# ADAPTACIÓN DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE DERIVADA AL RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A PARTIR DEL SOFTWARE DINÁMICO DGPad-Colombia.

AUTORES:

JHON SEBASTIÁN SÁNCHEZ LOZANO

MICHAEL SMITH RODRIGUEZ MORENO

DIRECTOR:

DR. MARTÍN ACOSTA GEMPELER

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2021

## Tabla de Contenido

# Introducción

El siguiente trabajo pretende adaptar al software DGPad-Colombia la ingeniería didáctica "USO DEL SOFTWARE CARMETAL PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE DERIVADA AL RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN", para la enseñanza de la noción de derivada que fue diseñada utilizando el software Carmetal. Nuestro propósito es aprovechar las potencialidades de DGPad-Colombia para implementar situaciones a-didácticas, donde se pueden proponer problemas y un medio con el cual los estudiantes interactúen para alcanzar un aprendizaje por adaptación.

Para adaptar la ingeniería se tuvieron en cuenta los problemas identificados por Bustos y Vásquez (2016) en la enseñanza del cálculo diferencial, los cuales son:

- Un excesivo uso de definiciones formales al enseñar los conceptos.
- Marginalización de la contextualización geométrica que dio origen a los métodos de solución de problemas en el cálculo.

En la ingeniería propuesta por las autoras se plantean dos situaciones de optimización sobre área y volumen, con las cuales se busca favorecer y dar sentido a la interpretación geométrica del método de optimización utilizando la derivada. Siguiendo las ideas de la Teoría de las Situaciones Didácticas, las actividades comprenden fases de experimentación en las que los alumnos interactúan con el software. Gracias a las retroacciones del software, pueden invalidar las estrategias no matemáticas y validar las estrategias matemáticas.

El presente trabajo consistió en estudiar y comprender el diseño de las actividades y adaptarlo a las herramientas disponibles en DGPad Colombia, que por ser una aplicación web tiene el potencial de una difusión más amplia.

## Justificación

Esta propuesta de adaptación les interesa a los profesores para trabajar con estudiantes de grado décimo y undécimo, porque es un método diferente en la enseñanza que involucra la resolución de problemas de optimización por medio de la noción de derivada, con el uso de software DGPad. Los profesores pueden tener acceso a las actividades por medio del software DGpad, fomentando el uso de la tecnología en el aula.

Actualmente se está implementando el uso de herramientas tecnológicas en el aula para contribuir a los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo que conlleva a vincular las TIC en el ámbito educativo. El software de geometría es una herramienta que posibilita cambiar la relación del estudiante con el saber matemático, gracias a la interacción y experimentación del estudiante con el software.

El estudiante, al interactuar con el software DGPad-Colombia, puede lograr un aprendizaje por adaptación, lo cual es una propuesta diferente a como se ha venido trabajando y desarrollando los conceptos matemáticos en el aula. El **software** DGPad-Colombia tiene las siguientes ventajas:

- Permite ser utilizado en cualquier medio táctil, con conexión o sin conexión a internet y de forma gratuita.
- Facilita el trabajo con representaciones y propiedades geométricas.
- Este software de geometría dinámica, incorpora una serie de herramientas en su programación que permiten realizar un conjunto de acciones y retroacciones que responden al saber geométrico.

Dentro de la teoría de las situaciones didácticas (TSD), el aprendizaje por adaptación es una propuesta diferente en la enseñanza, ya que el estudiante construye su propio conocimiento, dándole sentido a través de la interacción con el medio (software DGPad-Colombia). Permitiendo identificar el rol del medio en el proceso de enseñanza aprendizaje.

**Pregunta Problema**

¿De qué manera puede usarse el software DGPad-Colombia para promover el aprendizaje por adaptación del método de solución de problemas de optimización utilizando la derivada?

## Objetivos

- Adaptar la ingeniería didáctica "uso del Software CarMetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización" utilizando el software libre DGPad-Colombia.

- Estudiar, entender y explicar el diseño de las actividades propuestas en la ingeniería didáctica de Bustos y Vásquez, e ilustrar la manera como el uso del software contribuye al aprendizaje de los estudiantes.

## Marco Teórico

En esta ingeniería didáctica, las tareas fueron propuestas bajo los conceptos de la teoría de las situaciones didácticas (TSD), considerando el concepto central definido como aprendizaje por adaptación. Acosta y Fiallo (2017), mencionan que el **aprendizaje por adaptación** se produce sin la mediación de un profesor y es aquel producto de la interacción entre un **sujeto** y un **medio**. Esta interacción es compuesta por los siguientes elementos:

- Intención del sujeto: El sujeto tiene una necesidad, un propósito, un objetivo.
- Acción: Para alcanzar su intención el sujeto realiza una acción sobre el medio.
- Retroacción: Es una reacción del medio a la acción del sujeto.
- Interpretación: El sujeto interpreta la retroacción, que adquiere un sentido para él.
- Validación: El sujeto valida su acción, puede decidir si la acción realizada le sirvió para alcanzar su intención o no.

El sujeto es quien interactúa con una situación que presenta el profesor, luego, poniendo en juego sus conocimientos previos los utiliza para resolver la situación. Durante este proceso de solución el sujeto irá modificando, rechazando o produciendo nuevos conocimientos a partir del resultado de sus acciones.

Según Brousseau (2007) el medio se puede definir como una entidad que el profesor adapta con el propósito de lograr los objetivos de aprendizaje. El medio es fundamental en el aprendizaje por adaptación, ya que permite o impide determinadas acciones y ofrece retroacciones que pueden permitir que el estudiante valide o invalide sus acciones.

Al preparar el medio (Software DGPad-Colombia) el cual incorpora en su programación un conjunto de acciones y retroacciones que responden a un saber matemático, se tendrán en cuenta cuáles son las posibles acciones que realiza el sujeto al resolver las situaciones de optimización y cuáles son las retroacciones que debe generar este medio para que, en su interacción, produzca un aprendizaje por adaptación.

Según la propuesta de la TSD, el conocimiento es construido por el sujeto a partir de una situación a-didáctica. Acosta (2010) menciona que una situación es a-didáctica cuando se da la interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema. Como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. (p.176)
En la situación a-didáctica el estudiante despliega sus propias estrategias. Gracias a las retroacciones del medio, el estudiante tiene la posibilidad de validar: Decidir si las estrategias empleadas son eficaces o no. Esta decisión conduce a un abandono o modificación de las estrategias ineficaces y a un refuerzo de las eficaces.

El rol del profesor es usar una estrategia indirecta para transmitir el saber; crear las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje por adaptación. A diferencia del conocimiento, el saber es general y estructurado. En la institucionalización se explicita el saber a partir de los conocimientos construidos por el sujeto, quien puede asociarlo con su experiencia personal.

**El Método De Optimización**

Un problema de optimización solicita calcular el valor máximo o mínimo de una función. Consiste entonces, en encontrar los valores de la variable independiente en donde está el punto máximo y/o mínimo de la función.

El método propone los siguientes pasos para resolver un problema de optimización:

1. Calcular la función derivada.
2. Calcular los ceros de la función derivada
3. Determinar si esos puntos corresponden a un mínimo, máximo o un punto de inflexión.

De acuerdo con la interpretación geométrica propuesta en el trabajo de Bustos y Vásquez (2016), encontrar el máximo de una función equivale a calcular la altura de la curva que representa la función. Esa altura corresponde al punto de corte con el eje de las ordenadas de una recta horizontal (paralela al eje de las abscisas) y tangente a la curva.

Calcular la función derivada equivale a calcular las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva que representa la función. Los puntos en los que esa función derivada tiene valor cero corresponden a puntos de la función cuyas tangentes son horizontales. Por lo tanto, en esos puntos puede encontrarse un punto máximo o mínimo.

El diseño de las actividades busca acercar a los estudiantes a la idea de calcular la altura de una curva conociendo las pendientes de las rectas tangentes a la misma, evitando la representación algebraica de esas pendientes como límites.

## Metodología

Se siguió la metodología de ingeniería didáctica (Artigue, 1995) compuesta de cuatro fases: fase de análisis preliminar, fase de diseño y análisis a priori de las actividades, fase de experimentación y finalmente la fase de análisis a posteriori y evaluación.

En este trabajo nos limitamos a la fase de diseño y análisis a-priori de las actividades y un pilotaje de ese diseño, con un grupo reducido de estudiantes.

## Diseño y Análisis A Priori

Para trabajar el método de solución de problemas de optimización utilizando la derivada, se proponen dos situaciones de optimización. Los estudiantes en cada situación tendrán que desarrollar cuatro actividades con tareas específicas. Para cada situación de optimización hay una construcción del modelo hecho en el software de geometría dinámica DGPad-Colombia, con la cual los estudiantes trabajarán para desarrollar las tareas propuestas.

Las situaciones que se les propuso a los estudiantes son: La situación del hexágono, donde se pide la maximización de un área (correspondiente a una función cuadrática) y la situación de la caja, donde se pide la maximización de un volumen (correspondiente a una función cúbica). Bustos y Vásquez (2012) diseñaron cuatro actividades para cada situación, las cuales describimos a continuación:

- Primera Actividad: Planteamiento del problema de encontrar las dimensiones de un hexágono (que cumple unas condiciones particulares), de manera que su área sea la mayor posible. Se entrega una representación gráfica dinámica del hexágono, gracias a la cual los estudiantes pueden emplear una estrategia perceptiva para buscar el valor máximo del área y se espera que invaliden esa estrategia. Luego se introduce la función que asocia el área a valores variables de un lado del hexágono, y su gráfica, invalidando estrategias perceptivas para determinar el punto más alto de la gráfica de la función.
- Segunda Actividad: Determinación de condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible.
- Tercera Actividad: Aplicación de la estrategia de medición desarrollada en la segunda actividad para determinar la altura máxima de la gráfica de la función. Utilización de la función derivada como lugar geométrico.

- Cuarta Actividad: Trabajo sobre la noción de límite y el cálculo de la pendiente de una recta tangente utilizando lugares geométricos.

A continuación, se presenta el análisis a priori de las actividades para la situación del hexágono, donde se explicitan las tareas propuestas a los estudiantes, las posibles estrategias de solución, junto con las posibles intervenciones del profesor para la verificación utilizando el software DGPad-Colombia.

## Situación Del Hexágono

Descripción del medio

Para esta situación se trabajó con la construcción de un hexágono ABCDFG (figura 1) que cumple las siguientes condiciones: El lado GF tiene como longitud 1 metro, el lado adyacente AG es el doble del lado FD y el perímetro del hexágono es de 20 metros.

En la construcción se muestran las medidas de los lados: GF, FD, GA, DC, CB, AB. De igual manera, se muestra el valor del área que comprende el hexágono. De acuerdo con las características del software, el único vértice que se puede arrastrar en la figura es el punto B y a medida que se mueve este punto, los lados y el área del hexágono varían.

Adicionalmente, el estudiante para el desarrollo de las tareas podrá usar varias herramientas como: “medida” para incrementar el número de decimales; y tendrá que utilizar las macros de “pendiente”, “recta tangente” e “intersección” para solucionar el problema.

Descripción de la situación

Enunciado: Se desea construir un hexágono en forma de "L" como se muestra en la figura 1, con las siguientes condiciones: un lado debe tener como longitud 1 metro, los dos lados adyacentes a éste deben ser uno el doble del otro y el perímetro debe ser 20 metros. ¿Qué medidas deben tener los lados del hexágono para que su área sea la mayor posible?

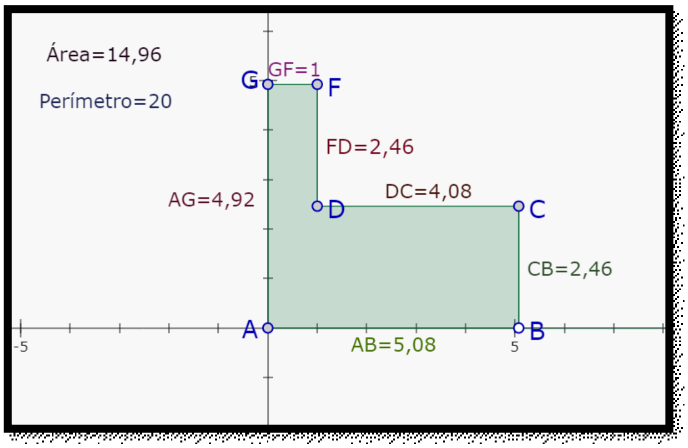


*Figura 1. Hexágono*

Los estudiantes tienen acceso a un archivo de DGPad-Colombia, en donde se encuentra la construcción dinámica de la situación (ver anexo figura 1). Allí mismo se muestra el valor de los lados, el perímetro y el valor del área del hexágono (figura 1). Al desplazar el vértice B sobre el eje x varía la longitud de los lados y el área del hexágono, manteniéndose el valor del perímetro.

En un primer momento, se le sugiere al estudiante que verifique si la construcción cumple con las condiciones de la situación planteada. El estudiante intentará arrastrar todos los vértices, la retroacción del medio permite darse cuenta que el único que tiene la posibilidad de arrastre es el vértice B, lo que le ayudará a reconocer que;

- Las medidas de todos los segmentos varían, excepto el que tiene longitud 1 metro (segmento GF).

- El área del hexágono también varía.
- El valor del perímetro siempre permanece constante en la construcción.

**Primera actividad**

***Tarea 1. Encontrar el área máxima del hexágono utilizando la construcción.***

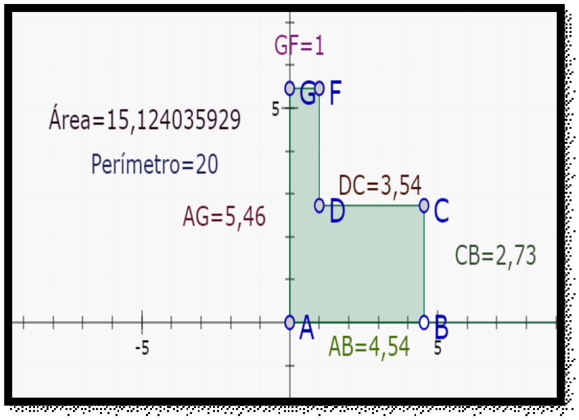
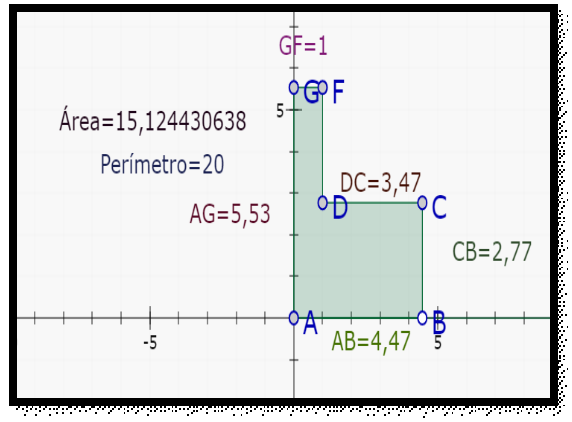
El objetivo de la tarea es que el estudiante proponga estrategias perceptivas para encontrar el área máxima del hexágono y llegue a invalidar esas estrategias.

*Estrategia perceptiva del estudiante.*

Es posible que el estudiante arrastre el punto B hasta que el número correspondiente al área sea el más grande y diga que ese valor es el área máxima del hexágono. Como el estudiante no tiene cómo invalidar su estrategia, el profesor debe intervenir.

*Intervención del profesor para proponer acciones de verificación con el software*

El profesor propone dos acciones de verificación de la estrategia: hacer zoom (agrandar la figura) y aumentar el número de decimales del área mostrada (utilizando la herramienta de medida (ver imágenes 2 y 3). Al desplazar nuevamente el punto B, el estudiante debe encontrar valores del área mayores al encontrado inicialmente. Además, debe notar que en varias posiciones del vértice B se obtiene la misma área.

| | |
|---|---|
| <br>*Figura 2. Área del hexágono* | <br>*Figura 3. Área del hexágono* |

En las figuras 2 y 3 se ve cómo la estrategia perceptiva usada por el estudiante queda invalidada al encontrar un valor mayor después de hacer zoom y aumentar los decimales y al arrastrar el vértice B.

