INFORME SOBRE LA GESTIÓN EN LA INVESTIGACIÓN *FACTORES QUE APOYAN O LIMITAN LA AMPLIACIÓN DE UNIVERSO NUMÉRICO* EN FUTUROS PROFESORES EN LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DISTRITAL

A partir del acuerdo 038 de julio del 2015

Yolima Paola Romero Galindo

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

DIRECTOR:
Luis Ángel Bohórquez Arenas

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C. 2022

Introducción.

Según el artículo 20 del acuerdo 038 de 2015, se presenta el siguiente informe de pasantía que da cuenta de mi papel como co-investigadora vinculada al grupo Matemáticas escolares de la Universidad Distrital (MESCUD) en la investigación titulada: *Factores que apoyan o limitan la ampliación del universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital.* Dicha investigación usó el método Experimento de enseñanza y su objetivo general focalizó la incidencia de la gestión del debate matemático por parte del profesor de matemáticas, cuando la gestión y el debate ocurren en un Ambiente de aprendizaje (AA) cuyo dispositivo didáctico es la resolución de problemas en trabajo colaborativo, dirigida a promover re-conceptualización del campo conceptual multiplicativo y, particularmente, el refinamiento de los universos numéricos de los estudiantes.

Este informe se organiza en tres capítulos: el primer capítulo muestra de forma detallada las funciones que desarrollé como co-investigadora dentro del grupo de investigación MESCUD y los productos que se elaboraron; el segundo capítulo muestra la fundamentación teórica que permitió describir tanto las actividades de gestión de carácter general y específico que promueve el profesor en el experimento de enseñanza como la construcción de viñetas (Gavilán, 2007; Bohórquez, 2016) para exponer los resultados, que están organizados en dos apartados; el primero presenta las características de la gestión del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje; el segundo presenta la incidencia de las acciones de gestión realizadas por el profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes para profesor; el tercer capítulo, muestra una reflexión sobre los alcances y las limitaciones propias de la investigación.

2. Objetivos.

2.1 Objetivo de la investigación propuesta por MESCUD.

El grupo de investigación Matemáticas Escolares UD-MESCUD, clasificado en categoría B por el ministerio de ciencia, tecnología e innovación, ha desarrollado o participado en investigaciones en torno a la formación de profesores como: Diseño y desarrollo didáctico y tecnológico en la generación de escenarios didácticos que acogen la diversidad para la formación de profesores en la UDFJC (2017), Arquitectura y validación de diseños didácticos para la formación de profesores de matemáticas (2017) y Desarrollo didáctico y tecnológico en escenarios didácticos para la formación de profesores que acogen la diversidad: factores para su implementación y su validación en la UDFJC (2018).

Este informe de trabajo de grado, en modalidad investigación-innovación, muestra algunos resultados obtenidos de la investigación "*Factores que apoyan o limitan la ampliación de universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital.* Dirigida por el grupo MESCUD, desde el semestre 2019-III, según el método Experimento de enseñanza.

2.2 Objetivo General de la pasantía como co-investigadora

La investigación de la que fui partícipe, estableció el siguiente objetivo general:

- Caracterizar la incidencia de la gestión del debate matemático por parte del profesor de matemáticas cuando ocurre en un AA cuyo dispositivo didáctico es la resolución de problemas en trabajo colaborativo, dirigido a promover reconceptualización del campo conceptual, multiplicativo y, particularmente, al refinamiento de los universos numéricos de los estudiantes.

Para abordar el objetivo general fue necesario plantear dos problemáticas. La primera en relación con la conceptualización del refinamiento del universo numérico, que sistematiza las ideas conceptuales adquiridas por el profesor Jaime Humberto Romero Cruz a lo largo de su trayectoria como investigador; y la segunda, que se aborda en este informe, presenta una caracterización de la gestión realizada por el profesor y cómo esta gestión incide en el aprendizaje de estudiantes para profesor de la UDFJC. En relación con la segunda problemática se establecieron los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar aspectos de la gestión del Profesor formador de profesores (PFP) en un AA.
2. Reconocer actividades de carácter general y específico de la gestión del PFP en un AA.
3. Caracterizar la gestión del debate matemático en gran grupo y pequeños grupos, dentro del AA.
4. Reconocer la incidencia de la gestión del profesor en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas.

2.3 Cronograma de actividades.

Para el cumplimiento de los objetivos propuestos se ejecutó una secuencia de actividades en orden cronológico y se acudió a la metodología de experimentos de enseñanza. La metodología permitió al grupo MESCUD diseñar un ambiente de aprendizaje, describir rutas de aprendizaje, mostrar la relación entre los participantes en el proceso de construcción de conocimiento y generar, modificar o reformular hipótesis durante la investigación.

La implementación y características de dicha metodología, como instrumento para abordar los objetivos específicos, puede ser observada en la tabla 1. En la tabla se encuentran las fases, tiempos e intenciones de cada una de las acciones realizadas para evidenciar el aprendizaje de la comunidad por medio de las interacciones que el profesor establece entre el conocimiento matemático y los estudiantes (Llinares, 2014).

Tabla 1

Cronograma de Actividades propuesto para el desarrollo de la Pasantía.

#	Fases	Actividades	Semanas 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Productos
1	Experimentación	**Toma de audio y video**																		Base de datos para la investigación
		Transcripciones																		Base de datos para la investigación
		Primer informe																		
		Entrevistas al profesor que dirigió el (EE), integrantes del grupo Mescud																		Indagar aspectos específicos del diseño del curso de transición 2019-03
		Transcripciones																		Base de datos para construcción de documento final.
		Segundo Informe																		

	Elaboración de productos	**Definición de objetivos de investigación para la elaboración de una producción científica.**																	Construcción de preguntas que orientan la investigación:

#	**Fases**	**Actividades**	**Semanas** 18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	**Productos**
2	**Caracterización de la gestión del profesor en un AA**	**Construcción del marco teórico**																		Reconocer elementos teóricos de la investigación, en relación con la gestión del profesor en un AA
		Entrevistas al profesor encargado del experimento de enseñanza.																		Elaborar entrevistas estructuradas y semiestructuradas que dieran cuenta de aspectos específicos de la gestión en un AA
		Tercer informe																		

		Reuniones con integrantes del grupo MESCUD	Cronograma y planeaciones de las sesiones para contrastar las hipótesis de gestión construidas hasta el momento.
3	**Análisis retrospectivo de los datos**	**Depuración de los datos por medio de la noción de viñeta (Gavilán, García y Llinares, 2007a)**	Documento que contiene un análisis descriptivo de los datos a partir de la noción de viñeta.
		Contrastes teóricos con los datos (incidencia de la gestión en el aprendizaje de los estudiantes para profesor)	Documento que contiene un análisis teórico de los datos.

		Cuarto informe		Informe parcial en relación con el análisis retrospectivo de los datos.
		Elaboración final de artículo		Aprobado por la revista Cemer(Caminhos da Educação Matemática em Revista)
4	**Elaboración de productos**	**Informe final de investigación.**		

3. Capítulo I: Presentación del informe de pasantía.

3.1 Sobre la participación en el desarrollo de la pasantía.

Las funciones de los co-investigadores que participamos en esta investigación inicialmente fueron grabar las sesiones de clase, para esto, contamos con la orientación de los investigadores de MESCUD, quienes nos brindaron indicaciones de cómo grabar a los pequeños grupos (G5 y G7) y al grupo en general. Además de las grabaciones de audio y video, se implementó un "diario del investigador" donde se plasmaron aspectos que como co-investigadores considerábamos relevantes en el desarrollo de las sesiones, para así, en reuniones semanales con los investigadores poder reportar a grandes rasgos lo que habíamos observado en la toma de audio y video.

En la toma de audio y video nos surgieron algunas preguntas que fueron expuestas en las reuniones semanales, entre las que se encuentran ¿Por qué los estudiantes resuelven tareas en relación con las bases de numeración? ¿Cuál es la relación entre las bases de numeración y la proporción y proporcionalidad? ¿Por qué en ocasiones el docente centra su atención en un tipo específico de discusión en el grupo? ¿Por qué solicita cierto tipo de representaciones al grupo en general? ¿Por qué no rescata las intervenciones de ciertos estudiantes?

Este tipo de preguntas permitieron profundizar sobre aspectos teóricos inmersos en Transición Aritmética-Álgebra pero también sobre la pertinencia de la gestión en momentos específicos de la clase. En relación con los elementos teóricos, didácticos y matemáticos inmersos en el espacio de formación, se encontró que el propósito es apoyar la resignificación de objetos matemáticos como la proporción y la proporcionalidad a partir de un conjunto de tareas que se desarrollan en trabajo colaborativo. Y al ser un curso de didáctica, espera brindar a los estudiantes para profesor herramientas que les permitan evaluar las producciones propias y de sus compañeros a partir de prácticas de matematización.

En relación con la gestión que promueve el profesor, se encontró que en ocasiones las intervenciones de algunos estudiantes no se profundizan porque descentralizan la discusión inicial que se consolida en el grupo en general. Además, el profesor menciona que la promoción de representaciones (icónicas-simbólicas) favorecen el proceso de comunicación matemática dentro del aula.

3.1.2 Transcripciones de las sesiones de clase en el espacio de formación Transición Aritmética-Álgebra.

En total, se transcribieron catorce sesiones de clase, tres sesiones de dos horas por semana; se emplearon dos tipos de video-grabadoras para registrar los grupos pequeños (G5) y (G7) y al Grupo en General. Simultáneamente, cada semana asistí con los demás co-investigadores a seminarios con Luis Ángel Bohórquez Arenas y Jaime Humberto Romero Cruz, dos investigadores del grupo MESCUD, con la intención de describir los aspectos relevantes que habían sido capturados en los segmentos de video durante las sesiones.

De esta forma, el profesor encargado del curso hace modificaciones pertinentes a su diseño, dado que, en ocasiones durante la clase no llega a percibir la diversidad de soluciones de los pequeños grupos y gracias al registro de audio y video fue posible rastrear los modos y estrategias de solución en una tarea específica, encontrando por ejemplo que algunos grupos interpretan de forma diferente el enunciado de una tarea. Así, la interacción entre investigadores y co-investigadores favoreció el reconocimiento de estas particularidades.

Por otro lado, en los seminarios, los investigadores de MESCUD nos dieron indicaciones técnicas para mejorar sesión tras sesión, la toma de audio y video. Por ejemplo, ubicación estratégica para capturar video de los pequeños grupos y así optimizar la calidad de audio que facilitara el posterior proceso de transcripción.

Para la transcripción de las cuarenta horas de clase, se utilizaron aplicaciones como *Transcribe,* que facilitó convertir audio a texto. Las transcripciones se apoyaron en la simbología expuesta por Silverman (2008) porque transcribir implica traducir el lenguaje oral a un lenguaje escrito y, por tanto, la simbología utilizada refiere a emociones y gestos que emergen durante la interacción entre los estudiantes o con el profesor. Entonces, utilizar esta simbología en las transcripciones facilita el reconocimiento de emociones y actitudes que emergen en el discurso de los estudiantes.

Finalmente, se compartió un archivo digital y físico de la totalidad de las transcripciones a los investigadores del grupo MESCUD (Luis Ángel Bohórquez, Jaime Humberto Romero, Martha Bonilla) para posteriormente depurar los datos e iniciar el proceso de análisis.

3.1.3 Descripción del planteamiento del problema de investigación.

Bohórquez (2016) desarrolla un recorrido histórico sobre las concepciones de gestión relacionada con las actividades del profesor. Por ejemplo, en los años cincuenta, la ausencia de investigaciones y teoría sobre este tipo de gestión limitaban su concepción a tareas de carácter instruccional y normativo; en la década de los años sesenta y setenta, Duke (1979) consideró como tareas de la gestión aquellas que permiten la instrucción y el aprendizaje; Gómez (2007) resalta que la mayoría de las investigaciones del conocimiento del profesor tenían un carácter curricular, enfatizando sobre la planificación de clase, especialmente sobre los contenidos, tiempos y materiales para implementar sesión tras sesión, sin embargo, considera que es necesario vincular elementos didácticos que permita abordar la gestión de manera reflexiva dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Llinares (2008) rescata las ideas de Eraut (1994) y Blanco (2005) y concibe que, si la enseñanza de las matemáticas se encuentra dentro de un ambiente de aprendizaje, es necesario caracterizar las acciones de gestión del profesor. Es decir, es imprescindible describir el conocimiento actuativo del profesor dentro de actividades en el aula y así lograr evidenciar el aprendizaje de los estudiantes desde una perspectiva sociocultural, que implica vincular el sujeto que aprende con el uso de herramientas tanto para comunicar ideas como para actuar dentro de una determinada comunidad en el proceso de construcción de conocimiento.

En esta dirección, Ghousseini & Herbst (2016) investigan y documentan que: 1) el debate matemático en el aula requiere una comunidad de aprendizaje, en el sentido de Wenger & Lave (1992) y 2) se requiere trabajo y disposición por parte de los formadores de profesores para utilizar pedagogías (tipos de actividades) para equilibrar las oportunidades en que los estudiantes para profesor pueden mejorar sus habilidades, en el sentido en que desarrollen oportunidades de aprendizaje y utilicen el conocimiento profesional adquirido. Por tanto, la caracterización de la gestión del profesor, para describir la incidencia de la misma en la práctica de enseñar matemáticas es un objetivo de investigación. Es así, como al grupo de investigación le interesó indagar sobre (Bohórquez y Romero, 2022)

¿Qué aspectos de la gestión del profesor, posibilita el aprendizaje de los estudiantes para profesor?

¿Qué incidencia tiene la gestión del conocimiento matemático en el aprendizaje de los estudiantes para profesor?

3.1.3.1 Preguntas de investigación.

Las preguntas de investigación mencionadas anteriormente, permitieron orientar los objetivos de la pasantía. Por tanto, en los seminarios con los investigadores se discutieron elementos teóricos de la gestión del profesor en un ambiente de aprendizaje con dispositivo didáctico, la resolución de problemas. Para poder abordar dichas preguntas, se realizaron entrevistas estructuradas y semiestructuradas al profesor formador de profesores, las cuales permitieron reconocer: 1- objetivos específicos de Transición Aritmética-Álgebra; 2- Intensiones de las tareas propuestas; 3- alcances y limitaciones en los modos de trabajo de los grupos en cuanto a la caracterización de las bases de numeración; 4- Elementos didácticos y matemáticos que se esperaban potenciar en los estudiantes para profesor en este espacio de formación y 5- el profesor encargado del espacio de formación no adscribe a un referente teórico las acciones de gestión que desarrolla dentro del aula, sin embargo, su experticia en el curso lo ha llevado a realizar un conjunto de acciones durante las sesiones de clase que se pueden analizar desde los elementos teóricos constituidos sobre gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje (Llinares, 2000; Bohórquez, 2016).

