ESTRATEGIAS PARA ABORDAR LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

JOSÉ MIGUEL HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO
2022

ESTRATEGIAS PARA ABORDAR LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

JOSÉ MIGUEL HERNÁNDEZ
141003524

Trabajo de grado EPS como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director
MARÍA TERESA CASTELLANOS SANCHEZ
Doctora en Educación

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO
2022

AUTORIDADES ACADÉMICAS

CHALES ROBIN AROSA CARRERA
Rector

MONICA SILVA
Vicerrectora Académica

DEIVER GIOVANNY QUINTERO REYES
Secretario General

FERNANDO CAMPOS POLO
Decano de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

CLAUDIO VINICIO VELEZ
Director de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

ARTURO ALEXANDER CASTRO
Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

NOTA DE ACEPTACIÓN

Aprobado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad de los Llanos para optar al título de Licenciado(a) en Matemáticas y Física. En constancia de lo anterior, firman:

____

ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS

Director de Programa

____

DAWIN MEJIA

Evaluador

____

ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS

Evaluador

____

MARIA TERESA CASTELLANOS

Director de la opción de grado

Villavicencio, 23 agosto de 2022

AGRADECIMIENTOS

A Dios por dar la sabiduría y la constancia para cumplir las metas establecidas.

A las Instituciones Educativas del departamento del Meta y a la Universidad de los Llanos por el convenio, el cual permitió el desarrollo de este trabajo en el contexto del proyecto de proyección social denominado *Promoción del álgebra en estudiantes del municipio de Villavicencio*.

El presente informe fue realizado bajo la supervisión de la profesora María Teresa Castellanos a quien expreso mi agradecimiento, por ser guía y apoyo constante.

A los docentes del área de matemáticas de la Instituciones Educativas: Narciso José Matus Torres, Harold Castro y Andrés Moreno y al rector de la institución educativa Francisco Arango, Otoniel Gómez Quevedo que acompañaron en mi formación, pues sin ellos los conocimientos obtenidos no existirían.

A los docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física por sus enseñanzas y ejemplo.

Y en gratitud a nuestros padres, familiares y demás amigos de los autores, por su consejo, su comprensión y su colaboración en todo el trayecto de la carrera.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. MARCO DE REFERENCIA	13
2. MATERIALES Y MÉTODOS	24
2.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN	24
2.2. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN	24
2.3. CONTEXTO Y PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN	25
2.4. FUENTES E INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS DE INFORMACION	25
2.6. INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN	26
3. ANALISIS Y RESULTADOS	27
3.1. RESULTADOS DE LOS ERRORES Y DIFICULTADES AL INICIO DEL APRENDIZAJE ALGEBRAICO	27
3.2. CATEGORIAS EMEREGENTES Y DEFINICION DE LOS ERRORES	28
3.3. CLASIFICACION Y ANALISIS DE ERRORES PRESENTADOS	35
4. ANALISIS DE RESULTADOS	76
5. CONCLUSIONES	86
BIBLIOGRAFIA	88
ANEXOS	92
RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO	95

LISTA DE TABLAS

Pág.

Tabla 1: Principales errores encontrados en la solución de la pregunta 1.a 47
Tabla 2: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.A 49
Tabla 3: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.b 55
Tabla 4: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 1C 60
Tabla 5: Errores más recurrentes en la solución de la Pregunta 1.D) 65
Tabla 6: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.D 66
Tabla 7: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 1E 68
Tabla 8: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 2A 70
Tabla 9: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 2B 75
Tabla 10: Planeación de clase 80
Tabla 11: Metodología y uso del puzle 82
Tabla 12: Clasificación de los estudiantes de los colegios Narciso Matus, Francisco Arango y Cofrem por sexo y por grado 90
Tabla 13: Estado de las preguntas al momento de revisar la prueba 91
Tabla 14: Conocimientos necesarios para la solución de cada una de las preguntas de la prueba 92
Tabla 15: Estado de las preguntas por estudiante Grado 801 NM 94
Tabla 16: Estado de las preguntas por estudiante Grado 802 NM 95
Tabla 17: Estado de las preguntas por estudiante Grado 702 FA 97
Tabla 18: Estado de las preguntas por estudiante Grado 703 FA 99
Tabla 19: Estado de las preguntas por estudiante Grado 803 FA 100
Tabla 20: Estado de las preguntas por estudiante Grado 601 (CC) 102

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1. Error geométrico (E1) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia 34
Figura 2. Error de conteo (E2) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia 35
Figura 3. Error en patrón o regularidad (E3) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia 35
Figura 4. Error de conservación en la configuración geométrica (E4) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia. 36
Figura 5. Error de Caso (E5) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia 37
Figura 6. : Evidencia error de cálculo (E6) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia 38
Figura 7. Evidencia del tratamiento equivocado entre representaciones (E7) 39
Figura 8. Evidencia de error de modelación matemática (E8) 39
Figura 9: Evidencia de error de modelación matemática (E8) 40
Figura 10: ejemplo errores E1 y E4 en la pregunta 1.a. 48
Figura 11 : Estrategia usada en la pregunta 1.b. 53
Figura 12 Relación entre el número de tapas y el número del marco en la pregunta 1C. 58
Figura 13 : ejemplo de errores E6 en la pregunta 67
Figura 14 : ejemplo de errores E7 en la pregunta 68
Figura 15 : E6 en la pregunta 2B 72
Figura 16: Evidencia desempeño bajo 89
Figura 17: Evidencia error geométrico 94
Figura 18: Evidencia error de conteo 95
Figura 19: Evidencia error de patrón 95
Figura 20: Evidencia de error de distribución geométrica 95
Figura 21: Evidencia error de caso 96
Figura 22: Evidencia error de tratamiento operativo o procedimental 96
Figura 23: Evidencia imposibilidad o tratamiento equivocado entre representaciones 97
Figura 24: Evidencia error en la modelación matemática 97
Figura 25: Evidencia error de tratamiento aritmético 98
Figura 26: Evidencia de trabajo con el puzle 98
Figura 27: Evidencia trabajo con el puzle 99

LISTA DE GRÁFICAS

Pág.
Grafica 1: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 1.a. 41
Grafica 2: Distribución de errores presentados en la pregunta 1.a. 42
Grafica 3: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 1.b. 46
Grafica 4: Distribución de errores presentados en la pregunta 1.B 47
Grafica 5: Errores por instituciones presentados en la pregunta 1.c. 53
Grafica 6: Errores por institución presentados en la pregunta 1d. 55
Grafica 7: Errores presentados en la pregunta 1e. 57
Grafica 8: Distribución de errores presentados en la pregunta 2a. 60
Grafica 9: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 2.B 62
Grafica 10: Distribución de errores presentados en la pregunta 2.B 64
Grafica 11: Errores presentados en la prueba de manera general.. 76
Grafica 12: Estado de las preguntas al revisar la prueba 77
Grafica 13: Estado de las preguntas Grado 801 NM 78
Grafica 14: Estado de las preguntas Grado 802 NM 79
Grafica 15: Estado de las preguntas Grado 702 FA 80
Grafica 16: Estado de las preguntas Grado 703 FA 81
Grafica 17: Estado de las preguntas Grado 803 FA 82
Grafica 18: Estado de las preguntas Grado 601 (CC) 82

INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años docentes e investigadores se preocupan de los fenómenos didácticos en las aulas de matemática. En nuestra Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa las problemáticas originadas en escenarios académicos y no académicos llegan a impactar nuestros sistemas de enseñanza. Los resultados de las innovaciones (o estrategias didácticas) realizadas desde diferentes perspectivas teóricas aporta elementos a las discusiones y reflexiones tendientes a modificar las prácticas escolares en nuestra región. El trabajo se enmarca en la línea de investigación de Didáctica, que busca la mejorara en los métodos de enseñanza y aborda los antecedentes que ubican el problema de la investigación en diferentes investigaciones y estudios de carácter internacional y nacional.

Este proyecto se desarrolla en el contexto de un macro proyecto de proyección social denominado "*Promoción del álgebra en estudiantes del municipio de Villavicencio*" Teniendo en cuenta que el modelo de enseñanza tradicional del álgebra escolar, se ha tornado de forma poco amigable a los estudiantes y en la mayoría de los casos de manera rutinaria o algorítmica. En consecuencia, de lo anterior, el docente debe idear estrategias metodológicas diferentes que permitan analizar, entender y usar información contenida en investigaciones previas para la enseñanza del álgebra y evitar el fracaso escolar en esta. En el macro proyecto, se propone el uso del álgebra geométrica como recurso para abordar la factorización y para tal caso, en este proyecto EPS se busca configurar una intervención didáctica para dar prioridad a la manipulación de material concreto (ej. Puzle Algébrico) para abordar la representación de la factorización a través de la visualización geométrica dando prioridad a las estructuras algebraicas de segundo grado con raíces enteras y racionales (en adelante Trinomios Cuadrados Perfectos TCP).

Durante el desarrollo del proyecto se diseñan una colección de actividades que configuran la trayectoria didáctica de una propuesta dirigida a escolares de Educación Secundaria cuando inician el estudio del álgebra escolar. La configuración de la propuesta involucra el diseño, validación y ajuste de tareas centradas en el uso del puzle, y las configuraciones (puntuales, geométricas, icónicas) para la generalización y la factorización. Con esta propuesta se persigue promover en las escolares habilidades para representar, transformar e interpretar de manera geométrica el proceso de factorización.

La propuesta didáctica la constituyen tareas y actividades para desarrollar en el aula de clase, enfocadas a trabajar con perímetros y áreas a través del *Puzle Algebraico* y dando prioridad a la visualización geométrica. De igual manera se involucran tareas que favorecen el inicio al álgebra desde los procesos de generalización y representación simbólica. Se pretende dar uso al simbolismo; al significado de expresiones algebraicas y al tratamiento de la factorización de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros y racionales (TCP).

Para lograr el propósito fundamental de este proyecto, se identifican los errores de escolares cuando inician el proceso de factorización. De igual manera se deben articular referentes teóricos

desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática que involucren propuestas didácticas como la del puzle, para la mejor comprensión de los conceptos. Otro punto importante, para el éxito de la investigación se ajusta a sistematizar la experiencia reconociendo los aportes de la visualización geométrica en la comprensión del álgebra. Y, por último, se reconocen las limitaciones del puzle algebraico en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.
En este sentido, Horch y Dreyfus (2006), resaltan las dificultades que surgen en el paso de la aritmética al algebra; y, en esta misma línea Tapiero y Hernández (2015), manifiestan que no se puede tratar al álgebra como una simple extensión de la aritmética, ya que esto conlleva al camino de los errores. Socas (2007) da relevancia a las dificultades_de los procesos de enseñanza. García (2012) estudio los errores al inicio del trabajo con el álgebra escolar cuando se abordan los procesos de generalización y simbolización, cuyas clasificaciones se tratan en esta investigación; de igual modo, Hidalgo y cañadas (2020), llevaron a cabo trabajos con estudiantes de grado sexto, donde analizan errores que cometen en diferentes actividades matemáticas; la clasificación hecha por estos autores, es base fundamental en nuestro estudio en el análisis que aquí se presenta.
Como se mencionó anteriormente, diferentes autores definen y clasifican los errores, Socas (1997) define un error "como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción". Hidalgo y cañadas (2020), se basan en las definiciones de Matz (1980) señalando que "los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación", (Ruano, Socas, y Palarea, 2003) por su parte, precisa que "los errores son síntomas mediante los cuales un alumno manifiesta sus conflictos y problemas de aprendizaje relativos a un determinado contenido matemático escolar".

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo de carácter descriptivo-explicativo y el diseño metodológico, se basa en la Investigación de Diseño para configurar una estrategia de intervención. Para la recolección de la información se utilizan las producciones de los escolares cuando desarrollan tareas planteadas en una prueba piloto. Se utilizan otros instrumentos tales como: diario de campo, rejilla de registro y los registros de las clases (audio-video) en la implementación.

El proyecto espera informar al respecto a las estrategias que ponen de manifiesto los estudiantes durante la resolución de dichas tareas y las formas de interpretar las diferentes estructuras algebraicas. A nuestro juicio, la visualización geométrica es una herramienta que cumple con estas características y contribuye a la abstracción algebraica favoreciendo la simbolización y representación de las estructuras que definen el álgebra inicial, y en particular, los polinomios de segundo grado y por ende la interpretación de la factorización de dichas estructuras algebraicas.

1. MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo, exponen las bases teóricas, conceptuales y legales que orientan el proyecto, las cuales se encuentran en coherencia con los referentes planteados en el macro proyecto titulado *Promoción del álgebra en estudiantes del municipio de Villavicencio.* Los presupuestos teóricos se centran en los constructos que definen el álgebra escolar desde diferentes posturas dando prioridad a la postura al álgebra geométrica, para precisar y concretar la definición en relación con la visualización geométrica. De igual manera, se abordan constructos curriculares y legales que ubican el objeto de investigación en el área de matemáticas. Por último, se describen las características y los estudios asociados al *Puzle Algebraico* y el marco didáctico que direcciona la intervención.

1.1. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

La revisión de literatura muestra amplios resultados en relación con el diseño de estrategias para la enseñanza del álgebra escolar, Además, integran un conjunto de variables que atienden a circunstancias de diferente naturaleza por las que ha transitado el desarrollo del pensamiento algebraico y que retan al futuro profesor de matemáticas en la reflexión profunda sobre los problemas profesionales de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Castellanos, Flores y Moreno, 2017)

Varias investigaciones manifiestan que la transición de la aritmética al álgebra es una de las principales dificultades que exhiben los escolares cuando se enfrentan al estudio del álgebra; y en la mayoría de los casos atribuida a la propia naturaleza del álgebra o a la rápida extensión que se hace en el manejo de los cálculos aritméticos y a la operación con incógnitas y variables. En cualquiera de los casos dejando de lado, el sentido que otorgan las estructuras aritméticas y al establecimiento de las relaciones representadas a través de símbolos (Horch y Dreyfus, 2006).

Tapiero y Hernández (2015), señalan que uno de los problemas más frecuentes en la comprensión del álgebra, es tratarla como una simple extensión de la aritmética, donde las variables son tratadas como valores numéricos y las fórmulas empleadas únicamente para hacer cálculos; sin interpretación o análisis de los fenómenos de variación o regularidad. Abordar el álgebra en la educación secundaria es objeto de estudio en la actualidad de varias investigaciones internacionales; en particular, aquellos que abordan los procesos de enseñanza postulando varias formas de introducción tales como: la interpretación y el razonamiento algebraico; el sentido estructural; la generalización de patrones numéricos y geométricos, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales a partir de resolución de problemas y ecuaciones (Castellanos, 2017). Por ejemplo, Socas, y otros (2007) manifiestan que la introducción al álgebra debe procurarse a través de la geometría, la cual es una herramienta y a la vez una alternativa didáctica que logra en un primer momento fortalecer el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Otros autores manifiestan que la geometría permite dar significado al concepto de variable, a las expresiones algebraicas y a las operaciones básicas, para posteriormente introducir la noción de factorización (Solis y Romero, 2017), especialmente para abordar la noción de factorización. Aunque la geometría es útil para factorizar polinomios hasta de segundo grado, tiene restricciones en los conjuntos de números. Sin embargo, su uso contribuye al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y en especial el *álgebra geométrica* se considera por varios autores como una herramienta especialmente útil porque permite la *visualización* de la factorización (MEN, 1998)

Otros estudios en la misma línea son los de García y otros (2012), quienes desarrollaron un estudio de diferentes antecedentes sobre los errores que se evidencian en la resolución de tareas algebraicas. A partir de este análisis, los autores interpretan que no existe una definición global del término álgebra, puesto que involucra diversas tareas y procesos cognitivos; y, su estudio lo centran en la interpretación de las habilidades algebraicas de los estudiantes. Para llevar a cabo estas valoraciones, se apoyan en cuatro enfoques que son: Generalización de la aritmética, método para la resolución de problemas, herramienta para el estudio de las funciones y estudio de estructuras matemáticas. Luego de aplicar las pruebas, los investigadores encontraron errores asociados a) la naturaleza y significado de los símbolos, b) a la generalización de la aritmética y c) a procedimientos propios e incorrectos. Cabe destacar que estos errores son los que más se resaltaron, y sugieren que se deben implementar estrategias que permitan evaluar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes desde una perspectiva holística del álgebra, y de esta manera caracterizar las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales de los escolares (García y otros, 2012).

Existen investigaciones que tratan el problema de expresar los elementos de un sistema de representación a otro (eje. Geométrico a Simbólico) lo que se conoce como traducción, es una tarea que a la mayoría de los escolares no logran; sin embargo, las traducciones entre sistemas de representación se consideran útiles para la adquisición de conceptos y afectan al rendimiento en la resolución de problemas (Villarreal, Vigil, & Jaramillo, 2021) especialmente de tipo algebraico.

De acuerdo con Mareovich (2014), el ser humano es culturalmente simbólico, y para convivir en la sociedad debe apropiarse de diferentes símbolos, como palabras, imágenes, números o gestos, entre otros; en este orden de ideas, el autor *resalta la comprensión temprana de los objetos simbólicos, para que las estructuras mentales tengan un desarrollo apropiado y acorde a la edad de la persona*. Por ello, a partir de este estudio se desarrolla un análisis de las comprensiones semióticas y pictóricas de los niños, las cuales le permiten entrar en contacto con la cultura y además ayudan a la comprensión de los diferentes conceptos y situaciones que se les presenta a lo largo de su vida. La investigación ha mostrado que los escolares que desde temprana edad se mueven fácilmente de un sistema de representación a otro (eje. Simbólico- Geométrico. Icónico-

Numérico) son excelentes resolutores de este modo, la traducción contribuye al uso de una gama amplia de estrategias para la resolución de problema algebraicos (Cañadas y Figueiras, 2011).

La revisión de literatura en la línea de la enseñanza del álgebra muestra que existen algunos trabajos que abordan la problemática de la factorización y proponen el uso de material concreto para tal fin; por ejemplo, Soto, Mosquera & Gómez (2005) desarrollaron la herramienta didáctica llamada caja de polinomios para la enseñanza de las operaciones con polinomios, otras investigaciones hacen uso de simulaciones para enseñar las operaciones; según Cyrino, & De Oliveira. (2011); la enseñanza de operaciones con polinomios a través del uso del computador favorece la abstracción y visualización de las representaciones simbólicas (algebraicas). Otros autores reportan resultados exitosos usando el álgebra geométrica, para el aprendizaje de factorización de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros (Ballén, 2012) y concluyen al respecto de los beneficios que ofrece el uso de tareas relacionados con el área y el perímetro para lograr la simbolización de manera eficiente.

El razonamiento algebraico y su medición se da a partir de habilidades que se caracterizan por niveles. En relación a esta línea, Godino, citado por Castro (2014), desarrollan estudios para analizar el razonamiento algebraico elemental y las características propias del álgebra, según los autores el proceso algebraico debe pasar por 4 niveles que son: *Ausencia del razonamiento algebraico*, donde el lenguaje es natural, icónico, numérico o gestual; *incipiente de algebrización*, es decir comienza a introducir el pensamiento, pero sin desarrollar operaciones. *Algebrización intermedia*, donde se introducen variables y además se opera con ellas; y, *consolidación algebraica*, cuyo pensamiento le permite hacer tratamientos algebraicos avanzados, con diferentes ecuaciones, conservando la equivalencia. Conjeturamos que, a partir de esta clasificación, se pueden desarrollar estrategias para que el estudiante avance progresivamente en torno al pensamiento algebraico.

Por su parte Hidalgo y Cañadas (2020), estudiaron en el enfoque de la generalización funcional, los errores que presentan estudiantes de sexto grado, donde principalmente resaltan los errores de: conteo (cuentas equivocadas); cálculo (operación matemáticas incorrectas); de caso, (equivocación en el término); numérico (resulta un número erróneo); patrón (usa característica inadecuada) y de avance (no sabe cómo proceder). En general con este estudio, lograron determinar que los errores varían en los estudiantes atribuyendo la diferencia al proceso mental, ya que cada uno desarrolla con más frecuencia determinadas habilidades. Sin embargo, de manera global el error más frecuente fue el de patrón, ya que los pasos (búsqueda de la característica) para llegar a la respuesta, presentaban inconsistencia.
La postura del Early algebra autores como Ayala y Molina (2021) considera crucial estudiar y fomentar el álgebra desde una edad temprana, para lo cual se basan en Cañadas y Molina (2016) quienes destacan la resolución de problemas para abordar las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación; en tal caso es necesario que los estudiantes diferencien lo aritmético

de lo algebraico, porque es donde se presentan la mayor cantidad de errores; los autores determinaron que es importante incluir diferentes maneras de desarrollar una misma pregunta, ya que evidenciaron que para los estudiantes era menos complejo identificar el concepto de muchos o infinitos, que por ejemplo comprender lo que significa n cantidades.

Los antecedentes manifiestan que la mayoría de las limitaciones están asociadas a la complejidad de los conceptos y a la abstracción del lenguaje matemático. En síntesis, los resultados de los trabajos revisados evidencian la preocupación por otorgar sentido y significado al aprendizaje del álgebra además de considerar su enseñanza mediada por estrategias innovadoras y dinámicas. En la mayoría de las conclusiones, se invita a la comunidad docente a seguir retroalimentando estos resultados, a realizar nuevas propuestas de enseñanza con la finalidad de que las producciones de la matemática educativa lleguen a las aulas para modificar nuestras prácticas docentes.

1.2. ENFOQUES DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Son varios los estudios que han tratado la idea de álgebra escolar en la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Los diversos autores han presentado dicho paradigma a través de componentes o concepciones del álgebra. Estas dimensiones han distinguido diferentes enfoques en la enseñanza del álgebra escolar. (Usiskin, 1988; Kaput (1999); Kaput, Carraher y Blanton (2008 y Drijvers, Goddijn y Kindt (2011). Citados en Castellanos 2017). La visión amplia del álgebra escolar y las variadas situaciones que le otorgan sentido permiten: interpretar los modos en que el aprendizaje del álgebra ocurre; comprender la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

Las diferentes concepciones —también denominadas componentes, enfoques, perspectivas o visiones de forma casi sinónima—, no son disjuntos, existen relaciones entre las mismas. Así mismo, en la práctica no pueden ser separadas radicalmente debido a que una situación o contexto involucra actividades algebraicas correspondientes a diferentes visiones del álgebra (Hoch y Dreyfus, 2005). Entre las cuales se pueden citar las concepciones referidas a la aritmética generalizada y al estudio de patrones; al pensamiento funcional; a la resolución de problemas; al estudio de estructuras; y a la visión centrada en el lenguaje algebraico.

El enfoque que se centra en el lenguaje reconoce el álgebra como la herramienta que permite la expresión de ideas matemáticas, es decir como un sistema de representación. El álgebra tiene su propio lenguaje constituido por un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso con aplicación a otras áreas. Dicho lenguaje expresa las relaciones entre operaciones y cantidades de los diferentes sistemas de números. El álgebra como lenguaje representa las ideas algebraicas referidas y separadas de un contexto; favorece la producción y representación de fenómenos de forma eficiente. El lenguaje algebraico está constituido por el simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas (ej. tablas, diagramas, gráficos) (Drouhard y

Teppo, (2004); citados en Castellanos, 2017). En este caso, se involucran las posibilidades del álgebra geométrica en su dimensión simbólica.

El reconocimiento de las diferentes dimensiones del álgebra favorece la visión amplia de la misma que, en la actualidad, es adoptada en la comunidad de investigadores. En consenso se atribuye a concepciones cerradas del álgebra los obstáculos en el aprendizaje; se insiste en la interconexión que debe existir entre las diferentes componentes del álgebra y en la adopción de variadas situaciones que le otorgan significado; se postula que, de esta manera, los escolares comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

Kieran (2007), aporta al álgebra en la Educación Secundaria, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación; así mismo, precisa los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje mostrando las diferentes fuentes de significado para el lenguaje algebraico en esta etapa educativa. Kieran et. at. (2013) propone el modelo de conceptualización de las actividades algebraicas, desarrollando la idea del álgebra como actividad de tres tipos: Generacional, Transformacional y Global (meta nivel). En esta misma línea se adjunta otra postura, que aborda la idea de razonamiento algebraico principalmente con asiento en el currículo de la Educación Primaria, también denominada Early Álgebra y abarca las relaciones algebraicas. Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006) otorgan relevancia al estudio de los errores, como un camino para el proceso de aprendizaje, se reconoce que los errores también son producto de otras variables del proceso educativo: (eje. profesorado, currículo, contexto, interacciones, etc) manifestando la complejidad de su análisis, y la necesidad de tener marcos teóricos para la explicación de los mismos.

Las nuevas tendencias en pensamiento algebraico destacan la influencia de la lingüística y la teoría del procesamiento de la información, como disciplinas relacionadas con la Didáctica de la Matemática. Los fenómenos didácticos cobran interés cuyas causas puedan atribuirse a la matemática implicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico. La psicolingüística delimita un modelo procesual de las habilidades humanas que explica la aparición de errores en los procedimientos sintácticos de los escolares.

Godino et al (2012), proponen una manera de concebir el razonamiento algebraico basada en los tipos de objetos y procesos matemáticos introducidos en el *Enfoque Ontosemiótico* del conocimiento matemático. En este proyecto entendemos el álgebra más allá de un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y, por tanto, de simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad.

Causado y Garzón (2018) elaboran una reflexión a partir de una experiencia investigativa sobre la generalización de patrones como actividad semiótica en algunos estudiantes de educación primaria, en la que muestran, cómo el ritmo, los gestos y la percepción interceden como medios semióticos de objetivación y cómo en dicho proceso presenta los componentes fenomenológicos, epistemológico-ontológicos y semióticos. Vergel (2010) sostiene que la generalización de patrones es un contexto didáctico que debería tratarse en el álgebra escolar; este proceso facilita a los estudiantes percibir las situaciones de cambio y variación, que ayudan a fomentar el pensamiento algebraico. Además, expresa que es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptivos que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas, así como las relaciones entre estos recursos. Vergel (2015) sostiene que los signos o herramientas psicológicas se soportan en un paradigma antropológico el cual se relaciona con el proceso educativo y, en tal sentido, no es posible concebir al individuo o sujeto fuera de las relaciones que lo ponen en contacto con el otro. El lenguaje natural es un apoyo para los estudiantes al momento de manifestar las ideas sobre una determinada problemática, por tanto, es crucial en el proceso de formulación, y comprensión de una expresión algebraica.

Varias reflexiones en torno a las demandas psicológicas hechas al estudiante que aprende álgebra se centran en el contenido matemático de la enseñanza. La perspectiva histórica/epistemológica del álgebra propone como marco de referencia la comprensión de las dificultades que los estudiantes tienen al aprender el álgebra y los problemas de su enseñanza (Flores y Auzmendi, 2015). El análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y sus reglas de transformación permiten hacer distinción entre: usar letras para representar incógnitas, (resolución de ecuaciones); usar letras para representar datos (soluciones generales), y usar letras como herramienta para proveer reglas que expresan las relaciones numéricas, que surgen en Lenguaje Algebraico. Otros puntos de vista sobre las distintas vías de introducir el álgebra escolar tratan: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la introducción de problemas funcionales (MEN, 1998). La geometría es considerada por varios proyectos como alternativa didáctica que favorece el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico (Gómez et. al., 2014). Otras dimensiones que ofrece la geometría hacen referencia al significado de variable, al sentido de las expresiones algebraicas y a la interpretación de las relaciones establecidas en las operaciones. En la factorización, la geometría aporta favorablemente en el tratamiento y transformación de polinomios (segundo grado).

1.3. LA VISUALIZACIÓN EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La visualización geométrica es un campo de estudio abordado en varias investigaciones y en particular, para comprender las dificultades que tienen los escolares en la producción de estructuras numéricas y algebraicas básicas. En clase de matemáticas durante el tratamiento de expresiones algebraicas (ej. trinomios TCP) se acude frecuentemente al uso de registros geométricos para deducir dichas expresiones. Sin embargo, la mayoría de las intervenciones didácticas que optan por esta estrategia enfrentan dificultades, dado que los estudiantes en ningún momento recurren al registro semiótico de las figuras como tal; por el contrario, los procedimientos son de tipo conteo. En la mayoría de las tareas que se implementan usando este tipo de visualización no logran una solución satisfactoria de la tarea propuesta y más bien, al final, optan por tratar de adivinar (Castellanos, Obando, 2009). Algunos estudiantes acuden al numérico donde la figura no juega un papel heurístico en la solución del problema planteado.