Después de invalidar la estrategia puramente perceptiva para encontrar el valor máximo del área, el profesor propondrá utilizar la gráfica de la función que relaciona la longitud del segmento $\boldsymbol{AB}$ con el área del hexágono, para lo cual se seguirán las siguientes etapas:

**Etapa 1**. **Observación del movimiento de un punto P que relacione la longitud de un lado del hexágono con el área.** En esta etapa se resalta la dependencia funcional de los dos valores, representada por la posición de un punto en el sistema de coordenadas.

**Etapa 2. Utilizar la traza para observar las distintas posiciones del punto P**. En esta etapa se genera la idea de gráfica como representación simultánea de muchos puntos.

**Etapa 3. Construir la gráfica de la función** con el fin de tener un objeto geométrico sobre el cual se puede intervenir (por ejemplo, colocando un punto sobre él).

**Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo.** En esta primera actividad sólo se busca reemplazar la observación de los valores numéricos del área por la observación de la curva de la función, llegando a invalidar las estrategias perceptivas para determinar el punto máximo.

*Desarrollo de la estrategia matemática propuesta por el profesor*

***Etapa 1. Observación del movimiento de un punto P que relacione la longitud de un lado del hexágono con el área***

El profesor enseña al estudiante otra forma de hacer visible la variación del área con respecto a la variación del lado $\boldsymbol{AB}$: construir un punto **P** que tenga la misma abscisa de B y cuya ordenada corresponda al área de la figura. Es decir, [x(B), Área]

Se espera que el estudiante recuerde que la abscisa del punto B representa la longitud del segmento $\boldsymbol{AB}$. Se pide al estudiante que arrastre el punto B para que se dé cuenta que la altura del punto P representa el área del hexágono. De esta manera, se está reemplazando la relación entre número-área por la posición del punto **P**; entre más alto esté el punto **P (con respecto al eje de las abscisas)**, más grande es el área.

En esta etapa el estudiante puede encontrarle sentido a la estrategia propuesta por el profesor, al tener en cuenta que la ordenada del punto construido corresponde al área del hexágono, cuando $\boldsymbol{AB}$ varía, o al concluir que "entre más alto esté el punto **P** más grande es el área".

***Etapa 2. Utilizar la traza para observar las distintas posiciones del punto P***

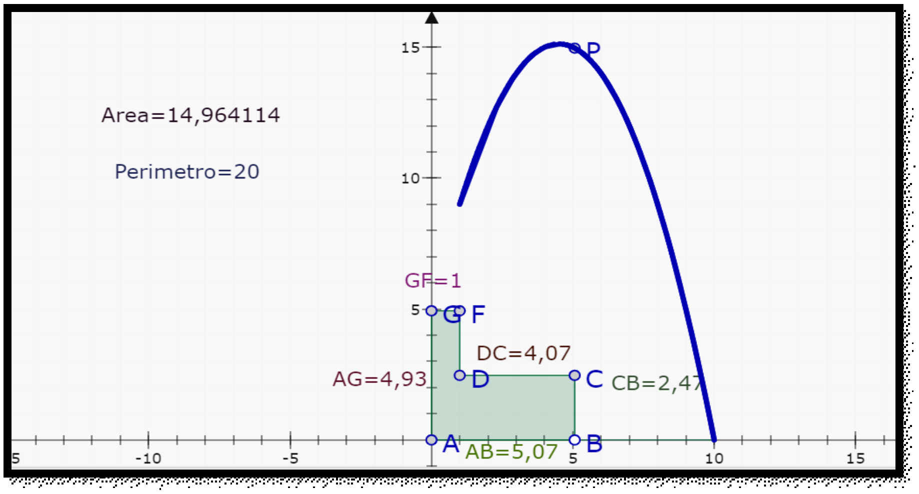



*Figura 4. Trazo del punto P.*

Se espera que el estudiante exprese la necesidad de saber con precisión si una posición determinada de **P** es más alta que otra. El profesor le enseña al estudiante la herramienta de activar la traza del punto **P** y le pide que arrastre el punto **B** (Figura 4). Se espera que el estudiante vea que la traza muestra las diferentes posiciones que tiene el punto **P**; es decir, la traza muestra la variación del área respecto a la longitud del lado **AB** del hexágono y permite decidir si una posición es más alta que otra.

En esta etapa el estudiante puede identificar que la traza tiene forma de parábola y que existe un punto cuya ordenada es la mayor de todas (por lo tanto, representa el área máxima); además, puede reconocer las ventajas de la traza al tener la posibilidad de ver en un solo vistazo varias áreas.

*Estrategia del estudiante*

El estudiante puede intentar colocar un punto sobre la traza, pero al hacer zoom para verificar, la traza desaparece. También puede mover el punto **B** para tratar de que el punto **P** queda en la posición más alta de la traza; nuevamente, al hacer zoom la traza desaparece impidiendo reconocer perceptivamente si el punto **P** es el más alto.

***Etapa 3. Construir la gráfica de la función.***

Al mostrar la traza del punto **P** el estudiante puede identificar visualmente la posición que corresponde al área máxima, pero no puede utilizar la traza para determinar con precisión dicho punto, pues la traza desaparece al hacer zoom. Surge entonces la necesidad de tener un objeto geométrico que represente las posiciones del punto **P,** que no se borre y sobre el cual sea posible construir. El profesor propone obtener la gráfica de las posiciones de **P**, para esto es necesario determinar la expresión algebraica que permite calcular el área del hexágono a partir del valor de $\boldsymbol{AB}$.

***Tarea 2. Determinar la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función***

El estudiante debe determinar la expresión algebraica del área del hexágono en función de $\boldsymbol{AB}$ con el fin de escribir esa fórmula en el software para obtener la gráfica. Es importante aclarar que esta tarea es difícil para el estudiante, porque implica comprender que se necesita una expresión con una sola variable y por tanto saber qué es una variable, pues se está suponiendo una familiaridad con el concepto de función.

*Estrategia del estudiante para calcular el área del hexágono*

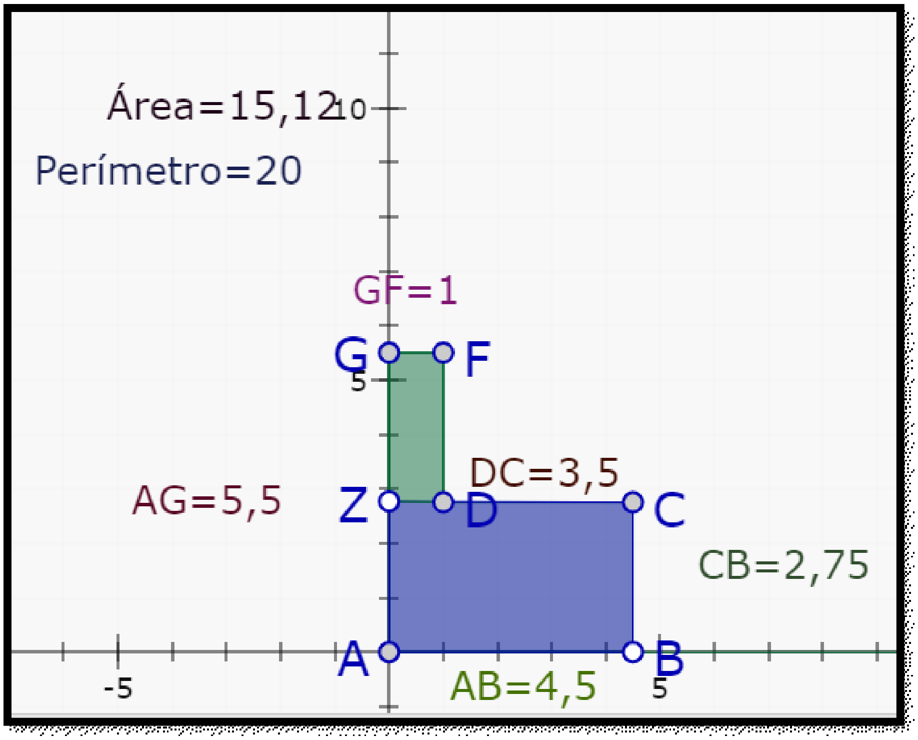



*Figura 5. Dividiendo el hexágono en dos rectángulos*

Es posible que el estudiante divida el hexágono en dos rectángulos: **FGZD** y **ABCZ** y calcule el área de cada rectángulo como se muestra en la figura 5. Puede que el estudiante no considere las relaciones entre los lados y se conforme con sumar el área de los dos rectángulos:

$$ÁREA \ = (AB \times BC) \ + \ (FG \times FD)$$

Si el estudiante ha olvidado las condiciones del problema, el profesor debe intervenir recordando la relación entre los lados:

$\boldsymbol{GF} = 1$

$\boldsymbol{AG} = 2\boldsymbol{BC}$

$\boldsymbol{DC} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{FG}$

$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{GF} = \boldsymbol{AB} - 1$

$\boldsymbol{BC = GZ}$.

Teniendo en cuenta estas relaciones, el estudiante puede modificar su expresión de la siguiente manera:

$$ÁREA = (AB \times GZ) + (1 \times GZ)$$

$$ÁREA = (AB \times GZ) + GZ$$

Esta última expresión tiene dos variables, por lo cual es necesario que el profesor vuelva a intervenir recordando el hecho que el perímetro es constante e igual a 20cm. El estudiante puede simbolizar este hecho de la siguiente manera: $\boldsymbol{20 = (2AB + 4GZ)}$

Y utilizar esta expresión para encontrar una forma de expresar GZ en función de AB

$$(2AB + 4GZ) = 20$$

$$GZ = \frac{20 - 2AB}{4}$$

$$GZ = \frac{10 - AB}{2}$$

$$ÁREA = (AB \times GZ) + GZ$$

$$ÁREA = \left(AB \times \frac{10 - AB}{2}\right) + \frac{10 - AB}{2}$$

$$ÁREA = \frac{9AB - AB^2 + 10}{2}$$

Cuando el estudiante haya encontrado la expresión para calcular el área del hexágono en función de AB, el profesor enseña al estudiante la herramienta calculadora para graficar una función. Le explica que como la abscisa del punto B (distancia que existe de A hasta B) es la magnitud que varía, entonces se debe simbolizar con la letra (x). Así, la función que representa el área del hexágono con perímetro 20 centímetros es: $E1 = \frac{9x - x^2 + 10}{2}$

Una vez obtenida la gráfica de la función (ver figura 6), el profesor debe plantear preguntas como:

- ¿Por qué la traza no describe toda la gráfica?
- ¿Qué pasa si se toma un punto sobre la gráfica en un cuadrante diferente al primero?
- ¿Por qué AB no puede ser más pequeño que 1?
- ¿Puede el área ser negativa?
- ¿Puede el hexágono tener un lado negativo?

Con estas preguntas se busca que el estudiante diferencie la gráfica de la función del dominio de validez del problema. La gráfica representa un conjunto de datos (área, magnitudes) pero no todos estos datos cumplen las condiciones de la situación problema. Se espera que el estudiante diferencie la función del modelo que representa el problema; es decir, que reconozca que el punto B solo se desplaza dentro del dominio de validez del modelo, mientras que la función muestra otras posiciones que no hacen parte de las condiciones del problema.

Con esta tarea el estudiante puede encontrarle sentido a la estrategia propuesta por el profesor (construir la gráfica de la función a partir de una ecuación), al verificar que la ecuación encontrada genera la gráfica que modela el problema, ya que ésta pasa por la huella que deja el punto **P**.

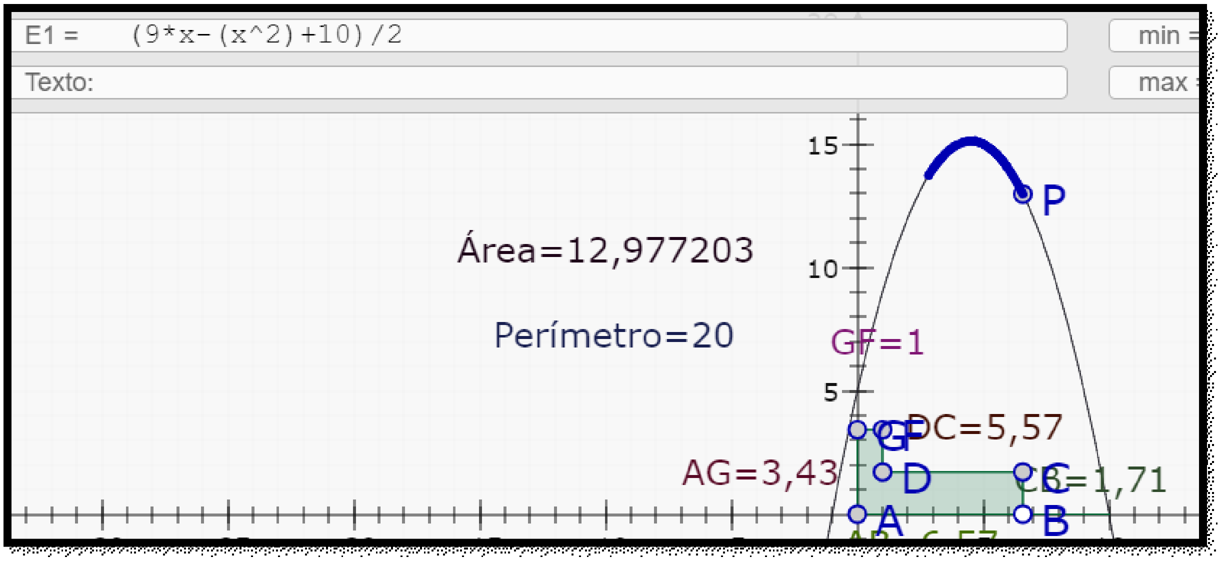


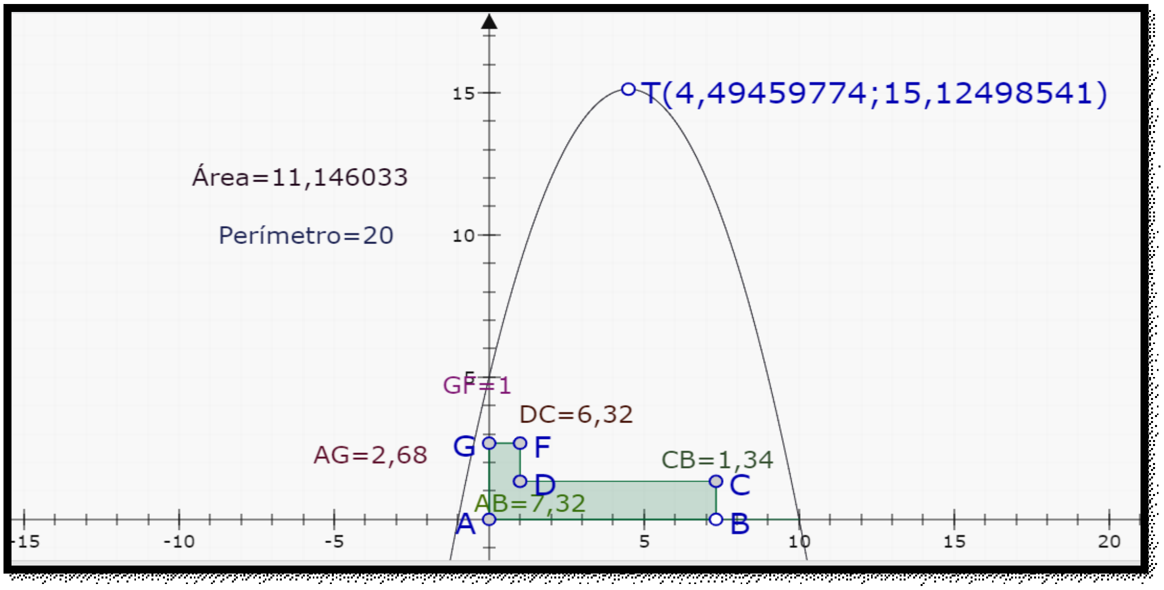

*Figura 6. Gráfica de la función que modela la relación de la longitud de un lado del hexágono con su área.*

***Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo***

En esta etapa se espera que el estudiante utilice estrategias perceptivas para ubicar un punto en la parte "más alta" de la gráfica; si encuentra el punto más alto, encuentra el área máxima. No obstante, se busca que invalide esas estrategias perceptivas para justificar la construcción de la estrategia matemática que propondrá el profesor.

<u>Estrategia perceptiva del estudiante</u>

El estudiante puede ubicar un punto **T** sobre la curva y arrastrar ese punto hasta la posición más alta.