En la fase II del cronograma, fue necesario utilizar referentes teóricos que nos permitieron tomar una postura frente a la gestión del profesor en un ambiente de aprendizaje, para el análisis y depuración de datos fue necesario construir dos viñetas (Gavilán, 2007; Bohórquez, 2016) las cuales permitieron dar respuesta a las preguntas de investigación, dicha postura y resultados se encuentra en el capítulo II de este informe.

3.1.4 Transcripción de entrevistas al profesor encargado del curso sobre el diseño de transición Aritmética- Álgebra

Las entrevistas semiestructuradas se establecieron en tres momentos. El primer momento, reconoció aspectos generales del diseño de Transición Aritmética-Álgebra y las ideas del profesor Jaime Humberto Romero sobre los propósitos de formación del núcleo de matemáticas escolares, que tiene como intención resignificar y refinar las matemáticas escolares como práctica, profundizando en el campo conceptual multiplicativo. Además, en los seminarios semanales con los Investigadores de MESCUD, fue posible reconocer la importancia de la metodología de los Experimentos de enseñanza en el diseño de un ambiente de aprendizaje y, a partir de dicha metodología, abordar las preguntas de investigación en tres fases, que se explicitan en el capítulo II.

En el segundo momento, indago sobre el conocimiento matemático y didáctico puesto en juego en Transición Aritmética-Álgebra, reconociendo la importancia del trabajo con: las bases de numeración, ligadas a estructuras recursivas discretas, las cuales se apoyan en el conteo; y las bases de magnitud, ligadas a estructuras recursivas continuas, las cuales se apoyan en la construcción de los números reales.

El tercer momento, describió las intenciones de las tareas asociadas a las bases de numeración y magnitud. Por ejemplo: por medio de las tareas propuestas se espera que los estudiantes manifiesten los esquemas (Vergnaud, 1990) adquiridos en la escuela, para que puedan ser refinados; las implicaciones didácticas y matemáticas de construir definiciones en matemáticas como un tipo de refinamiento de sus prácticas matemáticas. Igualmente, pudimos reconocer las intenciones del instrumento *"Criterios para elaborar y cualificar matematizaciones"* diseñado por MESCUD (2011), que tenía el propósito de generar metacognición y reflexión sobre la práctica en que los objetos matemáticos emergen, permitiendo al estudiante para profesor evaluar sus producciones matemáticas y la de sus compañeros en él (AA).

Los apartados específicos de estas entrevistas se utilizan en la triangulación de información y se muestran en capítulo II de los resultados. Además, es necesario aclarar que parte de las planeaciones de Transición Aritmética-Álgebra fueron resultado de las investigaciones de Mescud (2011) y por tal razón el profesor encargado del curso las adapta en su diseño dado que, promueve experiencias en relación con la medición y los procesos de aproximación.

Así, las entrevistas sistematizaron las ideas del diseño del espacio de formación como producto de la experticia y formación del profesor encargado, y también, reconocieron los elementos teóricos y didácticos inmersos en las tareas que referían a bases de numeración y magnitud.

3.1.5 Elaboración de productos.

3.1.5.1 La gestión del formador de profesores y su incidencia en el aprendizaje de futuros profesores de matemáticas.

A partir de la fase II a IV se trabajó en torno al problema de investigación en la construcción de un artículo titulado: "*La gestión del formador de profesores y su incidencia en el aprendizaje de futuros profesores de matemáticas"* el cual se elaboró con el investigador Luis Ángel Bohórquez Arenas y fue publicado en la revista CEMER (Caminhos da Educação Matemática em Revista) (Online)[1]. Este artículo muestra la incidencia de la gestión del profesor en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas, quienes participaron en un experimento de enseñanza. Los resultados que se obtuvieron ayudaron a caracterizar aspectos de la gestión del profesor que fueron relevantes en el aprendizaje didáctico y matemático relacionado con la ampliación del universo numérico

3.1.5.2 Experiencia del refinamiento de universos numéricos en futuros profesores.

Junto con la investigadora Martha Bonilla y los co-investigadores (Gilberth Mendieta, Jeferson Henao), se trabajó en torno al artículo "*Experiencia del refinamiento de universos numéricos en futuros profesores de matemáticas". El* cual es resultado de las múltiples investigaciones de MESCUD, frente a conceptos relacionados con los procesos de enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos que presentan versiones aritméticas, algebraicas y geométricas. La metodología utilizada permitió abordar conceptos como: refinamiento, universo numérico y refinamiento del universo numérico , encontrando que dicho refinamiento

---

[1] https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1363/1350

está directamente relacionado con las comunidades de práctica, la resolución de problemas y la gestión en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4. Capítulo II: Resultados y alcances de la investigación.

4.1 Metodología de Experimentos de enseñanza.

La metodología, que a continuación es descrita en tres fases interrelacionadas (Preparación y Revisión; Experimentación; Análisis Retrospectivo), es transversal al objetivo general de la investigación: "Factores que apoyan o limitan la ampliación del universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemáticas de la UDFJC". Dicha metodología, es producto de las discusiones que se dieron en los seminarios entre investigadores y co-investigadores y también de las entrevistas semi-estructuradas que se desarrollaron en el primer momento, como se mencionó en el capítulo I.

Los Experimentos de enseñanza hacen parte de la Investigación del diseño. Consisten en secuenciar sesiones de clase y se componen de: un investigador-docente, estudiantes de un curso específico, e investigadores-observadores. Molina et al. (2011) consideran que esta metodología permite a los investigadores interactuar con el ambiente de aprendizaje y su flexibilidad posibilita poner a prueba hipótesis en relación con las actividades de gestión que promovía el profesor en las distintas sesiones de clase. Por último, esta metodología reconoce dos principales criterios para mostrar idoneidad en la investigación: 1- fiabilidad para describir detalladamente aspectos que caracterizan la estructura interna del ambiente de aprendizaje y 2- validez para contrastar o construir datos, que son producto de la triangulación de la información desde tres fuentes: datos, análisis de los co-investigadores y análisis de los investigadores.

4.1.1 Fase I: Preparación y revisión: Contexto y Diseño del curso transición aritmética-álgebra

El experimento de enseñanza (EE) tuvo lugar en el espacio de formación de Transición aritmética-álgebra, durante el periodo académico 2019-III y contó con 36 estudiantes entre 18 y 20 años de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Distrital. Este espacio de formación está ubicado en el tercer semestre, según el plan de estudios de la licenciatura en matemáticas. Dicho trayecto curricular muestra que los estudiantes reciben de manera paralela cuatro componentes de formación: Didáctica, Matemáticas, Prácticas de aula y Contextos profesionales, que favorecen la formación de profesores de matemáticas autónomos, críticos, no segregadores e investigadores de los problemas de su práctica con otros (LEMA, 2022).

Es necesario aclarar que Transición Aritmética-Álgebra hace parte de uno de los ocho espacios de formación que componen el núcleo problémico de Matemáticas escolares, específicamente del componente didáctico. A continuación, se muestran los espacios de formación hasta tercer semestre, distribuidos en tres núcleos problémicos. (Tabla II)

Tabla II

Distribución de los Espacios de Formación de Licenciatura en Matemáticas hasta tercer periodo.

Semestre	Matemáticas Escolares		Prácticas de Aula	Contextos profesionales
Primero	**Didáctica de la aritmética I**	Problemas de la construcción del número natural	Práctica pedagógica, profesión docente y educación matemática	
Segundo	**Didáctica de la**	Problemas de	Investigación en	Ambientes y

	aritmética II	proporción y linealidad.	el aula I	mediaciones de la infancia y juventud.
Tercero	**Transición Aritmética/ álgebra**	Problemas de divisibilidad.	Investigación en el aula II	Práctica pedagógica de ambiente y mediaciones en el aula.

Este plan de estudios muestra que los estudiantes en semestres anteriores han tenido un trabajo desde el componente matemático con aspectos en lo que refiere a la construcción del número natural, proporción y proporcionalidad; y desde el campo de la didáctica han trabajado con el dispositivo didáctico de la resolución de problemas. En tercer semestre, en Problemas de la divisibilidad, se espera que los estudiantes se familiaricen con el lenguaje de la teoría de números y adquieran diversas experiencias cognitivas que potencien el tratamiento estructural del concepto de número como objeto matemático que permita resignificar las matemáticas escolares.

El recorrido curricular de Transición aritmética-álgebra, se centra en la evolución conceptual por medio de diferentes trayectorias geométricas, aritméticas y algebraicas que responden a: resignificar la concepción de proporción que traen los estudiantes de la escuela y profundizar en el uso, producción y comunicación de elementos que permitan generar conexiones entre las estructuras aditivas y multiplicativas a través de una estructura matemática.

Para lograr dichos propósitos, el profesor encargado consideró tres vertientes (Figura 1) relacionadas entre sí, que son transversales a los espacios de formación del núcleo de matemáticas escolares.

4.1.1.1 Vertiente Uno: Constitución de redes de objetos matemáticos.

El espacio de formación está dirigido a resignificar la actividad matemática orientada a constituir redes de objetos matemáticos (Godino et al., 2007) que tienen versiones aritméticas, algebraicas y geométricas. De la inmensa cantidad de estos objetos, adquiridos en la escuela, el espacio de formación busca resignificar aquellos que tienen las ideas que los estudiantes ponen en juego en relación con problemas que requieren modos de existencia (geométricos, aritméticos, y algebraicos) de proporción y proporcionalidad. Este proceso de resignificación implica promover una estructura emotiva para la actividad matemática centrada en la resolución de problemas en comunidades de práctica, que se vinculen a la reconceptualización (Mescud, 2011) de la proporción y la proporcionalidad.

La resolución de problemas en comunidades de práctica junto con la argumentación son pilares para promover la estructura emotiva pretendida (Wenger, 2001; Plantin, 2011). Aprender con otros implica exponerse a la crítica; incorporar de manera crítica las palabras y haceres de otros (atender de manera consciente y voluntaria, desempeñar distintos roles durante la participación en el grupo de trabajo, comprometerse); reconocer y transformar los medios (residuos escolares, (Polo et al., 2016), mnemónicos, mecánicos, rutinarios, etc.), los modos de argumentar (sobregeneralizaciones, inferencias incorrectas, analogías no estructuradas, etc.) y los propósitos de la argumentación (vencer, invalidar, imponer, etc.) cuando se elaboran, expresan y estructuran ideas matemáticas.

Este modo de promover la estructura emotiva posibilita que los estudiantes pasen por distintos niveles de matematización o dicho de otra manera, pasen por los tres mundos de actividad matemática (Tall et al., 2012), en donde el vínculo realizado entre la percepción, el lenguaje, la simbolización, la repetición y la formalización, condiciona el tipo de matemática que los estudiantes usan al resolver problemas y que pueden ser refinados. Es decir, en el espacio de formación los universos numéricos refinados implican relaciones entre estos sistemas de registros de representación de proporción y proporcionalidad

Para ello, se diseñan tareas con el objetivo de promover la emergencia de esos modos, medios y propósitos para la argumentación y, también, su refinamiento. La lista siguiente refiere el ámbito específico de las tareas propuestas, y que por medio de la fase 3 fueron encontradas en investigaciones como Mescud (2011), que permiten experiencias de medición de objetos físicos, conciencia de la inexactitud de las medidas y reconocimiento de la necesidad de aproximación en el acercamiento a:

- Las bases de magnitud como una clase particular de estructuras recursivas.
- Relacionar las bases de magnitud con las bases de numeración, conmensurabilidad e inconmensurabilidad entre magnitudes.
- La problemática de los números con coma.
- La problemática de la elección de una unidad que normalice toda razón.
- Estructuras recursivas, infinitas, con siguiente y punto de acumulación.

Además de responder a la lista anterior, las tareas se organizan en tres paquetes. El primer grupo de tareas, corresponde abordar Elementos, libro I, de Euclides, combinando la resolución de problemas y los grafos proposicionales para promover el razonamiento deductivo y el tratamiento de magnitudes. El segundo grupo, lo conforma un conjunto de tareas que abordan estructuras recursivas con siguiente y punto de acumulación, en algunas de esas tareas, el diseño trabaja las clases de magnitud y numeración como una clase particular de las estructuras recursivas en donde se relacionan la conmensurabilidad e inconmensurabilidad entre unidades. El tercer grupo de tareas, lo integran actividades en torno a la densidad de los reales y la problemática de los números con coma. Además, es necesario aclarar que las evidencias presentadas hacen parte del segundo grupo de tareas, porque fue donde ocurrió el registro de datos. Las tareas son:

1. Dado un rectángulo AB, hallar otro rectángulo igual.
2. Dados el rectángulo AB y RΩ un lado del rectángulo R△, halle el rectángulo R△ igual al rectángulo AB
3. Analizar cuál de los problemas es más restrictivo
4. Dado un rectángulo AB, construir otro rectángulo igual al él; tal que uno de sus lados sea la semisuma de dos lados perpendiculares del rectángulo AB. ¿Cuál es el sentido matemático de este procedimiento?
5. Con el rectángulo construido en 4. Realice el procedimiento, así obtendrá otro rectángulo. Si continúa este proceso, además de obtener rectángulos iguales ¿Qué otra característica observa en ellos?
    a. Realice el 4 y 5 solo mediante construcciones geométricas (uso de software de geometría dinámica)
    b. Realice 4 y 5 solo mediante configuraciones aritméticas (uso de hoja de electrónica)
    c. ¿Qué significa ser más cuadrado? ¿Qué significa que los lados son cada vez más iguales?
    d. ¿Desde el punto de vista numérico qué obtiene este proceso?
    e. ¿Estos procesos son infinitos? ¿Siempre?
    f. ¿Qué tipo de matematización es la pedida?
6. Hacer la matematización de la siguiente situación: Con el lado menor de una hoja tamaño carta medir el lado mayor.
7. Hacer la matematización de la siguiente situación: Medir con el lado AB la diagonal del cuadrado A△.

8. ¿Qué cambia y qué se mantiene si en la matematización anterior se pide medir la diagonal con el siguiente sistema de partes de AB

$$\Omega = \{AB, \tfrac{1}{2}AB, \tfrac{1}{4}AB, \tfrac{1}{8}AB, \tfrac{1}{16}AB, \tfrac{1}{32}AB, \tfrac{1}{64}AB, \ldots, \tfrac{1}{2^k}AB\},$$

de tal manera que ninguno de los elementos de Ω se usa más de una vez?