Mondragón (2022) da a conocer estrategias para el tratamiento didáctico de expresiones algebraicas con ayuda de la geometría. En esta línea se propone el uso de material manipulable, como lo son las tabletas algebraicas para la comprensión de los productos notables y la factorización. Con el propósito de desarrollar esta idea, se apoyan en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (2007) que comprende: la situación de acción, de formulación, de validación y de institucionalización. Los resultados de esta aplicación resaltan que los estudiantes presentan diferentes maneras de llegar al resultado correcto, pero deben comprender que sea cual sea el camino que elijan, siempre deberán llegar a la misma respuesta.

Según Duval, la *visualización* es la representación semiótica de un objeto, una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades. Permite comprender sinópticamente cualquier organización como una configuración, haciendo visible lo que no es accesible a la visión, así como aprehender globalmente cualquier organización de relaciones. La *visualización* plantea al aprendizaje tres problemas: la discriminación de las características visuales relevantes; el procesamiento figural con cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura, reconfigurar) y perspectiva; coordinación con el registro discursivo en consecuencia, el autor afirma que no hay comprensión sin visualización. Desde un punto de vista didáctico la visualización representa un reto al profesor; los registros visuales a veces se usan para dar sentido a procesos matemáticos más mecánicos (Duval, 2002).

L*a visualización* permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. Si bien cada una puede ser aprendida o enseñada de manera independiente o separada, la articulación entre ellas es requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la geometría (Fernández Blanco, 2013), es necesario, en primera instancia, separar las diferentes maneras de ver que subyacen a su aprendizaje y luego diferenciar los tipos de razonamiento que conviven en el aprendizaje de esta disciplina, lo uno y lo otro es lo que da base para el aprendizaje de las construcciones. La *visualización,* se impone como elemento crucial en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y por consiguiente en otras áreas de las matemáticas como en el caso que nos ocupa el álgebra escolar.

Arcavi (2003) trata la idea de visualización como una actividad matemática puesta al servicio de la resolución de problemas, la cual va más allá de su papel procedimental o de inspirar una solución general o creativa. Asimismo, las representaciones de formas visuales pueden ser elementos legítimos en las demostraciones matemáticas. En esta misma línea se ubican los presupuestos de Balbuena (2014), para el autor *la visualización* es la capacidad de los individuos de formar imágenes mentales, imágenes que quizá nunca hayamos visto físicamente, pero de las cuales tenemos conocimiento y que, a la vez, ocupa las manifestaciones de la cultura del hombre de carácter simbólico.

Camargo (2011) argumenta que cuando una persona realiza una representación espacial de objetos físicos lo hace a través de imágenes visuales mentales, y a esto es a lo que denomina *visualización.* La imagen mental pertenece al contexto psicológico, son representaciones mentales que no son necesariamente consecuencia de un estímulo externo, pueden ser recuerdos de experiencias del pasado. En esta misma línea para otros autores la *visualización* es la actividad matemática que conlleva al razonamiento usando elementos visuales o espaciales (mentales o físicos), utilizados para resolver problemas o probar propiedades (López, 2008)

Para Ramìrez-Ucles (2017) la visualización geométrica se entiende como la habilidad para hacer abstracción de las formas o figuras de una manera procesual, en un contexto de enseñanza; lo cual facilita que las tareas adquieran un mayor significado. Para analizar estas habilidades de visualización, se ponen en juego procesos de confrontación sistemática de resolución de tareas matemáticas que las promuevan.

Otras formas de reconocer la visualización en el campo del álgebra hacen referencia a la representación simbólica, la cual se configura como un enunciado visual; asumiendo que este último es una emisión gráfica con un propósito comunicacional, que pretende la abreviación de conceptos a través de signos o símbolos (Pericot, 2005).

La representación simbólica es una imagen que como signo o símbolo se presenta en la mente, entablando una relación entre procesos cognitivos y perceptivos que provienen de la comunicación general; es decir, es la imagen formal de un concepto, pero que sugiere un proceso de interiorización (Balbuena, 2014). La representación simbólica es la apropiación de los elementos formales del diseño gráfico en tanto que parten de un conocimiento convencional de la forma, es decir de un primer significado y que a partir de este se generan otras interpretaciones a las que llamaremos sentido (Ramirez-Ucles y Flores, 2017).

En torno a una investigación desarrollada por Aké (2021), se analiza el conocimiento algebraico de los maestros en formación de educación primaria, se considera importante implementar el conocimiento algebraico, desde la educación inicial, ya que es allí donde las estructuras mentales del niño se están desarrollando; para lo cual es necesario que los docentes tengan conocimiento en este campo. Luego de un riguroso análisis de preguntas que se realizaron, determina que los futuros docentes presentan dificultades al enfrentarse a procesos algebraicos, donde algunos usaban métodos inapropiados para llegar a la solución. Algunos se inclinan por la generalización para la introducción del álgebra en la escuela, por ejemplo, Mason (1996) Citado en Castellanos (2017) considera la generalización es el corazón de las matemáticas. Para otros se ubican desde la perspectiva de la modelización, enfatizando la fase de formulación del modelo. En tal sentido, Jiménez y Ricaurte (2022) resaltan la importancia de estudiar el pensamiento en edades tempranas, y de implementar actividades desde el enfoque semiótico, en vez de procedimental con símbolos alfanuméricos. Se considera que los procesos mentales se construyen desde las influencias históricas y culturales, por lo que son diferentes para cada estudiante, y como menciona Vergel (2021) las matemáticas son una influencia histórico-cultural, y puede enseñarse álgebra desde este enfoque. *En otras palabras, el álgebra debería incluirse desde una edad temprana, pero no de manera simbólica, sino a través de actividades que se puedan contextualizar fácilmente.*

1.4. ERRORES Y DIFICULTADES EN ÁLGEBRA ESCOLAR

Uno de los principales errores en la representación simbólica es que los alumnos no tienen clara la diferencia entre signo y símbolo. De la misma manera se evidencia que el término representación no queda claro en términos semióticos, y se ubica en el ámbito de su imaginación (Socas, 2012). El origen de las dificultades se clasifica según Socas (2014) a saber: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas o emocionales hacia las Matemáticas. En otros estudios el mismo autor describe la actividad matemática a través de tres componentes: a) las operaciones que están determinadas por operaciones, algoritmos y técnicas; b) las estructuras definidas por conceptos, propiedades y estructura; y c) los procesos determinados por sustituciones formales, generalización y modelización (Ruano, Socas y Palarea, 2008). En el estudio citado anteriormente, se determina que los estudiantes utilizan tres tipos de conocimiento, la sustitución formal, la generalización y la modelización. Aquellos estudiantes que se destacan en las matemáticas, no son ajenos a presentar obstáculos al momento desarrollar el aprendizaje del álgebra, ya sea por su lenguaje (letras) o al elaborar una representación geométrica. En consecuencia, de lo anterior el docente debe enterarse de los errores básicos que el estudiante está cometiendo y así tener una buena información de cómo el estudiante plantea y desarrolla el problema y a su vez corregir los errores que muchas veces son aritméticos. En general las dificultades dependen del problema, algunas veces se asocia a la complejidad de los objetos matemáticos; otras veces al orden de las operaciones; y, a problemas para identificar con claridad lo que le solicita la tarea. En los estudios de Socas, se concluye en relación los razonamientos heurísticos que usan los escolares (eje. ensayo-error y la analogía) otorgando relevancia a procesos exitosos de aprendizaje de los escolares cuando acuden a la abstracción geométrica.

Engler (2004) manifiesta que los errores en el aprendizaje son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Se distinguen cinco subtipos: a) errores por perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema; b) errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares; c) errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros; d) errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura;

cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción y d) errores de transferencia negativa a partir de tareas previas. En este estudio se considera que un error es un intento (o resolución) de dar respuesta a una tarea. Uno de los principales errores del álgebra tiene su origen en la aritmética por ejemplo al momento de efectuar la propiedad distributiva o al momento de operar los signos (ley de signos) y las operaciones donde estén presentes los paréntesis, el origen estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis (Socas, 2001), el estudiante debe formar una relación con números, letras y paréntesis donde se llevará a cabo una modelación en la que la generalización y la situación formal estarán presente.

1.5. ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA DESDE LA PERSPECTIVA CURRICULAR

Diferentes investigaciones en álgebra escolar estudian los fenómenos de la enseñanza aprendizaje y la comunicación de conceptos algebraicos en el sistema educativo que es muy importante que se trabaje en toda la secundaria hasta la llegar a la universidad. En estos estudios tratan la contextualización, el uso de aparatos tecnológicos, el lenguaje, las múltiples representaciones, las dificultades y errores, la pre álgebra y el Early Álgebra (Vergel, 2010) En este sentido, se considera necesario incorporar el pensamiento algebraico (Pre álgebra y Early álgebra) en primaria y lograr que el estudiante se apodere del lenguaje algebraico es decir que pueda relacionar las letras (variables), con los números y de esta manera logre reconocer una ecuación (lineal o cuadrática) y de solución a problemas con ciertos aspectos del conocimiento numérico que forma parte de la base de la aritmética generalizada

La literatura manifiesta la estrecha relación que existe entre la aritmética y el álgebra: dificultades y errores y, la necesidad de implementar nuevos métodos de enseñanza con recursos didácticos (Castellanos, 2017). Diferentes trabajos muestran que la investigación en Pensamiento Algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico? (Castellanos, Flores y Moreno, 2017); la revisión de los autores destaca transformaciones curriculares que se resumen a continuación

Hasta la década de los ochenta las perspectivas investigadoras en Álgebra presentadas en la agenda internacional de enseñanza destacaron el marco aritmético de referencia y un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos (eje. variables, expresiones y ecuaciones, resolución de ecuaciones y funciones y gráficas). En Colombia los aspectos curriculares relacionados con el álgebra escolar, que la direccionan son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), así mismo, las propuestas pedagógicas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), el proyecto se inscribe en el desarrollo de conocimientos básicos correspondientes a los sistemas algebraicos y analíticos, ya que hacen referencia al estudio de la variación y representaciones algebraicas, a partir de situaciones problema, sobre escenarios en los que se identifiquen patrones que posibiliten la construcción de expresiones algebraicas.

Atendiendo a los procesos definidos en las directrices curriculares (razonamiento, resolución y planteamientos de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), este trabajo se centra en el proceso de *resolución y planteamiento de problemas*, en el cual permite desplegar estrategias para resolver situaciones involucradas en un trayectoria didáctica; otras de las actividades matemáticas que involucra son: encontrar y verificar resultados, interpretación representaciones, identificar patrones (geométricos), todo ello posibilitando la construcción de expresiones algebraicas (eje. TCP).

El proyecto buscar ofrecer algunos objetos matemáticos, a través de una trayectoria didáctica con tareas que involucran materiales tangibles como el Puzle Algebraico, promoviendo las habilidades para el razonamiento y la comunicación de los conceptos algebraicos (MEN, 2006). En consecuencia, de lo anterior el proyecto procura las representaciones en distintos sistemas o registros simbólicos, permiten el tratamiento y conversión entre diferentes procesos como la modelación y la resolución de problemas, los cuales posibilitan el desarrollo del pensamiento variacional, asimismo entablan relación con los pensamientos lógico y científico. Siguiendo los Estándares Básicos de Competencias, se destaca la necesidad de plantear situaciones didácticas que permitan la solución de diferentes actividades, favoreciendo un cambio de actitud de escolares y profesores al resolver un problema, obteniendo resultados más significativos. Entonces, las situaciones didácticas que usan un artefacto o herramienta facilitan al escolar la comprensión de una idea o un concepto, le posibilitan buscar distintas estrategias de solución, estimar una solución aproximada o ver los errores en la solución a través de cálculos numéricos o algebraicos.

En síntesis, reconocemos la estrategia didáctica planteada en este proyecto posibilita la escritura de las expresiones algebraicas, la transformación adecuada de expresiones equivalentes y el uso de propiedades para llegar a resultados correctos. En síntesis una clave para integrar el razonamiento algebraico en todos los grados es la incorporación del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, en este sentido, se consideran relevantes los artefactos y situaciones que permiten hacer tangible aquello abstracto, varias experiencias en primaria usan el Puzle Algebraico como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas donde se considera el álgebra desde una concepción amplia.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este proyecto se enmarca en el enfoque cualitativo, de naturaleza exploratoria y de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), basado en la metodología de la investigación de diseño, tendencia propia de la investigación en educación matemática. El estudio analiza la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad, y estandarización de la misma; nos interesamos en identificar, básicamente, la naturaleza profunda de las realidades y su dinámica (Castellanos, Flores y Moreno, 2018). El análisis de los datos sigue la técnica del análisis de contenido utilizada para examinar la variedad de significados algebraicos en relación con la factorización y los TCP (conceptos y procedimientos) presentes en las tareas elegidas o diseñadas, las cuales constituyen la trayectoria didáctica de la propuesta.

2.2. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño metodológico que se plantea para esta investigación elige el paradigma de la Investigación de diseño, la cual prevé la configuración de un experimento a través de una trayectoria didáctica. El experimento cubre tres las fases: Preparar (planificar trayectoria), Experimentar (validar tareas) y Analizar retrospectivamente (revisar y ajustar actividades).

En la primera fase se define y caracteriza la complejidad de la situación de experimentación (o implementación en el aula); se definen variables, objetivos, problemas, trayectoria hipotética de aprendizaje, principios teóricos, instrucción, recogida de los datos y resultados.

En la segunda fase se procede con el experimento piloto que consiste en la prueba de caracterización del aprendizaje y para implementar las tareas con un grupo de escolares, posteriormente se ajusta y consideran los elementos relevantes del diseño de las actividades y sesiones del experimento La validación de las tareas implica la implementación de la trayectoria con un grupo piloto de escolares (desarrollo de actividades y tareas) tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño, en tres escenarios: antes de cada intervención; en cada intervención y después de cada intervención.; en esta misma fase se otorga vigilancia desde los referentes teóricos asumidos aprecia cambios viables a la vista de los datos obtenidos para asumir las posibles modificaciones al modelo ante observaciones inesperadas.

En la tercera fase se realiza el análisis retrospectivo de los datos; persigue contribuir al desarrollo, apropiación o contribución del modelo teórico planteado en los referentes para el aprendizaje-enseñanza del álgebra escolar.

2.3. CONTEXTO Y PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio se desarrolla en el contexto de la Educación Básica Secundaria con estudiantes dela ciudad de Villavicencio- Meta. Los sujetos objeto del estudio son los escolares del grado sexto, séptimo y octavo. La edad de los escolares se encuentra en el intervalo de 11-15 años. La Muestra corresponde a un grupo limitado de escolares con los que se realiza la implementación y validación de las actividades, lo anterior, dada las condiciones del COVID-19 durante el año 2021

2.4. FUENTES E INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS DE INFORMACION

Las tareas y actividades desarrolladas y aportadas por los sujetos, constituyen los insumos tomados durante el experimento de enseñanza; son fuentes para describir y analizar los ajustes en el diseño de las actividades de cara a la configuración de la estrategia didáctica.

El estudio inicia con la **fase de diagnóstico** realizada durante el año 2021 con escolares de grado sexto, séptimo y octavo de tres Instituciones Educativas, participaron un total de 82 estudiantes, Los principales resultados permitieron evidenciar falencias en procedimientos matemáticos asociados a la factorización de expresiones algebraicas, procesos de generalización y simbolización algebraica. Las respuestas y argumentos de los estudiantes al solucionar la prueba de diagnóstico se convierten en el insumo para el análisis de esta investigación. Los resultados de la prueba diagnóstico nos permiten comprender las estrategias de solución que otorgan los escolares a las situaciones problemas y los escenarios en los que ellos a) identifican patrones que posibilitan la construcción de expresiones algebraicas, b) generalizan patrones numéricos y geométricos c) identifican las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, d) simbolizar y operar con símbolos, e) notan la pertinencia del álgebra, f) advierten la estructura del álgebra, g) usan el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y f) empoderan el razonamiento algebraico

La validación de la estrategia que se desarrolla en la fase dos del proyecto (**experimentación)**, se recogerán los diseños de las tareas y actividades ajustadas, producciones escritas de los estudiantes de sesiones de trabajo que manifiestan el seguimiento.

2.5. VARIABLES DE LA INVESTIGACIÓN

Se estiman estudiar las variables que determinan el desempeño algebraico escolar. De esta manera, se usan los referentes teóricos para clasificar los diferentes errores exhibidos por los escolares en la solución de la prueba diagnóstico. Entre las categorías usadas se tienen: a) error geométrico, b) error de conteo, c) error de distribución.

2.6. INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

Para realizar la recolección de información del estudio se usan los siguientes instrumentos:

El estudio de diagnóstico describe la importancia de la investigación y permite identificar los principales niveles de desempeño manifestados por los participantes en tareas que involucran elementos conceptuales previos a la factorización de polinomios de segundo grado con raíces enteras y racionales. Este estudio se realiza a través de una prueba de caracterización para:

a) Identificar los principales errores y dificultades que manifiestan un grupo de escolares de grado sexto, séptimo y octavo durante la resolución de tareas;
b) Diseñar las tareas de la intervención didáctica.

La rejilla de seguimiento de la experimentación, permite hacer seguimiento y sistematización de actividades puestas en validación y de las tareas de las sesiones de la trayectoria didáctica, esta rejilla se usa como herramienta para la implementación.

3. ANALISIS Y RESULTADOS

En esta sección, se presenta la información obtenida después de llevar a cabo las diferentes fases del proyecto. Primero se presentan los resultados asociados a los errores en el inicio del aprendizaje del álgebra; luego se hace una categorización de los errores evidenciados en las respuestas de los estudiantes; con las evidencias se procede en el análisis y comparaciones teóricas. De manera similar se clasifican los estudiantes de acuerdo a la categoría de error que presentan, para establecer los más repetitivos. Por último, se presenta el diseño de las actividades que constituyen la estrategia para abordar la factorización de polinomios

3.1. RESULTADOS DE LOS ERRORES Y DIFICULTADES AL INICIO DEL APRENDIZAJE ALGEBRAICO

En este apartado se da respuesta al primer objetivo el cual se dedicó a identificar los principales errores y dificultades que manifiesta un grupo de estudiantes de tres instituciones Educativas cuando inician el aprendizaje del algebra escolar Los principales errores encontrados en este estudio obedecen a los resultados de la aplicación de una prueba diagnóstico (Anexo 1). En el diagnóstico intervienen escolares de tres Instituciones Educativas así: 10 estudiantes de grado 801 y 9 estudiantes de grado 802 de la Institución Educativa Narciso José Matus; por parte de la Institución Educativa Francisco Arango, participan 16 estudiantes de grado 702, 11 estudiantes de grado 703 y 12 estudiantes de grado 803; por la Institución Educativa Cofrem participan 24 estudiantes de grado 601. Cabe aclarar que la baja participación de los estudiantes en la prueba se atribuye a las irregularidades que se presentaron por el retorno de pandemia; ya que las pruebas se presentaron de forma presencial durante los meses Octubre –Noviembre del 2021.

Tabla 1: Participantes por institución en el estudio

Colegios	**Genero**		**Grado**	**Año**	**Total (Curso)**	**Total (Colegio)**
	M	F				
Narciso Matus	7	3	801	2021	10	19
	6	3	802	2021	9	
Francisco Arango	8	8	702	2021	16	39
	2	9	703	2021	11	
	8	4	803	2021	12	
Colegio Cofrem	13	11	601	2022	24	24

3.1.1. Categorías de desempeño para la evaluación de la prueba

Para evaluar el desempeño de los escolares se ubicaron cuatro niveles acordes con los estudios encontrados en antecedentes y que resultan de ayuda al definir y clasificar los diferentes errores encontrados en el presente trabajo. Los indicadores de desempeño estructurados para la evaluación de cada pregunta son los siguientes:

Bajo: El estudiante no responde correctamente la pregunta planteada, no desarrolla el ejercicio propuesto, utiliza los conceptos errados en la solución del problema.

Básico: El estudiante trata de resolver el ejercicio planteado y articula conceptos relacionados con la temática, pero no llega a la solución concreta del ejercicio. Acierta en la respuesta, pero no argumenta con los soportes físicos completos del porqué de esa respuesta, o sus argumentos son erróneos.

Alto: El estudiante responde de manera correcta el ejercicio y argumenta con los conceptos físicos adecuados, aunque en su explicación hay algunos errores de redacción.

Superior: El estudiante responde de manera correcta el ejercicio, sus argumentos son adecuados y corresponden la pregunta, tienen buena redacción. Sabe comunicar su respuesta sin ninguna duda.

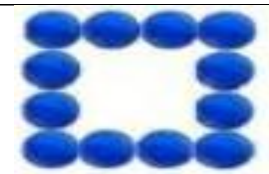
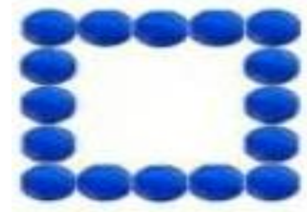
3.2. CATEGORIAS EMEREGENTES Y DEFINICION DE LOS ERRORES

Para definir las categorías iniciales se tuvieron en cuenta las directrices curriculares (Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y las Mallas de Aprendizaje) y los referentes expuestos en el capítulo uno. Masson (1985) citados en Castellanos y Obando (2009); Es importante aclarar que pueden surgir otras, pero esas se visualizan a partir de la reflexión de las categorías iniciales. Para la prueba diagnóstico, se consideró dos grandes procesos que definen el álgebra escolar: la generalización y la simbolización, dado que estos persiguen la adquisición del lenguaje algebraico y el desarrollo del pensamiento algebraico en el cual se inscribe la factorización de expresiones algebraicas. Beyer (2006)

3.2.1. Errores presentes en una situación de generalización.

La primera situación de la prueba se planteó con el propósito de observar en los escolares desempeños para: reconocer estructuras y patrones matemáticos, usar el álgebra para expresar generalidades. La siguiente cuestione corresponde a la pregunta uno de la prueba.
A continuación, se presenta la clasificación de errores que emergen del análisis a la prueba, cada categoría de errores se presentara con su definición y una evidencia la cual esta explicada a detalle

Situación Uno: Mónica decide realiza marcos para fotos de diferentes tamaños, para esto utiliza tapas de gaseosas y construyes los siguientes cuatro marcos

			
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4

a) Observe la secuencia que presentan los marcos de la fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco número 5, 8.

- **Error geométrico (E1):** Se da cuando el estudiante no completa la figura geométrica de manera correcta; se refiere al primer paso de la generalización "la visión de la regularidad" (Masson, 1985 citado en Castellanos y Obando, 2009) que se exhibe de manera geométrica (configuración geométrica), es decir, notar la diferencia y la relación entre las formas y partes de la misma.

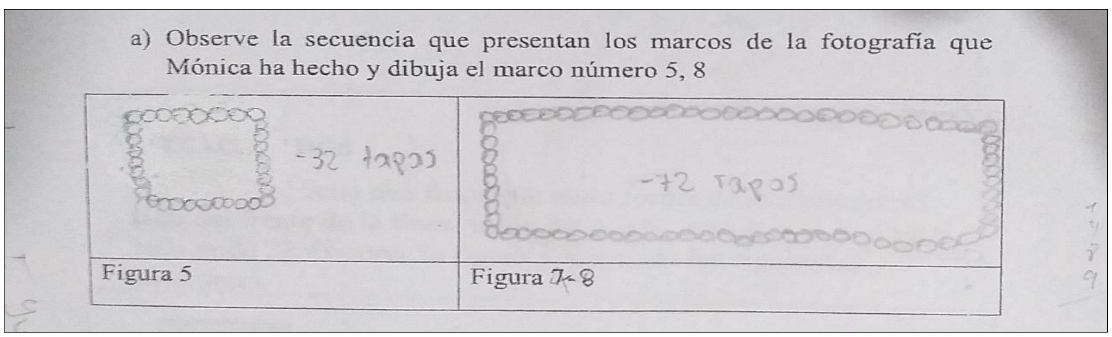


Figura 1. Error geométrico (E1) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia

En la figura 1 se puede apreciar que no se conserva la forma geométrica original. Al inicio se tenían cuadrados formados con las tapas y el estudiante resulta formando un rectángulo, lo cual aumenta la dificultad para llegar a la respuesta. En palabras de Castellanos y Obando (2009) estos errores se asocian a las dificultades para obtener información espacial, puesto que es difícil para el evaluado encontrar relaciones entre las figuras, imágenes o diagramas con la naturaleza del problema o ejercicio. *El error (E1), lo* consideramos relevante en nuestro estudio, dado que generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común (expresión que las englobe), se trata además de definir, a partir de las propiedades de un objeto, un campo de objetos caracterizados. Por lo anterior, la abstracción de la configuración geométrica es uno de los principales elementos a considera para transferir a una situación propiedades que se cumplen en otra y, en general, cuando se amplía la definición de una ley.

- **Error de conteo (E2):** Se trata principalmente del primer proceso de la generalización, ocurre cuando el estudiante efectúa un conteo de forma errónea de las particularidades o elementos que configuran (estructuran) la forma o figura en cada término de la secuencia (ej. las tapas de retrato). Este error es documentado a partir de los estudios de Lannin (2003) el cual afirma que el conteo es una de las estrategias por excelencia usadas al generalizar. La figura 2 evidencia un ejemplo del error de conteo. Entendemos que la configuración es un proceso mental por el cual la estructura, el modelo, aparece claramente, interrelacionando los diversos elementos, permitiendo por tanto observar la situación de una forma diferente, con una nueva perspectiva.

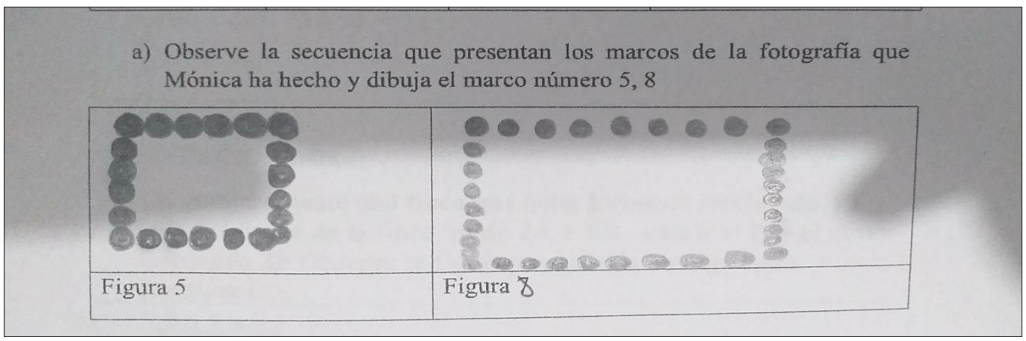


Figura 2. Error de conteo (E2) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia

En el ejemplo de la Figura 2, se puede apreciar que el estudiante al contar las tapas de cada figura se equivoca, no corresponde a las que sigue la secuencia. Al igual que en los estudios de Cañadas (2020) este error ocurre cuando el estudiante trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación (elementos que lo configuran), y lo que es común a todos ellos; lo que no varía.