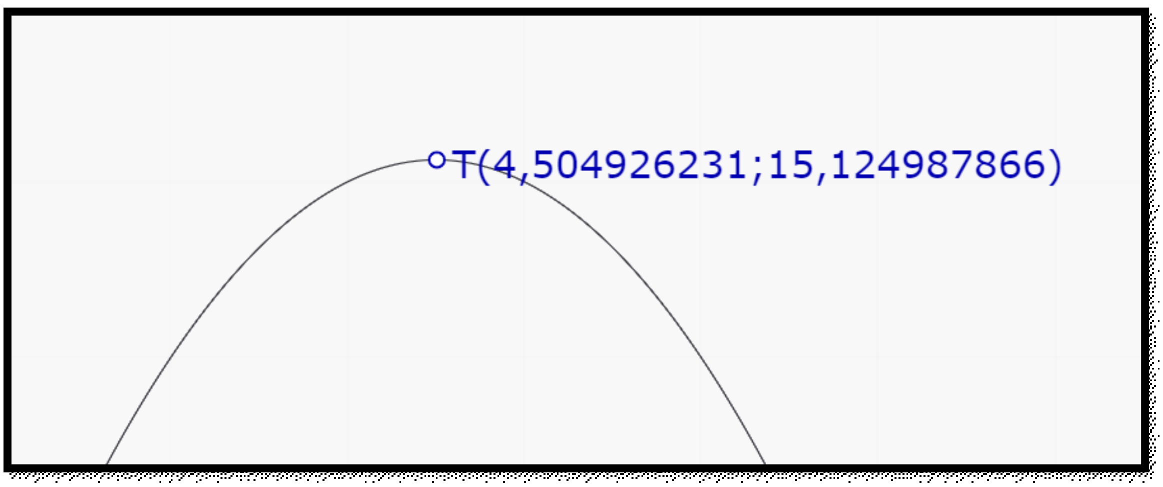




*Figura 7. Zoom en el punto **T.***

<u>Intervención del profesor para proponer acciones de verificación</u>

El profesor propone al estudiante utilizar las coordenadas del punto **T**, aumentar el número de decimales y hacer zoom para verificar con mayor precisión esa estrategia. Al hacer zoom y mover el punto **T**, el estudiante podrá encontrar posiciones del punto **T** más altas que la posición encontrada inicialmente y de esta manera, se invalida su estrategia perceptiva. (Figura 7)

Estrategia matemática del estudiante para determinar el punto máximo de la curva

El estudiante podría utilizar el eje de simetría de la parábola para determinar el vértice de la misma, que corresponde al punto máximo de la función. Para encontrar ese eje de simetría podría tomar los puntos de intersección de la curva con el eje de las abscisas y construir la mediatriz de esos dos puntos; luego encontrar la intersección de esa mediatriz con la curva. Sin embargo, esta estrategia no puede ser usada en DGPad-Colombia, pues el software no construye puntos de intersección de la curva con otros objetos.

Después de invalidar la estrategia perceptiva para determinar el máximo, el profesor le propone la segunda actividad en la que se comienza a construir una estrategia matemática para determinar el punto máximo de una curva.

## Segunda actividad

### *Medición de la altura de diferentes objetos*

El objetivo de esta actividad es que el estudiante construya el sentido geométrico del procedimiento de calcular la función derivada de una función e igualarla a cero, pues equivale a encontrar una recta horizontal tangente a la curva.

Con esta actividad se busca que el estudiante concluya que para determinar la altura de un objeto cuando dicha altura es inaccesible, es necesario colocar una regla paralela al piso, que toque al objeto en su parte más alta y medir la altura de esa regla con respecto al piso.

***Tarea. Medir la altura de un balón y un sombrero, con la mayor precisión posible***.

Para iniciar la actividad se les entrega a los estudiantes una regla no graduada, dos niveles (aplicación “Nivel de burbuja” desde un celular) y una escuadra graduada, un balón y un sombrero (objetos cuya altura es inaccesible directamente) como se muestra en la figura 8.

*Figura 8. Balón utilizado en la actividad.*

Antes de realizar la actividad es necesario que los estudiantes estén familiarizados con los instrumentos y sus usos. En especial, puede ser necesario explicar el funcionamiento del nivel, que no es una herramienta de uso frecuente.

Cabe señalar que esta tarea está diseñada para realizarse en grupos de máximo cuatro estudiantes y cada grupo debe tener los mismos objetos e instrumentos de medición. Para abordar la actividad es posible que los estudiantes planteen algunas de las siguientes estrategias:

<u>Estrategia 1.</u> El estudiante ubica a un lado del objeto la regla graduada para medir su altura y determinar visualmente la medida como se ve en la *figura 9*. Se espera que el estudiante invalide dicha acción comparando la medida obtenida con la de sus compañeros, notando que la estrategia no le permite encontrar un valor preciso, ya que por una parte la inclinación de la regla

puede dar lugar a medidas diferentes, y por otra la estimación visual de la medida varía según el punto de vista.

*Figura 9. Estrategia para medir el objeto inclinando la regla.*

<u>Estrategia 2</u>. El estudiante coloca la regla graduada encima del objeto y la escuadra al lado del objeto (figura 10). La regla que se ubica encima del objeto le permite leer la altura en la escuadra. Se espera que los estudiantes comparen los valores obtenidos y se pregunten por las diferencias entre ellos, concluyendo que puede haber diferentes inclinaciones de la regla que producen diferentes medidas.

*Figura 10. Estrategia para medir el objeto utilizando las dos reglas.*

Si el estudiante no invalida su estrategia, es necesario que el profesor intervenga mostrando posiciones donde la regla no graduada no está en posición horizontal o la regla graduada no es perpendicular al piso, y por lo tanto se producen mediciones diferentes.

Estrategia 3. Para garantizar que la regla que está al lado del objeto se encuentra perpendicular al piso, el estudiante ubica la escuadra contra una pared y ubica el objeto al lado de ésta (figura 11). Esta estrategia no garantiza que la regla no graduada que establece la altura se encuentre paralela al piso. El profesor debe intervenir para hacer notar que diferentes inclinaciones de la regla producen diferentes medidas. El estudiante debe concluir que la regla no graduada debe tocar al objeto y ser paralela al piso.

*Figura 11. Estrategia para medir el objeto ubicando la regla graduada en la pared*

Estrategia 4. El estudiante coloca un nivel encima de la regla no graduada (figura 12) para garantizar la horizontalidad y ubica la escuadra contra la pared para garantizar la perpendicularidad con el piso.

De esta manera transfiere con la regla no graduada la medida del objeto. Si esta estrategia no aparece de manera espontánea el profesor debe sugerirla.

*Figura 12. Uso del nivel para validar horizontalidad de la regla no graduada*

Estrategia 5. El estudiante utiliza los dos niveles (Aplicación del celular llamada “Nivel de burbuja”); ubica uno de los niveles en la regla no graduada para garantizar horizontalidad y el otro al lado de la escuadra para garantizar la verticalidad.

Al igual que con la estrategia anterior el estudiante transfiere la medida del objeto a partir de la regla no graduada que está tocando al objeto en la parte más alta como se muestra en la figura 13.

*Figura 13. Uso de la aplicación de los dos niveles para garantizar horizontalidad y perpendicularidad de las reglas*

Esta actividad debe conducir a una puesta en común con todos los grupos de trabajo, donde se concluye que, si se quiere medir la altura de un objeto sólido de manera precisa, se debe colocar una regla que toque al objeto en su parte más alta, que sea paralela al piso y otra regla que sea perpendicular al piso, que sirve para medir la altura de la primera regla, y por lo tanto la altura del objeto.

**Tercera actividad**

***Aplicación de la estrategia de medición de la actividad 2, en la resolución del problema del hexágono.***

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes transfieran la estrategia de medición de la altura de un objeto a la medición de la altura de la gráfica de la función para determinar el punto máximo. Se espera así dotar de sentido la estrategia de calcular la derivada (para garantizar la tangencia) e igualarla a cero (para garantizar la horizontalidad).

***Tarea. Trazar una recta tangente a la curva de la función cuadrática que sea paralela al eje de las abscisas.***

El profesor pide a los estudiantes que retomen el problema de encontrar el área máxima del hexágono, intentando adaptar la estrategia de medición desarrollada en la segunda actividad. Se espera que los estudiantes afirmen que es necesario trazar una recta horizontal que sea tangente a la curva.

1ª Estrategia perceptiva del estudiante

El estudiante puede construir una recta paralela al eje de las abscisas que pasa por un punto **L** sobre la curva. Al arrastrar el punto **L**, el estudiante intenta que la recta esté en la parte más alta de la curva como se muestra en la figura 14.

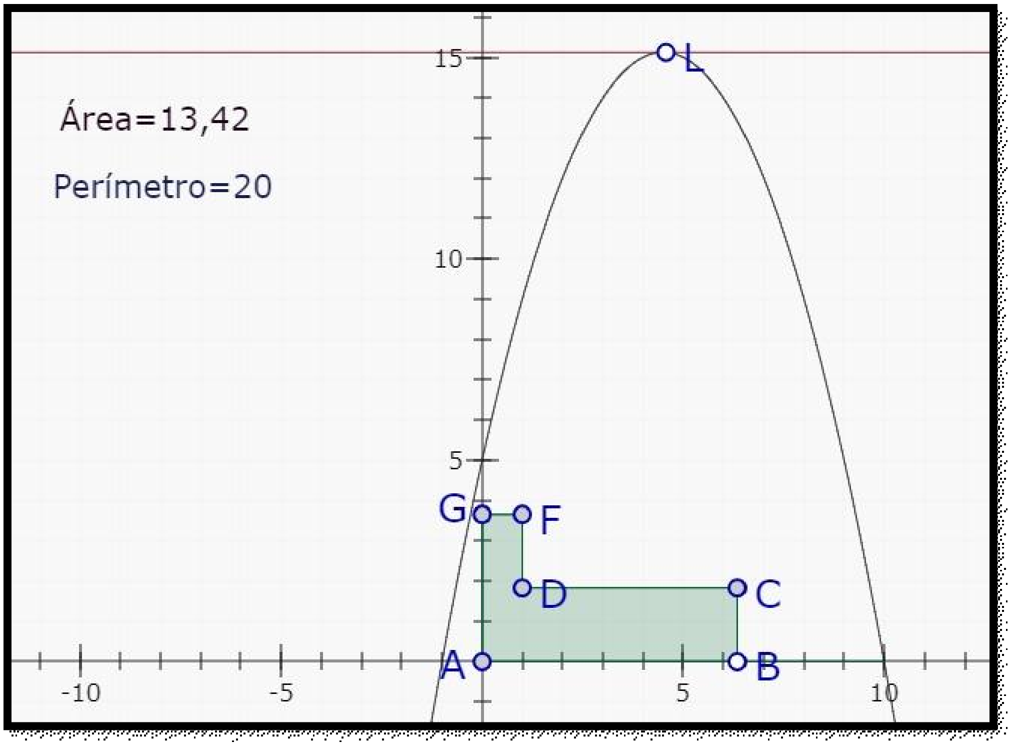



*Figura 14. Recta paralela al eje x que pasa por el punto L*

<u>Intervención del profesor para proponer acciones de verificación con el software</u>

Como la estrategia del estudiante garantiza la horizontalidad de la recta, pero no garantiza la tangencia, el profesor le propone verificar si la recta obtenida es tangente a la curva, utilizando la herramienta macro *intersección* y la herramienta *Zoom*. Con la herramienta *Zoom* el estudiante observa que la recta corta la parábola en los puntos L y Q, invalidando la respuesta dada.

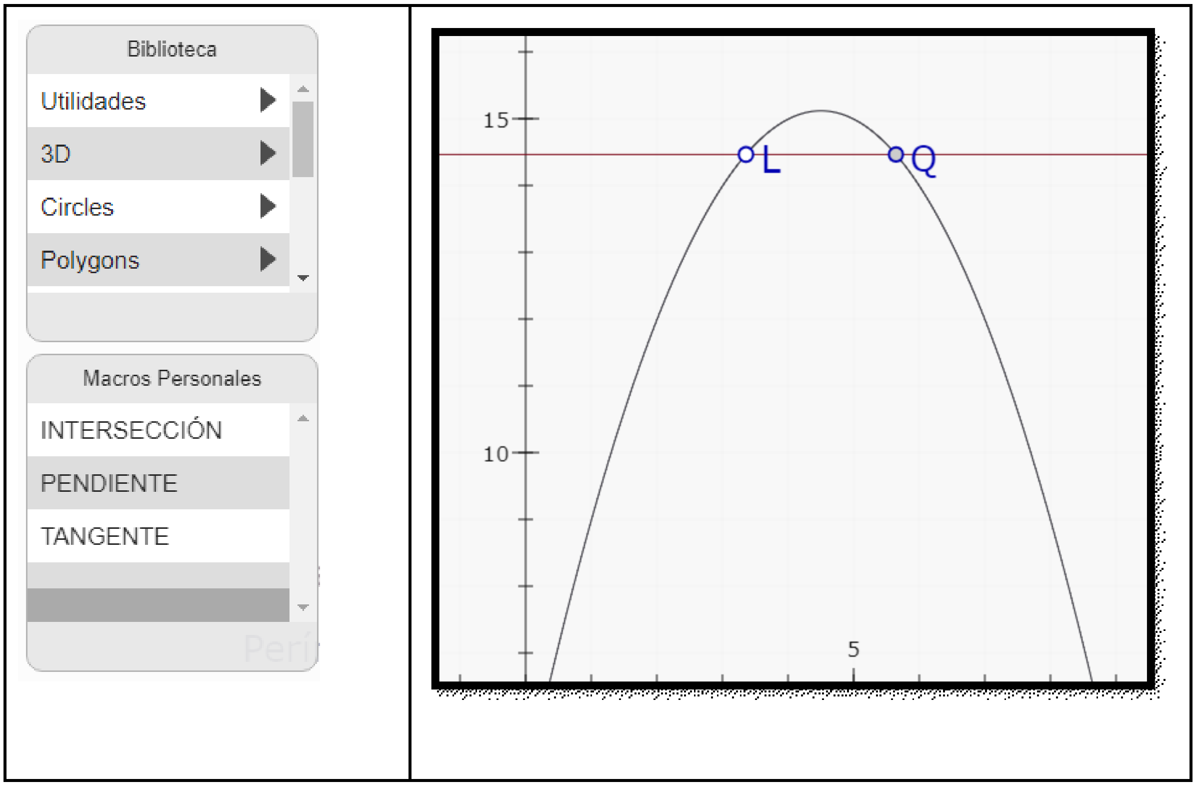



*Figura 15. Formas de verificar que la recta no es tangente*

Una vez invalidada la estrategia anterior, el estudiante deberá aceptar que la recta horizontal que le permite medir la altura de la curva debe ser tangente a la curva, de lo contrario existirán puntos más altos de la curva.

<u>Intervención del profesor para enseñar una herramienta del software</u>

Para trazar una recta tangente a la curva, el profesor le sugiere al estudiante usar la macro **Tangente**. Esta macro construye la recta tangente a la curva en un punto.

Para verificar que dicha recta es tangente a la curva en el punto **K**, el estudiante puede construir la **intersección** (Macro) entre la recta y la curva; de esta manera comprueba que la recta solamente toca a la curva en el punto **K**.

El estudiante utiliza la macro **Tangente** para construir una recta tangente y arrastra esa recta tangente hasta que parezca horizontal.

Intervención del profesor para proponer acciones de verificación

1) El profesor propone usar la macro ***Pendiente*** para verificar si la pendiente de la recta tangente que pasa por K es cero.

