro de comunidades, todo signo que se establezca como acuerdo es un símbolo según la categoría de los signos de Peirce. En esta evidencia podemos ver que el uso del término "tope" es aceptado localmente por los integrantes del espacio de formación, sin embargo, para la comunidad matemática ese término no es el correcto. Esto lleva a pensar que podría ser un signo-objeto simbólico, pero al no estar aceptado por la comunidad matemática es un signo-objeto indéxico que está en vía a ser simbólico.

Nota. Fuente: propia.

En D2, D3 y D4 el estudiante construye unidades y les asocia una representación icónica. La construcción de las unidades está asociado a un concepto en acto de las bases de numeración el cual estructura las unidades en razones de uno a n entre dos unidades consecutivas.

Tabla 8

Relación semiótica de las Definiciones 2, 3 y 4 usadas por el Estudiante 10

Signos	**Análisis**
Signo-vehículo	Al utilizar algunas representaciones para las cantidades sabemos que está usando casos particulares de los objetos abstractos de números, y

	por tanto, son tokens de una condición y eso lo convierte en un Sinsigno.
Signo-objeto	Entre un cuadrado, círculo y rectángulo no hay una condiciones necesarias y existentes como representación de los números sino es un valor que es adjudicado por una persona, por tanto la convierte en iconos metafóricos. Sin embargo, dentro de la comunidad local podemos decir que todo signo que se establezca como acuerdo social es un símbolo según la categoría de los signos de Peirce, por tanto, al definir representaciones de cantidades en una base específica y que estas representaciones sean aceptadas por la comunidad las convierte en símbolos.

Nota. Fuente: propia.

El estudiante se encuentra en el segundo grado de generalidad expuesto por Tall et al. (2012), dado que, en su discurso, utiliza representaciones icónicas que le permiten explicitar la relaciones existentes entre las agrupaciones y las representaciones simbólicas (diagramas y símbolos en el sentido de Peirce). En esta representación, el estudiante reconoce propiedades de recursividad de las bases de numeración. Además, en este discurso argumentativo el estudiante 10 realiza un razonamiento por contraejemplo y por caso particular, puesto que este contraejemplo pretende no contradecir el razonamiento, sino contradecir sus conclusiones. El estudiante quiere mostrar lo que sucedería si se omitiera el uso de las letras en la escritura de los dígitos. Realizando un contraejemplo no de la hipótesis, sino de las conclusiones de la misma, por medio de un caso particular entre la comparación de 1E y 114 obteniendo así las dos diferentes representaciones.

5.2 Momento 2

En la sesión dos y tres, los estudiantes siguieron trabajando sobre "*la necesidad del uso de letras para diferenciar el cardinal que refieren los dígitos en bases mayores a diez*" acudiendo a otras representaciones como simbólicas y algebraicas, en la distinción de 1E y 114. A partir de ello, los estudiantes lograron establecer relaciones entre las representaciones y caracterizar la estructura recursiva de las bases. Además, surgen conceptos técnicos como valor posicional y sistema posicional que son mencionados por los estudiantes, pero no explicitados.

Es así como, en la sesión tres, el espacio de formación pasa al segundo momento importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje "*caracterizar los posibles elementos que conforman las bases"* por medio de la estructura de la cantidad de Schwartz (1988). Esta teoría establece que la cantidad es una tripla que relaciona numerosidad, cosa medible y unidad de medida. Las narraciones presentadas en el momento 2 provienen de las fuentes sentido numérico y residuo escolar, pero a medida que se van refinando los universos numéricos de los estudiantes, empiezan a usar con menor frecuencia la fuente residuo escolar y vinculan otras fuentes como la académica, entendida como el uso de elementos teóricos en la elaboración de argumentos.

Evidencia 3

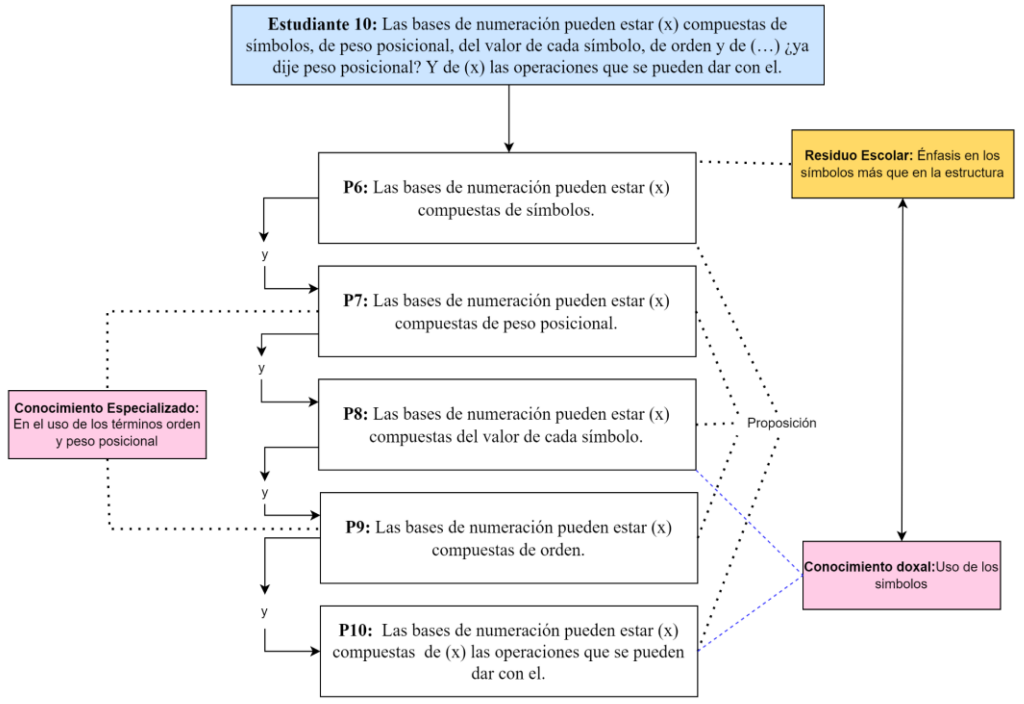
Para empezar a caracterizar los elementos de la base un estudiante responde:

Estudiante 10: Las bases de numeración pueden estar (x) compuestas de símbolos, de peso posicional, del valor de cada símbolo, de orden y de (…) ¿ya dije peso posicional? Y de (x) las operaciones que se pueden dar con él.