9. Realizar el taller refinando la comprensión de sistemas posicionales de numeración:
    a. Recuperación de la unidad
    b. Conexiones y densidades
        i. Contestar individualmente
        ii. Discutir cada solución
        iii. En grupo, presentar un informe describiendo:
            - La estructura del cuestionario Recuperación de la unidad
            - Qué tipo de error y a qué tipo de concepto creen que se debe este error
            - El modo en el que detectaron los errores
            - El modo en el que realizaron las correcciones

4.1.1.2 Vertiente Dos: Reflexión acerca de los objetos matemáticos emergentes.

"Las matemáticas son actividad humana que puede ser dirigida hacia modos específicos de constitución reflexiva del mundo. En estos modos específicos cobran especial relevancia los de producción de conocimiento matemático" (Romero, s.f., p.1). Por tanto, en la formación de educadores en matemáticas es necesario generar vivencias dentro de una comunidad de práctica (Wenger, 2010) en donde la naturaleza del aprendizaje es social y según Romero (2020) debe centrarse en 3 tópicos desde la teoría Wenger (2010):

1. Régimen de competencia: como producto histórico de evolución de la cosificación de la práctica.
2. Régimen de responsabilidad: como producto histórico personal de la evolución de la identidad en la práctica.
3. Concreción histórica de una comunidad de práctica: como una estructura social, dinámica e informal entre sus participantes.

Donde se garantice existencia, durabilidad y regenerabilidad de comunidades productoras de matemáticas (Kitcher, 1984). Para así, profundizar en los discursos pedagógicos de los estudiantes, enfocados en narraciones conceptuales, que muestren los obstáculos, errores, dificultades en los diferentes procesos de la resolución de situaciones problemas de la vertiente uno y de aspectos intra-interpersonales en el proceso de objetivación (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2016)

4.1.1.3 Vertiente tres: Reflexión acerca de la práctica en que los objetos emergen.

Al ser un espacio de formación de didáctica, es necesario que los estudiantes generen conciencia de los diferentes elementos que intervienen en su proceso de aprendizaje como las representaciones, los recursos, las formas y características de trabajo, porque ser consciente de esos elementos es generar estructura matemática, según un enfoque didáctico (Freudenthal, 2002). Como insumo, Romero (2019) elaboró un escrito para los estudiantes del espacio de formación de Transición aritmética-álgebra del semestre 2019-III, que les sirvió para realizar metacognición y reflexión acerca de la práctica en que los objetos emergen. Esa metacognición y reflexión se desarrolló en la construcción de un documento Ω con las siguientes características:

> Es altamente probable que Ω deba mostrar uno o más de los distintos niveles de elaboración de objetos matemáticos y de comprensión que el resolvente ha constituido para sí. […] Ha de recuperar los distintos modos y medios con los que desplegó y sistematizó su actividad para exhibir una matematización […]. En particular, ha de acudir a los artefactos en los que fue dejando el registro de la evolución de su actividad, para describirla y para analizarla; pero también, ha de recurrir a instrumentos conceptuales. En nuestro caso, vamos a acudir a las ideas acerca de la matematización como práctica, la ontología de objetos matemáticos (Godino et al, 2007) y a los niveles de comprensión (Bressan, 2017).
>
> […] Los niveles de comprensión conforman una jerarquía, no un orden estricto, de aprendizaje y reinvención de matemáticas (Freudenthal, 1973; 1978; 2002). En relación con el aprendizaje, dan testimonio de la constitución de objetos mentales como producto de la actividad de los aprendices al tratar de resolver la situación planteada interpretada como un elemento de una clase de situaciones (Freudenthal, 2002). Por lo tanto, el aprendiz genera, para el tratamiento que él hace de la situación, el sentimiento de estar tratando no solo la situación particular sino, además, una clase de situaciones, que está bien representada por la situación tratada. En relación

con la reinvención de las matemáticas, los niveles dan testimonio de la constitución de redes de objetos y estructuras matemáticas por parte del aprendiz; a la vez, la constitución de las estructuras matemáticas da cuenta de la restructuración del objeto mental del aprendiz (Freudenthal, 2002; Romero, 2019, pp.1-2).

4.1.2 Fase II: Experimentación.

En esta fase, se registró audio y video durante catorce sesiones de clase, seis horas por semana, cabe aclarar que se utilizaron tres cámaras; una para grabar al gran grupo (salón general) y las otras para grabar a dos grupos conformados por tres y cuatro estudiantes (G5) y (G7) aproximadamente. Además, en un diario de campo se registró información relevante de cada sesión de clase. Esta información posteriormente, se compartió en los seminarios con los investigadores. Simultáneamente, se realizó la transcripción de los videos con el apoyo de convenciones de transcripción, signos que permitieron capturar él "lenguaje no verbal" dentro del aula de clases, a partir de la simbología de Silverman (2008).

4.1.3 Fase III: Análisis retrospectivo.

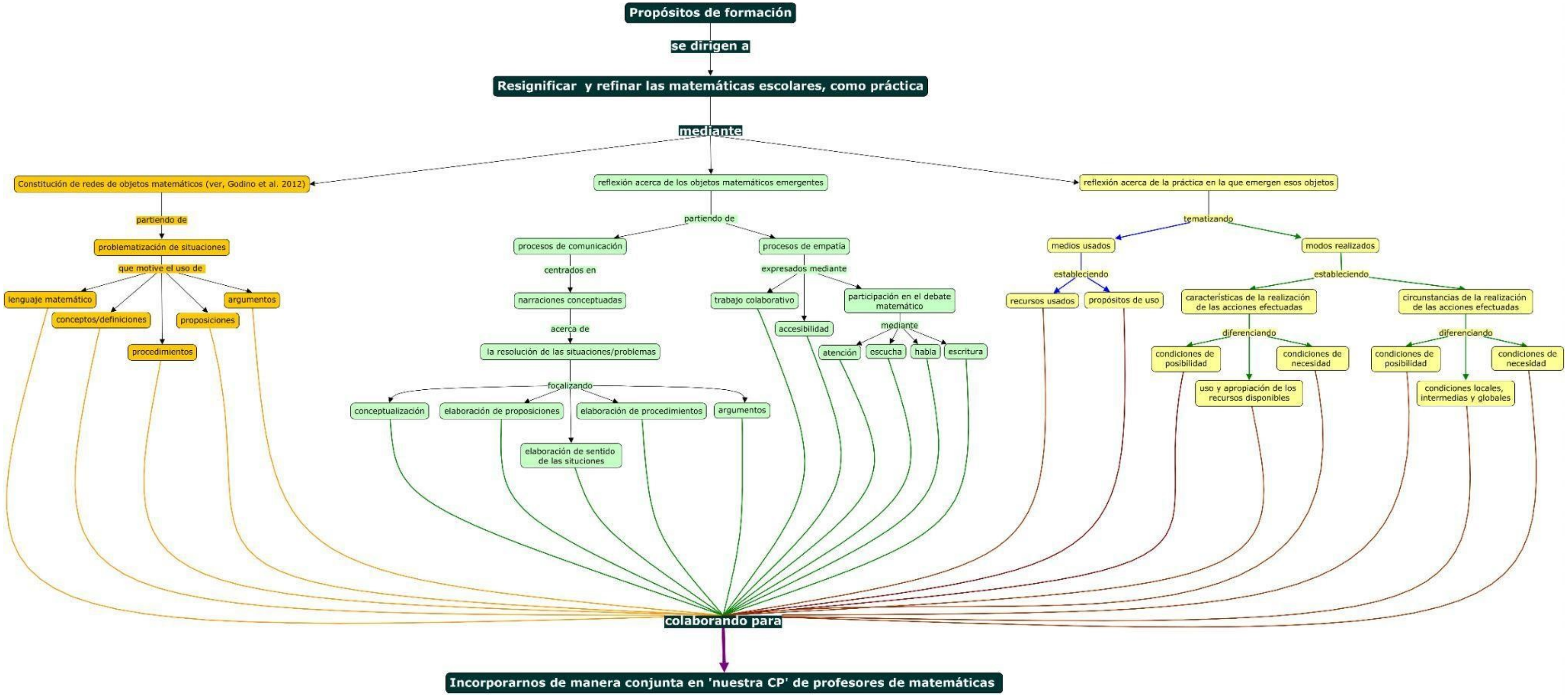
En esta fase, se realizó la transcripción de entrevistas semiestructuradas, que se hicieron en diferentes momentos con el propósito de triangular[2] las hipótesis, sobre las actividades de gestión que promueve el profesor y su incidencia en el aprendizaje de estudiantes para profesor

En esta fase se muestran los resultados de la investigación, por medio de la construcción de dos viñetas (Gavilán et. al, 2007; Bohórquez, 2016) que permiten depurar el gran volumen de datos con que se contaba. La primera buscó identificar las características de la gestión del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje; y la segunda reconoció la incidencia de la gestión en el aprendizaje de los estudiantes para profesor.

[2] Se triangula la siguiente información: datos, entrevistas semiestructuradas, perspectivas de los investigadores y coinvestigadores.

Figura 1

Mapa conceptual elaborado por el profesor Jaime Humberto Romero Cruz para explicar el diseño del curso de transición aritmética-álgebra como espacio de formación del núcleo problémico: Matemáticas escolares



Nota. Fuente propia.

4.2 Fundamentación teórica

En este marco teórico presentaremos, inicialmente, una revisión sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje del profesor de matemáticas (Bohórquez, 2016; 2017; 2020) Expuesto en (Bohórquez y Romero, 2022)

4.2.1 Sobre la gestión del proceso de enseñanza- aprendizaje

Trabajos de Bagley (1907) muestran principios de gestión en relación con elementos psicológicos desde cuatro perspectivas: 1- observaciones de los docentes sobre una gestión eficiente, 2- libros sobre la gestión en torno a la enseñanza, 3- la experiencia personal como maestro y 4- principios psicológicos generales. En ideas de Breed (1933) la gestión era considerada como actividades centradas en currículo e instrucción. Por su parte, Duke (1979) consideró que las tareas asociadas a gestión son aquellas que involucran disposiciones y procedimientos necesarios para lograr la instrucción y aprendizaje.

Cerca de los años ochenta, los investigadores llegaron a consensos sobre que era gestión en el aula, autores como Brophy (1988, 1983), Doyle (1986) y Weber, Crawford, Roff y Robinson (1983) reconocieron que predominaban las "técnicas conductuales" en la gestión de aula, que en palabras de Emmer (1982b) dichos comportamientos del profesor estaban orientados a que los alumnos tuvieran una conducta adecuada en clase; pero permanecían interrogantes sobre su eficacia en el aula.

Tomando como referencia las consideraciones de Duke (1979) y Emmer (1987) sobre gestión del aula, Davis y Thomas (1992) establecen recomendaciones para esta gestión, las cuales se organizan en cuatro categorías: 1- recomendaciones asociadas a las normas y expectativas, 2- organización del aula, 3- actividades en el aula y 4- recomendaciones para responder al mal comportamiento. Es posible deducir que dichas recomendaciones se centran en mantener el orden y la disciplina de los estudiantes.

Brophy y Everton (1978) consideran que las actividades de gestión de los profesores evolucionan a medida que los estudiantes avanzan en su trayectoria escolar. Un problema de investigación que formula Brophy (1999, 2006) es que la gestión puede ser concebida según el enfoque de enseñanza y dadas las investigaciones previas, el enfoque que primaba en esos momentos era el de la trasmisión de conocimientos. Entonces Brophy (1999; 2006) establece la siguiente pregunta. ¿Estos principios de gestión se pueden aplicar a enfoques basados en teorías constructivistas, sociales y socioculturales del aprendizaje? Según Brophy (1999, 2006) se pueden aplicar, si se interpretan correctamente.

Desde esta postura expuesta anteriormente, autores como McCaslin y Good (1992) establecen que el ambiente de aprendizaje significativo debe estar alineado, con un sistema de gestión que permita a los estudiantes participar de forma activa en su proceso de aprendizaje. Dicho aprendizaje se da en términos de Brophy (1999, 2006) en entornos de aprendizaje comunitarios, los cuales posibilitan al profesor identificar un conjunto de actividades más amplio que priorizan la participación de los alumnos, puesto que los estudiantes aprenden en colaboración con toda la clase o en las interacciones que tienen en pequeños grupos y esto implica acciones adicionales, tales como escuchar con atención a sus compañeros, preguntar, solicitar aclaraciones, exponer sus propias ideas, explicar su razonamiento utilizando razonamientos de tipo deductivo o inductivo, llegar a acuerdos con sus compañeros y evaluar los objetivos propuestos de la actividad a partir del trabajo en pequeños grupos.

Brophy (2006) afirma que los maestros que pretenden conformar “comunidades de aprendizaje” deben acudir a estrategias de gestión diferentes a lo conductual y deben articular la participación de sus estudiantes. Por ejemplo, el docente debe escuchar a sus estudiantes en la resolución de una tarea e intervenir para hacer una petición o instrucción a la comunidad de aprendizaje en un momento determinado, con el propósito de centrar la discusión que se está dando. La idea de comunidad de aprendizaje está vinculada con el concepto de comunidades de práctica desde las ideas de Wenger (2000). Este vínculo permite caracterizar la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en lo que se refiere a las relaciones sociales y objetivos de aprendizaje que emergen de la interacción de los estudiantes con una tarea en específico.

Llinares (2000) dentro de la fase de gestión del proceso enseñanza-aprendizaje del profesor, reconoce un conjunto de actividades que debe promover el docente. 1- la gestión de los distintos momentos o secciones que conforman cada clase, lección, tema o unidad de enseñanza y de aprendizaje que constituyen la lección de matemáticas; 2- la presentación de la información; 3- la gestión del trabajo y la discusión en grupo; 4- la interpretación, discusión y respuesta a las ideas de los estudiantes; 5- la gestión de la discusión en gran grupo; 6- la construcción y uso de representaciones; 7- la introducción de material didáctico o de entornos informáticos y 8- la gestión de la construcción del nuevo conocimiento matemático desde la interacción profesor- alumno-tarea etc.