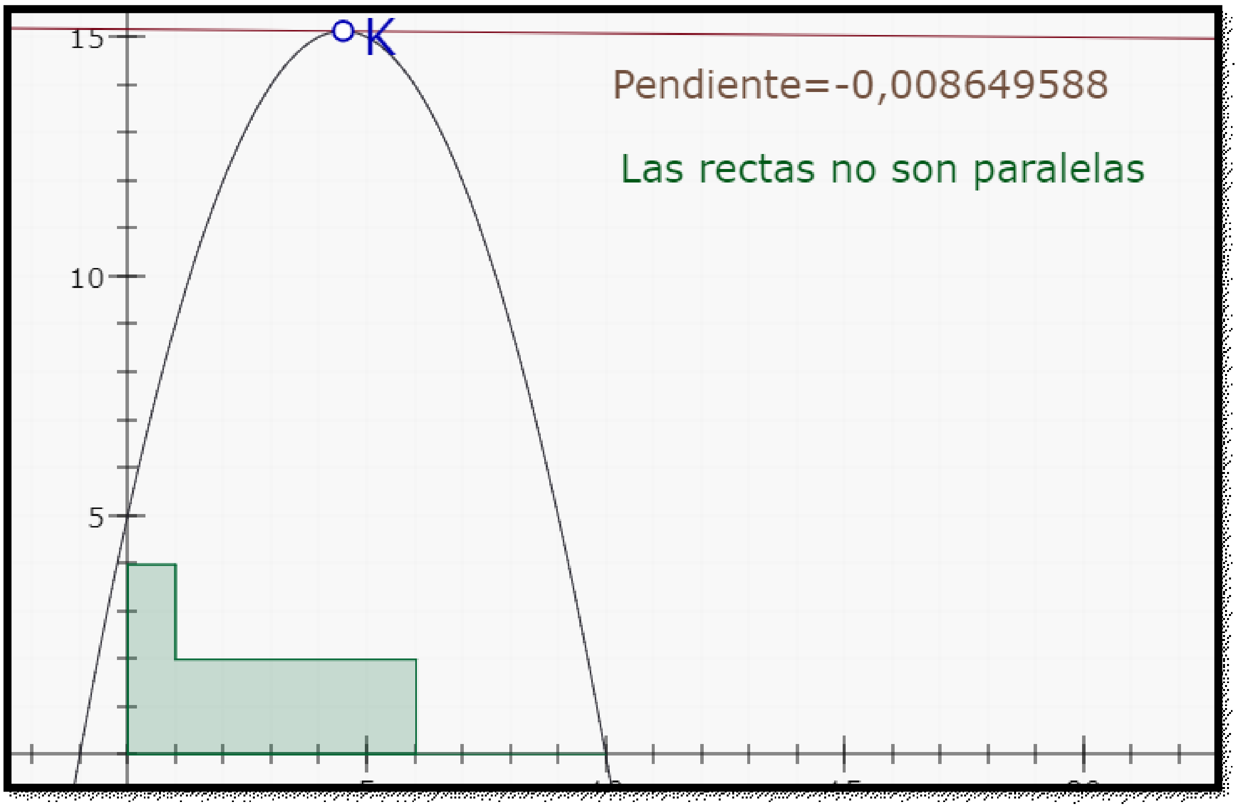



*Figura 16. Formas para invalidar la estrategia de horizontalidad de la recta tangente.*

2) El profesor propone utilizar el Test de paralelismo (Que se encuentra en la herramienta de macros- biblioteca) para comprobar si la recta tangente que pasa por el punto **K** es paralela al eje de las abscisas. En la figura 16 pueden verse los resultados de aplicar estas dos estrategias de verificación.

El estudiante ha invalidado sus dos estrategias perceptivas por medio de las retroacciones del software, dándose cuenta que necesita una forma de garantizar que la recta construida sea tangente a la curva y paralela al eje de las abscisas.

<u>Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática</u>

Las estrategias perceptivas anteriormente descritas lograban garantizar o bien que la recta es horizontal o que es tangente, pero no podían garantizar las dos condiciones simultáneamente; por lo tanto, el profesor interviene para proponerle al estudiante una estrategia matemática donde se logren ambas condiciones. Esta estrategia consiste en calcular las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva y encontrar los puntos en los que esa pendiente es cero.

Aquí el profesor debe convencer a los estudiantes de que para resolver un problema particular se puede pasar por la resolución de un problema general; en este caso, para encontrar un punto de la curva cuya recta tangente tiene pendiente cero, se calculan todas las pendientes de todas las rectas tangentes y se utiliza la representación gráfica de ese conjunto de valores para determinar los puntos en los que la pendiente es cero.

El profesor propone construir un punto **R** que relacione la abscisa del punto **K** sobre la curva, con la pendiente de la tangente que pasa por **K**. Recuerda que la abscisa de un punto sobre la curva representa la longitud del lado ***AB*** del hexágono.

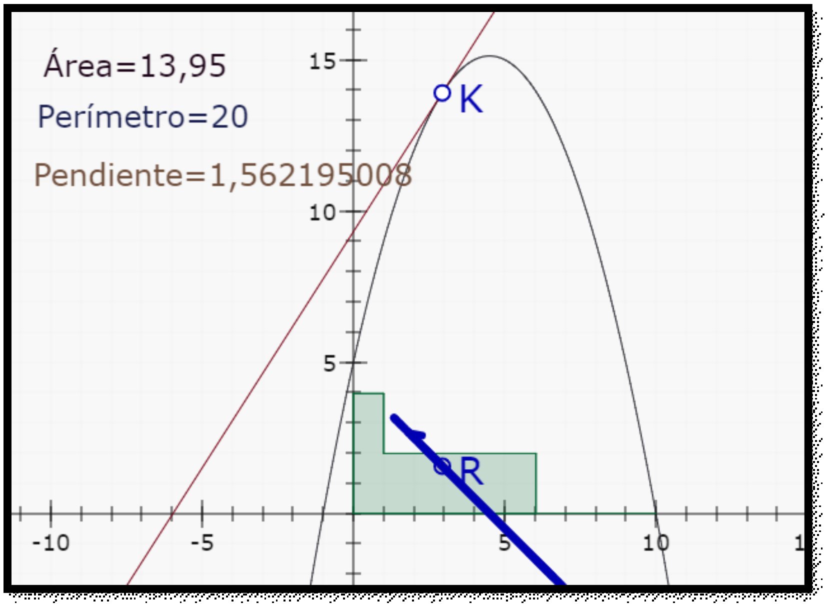



*Figura 17. Traza del punto **R** que representa la pendiente de todas las rectas tangentes.*

El estudiante debe deducir que la traza del punto **R** muestra las pendientes de las rectas tangentes a la curva; por lo tanto, debe concluir que cuando la traza corta al eje x se encuentra el punto de la curva cuya abscisa tiene como pendiente 0.

Como la traza de un punto **R** no permite determinar su intersección con otro objeto geométrico, el estudiante debe construir la recta que corresponde a ese lugar geométrico. (figura 18)

El profesor le propone construir un punto **S** con las mismas características del punto **R** y así poder construir la recta que representa todas las pendientes de las rectas tangentes, como se muestra en la figura 19.

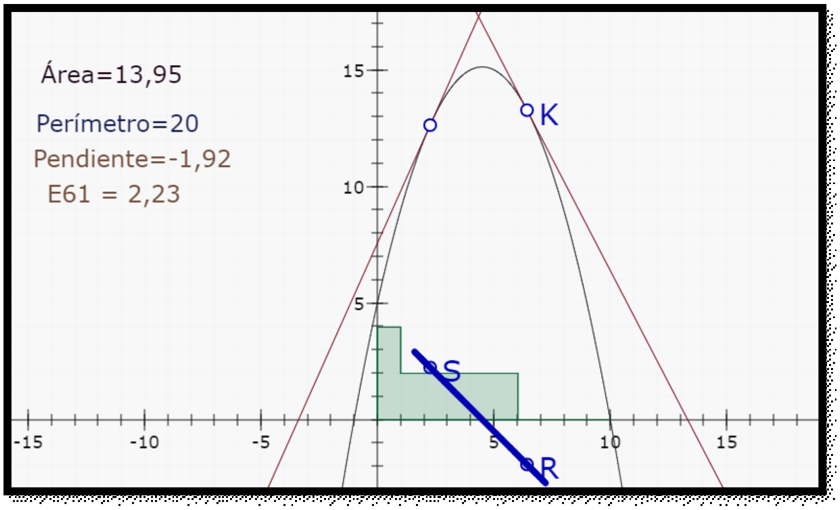



*Figura 18. Lugar geométrico de las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva.*

El estudiante debería deducir que, si construye el punto de intersección **H** entre la recta construida y el eje x, dicho punto tiene ordenada cero.

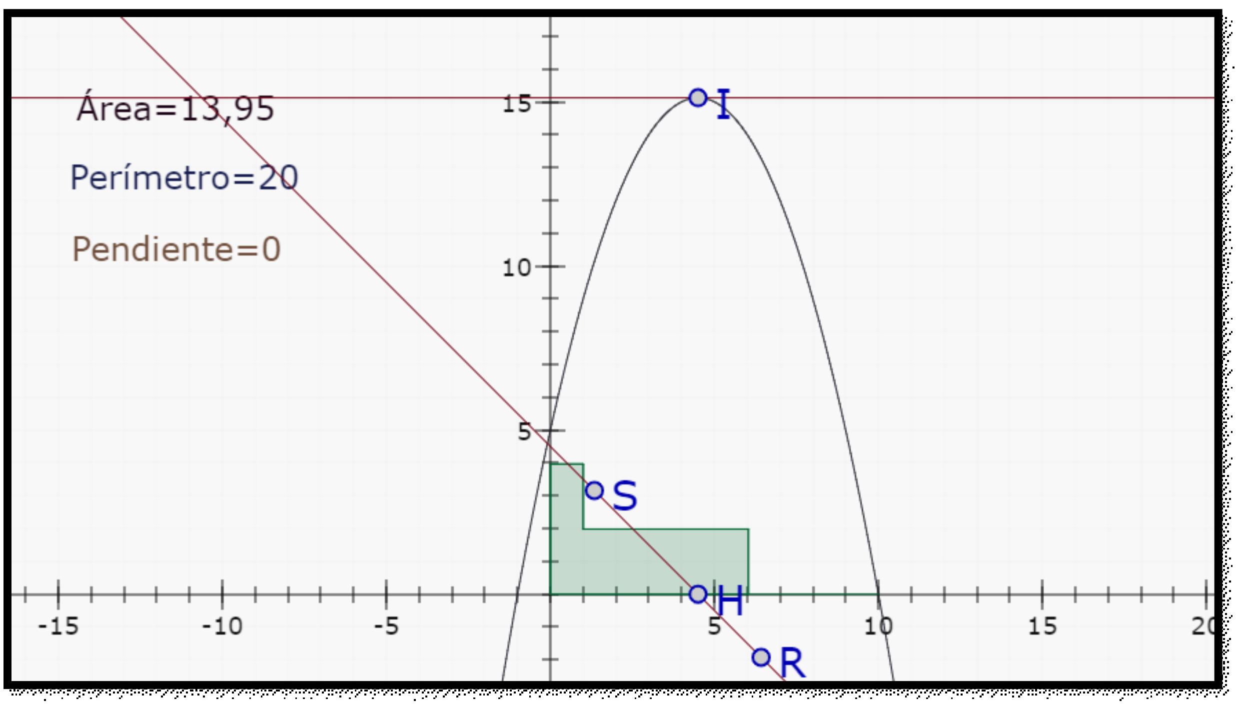



*Figura 19. Recta tangente que pasa por **I** con pendiente igual a 0.*

Por lo tanto, la recta tangente a la curva por el punto que tiene esa abscisa (punto I) tendrá como pendiente 0 como se muestra en la figura 19. El profesor le propone utilizar las herramientas de verificación que se utilizaron anteriormente: macro Pendiente y Test de paralelismo para que pueda corroborar si la recta construida es tangente a la curva y su pendiente es cero; es decir, que ha construido una recta horizontal, paralela al eje de las abscisas.

El estudiante revisa las coordenadas del punto **I**, identificando que el área máxima del hexágono (redondeada a tres decimales) es **15,125** ya que si se aumenta el número de cifras decimales se obtiene una aproximación como, por ejemplo: 15, 124989999.

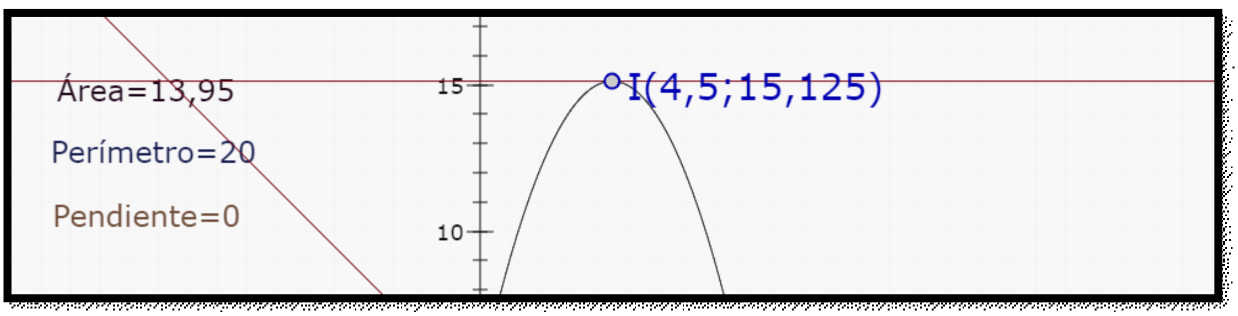



*Figura 20. Área máxima del hexágono*

El estudiante valida este resultado, usando el Test de paralelismo y calculando la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **I**, además de utilizar todas las estrategias de verificación: hacer zoom, mostrar más decimales y arrastrar, para verificar que realmente ese es el punto más alto, como se muestra en la figura 20. Se espera que concluya que sus estrategias perceptivas no le permitieron resolver el problema ya que fueron invalidadas con las retroacciones del software y que la estrategia matemática propuesta por el profesor sí resolvió el problema.

## Cuarta Actividad

El propósito de esta actividad es introducir una estrategia matemática para construir una recta tangente a una curva en un punto. En esta actividad se aborda la noción de límite mostrando la imposibilidad de calcular directamente la pendiente de la recta tangente y se introduce la estrategia matemática de cálculo del límite por medio de un lugar geométrico.

El profesor recuerda que para resolver el problema del hexágono fue necesario construir rectas tangentes a la curva de la función que modela el problema y calcular sus pendientes para poder determinar los puntos de la curva cuyas tangentes son horizontales. Para construir las rectas tangentes y calcular sus pendientes se utilizaron macros. Propone entonces el problema de construir una recta tangente a la curva en un punto y calcular su pendiente sin utilizar esas macros

Se le presenta al estudiante un archivo en DGPad-Colombia con la gráfica de la función que modela el problema del hexágono y dos puntos **J y U** sobre la curva.

***Tarea. Hacer que la recta JU sea tangente a la curva que modela el problema***

El propósito de esta tarea es que el estudiante intente lograr que la recta **JU** corte a la curva en un solo punto. La estrategia perceptiva que consiste en llevar el punto **J** sobre **U** se verá invalidada por las retroacciones del software, generando la necesidad de una estrategia matemática que será introducida por el profesor.

***Estrategia perceptiva del estudiante***

El estudiante arrastra el punto **J** hasta que quede superpuesto con **U** buscando que la recta secante pase a ser una recta tangente. Se espera que el estudiante invalide esta estrategia, al observar que cuando **J** está sobre **U,** la recta secante desaparece como se muestra en la figura 21.

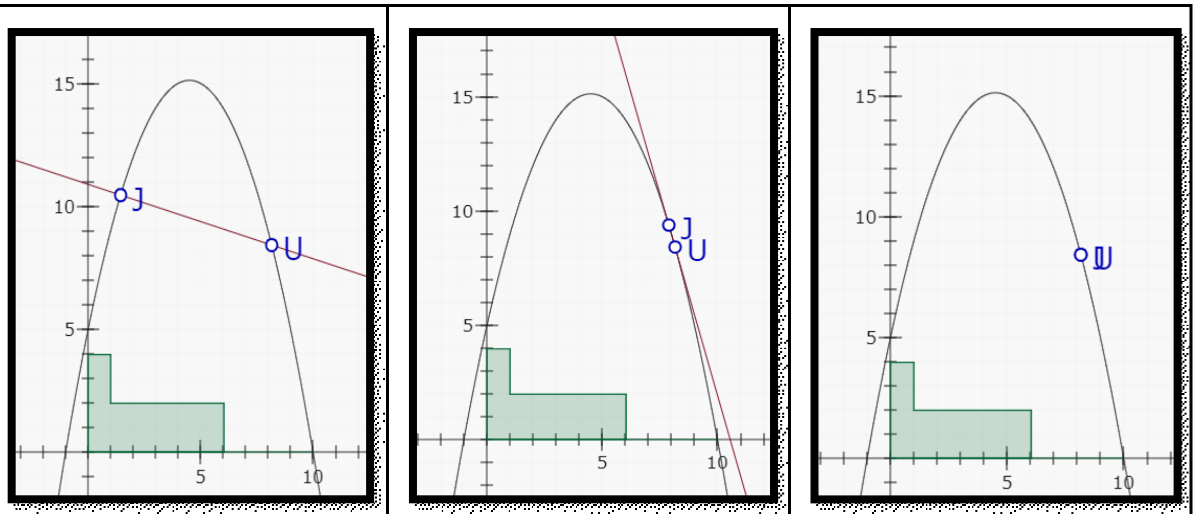



*Figura 21. Punto J superpuesto en U*

***Intervención del profesor para proponer acciones de validación***

Como el estudiante necesita encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **U**, pero se encuentra con la dificultad que esta desaparece cuando **J** y **U** están superpuestos, el profesor le propone calcular la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por **J** y **U** usando la macro Pendiente, para identificar si es posible calcular así el valor de la pendiente de la recta cuando se vuelve tangente.