En esta evidencias podemos encontrar cinco proposiciones: P6: Las bases de numeración pueden estar compuestas de símbolos. P7: Las bases de numeración pueden estar compuestas de peso posicional. P8: Las bases de numeración pueden estar compuestas del valor de cada símbolo. P9: Las bases de numeración pueden estar compuestas de orden. P10: Las bases de numeración pueden estar compuestas de las operaciones que se pueden dar con el. Cada una de las proposiciones describe, desde las vivencias de los estudiantes, los elementos y/o relaciones que pueden formar parte de las bases de numeración.

Figura 10

Esquema argumentativo del estudiante 10



Nota. Fuente Propia.

En P7 y P9 el estudiante utiliza los términos peso posicional y orden que son aceptados dentro de la comunidad matemática y, por tanto, son conocimientos especializados y a su vez provienen de la fuente de sentido numérico.

Tabla 9

Relación semiótica de las proposiciones 7 y 9 usadas por el Estudiante 10

Signos	**Análisis**
Signo-interpretante	Estos signos-interpretantes complementan las relaciones triádicas de las evidencias 1 y 2, porque como se dijo en el marco teórico, para Peirce es tan importante que el objeto se interprete como lo es que se le represente. Relacionar condiciones matemáticas que antes eran referidas como “topes” y “cantidades de orden” con los términos “peso posicional” y “orden” representa un avance en el proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, los estudiantes no especificaron ni definieron lo que esos términos implican y son para la comunidad matemática. Por tanto, son Rhemas, es decir, posibilidades de comunicar una característica matemática.

Signo-vehículo	Los términos “peso posicional” y “orden” sabemos que son formas de referir una condición matemática aceptada por la comunidad matemática, y eso convierte a estos términos en tokens, es decir, en Sinsignos.
Signo-objeto	Por su parte, las palabras son signos y en ellas hay significados aceptados dentro de comunidades, todo signo que se establezca como acuerdo es un símbolo, según la categoría de los signos de Peirce. En esta evidencia, podemos ver que el uso de los términos “orden” y “peso posicional” son aceptados por la comunidad matemática local, esto lleva a pensar que son signos-objeto simbólicos.

Nota. Fuente: propia.

Por su parte, en P8 y P10, al igual que en D1, se muestra el mismo residuo escolar que es a su vez un conocimiento doxal, los argumentos de los estudiantes siguen centrándose en la importancia de los símbolos, más que en las relaciones internas que tiene el concepto matemático.

Tabla 10

Relación semiótica de las proposiciones 8 y 10 usadas por el Estudiante 10

Signos	**Análisis**
Signo-interpretante	Estos signos-interpretantes complementan las relaciones triádicas de las evidencias 1 y 2, porque como se dijo en el marco teórico, para Peirce es tan importante que el objeto se interprete como lo es que se representen. El relacionar las bases de numeración con un conjunto de dígitos como producto de su experiencia en el colegio y de las creencias de sus compañeros convierte a esta relación en una Rhema, es decir, una posibilidad.
Signo-vehículo	Los estudiantes siguen refiriendo el signo-vehículo de la tabla 4; es decir, los universos numéricos de los estudiantes siguen pensando en los dígitos como algunas representaciones del concepto de **número**. Al referenciar solo algunos dígitos como representación de los números podemos decir que está usando tokens y, por tanto, son sinsigno según la tabla 3.
Signo-objeto	El trabajo con los dígitos de forma implícita muestra un grado de conciencia sobre el manejo de las agrupaciones en las bases de numeración, por tanto, se puede deducir que relacionar las bases de

numeración con el tratamiento de los dígitos es un tipo de signo-objeto, dado que los signos-objetos relacionan los signos-vehículos con las concepciones que tienen las personas sobre los objetos-reales. De forma más específica y acudiendo a la tabla 3 podemos decir que el signo-objeto representa un ícono-diagramático.

Nota. Fuente: propia.

El estudiante se encuentra en el nivel 2 de Tall et al. (2012) porque reconoce una propiedad (P9) y dos necesidades (P7 y P8) de las bases de numeración. P7 es una necesidad porque permite diferenciar unidades que refiere cada dígito en la escritura simbólica. P8 es una necesidad porque permite consolidar una representación simbólica a partir de una icónica en una escritura más óptima. P9 es una propiedad porque es la manera en que se construyen las agrupaciones.

Por su parte, es posible identificar un razonamiento por generalización Toulmin et al. (1984) porque es el producto de sus experiencias previas. En las experiencias previas se encuentran aquellas consolidadas en su etapa escolar que involucran el tratamiento con símbolos y procedimientos algorítmicos y también, aquellas que se empezaron a refinar dentro de la comunidad de práctica presente en el curso de transición-aritmética álgebra.