- **Error de patrón (E3):** En este caso, no encuentra la secuencia numérica correcta de la situación planteada (figura 3) y por tanto hace una asociación errónea a partir de los datos conocidos. Como se muestra en la figura 3

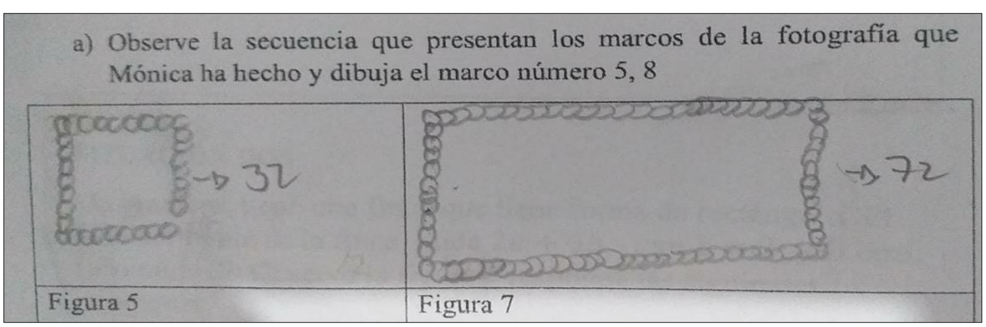


Figura 3. Error en patrón o regularidad (E3) Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia

De acuerdo con la figura 3, se puede notar que el escolar no dedujo de manera correcta la secuencia planteada en el problema, sin lograr la respuesta correcta. Se considera un error asociado a la dificultad para encontrar una característica que se mantiene en regularidad (similar dad o semejante) en cada caso, los factores clave, y conseguir, mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resuma todas las situaciones, que permita "contar en general" sin referencia a los casos concretos. Al igual que en los estudios de Merino y otros (2013) se establece que trabajar con tareas de generalización implica "la búsqueda de patrones, lo cual pretende hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos" (p. 27). Destacamos que en las situaciones matemáticas planteadas pueden visualizarse dos configuraciones relacionadas con la "visión" de regularidades y características: la configuración de los números y de las figuras geométricas, en nuestro caso la figura geométrica es un cuadrado

- **Error de distribución o de la configuración geométrica (E4).** Este error emerge con frecuencia marcada en nuestro estudio. Como podemos evidenciar en la figura 4, ocurre cuando el escolar hace una distribución incorrecta de las cantidades en cada lado del cuadrado, y por tanto las figuras toman una forma diferente y desequilibrada. No se conserva la configuración inicialmente planteada (el cuadrado)

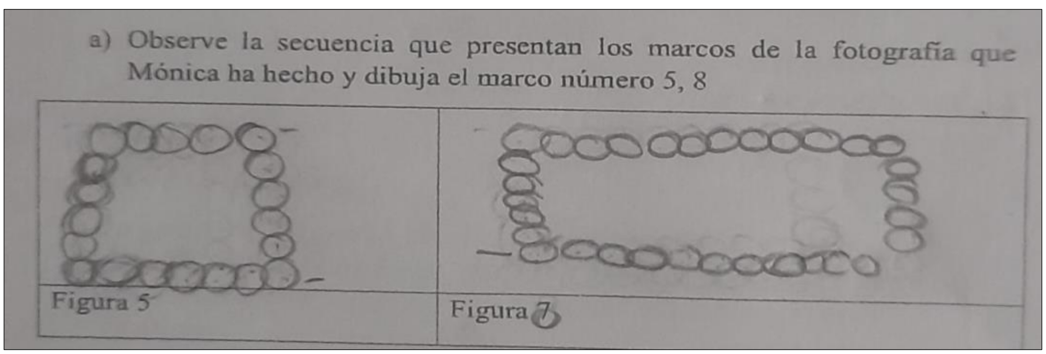


Figura 4. Error en configuración geométrica (E4) Prueba Diagnóstica.

En la figura 4 se presenta un error de distribución de los elementos que configuran la figura geométrica de la secuencia, cuando el estudiante dibuja (describe) el marco del caso cinco, se nota que el número de tapas en el lado superior de la figura (cuadrado) no concuerda con el número de tapas ubicadas en el lado de la parte inferior del cuadrado. En palabras de Engler (2004), al generalizar se deben hacer asociaciones entre las diferentes variables implicadas en el problema, para mantener su esencia y los patrones implícitos. En los resultados obtenidos se nota que los escolares no son acertados al establecer una relación entre la cantidad de tapas, y los lados de la figura geométrica, y en la mayoría de los casos evidencian un error en la distribución de las cantidades (tapas) que configuran la figura de la secuencia

- **Error de caso (E5)** Este error lo podemos apreciar en la figura 5, se presenta cuando el estudiante no puede continuar con la representación (figural o puntual) del caso que describe la secuencia, no logra expresar con precisión de manera gráfica la propiedad general que da origen al caso solicitado. Otras formas de este error según Cañadas (2020) surgen cuando el escolar responde con un caso diferente al que se le pide.

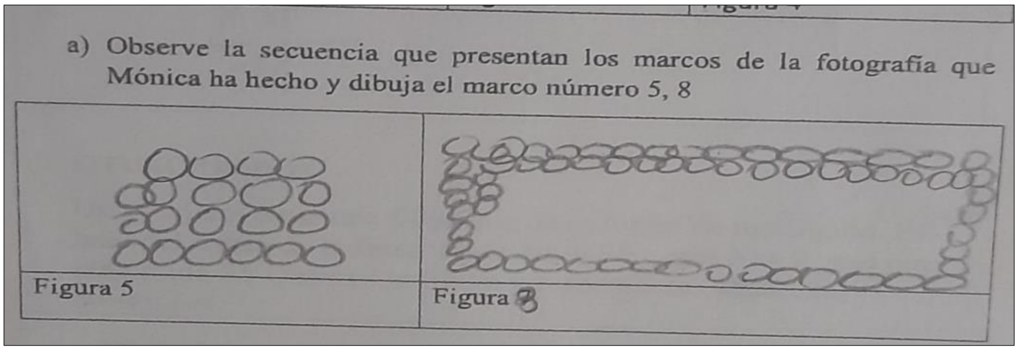

a) Observe la secuencia que presentan los marcos de la fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco número 5, 8

Figura 5	Figura 8

Figura 5. Error de Caso (E5) en Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia

En la evidencia de la Figura 5, (izquierda) el estudiante no continuo la secuencia planteada, no se representa correctamente la figura correspondiente al caso 5; las tapas únicamente debían aumentarse (ubicarse) en los lados del cuadrado; sin embrago, en la imagen se evidencia que el estudiante las representa formando el cuadrado y en su interior. En la figura 5 (derecha) mantiene la configuración de la figura, pero representa la cantidad en su interior equivocándose en la representación del caso solicitad. Se nota la dificultad del estudiante para continuar y describir (de manera gráfica) la *similaridad o característica que da origen al caso en cuestión*. Este procedimiento denominado por Masson (1985) "descripción" requiere que el estudiante exprese de manera natural y comunique desde diferentes medios semióticos (oral, grafica) lo que se ha visto (la característica o similaridad) de la secuencia, de este modo, puede surgir el modelo o regularidad que define la generalización.

3.2.2. Errores en situación de simbolización y tratamiento algebraico

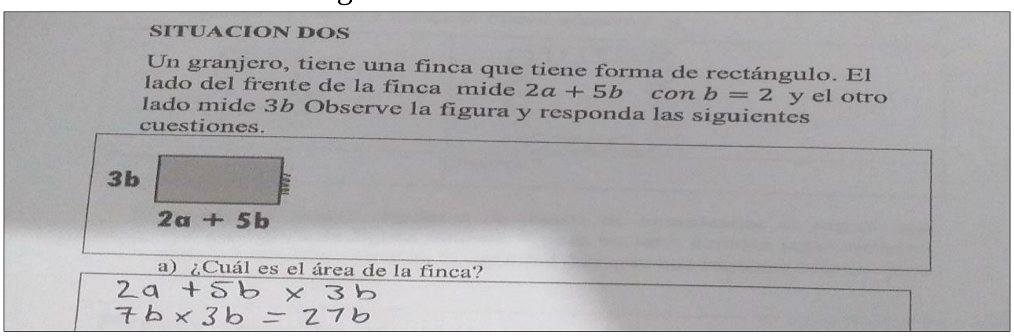
En la prueba diagnóstico se planteó la situación dos para entender las dificultades que los escolares tienen en relación con los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas; al tiempo que se observa situaciones donde no se tiene la sensación de incógnitas. La cuestión dos se dedicó al tratamiento de la simbolización algebraica (simplificar y resolver) donde las variables son incógnitas o constantes.

Situación Dos Un granjero, tiene una finca que tiene forma de rectángulo. El lado del frente de la finca mide $2a + 5b \quad con\, b = 2$ y el otro lado mide $3b$ Observe la figura y responda las siguientes las cuestiones.

a) ¿Cuál es el área de la finca?
b) ¿Cuál es el perímetro de la finca?

A continuación, definimos los principales errores que emergen en la solución de la prueba diagnóstico para esta situación acompañados de un ejemplo que visualiza los resultados.

Error de tratamiento operativo o procedimental (E6): Presenta alguna operación matemática errónea, figura 6. Son errores operacionales o procedimentales de los objetos matemáticos y, sobre todo, su cabal comprensión, lo que obviamente repercute en la solución correcta de la situación planteada. Este tipo de errores obedecen a procedimientos algorítmicos fallidos, los alumnos usan inadecuadamente reglas.


SITUACION DOS

Un granjero, tiene una finca que tiene forma de rectángulo. El lado del frente de la finca mide $2a + 5b$ $con\ b = 2$ y el otro lado mide $3b$ Observe la figura y responda las siguientes cuestiones.

3b
2a + 5b

a) ¿Cuál es el área de la finca?

2a + 5b × 3b
7b × 3b = 27b

Figura 6. Evidencia error de cálculo (E6) en Prueba Diagnóstica.

En la situación dos de la figura 6, se pedía al estudiante calcular el área de una finca. Las respuestas dadas por el estudiante del ejemplo Figura 6 muestran que inicialmente planteó la ecuación donde faltó encerrar una expresión en paréntesis, y luego se evidencia que desarrolló una operación de manera inapropiada, es decir el cálculo matemático no fue correcto. El primer error se da cuando asume que se puede sumar $2a + 5b$ dando como resultado $7b$, luego efectúa la operación $7b \times 3b = 21b$. Sin embargo, se esperaba que obtuviera como resultado $21b^2$, pero el estudiante calcula equivocadamente el producto de términos y responde $21b$.

- **Imposibilidad o tratamiento equivocado entre representaciones (E7)** Se debe a equivocaciones para tratar de una representación geométrica a una simbólica. Los estudiantes intentan resolver el problema plantado, pero no logran abstracción y no encuentra cómo continuar.

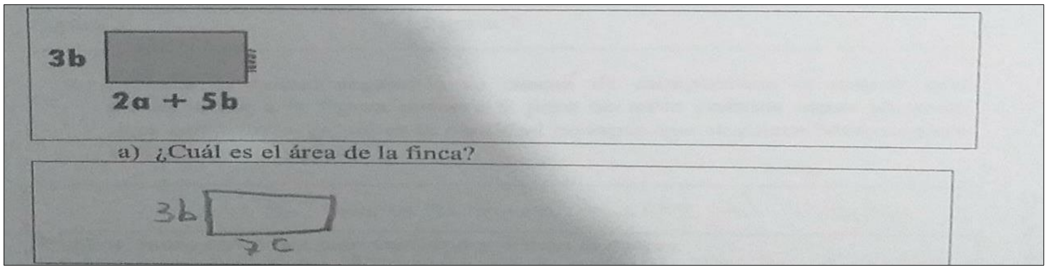


Figura 7. Evidencia del tratamiento equivocado entre representaciones (E7)

En este sentido según lo que se observa en la figura 7, el estudiante intenta dar respuesta a la pregunta planteada, sin embargo, no encuentra el método que lo lleva a ella. Para Fernández (2016) “los errores son síntomas mediante los cuales un alumno manifiesta sus conflictos y problemas de aprendizaje relativos a un determinado contenido matemático escolar” (p. 195); el escolar refleja la incapacidad de avanzar en la interpretación del problema matemático, se evidencia la necesidad de la clausura (**eje. 2a + 5b = C),** el estudiante la base del rectángulo, Según Socas (2002) estos errores son debidos quizás por la complejidad simbólica que acompaña el álgebra escolar.

- **Error en la modelación matemática (E8)**: No logra plantear la expresión matemática que da respuesta a la situación propuesta

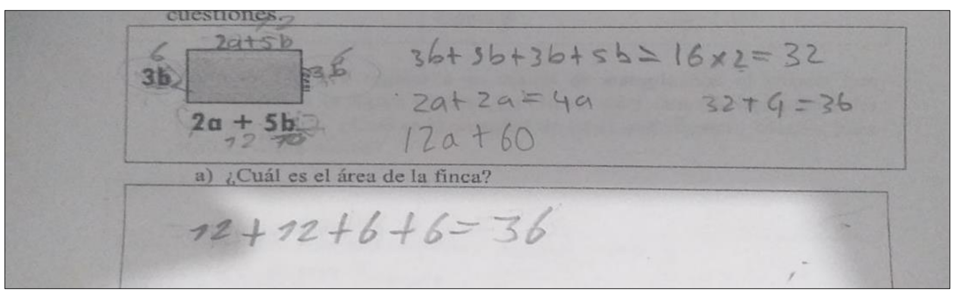


Figura 8. Evidencia de error de modelación matemática (E8)

La modelación del problema, es una de las partes más importantes, ya que se debe identificar la expresión correcta que da solución a la cuestión. En la imagen (figura 8) se observa que la expresión modelo utilizada para hallar el área de un rectángulo no es la correcta, por ende, la respuesta al problema es equivocada. Janvier (1996), ha manifestado que el mejor método de comenzar la enseñanza-aprendizaje del álgebra es desde la perspectiva de la modelización, enfatizando en la fase de la formulación del modelo matemático.

Error de tratamiento aritmético (E9)

Ocurre cuando el estudiante presenta alguna equivocación al realizar operaciones aritméticas, especialmente en el uso de la jerarquía de las operaciones. Matz (1980) citado por socas (2008) manifestó que “los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94)

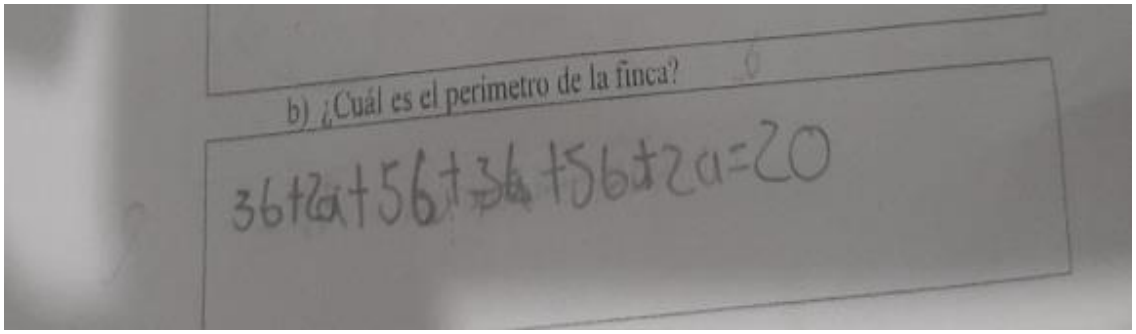


Figura 9: Evidencia de error de tratamiento aritmético (E9)

En la figura 9, podemos ver como un estudiante logra plantear la ecuación correcta para calcular el perímetro de rectángulo que tiene de base (2a+5b) y altura 3b pero no tiene la noción de los términos semejantes, porque sumo todo sin tener en cuenta las variables.

3.3. CLASIFICACION Y ANALISIS DE ERRORES PRESENTADOS

En las figuras 1 a 9, se presentan los errores que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada una de las preguntas planteadas en la prueba de diagnóstico aplicada (Anexo 1). Los resultados fueron agrupados a partir de las soluciones de los escolares a las dos situaciones solicitadas y a cada uno de los ítems cuestionados. El registro de resultados se muestra a través de un rotulo que permite identificar la producción de los participantes. Para rotular cada estudiante se utilizaron las siguientes abreviaturas:

A1: significa alumno número 1 y así sucesivamente con los otros números.
NM: Significa que es estudiante de la Institución Educativa Narciso José Matus Torres.
FA: Significa que es estudiante de la Institución Educativa Francisco Arango.
CC: Significa que es estudiante de la Institución Educativa Colegio Cofrem.
601: Significa que es estudiante de grado sexto uno.
702: Significa que es estudiante del grado séptimo dos.
703: Significa que es estudiante del grado séptimo tres.
801: Significa que es estudiante del grado octavo uno.
803: Significa que es estudiante del grado octavo tres.

3.3.1. Análisis y resultados de errores en la pregunta 1.a.

1.a) Observe la secuencia que presentan los marcos de la fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco de la figura número 5 y de la figura 8

La solución a la pregunta 1.a, esperaba que los estudiantes observaran la secuencia y construyeran la figura 5, para lo cual requerían el uso de 20 tapas Esta cantidad se podía obtener al observar la característica (regularidad) que conservan las estructuras de las figuras del caso cuatro y anteriores para conservar la secuencia del cuadrado. Sin embargo, en la mayoría de casos no descubrieron el número correcto, y además representaron distribuciones (con tapas) que no tienen mantenían la simetría de la figura, como se pretendía.

La solución buscaba que los estudiantes no sólo pudieran definir, a partir de las propiedades de un objeto, sino que lograran generalizar la expresión cuando se transfiere a una situación propiedades que se cumplen en otra y, en general, cuando se amplía el ámbito de la definición de una ley.

La representación esperada a la solución de la cuestión:

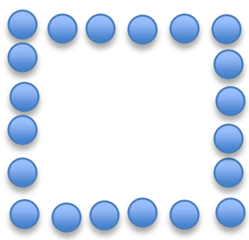


Figura 5

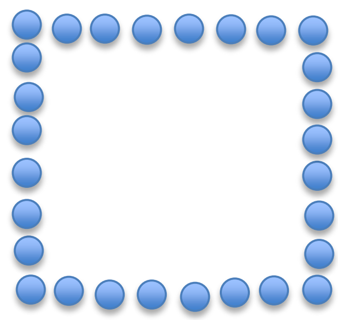


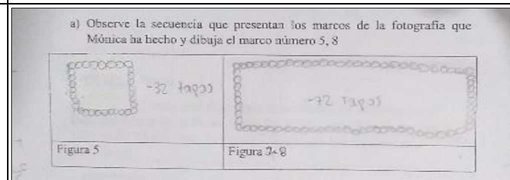
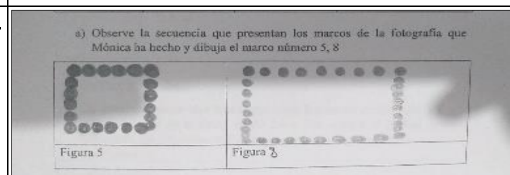
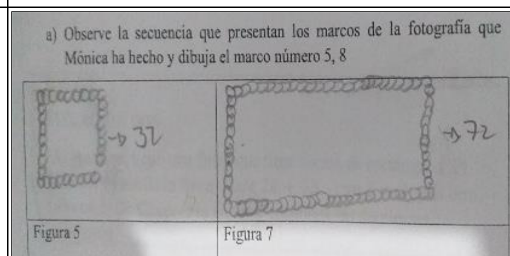
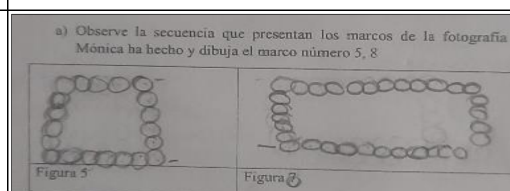
Figura 8

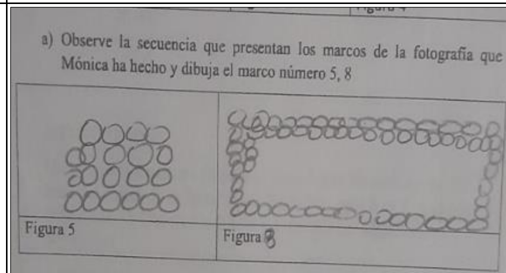
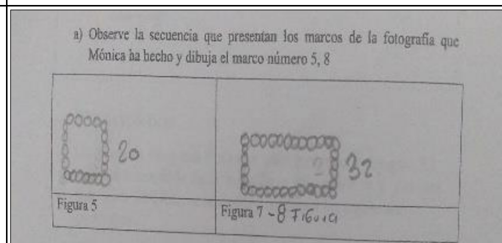
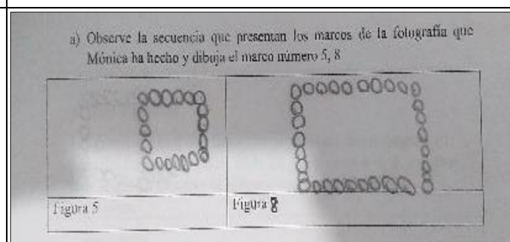
Los estudiantes pueden obtener las representaciones de los casos cinco y ocho utilizando y siguiendo las leyes que definen la secuencia de la configuración geométrica dadas (eje. aumentar cuatro tapas al pasar de un término al otro), este patrón permite visualizar las relaciones que dan lugar a las regularidades en una colección de casos particulares, al tiempo que permiten pasar la propiedad común, a una expresión que las englobe.

La tabla 1, se presentan los principales errores que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de la cuestión uno (Literal a) pregunta 1a. Se describe cada categoría de error acompañado de una imagen que evidencia el hallazgo

De manera seguida en la Tabla 2 se resumen los errores más destacados en la resolución de la pregunta 1a. por parte de los estudiantes. Los resultados muestran por institución, grado y estudiante la frecuencia de ocurrencia de los errores.

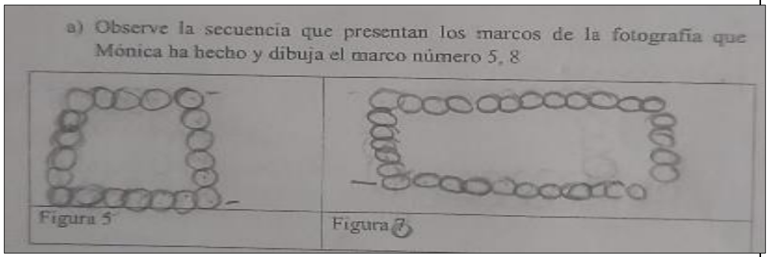
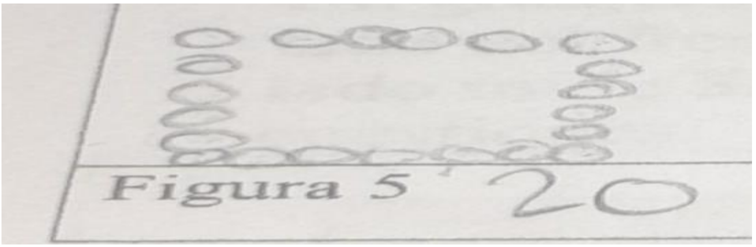
Tabla 2: *Principales errores encontrados en la solución de la pregunta 1.a*

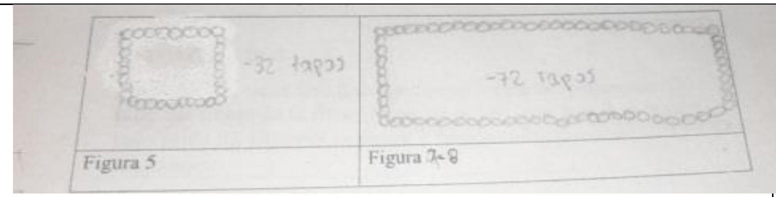
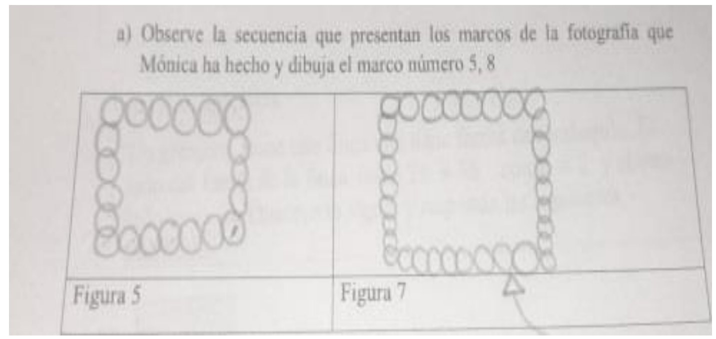
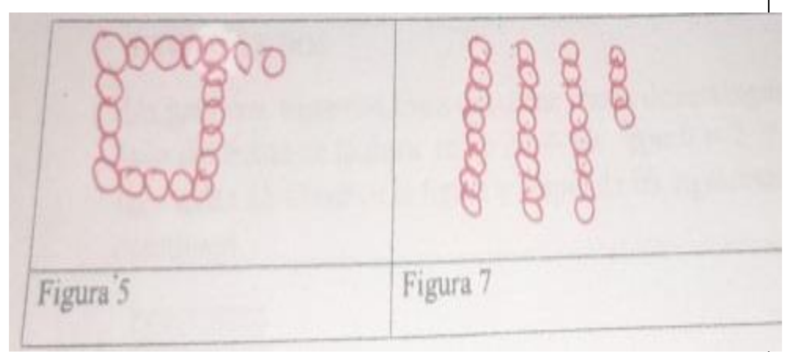
Errores más recurrentes en la solución de la Pregunta 1.a)			
Tipo de Errores	**Evidencia**	**Descripción del error**	**Autores**
E1. No conservación de la figura geométrica original		La figura original correspondía a un cuadrado, y el estudiante termina creando un rectángulo, es decir una figura geométrica diferente.	Masson, 1985 citado en Castellanos y Obando, 2009
E2. Conteo incorrecto de la cantidad -tapas E3. No conservación de la figura geométrica original		El estudiante no contó las tapas de manera correcta y además no conservó la figura inicial	Lannin (2003) Merino, et al (2013)
E1. No completa la figura geométrica de manera correcta o no completa la figura. E2. Conteo incorrecto del número de tapas para posición figura E3. No conservación de la secuencia		Este estudiante presentó 3 errores en esta pregunta. Primero no conservó la figura original, que se asocia a un error geométrico. También desarrolló un conteo incorrecto de las tapas. Y, no dio continuidad a la secuencia o patrón inicial.	Masson, 1985 citado en Castellanos y Obando, 2009 Merino, et al (2013)
E4. Distribución incorrecta del número de tapas en los lados de la figura E1. No completa la figura geométrica		Como en otros casos la figura no es la correcta y además se hace una distribución errónea de las tapas, lo que conlleva a una figura sin forma cuadrada.	Engler (2004)

de manera correcta			
E5. Distribución incorrecta de la cantidad en la figura E3. No conservación de la figura geométrica original		Aquí se ve que el alumno hace una distribución incorrecta de las tapas, y además no conserva la figura geométrica original.	Cañadas (2020) Merino, et al (2013)
E3. No conservación de la figura geométrica original		Este alumno mantuvo la secuencia, sin embargo, no conservó la figura original.	Merino, et al (2013)
E2. Conteo incorrecto del número de tapas para formar la figura E4. Distribución incorrecta del número de tapas en los lados de la figura		El estudiante desarrolló un conteo incorrecto de las tapas y además hizo una distribución inapropiada de las mismas.	Lannin (2003) Engler (2004)

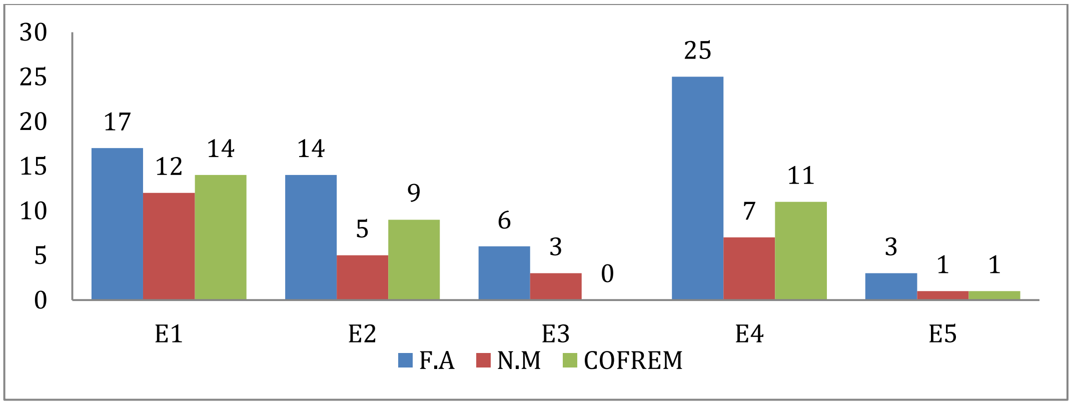
Los resultados anteriores en la solución de la pregunta (1.a.) muestran que esta forma de generalizar puede conducir a errores cuando se solicita extender la secuencia a términos siguientes, sin las suficientes precauciones, las propiedades de unos casos a otros, prescindiendo del significado de los símbolos y de la validez de las operaciones en cada campo de definición.