El estudiante invalida esta estrategia al observar que cuando los puntos coinciden, la macro no arroja ningún valor para la pendiente (ver figura 22)

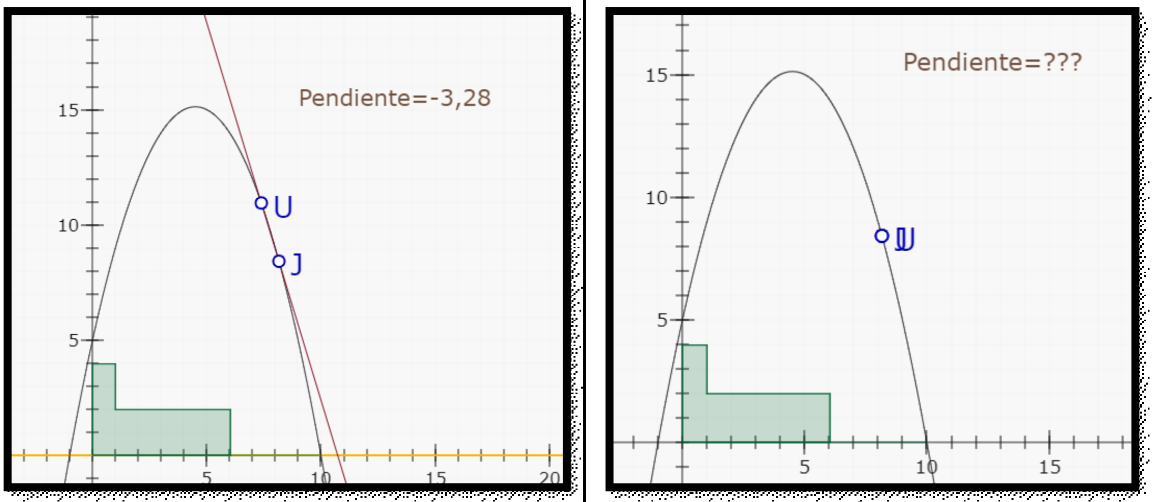



*Figura 22. Cálculo de la pendiente de la recta secante y de la recta tangente a la curva*

El profesor le sugiere al estudiante calcular (de forma aritmética) la pendiente de la recta **JU** cuando **J** es igual a **U**. Se espera que el estudiante pueda concluir que esto no funciona porque queda un cero en el denominador a partir de la fórmula aritmética para hallar la pendiente de una recta:

$Pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, asumiendo que cuando **J** está sobre **U** tienen las mismas coordenadas:

$$Pendiente = \frac{y(U) - y(J)}{x(U) - x(J)}$$

El estudiante concluye que no es posible conocer la pendiente de la recta dado que su valor es indeterminado.

*Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática*

Como el estudiante se dio cuenta que no es posible calcular de manera directa la pendiente de una recta tangente, el profesor le explica que una forma de encontrar este valor consiste en calcular la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por el punto **U**; es decir, aplicar la estrategia de generalización y así poder encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva a partir de la construcción del *lugar geométrico* que representa todas las pendientes de las rectas secantes.

El profesor propone al estudiante construir un punto **M** que tenga como abscisa la diferencia de las abscisas de los puntos **U** y **J**, y como ordenada la pendiente de la recta secante **JU**. Luego le pide que mueva el punto **J** dejando fijo el punto **U** y que explique el movimiento del punto **M**. Se espera que el estudiante diga que cuando **J** se mueve sobre la curva, la pendiente va variando y por lo tanto la ordenada de **M** también varía; que reconozca que a medida que **J** se acerca a **U** la abscisa de **M** se acerca a cero, que cuando **M** está por encima del eje **x** la pendiente de la recta **JU** es positiva y cuando **M** está por debajo del eje **x** la pendiente es negativa; a su vez, que pueda deducir que cuando **J = U**, el punto **M** está sobre el eje **y**.

El profesor le propone activar la traza del punto **M** para obtener información visual de todas las pendientes de la recta secante. El estudiante activa la traza del punto **M** y mueve el punto **J** obteniendo la huella que va dejando el punto (forma de línea recta) como se muestra en la figura 23.

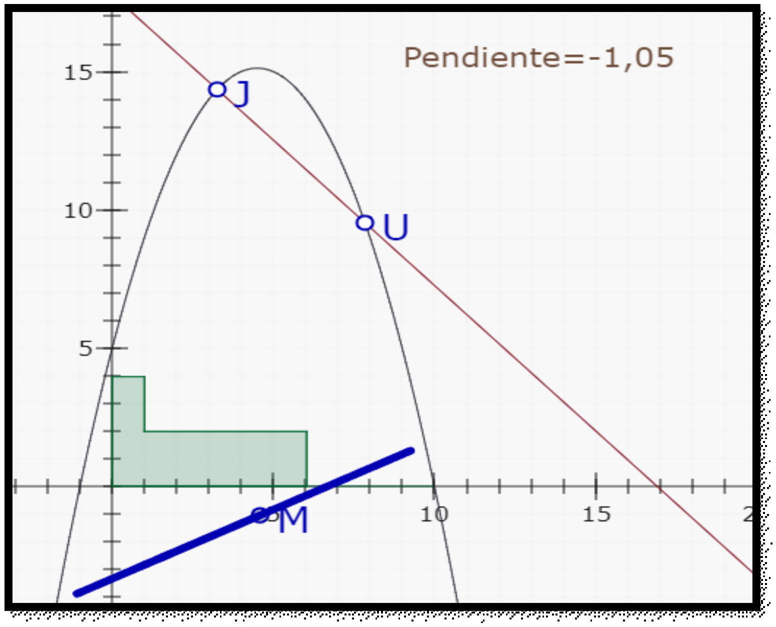



*Figura 23. Traza del punto M que representa la pendiente de todas las secantes que pasan por el punto U.*

Luego de construir el punto **M** y activar la traza, el estudiante observa el movimiento del punto y contesta las siguientes preguntas hechas por el profesor: ¿cómo está caracterizado el punto **M**? ¿En qué posición del punto **M** la recta **JU** es tangente a la curva? ¿Para qué posición del punto **M**, el punto **J** queda sobre el punto **U**? Se espera que el estudiante concluya que cuando el punto **M** tiene abscisa 0, es decir cuando el punto **J** está superpuesto en **U**, la ordenada de **M** es la pendiente de la recta tangente.

La intersección de la traza del punto **M** con el eje ***y*** es el valor de la pendiente buscada. Como no es posible construir la intersección de una traza con un objeto geométrico, el estudiante debe construir la recta que describe la traza del punto **M** y la intersección **Q** entre esa recta y el eje **y** como se muestra en la figura 24.

Se espera que el estudiante concluya que la ordenada del punto **Q** es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto **U**.

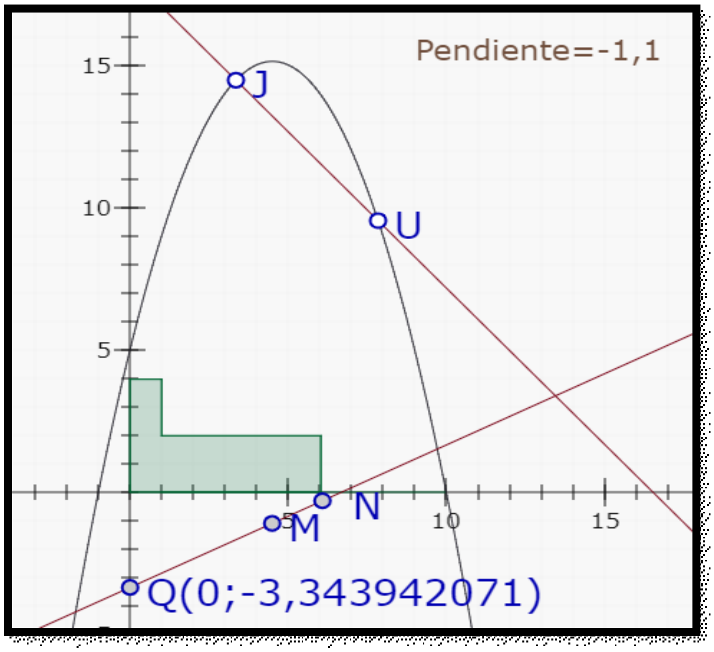



*Figura 24. Lugar geométrico pendiente de todas las secantes*

El profesor le propone al estudiante que construya una recta que pase por **U** y que tenga como pendiente la ordenada de **Q** y verifique si esa recta es tangente a la curva. Para ello, se necesita determinar un segundo punto de la recta tangente. Para trazar la recta tangente que pase por el punto **U** conociendo su pendiente, el profesor interviene sugiriendo al estudiante ubicar otro punto de la recta tangente teniendo como estrategia que la diferencia de las abscisas entre los dos puntos de la recta sea igual a la unidad.

$$Pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Pendiente}{1}$$

El estudiante debe tomar la ordenada del punto **Q**. Está ordenada representa la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto fijo **U**. Hay que construir un punto **U'** que cumpla la siguiente ecuación:

Pendiente= $\frac{y(U')-y(U)}{x(U')-x(U)} = \frac{y(Q)}{1}$

**Por lo tanto** $y(U') - y(U) = y(Q)$ y $x(U') - x(U) = 1$

**Entonces** $y(U') = y(Q) + y(U) \qquad x(U') = 1 + x(U)$

Posteriormente, se traslada la distancia del origen (0,0) a **Q** hasta el punto **U** y se traza una perpendicular al eje **x** desde el punto **U** y se marca el punto de intersección **W** entre la perpendicular y la circunferencia; seguido a esto, el estudiante desde el punto **W** construye una circunferencia con radio igual a la unidad y traza una perpendicular al eje **y** como se muestra en la figura 25.

Luego construye el punto **U'** de intersección entre la perpendicular al eje **y** que pasa por el punto **W** y la circunferencia de radio **1** que tiene como centro **W.**

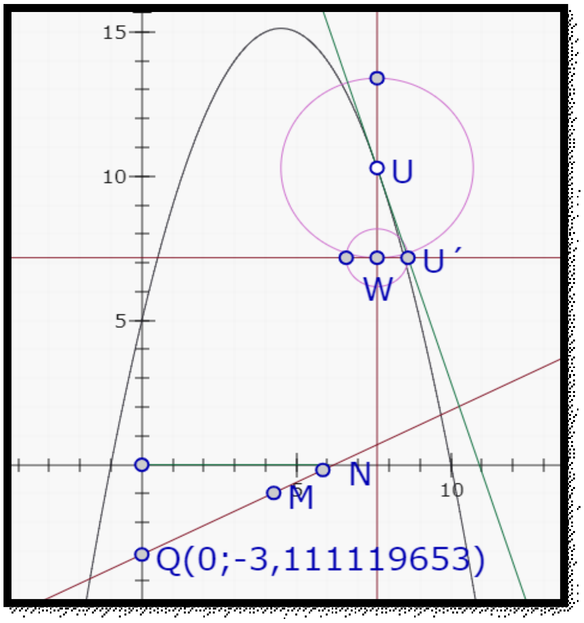



*Figura 25. Traslado de la distancia de la pendiente sobre el punto fijo U.*

De esta manera la recta que se traza del punto **U** al punto **U'** representa la recta tangente a la función cuadrática que pasa por el punto **U**. El estudiante puede validar esta construcción con la herramienta macro *pendiente*, de la recta que pasa por los puntos **U** y **U'**. Una vez que el estudiante tenga el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos **U** y **U',** se le pide construir con la macro *tangente,* una recta que pase por el punto **U** y calcular su pendiente con la macro *pendiente.* El estudiante debe concluir que los dos valores calculados son el mismo.

Con esta actividad se espera que el estudiante concluya que no es posible calcular la pendiente de la recta tangente directamente, pero sí es posible utilizando el lugar geométrico que representa las pendientes de todas las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia. (figura 26)

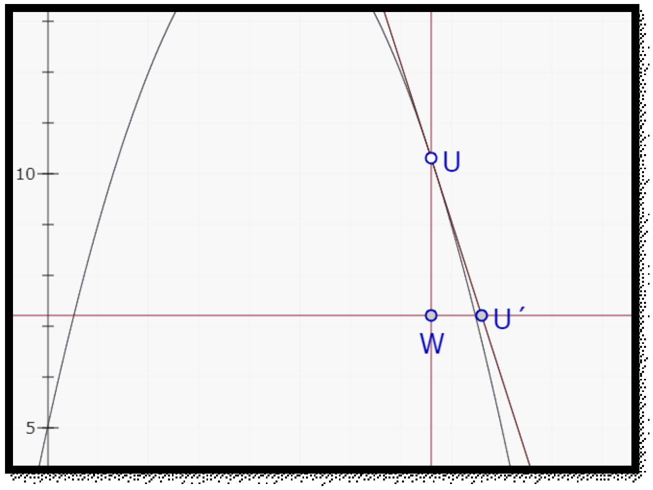



Figura 26. Recta tangente a la gráfica de una función cuadrática por el punto U.

## Análisis Primer Pilotaje

A continuación, se presentará el desarrollo de las actividades por dos estudiantes de grado décimo, en donde se reconoce las estrategias perceptivas, las invalidaciones y las intervenciones del profesor para solucionar la situación propuesta del hexágono planteada en el análisis a priori.