Llinares (2000) considera que las actividades de carácter general en la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje son aquellas que están vinculadas a la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace al problema matemático propuesto (Llinares, 2000; Perrin-Glorian,1999; Saraiva, 1995) y en la caracterización del discurso en el aula (Hache; Robert, 1997). Esta caracterización del discurso se relaciona con el discurso pedagógico y la comunicación que la docente propicia en el aula. En este orden de ideas, la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en aulas de matemáticas en nuestra investigación, se entendió como una competencia[3] del profesor de matemáticas que involucra múltiples actividades, que, en su mayoría, surgen en el contexto del aula y que tienen como fin primordial promover el aprendizaje y la instrucción de los

[3] La competencia se asume como un conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes donde se vinculan tres tipos de saberes: 1- un saber asociado a conocimientos teóricos o proposiciones que relacionan contenidos diferentes, 2- un saber relacionado con un conocimiento práctico que permita el desarrollo de las habilidades y destrezas necesarias para ejecutar diferentes acciones y finalmente 3- un saber asociado a un conocimiento del conjunto de normas, valores, afectos, actitudes y circunstancias que permitan interactuar con éxito en el medio social (BOHÓRQUEZ, L. Á., 2016).

estudiantes. Estas actividades, al igual que en Llinares (2000), serán divididas en dos grandes grupos: 1- las actividades de carácter general y 2- las actividades consideradas específicas del contenido matemático (Bohórquez, L. Á., 2016)

4.2.1.1 Actividades de carácter general.

Están relacionadas con todo aquello que implica el establecimiento de las normas sociales (Yackel; Cobb,1996) y se asumen desde las perspectivas de Doyle (1986), McCaslin y Good (1992) y Brophy (1999, 2006) y pueden entenderse cómo:

> Aquellas actividades que permitan involucrar a los estudiantes u obtener su cooperación, que establezcan y mantengan procedimientos de la clase, que permitan el seguimiento de los comportamientos de los alumnos y todas aquellas que el profesor identifique necesarias para que sus estudiantes participen de manera óptima en el ambiente de aprendizaje previsto. (BOHÓRQUEZ, 2016, p. 47)

En relación con estas actividades, autores como Llinares (2008), considera que al entender la enseñanza de las matemáticas como una práctica, que debe ser comprendida y aprehendida, implica que las acciones que promueve el profesor en ocasiones de forma habitual hacen parte de las actividades de carácter general dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Asimismo, Bonilla, et al. (2014) consideran que: 1-un ambiente de aprendizaje regulado por normas socio-matemáticas posibilita una interacción, que reconoce las condiciones y roles de los participantes dentro de una comunidad; y 2- La participación, posibilita los procesos de negociación de significados matemáticos y didácticos. Por tanto, las actividades de carácter general no son ajenas al proceso de enseñanza-aprendizaje y permiten organizar el diseño de aula.

En este sentido, algunas de las actividades que promueve el profesor pueden darse de manera esporádica en el aula, por ejemplo: solicitar organizarse a los estudiantes de manera individual o grupal, solicitar pasar al tablero a un estudiante en específico o dar la palabra a un estudiante. Son actividades que no necesariamente están enfocadas a la relación del estudiante-conocimiento matemático puesto en juego. Sin embargo, son acciones que el profesor considera necesarias para fomentar la participación en el aula y pueden estar orientadas por objetivos de enseñanza-aprendizaje.

4.2.1.2 Actividades de carácter específico

Se refieren a todas aquellas actividades que están relacionadas con la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace un problema propuesto (Llinares, 2000; Perrin-Glorian,1999; Saraiva,1995) Una actividad desde Hersant y Perrin-Glorian (2005) es la de identificar los conocimientos previos del estudiante para que el profesor pueda prever las acciones de los estudiantes en la resolución de una tarea en específico y de esta manera logre deducir, cómo sus estudiantes interpretan las retroalimentaciones, solicitudes o instrucciones frente a un problema propuesto; es decir, la caracterización del discurso y la comunicación que propicia el profesor en el aula (Hache; Robert,1997).

Con relación a las actividades asociadas al contenido matemático, Stein et al. (2008) establecen cuatro grupos de actividades relevantes para promover la discusión matemática dentro del aula. Estas actividades son anticipar, monitorear, seleccionar, secuenciar y conectar y las cuales son entendidas desde este autor como:

- ***Anticipar*:** Prever cómo los estudiantes resuelven tareas matemáticas, a partir del uso de estrategias de solución correctas e incorrectas que dan cuenta de conceptos e interpretaciones matemáticas. Por tanto, va más allá de evaluar si una tarea es cognitivamente desafiante y el profesor debe desarrollar experticia para establecer cómo los estudiantes podrían interpretar matemáticamente un problema.

- ***Monitorear:*** Identificar las matemáticas que utilizan los estudiantes en el desarrollo de una tarea. En esta etapa el docente debe determinar el potencial de aprendizaje, las estrategias, representaciones y conceptos particulares referidos por los estudiantes y debe tener un seguimiento de las matemáticas que se desarrollan a medida que se avanza en un problema matemático.
- ***Selecciona*r:** Como resultado de monitorear, el docente escoge un estudiante o grupo en particular para que comparta su trabajo, genere y profundice discusiones matemáticas con el grupo en general; esto ayuda a que se aumente el repertorio de estrategias de solución en la clase. En esta práctica es necesario que el docente identifique el potencial de aprendizaje en estrategias de solución, escoja cuáles de las intervenciones de sus estudiantes son relevantes para compartir con toda la clase durante la fase de discusión por medio de exposiciones.
- ***Secuenciar*:** Permite trazar caminos para explicitar los modos de solución de sus estudiantes por medio de la discusión en el aula donde se haga explícito los alcances sobre el objeto matemático. Es decir, el profesor pone en discusión las representaciones, el lenguaje, las deducciones que se construyen o mejoran en el transcurso de las sesiones.
- ***Conectar:*** Para generar discusión matemática en el aula, el profesor debe explicitar las conexiones existentes entre las respuestas de sus estudiantes, que se ven reflejadas en representaciones, lenguaje y estrategias que ellos refieren.

Sobre las actividades específicas del contenido matemático, como lo mencionamos anteriormente, refieren únicamente a las acciones de gestión que incentiven la relación entre estudiante y conocimiento matemático y para esto tipificamos (Bohórquez; Romero, 2022) las acciones desde tres aspectos de la gestión del conocimiento matemático. 1- en relación con el discurso matemático que él (PFP) mantiene con sus estudiantes (Perrin Glorian, 1999-2005); 2- aquellas prácticas relevantes que posibilitan gestionar la comunicación matemática en el aula (Stein et al., 2008) y 3- aquellas que involucran la resolución de problemas cómo estrategia didáctica (Bohórquez, 2016)

Algunas de las actividades que se pueden identificar con relación a la interacción estudiante y conocimiento matemático, mediado por el discurso del profesor (Perrin Glorian, 1999-2005) son: 1. Reconocer los datos que pueden ser utilizados por los estudiantes sin intervención del docente; 2. Identificar los conocimientos previos de los estudiantes para prever posibles acciones, en la adquisición de un concepto matemático; 3. Retroalimentar a sus estudiantes a partir de los alcances en una tarea propuesta; 4. Gestionar la discusión en gran grupo. Es decir, promover la construcción y uso de representaciones (icónicas, simbólicas, algebraicas) y 5. Gestionar la construcción del nuevo conocimiento matemático desde la interacción profesor alumno-tarea. En esencia, son actividades que surgen a partir de los discursos que elaboran los estudiantes y que le permiten al PFP determinar los alcances o limitaciones que presentan los estudiantes al momento de enfrentarse con un nuevo concepto. Sobre la segunda tipificación, se aclaró anteriormente en el marco conceptual, que refiere a promover la comunicación matemática en el aula a partir de las cinco prácticas que propone (Stein et al., 2008).

Finalmente, sobre las actividades que involucran la resolución de problemas, como dispositivo didáctico Bohórquez (2016) las considera como un conjunto de acciones y dispositivos que promueven la comunicación entre los estudiantes en el aula de matemáticas. Este autor manifiesta que, aunque parecieran actividades de la gestión de carácter general, son acciones del profesor formador de profesores que incentivan la relación entre estudiante y conocimiento matemático e incluso didáctico. Algunas de estas actividades son: 1. Abordaje y resolución de los problemas en pequeños grupos; 2. La presentación de los avances al grupo general de cada grupo; 3. La participación del gran grupo en las exposiciones de otros grupos; 4. La participación grupal en el aula virtual, y 5. La construcción del “cuaderno del resolutor”

4.3 Análisis de resultados por medio de la construcción de viñetas

En este apartado se muestran los resultados de la investigación, por medio de la construcción de dos viñetas (Gavilán et. al, 2007; Bohórquez, 2016), y que fueron expuestos en Bohórquez y Romero (2022). Estructurar en viñetas permite contrastar los datos desde tres fuentes: Datos o segmentos de video, entrevistas hechas al profesor encargado y análisis entre investigadores- coinvestigadores, que vinculan elementos teóricos que permiten describir las particularidades de la gestión que se promueve en dicho ambiente de aprendizaje.

La cantidad de datos provenientes de las transcripciones globales, corresponde a un promedio de 40 horas de grabación y su respectiva transcripción. Por tal razón, el grupo de investigación consideró conveniente reducir la información eligiendo las transcripciones en relación con las tareas que refieren a las bases de numeración, mencionada anteriormente en el diseño de Transición Aritmética-Álgebra, facilitando el rastreo de las interacciones de gran grupo y pequeños grupos en seis diferentes sesiones.

En relación con lo anterior, la reducción de volumen de los datos se dio bajo los siguientes criterios: para la primera viñeta: a) Identificar momentos explícitos de la interacción estudiante-docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje; b) Identificar momentos donde se trabajará el concepto de bases de numeración. Y para la segunda viñeta se tuvieron en cuenta los criterios: a) Identificar intervenciones explícitas del grupo 5 (G5); y b) Identificar momentos donde G5 muestra comprensión sobre la discusión en desarrollo.

Los datos que se seleccionaron en la depuración son de las sesiones uno a seis, reduciendo el volumen de datos a dieciocho horas de grabación. Puesto que, dichos segmentos de video muestran secuencialmente las nociones iniciales y finales en el proceso de caracterización de las bases de numeración y magnitud. Sin embargo, este informe pretende describir la gestión del profesor en relación con las actividades de carácter general y específicas inmersas en el proceso de enseñanza-aprendizaje únicamente con relación a las bases de numeración.

En la primera viñeta *"características de la gestión del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje"* intenta describir las actividades de gestión de carácter general y específico que promueve el profesor diseñador del AA. Las actividades de carácter general acuden a las tipificaciones teóricas hechas por Doyle (1986); Mccaslin & Good (1992); Brophy (1999; 2006). Y las actividades de carácter específico desde tres aspectos: En relación con el discurso matemático que el PFP mantiene con sus estudiantes (Perrin-Glorian, 1999; 2005); las prácticas matemáticas que posibilitan gestionar la comunicación matemática en el aula (Stein et al., 2008); y aquellas actividades que involucran la resolución de problemas cómo dispositivo didáctico (Bohórquez, 2016).

La segunda viñeta, *Incidencia en el aprendizaje de los estudiantes para profesor, a partir de las acciones de gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje*. Se construye con las intervenciones de G5 durante las discusiones que involucran las bases de numeración. Para evidenciar la comprensión de G5, en distintos momentos, se establecieron las siguientes acciones: 1- participación en las discusiones a través del lenguaje verbal o simbólico; 2- Involucrar las solicitudes y peticiones del profesor en su discurso; y 3-reflexionar sobre las producciones matemáticas propias o de otros pequeños grupos.

Romero (2021) afirma que el trabajo desde la resolución de problemas como dispositivo didáctico implica guiar a los estudiantes hacia la formalización en matemáticas por medio de acciones como moderar el debate matemático, intervenir en momentos específicos de las discusiones, delimitar el debate, brindar instrumentos para el análisis de su propia práctica y disponer del tiempo necesario para que dichas discusiones emerjan de la negociación de significados. Entonces, el profesor busca que sus estudiantes experimenten una formación especializada de un profesor de matemáticas. Para ello, el profesor considera la formalización matemática, a través de la construcción de definiciones, de *"base de numeración"* que implica:

- Reconocer aspectos didácticos como: situaciones de uso, relaciones, propiedades, registros semióticos (Vergnaud, 1990).
- Reconocer aspectos matemáticos: ligados a entender la base de numeración como una estructura recursiva convergente.

Garantizando, por un lado, aspectos sociales como la disposición de los integrantes de dicha práctica, existencia de espacios de discusión, tiempo para que maduren dichas discusiones, pero, por otro lado, una buena gestión[4] del profesor que cumpla parcialmente con los objetivos propuestos.

4.3.1 Caracterizaciones de la gestión del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la primera sesión el profesor solicita a sus estudiantes que se organicen en mesas de trabajo con un máximo de cuatro estudiantes por grupo. El propósito para esta sesión fue reconocer usos, tipos y situaciones asociadas a las bases de numeración, por lo cual, el profesor plantea al grupo en general las siguientes preguntas:

PFP: *¿Cuáles bases de numeración ha manejado?, ¿qué tipo de situaciones, que*

[4] Una buena gestión es entendida como un complejo de diversas acciones bien sean de carácter general o específico que conduzcan a los estudiantes a un proceso de resignificación de objetos matemáticos y reflexión de los mismos.

involucran conceptualmente bases de numeración, ha enfrentado?,

¿Qué es una base de numeración?

Observamos que la organización de los estudiantes en grupos está asociada a actividades de carácter general, las cuales se pueden comparar con las categorías expuestas por David y Thomas (1992). El conjunto de preguntas que establece el profesor son de indagación y pueden vincularse a actividades de gestión específicas del contenido matemático porque permiten dirigir la discusión tanto en gran grupo como en pequeños grupos (Perrin-Glorian, 1999-2005).

Romero (2021) menciona que, a partir de sus años de experiencia en este espacio de formación, reconoce que las matemáticas escolares que traen los estudiantes de su trabajo realizado en la escuela en cuanto a proporción y proporcionalidad deben ser resignificadas. Por tanto, dentro del diseño, el conjunto de tareas en relación con las bases de numeración tiene intenciones como: 1-lograr que los estudiantes puedan armar conexiones entre distintas formas de representación del número; 2- reconozcan que las bases de numeración sirven para referenciar y tratar cantidades enteras; 3-Interpretar las bases como estructuras recursivas. Por consiguiente, es necesario describir el conjunto de acciones de carácter general y específico del contenido matemático que promueve el profesor en dicho ambiente de aprendizaje.

En esta primera sesión, los estudiantes de Transición Aritmética- Álgebra 2019-III, frente a la pregunta: *¿Cuáles bases de numeración ha manejado?,* pueden mencionar con facilidad las bases de numeración que han utilizado en experiencias anteriores o situaciones asociadas, por ejemplo: Sistema binario, en sistemas computacionales; sistema sexagesimal, y su utilidad en mediciones de tiempo. Sin embargo, las preguntas en relación con la estructura de la base, *¿Qué es una base de numeración?,* no se respondió de manera inmediata y dicha pregunta originó discusiones alrededor de la base de numeración.