Tabla 3: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.A

Alumno	Institución	Grado	Tipo y descripción del error	Autores
A3-A6- A8- A12-A14-A15	F.A	702	**E1:** No completa la figura geométrica de manera correcta. 	Masson, 1985 citado en Castellanos y Obando, 2009
A1-A4-A6-A9-A11		703		
A1- A3- A4-A5-A8-A12		803		
A1-A2-A4-A6-A8-A9-A10-	NM	801		
A3-A5-A7-A8-A9		802		
A1-A2-A3-A7-A9-A10-A11-A12-A16-A17-A19-A20-A22-A23-	C.C	601		
A2- A3- A4- A9- A10- A14-A16	F.A	702	**E2:** Conteo incorrecto del número de tapa. 	Lannin (2003)
A1- A3- A4- A8- A9		703		
A4-A5		803		
A1-A3-A4-A8-A10	NM	801		
A2-A4-A8-A11-A12-A16-A17-A22-A23	C.C	601		
A2-A9-A14	F.A	702	**E3** ERROR DE PATRON	

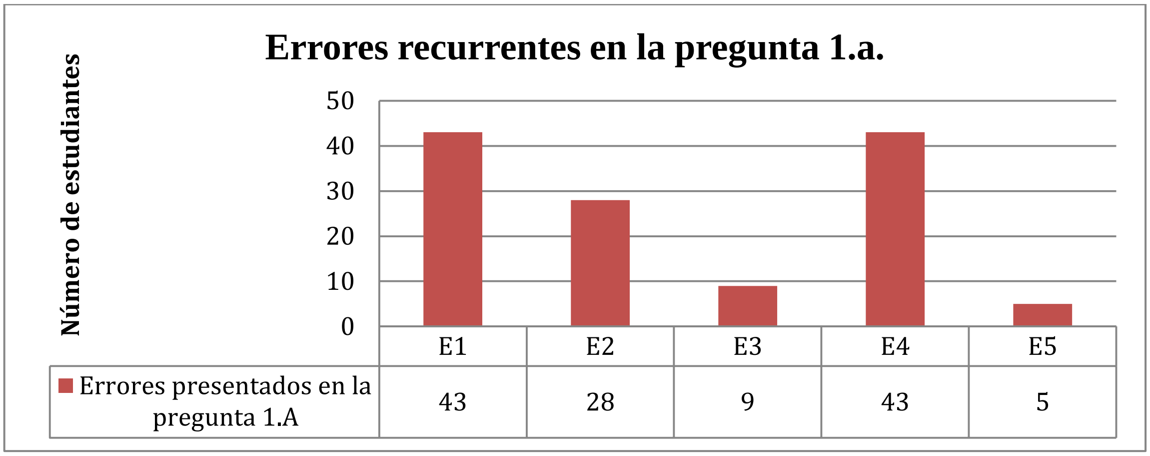
A4		703		Merino (2013)
A4- A5		803		
A1-A4-A8	NM	801		
A1-A2-A3-A6-A8-A9-A10-A11-A12-A13-A14	F.A	702	**E4.** Distribución incorrecta número de tapas (lados de figura)	Engler (2004)
A4-A5-A6-A7- A8-A9- A10		703		
A2- A4-A5-A6- A9-A1O- A12		803		
A1-A4-A6-A7-A8	NM	801		
A5-A7		802		
A1-A3-A8-A10-A11-A12-A16-A19-A20-A21-A23	CC	601		
A6		702	**E5** ERROR DE CASO	Cañadas (2020)
NINGUNO	F.A	703		
A5-A5		803		
A8	NM	801		
NINGUNO		802		
A1-	C.C	601		

El análisis realizado a las respuestas ofrecidas por los escolares en la **solución de la pregunta (1.a.)** evidencian que los procesos de generalización son relevantes desde el punto de vista didáctico para dar inicio del algebra escolar. La situación uno en primera instancia permitía al estudiante distinguir el primer proceso de la generalización a saber: la visión de la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes Masson (1985) Citado en Castellanos 2009). La grafica 1 muestra la distribución de los principales errores en la resolución de la pregunta (1.a.)



Grafica 1: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 1.a.

La gráfica 1. Muestra por instituciones los errores observados en la pregunta 1.a. Se resaltan para la institución Francisco Arango, los errores más comunes son del tipo E1 y E4 los estudiantes no seguían la secuencia figurativa de los marcos y colocaban las tapas de manera errada sin conservar figura (cuadrado) (Ver gráfica 2). En palabras de Engler (2004), al generalizar se deben hacer asociaciones entre las diferentes variables implicadas en el problema, para mantener su esencia y los patrones implícitos. Lo resultados notan dificultades de los escolares al establecer una relación entre la cantidad (tapas), y los lados de la figura.



Grafica 2: Distribución de errores presentados en la pregunta 1.a.

En la gráfica 2, se evidencia que el error que se presentó con mayor frecuencia es el E1 y el E4, donde incurrieron 43 estudiantes en cada error (ver ejemplo figura 10). Debido a la naturaleza de las preguntas y los conceptos implicados, este error tenía mayor probabilidad de aparecer, puesto que la esencia de la pregunta (1.a.) se centraba sobre todo en la secuencia figurativa (figura geométrica cuadrado) conformado de tapas

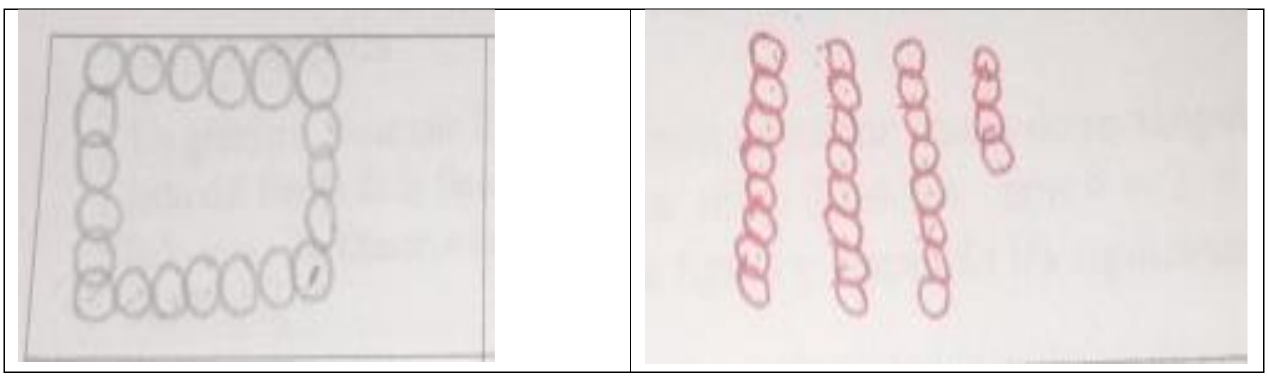


Figura 10: ejemplo errores E1 y E4 en la pregunta 1.a.

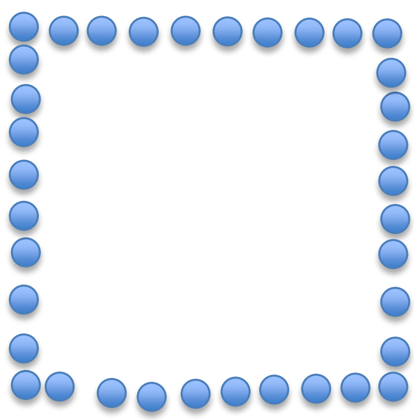
La figura 10, permite apreciar que el estudiante no distribuyó las tapas de manera correcta y además, no conservó la configuración de la figura inicial (Error E1), quedando los lados horizontales con mayor número de tapas que los verticales. Se nota que el conteo procede de la observación crítica, la cual implica análisis, realizar comparaciones y hacer conjeturas. Contar el atributo en cuestión permite construir un modelo (dibujo) para representar la situación.

Lo anterior no significa que los estudiantes en su mayoría no logran realizar los demás procesos que conducen a la generalización que conllevan: la visión de la regularidad, la configuración definitiva, el proceso, y su expresión. Sin embargo, los errores cometidos por los participantes exhiben dificultades en dichos procesos.

3.3.2. Análisis y resultados de errores en la pregunta 1b.

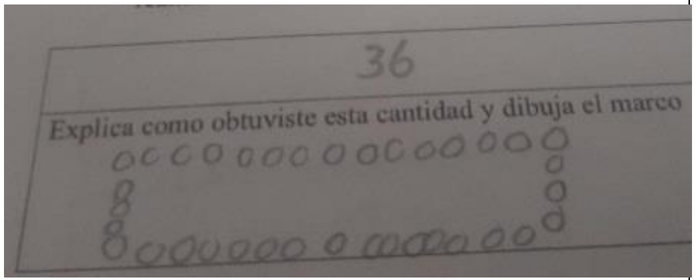
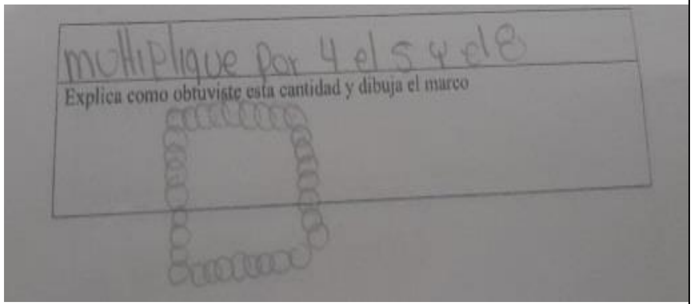
1.b) Mónica quiere regalar a su mama el marco que corresponde a la figura número 9 pero no sabe cuántas tapas necesita para construirlo. ¿Cuál es la cantidad de tapas que requiere Mónica para realizar dicho marco? Explica como obtuviste esta cantidad y dibuja el marco.

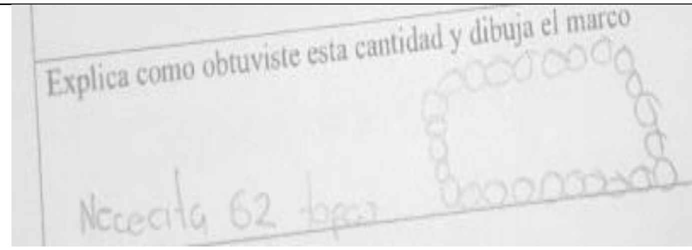
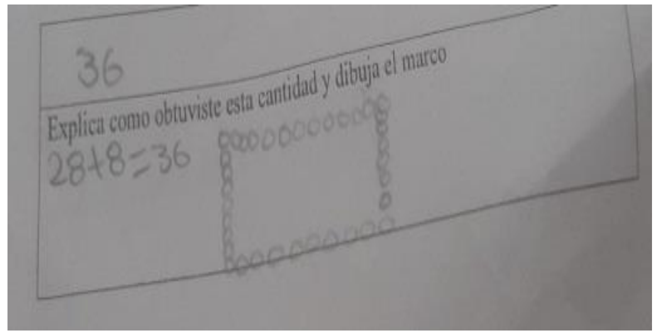
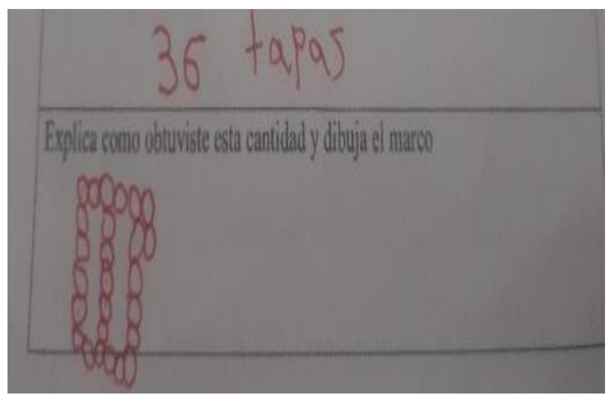
La solución a la pregunta 1.b, se esperaba que los estudiantes encontraran la cantidad de tapas que requiere Mónica para realizar el marco del caso nueve; son 36 tapas. La pregunta 1.b, permitió ver el segundo proceso de la generalización, la descripción (lenguaje natural) es decir, expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido. La descripción (comunicar) favorece la expresión de la regularidad observada o el modelo detectado.

	Para llegar a la solución de este ejercicio podemos seguir el patrón geométrico aumentando una tapa en cada lado del marco para conservar la figura original del cuadrado. De modo que el patrón numérico está relacionado con multiplicar el número del marco por el número cuatro que será la contante de proporcionalidad.

Los estudiantes en su mayoría explican que acuden a estrategias que involucran **el conteo** (contando para cada caso las tapas) en la amplificación del marco (cuadrado). Algunos estudiantes son sinceros manifestando que **encontraron una regla,** donde cada nuevo marco (cuadrado) contenía la cantidad de tapas en un múltiplo de cuatro. Otros explican que van **ensayando y chequeando** una forma que les permita ir construyendo la siguiente figura hasta llegar al caso nueve, es decir **recurriendo a la representación** de los casos. Son pocos los que identifican el aumento (cantidad de tapas) en los lados del cuadrado y dejando las esquinas estáticas es decir usando el **objeto entero** (cuadrado) para encontrar las regularidades. No obstante, se logran identificar varios errores en las respuestas de los escolares. La tabla 4, presentan los tipos de errores que exhibieron los estudiantes en el desarrollo de la pregunta 1b agrupados por institución, grado y estudiante.

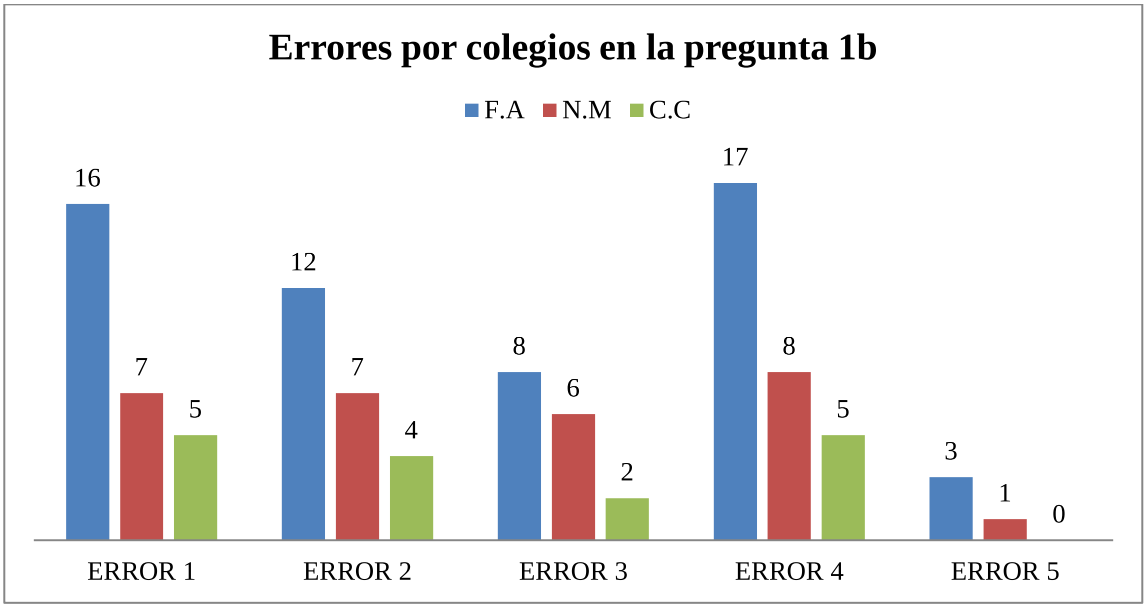
Tabla 4: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.b

Alumno	**Institución**	**Grado-**	**Tipo y descripción del error**	**Autores**
A1-A4-A6-A8-A9-A10-A12-A14-A15	F.A	702	**E1:** No completa figura geométrica de manera correcta.	Masson, 1985 citado en Castellanos y Obando, 2009
A6-A7		703		
A2-A3-A4-A6-A12		803		
A1-A3-A4-A6-A8	NM	801		
A6-A7		802		
A10-A11-A12-A17-A20	C.C	601		
A7-A9-A10-A13-A16.	F.A	702	**E2:** Conteo incorrecto del número de tapa.	Lannin (2003)
A2-A5-A6-A8-A9		703		
A4-A5		803		
A1-A3-A4-A8-A10	NM	801		
A1-A5		802		
A8-A10-A14-A23	C.C	601		
A7-A9-A10-A13-A16	F.A	702	**E3** ERROR DE PATRON	Merino (2013)
A8		703		
A5-A8		803		
A1-A3-A4-A8	NM	801		

A1-A5		802		
A14-A20	C.C	601		
A1-A2-A4-A5-A6-A8-A9-A10-A11-A12-A14-A15.	F.A	702	**E4.** Distribución incorrecta del número (tapas) en los lados de figura 	Engler (2004)
A6-A7-A8-A10		703		
A8		803		
A1-A3-A4-A6-A7-A8-A9-A10	NM	801		
A2-A8		802		
A10-A11-A12-A20-A23	C.C	601		
A6		702	**E5** ERROR DE CASO 	Cañadas (2020)
NINGUN ESTUDIANTE	F.A	703		
A4-A5		803		
A8	NM	801		
NINGUN ESTUDIANTE		802		
NINGUN ESTUDIANTE	C.C	601		

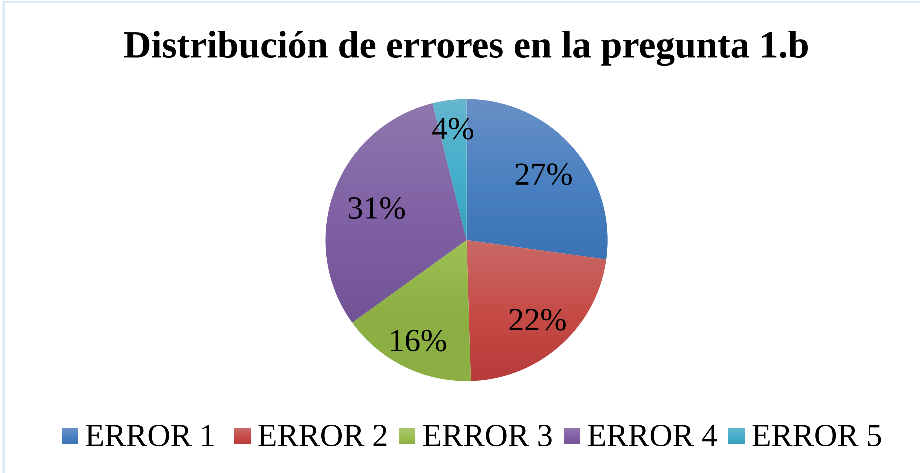
Al igual que en las respuestas de la pregunta (1.a). el error más frecuente para esta cuestión es el E2, son varios los escolares que se equivocan en el conteo. Seguido se ubica el error E4 el cual evidencia dificultades en la abstracción geométrica que da origen a la configuración del objeto de la secuencia que se quiere generalizar.

La gráfica 3, se representan por instituciones los errores más recurrentes por parte de los escolares al dar respuesta a la pregunta (1b), en la gráfica se puede observar la distribución de los errores y la cantidad de estudiantes que presentaron un determinado error por institución:



Grafica 3: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 1.b.

La gráfica 3, exhibe el error más frecuente en la categoría E4 (error de distribución), un total de 30 de los estudiantes de los evaluados incurrieron en este error, 28 estudiantes exhibieron el error E1 (No conservan la estructura de la figura inicial en la secuencia); 16 estudiantes dieron evidencia de fallar en el error E3 (representan de manera equivocada la figura); 4 estudiantes cometieron el error E5 (error de caso) dando respuesta a otro termino que no se solicitaba.



Grafica 4: Distribución de errores presentados en la pregunta 1.B

A partir de la figura 11, podemos notar que los errores se dieron principalmente a la hora de contar y ordenar las tapas para realizar la figura geométrica con los parámetros establecidos el estudiante da una respuesta que es correcta pero que no se esperaba como solución para dicho análisis ya que forma un cuadrado inicial y a partir de esa forma un patrón geométrico con las tapas y va creando las siguientes figuras a partir de la inicial.

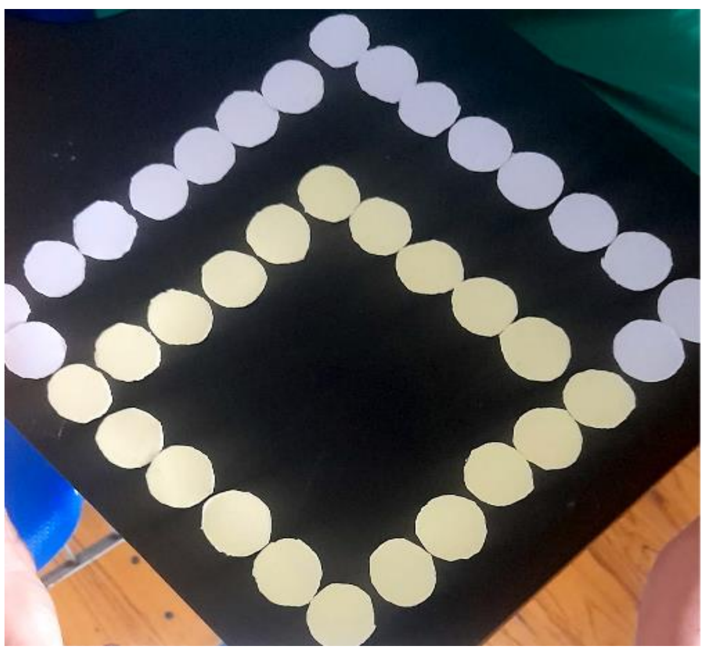


Figura 11. Estrategia de solución usada por un estudiante en la pregunta 1.b.

El análisis de los resultados obtenidos en la pregunta 1.b. muestran que los escolares pueden usar diferentes estrategias para llegar a la solución entre ellas:

- El **Conteo**: haciendo un dibujo para representar la situación del caso nueve, con lo cual, va aumentando una tapa en cada lado del cuadrado para cada uno de los casos (o términos) que transcurren hasta llegar al atributo deseado (caso nueve), para lo cual tendría ocho tapas por cada lado del cuadrado, en total 32 tapas y a esta cantidad añadir las cuatro tapas de las esquinas, para completar un total de 36 tapas que conforman el caso nueve.
- Otros estudiantes pueden acudir a la **Recursión**: construyendo sobre los casos (o términos) previos en la secuencia para llegar al siguiente término hasta encontrar el caso solicitado (caso nueve).
- **Figura entera** (objeto entero): usar una porción de la figura (eje. lado del cuadrado o puntos extremos del cuadrado) como una unidad para construir una unidad más larga usando múltiplos de la unidad.
- **Usar Contexto (casos previos)** partiendo de la observación construyen una regla sobre la base de una relación que es determinada por la situación problema (agrandar el marco), cada nuevo marco (según termino o caso) contiene tapas en múltiplo cuatro.
- **Ensayo- adivinar** una regla sin mirar el origen de esta o porque es pertinente.

3.3.3. Análisis y resultados de errores en la pregunta 1.c.

En esta pregunta se solicitaba a los estudiantes

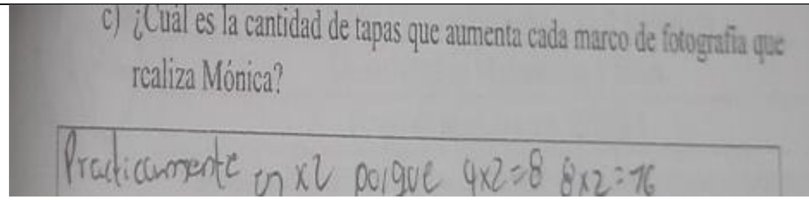
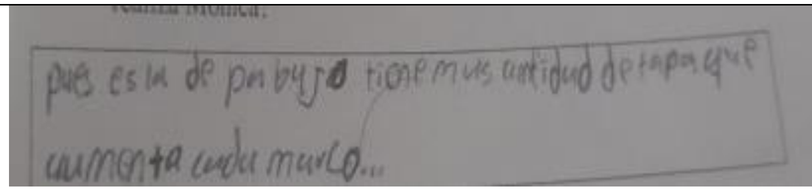
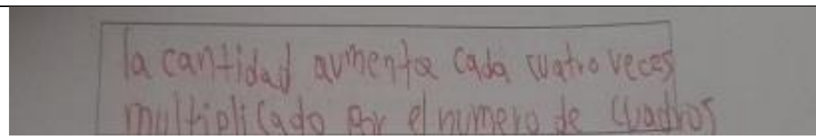
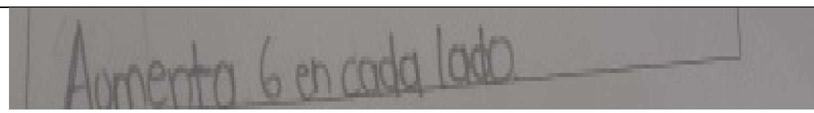
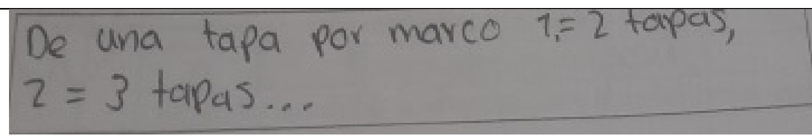
¿Cuál es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica?

La respuesta a la pregunta 1.c. esperaba que los estudiantes exhibieran la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica es cuatro. Esto también podría darse mostrando que se aumenta una tapa en cada lado del marco.

En la Institución Educativa Francisco Arango 15 de los 16 estudiantes (grado 702) respondieron que aumentaban cuatro tapas en cada marco. Por el contrario, el A6 dio una respuesta diferente a la de sus compañeros. En el grado 703, los estudiantes (9) contestaron que aumentaban 4 tapas en cada marco, sin embargo, el estudiante A7 dio como respuesta que aumentaban 6 tapas en cada marco, por último, el A8 respondió que aumenta una tapa si pasa a cada figura.
Una de las posibles es respuestas es que en cada marco aumenten 4 tapas, los estudiantes argumentaban que a medida que el número del marco aumentaba la cantidad de tapas aumentaban de cuatro tapas y lo relacionan con la tabla del cuatro. Por otro lado, algunos estudiantes afirmaban que al aumentar el marco aumentaba una tapa a cada lado.

En la tabla 5, se presentan los errores que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de la pregunta 1c. Las evidencias muestran que los escolares pueden usar diferentes vías en la solución. entendemos que los escolares pueden desarrollar la creatividad para hacer sus cálculos y buscar la mejor opción de acuerdo a sus habilidades; es decir, siguen sus enfoques propios, utilizar sus propias referencias y procedimientos. Los resultados muestran que algunos escolares (de manera erróneas) acuden a estrategias a partir del uso de propiedades de las operaciones aritméticas. Otros escolares usan las propiedades de manera acertada, sin embargo, no logran respuestas correctas, presumimos que obedece a la agilidad, la concentración o la atención implicando en la comprensión, y el sentido otorgado a la respuesta

Tabla 5: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 1C

Errores más recurrentes en la solución de la Pregunta 1.C)		
Tipo de Errores	Evidencia	Descripción del error
E3. **Error de patrón**	 c) ¿Cuál es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica? Practicamente en x2 porque 4x2=8 8x2=16	El estudiante no logra seguir el patrón numérico que existe entre cada marco.
E3. **Error de patrón**	 pues es la de pa bajo tiene mas cantidad de tapa que aumenta cada marco...	El estudiante trata de dar una respuesta argumentando que las tapas aumentan cuando el número del marco también aumenta, pero no identifica el patrón numérico de la secuencia.
E3. **Error de patrón**	 la cantidad aumenta cada cuatro veces multiplicado por el numero de cuadros	En esta respuesta nos damos cuenta que el estudiante no es claro con la respuesta.
E3. **Error de patrón**	 Aumenta 6 en cada lado	El estudiante identifica un patrón equivocado
E3. **Error de patrón**	 De una tapa por marco 1 = 2 tapas, 2 = 3 tapas...	El estudiante reconocer que aumenta una tapa. No logra identificar que la tapa aumenta es en cada lado del marco.