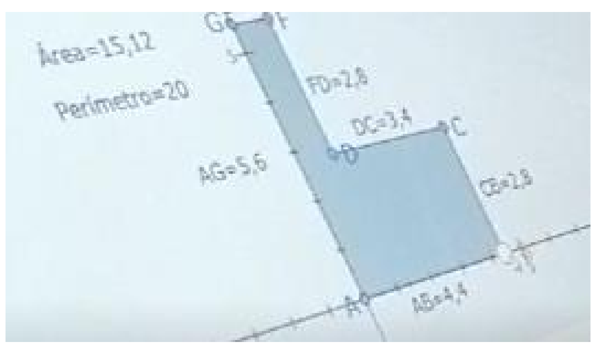
### Actividad 1

Se entrega una representación gráfica dinámica del hexágono, gracias a la cual los estudiantes pueden emplear una estrategia perceptiva para buscar el valor máximo del área y se espera que invaliden esa estrategia. Luego se introduce la función que asocia el área a valores variables de un lado del hexágono, y su gráfica, invalidando estrategias perceptivas para determinar el punto más alto de la gráfica de la función.

| | |
|---|---|
| 4. | E1: Las condiciones son las siguientes: Un lado debe tener como longitud un metro. |
| 5. | P: En este caso ¿Qué lado tiene como longitud un metro? |
| 6. | E2: El lado GF |
| 8 | (Los estudiantes intentan mover los puntos del hexágono, pero notan que el único punto que se puede arrastrar es el punto B).<br>E2: La figura se mueve y cambia los lados menos el DF, pero solo se mueve el punto B. |
| 9 | P: ¿Qué otras condiciones deben cumplir la construcción? |
| 10 | E1: Que los dos lados adyacentes a este deben ser uno el doble del otro. |
| 12 | E2: Los lados adyacentes, serían AG y DF |
| 13 | P: ¿Y cumplen la condición que en este caso sea uno del doble del otro? |
| 14 | E2: Sí, siempre que se mueve la figura DF está en la mitad y AG es el doble. |

| | |
|---|---|
| 16 | E1: El perímetro debe ser de 20 metros sin importar que se mueva, el perímetro no tiene ningún tipo de cambio |
| 17 | E2: Siempre está igual. |
| 18 | P: Y ¿El área si va a cambiar? |
| 19 | E1, E2: Sí, el área va a cambiar. |

Los estudiantes intentaron arrastrar todos los puntos del hexágono y concluyeron a partir de las retroacciones del software que el único punto que se mueve es B y que siempre se cumplen las condiciones del enunciado. Acciones previstas en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 24 | P: Entonces qué harían para responder la pregunta, es decir, que el área sea la mayor posible. |
| 25 | E2: Lo que podríamos hacer es mover el punto B y ver cómo varía el área y dónde está el punto máximo. |
| 26 | P: Ok y en este caso, para ustedes ¿Cuál es el punto máximo? |
| 28 | (Los estudiantes arrastran el punto B, hasta encontrar el valor más grande en el área 15,12) |
| 29 | E2: Sería este que da 15,12 (como se muestra en la imagen)<br><br><br>*Figura. Área del hexágono propuesta inicialmente* |

| | |
|---|---|
| 31 | E1: No creo. Aumenta hasta 24 mira. |
| 32 | (Los estudiantes mueven el punto B) |
| 33 | E2: 15.124, un poquito más hacia la derecha, creo que ahora sí sería. |
| 34 | E1: Creo que ahí |
| 35 | P: ¿Esa sería la mayor posible? |
| 36 | E1 y E2: Sí |
| Se observa que los estudiantes intentan encontrar perceptivamente la mayor área arrastrando el punto B y piensan haberla encontrado. | |

| | |
|---|---|
| 37. | El profesor les indica a los estudiantes cómo se hace zoom desde el computador y cómo aumentar el número de decimales del área. |

El estudiante arrastra el punto B hasta obtener el valor como se muestra en la siguiente imagen:

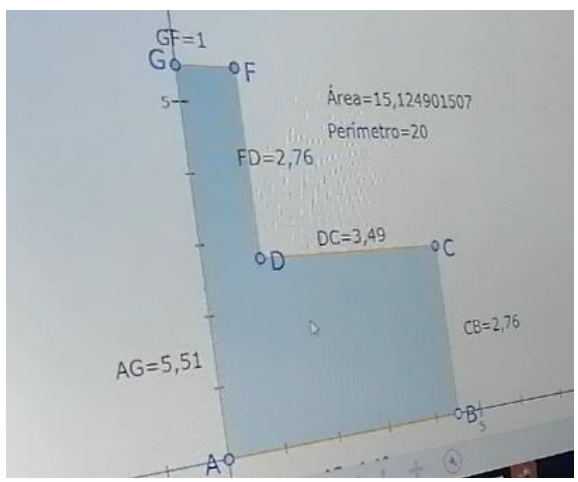


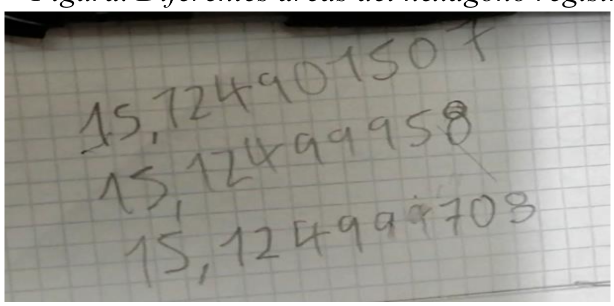

*Figura. Área del hexágono propuesta con decimales*

E1: 15,124901507

<table>
<tr><td>42</td><td>E2: Si lo movemos un poquito más sería este (Los estudiantes hacen referencia al número 15,12499958)</td></tr>
<tr><td>43</td><td>E1: Sí, ese sería el mayor posible</td></tr>
<tr><td>44</td><td>P: ¿Si le hiciéramos más zoom será que se puede encontrar una mayor?</td></tr>
<tr><td>45</td><td>E2: Sí probablemente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Los estudiantes buscan perceptivamente una medida mayor, arrastrando el punto B).</td></tr>
<tr><td>48</td><td>E2: No hay otra mayor.</td></tr>
<tr><td>49</td><td>P: ¿Si hacemos más zoom?<br>Cuando haga zoom hay que seleccionar la flecha para poder mover la construcción y cuando no aparezca seleccionada. Por ejemplo, ahí sí miramos el valor del área<br>


<br>*Figura. Área del hexágono propuesta*<br>(Los estudiantes hacen zoom)</td></tr>
</table>

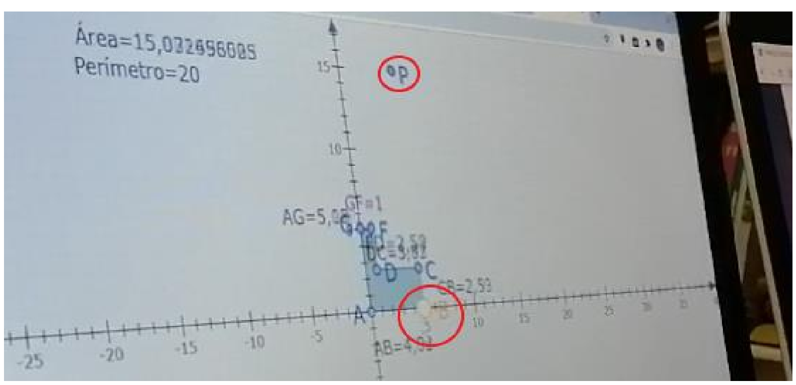
<table>
<tr><td>59.</td><td>P: Si hiciéramos zoom ¿Se hallaría una más grande?</td></tr>
<tr><td>60.</td><td>E2: Sí, se encontró esta 15,124999708.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(El profesor invita a verificar lo dicho por los estudiantes. Les pide retomar la tarea haciendo acciones como lo es: realizando zoom y encontrar una medida mayor)</td></tr>
</table>

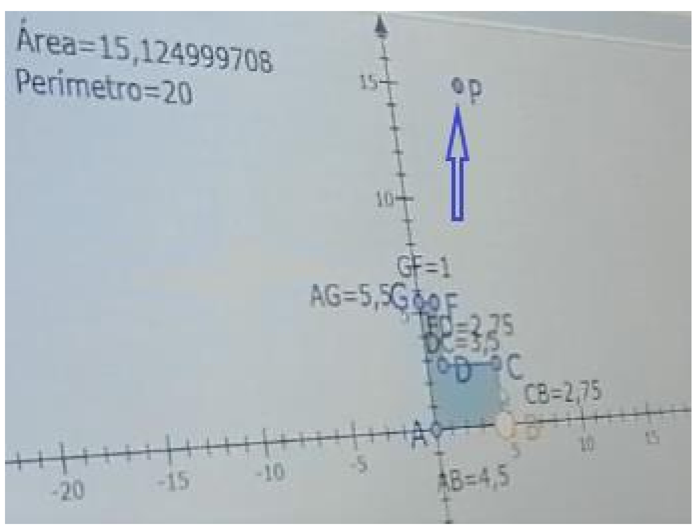
<table>
<tr><td>61.</td><td>P: ¿Si seguimos haciendo zoom ustedes creen que encontraríamos una más grande? ¿Ustedes que creen?</td></tr>
<tr><td colspan="2">(El profesor intenta que los estudiantes anticipen un suceso y así validar o invalidar creencias que estén forjando)</td></tr>
<tr><td>62.</td><td>E2: Sí, se encontraría una más grande, sería como un bucle infinito entre más zoom se haga, más grande se puede encontrar un punto más exacto.</td></tr>
<tr><td>63.</td><td>P: Exacto, siempre vamos a poder encontrar una más grande.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(El profesor interviene validando lo dicho por los estudiantes.)<br><br>*Figura. Diferentes áreas del hexágono registradas*<br></td></tr>
</table>

Como se esperaba en el análisis a priori: Los estudiantes aumentaron el número de decimales e hicieron zoom para encontrar una posición donde el área fuera mayor, e invalidaron la estrategia utilizada al darse cuenta que iban a encontrar un área mayor a las registradas.

A continuación, se observa cómo los estudiantes construyen el punto P para relacionar el área de la figura con la longitud del lado AB del hexágono.

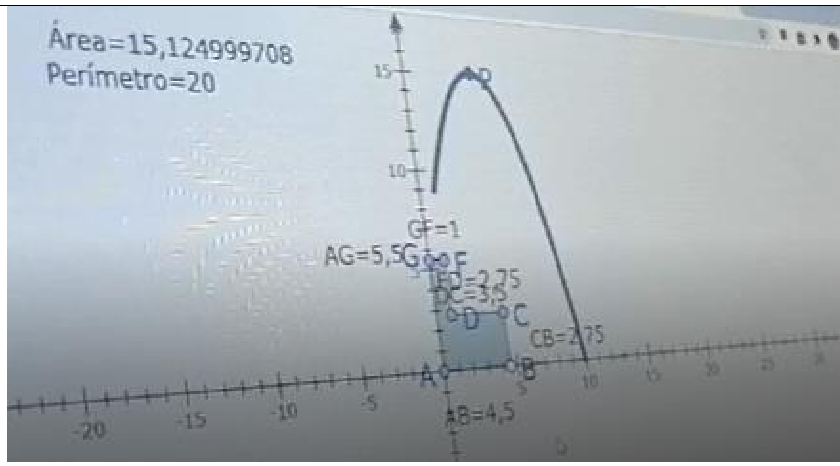
<table>
<tr><td>79.</td><td>P: ¿Qué estamos queriendo relacionar?</td></tr>
<tr><td>80.</td><td>E2: El área con el movimiento de B</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 81. | P: Exacto, relacionar el área con el movimiento de B. Entonces, si la abscisa tiene las coordenadas de *x(B),* entonces la ordenada, que es *y,* ¿A quién va a relacionar, si estamos haciendo la relación segmento de AB con el área? |
| 82. | E1: P |
| 83. | P: Necesitamos relacionar dos cosas, la longitud del segmento AB, pero como yo puedo mover, como ven en la construcción, yo puedo mover solo B, entonces vamos a decir *x(B)* significa la abscisa de ese punto que la vamos a relacionar con el área del hexágono, entonces para esa relación ya tenemos *x(B)* ¿Nos faltaría relacionar qué?<br>¿Qué es lo queremos relacionar? |
| 84. | E2: El área |
| 90 | P: Si estamos diciendo que relaciona el movimiento de *x(B)* con respecto al área, entonces ¿Qué pasa cuando movemos B? |
| 91 | E2: También se movería P |
| 94 | (Los estudiantes mueven el punto B para verificar que el punto P también se mueve)<br><br><br>*Figura. Relación del punto P con el punto B* |
| 95 | P: Si quieren muevan bien la figura, para que vean el movimiento que está haciendo P al arrastrar B |

<table>
<tr><td>96</td><td>E1: Se mueve como un tipo de círculo</td></tr>
<tr><td>97</td><td>E2: No, se mueve como una parábola</td></tr>
<tr><td>98</td><td>E2: Sería como una función</td></tr>
<tr><td colspan="2">(El estudiante E2 al ver que el movimiento del punto P tiene forma de parábola lo relaciona como una función)</td></tr>
<tr><td>99</td><td>P: El comportamiento del punto P es como si fuera una parábola, entonces ese punto ¿Qué es lo que relaciona?</td></tr>
<tr><td>100</td><td>E2: El área con el movimiento que hace B</td></tr>
<tr><td>101</td><td>P: Entonces si yo quiero encontrar el área que es más alta</td></tr>
<tr><td>102</td><td>E2: Es el punto más alto donde este P</td></tr>
<tr><td>103</td><td>P: ¿Sería el punto más alto?</td></tr>
<tr><td>104</td><td>E1: Sí, sería el punto más alto (Señalan P)<br>P: ¿Cuál creen que sería el punto más alto?<br>
<br>Figura. Ubicación visual de P en la parte más alta</td></tr>
<tr><td>105</td><td>E2: Más o menos por acá</td></tr>
</table>

Los estudiantes mueven el punto B para ubicar el punto P en la parte más alta de su recorrido, concluyendo que el área mayor va a estar cuando el punto P esté en la parte más alta. Acciones que estaban previstas en el análisis a priori.

Los estudiantes de forma perceptiva ponen el punto P en la parte más alta de la traza que crearon.

| | |
|---|---|
| 113 | (Los estudiantes ponen P en el punto más alto que ellos consideran, con ayuda de la traza del punto P) |
| 114 | P: ¿Siguen diciendo que el movimiento de P forma una parábola? |
| 115 | E1: Sí |
| 116 |   *Figura. Ubicación del punto P a partir de la traza* |
| 117 | P: si le hiciéramos zoom a la figura ¿Qué pasaría? |
| 118 | E2: se desaparece la traza y el punto P |

Los estudiantes comparan la posición del punto P con las coordenadas y la medida que tenían anotada en el cuaderno. De igual manera, activan la opción de medida del punto P, para mirar el valor que tiene con 6 decimales. La acción de activar la medida del punto P no estaban prevista en el análisis a priori, los estudiantes siguen guiándose de los valores que muestra el punto P, sin embargo, más adelante invalidan la estrategia.

| | |
|---|---|
| 121 | P: Hagan de nuevo zoom a la figura ¿Qué pasa al hacerle zoom? |
| 122 | E1: Cada vez que se le hace zoom desaparece la traza<br>y el punto P se pierde... |

Como se tenía previsto en el análisis a priori: Cuando la traza desaparece le impide al estudiante reconocer perceptivamente si el punto P es el más alto, por lo cual el profesor hace la intervención y propone la estrategia matemática de construir la gráfica de la función.

| | |
|---|---|
| 308. | (Los estudiantes ya visualizan la función que se generó y le dan clic en la herramienta crear función.)<br>P: Ahora ya que tenemos la función, hacemos zoom, y si quieren movemos el punto B a ver qué trayectoria va a hacer.<br>(Los estudiantes hacen zoom y mueven el punto B) |
| 309. | P: ¿Qué pueden observar?, ¿Qué trayectoria describe P? |
| 310. | E1: Sigue el mismo trayecto, para verificar el movimiento de B con el área. |
| 311. | P: ¿O sea que corresponde a la gráfica que se creó? |
| 312. | E2: Sí |
| 313. | P: ¿Por qué la traza no describe toda la gráfica? |
| 314. | E1: Porque describe la traza que hace la figura hasta dónde llega. |
| 315. | P: ¿Hasta dónde llega quién o qué elemento? |

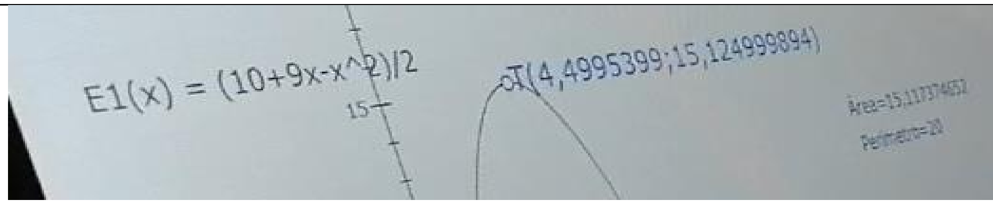
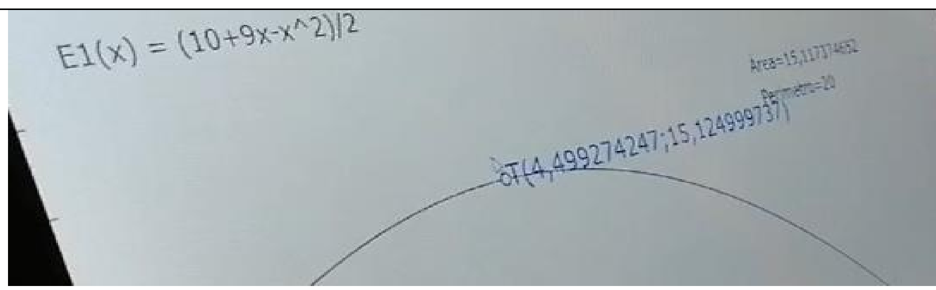
| | |
|---|---|
| 316. | E1: Hasta dónde puede llegar el movimiento máximo de la figura o sea el más grande que puede ser el lado (Haciendo referencia a AB), o sea hasta dónde puede llegar a estar el área, digamos si se mueve hacia la izquierda puede llegar hasta acá (arrastran el punto B todo hacia la izquierda). Y si se mueve a la derecha puede llegar hasta acá, que es el punto más bajo. (Los estudiantes hacen referencia a los extremos (máximo y mínimo) del arrastre de B). |
| 317. | P: Ustedes recuerdan dentro del plano cartesiano ¿Cuáles son los cuadrantes? |
| 318. | (los estudiantes muestran con la flecha cuál es el cuadrante positivo) |
| 319. | P: Entonces ¿Qué pasaría si lo tomáramos en un cuadrante diferente del positivo-positivo? ¿Qué pasa si tomamos un punto de la gráfica en un cuadrante diferente al primero? |
| 320. | (Se les señala a los estudiantes como está distribuido los cuadrantes, por ejemplo, si la tomamos en el tercer cuadrante) |
| 321. | E2: Acá abajo no corresponde ningún valor. (Cuadrante 4) |
| 322. | P: ¿Por qué? |
| 323. | E2: Porque la gráfica solo se puede mover hasta acá (los estudiantes mueven el punto B para mostrar que los valores no van a sobrepasar los que ya muestra la traza, con el fin de explicar que el punto P no va a llegar hasta el cuadrante negativo). |
| 324. | E2: Por lo cual, no va a tener valores negativos. |
| 325. | P: ¿Por qué creen que AB no puede ser más pequeño que uno? |
| 326. | E1: El mínimo que tiene es uno |
| 327. | P: ¿Por qué ese es el mínimo y no puede haber uno más pequeño? |

| | |
|---|---|
| 328. | E1: Porque el primer requisito es que uno de los lados siempre iba a ser uno |
| 355 | E1: También creería que los lados, el perímetro y el área serán positivos |
| 356 | P: ¿Así esté ubicado en el cuadrante negativo? |
| 357 | E1 y E2: Sí |
| 358 | P: Teniendo en cuenta lo que hemos hablado ¿Puede el hexágono tener un lado negativo? |
| 359 | E2: No creo que sea negativo, o sea todos sus lados tendrán un valor positivo |
| 360 | P: Comprendiendo el comportamiento de la gráfica en este caso, el rastro azul indica las distintas relaciones del segmento AB con el área, ustedes se acuerdan ¿Cuál fue la necesidad o por qué decidimos encontrar la ecuación de la gráfica? |
| 361 | E1: Sí, se quería saber el mayor valor posible que podría obtener el área |
| 362 | P: Digamos, en este caso, una vez encontrada la gráfica, ¿En qué nos podría ayudar para encontrar el punto más alto? |
| 363 | E1: Que nos señala el punto más alto en sí |
| 364 | P: En este caso ¿Cómo lo haría? |
| 365 | E2: Se mueve el segmento AB |