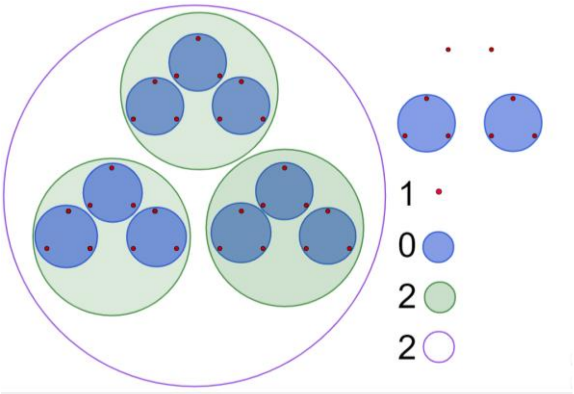
Evidencia 4

En consecuencia, se empezó discutir sobre la concepción de orden dada por el estudiante 10, que después de expresar algunos argumentos basados en representaciones icónicas, se encontró que él entendía la palabra orden como la manera en que se agrupan los objetos de forma recursiva en la base, como se ve a continuación:

Estudiante 10: Cuando uno escoge una base, uno escoge como ordenar esos puntos [El estudiante dibuja en el tablero varios puntos]. Digamos que escogemos la base tres y comenzamos a hacer asociaciones de tres [comienza a agrupar de a tres puntos luego, encierra tres grupos de tres puntos, y por último encierra tres grupos de tres grupos de tres puntos como se ve en Figura 11]

Figura 11

Agrupaciones de puntos en base 3 [Figura elaborada por el transcriptor para mejor interpretación]



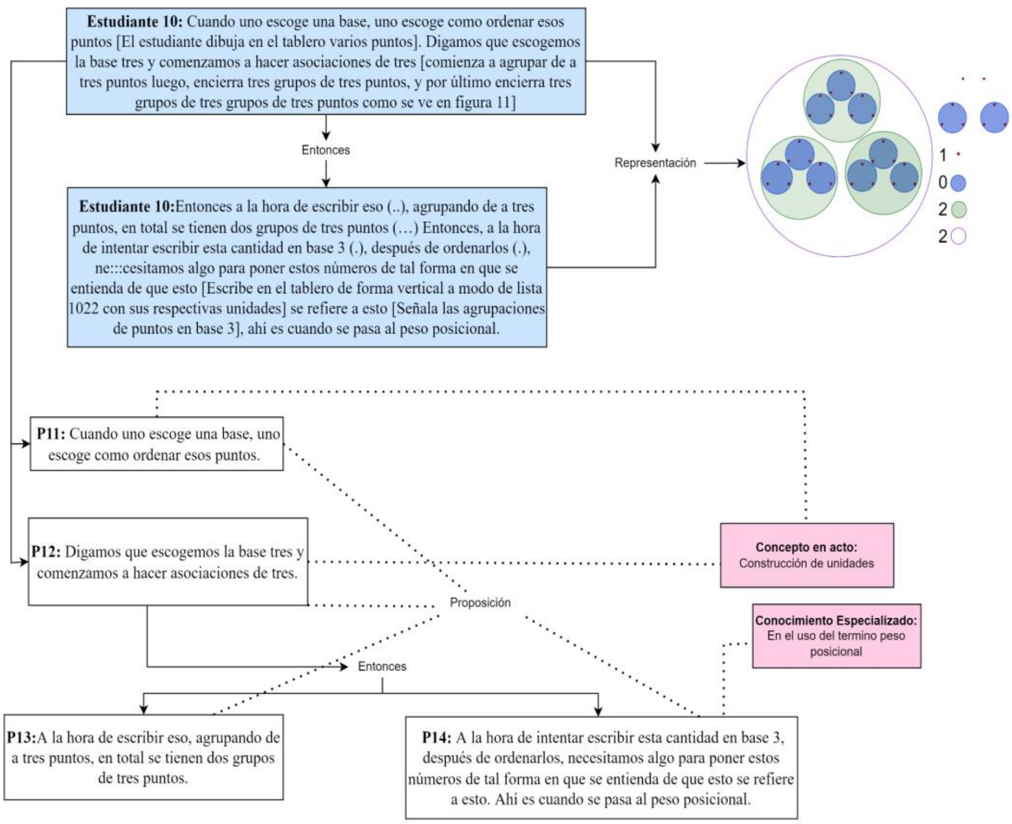
Nota. Fuente Propia.

> **Estudiante 10:** Entonces a la hora de escribir eso (..), agrupando de a tres puntos, en total se tienen dos grupos de tres puntos (…) Entonces, a la hora de intentar escribir esta cantidad en base 3 (.), después de ordenarlos (.), ne:::cesitamos algo para poner estos números de tal forma en que se entienda de que esto [Escribe en el tablero de forma vertical a modo de lista 1022 con sus respectivas unidades] se refiere a esto [Señala las agrupaciones de puntos en base 3], ahí es cuando se pasa al peso posicional.

La evidencia puede ser desglosada en cuatro proposiciones. P11: Cuando uno escoge una base, uno escoge como ordenar esos puntos. P12: Digamos que escogemos la base tres y comenzamos a hacer asociaciones de tres. P13: A la hora de escribir eso, agrupando de a tres puntos, en total se tienen dos grupos de tres puntos. P14: A la hora de intentar escribir esta cantidad en base 3, después de ordenarlos, necesitamos algo para poner estos números de tal forma en que se entienda de que esto se refiere a esto. Ahí es cuando se pasa al peso posicional.

Figura 12

Esquema argumentativo del estudiante 10



Nota. Fuente Propia.