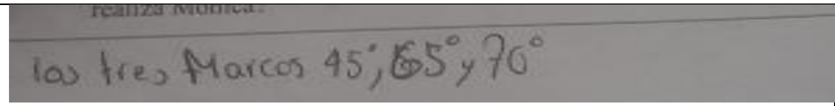
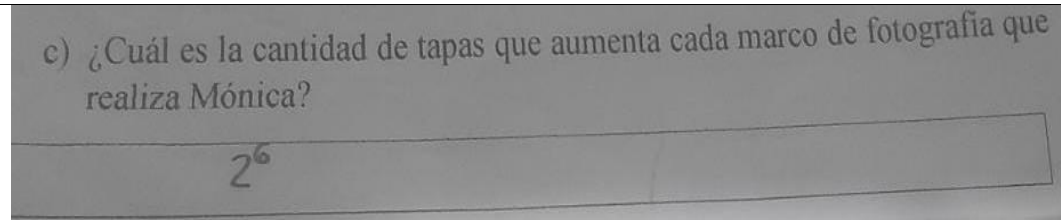
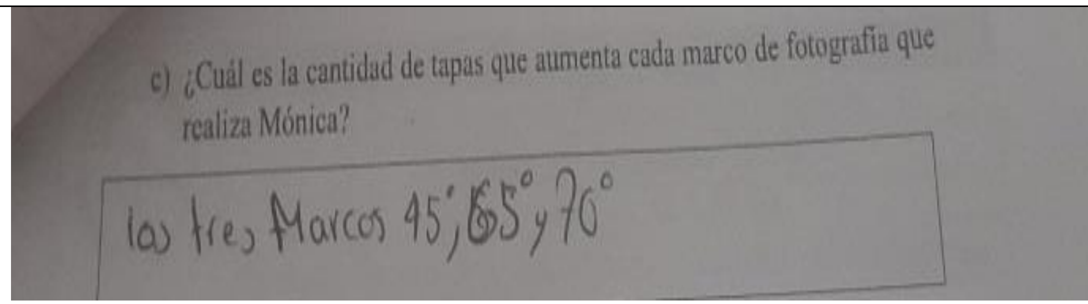
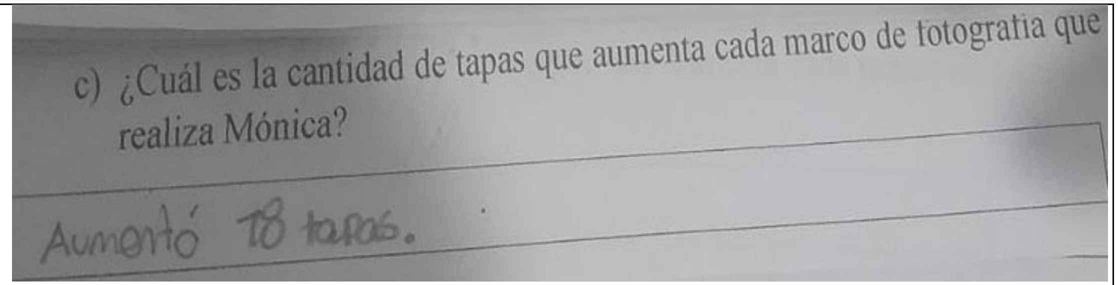
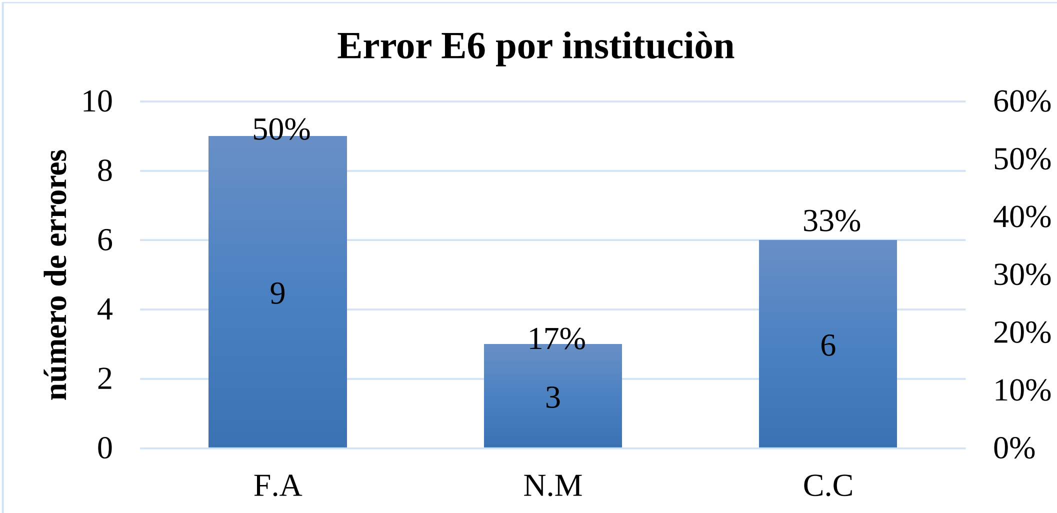
E3. **Error de patrón**		El estudiante identifica una patrón diferente al pedido en el ejercicio.

Tabla 6: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.C

Alumno	Institución	Grado	Tipo y descripción del error (Evidencia) **E3**
A6	F.A	702	
A7-A8		703	
A1-A3-A5-A6-A7-A9		803	
A1-A4	N.M	801	
A1		802	

A2-A7- A11-A20- A21-A23	C.C	601	 c) ¿Cuál es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica? Aumentó 18 tapas.

La grafica 5 muestra los errores que se presentaron en la pregunta 1c, así como la distribución de errores por estudiantes que presentaron en cada una de las Instituciones del estudio



Grafica 5: Errores por instituciones presentados en la pregunta 1.c.

En la pregunta 1C, 18 estudiantes presentaron el error de patrón (E3) no contaron de manera correcta la cantidad de tapas que aumentaba de una figura con respecto a la anterior para identificar el patrón de la secuencia. El 50% de los estudiantes de la institución FA cometieron el error

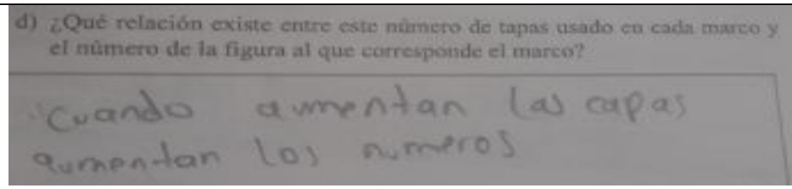
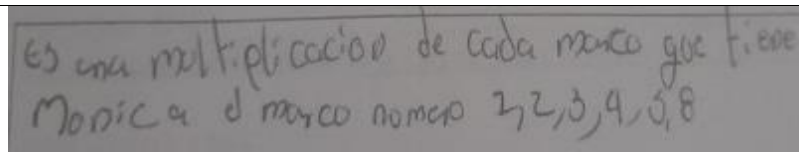
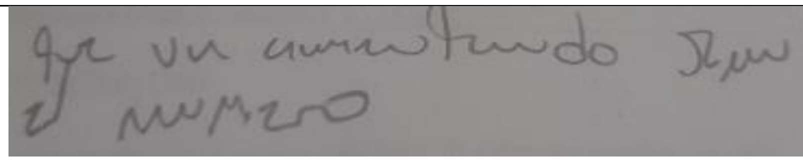
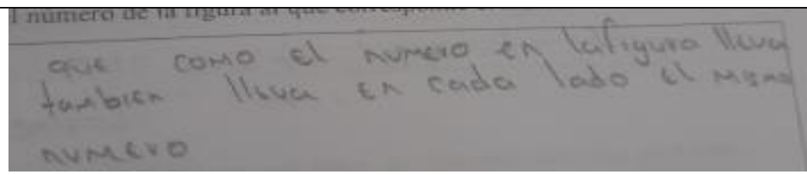
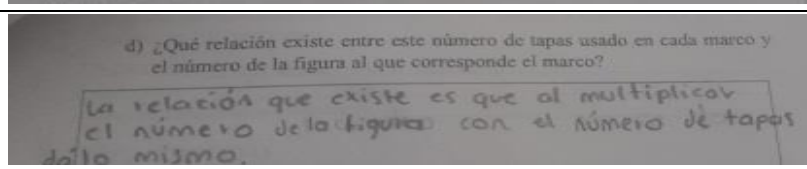
3.3.4. Análisis y resultados de errores en la pregunta 1.d.

¿Qué relación existe entre este número de tapas usado en cada marco y el número de la figura al que corresponde el marco?

La respuesta a la pregunta 1.d. esperaba que los estudiantes manifestaran una relación que existe entre el número de tapas usadas y el número de la figura es de 4; el número de tapas usadas es 4 veces el número de la figura.

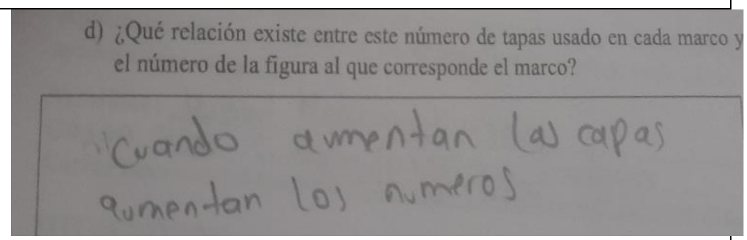
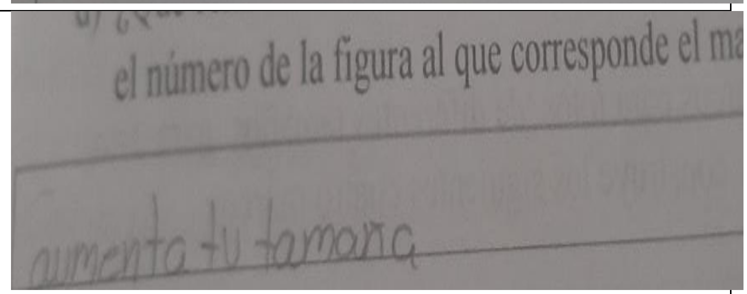
En la tabla 7, se presentan los errores de estudiantes en el desarrollo de la pregunta 1d,

Tabla 7: Errores más recurrentes en la solución de la Pregunta 1.d.

Errores más recurrentes en la solución de la Pregunta 1.d.		
Tipo de Errores	Evidencia	Descripción del error
E3. **Error de patrón**	 d) ¿Qué relación existe entre este número de tapas usado en cada marco y el número de la figura al que corresponde el marco? Cuando aumentan las capas aumentan los numeros	El estudiante solo reconoce que aumenta el número tapas cuando aumenta el marco.
E3. **Error de patrón**	 es una multiplicacion de cada marco que tiene Monica el marco nomero 2,2,3,4,5,8	Expresa las cantidades amplificadas, pero no reconoce cual es la relación que existe entre el número de tapas con el número del marco.
E3. **Error de patrón**	 que va aumentando según el numero	El estudiante reconoce que cada vez se necesitan más tapas para el marco siguiente, pero no reconoce la relación existente entre las variables.
E3. **Error de patrón**	 l número de la figura al que correspo... que como el numero en la figura lleva tambien lleva en cada lado el mismo numero	El estudiante logra identificar una relación incorrecta entre el número del marco y la cantidad de tapas del lado del cuadrado.
E3. **Error de patrón**	 d) ¿Qué relación existe entre este número de tapas usado en cada marco y el número de la figura al que corresponde el marco? La relación que existe es que al multiplicar el número de la figura con el número de tapas da lo mismo.	Según la imagen, el alumno menciona que al multiplicar el número de la figura con el número de tapas da lo mismo, es una afirmación incoherente.

La tabla 8, muestra que 21 estudiantes en total cometieron el error 3 (E3); la institución que más cometió el error fue el Narciso Matus (N.M), el grado que presentó mayor frecuencia en este error fue el grado 601 de la institución educativa Cofrem, este resultado puede ser atribuido a que los estudiantes de sexto grado no han tenido instrucción con procesos de generalización y uso de variables para representar alguna sucesión por medio de una ecuación.

Tabla 8: Distribución de errores por institución, escolares y grado en pregunta 1.d.

<table>
<tr><th>Alumno</th><th>institución</th><th>Grado</th><th>Tipo y evidencia del error</th></tr>
<tr><td>A7</td><td rowspan="3">F.A</td><td>702</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>A6-A8</td><td>703</td></tr>
<tr><td>A1-A5-A8-A10</td><td>803</td></tr>
<tr><td>A1-A4-A8</td><td rowspan="2">N.A</td><td>801</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>A3-A4-A5-A6-A8</td><td>802</td></tr>
<tr><td>A11-A12-A14-A18-A19-A20</td><td>C.C</td><td>601</td></tr>
</table>

El único error presentado en la pregunta 1d fue el E3 con 21 estudiantes, este error se da cuando el estudiante intenta dar respuesta a la pregunta planteada, sin embargo, no encuentra el método que lo lleva a ella, esto se debe a que el concepto de relación y/o función es nuevo para ellos y por tanto no sabían de qué forma debían responder.

Grafica 6: Errores por institución presentados en la pregunta 1d.

3.3.5. Análisis y resultados de errores en la pregunta 1.e.

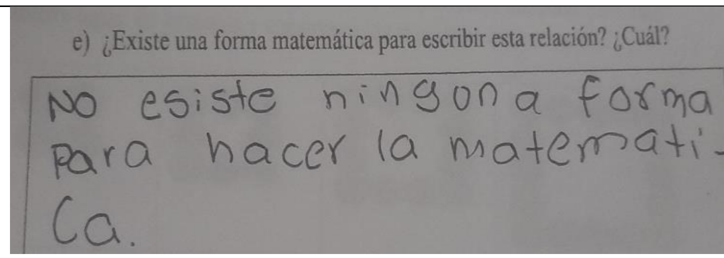
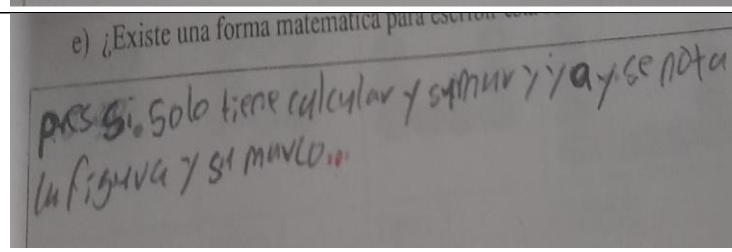
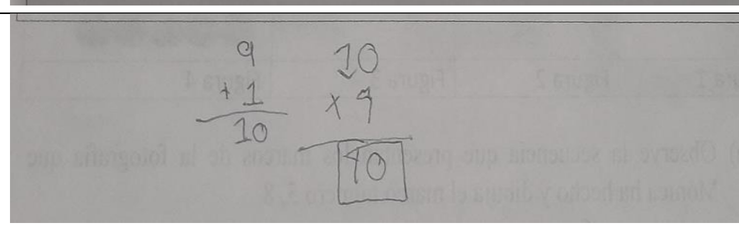
¿Existe una forma matemática para escribir esta relación? ¿Cuál?

La solución a la pregunta 1.e, se corresponde con una afirmación (SI) para manifestar la existencia de una expresión algebraica, lo cual se traduce en la forma.

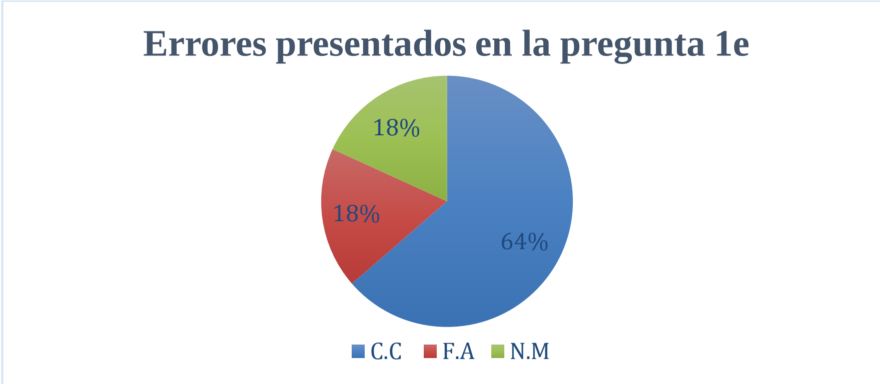
*Número de tapas en el cuadro = 4 * número de la figura.*
Otra opción la suma de los 4 lados y las respectivas tapas que había en cada lado.

La tabla 9, presentan los errores que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de la pregunta 1e,

Tabla 9: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 1E

Alumno	institución	Grado	Tipo y evidencia del error
A1-A11-A12	F.A	702	
		703	
A5		803	
A5-A8	N.A	801	
A1-A3		802	
A3-A4-A5-A9-A11-A13-A14-A18-A19-A20-A22	C.C	601	

En la pregunta 1e, gran parte de los estudiantes solo contestaron que se debía multiplicar por 4, por otro lado, muchos dejaron en blanco o respondieron que no sabían (gráfica 7). Se esperaba que los estudiantes lograran encontrar una ecuación donde una constante multiplicara a una variable, el valor de dicha constate es 4. Los estudiantes de la institución Educativa Cofrem fueron los que más cometieron dicho error.



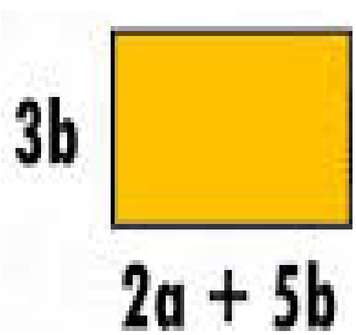
Grafica 7: Errores presentados en la pregunta 1e.

En la pregunta 1e. se presentó el error E8 en 22 estudiantes el cual, era un ejercicio de modelación y por tanto requiere que el estudiante identifique las variables que se presentan y luego la relación que hay entre ellas. Como podemos apreciar en la Grafica 7, se presentaron errores a la hora de identificar las variables y además tampoco se estableció de manera correcta la relación que hay entre ellas. Para Socas (2011) estos errores pueden surgir de la dificultad que tienen los estudiantes para entender las especificidades de los procesos matemáticos o problemas para identificar con claridad los que se le solicitaba en el ejercicio.

3.3.6. Análisis y resultados de errores en la pregunta 2a.

¿Cuál es el área de la finca?

La respuesta a la pregunta 2.a, se concreta cuando el estudiante utiliza la noción de área y establece la multiplicación entre las dos dimensiones de la finca y teniendo en cuenta que las dimensiones están representadas a través de dos expresiones algebraicas la respuesta seria:



El área de la finca es el resultado de multiplicar el largo por el ancho:

Área = (3b) (2a + 5b) Como b=2

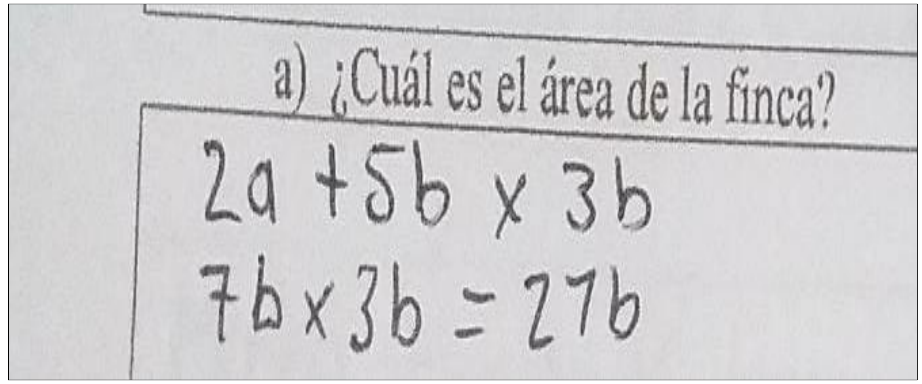
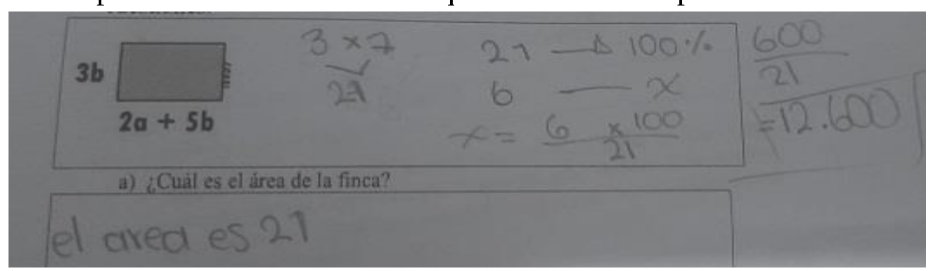
Área = 6ab + 15b^2

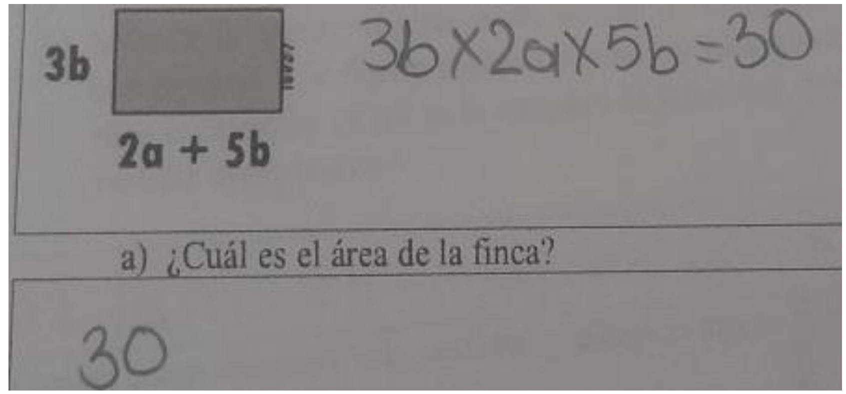
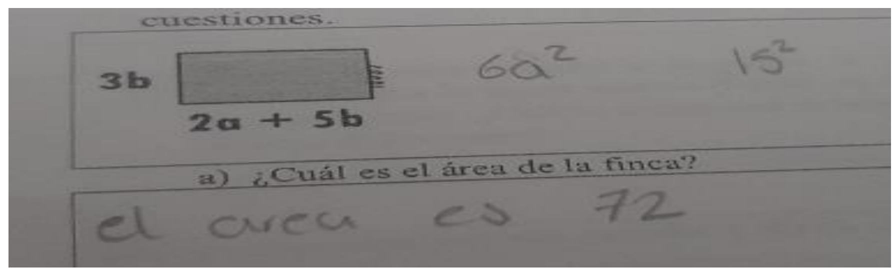
Área=6(2)a+15(2)^2

Área=12a + 60

La tabla 10, presentan algunos errores de los estudiantes en la pregunta (2.a.), se puede observar que en su mayoría son asociados a las dificultades propias de la abstracción algebraica.

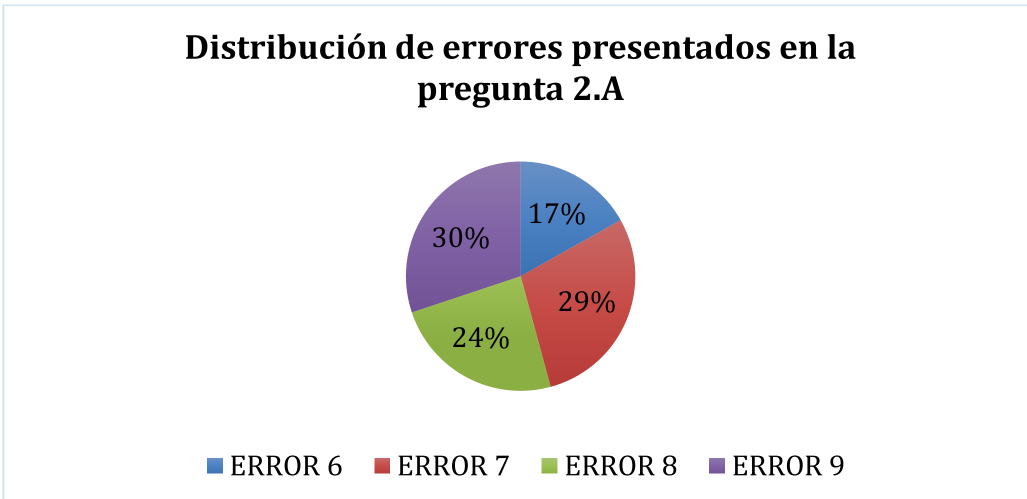
Tabla 10: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 2a

Alumno	Institución	Grado-	Tipo y descripción del error
No presentan el error	F.A	702	E6 Error de tratamiento operativo o procedimental 
A1-A2-A3-A4-A5		703	
A1-A2-A6-A8-A11-A12		803	
A2	NM	801	
A3-A6		802	
A3-A7-A9-A10	F.A	702	E7: Imposibilidad o tratamiento equivocado entre representaciones 
A6-A7-A9-A10		703	
A5-A9		803	
A1-A3-A4-A5-A6-A7-A8-A9-A10	NM	801	

A1-A4-A5-A7-A8		802	
A7	F.A	702	E8 Error en la modelación matemática 
A5-A6-A7-A9-A10		703	
A5-A12		803	
A3-A5-A6-A7-A8-A10	NM	801	
A1-A3-A4-A5-A7-A8		802	
NO HAY ERROR	F.A	702	E9. Error de tratamiento aritmético 
A1-A3-A5-A6-A7-A9-A10		703	
A1-A2-A5-A6-A8-A11-A12		803	
A2-A3-A5-A6-A7-A10	NM	801	
A1-A3-A4-A5-A7		802	

El estudiante se apresura por encontrar un valor para la expresión algebraica, en este proceso se cometen errores de uso de las propiedades aritméticas y las operaciones con términos semejantes. Hay que aclarar que para esta pregunta no se tuvo en cuenta a los estudiantes de grado 601 de la institución Educativa Cofrem, debido a que al momento de analizar los datos será más pertinente trabajar con séptimo y octavo, ya que se requieren operaciones con variables. A continuación, se presenta de forma gráfica el consolidado de errores de la pregunta 2a.

En la pregunta 2a se presentó el E6 en 14 estudiantes, el E7 en 24 estudiantes, el E8 en 20 y el E9 en 25 estudiantes. Esta pregunta involucraba el concepto de área y además se debe hacer operaciones aritméticas y algebraicas. El colegio con mayor número de errores en esta pregunta fue la Institución Educativa Francisco Arango.



Grafica 8: Distribución de errores presentados en la pregunta 2a.

En la figura 12 podemos apreciar un E6 debido a que el estudiante en un principio plantea bien la solución, pero después realiza la suma de dos variables distintas: suma (2a + 5b) obteniendo como resultado 7b lo cual es un error debido a que no podemos sumar dos variables distintas y posteriormente realiza la multiplicación (7b * 3b) igual a 21b, el producto de los coeficientes es correcto, pero olvida la suma de los exponentes de las variables al multiplicar. Según la clasificación de errores del presente estudio se trata de un error de tratamiento operativo o procedimental y se da debido al uso inadecuado de las reglas matemáticas o a procesos algorítmicos fallidos. Según Engler estos son errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.

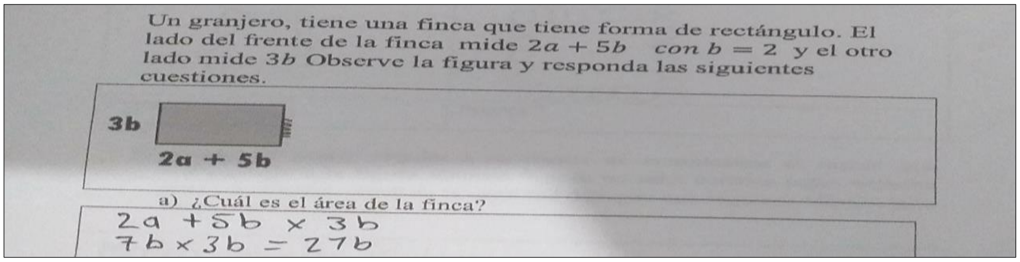


Figura 12: ejemplo de errores E6 en la pregunta

En la figura 13 se observa un E7 debido a que el estudiante no logra plantear una solución que lo lleve a la modelación, a pesar de intentarlo de diversas maneras, según (Ruano, Socas y Palarea, 2008). estos errores se dan debido a conflictos y problemas de aprendizaje del estudiante, en resumen, el estudiante no tiene claro los pasos a seguir para la resolución del problema, además Socas afirma que estos errores se pueden dar debido a la complejidad simbólica que acompaña el álgebra escolar.

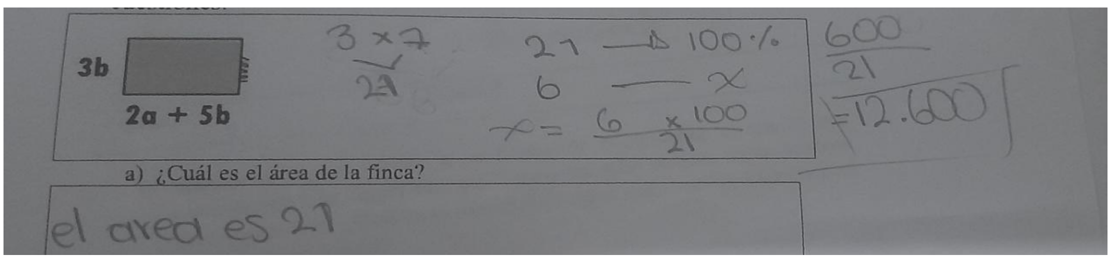


Figura 13: ejemplo de errores E7 en la pregunta

3.3.7. Análisis y resultados de errores en la pregunta 2. b

¿Cuál es el perímetro de la finca?