En esta sesión, él PFP identifica "*los datos que pueden ser utilizados por los* *estudiantes"* (Perrin Glorian, 1999-2005) y reconoce que la visión inicial sobre las bases de numeración está estrechamente relacionada con los dígitos; por tanto, las tareas que se propongan en el diseño deben favorecer el trabajo estructural de la base de numeración.

A partir de la participación en gran grupo, se menciona la base de numeración hexadecimal y aparece una discusión conceptual en torno a utilizar letras para diferenciar el cardinal que refieren los dígitos en bases de numeración mayores a diez. Como se lee en la siguiente evidencia:

> ***E14:*** *¿Después de la base nueve, la diez ya se trata con letras?*
>
> ***E15:*** *profe, ósea, después de la base nueve (..) la diez ya se tratan con letras. Después sería A, B…*
>
> ***E19****: Los primeros diez dígitos serían del cero al nueve y después sería A, B...*
>
> ***PFP:*** *los dígitos son ¿qué? (...) del cero al nueve, cero, uno…*
>
> **Estudiantes:** *tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, A, B, C, D, E, F*
>
> ***PFP:*** *¿Ya están todos? [profesor señala el tablero indicando los dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F]*
>
> ***E 9:*** *¿Por qué las letras?]*
>
> ***PFP:*** *[¿Qué porque las letras?, compañero del alma E20.*
>
> ***E20:*** *Pues porque**:** no sé, no estoy muy seguro. Pero, diría que, porque si no se escriben así, diría que es una agrupación del mismo. Sí escribimos 10*
>
> ***PFP:*** *si en lugar de este, [señala, en el tablero, la letra A] [escribiéramos **1.0]***
>
> *[Murmullos]*

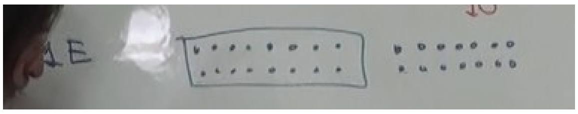
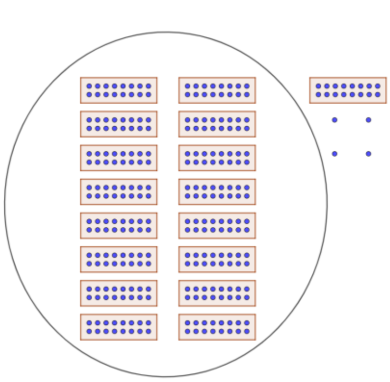
En este momento, el profesor considera las intervenciones de gran grupo, permitiendo que los estudiantes intervinieran sobre el acuerdo de utilizar letras para diferenciar el cardinal en bases de numeración mayores a diez. Para que la discusión sea atendida por la mayoría de los estudiantes, solicita a E10 dar un ejemplo de un número en base diez y seis y lo pone a comparación con la otra representación (114) que ha sido mencionada por los demás grupos.

> ***PFP*** *¿Puede dar un ejemplo? (.) Digamos que dado un número en base diez y seis Díctemelo por cifras, por favor.*
>
> ***E10****: ¿uhmmm 1E?*
>
> ***PFP:*** *y si en lugar de* ***E*** *utilizamos… Estamos trabajando base diez y seis, ¿correcto? En lugar de E utilizamos otro, lo que están proponiendo otros grupos es (1 1 4)*

Luego de un trabajo en pequeños grupos, E10 propone al profesor hacer una representación icónica para diferenciar 1E y 114 bases diez y seis. Como se muestra en la siguiente tabla 3.

Tabla 3

Diferencia entre 1E y 114 propuesta por Estudiante 10.

1E E10, indica que 1 representa que ya se llegó al tope posicional (diez y seis unidades) y E representa 14 unidades sueltas.	**Figura 2** *Representación de 1E, propuesta por E10*  *Nota. Fuente propia.* **Figura 3** *Imagen elaborada por el transcriptor.*
114 1= representa una unidad de orden superior conformada por diez y seis rectángulos que se organizan en un círculo. 1= Representa un los diez y seis puntos en un rectángulo 4= Representa 4 unidades sueltas.	 *Nota. Fuente propia.*

Las acciones que PFP se consideran específicas del conocimiento matemático. Porque están promoviendo la participación de los estudiantes a través de registros icónicos-simbólicos que favorecen la comunicación matemática en el aula y se puede relacionar con la actividad de "conexión" (Stein et, al. 2008) dado que el PFP espera que los estudiantes logren relacionar ideas que se reflejan en representaciones con conceptos matemáticos. A partir de la intervención de E10 al grupo en general, el profesor interviene.

PFP: *La base cualquiera la que sea (..) eso es un hecho algebraico, ¿no?, cualquier base expresada en su base se escribe uno cero [10] ¿si está? Ahora están razonando desde los dígitos que se usan en la base y no de la cantidad que refiere.*

En la sesión II, el profesor resalta que la intervención de E10 en la sesión I permitió reconocer que 1E y 114 refieren a cantidades distintas por la explicitación de las agrupaciones que justificó E10 desde una representación icónica (tabla 3).

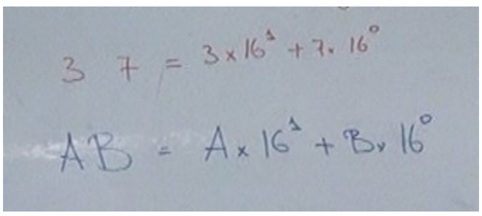
El profesor espera identificar la noción que los estudiantes traen sobre cantidad y número *y* solicita a los grupos pequeños "escribir 37 en base dieciséis" (explicitando las agrupaciones en dicha base de numeración)

Después de varios minutos de trabajo y discusiones en pequeños grupos (G1) sugiere la siguiente igualdad al grupo en general.

G1: "$37 = 3 \times 16^1 + 7 \times 16^0$ (figura 1, parte superior):

Figura 4

Registro de las respuestas de G1 por parte del profesor.



Nota. Tomada del tablero.

Una vez G1 presenta la igualdad, él PFP interviene y solicita a los integrantes de G1 que establezcan una manera de expresar cualquier número en base dieciséis y E25 propone el siguiente número: *"AB = A x 16*^{1} *+ B x 16*^{0}*"* (Imagen 3, parte inferior)

El profesor refiriéndose al grupo en general menciona:

PFP: *¿Cómo son las agrupaciones que se forman en base dieciséis?, ¿de qué manera podemos hacer explícitas dichas agrupaciones en una escritura algebraica?, ¿qué tienen que decir sobre la igualdad sugerida por G1? (...) ¿Alguien tiene alguna respuesta?*

Cuando el profesor escribe las igualdades propuestas por G1 (imagen 3) en el tablero atiende, (entrevista), *"a una acción de moderador del debate matemático"*. Pues, las hipótesis de G1 las pone a consideración del grupo en general. Es posible inferir que las acciones del PFP se relacionan con el discurso matemático que el profesor mantiene con sus estudiantes (Perrin Glorian, 1999-2005) puesto que, el profesor no tiene el interés de decir al grupo en general que dichas igualdades (Fig.4) son incorrectas, si no que establece un conjunto de preguntas que promueven la discusión entre los estudiantes, lo que conllevo a la intervención de E10 perteneciente a (G2).

E10: *Hay un problema. Porque, es que estamos intentando alejarnos de la base decimal. Entonces, no podríamos poner* ***A*** *por dieciséis a la uno por el simple hecho de que, dieciséis no pertenece a la base [se refiere a la igualdad AB = A x 16*^{1} *+ B x 16*^{0}*]*

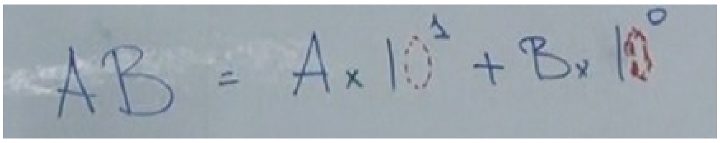
Gran Grupo*: Murmullos (...)*

PFP: *¿Qué aquí no deberíamos usar este garabato? [Señalando el 16 que está multiplicando a 3 en la igualdad 37 = 3 x 16*^{1} *+ 7 x 16*^{0}*] (imagen 3) Entonces, ¿cuál deberíamos utilizar?*

E10: *Diez. Bueno, uno cero* ***[10]*** *[E10 solicita al profesor que corrija el 16 de la igualdad 37 = 3 x 16*^{1} *+ 7 x 16*^{0} *y lo reemplace por uno cero [10], por lo cual se* *obtendría la igualdad* $\boldsymbol{37 = 3 \times 10^{1} + 7 \times 10^{0}}$ ***]***

Figura 5

Modificación propuesta por E10



Nota. Fuente propia**.**

PFP: *¿Qué significa uno-cero [10]?*

E10: *Una agrupación de cero unidades sueltas y un grupo de dieciséis unidades.*

La intervención de E10 es producto de la discusión al interior de G2 y las preguntas que planteo el profesor y en términos de la teoría de Stein et al. (2008), es posible categorizar las acciones como una práctica de anticipación. Puesto que, le permiten al profesor reconocer los conocimientos de referencia que emplean los estudiantes en la elaboración de argumentos y por medio de actividades de monitoreo logra que la comunidad consolide hechos algebraicos.

Romero (2021) reconoce que los estudiantes han tenido experiencias previas con las bases de numeración en situaciones de empaquetamientos, paquetes de paquetes, y para los estudiantes es una acción recordable que refiere a cantidades discretas. Sin embargo**,** aparecen dificultades en torno a la estructura interna de la base. Es decir, conservar la numerosidad de un nivel a otro (paquete de paquetes) implica identificar un proceso recursivo, el cual no se logra de manera inmediata, dado que la mayoría de experiencias que los estudiantes han tenido son de caracter procedimental o iterativo (recaen en la acción de agrupar). Lo que ocasiona que, el concepto de base de numeración quede reducido al mero uso de los dígitos.

Tomando como base las ideas de Perrin-Glorian (2005) y Bohórquez (2016) se observa que, posiblemente, gestionar la discusión del contenido matemático en gran grupo le permite al profesor retroalimentar, aclarar, cuestionar argumentos que exponen los grupos de trabajo y cuando el profesor logra que (E10) exponga un argumento sobre la igualdad (Fig. 5), se debe precisamente al tipo de preguntas y discusiones que pone en consideración para que los estudiantes debatan poniendo en juego su conocimiento matemático. En otras palabras, el discurso matemático se enriquece en la interacción del profesor con sus estudiantes.

En la sesión III los estudiantes intentan caracterizar los elementos que conforman las bases de numeración, a partir de las discusiones dadas en la sesión anterior, el profesor menciona elementos teóricos trabajados en sesiones anteriores, sobre la estructura de la cantidad de Schwartz (1988), la cual es una tripla semántica que relaciona < Numerosidad, “cosa” que se está midiendo y unidad de medida >. Entonces, al ser un curso de didáctica se espera que los estudiantes de Transición Aritmética-Álgebra involucren elementos teóricos que les permita referir aspectos estructurales del concepto base de numeración y por ejemplo; logren diferenciar número[5] de cantidad[6].

Así, en el trabajo en gran grupo, los estudiantes han referido que las bases de numeración están compuestas de:**símbolos, peso posicional, valor de cada símbolo, orden y operaciones**. Y a partir de este momento, en el proceso de “negociación de significados” los participantes de este experimento empiezan a justificar porque dichos elementos pueden ser considerados como elementos de las bases de numeración.

Frente a la palabra orden, E10 interviene y menciona que: “cuando se escoge una base, se escoge la forma de ordenar y pone como ejemplo la base de numeración tres”. El profesor en el tablero representa lo expresado por E10 para mostrar “los empaquetamientos de la base tres de numeración” (Fig. 6). Luego de la intervención de E10, el profesor reconoce que los demás grupos de trabajo están asignándole un significado diferente a la palabra orden, por lo cual plantea las siguientes preguntas:

---

[5] Número, desde Euclides, es entendido cómo una pluralidad de unidades.
[6] Cantidad, desde Schwartz (1988), es entendido cómo una tripla semántica.

PFP: ¿Para qué, E10 utiliza la palabra orden en el ejemplo de la base tres de numeración? ¿Cuándo E10 utiliza la palabra orden a que se está refiriendo?

E21: Él utiliza el orden para organizar las agrupaciones de menor a mayor (..)

Profesor: Ya, listo. E10, ¿está de acuerdo que eso fue lo que sumercé, hizo cuando uso la palabra orden?

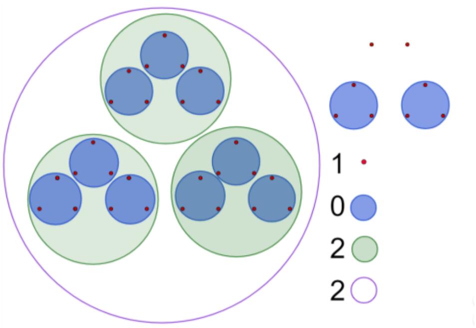
E10: No, solo en una parte estoy de acuerdo.

E17: Es que en lo que difiero es que él no lo escribió de menor a mayor, él lo escribió de mayor a menor porque él empezó escribiendo uno-rojo, cero- azul y así sucesivamente, él organizó de mayor a menor. (Fig. 6)

PFP: Listo, uso la palabra orden para organizar.

Figura 6

Representación de agrupaciones en base tres de numeración.



Nota. Fuente propia**.**

PFP: E10 ¿Qué tiene para decirnos en relación con el uso de la palabra orden en la primera acción que hizo?

E10: Estaba intentando darle un orden, yo siempre ordenaba los puntos y todo eso, como para dar a entender que, con orden, me refiero a (...) la cantidad, con el cual, se organizan los puntos. (grupos de grupos que marca la base, Fig. 6)

E17: °Él está usando la palabra orden para empezar a agrupar°

PFP: Listo, ya, o sea, está haciendo agrupaciones iguales de grandes, con igual numerosidad, a eso (.) a eso se está refiriendo E10, cuando habla de orden, ¿sí? Bien, y ahí sí podemos discutir la idea de la palabra, orden con él, está (..) generando agrupaciones, E10 ¿estaría de acuerdo de cambiar la palabra orden por estructurar?

E10: Sí, estoy de acuerdo, es lo que hice.