En P11 y P12 es posible observar el mismo concepto en acto expuesto en D2, D3 y D4 que muestra la manera en que los estudiantes construyen unidades, y les asocian representaciones icónicas y simbólicas, en razones de uno a n entre dos unidades consecutivas, y por tanto, los Signos-vehículos, Signos-objetos y Signos-interpretantes pueden observarse en la tabla 8.

En P14, se observa el mismo conocimiento especializado (peso posicional) de P7 que es una relación matemática que permite el paso de las representaciones icónicas a representaciones simbólicas por medio de los dígitos, además, este paso permite la escritura de infinitas cantidades con un número finito de dígitos. Este conocimiento especializado fue refinado en la evidencia 3, evidenciando por primera vez el uso del término peso posicional, por tanto, los Signos-vehículos, Signos-objetos y Signos-interpretantes pueden observarse en la tabla 9 que es el análisis de los signos de P7 de la evidencia 3.

El estudiante se encuentra en un nivel 2 según Tall et al. (2012), porque al igual que en la segunda evidencia del momento 1, usa representaciones icónicas y simbólicas para expresar las relaciones existentes en las bases de numeración. En este caso, para expresar las relaciones entre las agrupaciones y el peso posicional. Los razonamientos empleados por el estudiante son el razonamiento por causalidad y el razonamiento por caso particular. El primero se puede identificar, ya que los argumentos de causa requieren, en primer lugar, una generalización causal o hipótesis que afirma que si se observa tal o cual causa, es de esperar que se produzca un efecto (Toulmin et al., 1984). En lo realizado por el estudiante, se observa que, en P11, el estudiante identifica una correlación existente entre la selección de la base de numeración y las formas en que se construyen las unidades y, por tanto, puede ser considera como un razonamiento causal de tipo: concomitant variations. Además, P11 es respaldada por P12, P13 y P14 que se estructura en un razonamiento por caso particular, porque a partir de un ejemplo, el estudiante expresa la correlación expuesta en P11.

Evidencia 5

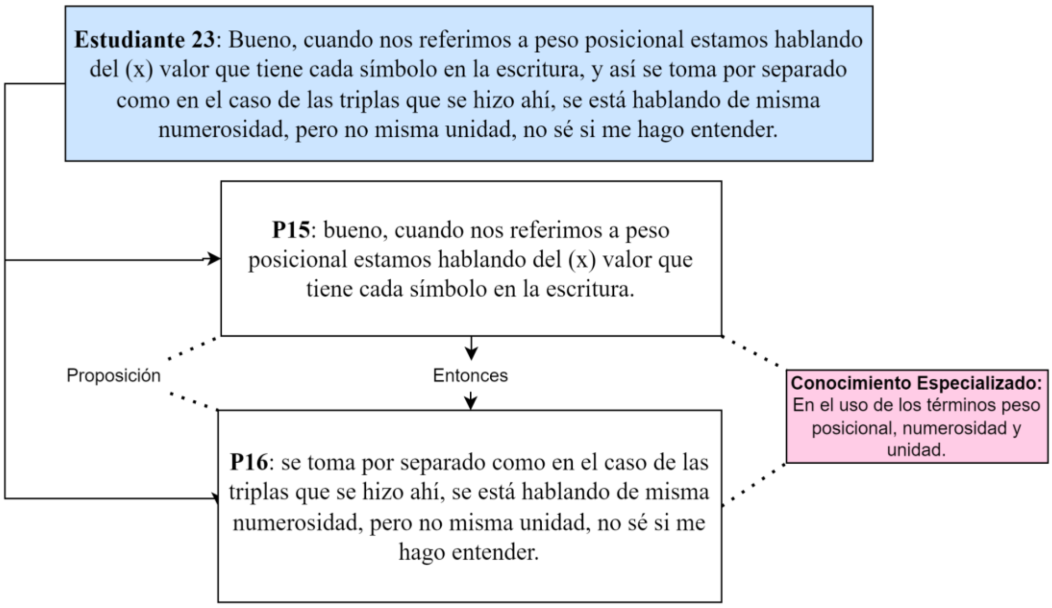
La discusión concluyó que el término orden no es el adecuado para expresar la forma en que se agrupan los elementos en una base de numeración, en cambio, se propuso utilizar el término estructurar. Además, a partir de algunas intervenciones se diferencia bases y sistemas de numeración, dicha diferencia radica en que las operaciones se encuentran en el sistema de numeración. En relación con los símbolos o dígitos, se concluyó que surgen en la necesidad de representar numerosidades, pero no son parte de la base. Enseguida de esto se empezó a trabajar sobre la caracterización del peso posicional. Como se muestra en la siguiente evidencia:

> **Estudiante 23**: Bueno, cuando nos referimos a peso posicional estamos hablando del (x) valor que tiene cada símbolo en la escritura, y así se toma por separado como en el caso de las triplas de Schwartz, se está hablando de misma numerosidad, pero no misma unidad.

Desde el nivel lógico se puede identificar que el estudiante usa dos proposiciones: P15: Cuando nos referimos a peso posicional estamos hablando del valor que tiene cada símbolo en la escritura. P16: se toma por separado como en el caso de las triplas de Schwartz, se está hablando de misma numerosidad, pero no misma unidad.

Figura 13

Esquema argumentativo del estudiante 23



Nota. Fuente Propia.

En P15 y P16 el estudiante emplea los términos especializados: peso posicional, numerosidad y unidad con relación a los conocimientos de referencia. Peso posicional es un término, como ya se dijo, aceptado por la comunidad matemática. Por su parte, numerosidad y unidad de medida provienen de la fuente académica de Schwartz (1988), la cual permite distinguir la estructura de la cantidad.