Como se esperaba, los estudiantes reconocen el dominio de la función, en el cual la gráfica tiene validez para el problema. De igual forma visualizan que no es necesario tener la traza ya teniendo la gráfica y que no se desaparece, concluyendo que el estudiante le da sentido a la estrategia de crear la gráfica. Dando paso a la etapa 4.

| | |
|---|---|
| 383. | P: ¿Y si le ponemos medidas (Coordenadas) como le pusimos al punto T? |

| | |
|---|---|
| 384. | (los estudiantes le ponen las coordenadas al punto T)<br>P: ¿Qué medidas tiene? |
| 385. | E2: 4,43 y 15,12 |
| 395 | P: ¿La gráfica de dónde salió? |
| 396 | E1: De una figura y de la relación del movimiento de AB y el área |
| 397 | P: Si sabemos que es la representación de la relación del área con el movimiento de AB. Si ponemos un punto ahí, que en este caso es T, la ordenada a quién hace referencia |
| 398 | E1: La *y* hace referencia a la altura que tiene |
| 399 | P: ¿Y esa altura sería? |
| 400 | E1: Al área creo |
| 401 | E2: Sí, sería al área |
| 402 | P: Exacto, porque si se acuerdan cuando pusimos el punto P, en sus coordenadas ¿A quiénes relacionaban?, si se acuerdan que en el eje de las abscisas era el movimiento de AB y en las ordenadas era el área. Ahora, teniendo en cuenta esas coordenadas ¿Cuál es la medida más alta del punto T? |
| 403 | (Los estudiantes intentan ubicar a T en la parte más alta de la gráfica, por lo cual termina diciendo que la medida mayor es 15,12) |
| 407 | (Los estudiantes se acuerdan del proceso para aumentar los decimales, optando a ponerle todos los decimales a las coordenadas) |
| 408 | P: Ahora sí, ¿Cuál sería la mayor? |

| | |
|---|---|
| 410 | <br>*Figura. Ubicación del punto T en la parte más alta (Intento)* |
| 411 | (Se les pide a los estudiantes, que anoten el número el cual consideran el más alto)<br>P: ahora haciendo zoom ¿se puede encontrar uno más alto? |
| 412 | (Los estudiantes hacen zoom a la figura y dicen que encuentran uno más alto) |
| 413 | P: ¿Se puede encontrar uno más alto si se sigue haciendo zoom? |
| 414 | E1 y E2: Sí, se puede |
| 415 | (Los estudiantes observan que efectivamente cada vez que se haga zoom se va a encontrar uno mayor) |
| 416 | <br>*Figura. Cambio del valor del área al hacer zoom* |
| 417 | P: ¿Ustedes creen que utilizando esa estrategia van a encontrar el punto más alto del área mayor o siempre se va a encontrar uno mayor? |
| 418 | E2: Siempre se va a encontrar un punto más alto o pueda variar |
| 419 | P: ¿Consideran esta estrategia pertinente para encontrar el punto más alto? |

| | |
|---|---|
| 420 | E1: Yo creo que ninguna estrategia sirve para encontrar el punto más alto, porque los decimales pueden llegar ser infinitos entonces cada vez puede llegar a ser más preciso. |

Los estudiantes invalidan la estrategia perceptiva de poner un punto en la parte más alta de la gráfica para encontrar el área mayor, diciendo que siempre van a encontrar un área mayor. Acciones que se esperaban en el análisis a priori.

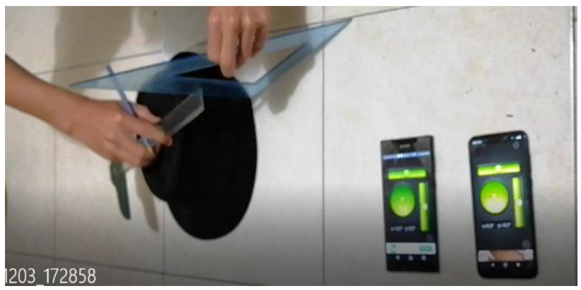
***Conclusiones***

Esta actividad permite que los estudiantes propongan sus propias estrategias de solución y que las puedan validar o invalidar con el software DGPad-Colombia. Asimismo, fue necesario la intervención del profesor para explicar ciertas herramientas del software; como la herramienta de medida, traza, crear puntos y nombrarlos, además de proponer estrategias para que el estudiante pudiera continuar el proceso de solución, como el tener un lugar geométrico, el crear la función con el fin de determinar el punto máximo para validar o invalidar la estrategia que había propuesto los estudiantes

El pilotaje de la primera actividad confirmó las acciones previstas en el análisis a priori, las retroacciones del medio posibilitaron que ellos mismos propusieran ideas y pudieras adaptarlas a lo que pedía la situación, ya que la interacción con el medio permite invalidar todas las estrategias no matemáticas. Sin embargo, fue necesario que los profesores intervinieran para explicar los procedimientos algebraicos, porque los estudiantes presentaban dificultes en las operaciones, como el multiplicar y sumar una variable por una variable, el operar fracciones y el de generalizar las medidas de los segmentos de los lados, porque ellos en primer lugar operaban medidas exactas de los segmentos y no lo tomaban de forma generalizada, siendo una de las acciones que no estaban previstas en el análisis a priori.

**Actividad 2**

En este apartado se espera la determinación de las condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible.

| | |
|---|---|
| 2. | (Los estudiantes ponen una escuadra en forma vertical al lado del sombrero y con la regla en forma horizontal sobre el sombrero y señalan la medida que aparece en la escuadra)<br><br><br>*Figura. Medición inicial del sombrero* |
| 3. | (Primero se les pidió a los estudiantes que midieran la altura máxima sin los niveles, para que luego pudieran comparar, una vez utilizaran los niveles.)<br><br>*Figura. Medición inicial del balón* |
| 4. | P: ¿Cuáles fueron las medidas del balón para E1? |
| 5. | E1: Mis medidas fueron; balón 21,5 cm |

| | |
|---|---|
| 6. | E2: 55, cm |
| 7. | P: ¿Por qué 55cm? |
| 8. | E2: Creo que confundí el 5 con el 2 y puede que sea 25cm |
| 9. | P: Si quiere vuélvalo a medir. |
| 10 | (E2 vuelve a medir la altura del balón, obteniendo 23,7 cm) |
| 11 | P: ¿Y la medida del sombrero? |
| 12 | E2: 13,3 cm |
| 13 | E1: 14,2 cm |
| 14 | P: Ahora, Al medir el mismo objeto ¿Por qué creen que varían tanto las medidas? |
| 15 | E1: Porque es difícil ya que es esférico y no es fijo que se quede quieto, entonces los instrumentos de medición se van moviendo por lo cual no es fácil, el sombrero también es difícil porque la textura va cambiando. |

Se observa que los estudiantes inician aplicando de una vez la estrategia dos (Colocar la regla graduada encima del objeto y la escuadra al lado del objeto. La regla que se ubica encima del objeto le permite leer la altura en la escuadra) para encontrar la altura de los objetos, luego al comparar los valores obtenidos entre ellos se dan cuenta que son diferentes, porque no pueden establecer una altura exacta en objetos esféricos, por lo cual pasan a la estrategia 3.

| | |
|---|---|
| 2. | P: ¿Qué estrategia creen que se puede utilizar para medir con mayor precisión? |

| | |
|---|---|
| | por ejemplo, el balón |
| 3. | E1: Yo creo que sería que estuviera en un área donde se mantenga quieto el balón, y ya poner dos escuadras y la regla. |
| 4. | P: Ok ¿Por qué en este caso los dos pusieron la regla de manera horizontal? |
| 5. | E1: Para ver de manera más precisa más o menos la medida, como que formará un ángulo de 90 grados, donde se logre ver la medida. |
| 22 | P: Y digamos para la regla que se pone arriba, ¿Nos podría ayudar en algo el nivel? |
| 23 | E2: Sí, para ver la inclinación de la regla, y que se pueda acomodar a la altura del balón y que no quede desnivelada. |

Los estudiantes utilizan la estrategia 3 para apoyar los objetos contra la pared de manera que no se muevan, sin embargo, proponen al mismo tiempo colocar el nivel sobre la regla que está encima del objeto para garantizar que esté horizontal, con esto se da paso a la estrategia 4.

| | |
|---|---|
| 25 | P: ¿Cuántos grados debe dar la burbuja o el nivel? |
| 26 | E1: En cero |
| 27 | P: Exacto |
| 28 | E1 y E2: El balón mide 21,2 cm |
| 29 | (Ahora los estudiantes empiezan a medir el sombrero) |
| 30 | E1 y E2: Mide aproximadamente 15 cm |

| | |
|---|---|
| 31 | P: Con respecto a las anteriores medidas ¿cambia? |
| 32 | E1: Sí, cambia mucho. |
| 33 | P: Entonces ¿Qué se debe hacer para tener una mejor precisión |
| 34 | E2: Tener algo que mida el nivel del ángulo de la regla para poder garantizar las alturas de los objetos el cual debe tener un ángulo de 90 grados |
| 35 | P: Listo debe ser perpendicular entre la escuadra y la regla. Entonces va a haber una escuadra que va a ser perpendicular al piso, y la regla que va encima del sombrero ¿Esa es perpendicular o paralela al piso? |
| 36 | E1: Paralela al piso |
| 37 | P: Entonces para que la regla esté en la mejor ubicación para medir la altura ¿Qué debe tener con respecto al piso? |
| 38 | E2: Que sea una paralela y otra perpendicular al piso |
| 39 | P: Como conclusión, decimos que debe existir para que sea la altura máxima una regla paralela al piso y perpendicular al piso. |

Se concluye que los estudiantes no vieron necesidad de utilizar la estrategia 5, es decir, únicamente ubicaron un nivel en la regla no graduada para garantizar horizontalidad, pero no colocaron el otro nivel en la escuadra para garantizar la verticalidad. El profesor no intervino para señalar que si la escuadra no está perpendicular al piso la medida no es exacta.

La actividad general condujo a la puesta en común esperada en el análisis a priori, donde se concluye que, si se quiere medir la altura de un objeto sólido de manera precisa, se debe colocar una regla que toque al objeto en su parte más alta, que sea paralela al piso y otra regla que sea perpendicular al piso, que sirve para medir la altura de la primera regla, y por lo tanto la altura del objeto.

***Conclusiones***

En esta actividad los estudiantes concluyen que, si quieren medir la altura de un objeto sólido de manera precisa, se debe colocar una regla y la herramienta nivel que toque al objeto en su parte más alta, que sea paralela al piso y que el nivel este en cero en la coordenada x y otra regla que sea perpendicular al piso, que sirve para medir la altura de la primera regla, y por lo tanto la altura del objeto, sin embargo, al suponer que la regla colocada puesta en la pared iba a estar perpendicular al piso, no se tuvo en cuenta utilizar el segundo nivel para corroborar que efectivamente fuera perpendicular, siendo un error del profesor al no intervenir, y no hacer caer en cuenta a los estudiantes, el posible desnivel del piso, para que ellos concluyeran que la regla debía estar perpendicular a la base sobre la que está el objeto.

De lo anterior permitió a los estudiantes adaptar la actividad a la situación del hexágono. También se destaca el fácil uso de la aplicación del nivel para los estudiantes, permitiéndoles ubicar lo más aproximado posible para garantizar la perpendicularidad y la horizontalidad con un solo nivel.

**Actividad 3**

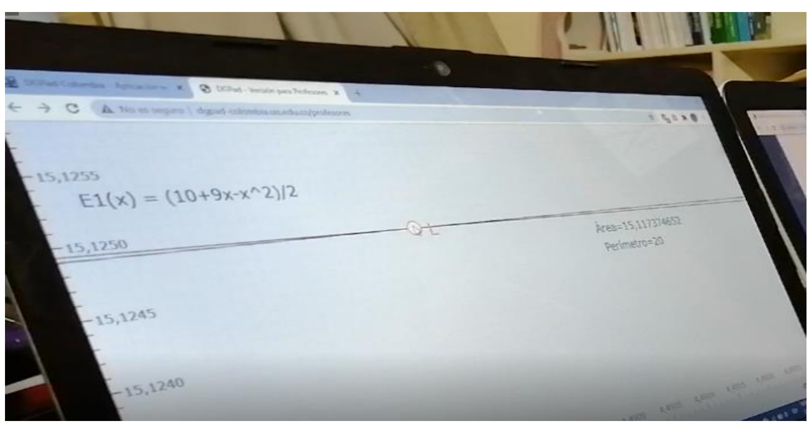
Se espera que los estudiantes utilicen la estrategia de medición desarrollada en la segunda actividad para darle sentido a una estrategia para determinar la altura máxima de la gráfica de la función. Asimismo, se propone la utilización de la función derivada como lugar geométrico.

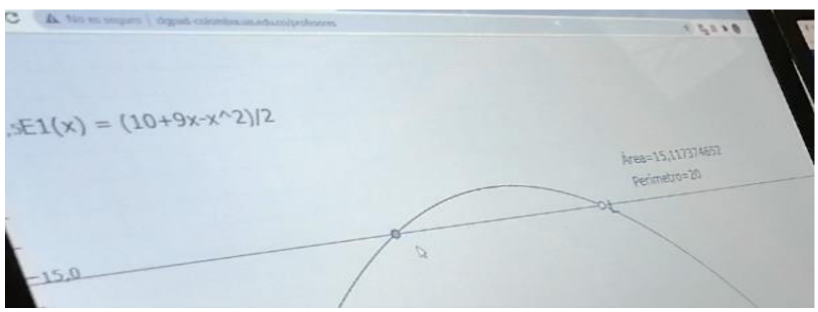
| | |
|---|---|
| 1. | P: Listo, ahora, quitemos el zoom a la figura. Volvemos a retomar la situación para encontrar el área máxima del hexágono.<br><br>Según lo que acabaron de hacer, con la medición de los objetos ¿Qué necesitan para poder establecer el área máxima en la gráfica? |
| 2. | E1: Se necesitaría una medición paralela a la base. |
| 3. | P: En este caso, se necesitaría como una regla para medir el punto más alto en la parábola ¿Verdad? |
| 4. | E2 y E1:  Sí |

Los estudiantes dan sentido a la aplicación de la actividad dos, ya que afirman que es necesario construir una “regla” horizontal para medir la altura de la parábola, por lo cual el profesor hace la intervención de que se puede construir una recta horizontal con la herramienta del software.