La respuesta a la pregunta 2.b, se obtiene cuando el estudiante utiliza la noción de perímetro y plantea las sumas de las dos expresiones algebraicas que representan las dimensiones de la finca:

El perímetro es el resultado de sumar los cuatro lados del rectángulo:

Perímetro = 3b + 3b + 2a + 5b + 2a + 5b

Perímetro = 6b + 4a + 10b

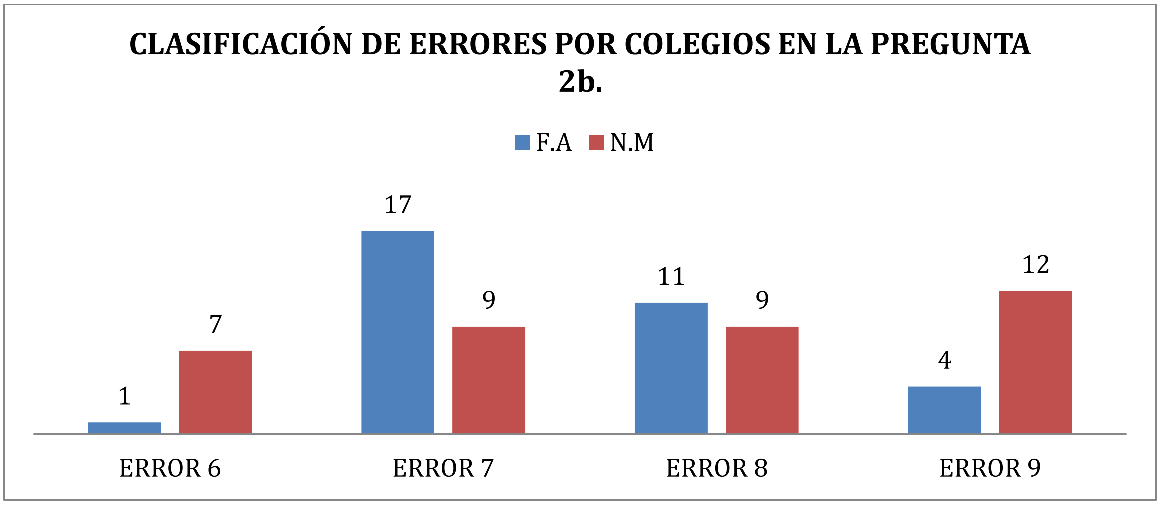
Perímetro = 16b + 4a como b=2 entonces

Perímetro =16(2) +4a

Perímetro =32+4a

La tabla 11, presenta errores que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de la pregunta 2.b, dicha tabla está clasificada por errores y por institución educativa.

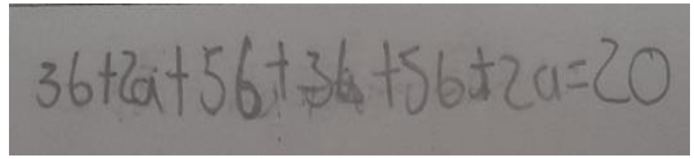
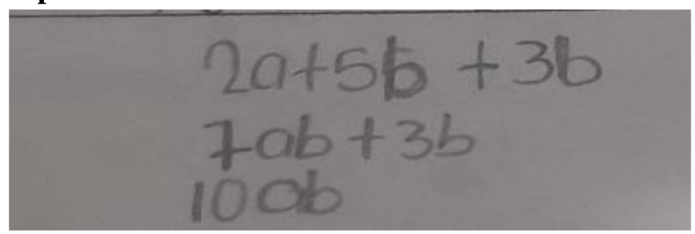
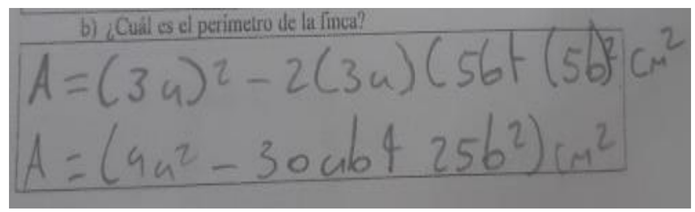
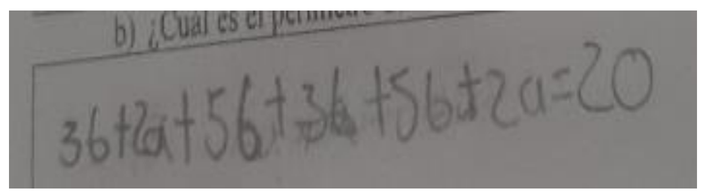
Revisando la gráfica 9, nos damos cuenta que el error 6 se presentó más en la institución N.M y el grado con mayor E6 fue 802. Para el error 7 el colegio que presento con mayor frecuencia dicho error fue la institución F.R y el grado donde se cometió más el error es 703. El error 8 también se cometió con mayor porcentaje en la institución F.R y también el en grado 703. Por último, en el colegio donde más hubo error 8 fue en la institución N.M En el grado 801.

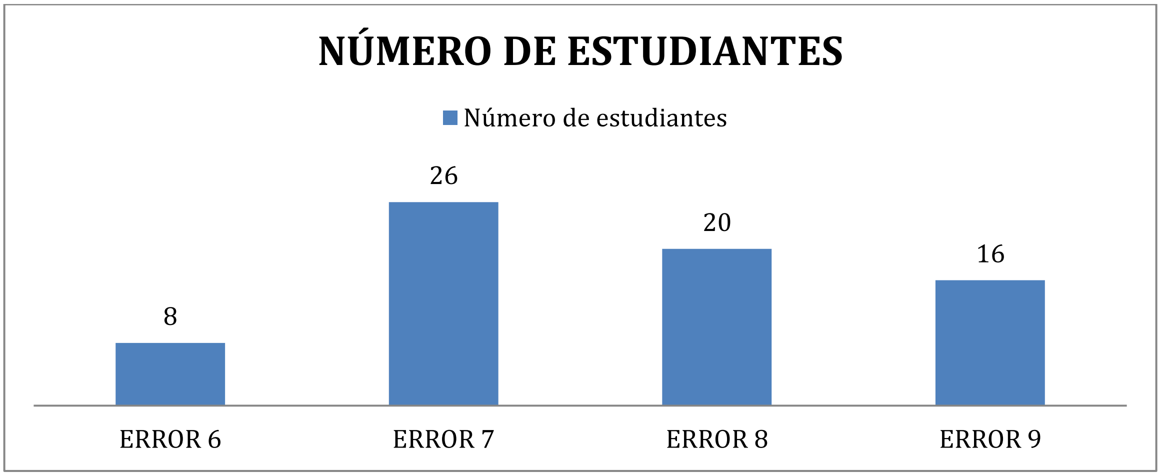


Grafica 9: Distribución de errores por instituciones presentados en la pregunta 2.B

La gráfica 10, muestra que el error más común en esta pregunta es el error de **Imposibilidad o tratamiento equivocado entre representaciones (E7)** y el colegio que mayor cometió el este error fue la institución educativa Francisco Arango. A su vez, también fue la institución que tuvo mayor número de errores en esta pregunta debido a que los estudiantes no tenían muy claro el concepto de área y perímetro. Estos resultados pueden ser una consecuencia del método de estudio que se llevó a cabo durante la pandemia.

Tabla 11: Errores y evidencia encontrados en la pregunta 2b

Alumno	Institución	Grado-	Tipo y descripción del error
No hay error 6	F.A	702	**E6 Error de tratamiento operativo o procedimental**
No hay error 6		703	
A5		803	
A3-A6-	NM	801	
A1-A2-A3-A4-A5		802	
A3-A7-A9-A10	F.A	702	**E7: Imposibilidad o tratamiento equivocado entre representaciones**
A2-A4-A5-A6-A7-A8-A10		703	
A2-A5-A8-A9-A11-A12		803	
A1-A4 –A5-A8-A9	NM	801	
A6-A7-A8-A9		802	
A7	F.A	702	**E8 Error en la modelación matemática**
A2-A4-A5-A6-A7-A10-		703	
A2 –A8-A9-A11		803	
A1-A4-A5-A8-A9-	NM	801	
A6-A7-A8-A9		802	
NO HAY ERROR	F.A	702	**E9. Error de tratamiento aritmético**
NO HAY ERROR		703	
A2-A5-A9-A11		803	
A1-A2-A3-A4-A5-A6-A9-	NM	801	
A1-A2-A3-A4-A5		802	



Grafica 10: Distribución de errores presentados en la pregunta 2.B

En la pregunta 2b se evidencia el E6 en 8 estudiantes, el E7 en 26, el E8 en 20 y el E9 en 16 estudiantes. Esta pregunta involucraba el concepto de perímetro y además se debía utilizar la suma de monomios. En la figura 14. se puede apreciar un E6 debido a que no toma en cuenta las variables a la hora de realizar las sumas; además, planteo de manera correcta la función para calcular el perímetro, pero no tiene la noción de variables y de cuando un término es semejante. Según Engler (1989) estos son errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros y además ligado a deficiencias de conocimientos sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización del ejercicio.

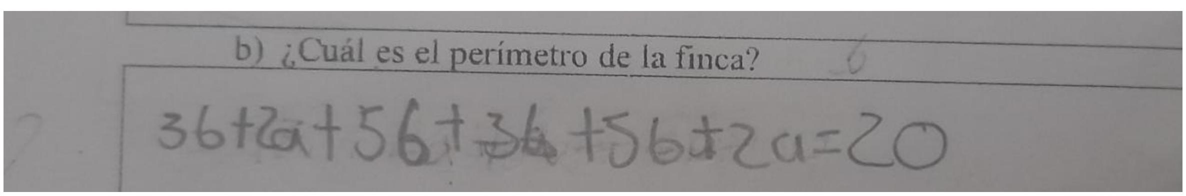


Figura 14: Error E6 en la pregunta 2b

3.4. TRAYECTORIA DIDACTICA MEDIADA POR PUZLE ALGEBRAICO.

En este apartado se da respuesta al segundo objetivo del proyecto, el cual busca articular los referentes teóricos, desde las perspectivas didáctica, curricular, y matemática, en una trayectoria de enseñanza que involucre actividades con el Puzle Algebraico para el estudio de la factorización de polinomios de segundo grado.

3.4.1. Elementos didácticos considerados en la trayectoria didáctica

La trayectoria didáctica se entiende aquí como un plan de actuación del profesor, es la fase pre activa, donde se explicita toda acción de enseñanza y aprendizaje (Marmolejo et al., 2012). La trayectoria didáctica es la guía que permita al profesor superar los tradicionales métodos de enseñanza, y de esta manera logra la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes a partir de las actividades y tareas que la constituyen en ella se diferencian los momentos, los roles, la organización del aula, las actividades, los materiales didácticos y los referentes teóricos para la actividad

La trayectoria didáctica, describe la instrucción y otorga importancia a los recursos, en particular para este estudio "el Puzle algebraico", el diseño de actividades conforma una secuencia (trayecto) de instrucción. Según Rico y Moreno (2017) se atiende a las variables de tarea (contenido, complejidad y situaciones); componentes de la tarea (meta, formulación, temporización) y funciones de la tarea (diagnóstico, auto/regulación, síntesis). Se considera que la planificación de la instrucción va más allá de seleccionar o diseñar una tarea, involucra aspectos del significado de los TCP en la relación estudiante, profesor, saber y entorno.

El puzle es un material que viene siendo usado desde los años noventa, algunos países incluyen este, como un medio de enseñanza que hace parte de del currículo de matemáticas. El propósito de la enseñanza con este medio se centra en buscar la representación semiótica autosuficiente (Socas, 2012). Principalmente, facilitando la enseñanza de: expresiones numéricas positivas y negativas; Expresiones algebraicas elementales; ecuaciones lineales con una incógnita; sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Algunas investigaciones lo han usado en el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita; dado que, facilita la representación del valor numérico de una expresión algebraica y la resolución. Una revisión a libros de texto colombianos, dan cuenta de su incorporación (Castellanos, Obando, 2009).

El Puzle Algebraico es un instrumento de mediación semiótica que, utilizado por el docente a través de una intervención didáctica, de manera adecuada puede facilitar el entendimiento de los contenidos matemáticos por parte de los escolares (González, 2016), actúa como un mediador entre la reorganización de conceptos y la construcción de estructuras cognitivas. De esta manera, el Puzle Algebraico es un recurso importante para la enseñanza del álgebra, contribuye significativamente en el proceso que conduce de lo tangible a lo abstracto; el puzle busca mediar la transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, intentar eliminar las dificultades que usualmente encuentran los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del álgebra. Los aspectos anteriores son importantes en términos didácticos, pues brinda herramientas para conectar aritmética y álgebra; el uso del lenguaje horizontal. En síntesis, busca usar nuevas mediaciones para entender relaciones matemáticas, sino también nuevos hábitos mentales, nuevas formas de pensar matemáticamente.

Tabla 12: Planeación de clase

ETAPA	TIEMPO	ACTIVIDADES	ESTRATEGIAS	RECURSOS	PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN
INCIO	5 Minutos	**Protocolarias** (Saludo, llamado a lista, pautas de convivencia en el aula)		Guía inicial Puzle Pruebas	
D E S A R R O L L O	5 minutos	Ideas o conceptos previos (Operaciones algebraicas)	Actividades exploratorias, lluvia de ideas	Pruebas diagnóstico Guías -talleres	Qué errores exhiben los estudiantes en el tratamiento de operaciones algebraicas?
	15 minutos 15 minutos	**Instrucción** Presentación conceptual (suma y resta de expresiones algebraicas, uso del puzle algebraico) **Motivación** Juegos interactivos con el puzle **Conceptualización** Mediante el puzle y con algunos ejemplos se induce al concepto. **Teorización** Especificación de reglas, propiedades, notación y representaciones en las operaciones con expresiones algebraicas	Puzle algebraico. diferentes representaciones, ejercicios interactivos, olución de problemas en contexto Clase magistral, Trabajos individuales Trabajos grupales	Video Beam, Fotocopia, Propuesta idáctica (Guías)	¿Qué errores se lograron superar a partir de las estrategias implementadas con el uso del puzle algebraico?

		Aplicación Contextos de uso y aplicación **Evaluación** Se realizan ejercicios con el puzle			
CIERE RE	10 Minutos	**Síntesis conceptual** Tarea extra clase			Cuáles son las estrategias de solución que usan los estudiantes?

3.4.2. Uso del puzle durante la instrucción

Se da inicio a la clase con el respetivo saludo y el llamado a lista, seguidamente, se hacen algunas preguntas relacionadas con el puzle, para conocer los conceptos previos al tema y a la estrategia empleada, las respuestas de los estudiantes se anotarán en la parte del tablero para más adelante hacer la retroalimentación de lo que ya se sabía con lo que se explicó. Seguidamente se explica el tema operaciones algebraicas en el tablero y luego se muestra la estrategia explicándoles a los estudiantes que también se pueden resolver estas operaciones algebraicas usando los rectángulos y cuadrados. Una vez se haya explicado el tema usando el puzle se propones ejercicios para evaluar que tan eficiente fue el uso de dicha estrategia para abordar las operaciones algebraicas. Por último, se realiza la retroalimentación del tema y se da fin a la clase.

Tabla 13: Metodología y uso del puzle

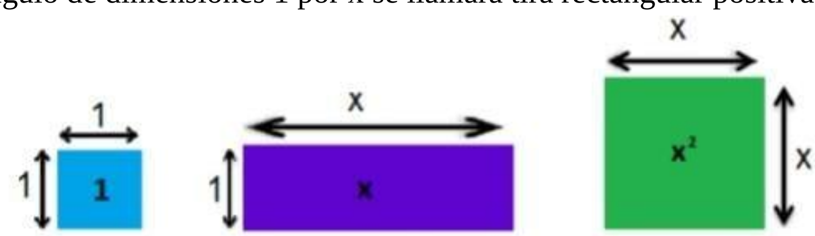
El puzle algebraico es una colección de figuras geométricas planas, que se forman con cuadrados y rectángulos respectivamente. Los juntamos para realizar operaciones algebraicas como lo son la suma, la resta, la multiplicación y la división de polinomios de primer y segundo grado.

La representación geométrica de las figuras es la siguiente:

Un cuadrado de dimensiones 1x1, el cual se llamará, unidad positiva.

Un cuadrado de dimensiones x por, el cual se llamará unidad cuadrada positiva.

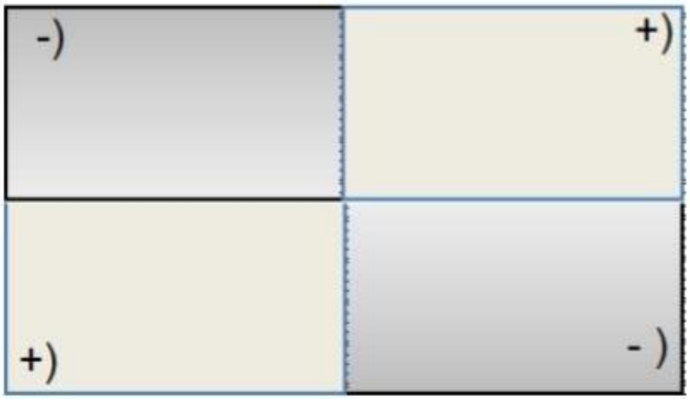
Un rectángulo de dimensiones 1 por x se llamará tira rectangular positiva.

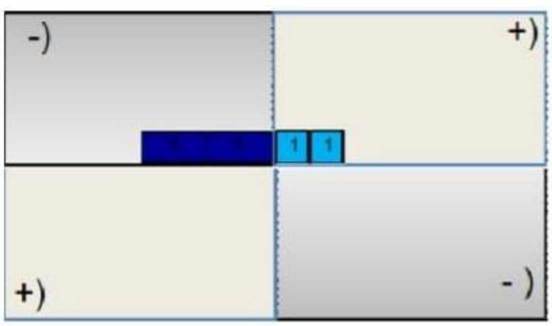


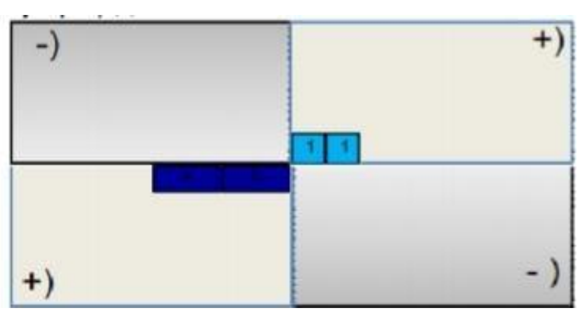
Tenemos que realizar operaciones algebraicas con el puzle, las unidades `positivas en forma geométrica fueron descritas, pero necesitamos también geométricas negativas para complementar esta forma de resolver ecuaciones algebraicas.

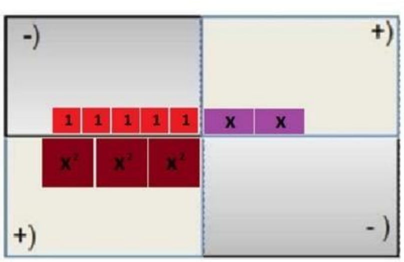
Ubicación en el plano o caja

Para ubicar los polinomios en el plano debemos primero dividirlo en los cuatro cuadrantes, dos positivos y dos negativos, de la siguiente manera

<table>
<tr><td colspan="2">


Ya tenemos los cuadrantes en la tabla. Ahora podemos ubicar los polinomios en la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c $\in Z$ es decir polinomios de segundo grado en una sola variable con coeficientes entero. La escritura de polinomios se diferencia según la operación que se pretende realizar en el tablero.
Los signos de los cuadrantes permiten representar los signos de los coeficientes, mientras que la cantidad de fichas dispuesta en el tablero representa justamente el valor absoluto del coeficiente y el área de la ficha representa la parte literal.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación de expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td>
$p(x) = -2x + 2$


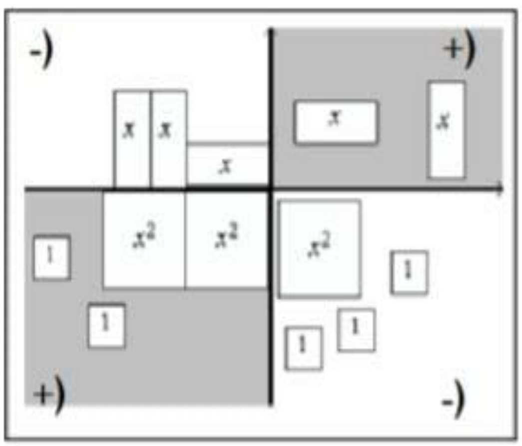
En la tabla ubicamos en la línea horizontal dos unidades en el cuadrante negativo y dos unidades en el cuadrante positivo
</td><td>
$p(x) = 2x + 2$


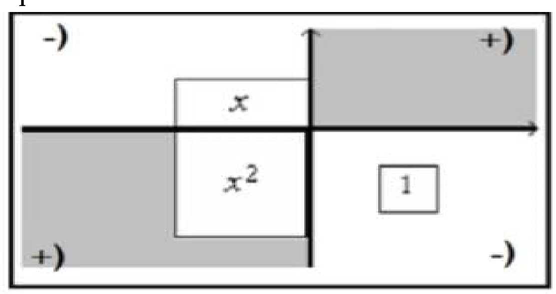
En la tabla ubicamos en la línea horizontal dos unidades en el tercer cuadrante y dos unidades en el primer cuadrante
</td></tr>
<tr><td>
$p(x) = 3x^2 + 2x - 5$


</td><td>
Ubicamos en el primer cuadrante dos rectángulos de área : x
Ubicamos en el segundo cuadrante cinco cuadrados de área: 1.
Ubicamos en el tercer cuadrante tres cuadrados de área: x^2.
</td></tr>
</table>

3.4.3. Suma de expresiones algebraicas por medio del puzle

Para calcular $p(x) + q(x)$ se recomienda utilizar los cuadrantes segundo y tercero para escribir sobre ellos el sumando $p(x)$, mientras que $q(x)$ se escriben en el primero y cuarto cuadrante con el fin de facilitar la lectura la suma, luego se retiran las fichas que producen cero.

<table>
<tr><td colspan="2">De acuerdo con lo anterior la disposición, realizaremos la siguiente suma en el plano cartesiano $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ con $q(x) = -x^2 + 2x + 3$</td></tr>
<tr><td>

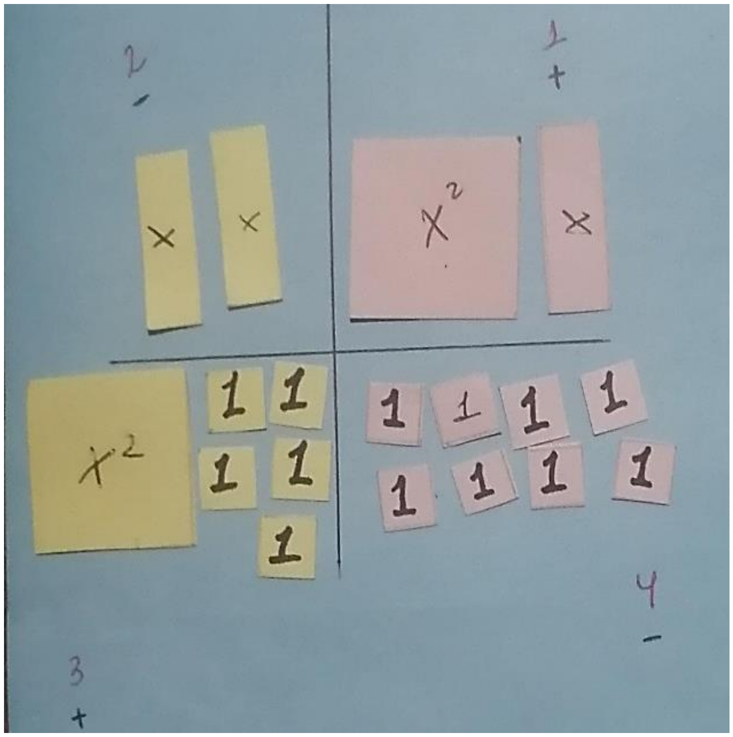
retirar las fichas que resultan cero</td><td>Una vez retirada las parejas de fichas que equivalen a cero. Resulta:


Se puede observar, el resultado que corresponde al polinomio $x^2 - x - 1$ es decir $(\mathbf{2x^2 - 3x + 2})$+ $(\mathbf{2x^2 - 3x + 2}) = \mathbf{x^2 - x - 1}$</td></tr>
</table>

Los ejercicios relacionados con la suma de polinomios en el puzle se encuentran el anexo 12 y la respectiva solución queda en el Anexo 13.

A continuación, se presenta un ejercicio en el cual haremos uso del puzle para dar solución:

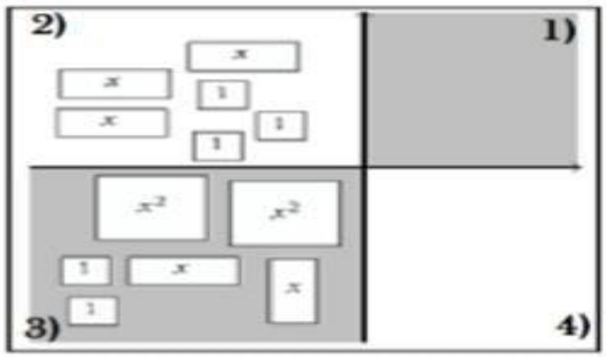
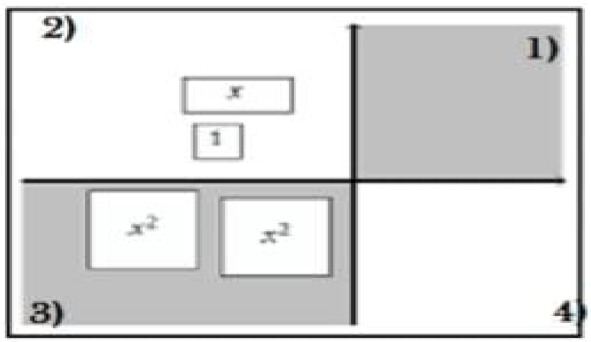
$$(x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 3x - 8)$$



3.4.4. Sustracción de expresiones algebraicas

La diferencia $p(x) - q(x)$ se obtiene de manera similar a la suma las fichas del sustraendo, se ubican en los cuadrantes primero y cuarto, y se trasladan a los cuadrantes segundo y tercero respectivamente, la lectura de la solución, se obtiene eliminando las parejas de ceros.