Tabla 11

Relación semiótica de las proposiciones 15 y 16 usadas por el Estudiante 10

Signos	**Análisis**

Signo-interpretante	Estos signos-interpretantes complementan las relaciones triádicas de las evidencias 3, 4 y 5, porque como se dijo en el marco teórico, para Peirce es tan importante que el objeto se interprete como lo es que se presenten. En evidencias anteriores se pudo observar que los estudiantes ya referían el "peso posicional" como una condición matemática, pero a diferencia de lo expuesto en la tabla 8 en esta evidencia los estudiantes dan algunos enunciados de lo que este término refiere, así, las interpretaciones de las evidencias anteriores se convierten en decisignos, ya que no son posibilidades sino hechos necesarios que llevan a hacer la distinción entre "numerosidad" "unidad de medida" y "peso posicional".
Signo-vehículo	Los términos "numerosidad" "unidad de medida" y "peso posicional" sabemos que son formas de referir una condición matemática aceptada por la comunidad matemática y en educación matemática, y eso convierte a estos términos en tokens, es decir, en Sinsignos.
Signo-objeto	Por su parte, las palabras son signos y en ellas hay significados aceptados dentro de comunidades, todo signo que se establezca como acuerdo es un símbolo según la categoría de los signos de Peirce. En esta evidencia podemos ver que el uso de los términos "numerosidad" "unidad de medida" y "peso posicional" son aceptados por la comunidad matemática, esto lleva a pensar que son signos-objeto simbólicos.

Nota. Fuente: propia.

El estudiante se encuentra entre un nivel 2 y 3 de la teoría de Tall et al. (2012) dado que el trabajo previo en el aula evidencia que los estudiantes del espacio de formación reconocen propiedades, necesidades y relaciones internas del concepto peso posicional que además puede ser explicitado por medio de diferentes representaciones. Pero al momento de definirlo, recae en ejemplificar y nombrar particularidades del concepto.

El argumento del estudiante da cuenta de un razonamiento por generalización, porque en su universo numérico queda expuesta la concepción de peso posicional que ha logrado refinar a través de vivencias en la comunidad de práctica, en donde ha vinculando elementos particulares propios de: la didáctica de las matemáticas, los acuerdos sociomatemáticos, y la estructura matemática para explicitar las relaciones entre los dígitos de un número y la representación icónica.

5.3 Momento 3

El momento dos concluyó que los únicos elementos de las bases son las agrupaciones que se construyen de forma recursiva. Por su parte, peso posicional y los dígitos no son elementos de la base, pero son acuerdos que se dan dentro de una comunidad y sirven para escribir en representación simbólica el cardinal de colecciones discretas. Las evidencias del momento 3 muestran cómo los estudiantes definen las bases de numeración después de depurar y refinar toda la información que traen del colegio y de sus experiencias previas en espacios de formación anteriores.

Las evidencias corresponden a los días 5 y 7, en donde los estudiantes usan argumentos provenientes de las fuentes de sentido numérico y académico. La fuente de sentido numérico está presente en cualquier trabajo que involucre conceptualmente las bases de numeración. La fuente académica se ve reflejada en los términos unidad, cantidad y numerosidad que son usados con un grado de conciencia y dominio de la teoría de Schwartz (1988).

Evidencia 6

Una vez establecidos los elementos de las bases es posible definir las bases de numeración porque así como dice Tall et al. (2012) la construcción de definiciones formales y pruebas hace parte de un nivel de formalismo axiomático, que implica alto grado de demanda cognitiva y que se constituye en el último nivel de comprensión matemática. En ese proceso inicial de construcción de la definición de base de numeración los integrantes del espacio de formación presentaron de cinco y se seleccionaron dos como las más representativas:

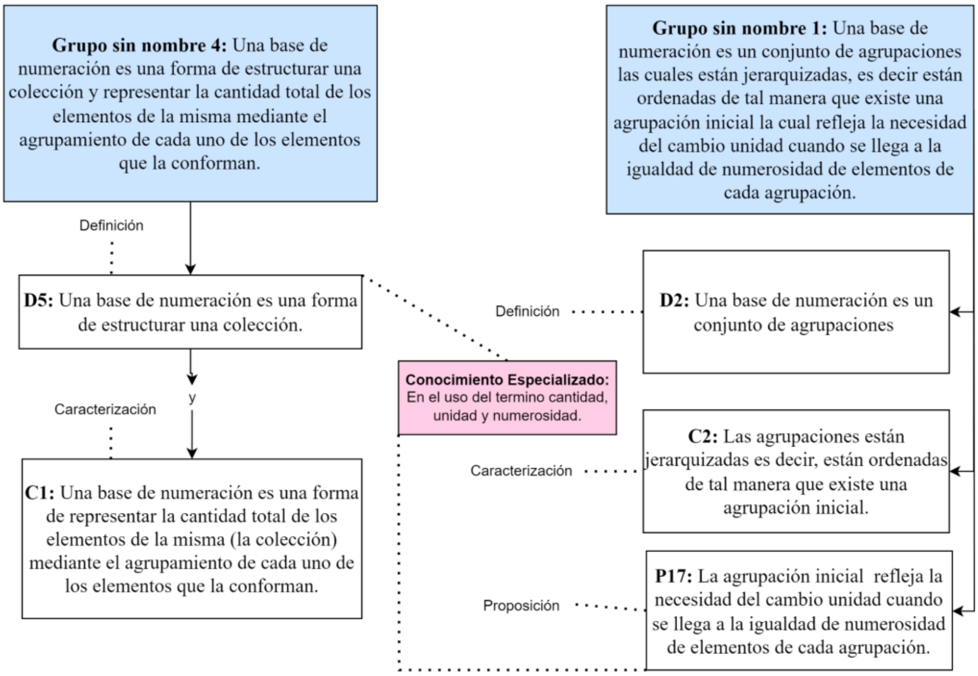
> **Grupo sin nombre 4:** Una base de numeración es una forma de estructurar una colección y representar la cantidad total de los elementos de la misma mediante el agrupamiento de cada uno de los elementos que la conforman.
>
> **Grupo sin nombre 1:** Una base de numeración es un conjunto de agrupaciones las cuales están jerarquizadas, es decir están ordenadas de tal manera que existe una

agrupación inicial la cual refleja la necesidad del cambio de unidad cuando se llega a la igualdad de numerosidad de elementos de cada agrupación.