Las discusiones que se generan en gran grupo en un ambiente regulado por normas sociomatematicas (Rojas et al., 1999) permiten discutir acerca de un lenguaje técnico que es necesario para referir conceptualmente a las bases de numeración. El significado que E10 da a la palabra orden, no es el uso convencional desde las matemáticas (relaciones de orden). Por lo cual, el profesor recomienda a E10 y el grupo en general utilizar la palabra "estructurar" que relaciona la acción de agrupar expuesta por E10.

Romero (2021) menciona que un profesor en formación debe asumir un papel de interpretante de las producciones e ideas de los miembros de la práctica donde se está trabajando. Es decir, se debe disponer de atención, escucha para comprender a los demás. Además, es necesario referir a un lenguaje técnico de las matemáticas y en este caso E10 no utilizo la palabra orden desde las matemáticas y por tal razón el profesor sugiere la palabra "estructurar".

Como parte del trabajo didáctico desarrollado en el curso, la estructura de la cantidad, es interpretada en la representación icónica propuesta por E10 (imagen 5) y de esta forma los estudiantes muestran una apropiación, cuando pueden relacionar la tripla semántica en lo expuesto por E10, como se observa en la siguiente evidencia:

PFP: *¿Por qué escribió E10 de forma vertical las agrupaciones? (Fig. 6) (parte derecha)*

Gran grupo: *° por la numerosidad de la estructura de la cantidad°*

Gran Grupo*: °<punto °bolita azul °bolita verde, bola blanca>*

PFP*: la bolita, bolita roja, es la unidad con la que estamos midiendo ¿Qué estamos midiendo?*

Gran Grupo: *Cantidad de agrupaciones, o sea, ¿****cuántas de estas bolitas hay?***

PFP: *Bien, lo distinto es la unidad. Entonces, cuando hablamos de que "este" dos vale más que esté otro "dos" estamos hablando mal. ¿No? Porque, en sí valen lo mismo, pero refieren a cosas distintas. [Se refiere a 2 bola verde, 2 bola blanca, en imagen 5] Si ven, ahh si ven, la estructura de la cantidad Schwartz funciona y nos deja comprender cosas.*

Finalmente, la discusión inicial[7] alrededor de los elementos de las bases de numeración fue orientada a partir del debate matemático que se generó en el aula y por medio de acuerdos socio-matemáticos, el grupo decidió, por ejemplo: que las operaciones no pertenecen a la base de numeración sino al sistema de numeración, que la función de los símbolos es representar cualquier base de numeración, que el peso posicional lo determina la numerosidad de cada agrupación y dichas características, dieron apertura al posterior trabajo de construir una definición formal de base de numeración por parte de la comunidad local.

Las acciones que fueron mencionadas anteriormente en esta viñeta, corresponden a actividades de carácter general y específico que propician la discusión matemática en el aula. Entonces, acciones como:

- Proponer preguntas en distintos momentos, que son desarrolladas primero en pequeños grupos y posteriormente en gran grupo, posibilita al estudiante la construcción del conocimiento matemático.
- Promover el uso de representaciones para comunicar ideas.

[7] "Las bases de numeración pueden estar compuestas de símbolos, de peso posicional, del valor de cada símbolo, de orden, operaciones…"

- Seleccionar las respuestas de un estudiante en específico para mostrar al grupo en general
- Consolidar hechos algebraicos, geométricos y aritméticos a partir de la negociación de significados
- Fomentar la participación de los estudiantes, en la práctica de enseñar matemáticas.
- Vincular elementos teóricos didácticos que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Favorecen la formación de un estudiante para profesor, dado que el diseño busca resignificar las matemáticas escolares cómo práctica.

4.3.2 Incidencia en el aprendizaje de los estudiantes para profesor de las acciones de gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje del profesor formador de profesores.

La intención de caracterizar los elementos de las bases conllevo a otro tipo de discusiones sobre la construcción de una definición matemática, tanto desde el campo de la didáctica como de la matemática. Romero (2021) a partir de las ideas de Tall et al. (2012), considera que la importancia de construir definiciones matemáticas posibilita situar a los estudiantes dentro de un proceso que implica diferentes niveles cognitivos. Es decir, cuando el sujeto es capaz de hacer relaciones coherentes, delimitarlas y reconocer propiedades de un objeto va construyendo una estructura de conocimiento.

A partir del trabajo desarrollado en las sesiones I, II y III, el profesor centra la discusión en la estructura de las bases de numeración. En esta viñeta se espera describir la incidencia de la gestión en el aprendizaje de estudiantes para profesor. Por lo cual, se considera necesario identificar: 1-comprensión en las discusiones que manifiesta G5 en el uso de lenguaje o representaciones asociadas; 2- mostrar momentos donde G5 atiende a las solicitudes del profesor; y 3- Identificar acciones de reflexión de G5, frente a sus propias producciones o de los demás grupos pequeños. (conformado por: E9, E12 y E13).

De modo que esta viñeta se construye a partir de un rastreo del grupo en particular G5 donde se identificó: 1- la concepción de los estudiantes, expuestas en el diseño desde las ideas de Saenz-Ludlow y Zellweger (2016), al realizar prácticas argumentativas como sujetos individuales pertenecientes a una comunidad de práctica que reconstruyen conocimientos matemáticos. (Freudenthal,2002); en las relaciones inter-personales en el proceso de objetivación (Saenz-Ludlow y Zellweger, 2016); y a partir de las entrevistas estructuradas o semiestructuradas, fue posible corroborar que los discursos pedagógicos de los estudiantes dan cuenta de obstáculos, errores y dificultades en los diferentes procesos de la resolución de problemas.

En la cuarta sesión, los estudiantes caracterizan y describen las propiedades y relaciones internas de la estructura recursiva de las bases de numeración, la discusión se dio primero en pequeños grupos y luego se llevó a gran grupo; posibilitando la construcción de acuerdos socio-matemáticos como por ejemplo: *"las definiciones en matemáticas no deben involucrar usos ni aplicaciones; deben responder a una estructura semántica lógica y no es necesario hablar de las operaciones, puesto que ellas se encuentran en el sistema de numeración".*

En el camino de definir que es una base de numeración, algunos grupos asumen que los dígitos son consecuencia de la estructura de la base, y otros grupos consideran que los símbolos son elementos indispensables para referir a las bases de numeración.

El profesor encargado identifica que los estudiantes han podido reconocer elementos, características de las bases de numeración y han asociado representaciones (icónicas, simbólicas, algebraicas) que permite describir el funcionamiento de las bases de numeración. Sin embargo, se espera que la discusión alcance un nivel general o formal por tanto, considera necesario discutir sobre concepciones escolares que traen los estudiantes sobre las bases de numeración. Por ejemplo: la función de los símbolos. El PFP interviene y solicita trabajar en Gran grupo la siguiente pregunta *¿Los símbolos son elementos de las bases de numeración?*

Observamos que la intervención del PFP consistió en formular una pregunta para orientar la discusión primero en los pequeños grupos y luego en gran grupo. Esta acción coincide con la expuesta en sus trabajos por Hersant & Perrin-Glorian (2005) quienes las consideran tareas del profesor asociadas a la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático.

A continuación, se muestra la discusión al interior de G5 sobre la importancia de los símbolos en las bases de numeración.

E12: *Chicos, yo creo que los símbolos sí son importantes, porque los debemos utilizar para hablar de bases.*

E9: *Es que no sé. ¿Recuerdan cuando el profesor mencionó lo de las representaciones icónicas o bueno lo que hizo E10 en el ejemplo de 1E y 114?*

E13: *Si, pues, que cuando escribíamos un número en base dieciséis, con letras o con números, mostraba agrupaciones diferentes…*

PFP: *Bueno, G5 ¿los símbolos pertenecen o no pertenecen a la base?*

E9: *Es que (..) parece que necesitamos los símbolos para escribir cualquier número.*

En este momento el profesor ha pasado por los distintos grupos e identifica que algunos grupos consideran que los símbolos son relevantes en la base de numeración, importancia centrada en representar, y otros grupos consideran que los símbolos son inherentes a la base. Por su parte, G5, relaciona una situación previa para mostrar que los símbolos cumplen una función de representación y no hay un consenso sobre si es posible considerarlos elementos de las bases de numeración.

Para lograr un acuerdo socio matemático, el profesor ejemplifica la siguiente situación al gran grupo:

PFP: *Vengan chinos, vamos a suponer que el primer acto, la única cosa que está escrita, son los signos numéricos 1022* [Señala 1022 en fig. 6] *Entro y digo ¡ay juemadre!* [expresión coloquial de sorpresa] *están trabajando bases ¡ya sé! Sigo caminando… Segundo acto, todo está borrado excepto la representación icónica* [Señala, fig. 6, lado izquierdo] *y digo ¡ay juemadre! ¡Están trabajando base tres! ¿En cuál de los dos actos hay verdad?*

GG: *En el segundo acto.*

PFP: *¿Por qué?*

E13: *Porque la representación icónica me dice que están agrupados de tres en tres*

E10: *En lo simbólico, (..) podría estar trabajando en cualquier base mayor a 3.*

PFP: *¿Los símbolos son elementos de la base?*

GG: *Noooo, sirven para representar cantidad.*

Observamos en el diálogo anterior que G5 inicialmente no muestra una postura clara sobre si los símbolos son elementos en las bases de numeración, el profesor identifica que la idea de G5, cuando habla E13 y E9, se enfoca más en que los símbolos son utilizados para representar, teniendo en cuenta este hecho el PFP decide intervenir en gran grupo, mostrando un ejemplo que les permite centrar sus argumentos a los grupos pequeños. Esto muestra que las acciones de gestión del profesor en la interacción con G5 permiten a los estudiantes de este grupo avanzar en la comprensión del problema y delimitar la importancia de los símbolos a la representación de un número entero en cualquier base, en este sentido las futuras discusiones se centrarán en caracterizar las agrupaciones de la base de numeración.

En la quinta sesión, el profesor solicitó a la clase en general intentar construir una definición matemática de bases de numeración, por lo cual inicialmente solicita un trabajo en los pequeños grupos. El profesor escucha las distintas intervenciones de los pequeños grupos y propone la siguiente pregunta *¿cómo hacer que las definiciones iniciales, se puedan decir de manera más estructural, sin recurrir a ejemplos o situaciones particulares?*

Lo anterior puede ser descrita desde Bohórquez (2016) como actividades que promueven la relación estudiante-conocimiento matemático en relación con actividades como: "la presentación de avances al grupo en general de cada grupo"dado que, la resolución de problemas en comunidades de práctica junto con la argumentación son pilares para promover la estructura emotiva pretendida. (Wenger, 2001)

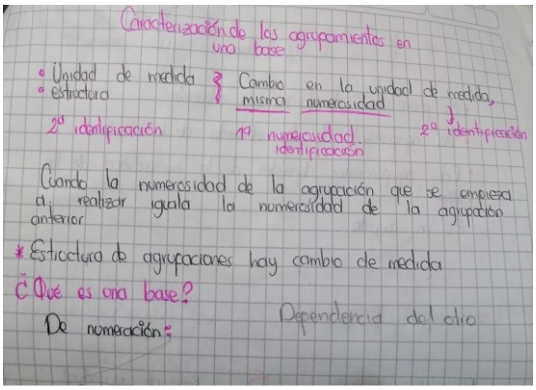
Posteriormente, G5 se presenta el siguiente diálogo para dar solución a las preguntas propuestas por PFP:

E13: *Escribamos en el cuaderno* [fig. 7] *los elementos que han mencionado los distintos grupos sobre la característica de esas agrupaciones ¿qué les parece?*

E9 y E12: *Si, de acuerdo*.

Figura 7

Apuntes de E13, sobre la característica de las agrupaciones en una base.



Nota. Cuaderno resolutor de E13.

E9: *serie de agrupaciones que se da con una determinada numerosidad…*

E13: *Esperen, tengo una idea.*

E12: *Escríbala.*

E 13. *Serie de agrupaciones que se da con una determinada numerosidad de la unidad dada para cada agrupamiento.*

E 9: *O sea. ¿La numerosidad corresponde a la base de la que estamos hablando?*

E13: *Es que no sé si escribir, sea x, la base*.

E12: *eso ya es más general ¿no?*

E13: *Listo, miren ¿así?*

<u>*Base de numeración*</u>*: serie de agrupaciones que se da con una determinada numerosidad de unidades, dicha numerosidad es igual a las unidades con que se forma el primer agrupamiento, la unidad siempre varía y corresponde al agrupamiento anterior al que se está formando.*

El profesor interactúa con el grupo G5 y solicita a E9 leer la definición que han discutido dentro del grupo.

PFP: *Lea la primera oración*.

E9: *Serie de agrupaciones que se da con una determinada numerosidad de unidades.*

PFP: *Segunda oración.*

E9: *Dicha numerosidad es igual a las unidades con que se forma el primer agrupamiento*

PFP: ¡*Ya!, ¿numerosidad es igual a unidades?*

E9: *No, es igual a la cantidad de unidades.*

PFP: *Eso es otra cosa (...) Continúen trabajando en esa definición, porque nosotros no podemos definir cantidad como cualquier persona ¿estamos?*

La interacción dentro de G5, muestra que acuden al cuaderno resolutor para sistematizar las ideas grupales, que les permita consolidar una definición general de las bases de numeración, respondiendo a las preguntas propuestas por el profesor-

Bohórquez (2016) considera que el uso del cuaderno resolutor incentiva la relación entre estudiantes y conocimiento matemático e incluso didáctico, dado que, dicho instrumento le permite a G5 registrar y reflexionar sobre las discusiones que se generan en distintos momentos de la clase, no solo registrando sus discusiones grupales, sino la de los demás grupos pequeños.

Ahora bien, cuando el profesor interviene se aprecia que hay un acuerdo sobre la manera como deben referirse a la "cantidad". Es decir, el profesor hace explícito que algunos términos discutidos anteriormente e institucionalizados no pueden dejarse de lado a la hora de presentar una definición. Por medio del rastreo de los diferentes segmentos de video de gran grupo, se encuentra que desde la tercera sesión los estudiantes han trabajado alrededor de la estructura de la cantidad de Schwartz (1989) y que desde la cuarta sesión se estableció el acuerdo socio-matemático de que siempre que un grupo o estudiante hable de cantidad debe interpretarse desde la tripla semántica de Schwartz.

Es pertinente aclarar, que de forma paralela los estudiantes también caracterizaban el funcionamiento de las bases de magnitud a partir de la tarea ocho, expuesta en el diseño de Transición Aritmética-Álgebra.