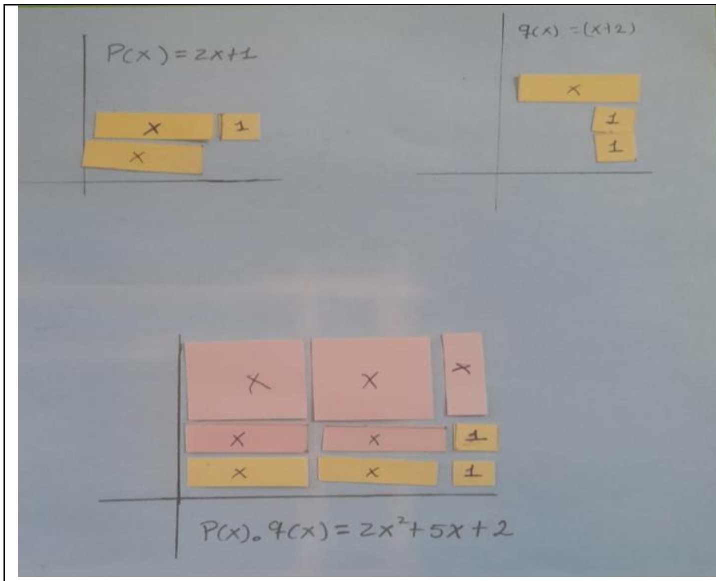
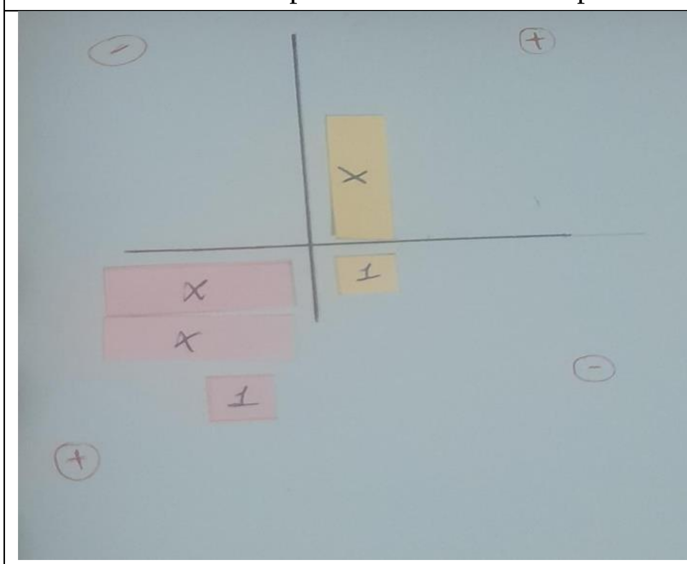
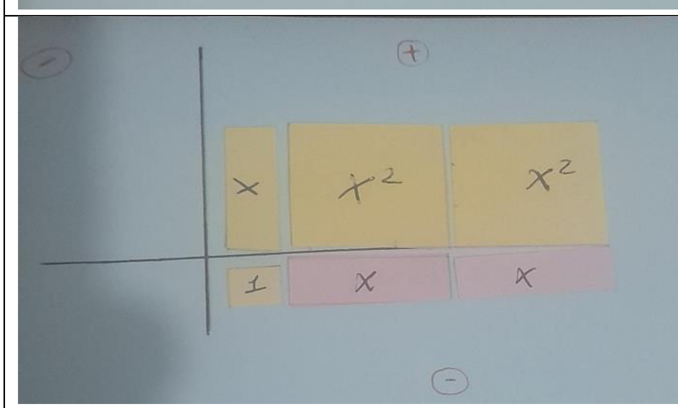
<table>
<tr><td colspan="2">Las siguientes imágenes corresponden a $p(x) = x^2 + 2x - 3$ y $q(x) = (-x^2 + 3x - 2$ de modo que $p(x) - q(x) \ = 2x^2 - x - 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Hemos ubicado los polinomios de $p(x)\ y\ q(x)$ respectivamente para realizar la resta de los polinomios.</td></tr>
</table>

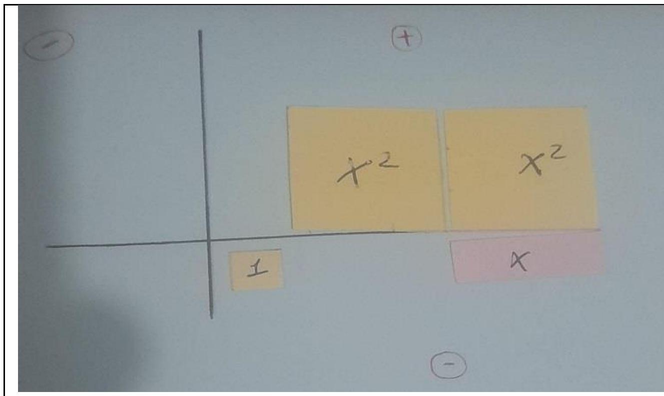
	Ya se ha realizado la ubicación de p(x)-q(x) respectivamente y ahora se hace la resta anulando las parejas que resultan cero
	Ya se ha realizado la resta de los polinomios $p(x) - q(x)$ y nos dio como resultado dos cajas de x cuadrado en el cuadrante tres, una caja x y una caja 1 en el segundo cuadrante, es decir que $p(x) - q(x) = 2x^2 - x - 1$

3.4.5. Multiplicación de expresiones algebraicas con el puzle

Con los rectángulos básicos de dimensión 2 solo es factible obtener productos de dos factores lineales$p(x) = ax + b \; y \; q(x) = cx + d$ cada producto se obtiene construyendo un rectángulo cuya base es uno de los factores lineales y la altura el otro, seleccionando fichas que encajen perfectamente como ocurre en un rompe cabezas. Para completar el rectángulo en general, es necesario añadir tantas fichas como se requiera

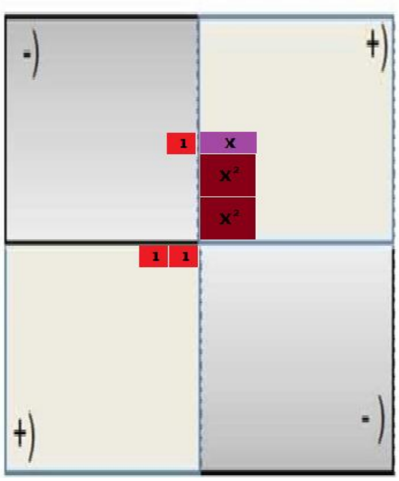
Ejemplo tenemos el polinomio)= $p(x)2x + 1 \; y \; q(x) = x + 2$ al realizar la operación $p(x).q(x)$ nos da $2x^{2'} + 5x + 2$. Ya teniendo al producto realizado algebraicamente, debemos ubicarlos en la caja de polinomios (primer cuadrante del plano.	
	Realizando la ubicación de la respuesta de multiplicar $p(x) y \; q(x)$ como rectángulos los ponemos en el primer cuadrante ya que la respuesta es positiva.

	
Ejemplo 2. Tenemos dos polinomios de primer grado $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 1$ vamos hallar la multiplicación de estos dos polinomios por el método del puzle.	
	Ubicamos el polinomio $f(x)$ a la izquierda y $g(x)$ a la derecha.
	Construimos un rectángulo cuya base es uno de los factores y la altura el otro. Luego, seleccionamos fichas que encajen perfectamente. Por ultimo retiramos un rectángulo positivo y uno negativo porque la operación entre ellos dos resulta cero ya que son términos semejantes.

	Luego de retirar los rectángulos, queda como resultado que $f(x).g(x) = 2x^2 - x - 1$.

3.4.6. División de polinomios con el Puzle

Dividir un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ entre un binomio $dx + e$, análogamente que, en la multiplicación y factorización, consisteen armar con el dividendo, a manera de rompecabezas, un rectángulo cuya base es el divisor $dx + e$. Para formar el rectángulo, en ocasiones, es necesario, añadir pares de fichas equivalentes algebraicamente a cero, el cociente es la altura de dicho rectángulo y el residuo es la cantidad de fichas de valor 1 que no hace parte del mismo.

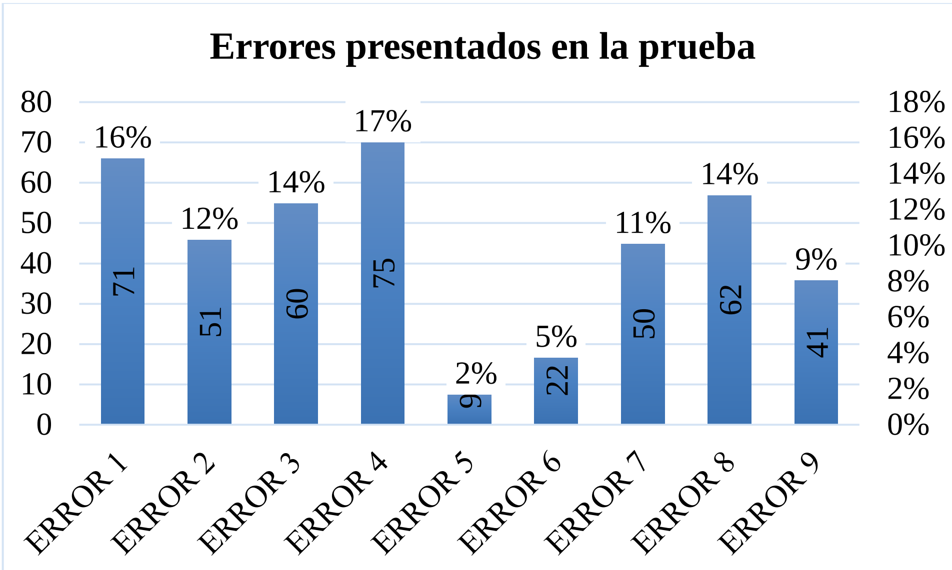
Ejemplo: Tenemos la división de polinomios de $2x^2 + x + 1$ por $x - 2$.	
Plano 1	Plano 2
Ubicamos las casillas correspondientes al dividendo en la caja, agregando un cero para armar el rectángulo.	Completamos el rectángulo añadiendo los ceros y dejando las demás fichas por fuera que serán el residuo de la división

El plano 1 se muestra el dividendo $2x^2 + x + 1$ dispuesto en una franja de longitud igual al divisor $x - 2$, para lo cual se ha agregado un cero conformado por una pareja de fichas 1. Teniendo el rectángulo construido se deduce que el cociente es $2x + 5$ y el residuo es 11	

4. ANALISIS DE RESULTADOS

4.1. ANÁLISIS CONSOLIDADO DE ERRORES Y DIFICULTADES

En la siguiente grafica se presenta el consolidado de errores que tuvieron los estudiantes en la prueba en general, lo que permitirá identificar el origen de aquellos son más comunes



Grafica 11: Errores presentados en la prueba de manera general

La grafica 11 muestra el estudio realizado en este trabajo, donde se clasificaron los principales errores que cometen los estudiantes de grados sexto, séptimos y octavos de las tres instituciones de Villavicencio, donde se hayo que el error más frecuente cometido por dichos estudiantes es E1 (error geométrico); E4 (error de distribución) y el E8 (error de modelación matemática). El error de distribución fue el que más estuvo presente en los escolares el cual se presentaba cuando se acomodaban las tapas en cantidades desproporcionadas sin tener en cuenta que la figura que se debía crear era un cuadrado, por lo tanto, el número de tapas para cada lado tenía que ser igual de allí se da origen al error geométrico, donde el estudiante no conserva la figura geométrica original.

El error de modelación se presentó en la segunda pregunta de la prueba, donde se pedía calcular el área y perímetro de una finca de que tenía forma rectangular y sus lados eran dos expresiones algebraicas. El estudiante no lograba identificar la ecuación para dar respuesta a los dos enunciados propuestos, algunos estudiantes no tienen la noción de variable por tal motivo gran parte de ellos dejaron en blanco omitiendo el ejercicio.

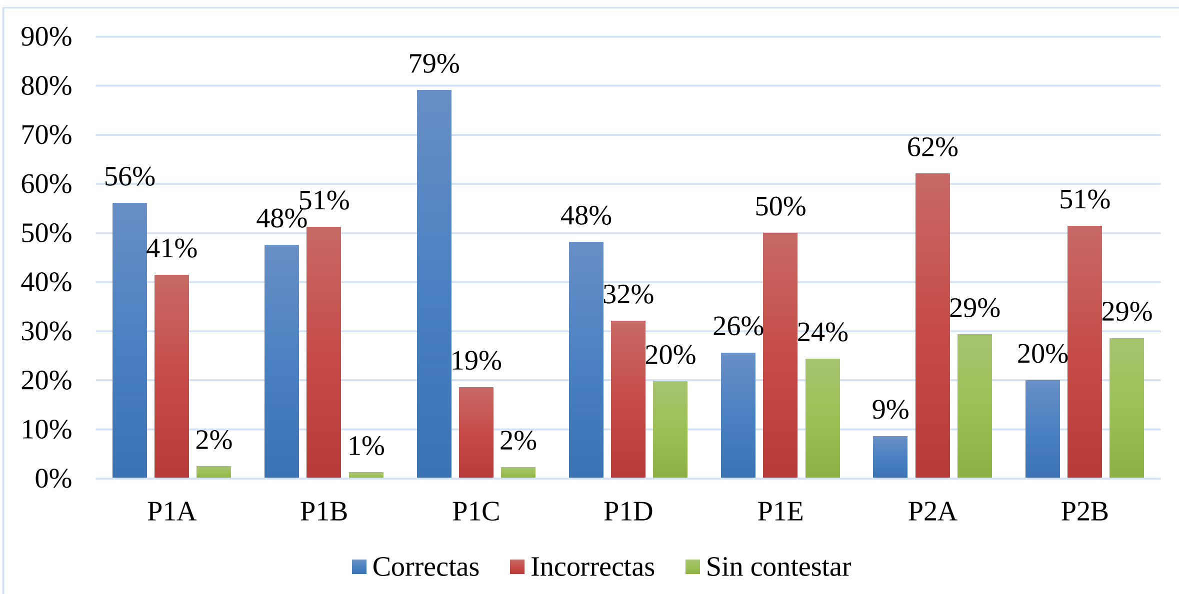
4.2. ANALISIS DEL DESEMPEÑO DE LOS PARTICIPANTES

En la tabla 14, se presenta el estado de las preguntas (correcta, incorrecta, sin responder) al momento de revisar la prueba después de ser resuelta por los estudiantes.

Tabla 14: Estado de las preguntas al momento de revisar la prueba

PREGUNTAS	P1A	P1B	P1C	P1D	P1E	P2A	P2B
Total Correctas	46	39	68	39	21	5	14
Total Incorrectas	34	42	16	26	41	36	36
Total Sin Responder	2	1	2	16	20	17	20

Al momento de revisar la prueba se evidencio que una gran cantidad de estudiantes no respondieron algunas cuestiones en específico, y otro tanto estaban resuelto de manera incorrecta.



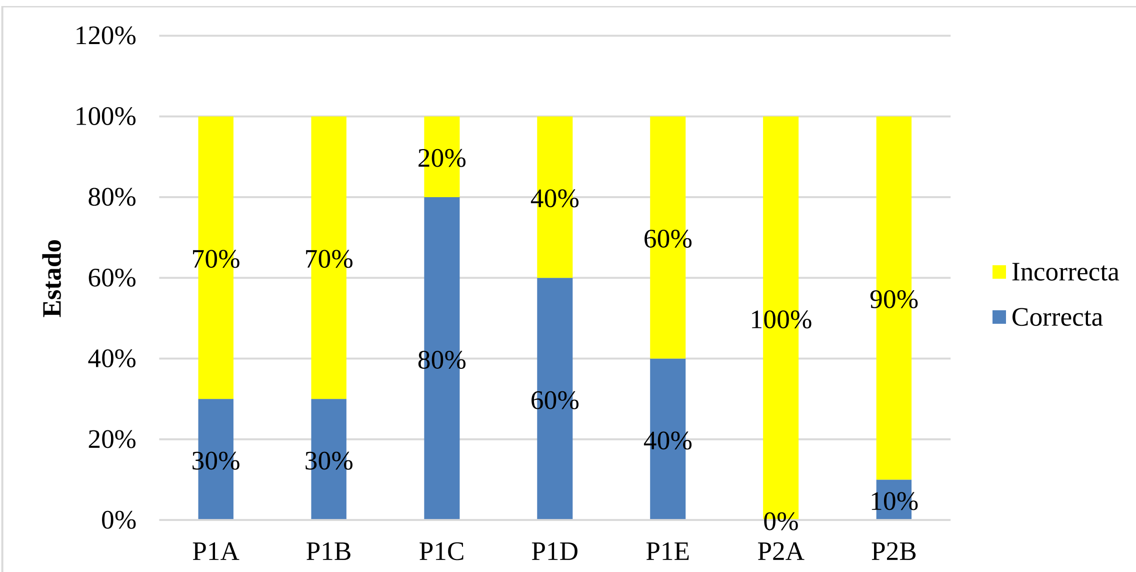
Grafica 12: Estado de las preguntas al revisar la prueba

Al hacer el análisis se encontró que la pregunta más difícil fue la 2a y el error más frecuente en ella fue el E6 (**Error de tratamiento operativo o procedimental**) debido a que en la mayoría de los casos se planteaba bien la solución para calcular el área, pero al momento de realizar los procedimientos algebraicos se empleaban de manera incorrecta las reglas y por tanto la solución era errónea. En general, los estudiantes presentaron menos errores en la pregunta P1c.(ver grafica 12) Por el contrario, la pregunta 2a, y 2b fue donde se presentó la mayores inconvenientes(respuestas incorrectas y sin contestar) debido a que los estudiantes no tienen claro o no manejan el uso de variables para resolver operaciones entre ellas, los estudiantes presentaron errores al momento de plantear las ecuaciones con las cuales se hallara el área y perímetro de la finca que tenía una forma rectangular, los escolares intentaban plantear una ecuación que los llevara a la solución del problema planteado pero lo hacían de forma equivocada siendo así, uno de los principales errores que se cometieron en el segundo enunciado. Janvier (1996), ha manifestado que el mejor método de comenzar la enseñanza-aprendizaje del álgebra es desde la perspectiva de la modelización, enfatizando en la fase de la formulación del modelo matemático.

4.3. ANALISIS DESEMPÉÑO ESTUDIANTES NARCISO MATUS

4.3.1. Desempeño estudiantes grado 801.

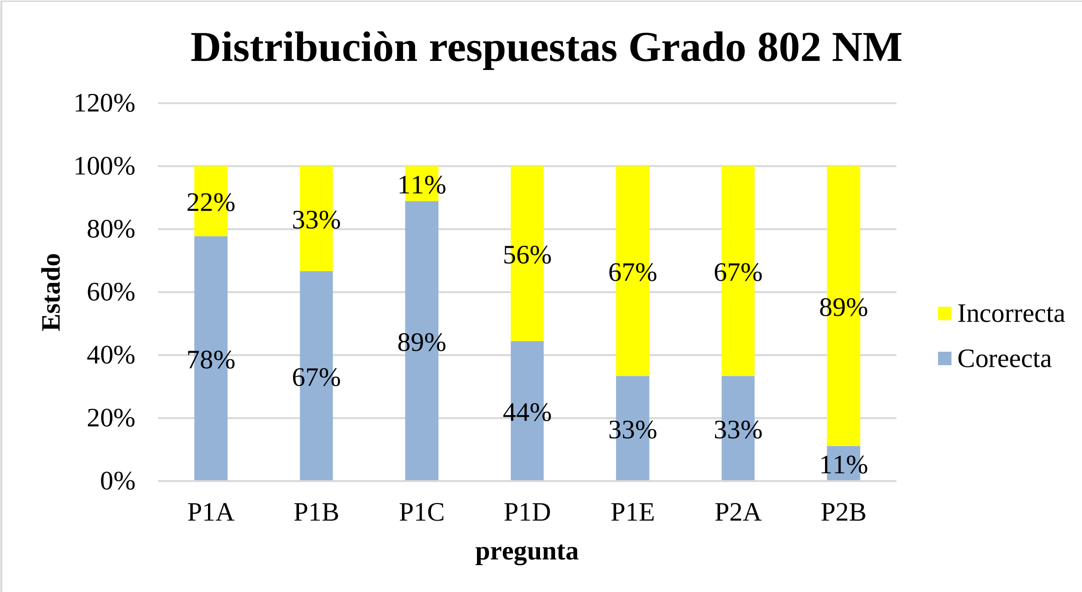
El análisis muestra que la pregunta que menos respuestas correctas tuvo fue la P2a, en esta pregunta se presentaron errores de tipo operativo o procedimental y errores en la modelación matemática debido a que muchos no lograban dar con las operaciones correctas para calcular el perímetro.



Grafica 13: Estado de las preguntas Grado 801 NM

En el grado 801 de la institución Narciso Matus la pregunta que menos respuestas correctas tuvo fue la P2A, (ver grafica 13) en esta pregunta se presentaron errores de tipo operativo o procedimental y errores en la modelación matemática debido a que muchos no lograban dar con las operaciones correctas para calcular el perímetro. En las preguntas P1a, P1b, P1e, P2a y P2b la mayoría de los estudiantes se ubicaron entre los desempeños básico y bajo, puesto que algunos hacían uso de los conceptos matemáticos evaluados, sin soluciones concretas debido a los errores mencionados anteriormente.

4.3.2. Desempeño estudiantes grado 802



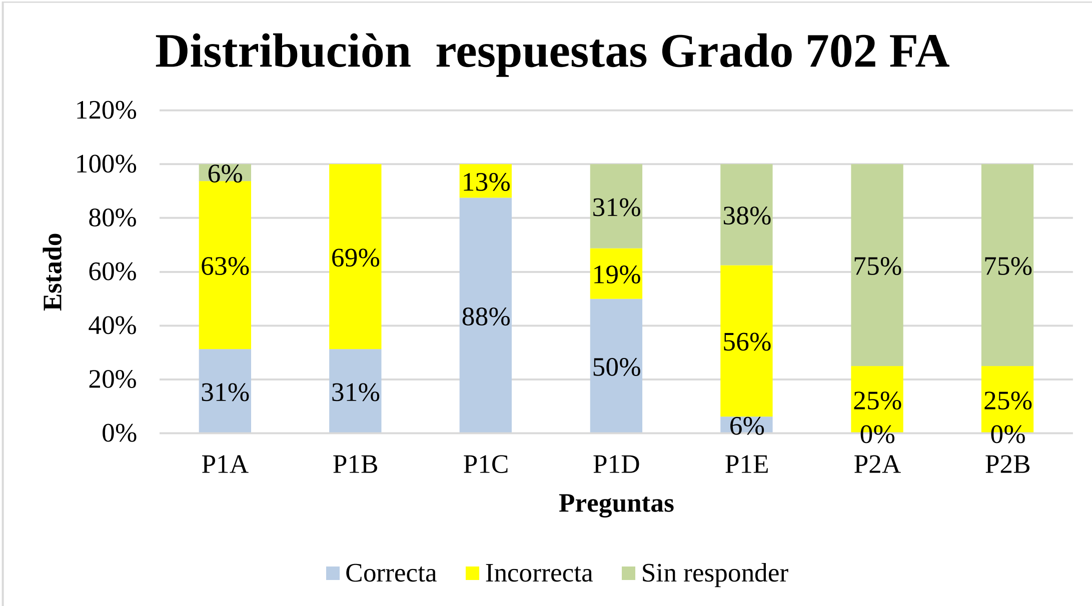
Grafica 14: Estado de las preguntas Grado 802 NM

Las preguntas que tuvieron la mayor cantidad de respuestas incorrectas fueron la P2A y la P2B, (ver grafica 14) en su mayoría con errores de modelación matemática o errores de tipo operativo o procedimental, según Vergel (2015) estos tipos de errores suelen mostrar que el alumno tiene una fijación en el pensamiento numérico y que tiene dificultades para pensar algebraicamente. En las preguntas P1d, P1e, P2a y P2b la mayor cantidad de estudiantes se ubicaron en los desempeños bajo y básico, con problemas a la hora de relacionar los conceptos de manera correcta y además con errores al realizar operaciones aritméticas y algebraicas.

4.4. ANALISIS DESEMPÉÑO ESTUDIANTES FRANCISCO ARANGO

4.4.1. Desempeño estudiantes grado 702

La mayoría de los participantes de este grado se ubicaron entre los desempeños bajo y básico en la mayoría de las preguntas, presentándose errores de conteo, errores geométricos, errores de modelación y procedimentales.



Grafica 15: Estado de las preguntas Grado 702 FA

En el análisis realizado a los estudiantes de 702 FA se evidencio que en las preguntas P2a y P2b el 75% de los estudiantes no dieron respuesta a las preguntas, todos ellos manifestando no haber entendido, según Socas (2011) debido a la complejidad de los objetos de las Matemáticas o tal vez fue un tema nuevo para ellos.

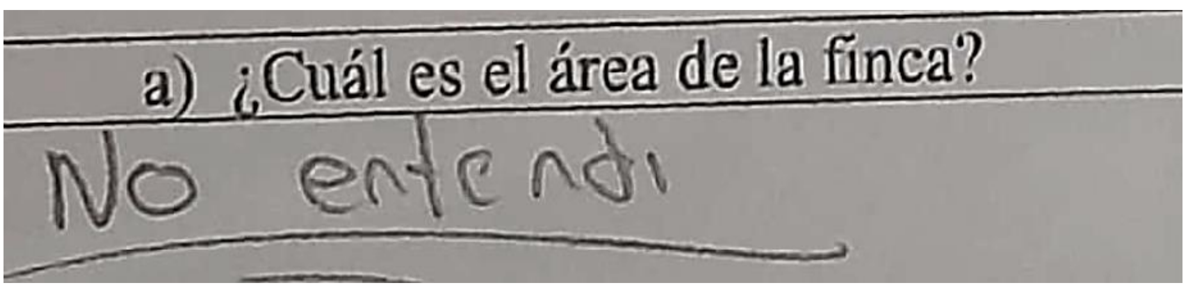
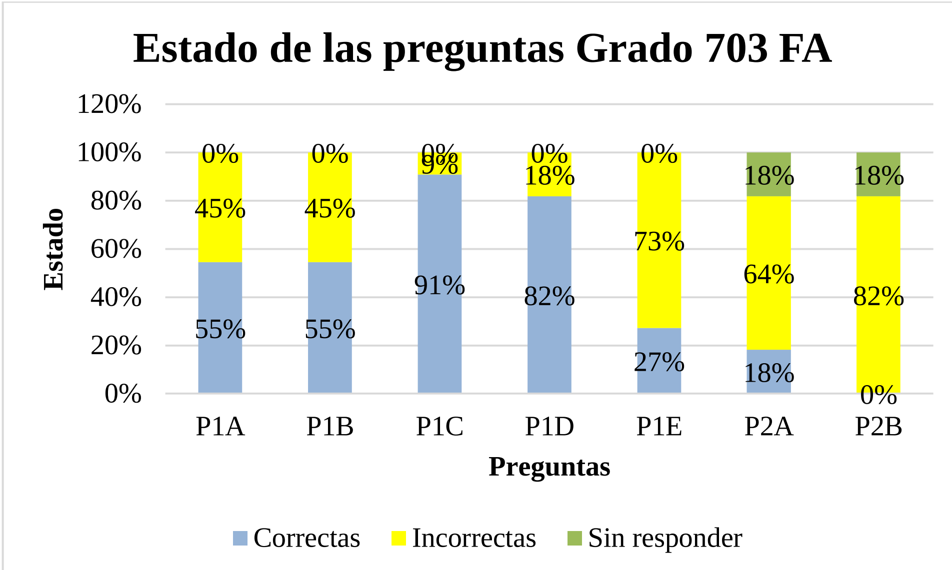


Figura 15: Evidencia desempeño bajo

4.4.2. Desempeño estudiantes grado 703

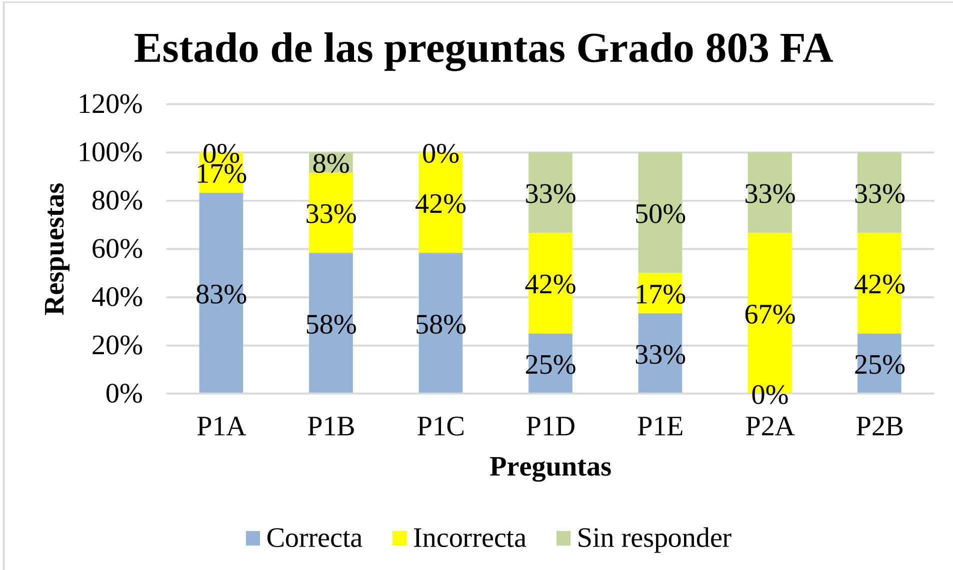


Grafica 16: Estado de las preguntas Grado 703 FA

En el grado 703 FA en las preguntas P1e, P2a y P2b la mayor cantidad de estudiantes se ubicó en los desempeños básicos y bajo, debido a que no dieron una respuesta concreta y correcta a cada una de las situaciones, en su mayoría debido a errores de modelación y al realizar operaciones algebraicas y aritméticas.

4.4.3. Desempeño estudiantes grado 803

En la gráfica 17, se muestra el estado de las preguntas por estudiantes de la institución Educativa Francisco Arango del grado 803 donde se puede evidenciar que la pregunta con más aciertos teniendo en cuenta los criterios de evaluación es la P1a, mientras que la pregunta 2a, presenta mayor número de estudiantes que no respondieron nada, y los que respondieron lo hicieron de forma incorrecta.

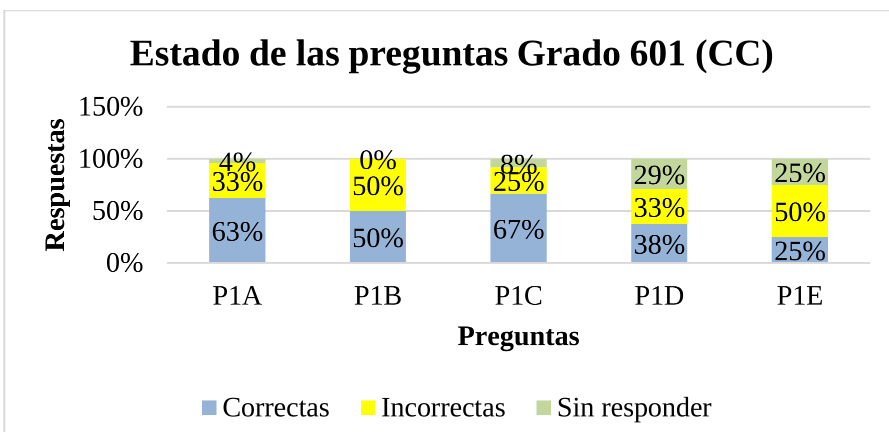


Grafica 17: Estado de las preguntas Grado 803 FA

En las preguntas P1d, P1e, P2a, P2b la mayoría de los estudiantes se encuentran en los desempeños bajo y básico, presentando errores de distribución o de la configuración geométrica y errores de modelación, principalmente por desconocimiento de las operaciones requeridas para hallar el área y el perímetro de figuras planas, además de errores al realizar operaciones algebraicas.