El nivel lógico de la evidencia del grupo Sin nombre 4 puede ser expresado a través de una definición y un caracterización que está usando el estudiante: D5: Una base de numeración es una forma de estructurar una colección. C1: Una base de numeración es una forma de representar la cantidad total de los elementos de la misma (la colección) mediante el agrupamiento de cada uno de los elementos que la conforman. Mientras que la evidencia del grupo sin nombre 1 puede ser expresada con una definición, proposición y caracterización: D6: una base de numeración es un conjunto de agrupaciones. C2: Las agrupaciones están jerarquizadas es decir están ordenadas de tal manera que existe una agrupación inicial. P17: La agrupación inicial refleja la necesidad del cambio de unidad Cuando se llega a la igualdad de numerosidad de elementos de cada agrupación.

Figura 14

Esquema argumentativo del grupo sin nombre 4



Nota. Fuente Propia.

La definición de bases de numeración del grupo sin nombre 4 utiliza el término cantidad desde la teoría de Schwartz (1988) y, por tanto, puede ser tomado como un conocimiento especializado. Además, en la definición es posible observar que el grupo refiere los usos (C2) que se le pueden dar a las bases y en consecuencia no corresponde a una estructura formal de las matemáticas. Por otro lado, la definición de bases de numeración del grupo sin nombre 1 emplea los términos unidad y numerosidad desde la teoría de Schwartz (1988) y, por tanto, puede ser tomado como un conocimiento especializado. Esto desde la teoría de signos de Peirce puede observarse en la tabla 11 dado que los estudiantes usan los mismos signos.

Así mismo, en ambas definiciones los grupos de estudiantes no logran hacer una caracterización suficientemente clara sobre la relación que existe entre las agrupaciones, que reflejan el concepto en acto (columna RCR) expuesto en P11, P12, D2, D3 y D4 de la manera en cómo se conforman las agrupaciones en la base. Esto desde la teoría de signos de Peirce puede observarse en la tabla 8 dado que los estudiantes usan los mismos signos.

Aunque las definiciones expuestas por los estudiantes tienen cierto grado de corrección recaen en definir las bases de numeración desde los usos, pero en matemáticas formales es necesario alejarse de los usos y de la personificación, es decir, volverlo un concepto abstracto. Además, la definición expuesta no explicita las relaciones existentes entre las agrupaciones y, por tanto, genera ambigüedades en lo que se quiere expresar. Seguido a esto, cada mesa de trabajo refinó sus definiciones iniciales teniendo en cuenta evitar los usos y de la personificación.

Los razonamientos de los grupos sin nombre 1 y sin nombre 4 son por generalización (Toulmin et al.,1984) dado que dichos grupos han utilizado un repertorio compartido de experiencias dentro de la comunidad de práctica, vinculando elementos particulares en cada sesión de clase. Este elemento compartido de experiencias muestra un refinamiento de las concepciones que traían de las escuela para darse una idea más amplia de las bases de numeración y así sean expresadas en la construcción de la definición de bases de numeración como producto en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

6. Conclusiones

De la trayectoria de investigación del grupo Mescud se pueden extraer diferentes elementos que fueron agregados en los estudios de los procesos de enseñanza-aprendizaje en aulas donde se abordan contenidos matemáticos. Entre los que se encuentran: el conocimiento posee un carácter operatorio, los conocimientos son el resultado de filiaciones y rupturas con conocimientos previos de un sujeto y la necesidad de introducir las comunidades de práctica en los ambientes de aprendizaje. También, en esa trayectoria, se pudo evidenciar la necesidad de una construcción teórica y uso del concepto de “refinamiento”, “universo numérico” y “refinamiento del universo numérico” en el aula para caracterizar los esquemas de los estudiantes al resolver situaciones que involucran el tratamiento con números.

Por otro lado, en relación con los elementos construidos en el documento, se puede concluir que el refinamiento no es un proceso lineal, ya que conocimientos que parecieran estar adquiridos son olvidados y es necesario retomarlos. También es posible ver que el refinamiento es complejo e involucra nuestra condición humana (set-before) pero también distintos modos, medios y circunstancias para hacer matemáticas tal como se afirma en la fenomenología de Freudenthal (2002). Por su parte, los universos numéricos de los estudiantes están consolidados por las experiencias previas de cada sujeto quien se encuentra dentro de una comunidad, razón por la cual sus concepciones de los objetos matemáticos son también procesos inter-intrasubjetivos (Sáenz-Ludlow & Zellwegeren, 2016) y, por lo tanto, se ven reflejados en sus esquemas o hábitos que para cada uno tienen grados de verdad personales, aunque no sean aceptados al interior de la comunidad matemática y por tanto deben ser refinados.