A partir de las diversas entrevistas al profesor encargado, fue posible identificar que la intención de caracterizar los elementos de las bases de numeración y magnitud conllevó a otro tipo de discusiones sobre la construcción de una definición matemática, tanto desde el campo de la didáctica como de la matemática. Romero (2020) a partir de las ideas de Tall et al. (2012) considera que la importancia de construir definiciones matemáticas posibilita situar a los estudiantes dentro de un proceso que implica diferentes niveles cognitivos. Es decir, cuando el sujeto es capaz de hacer relaciones coherentes, delimitarlas, reconocer propiedades de un objeto va construyendo una estructura de conocimiento creciente de experiencias que implican percepciones y acciones que se relacionan entre sí y algunas de estas, se privilegian y se utilizan para definir un concepto concreto.

En la sexta y séptima sesión, el PFP ya ha establecido unos criterios que deben cumplir las definiciones que se han ido construyendo en pequeños grupos, dichos criterios son entendidos dentro de la comunidad local como: "condiciones de minimalidad y maximalidad."[8] Por esta razón, solicita a cada grupo evaluar si las definiciones de otros grupos cumplen con los criterios impuestos en sesiones anteriores.

Como parte de mostrar comprensión por parte de G5, los estudiantes asumen los criterios propuestos por el profesor para la construcción de una definición de "bases de numeración y magnitud" en la siguiente evidencia se muestra como G5 discute con otro grupo pequeño sobre la estructura de la base de magnitud.

> ***E9:*** *Listo, entonces una base de magnitud, es simplemente, es una serie magnitudes, a una determinada razón de una con la otra, ¿pero entonces ¿cuál es la razón? Y ¿por qué será esa razón?*
>
> ***E19****: Espera, espera ¿cómo es que sea esa razón y qué?*
>
> ***E9:*** *no, no Es que aquí no hay que confundir el minimalismo con la estructuración, entonces de pronto al querer "minimalizar" se ocultan cosas de la estructura de lo que es base de magnitud, y creo que es lo que está pasando en su caso. Yo lo veo así, nuestro grupo lo ve así*

---

[8] Respecto a la idea de minimalidad y maximalidad desde la postura de "vocabulario mínimo". García (2014) retoma las ideas de Russell (1994) y reconoce que las matemáticas asumen unas reglas gramaticales que constituyen un aparato conceptual. Por lo cual, el vocabulario mínimo es entendido como aquel donde ninguna palabra se define en términos de otras.

***E17**: Lo que pasa es que, si uno dice que este elemento guarda una razón con este, y que todo elemento va a guardar la misma razón con el siguiente, entonces yo ya sé qué es proporcionalidad, porque si este guarda razón con este, entonces ese también con este y ahí hay proporción. Entonces a implícitamente..]*

***E9:** No,° tú estás diciendo algo que(..)°*

***E 9:** Cuando dice esto tiene con este, y ese tiene relación con este, razón con este.*

***E17**: No yo dije, si cualquier elemento de la serie guarda una razón determinada, con el siguiente, yo sé que la siguiente, una razón igual a este, con la siguiente.*

***PFP:** E17, voy a hacer una petición, si en lugar de decir alguien, con el de este con el de este, podríamos nombrar los que no tiene por qué ser A sub 1,A sub lo que sea, ¿si está?*

¿Podríamos utilizar esa idea para poder precisar la idea?,¿correcto? Porque no solamente, se trata de minimalidad, sino de poder decir lo que se quiere decir, con completa exactitud de la manera mínima, minimalidad no quiere decir, no digamos nada, quiere decir digamos todo con la menor cantidad posible de garabatos

***Estudiante 9:** Sí, ahí Yo estoy de acuerdo, pero falta algo muy importante y sigo diciendo que cuando se minimaliza, están ocultando una parte importante de la base y es que la razón, que guardan dos magnitudes, no es cualquier razón eso depende de la base.*

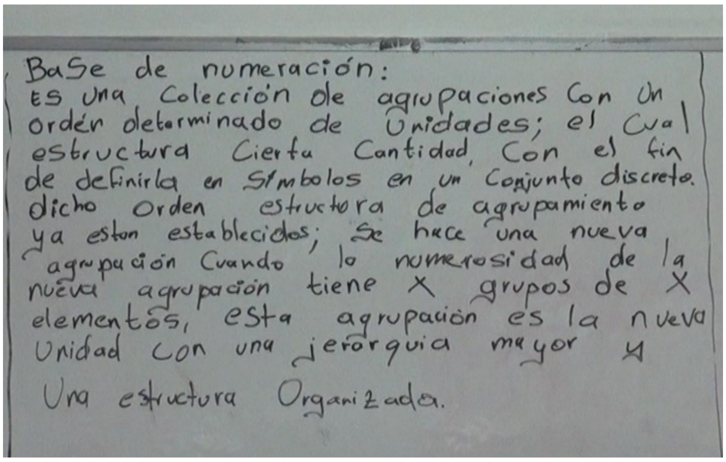
A partir de esta discusión, se puede inferir que E9 miembro de G5, muestra compresión sobre la estructura de las bases de magnitud y que los criterios que el profesor ha establecido para construir definiciones en matemáticas favorecen la comprensión de E9 y E17, dado que: 1-reconocen relación entre una magnitud y su siguiente; 2-utilizan el concepto de proporcionalidad para mostrar que la razón entre tres magnitudes es la misma; y 3- E9 establece como debe ser la razón según la base que se está hablando. En esta evidencia podemos reconocer que gracias a la comunicación que propicia el profesor en el aula de clases, los estudiantes discuten desde la estructura de la base de magnitud, se aclara que dicha discusión no es producto de esta sesión, sino que está relacionado con las tareas que resolvían en simultáneo explicitadas en la página 24, tarea 8.

En un trabajo posterior para concluir el trabajo de "construcción de definiciones de base de numeración y magnitud" el profesor atiende a una actividad de carácter general (Emmer, 1987) y solicita a los estudiantes que se organicen en sus respectivos grupos y discutan sobre las definiciones de base de numeración y magnitud escritas por sus compañeros.

G5 escoge la definición de G3 [figura 5] para evaluar si cumple los criterios establecidos en gran grupo y pueden ser considerados para la construcción de una definición matemática (estructura formal) y al mismo tiempo intentan evaluar su propia definición.

Figura 8

Definición elaborada por G3



Nota. Fuente Propia.

E12: *¿Les parece si comparamos nuestra definición con la definición de G3? No porque la de nosotros esté mal o bien, pues eso es lo que debemos decidir al final. ¿Sí?*

E9: *Pues es que yo creo que la de nosotros cumple con vocabulario, porque, pues recuerdan que nosotros dijimos "serie de agrupaciones" y eso implica orden, pero no es lo mismo que "colección de agrupaciones".*

E13: *Es cierto, referimos a un concepto más general, como dice el profe.*

E12: *Otra cosa que no sirve de esa definición es que dice "con el fin de definirla en símbolos" paila…, ya habíamos dicho que los símbolos no son elementos de la base.*

E9: *y miren, él "estructura cierta cantidad" no, puede decirlo porque desde las triplas, cantidad es (...) la tripla de la que hemos hablado, más bien es cómo, que se refieren a la numerosidad.*

E13: *"Se hace una nueva agrupación cuando la numerosidad de la …" es que él se hace, es dinamismo, está diciendo lo que hace, pero no (…) explicita ninguna relación.*

E13: *Es que siento que nuestra definición está un poco más general (..) porque, siento que G3, describe cómo funciona la base, más no que es.*

Después de este análisis G5 expresa su definición:

<u>Base de numeración</u>: *Serie de agrupaciones que se dan con una determinada numerosidad de unidades. Dicha numerosidad es igual a la numerosidad de la cantidad de unidades (x) con que se forma el primer agrupamiento, la unidad varía cuando la agrupación tiene x grupos de x elementos y esta agrupación es la nueva unidad para el siguiente agrupamiento.*

A partir de esta intervención que se rastreó de G5 es posible reconocer que a lo largo de su trabajo al interior del grupo y de su participación en gran grupo se ha apropiado de las normas sociomatematicas, producto de las discusiones que orienta el docente con sus peticiones, preguntas y exigencias y en términos de Brophy (2006) las acciones de gestión de carácter general que promueve el profesor posibilitan una participación activa de los estudiantes en el experimento de enseñanza. Puesto que, el profesor considera en su diseño unos momentos de trabajo en pequeños grupos y gran grupo, que favorecen el debate matemático. Las actividades de carácter específico (Perrin-Glorian, 1999; Saraiva, 1995; Stein et al., 2008; Bohórquez, 2016) son las que permiten reconocer que las acciones en cuanto al discurso matemático que los estudiantes mantienen con el profesor, la comunicación matemática en el aula y la resolución de problemas como dispositivo didáctico posibilitan identificar las concepciones iniciales que los estudiantes tienen de las bases de numeración, las cuales evolucionan por medio de acciones que exigen: caracterizar los elementos de las bases de numeración, describir la estructura de las agrupaciones por medio de la promoción de diversos registros semióticos, la construcción de hechos algebraicos que se refieran de forma general a las bases de numeración, la implementación de acuerdos socio-matemáticos (en relación con las bases de numeración o magnitud) y la necesidad de un lenguaje matemático propio de las bases de numeración. En otras palabras, la gestión del profesor apoya de manera positiva la comprensión de los estudiantes sobre las bases de numeración ligadas a estructuras recursivas que se reflejan en las diversas discusiones en las que participa G5 a partir de resolución de problemas en comunidades de práctica (wenger, 2001)

Capítulo III: Reflexión sobre la investigación

5.1 En relación con la primera pregunta de investigación:

¿Qué aspectos de la gestión del profesor, posibilita el aprendizaje de los estudiantes para profesor?

La primera viñeta intenta reconocer las acciones de gestión del PFP, como se mostró anteriormente en los resultados. Frente a las actividades de gestión podemos inferir que el profesor en las entrevistas realizadas sobre el diseño del espacio de formación no describe estas actividades de forma explícita. Es decir; en las vertientes del mapa del diseño de Transición Aritmética-Álgebra, no explicita actividades de carácter general o específico que promueve dicho diseño. Sin embargo, así como lo afirma Llinares (2008) y Bohórquez (2016) las actividades generales pueden darse de manera esporádica en el aula y dichas acciones o estrategias pueden apoyar los objetivos de enseñanza propuestos. Por ejemplo, en ocasiones en el desarrollo de una sesión de clase, el docente modifica la planeación de clase para responder a los intereses conceptuales de dicha comunidad de práctica y dada su experticia en el espacio de formación promueve distintas acciones cómo: solicitar a los estudiantes trabajar en pequeños o gran grupo una tarea propuesta, permitir que los estudiantes pasen al tablero y expliciten sus ideas ante el grupo en general, exigir que los estudiantes utilicen un buen tono de voz cuando intervienen, moderar la participación de los estudiantes priorizando la discusión central de la sesión, exigir disposición, escucha en las distintas intervenciones, dar el tiempo necesario para que las discusiones maduren y sean producto de la discusión y no de la imposición. Pues se espera que los estudiantes avancen en los distintos niveles de matematización. Es decir, que a partir de las vivencias en el aula, el estudiante transite de un nivel situacional a un nivel general o formal.

Distinguir los dos tipos de actividades en la gestión (Llinares, 2000) del proceso de enseñanza-aprendizaje, es algo que puede ser complejo, dado que algunas actividades de carácter general tienen implicaciones favorables en el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, las actividades de carácter general se identificaron en relación con las actividades de carácter específico del conocimiento matemático.

La primera tipificación refiere al discurso que el profesor mantiene con sus estudiantes, frente a esta podemos deducir que las interacciones en pequeños grupos o gran grupo no son homogéneas, es decir, el profesor en distintas ocasiones pasa por los pequeños grupos y reconoce los avances o limitaciones de cada grupo y hace las observaciones necesarias para que puedan seguir avanzando en la tarea mientras que en las intervenciones en gran grupo el profesor atendiendo a actividades de comunicación matemática (Stein et al., 2008) selecciona a estudiantes en específico para que compartan sus "narraciones conceptuales" con el gran grupo.

En términos de la teoría de Wenger (2001), afirman que las distintas interacciones son causadas por las diferentes formas en que el profesor participa con cada uno de sus grupos. En efecto, dado que en las Comunidades de práctica el concepto de participación se refiere "*al proceso de tomar parte con otras personas y también a las relaciones con otras personas que reflejan este proceso"* (Miranda y Gómez, 2018, p.20) es así cómo es posible inferir que en el transcurso de las sesiones, los estudiantes adquieren modos de hacer (Régimen de responsabilidad) Wenger (2001) que les permite autorregular su participación y enfocarse en el objetivo de cada clase e involucrarse en las dinámicas de trabajo de cada pequeño grupo para posteriormente en gran grupo consolidar acuerdos socio-matemáticos en relación con las bases de numeración. De tal modo, que dichos acuerdos socio-matemáticos no surgen de forma espontánea dentro de la comunidad de práctica sino que son producto de una serie de discusiones que se dan entre los participantes de dicho EE.

El discurso que el profesor mantiene con el gran grupo en la mayoría de los casos retoma las ideas conceptuales que no tenían claridad en los pequeños grupos. Por ejemplo, a partir de la estrategia de generar discusiones primero en pequeños grupos y posteriormente en gran grupo: sobre si los dígitos hacen parte de las bases de numeración, posibilitó un acuerdo socio-matemático en dicha comunidad de práctica.

Las prácticas matemáticas que promueve Stein et al. (2008) también muestran actividades de carácter específico, por ejemplo: anticipar, el profesor elabora una planeación que responda los objetivos del curso; Monitorear, el profesor promueve la participación activa de sus estudiantes y los organiza en pequeños o grandes grupos según las intenciones del diseño; Seleccionar, el profesor solicita a un grupo o estudiante en específico que pase al tablero y exponga los abordajes de una tarea; y conectar, el profesor cómo moderador del debate reconoce alcances y limitaciones en las intervenciones de los distintos grupos y las pone a consideración del grupo en general.

En este sentido, los aspectos de gestión en este espacio de formación promueven: 1- actividades de carácter general, las cuales son intrínsecas a las actividades de carácter específico porque dentro del complejo conjunto de acciones que el profesor promueve alrededor de las sesiones de clase es posible identificar que dichas acciones favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje y 2- actividades de carácter específico, en relación con el debate matemático, la construcción de normas sociomatemáticas que regulan el trabajo en dicha comunidad de práctica.

5.2 En relación con la segunda pregunta de investigación.

¿Qué incidencia tiene la gestión del conocimiento matemático en el aprendizaje de los estudiantes para profesor?