4.5. ANALISIS DESEMPÉÑO ESTUDIANTES COFREM (C.C)

4.5.1. Desempeño estudiantes grado 601



Grafica 18: Estado de las preguntas Grado 601 (CC)

Los estudiantes de 601 CC tuvieron desempeño básico y bajo en las preguntas P1B, P1D y P1E.

4.6. ERRORES Y DIFICULTADES EN PROCESOS ALGEBRAICOS INICIALES

A manera de síntesis se puede decir que la resolución de las situaciones planteadas en esta experiencia permite observar algunas dificultades, las cuales obedecen a la experiencia que tienen los escolares con los problemas aritméticos, los cuales pueden ser resueltos directamente y que ofrecen respuestas intermedias. Sin embargo, los procesos algebraicos iniciales, tal como la generalización de patrones (figúrales o puntuales) necesitan ser traducidos y escritos en representaciones formales primero para poder ser resueltos. Al igual que en diversas investigaciones (Ameron, 2002; Kieran, 1992, 2004; Sfard, 1987. Citados en Castellanos 2017) concordamos en algunas de ellas, tales como:

- limitada interpretación del signo igual
- errores sobre el significado de las letras
- rechazo a aceptar una expresión (un variable, generalización) para dar respuesta a un problema.
- dificultad al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual.

Los resultados de este estudio para la situación de generalización, muestran que en su mayoría en su mayoría presentaron errores de conteo, errores de patrón y de distribución (en la configuración geométrica) los cuales tienen principalmente origen en *las dificultades asociadas a la abstracción algebraica y en el tránsito de la aritmética al algebra*. Para la segunda situación, los estudiantes en su mayoría acuden a la memorización de reglas y procedimientos y, eventualmente, llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra. Por ejemplo (figura 17), uno de los errores más notados corresponde al error que tiene origen en el tratamiento procedimental y que acude a la idea de cerradura de las operaciones.

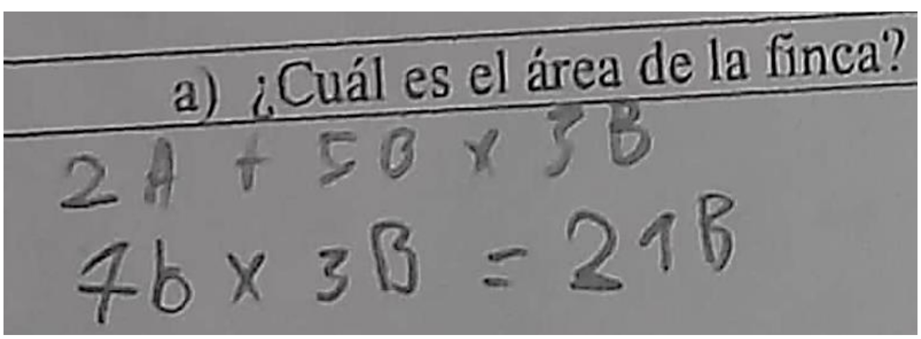


Figura 16: Evidencia error de tratamiento operativo o procedimental

En la figura 16, podemos apreciar el rechazo del estudiante por aceptar una expresión (2A+15B) como respuesta a un problema; en otros casos y de manera semejante podría verse con el uso del paréntesis, el estudiante se limita a sumar los dos primeros coeficientes y multiplicar por el coeficiente del ultimo termino, sin atender a la estructura de la expresión algebraica. según Socas (2015) este error está relacionado con la necesidad de clausura puesto que algunos alumnos que estudian álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que, a veces, son incompletos. Los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (que no dé un número) y que quede expresada, por ejemplo, 2A + 5B = 7B.

La figura siguiente (figura 17), se pueden apreciar un error que tiene origen en el error de tratamiento operacional, la evidencia muestra que el estudiante suma 2a + 5b = 7c, según Socas este error tiene su origen en un obstáculo cognitivo; usando en procedimientos algebraicos reglas de la aritmética que resultaban útiles en ese contexto y sin atender a la naturaleza del pensamiento algebraico (E7 en nuestra clasificación).

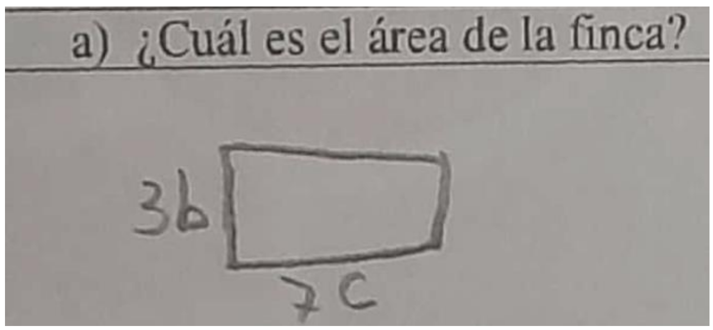


Figura 17: Tratamiento equivocado entre representaciones

Otro error muy recurrente en la experiencia implementada en este estudio es debido a la imposibilidad que tiene el estudiante para representar de manera algebraica una solución a la situación planteada (figura 18), en nuestra categorización lo hemos denominado E8, según Socas (215) debido a que no reconocen el modelo y no encuentran significado al uso de las letras.

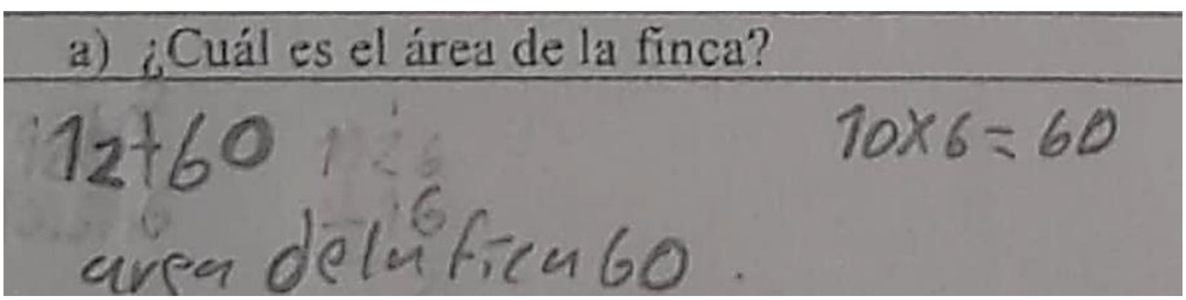


Figura 18: Evidencia error en la modelación matemática

En este ejemplo vemos que el estudiante no modela la situación de manera correcta debido a que omitió las variables (letras) que definen las dimensiones de la finca, hemos llamado a este error: Error de modelación. Estos errores tienen su origen en la usencia de sentido y podría implicar que los alumnos continúan pensando numéricamente, los estudiantes la logran ver la necesidad de utilizar las letras para dar respuesta a situaciones matemáticas.

La figura 19, muestra evidencia de un error donde los estudiantes tienen necesidad de particularizar las expresiones algebraicas, dicho error tiene su origen en una ausencia de sentido; es decir, no hay sentido para el uso del lenguaje algebraico en determinados contextos o para tratar con letras. Por tanto, el estudiante recurre a objetos matemáticos conocidos (eje. el lenguaje numérico), particularizando las expresiones y sumándolas sin tener en cuenta las letras.

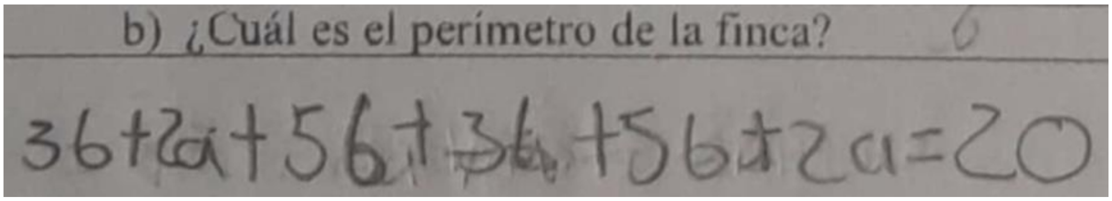


Figura 19: Evidencia error de tratamiento aritmético

A manera de síntesis, según los resultados podemos dar cuenta de la tradicional enseñanza del álgebra, en este sentido, reconocemos de la importancia de hábitos mentales involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñarla. A continuación, en la figura 20 y figura 21, damos cuenta espacios logrados con los escolares en el trabajo con el Puzle algebraico

Figura 20: Uso del Puzle para representar TCP

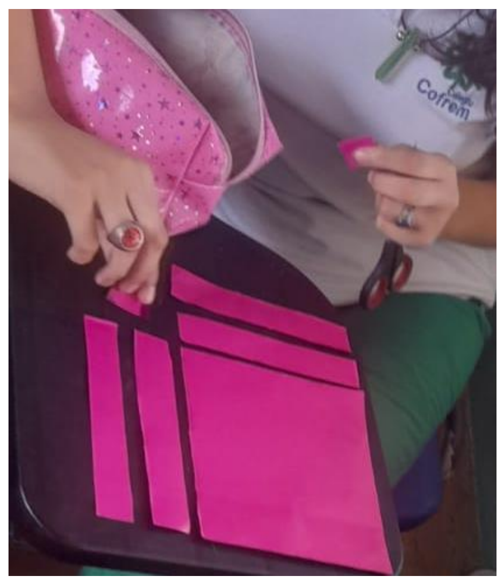


Figura 21: Tratamiento del TCP con puzle

5. CONCLUSIONES

A continuación, exponemos las conclusiones a las que hemos llegado con respecto a los objetivos que se expusieron en el proyecto y acorde con el macro proyecto en el cual se inscribe este estudio.

Respecto al primer objetivo podemos concluir que los principales errores cometidos por los estudiantes al momento de abordad el álgebra tienen origen principalmente en el uso de los sistemas de representación (figuras, gráficas, expresiones algebraicas y lenguaje natural); las configuran un sistema de signos que no del todo resultan accesibles a los escolares cuando abordan el tratamiento del algebra escolar, y por consiguiente se consideran determinantes al momento de interpretar o tratar con expresiones algebraicas sencillas, por ejemplo generalizar, simbolizar o realizar operaciones algebraicas.

Al igual que en otros estudios (Duval, 2002; Castellanos, 2017; Socas 2015) el estudio encontró apropiado promover diferentes representación de un mismo objeto, lo anterior dado que esta acción facilita la comprensión de los escolares; Sin embargo, se concluye que para tal fin, se requiere del estudiante la capacidad para transformar de una representación a otra es decir, realizar correspondencias entre las características de ambos sistemas de representación, condición que no es fácil de lograr sin el uso de una mediación pedagógica que procure la visualización de conceptos algebraicos, esto es el puzle

Se crea una prueba, se valida, se implementa y se analizar, en la que los estudiantes responden con su mayor disposición, teniendo en cuenta las situaciones vividas al momento (año 2021) con la modalidad de alternancia y virtualidad que produjo la pandemia y por ultimo también se evidencio que algunos estudiantes buscaron estrategias distintas para solucionar las situaciones propuestas

En las situaciones que se solicitaba a los escolares la generalización algebraica (secuencias a partir de configuraciones puntuales), se evidenciaron errores tales como: el error de distribución, el error geométrico y el error en la modelación matemática. Los estudiantes presentan errores al momento de modelar un problema matemático. El error de distribución fue el que más estuvo presente en los escolares el cual se presentaba cuando se acomodaban las tapas en cantidades desproporcionadas sin tener en cuenta que la figura que se debía crear era un cuadrado, por lo tanto, el número de tapas para cada uno de los lados era diferente.

En relación al segundo objetivo, los resultados de la prueba diagnóstico mostraron que las dificultades de los escolares se relacionan con: debilidad en el dominio de conceptos previos (eje. noción de área), falta de motivación, malos hábitos de estudio, poco conocimiento sobre la relación entre los contenidos estudiados en el aula y sus aplicaciones en la solución de problemas. En tal sentido se encontró relevante el diseño e implementación de una estrategia orientada al desarrollo de habilidades matemáticas con énfasis en el pensamiento algebraico matemático; en consecuencia, se acudió al puzle algebraico como mediación pedagogía para promover el dominio conceptual y el uso práctico en la solución de problemas con expresiones algébricas. La estrategia consistió en propiciar espacios para la participación activa de los estudiantes en escenarios de aprendizaje que dieran relevancia a la visualización y significación de las matemáticas

Se encontró acertado usar como recurso pedagógico el puzle algebraico para la implementación de la estrategia didáctica mediante el uso de cuatro guías para solucionar ejercicios entre expresiones algebraicas; se considera pertinente la estrategia a partir de la visualización geométrica (puzle), la cual propone al estudiante alternativas en la solución a situaciones con expresiones algebraicas y muestra una manera distinta a la tradicional.

La estrategia didáctica se considera un espacio de participación escolar y de carácter institucional para los participantes, aporto a las metas de aprendizaje del área de matemáticas además que permitió promover la cultura académica y la participación de todos estudiantes. Se puede concluir que el componente lúdico e informal presente en la estrategia didáctica a través del uso del puzle aporta elementos de motivación que pueden ser capitalizados para llamar la atención de los estudiantes y orientarlos de manera activa al aprendizaje del algebra escolar

Se concluye que el puzle es un recurso útil para favorecer procesos de aprendizaje, habilidades, de conocimientos, siempre que se conciba como una mediación pedagógica, el puzle como instrumento despojado del componente didáctico no es suficiente en el aprendizaje de las operaciones con expresiones algebraicas. Entendido el puzle como mediación pedagógica, la estrategia implementada en este estudio logro establecer cuatro acciones ofrecidas por el recurso que permitieron alcanzar los objetivos formativos en el tratamiento de las operaciones algebraicas con escolares de grado 6 a 8vo del Municipio de Villavicencio; se concluye que las principales acciones son: la acción motivadora (despierta interés, mantiene la atención), la acción facilitadora (acerca a conceptos matemáticos claros y precisos), la acción orientadora (brinda organización en el aprendizaje), la acción evaluadora (revisión del aprendizaje)

De este modo el puzle se considera un recurso didáctico tangibles y de fácil manipulación y acceso para el estudiante y en consecuencia, motivan en el proceso de aprendizaje, además el puzle puede utilizarse una y muchas veces con diversos propósitos en el tratamiento y conversión de las expresiones algebraicas

BIBLIOGRAFIA

Agudelo Valderrama, C., & Vergel Causado, R. (2010). Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital (PROMICE).

Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática, 22*(1), 149-166.

Amadeu, R., & Leal, J. P. (2013). Ventajas del uso de simulaciones por ordenador en el aprendizaje de la Física. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 177-188.

Bustos, Á. S; & Zubieta, G., (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias*. *37(3),* 129-148.

Beyer, W. (2006). El Laberinto del Significado: La comunicación en el Aula de Matemáticas. En D. Mora y W. Serrano (Eds.), Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. La Paz: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades.

Castellanos. M.T y Obando. J. (2009) Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico. Conferencia presentada en 10°. Encuentro colombiano de Matemática Educativa, Pasto: Universidad de Nariño. 2009

Castellanos, M. T., Flores, P., y Moreno, A. (2017). Reflections on Future Mathematics Teachers about Professional Issues Related to the Teaching of School Algebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 408-429.

Castellanos, M. T., Flores, P., y Moreno, A. (2018). The reflection on practicum: A teaching experiment with Colombian students. *Profesorado: Revista de Currículo y Formación del Profesorado, 22(1),* 413- 439.

Castellanos, M.T. (2019). Prática de ensino de matemática: um experimento de ensino com professores colombianos em formação. *Educar em Revista*, *35*(78), 153-166.

Castiblanco., A. C. (1997) *Sistemas Numéricos.* Grupo de Investigación Pedagógica, MEN, Santa Fe de Bogotá.

Clements, M. K., Bishop, A.J., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. K. (Eds.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education.* New York: Springer.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, *61*, 23-35.

Duval, R. (2004). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Representations and Mathematics Visualization.*

Fraser, B. J., Tobin, K. G., & McRobbie, C. J. (2012). *Second International Handbook of Science Education* (pp. 1191-1239). Dordrecht: Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*, Dordrectht, Kluwer Academic Publishers.

García., L. G. (2004) Propuesta Didáctica: *La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial*. Tesis doctoral. Ciudad Universitaria San Nicolás de los Garza.

Garzón, P. J. R., & Causado, R. V. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3(1), 19-30.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 32(3), 529-550.

Ghiso, A. (2008). La sistematización en contextos formativos universitarios. *Revista Internacional del Magisterio*. 33, 18-26.

Grinell, R. (1997). Social work research & evaluation: Quantitative and qualitative approaches. E.E. Peacock Publishers, 5.ed. Illinois.

Gutiérrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam, Holanda: Sense publishers.

Gutierrez, E. & Sierra, L.S. (2008) *¿Qué es la sistematización?* Bogotá: Fundación Social, Vicepresidencia de Desarrollo, Área de Gestión de Conocimiento.

Janvier, C. (1996). Modelling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, K. Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to algebra (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer

Jara, O (2015). La sistematización de experiencias produce un conocimiento crítico, dialógico y transformador. *Docencia*, 55, 33-39.

Jaworski, B. & Wood, T. (2008). The mathematics teacher educator as a developing professional. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and Processes in Mathematics Teachers Education*, *4*, 157-22. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68* (24,2), 83-102.

Hidalgo Moncada, D., & Cañadas Santiago, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. PNA.

Latorre, A. (2016) *La Investigación-Acción: Conocer y Cambiar la práctica educativa*. España: Editorial Graó.

Lannin, J. (2003). Developing Algebraic reasoning through generalization.
Mathematics Teaching in the Middle School. 8(7), 342-348.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3(1), 93-166.

Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. y Van Rijswijk, M. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief y A. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión: una propuesta para el desarrollo del profesorado* (pp. 39-64). Barcelona: Editorial Octaedro.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Bogotá D.C: Magisterio, 1998. ISBN: 978-958-691-062-0.

Ministerio de Educación Nacional. (1991). *Marco general y propuesta de programa curricular matemática. 9° grado, educación básica secundaria*, Editorial Nueva Gente, Santafé de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá D.C: MEN.113 p. (ISBN: 958-691-290-6).

Ministerio de Educación Nacional. (2017) Resolución 18583, por la cual se ajustan las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación del registro calificado. Bogotá, Colombia: El Ministerio.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

OECD (2019). Resultados y análisis Colombia PISA 2018 (Vol. III) Paris: OCDE Publishing.

Oliva Martínez, J. M. (2019). Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias.

Ruano Barrera, R. M., Socas Robayna, M. M., & Palarea Medina, M. D. L. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. Pna.

Socas, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154

Socas, M; (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.

Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. New York: Basic Books.

Vergel Causado, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. Pna.

Villa-Ochoa, J. A., Rojas, C., & Cuartas, C. M. (2010). ¿Realidad en las matemáticas escolares?: Reflexiones acerca de la "realidad" en modelación en educación matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte (29)*, 1-17.

Zamora, A., & Ardura, D. (2014) ¿En qué medida utilizan los estudiantes de Física de Bachillerato sus propios errores para aprender? Una experiencia de autorregulación en el aula de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*. *32 (2),* 253-268.

ANEXOS

Anexo 1. Prueba diagnóstico

Este anexo contiene un cuestionario de dos preguntas para ser aplicado al inicio de la estrategia didáctica.

La primera pregunta se corresponde con una situación de generalización a partir de una secuencia de puntos y contiene 5 preguntas abiertas.

La segunda pregunta cuestiona al estudiante sobre el proceso de simbolización y representación de una situación a partir del tratamiento del área y perímetro de la figura.

https://docs.google.com/document/d/1QD7YXaxCVSYdpCmr5Ad4zX7W9wy2ehrq/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 2. Desarrollo de la prueba diagnóstico grado 702 institución educativa Francisco Arango.

https://drive.google.com/file/d/1LvejHx6dN-QGTfPSV6LmdSj8pLilmXwi/view?usp=sharing

Anexo 3. Desarrollo de la prueba diagnóstico grado 703 institución educativa Francisco Arango.

https://drive.google.com/file/d/1ZJ9AtePTz4e1kqm8idD83saJX-07Q2N7/view?usp=sharing

Anexo 4 desarrollo de la prueba diagnóstico grado 803 institución educativa Francisco Arango.

https://drive.google.com/file/d/1YgPr5eT9tP1Q5PyIc78ezp0ME4tPRJfs/view?usp=sharing

Anexo 5. Desarrollo de la prueba diagnóstico grado 801 institución Educativa Narciso Matus Torres.

https://drive.google.com/file/d/1CZLuxuivMfcKEe_TeoUkGuVPp6YtGFAX/view?usp=sharing

Anexo 6. Desarrollo de la prueba diagnóstico grado 802 institución Educativa Narciso Matus Torres.

https://drive.google.com/file/d/1RGJmqBLQMH3IkLcVpWiNAGMMaaW9UCFJ/view?usp=sharing

Anexo 7. Desarrollo de la prueba diagnóstico grado 601 institución Educativa Cofrem

https://drive.google.com/file/d/1AXZgfTKyoCdH5Qjs-o27hZQz70nN-xME/view?usp=sharing

Anexo 8. Representación de los marcos usando tapitas.

https://drive.google.com/file/d/1j8QH1sZ3AS7st6jMk_yL89P8DBZLqPKP/view?usp=sharing

Anexo 9. Implementación de la estrategia didáctica (uso del puzle algebraico).

https://drive.google.com/file/d/1cVJiAH7s7DP6Lg3LFhAY0fN1f3EbdWNN/view?usp=sharing

Anexo 10. Guía de ubicación y representación de polinomios.

En este anexo se muestra la guía de representación de polinomios en el plano cartesiano

https://docs.google.com/document/d/1NrUF6Vr4lf1Aleum4IFLPZQ3oJNbB6Xj/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 11. Solución de la guía de ubicación y representación

https://docs.google.com/document/d/1pbwZf0YtkhH_BI7qvqEIlWS3sSjlDkua/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 12. Guía de suma de expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/1kDGbUApgI1vDBJm9RCAE_C7Tzube0n0I/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 13. Solución de la guía, suma de expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/1tyumDh-P-lYy8Cr8cdZNWJGvD8_v_m1q/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 14. Guía de sustracción entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/1qrxHNvMPWKdFnIGebgHen3PRZTzqTGTh/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 15. Solución de la guía de sustracción entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/1UWAoWa71-oi-W7tv9hG2W7f86bIK5voA/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 16. Guía de multiplicación entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/16tGivceMUvdifd6XV-OTWHrnAy4zNOZ9/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 17 Solución de la guía de multiplicación entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/18_ZjNkfaWRzepchlSqMVJoH4tyx4isnp/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 18. Guía de división entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/13gO88JX8qq5Ide6m4t-85zWqd_tFdkes/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

Anexo 19. Solución de la guía de división entre expresiones algebraicas usando el puzle.

https://docs.google.com/document/d/1ryXslrt9plsciU7F7b-L7FHqc1P5R9ir/edit?usp=sharing&ouid=107010257103307362827&rtpof=true&sd=true

RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO

A. TIPO DE DOCUMENTO OPCIÓN DE GRADO	Trabajo de estudiante de proyección social EPS
B. ACCESO AL DOCUMENTO	Biblioteca Universidad de los Llanos.
1. TÍTULO DEL DOCUMENTO	Estrategias para abordar la factorización de polinomios de segundo grado.
2. AUTORES	Hernández Galindo, José Miguel; Castellanos, María Teresa.
3. LUGAR Y AÑO DE PUBLICACIÓN	Villavicencio, 2022.
4. UNIDAD PATROCINANTE	Universidad de los Llanos
5. PALABRAS CLAVES	Factorización, Estrategias metodológicas, algebra, Enseñanza.
6. DESCRIPCIÓN	El proyecto Estrategias para abordar la factorización de polinomios de segundo grado busca configurar una intervención didáctica para dar prioridad a la manipulación de material concreto (ej. Puzle Algébrico) para abordar la representación de la

	factorización a través de la visualización geométrica dando prioridad a las estructuras algebraicas de segundo grado con raíces enteras y racionales para tal fin mediante una prueba diagnóstica se identifican los errores de escolares cuando inician el proceso de factorización. Posteriormente se articulan referentes teóricos desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática que involucren propuestas didácticas como la del puzle, para la mejor comprensión de los conceptos y luego sistematizar la experiencia reconociendo los aportes de la visualización geométrica en la comprensión del álgebra. Además, se reconocen las limitaciones del puzle algebraico en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.
7. FUENTES	Agudelo Valderrama, C., & Vergel Causado, R. (2010). Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital (PROMICE). Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades Castellanos. M.T y Obando. J. "Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico". Conferencia presentada en 10° Encuentro colombiano de Matemática Educativa, Pasto: Universidad de Nariño. 2009 Castellanos, M. T., Flores, P., y Moreno, A. (2017). Reflections on Future Mathematics Teachers about Professional Issues Related to the Teaching of School Algebra. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31(57), 408-429. Castellanos, M. T., Flores, P., y Moreno, A. (2018).

	The reflection on practicum: A teaching experiment with Colombian students. Profesorado: Revista de Currículo y Formación del Profesorado, 22(1), 413-439. Castellanos, M.T. (2019). Prática de ensino de matemática: um experimento de ensino com professores colombianos em formação. Educar em Revista, 35(78), 153-166. Duval, R. (2004). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Representations and Mathematics Visualization. Garzón, P. J. R., & Causado, R. V. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3(1), 19-30. Janvier, C. (1996). Modelling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, K. Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to algebra (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer Hidalgo Moncada, D., & Cañadas Santiago, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. PNA. Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3(1), 93-166. Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá D.C: Magisterio, 1998. ISBN: 978-958-691-062-0. Ministerio de Educación Nacional. (1991). Marco general y propuesta de programa curricular matemática. 9° grado, educación básica secundaria, Editorial Nueva Gente, Santafé de Bogotá.

	Ministerio de Educación Nacional. (2006) Estándares Básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber hacer con lo que aprenden. Bogotá D.C: MEN.113 p. (ISBN: 958-691-290-6). Socas, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154 Socas, M; (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Schön, D.A. (1983). The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action. New York: Basic Books. Vergel Causado, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano.
8. CONTENIDOS	Para la realización del presente informe se tiene en cuenta que los contenidos se agrupan como se presenta a continuación: Introducción Marco de referencia Materiales y métodos Análisis y resultados Análisis de resultados Conclusiones Bibliografía
9. METODOLOGÍA	Fase diagnostica: define y caracteriza la complejidad de la situación de experimentación (o implementación en el aula); se definen variables, objetivos, problemas, trayectoria hipotética de aprendizaje, principios teóricos, instrucción, recogida de los datos y resultados.

	Fase de experimentación: consiste en implementar las tareas con un grupo de escolares, posteriormente se ajusta y consideran los elementos relevantes del diseño de las actividades y sesiones del experimento Elaboración del informe se realiza el análisis retrospectivo de los datos; persigue contribuir al desarrollo, apropiación o contribución del modelo teórico planteado en los referentes para el aprendizaje-enseñanza del álgebra escolar.
10. CONCLUSIONES	A partir del trabajo realizado se pudo concluir que: Los principales errores cometidos por los estudiantes al momento de abordad el álgebra tienen origen principalmente en el uso de los sistemas de representación (figuras, gráficas, expresiones algebraicas y lenguaje natural); las configuran un sistema de signos que no del todo resultan accesibles a los escolares cuando abordan el tratamiento del algebra escolar. Los resultados de la prueba diagnóstico mostraron que las dificultades de los escolares se relacionan con: debilidad en el dominio de conceptos previos (eje. noción de área), falta de motivación, malos hábitos de estudio, poco conocimiento sobre la relación entre los contenidos estudiados en el aula y sus aplicaciones en la solución de problemas. El puzle es un recurso útil para favorecer procesos de aprendizaje, habilidades, de conocimientos, siempre que se conciba como una mediación pedagógica, el puzle como instrumento despojado del componente didáctico no es suficiente en el aprendizaje de las operaciones con expresiones algebraicas. las principales acciones del puzle son: la acción motivadora (despierta interés, mantiene la atención), la acción facilitadora (acerca a conceptos

	matemáticos claros y precisos), la acción orientadora (brinda organización en el aprendizaje), la acción evaluadora (revisión del aprendizaje)