El refinamiento de los universos numéricos implica problematizaciones hacia una constitución de objeto real, como lo establece Sáenz-Ludlow y Zellwegeren (2016), con la intención de adquirir estabilidad, coherencia, eficacia local y momentánea, respecto de las situaciones y circunstancias específicas involucradas en configuraciones matemáticas en comunidades de práctica (Wenger, 2001). Así mismo, Tall et al. (2012) y Tall (2014) enfatizan en que estas configuraciones matemáticas están llamadas a modificaciones, sometidas por la necesidad intencional de obtener mayor generalización y coherencia, en particular, pasar por distintos mundos matemáticos (embodiment, simbólico, formalismo) que establecen las formas de hacer matemáticas.

Ahora bien, el refinamiento promueve cambios a partir de condiciones no solo didácticas sino también curriculares. Es decir, por un lado, la Licenciatura en Matemáticas (LEMA) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas permite que cuestiones como el refinamiento de los universos numéricos ocurran en el aula de formación de profesores de matemáticas, puesto que todos los cursos del proyecto curricular se fundamentan en la construcción de conocimiento a través de la resolución de problemas, la reflexión y la investigación para la formación de profesores autónomos, críticos, no segregadores e investigadores. Por otro lado, las investigaciones hechas por los profesores del programa e integrantes del grupo Mescud abordan el refinamiento de los universos numéricos, dado que han caracterizado los conocimientos previos de los estudiantes en algunos espacios de formación y asumiéndolos para el diseño de ambientes de aprendizajes en un cierto tipo específico de práctica.

Dichas consideraciones didácticas y curriculares permiten el diseño de tareas que tengan como objetivo refinar las prácticas argumentativas, en escenarios de debate. Enfatizando en las narraciones conceptuales de los estudiantes que expliciten las vivencias del desarrollo de situaciones problemas y que estén dirigidas a la construcción de definiciones en el mundo formal Tall (2014) y, por tanto, se hace necesario que sean impersonales, estáticas y atemporales. Esta instalación de un mundo formal es un reto, ya que los tiempos que se necesitan son amplios y existen varias cuestiones que imposibilitan el pleno desarrollo del mismo.

A manera de reflexión final, se considera que a pesar de los resultados obtenidos en la experiencia de aula documentada y de la plausibilidad demostrada de las hipótesis acerca de los significados y usos tanto de la idea de refinamiento como de la de universo numérico y su conjunción, el concepto refinamiento del universo numérico requiere de mayor caracterización y documentación.

Por ejemplo, para la ampliación de la caracterización parece conveniente la construcción de relaciones entre las distintas columnas que constituyen la matriz que sirvió para el análisis (Tabla 1) así como su relación con el debate matemático y su gestión. Para ampliar la documentación es conveniente focalizar las consecuencias psicológicas y cognitivas de posibilidades del uso de una definición estructural de base de numeración para el tratamiento de orden numérico, densidad y convergencia.

Al respecto de la relación entre estas ampliaciones, parece conveniente vincular a los análisis una perspectiva semiótica peirceana de refinamiento, porque relaciona la modificación de esquemas en tanto interpretantes de los signos vehículos dentro de la perspectiva pragmática de la constitución de objetos matemáticos.

Referencia.

Ashkenazi, G. & Weaver, G. (2007). Using lecture demonstrations to promote the refinement of concepts: the case of teaching solvent miscibility. Chemistry Education Research and Practice, 8 (2), 186-196

Bertran San Millán, J. (2015). *La Lógica de Gottlob Frege: 1879–1903.* [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. Archivo digital. https://www.tdx.cat/bitstream/10803/383748/1/JBSM_TESIS.pdf

Bonilla E. M., Rojas, P. J., y Romero, J. H. (2010). Aprender la práctica de enseñar: algunos aportes. Infancias Imágenes, 9(1), 6-15. https://doi.org/10.14483/16579089.4476

Bonilla, M., Romero, J., Narvaez, D., y Bohorquez, L.. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de investigación en educación matemática*, (7),73-93.

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación matemática realista bases teóricas.*

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it?. *Teaching children mathematics*, 5(7), 400-405.

Coba, J., Laverde, E., y Valenzuela, A. (2013). *Descripción de la transformación de conceptos básicos en un curso de transición aritmética álgebra en un experimento de enseñanza*. [Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

Cruz, M. A., Grisales, J. P. M., y López, G. H. D. (2016). Algunos aspectos fundamentales del número y la aritmética: una indagación cualitativa. *Scientia et technica*, *21*(2), 160-168.

Dehaene, S. (2019). *El cerebro matemático: Como nacen, viven ya veces mueren los números en nuestra mente*. Siglo XXI Editores.

Darin, M. (2016). Las ideas semióticas de C. S. Peirce para el aprendizaje en red. En M. Castillas y A. Martinell, *Háblame de TIC: Educación Virtual y Recursos Educativos,* 3, 51-66.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. London: Kluwer Academic Publishers.

García, C. A. V. (2014). La herencia pragmática de Gottlob Frege y Charles Sanders Peirce. *Cuadernos de filosofía latinoamericana*, 35(111), 165-179.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Konic, P., & Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números.

Gonzaléz, O. (2015). *Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones*. [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

Google Books (20 de mayo de 2022). What does the Ngram Viewer do? https://books.google.com/ngrams/info

Gorlée, D. (1992). La semiótica triádica de Peirce y su aplicación a los géneros literarios. Signa. *Revista de la Asociación Española de Semiótica*, 1, 13-51.

Habermas, J. y Hilary P. (2008). *Normas y valores*. Madrid: Trotta.

Harvey, B., Kleinn, B., Pand, N. & Doumolin O.(2013). Topographic Representation of Numerosity in the Human. *Science*, 341, 1123-1126.