A partir del conjunto de acciones de carácter general y específico que emergen en este experimento de enseñanza, es posible reconocer un cambio en las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el concepto: bases de numeración. Puesto que, acciones específicas como: trabajo en pequeños grupos permite rastrear por ejemplo que G5 a medida que avanzaban las sesiones de clase asumen una postura como grupo, lo cual implica debatir internamente sobre concepciones estructurales y procedimentales de las bases de numeración, registrar en el "cuaderno resolutor" sus avances o limitaciones frente una petición del profesor y finalmente lograr acuerdos matemáticos para involucrarse de forma activa en las intervenciones en gran grupo a partir del debate matemático como instrumento que favorece la construcción de conocimiento matemático.

Por otro lado, las discusiones en gran grupo, generaban en G5, modificaciones o acuerdos a sus versiones escritas o "narraciones conceptuales". El profesor en su papel de moderador del debate matemático permitía a los distintos grupos intervenir, pero priorizaba las discusiones que se enfocaban en los objetivos de la sesión y al final del rastreo de G5 en este grupo de tareas, se identifica que asumen un papel como profesores en formación, puesto que avanzan en sus discusiones a partir de utilizar normas sociomatematicas que se consolidan en gran grupo.

La incidencia en el aprendizaje de los estudiantes se identifica cuando los estudiantes muestran comprensión sobre una tarea en específico por medio de representaciones; utilizan el conjunto de normas sociomatematicas para definir su práctica matemática; vinculan las discusiones o representaciones de otros grupos; recurren a elementos teóricos didácticos-matemáticos para exponer sus argumentos; utilizan instrumentos para evaluar sus producciones y las de sus compañeros, delimitan las discusiones; reconocen la necesidad de una transición de un lenguaje local a uno global que posibilite hacerse entender ante una comunidad matemática y, específicamente, en lo que refiere a las bases de numeración, es posible deducir que G5 modifica su concepción inicial y logran una interacción con dicho concepto por medio de la caracterización de su estructura recursiva.

Por tanto, es posible concluir que la gestión del profesor y las tipificaciones asociadas favorecen el aprendizaje de los estudiantes desde el campo didáctico como matemático. Puesto que, a partir de la diversidad de tareas que propone este diseño, la formación que el estudiante para profesor experimenta debe lograr ser competente en varios aspectos que definen la práctica de enseñar matemáticas (Llinares 2014; Bohórquez, 2016).

Los estudiantes, a medida avanzan en las discusiones matemáticas, toman conciencia de actividades que favorecen el aprendizaje; al asumir tareas de profesores de matemáticas reconocen que acciones como plantear preguntas, escuchar con atención las distintas intervenciones, intervenir de manera que responda a los objetivos de la clase y evaluar las producciones de otros grupos, son acciones que favorecen el aprendizaje de los estudiantes.

Conclusiones.

Los objetivos propuestos en esta investigación titulada "Factores que apoyan o limitan la ampliación de universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital", dirigida por el grupo MESCUD y a partir de la metodología de experimentos de enseñanza permitió caracterizar aspectos de gestión dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje vinculados a actividades de carácter general y específico, las cuales favorecen el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas.

Inicialmente la distinción de estas dos actividades dificulto la clasificación de las acciones del profesor, por tanto, más que diferenciarlas se considera que dichas actividades se complementan y el reconocimiento de las mismas permite identificar acciones específicas que un profesor de matemáticas puede promover con objetivos de enseñanza-aprendizaje en su diseño de aula y que favorecen la participación activa del estudiante, en su mayoría las acciones de carácter general surgen de forma espontánea por parte del profesor, pero a medida que experimenta un formación especializada este adquiere experticia y prevé el conjunto de acciones que favorecen la participación de sus estudiantes en un AA.

Frente a las actividades de carácter específico, es posible deducir que, a partir de un reconocimiento histórico, estas han sido caracterizadas gracias a diversos referentes teóricos que han tipificado más detalladamente las acciones que benefician la interacción entre estudiante y conocimiento matemático; sin embargo, dichas acciones respondieron de forma apropiada a este experimento de enseñanza, pero no garantizan su eficacia al replicárseles en otro espacio de formación, dado que en cualquier diseño de aula el profesor debe identificar las necesidades de la comunidad de práctica y modificar su diseño a medida que se avanza en la construcción del conocimiento matemático. Es por esto, que las acciones identificadas en este EE, pueden ser producto de la experiencia, la formación especializada del PFP, que se reflejan en la construcción de este Experimento de enseñanza. Entonces, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas está integrado a diferentes dominios y gracias a diversos cambios culturales a más de veinte años dichas investigaciones continúan vigentes porque documentan e investigan sobre el complejo conjunto de actividades que el profesor promueve en su diseño con el objetivo de mejorar las habilidades y destrezas de un profesor en formación.

Por otro lado, gracias a las investigaciones y trayectoria del grupo MESCUD en Transición Aritmética-Álgebra, es posible estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje respecto a conceptos matemáticos escolares como razón, proporción y proporcionalidad, los cuales deben ser resignificados por parte de los profesores en formación. Dado que, desde la noción epistemológica el conocimiento puede: poseer un carácter operatorio, ser resultado de filiaciones y rupturas de saberes previos y debe ser construido dentro de comunidades de práctica por tanto para el estudio de dichos procesos es necesario describir la gestión que el profesor promueve en su entorno de aprendizaje. Por lo cual, asumir la fase de gestión en el proceso de enseñanza-aprendizaje implica múltiples actividades como: gestionar distintos momentos de clase, promover construcción representaciones, interpretar las respuestas de un grupo de estudiantes o estudiante en particular, escoger la mejor forma de presentar la información a su grupo de estudiantes y gestionar la discusión matemática en aula en pro de los objetivos propuestos. Por tanto, la gestión se asume como una “competencia” del profesor de matemáticas que implica una gran diversidad de actividades que surgen dentro del aula.

Esta investigación muestra que el profesor formador de profesores y la manera cómo gestionó el proceso de enseñanza-aprendizaje incidió en el aprendizaje de los estudiantes para profesor coincidiendo con los resultados de las investigaciones de Bohórquez (2013), Bohórquez; D’Amore (2018), dado que las filiaciones y rupturas que los estudiantes comunican en sus “narraciones conceptuales” aunque la mayoría de veces como se corroboró en entrevistas eran previstas por el profesor, quién reconoce una diversidad en las formas y modos de trabajar de dicha comunidad y por tanto propone un conjunto de tareas que favorecen el aprendizaje desde las estructuras recursivas y espera que tengan incidencia en espacios de formación posteriores y además que fortalezcan sus habilidades como profesor de matemáticas.

Finalmente, desde el marco de referencia, autores como Mc-Caslin y Good, Brophy y Llinares a lo largo de su trayectoria como investigadores han categorizado las actividades de carácter general, permitiendo una evolución desde considerarlas puntualmente con las acciones en relación con la organización de los estudiantes, tiempo y espacio a actualmente existir corrientes de investigación que se interesan por investigar cómo dichas acciones orientan objetivos de enseñanza-aprendizaje. En esta investigación se considera que la gestión incide en el aprendizaje de futuros profesores, y por medio de acciones de gestión específicas del conocimiento matemático se reconoce que la gestión en distintos momentos, favorece la comunicación matemática, el reconocimiento de la importancia de un lenguaje técnico de las matemáticas, la discusión y debate matemático que se reguló por medio de acuerdos socio-matemáticos.

Referencias.

Bagley WC. *Classroom Management: Its Principles and Technique*. 1st ed. The Macmillan Company; 1907.

Blanco, M. M. G. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, *17*(2), 153-166.

Bohórquez LÁ. Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas. In: *I CEMACYC*. Universidad Distrital; 2013:1-40.

Bohórquez LÁ. Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje, fundamentos en la resolución de problemas. Published online 2016.

Bohórquez LA, D'Amore B. Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *AIEM - Av Investig en Educ Matemática*. 2018;(13):85-103.

Bohorquez, L; Romero, G. (2022). La gestión del formador de profesores y su incidencia en el aprendizaje de futuros profesores de matemáticas. *Cemer*, 2 (12), 71-89

Bonilla E. M., Rojas, P. J., y Romero, J. H. (2010). Aprender la práctica de enseñar: algunos aportes. Infancias Imágenes, 9(1), 6-15. https://doi.org/10.14483/16579089.447

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación matemática realista bases teóricas.*

Breed F. *Classroom Organization and Management.* World Book Company; 1933.

Brodie K. *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. Springer Verlag; 2009.

Brophy J. Classroom Organization and Management. *Elem Sch J*. 1983;83(4):265-285.

Brophy J. Educating teachers about managing classrooms and students. *Teach Teach Educ*. 1988;1(4):1–18. doi:10.1017/CBO9781107415324.004

Brophy J. History of research on Classroom Management. In: Evertson CM, Weinstein CS, eds. *Handbook of Classroom Management: Research, Practice, and Contemporary Issues*. Lawrence Erlbaum Associates; 2006:17-43.

Brophy J, Evertson CM. Context variables in teaching. *Educ Psychol*. 1978;12(3):310-316. doi:10.1080/00461527809529185

Brophy J. Perspectives of classroom management: Yesterday, today, and tomorrow. Boston: In: Freiberg HJ, ed. *Beyond Behaviorism: Changing the Classroom Management Paradigm*. Allyn & Bacon; 1999:43-56.

Davis GA, Thomas MA. *Escuelas Eficaces y Profesores Eficientes*. La Muralla; 1992.

Doyle W. Classroom organization and management. In: Richardson V, ed. *Handbook of Research on Teaching*. Macmillan Publishers; 1986:392-43.

Doyle W. Classroom Management Techniques. In: Moles OC, ed. *Student Discipline Strategies: Research and Practice*. State University of New York Press; 1990:113-127.

Duke DL. *Classroom Management*. Vol 2. (Duke DL, ed.). University of Chicago Press; 1979.

Emmer E. Classroom management. In: Dunkin MJ, ed. *The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education*. Pergamon; 1987:437-446

Evertson CM, Emmer ET. Preventive classroom management. In: Duke D, ed. *Helping Teachers Manage Classrooms*. Association for Supervision and Curriculum Development.; 1982:2-31.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. London: Kluwer Academic Publishers.

Garzón, P. J. R., Echeverri, E. C., Valbuena, O. M., Cruz, J. H. R., Bejarano, J. R., & Estévez, M. B. (2011). La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje

Ghousseini, H., & Herbst, P. (2016). Pedagogies of practice and opportunities to learn about classroom mathematics discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(1), 79-103.

Gómez, Pedro (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hache C, Robert A. Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait Afréquenter@ les mathématiques a ses éleves pendant la classe? *Rech en Didact des Mathématiques*. 1997;17(3):103-150.

Hersant M, Perrin-Glorian MJ. Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations. *Educ Stud Math*. 2005;59(1-3):113-151. doi:10.1007/s10649-005-2183.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York: Oxford University Press.

Kounin JS. *Discipline and Group Management in Classrooms*. Holt, Rinehart & Winston; 1970.

León, O., Romero, J., Carranza, E., Sánchez-Acero, F., Suárez, W., Castro, C., Gil, D. y Bonilla, M. (2017). Arquitectura de validación de diseños didácticos para la formación de profesores de matemáticas que acojan la diversidad de poblaciones. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 233-258.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología. Revista Evaluación e Investigación. Vol. 3, n. 1 (en.-jun. 2008). ISSN 1690-9712, pp. 7-30

Llinares S. Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Av Investig en Educ Matemática*. 2012;2(2):53–70.

Llinares S. Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuad Investig y Form en Educ Matemática*. 2012;7(10):53-62.

McCaslin M, Good T. Compliant cognition: The misalliance of management and instructional goals in current school reform. *Educ Res*. 1992;21:4–17

Mescud. (2011). La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover el aprendizaje. Universidad Distrital Francisco José de Caldas..

Mescud (2019). *Factores que apoyan o limitan la ampliación de universo numérico en futuros profesores en la licenciatura en matemática de la Universidad Distrital*.

Miranda, I., & Gómez-Blancarte, A. L. (2018). La enseñanza de las matemáticas con el enfoque de la Teoría de Comunidades de Práctica. *Educación matemática*, *30*(3), 277-296.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Polo, C., C. Plantin, K. Lund, G. P. Niccolai (2016). Savoirs mobilisés par les élèves dans des cafés science: grille de caractérisation issue d'une étude internationale, Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies 13, 193-22 https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01503177

Perrin-Glorian MJ. Problèmes d'articulation de cadres théoriques : L'exemple du concept de milieu. *Rech en Didact des mathématiques*. 1999;19(3):279-321.

Reffers A. *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Kluwer; 1986.

Romero, J. H. (2019). *Criterios para elaborar y cualificar Matematizaciones.*

Romero, J. H. (2020). Conversaciones acerca de un diseño: Tercera parte [Diapositivas de PowerPoint]. Facultad de Ciencia y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Romero, J. (2021). *Diseño del curso transición Aritmética-Álgebra/ Entrevistado por coinvestigadores*.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., y Mora, O. (1999). *La Transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.

Sáenz-Ludlow, A., & Zellwegeren, S. (2016). Actividad matemática de aula cuando se ve como un proceso semiótico de interpretación doble inter-intra

Saraiva MJ. O Saber dos Professores: Usá-lo, apenas? Respeitá-lo e considerá-lo, simplesmente? In: Ponte JP da, Monteiro C, Maia M, Serrazina L, Loureiro C, eds. *Desenvolvimento Profissional Dos Professores de Matemática. Que Formação?*. Secção de Educação Matemática. SPCE; 1995:131-1148.

Silverman, D., & Marvasti, A. (2008). Doing qualitative research: A comprehensive guide. Sage.s

Stein MK, Engle R a., Smith MS, Hughes EK. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Math Think Learn*. 2008;10(4):313-340. doi:10.1080/10986060802229675

Snyder WM, Wenger E. Our World as a Learning System: A Communities-of-Practice Approach. In: *Social Learning Systems and Communities of Practice*. Springer London; 2010:107-124. doi:10.1007/978-1-84996-133-2_7

Tall, D., & Mejía-Ramos, J. (2012). The Long-Term Cognitive Development of Reasoning and Proof. En G. Hanna et al. (eds.). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Science. pp. 137-149. DOI 10.1007/978-1-4419-0576-5.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2), 133-170.

Wenger E. *Comunidades de Práctica: Aprendizaje, Significado e Identidad*. Editorial Paidós; 2001.

Wenger, E. (2010). Communities of Practice and Social Learning Systems: The Career of a Concept. In C. Blackmore (Ed.), Social Learning Systems and Communities of

Practice (pp. 179-198). London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84996-133-2_11