Horta, J. (2019). *Pragmatismo y pragmaticismo Condiciones semióticas para la fundamentación del conocimiento científico.* https://philarchive.org/archive/HORPYP

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. John Worrall & Elie Zahar (Eds.). Carlos Solís (Trad.) Alianza Universidad: Madrid.

León, O., Romero, J., Carranza, E., Sánchez-Acero, F., Suárez, W., Castro, C., Gil, D. y Bonilla, M. (2017). Arquitectura de validación de diseños didácticos para la formación de profesores de matemáticas que acojan la diversidad de poblaciones. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 233-258.

Lucero, J. (2017). Teorema fundamental del álgebra: visualizaciones, intuiciones y demostraciones formales [Tesis de pregrado,Universidad del Valle]

Lurduy, J. O. y Romero, J. H. (1999). Estructura multiplicativa y formación de profesores para la educación básica. En Espitia, Pedro Enrique (Ed.), L*a enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor* (pp. 71-124). Bogotá, Colombia: Gaia.

Lurduy, O., Rodríguez, H., Rojas, N. y Tejero, C. (2006). Explora el universo numérico de los números enteros a partir del número relativo. *Memorias del 7º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 129-132*. htpp://asocolme.org

Marino,G.(1997). Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos:alcances y desafíos. *Ponencia presentada en Río de Janeiro*

MEN (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemática.

Mescud. (2002). *Aritmética y resolución de problemas en la formación de profesores.* Bogotá: Gaia.

Mescud. (2011). La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover el aprendizaje. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Mescud (2019). *Factores que apoyan o limitan la ampliación de universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital*.

Molina, M., Castro, E., Molina J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 075-088.

Parnafes, O. & Disessa, A. (2013) Microgenetic Learning Analysis: A Methodology for Studying Knowledge in Transition. *Human Developmen*t, 56,5–37.

Pereira, M. C. (2017). *Presentación de la materia. Semiología*.

Pérez-Echeverría, M. & Scheuer, N. (2005) From number sense to meaningful number, Journal for the Study of Education and Development, 28:4, 393-407, DOI: 10.1174/021037005774518974

Plantin, C. (2011). *Les bonnes raisons des émotions: principes et méthode pour l'étude du discours «émotionné»*. Peter Lang.

Versión e-book (2021). https://docer.com.ar/doc/xs8n5e5

Polo, C., C. Plantin, K. Lund, G. P. Niccolai (2016). Savoirs mobilisés par les élèves dans des cafés science: grille de caractérisation issue d'une étude internationale, Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies 13, 193-22 https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01503177

Pretexto, G. (1996). La variable en matemáticas como problema puntual: búsqueda de causas en octavo grado. Informe final de investigación. Santafé de Bogotá. DC: Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Colciencias.

Recalde, L. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XII, núm. 1, pp. 51-72. Escuela Regional de Matemáticas Cali, Colombia. Disponible en https://www.redalyc.org/pdf/468/46812106.pdf

Rojas, P. J. y Romero, J. (2006). Estrategias para promover el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad. *En Memorias XXII Coloquio Distrital de Matemáticas y*

Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., y Mora, O. (1999). *La Transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.

Romero, J. H. (s.f) *Argumentación y matematización.*

Romero, J. H. (2019). *Criterios para elaborar y cualificar Matematizaciones.*

Romero, J. H. (2020). Conversaciones acerca de un diseño: Tercera parte [Diapositivas de PowerPoint]. Facultad de Ciencia y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Romero, P. (2022) *Informe de la investigación factores que apoyan o limitan la ampliación de universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la universidad distrital*. [Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

Saavedra, L. P., Fajardo, Y. A., & Castellanos, E. A. (2015). *Descripción de la transformación de conceptos básicos en un curso de transición aritmética álgebra en un experimento de enseñanza*. [Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

Sáenz-Ludlow, A., & Zellwegeren, S. (2016). Actividad matemática de aula cuando se ve como un proceso semiótico de interpretación doble inter-intra

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. Research Agenda for Mathematics Education Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2, 41-52..

Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 11(31), 1389-1422. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14003113

Silverman, D., & Marvasti, A. (2008). Doing qualitative research: A comprehensive guide. Sage.s

Steffe, L. (1994). Children's Multiplying Schemes. In: *The Development of MULTIPLICATIVE REASONING in The Learning of Mathematics*. Guershon Harel y Jere Confrey (Eds.). State of University of New York Press: Albany. (pp. 3-39).

Tall, D. (2014). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. In Michael Fried & Tommy Dreyfus (Eds.) Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. London: Springer. 223-235.

Tall, D., & Mejía-Ramos, J. (2012). The Long-Term Cognitive Development of Reasoning and Proof. En G. Hanna et al. (eds.). Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives. Springer Science. pp. 137-149. DOI 10.1007/978-1-4419-0576-5

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B. , Whiteley, W. , Kondratieva, M. & Cheng. Y. (2012). Cognitive Development of Proof. En G. Hanna & M. De Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Toulmin, S.,Rieke, R. & Janik, A. (1984). An introduction to reasoning. Second edition.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques,* 10(2), 133-170.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2010). Communities of Practice and Social Learning Systems: The Career of a Concept. In C. Blackmore (Ed.), Social Learning Systems and Communities of Practice (pp. 179-198). London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84996-133-2_11

West, D. E. (2015). The work of secondness as habit in the development of early schemes. *Public Journal of Semiotics*, 6(2), 1-13.

Zalamea, F. (2000). *El Continuo Peirceano. Aspectos Globales y Locales de Genericidad, Reflexividad y Modalidad: Una Visión del Continuo y La Arquitectónica Pragmática Peirceana Desde La Lógica Matemática Del Siglo XX*. Universidad Nacional de Colombia: Bogotá.