En el siguiente apartado los estudiantes buscan trazar una recta tangente a la curva de la función, que sea paralela al eje de las abscisas y que toque en un solo punto. Finalmente invalidan la estrategia utilizada.

| | |
|---|---|
| 11. | P: ¿Qué pasa cuando lo mueve el punto L? |

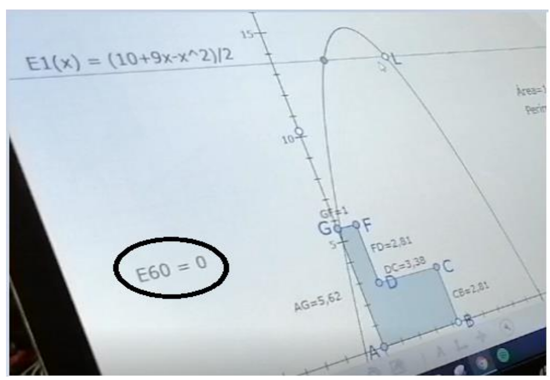
| | |
|---|---|
| 12. | E2: La recta paralela se mueve también con el punto L |
| 13. | P: Para encontrar la mayor altura posible ¿Qué características debe cumplir esa recta paralela en la gráfica? |
| 14. | E1: Que no toque dos veces a la función ¿Podría ser? Que toque solamente el punto más alto. |
| 15. | P: ¿Concuerda E2 con lo que dice E1? |
| 16. | E2: Concuerdo |
| 17. | P: Listo, entonces nosotros utilizando una herramienta podríamos saber si corta en uno o dos puntos. primero hagamos zoom y verificamos si toca en uno o dos puntos. |
| 18. | (El estudiante hace zoom a la gráfica para verificar si la recta que es perpendicular al eje *y* y que pasa por L, corta en uno o dos puntos la gráfica) |
| 19. | E2: Sí, corta en dos puntos.<br>*Figura. Ubicación del punto en la parte más alta "visualmente" de la gráfica.*<br> |

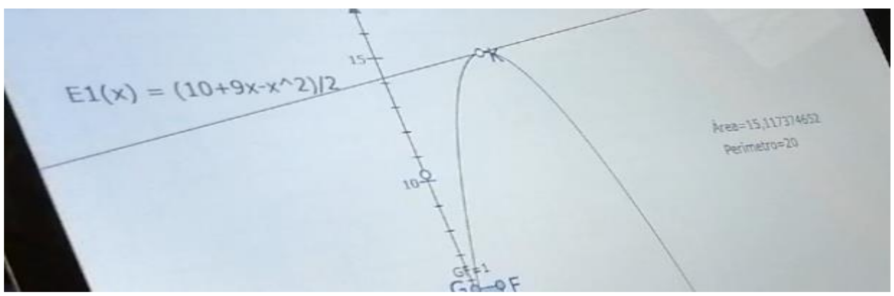
| | |
|---|---|
| | (Los estudiantes intentan ubicar el punto L, para que la recta que es paralela al eje de las abscisas solo toque un punto.) |
| 20. | P: ¿Y si seguimos haciendo zoom? |
| 21. | (Siguen el proceso de hacer zoom y acomodando el punto) |
| 22. | P: Listo, entonces para no tener que hacer tanto zoom. Vamos a utilizar una herramienta que se llama "Intersección". Vayan a la parte que parecen dos herramientas y seleccionen la que se llama intersección. Luego se señala el punto (L) y luego la recta. |
| 23. | (El estudiante utiliza la macro intersección (Para utilizar la macro primero se selecciona la herramienta macro  una vez seleccionada la herramienta en el nuevo cuadro que se despliega aparece la opción intersección, en el cual se le debe dar clic.))<br><br><br>*Figura. Uso de la Macro intersección* |
| 24. | P: Se genera otro punto de corte ¿Verdad?  Ahora vuelve a buscar el punto más alto |
| 25. | E1: Es hasta que se unen ambos puntos. |
| 26. | P: Ahora le damos zoom, e intentamos hacer que un punto esté encima del otro.  ¿Qué pueden notar a medida que le damos zoom? |

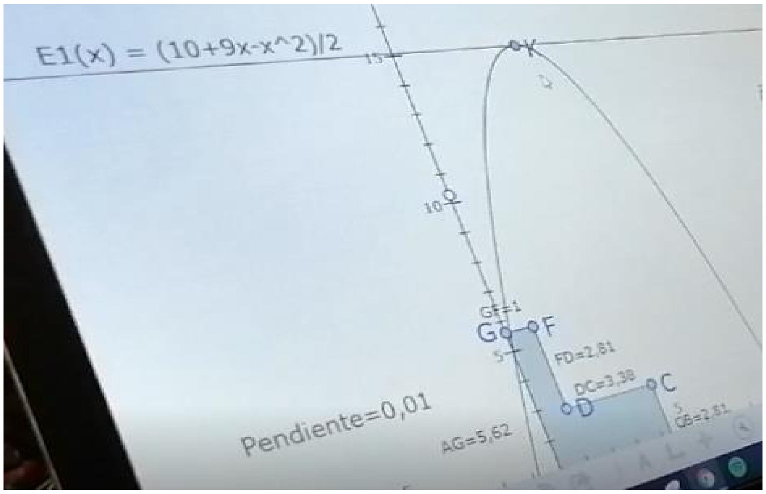
| | |
|---|---|
| 27. | E1: Que los puntos se alejan un poco.  Es decir que no está precisamente encima del otro. |
| 28. | P: Entonces, ¿sería tangente o no? |
| 29. | E1: No sería tangente |
| 36 | P: Teniendo en cuenta las condiciones de la actividad 2 sobre medir los objetos, ¿Cuáles fueron las conclusiones? |
| 37 | E2: Que se buscará un punto donde fuera paralelo al piso, donde se encontrará más alto al objeto. Y teniendo en cuenta esta actividad, lo ideal sería que tocara solo un punto del objeto. Y que no toque más puntos del objeto. |
| 38 | P: Listo, ¿la recta paralela que acabaron de hacer cumple con la condición que mencionaron? |
| 39 | E2: Podría ser, pero entre más zoom se le haga, se podría llegar a encontrar que no tiene mucha precisión. (Haciendo referencia que entre más se le haga zoom a la figura, se puede ver que hay intersección). Pero por ahora, se ve visualmente que sí cumple con las condiciones. |

Como se esperaba: Los estudiantes invalidan la estrategia de poner el punto L en la parte más alta. Debido a las retroacciones del software, al hacer zoom observan que la recta siempre va a cortar en dos puntos, invalidando lo que perceptivamente parecía tangente.

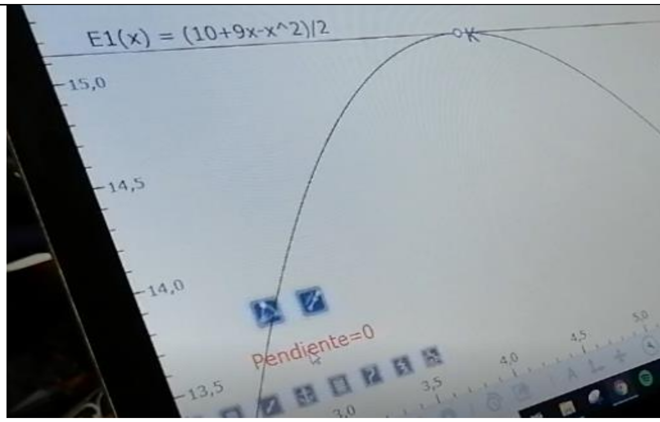
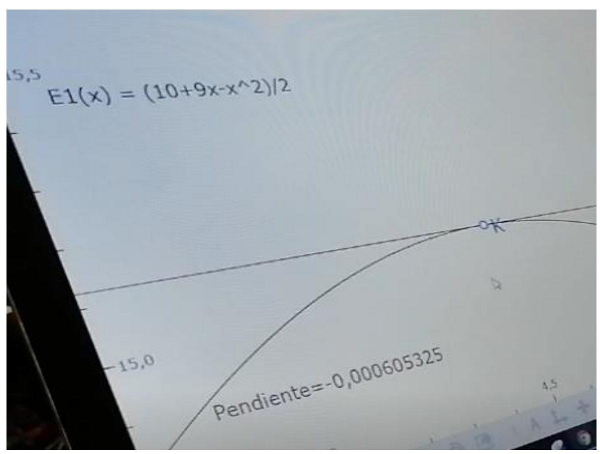
| | |
|---|---|
| 40. | P: Ok, Cuando ustedes medían el objeto, ponían una regla paralela al piso y ponían encima el nivel de burbuja. ¿Cierto? |

| | |
|---|---|
| 41. | E1 y E2: Sí |
| 42. | P: ¿Cuántos grados tenía que tener el nivel de burbuja? Para que la regla quedara paralela al piso o lo más aproximado. |
| 43. | E1 y E2: Lo más cercano a cero, o cero. |
| 44. | E1: Para que quede recta. Sería 0 grados para que quede recta |
| 48 | P: Listo, ahora vamos a reducir el zoom y entonces como necesitamos que la recta. Tenga: 0 grados de inclinación y que corte en un solo punto.  Vamos a usar una herramienta que nos mostrará, que tan inclinada esta la recta que pasa por el punto L.<br>Aparece la inclinación que tiene la recta.<br><br><br>*Figura. Inclinación de la recta que pasa por el punto L* |
| 52 | P: Mueve el punto L, Listo, ¿qué condición cumple de las que mencionaron? |
| 53 | E1: Paralelo al eje *x* |
| 54 | P: Listo, ¿tiene inclinación? |
| 55 | E2: No, no tiene inclinación |

| | |
|---|---|
| 56 | P: Listo, ¿qué condición le haría falta para poder determinar la altura máxima de la gráfica? |
| 57 | E1: Ah, tendría que tocar un solo punto de la función |
| 58 | P: Ok, entonces, ya garantizamos una condición (Paralelismo), faltaría garantizar que la recta solo toque un punto de la gráfica. Entonces, a continuación, borrar el punto L. Crea un nuevo punto el cual vamos a nombrar como K. Ahora vamos hacer uso de la herramienta de tangencia, selecciona la macro "Tangente", luego selecciona el punto y la gráfica. |
| 59 | E2: Ok<br><br><br>*Figura. Recta tangente a la curva que pasa por el punto K* |
| 77 | (Los estudiantes hacen uso de la macro para saber la pendiente que tiene la recta que pasa por K) |
| 78 | P: Listo, en la calculadora vamos a colocar "Pendiente=" (Para nombrar ese valor) y cierra la calculadora ¿Ahí está la pendiente qué nos está dando? |
| 79 | E1: Si hay inclinación o no |

| | |
|---|---|
| 80 | P: ¿Y hay inclinación? |
| 81 | E1: Sí<br><br><br>*Figura. Pendiente de la recta que pasa por el punto K* |
| 82 | P: Listo, ¿Qué condiciones debe cumplir para poder determinar la altura máxima? |
| 83 | E1: Que haya una inclinación con pendiente igual a cero y tendría que tocar un solo punto de la función. |
| 84 | P: Okey, si movemos el punto K, ¿cómo se comporta la pendiente? |
| 85 | E1 y E2: Se inclina y se muestra que hay dos puntos tocando la función. Entonces lo que podría hacer es zoom y ponerlo para que solo toque un punto y el valor sea cero. |
| 86 | P: ¿En este caso en cuantos puntos toca la recta a la parábola? |
| 87 | E1: En solo un punto (En K) |
| 88 | P: ¿Cómo podemos asegurar eso? |

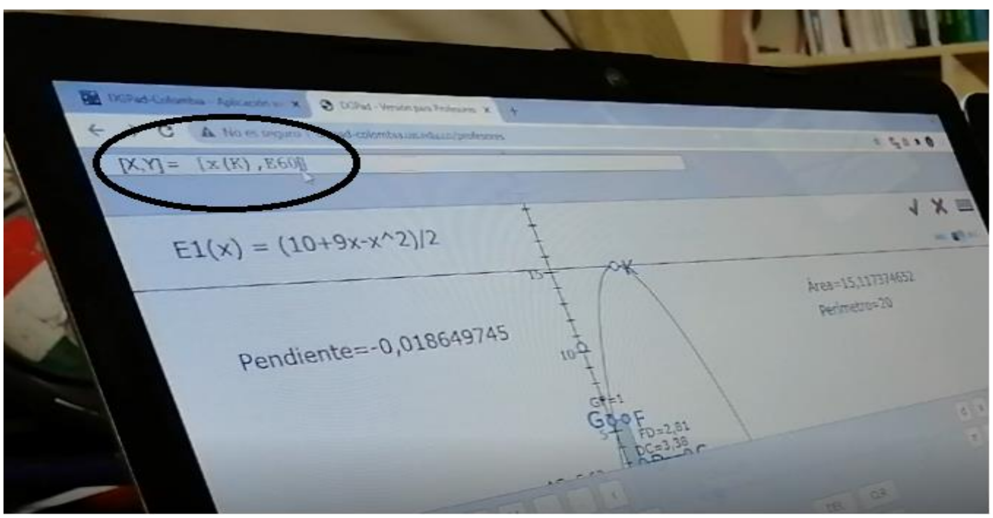
| | |
|---|---|
| 89 | E2: Haciendo zoom<br><br>(Los estudiantes hacen zoom a la figura para comprobar que solo toque en el punto K) |
| 90 | P: ¿Ok, eso lo garantizamos en el momento que se utiliza la herramienta de tangencia, ¿si se acuerdan? |
| 91 | E1 y E2: Ah sí |
| 92 | P: ¿Qué garantizamos usando esa herramienta? |
| 93 | E1: Si la recta está tocando uno o más puntos<br><br>Y acá solo toca en un punto<br><br>En cambio, la línea que es paralela solo se mueve de abajo hacia arriba. (Los estudiantes hacen referencia a la recta que pasa por el punto L y que exploraron anteriormente) |
| 94 | P: En este caso, la recta que pasa K ¿si cambia de inclinación? |
| 95 | E1: Sí |
| 96 | P: ¿Al parecer la inclinación aquí que valor nos da? |
| 97 | E2: Cero |
| 98 | P: ¿o sea que se podría decir qué? |
| 99 | E1: Este es el punto máximo |

| | |
|---|---|
| | <br>*Figura. Ubicación del punto K, para que la pendiente de la recta sea cero.(Intento)* |
| 100 | P: ¿Qué pasa si le aumentamos el número de decimales al valor de la pendiente? |
| 101 | E1: Tendríamos un valor más preciso<br>(Los estudiantes le aumentan los decimales al valor de la pendiente e intentan acomodarla para que quede con pendiente de cero)<br><br>*Figura. Valor de la pendiente más aproximado a cero* |
| 102 | P: Si se dan cuenta, en la recta anterior (haciendo referencia a la recta paralela al eje de las abscisas) garantizamos que la inclinación fuera cero. |

| | |
|---|---|
| | ¿Y en esta recta que garantizamos? |
| 105 | E2: Sí en esta se garantiza que solo toque en un punto de la función. |
| 106 | P: ¿Que nos faltaría garantizar? ¿Que la inclinación qué? |
| 107 | E1: Que la inclinación siempre este en cero |
| 108 | P: Listo, en este caso, para resolver el problema necesitamos encontrar una recta que tenga las dos condiciones que ya se dijeron ¿cierto? |
| 109 | E1: Sí claro, que sea paralela y que solo toque un punto |
| 110 | P: Exacto, entonces esas siempre van a ser las dos condiciones, ¿En este caso cual no cumple? |
| 111 | E1: Que no sea paralela |

El estudiante ha invalidado su estrategia perceptiva, dándose cuenta que necesita construir una recta paralela al eje de las abscisas, que a su vez toque en un solo punto; por lo cual el profesor debe intervenir para la construcción de una estrategia matemática para construir la recta que cumpla esas condiciones.

| | |
|---|---|
| 121. | P: Necesitamos encontrar el lugar específico en donde la recta tiene pendiente cero y es paralela al eje $x$. Entonces para esto vamos a calcular el valor de todas las pendientes de todas las rectas tangentes que pasan por la parábola. |
| 122. | E1: Todas |
| 123. | P: Para esto: Vamos a construir un punto R |

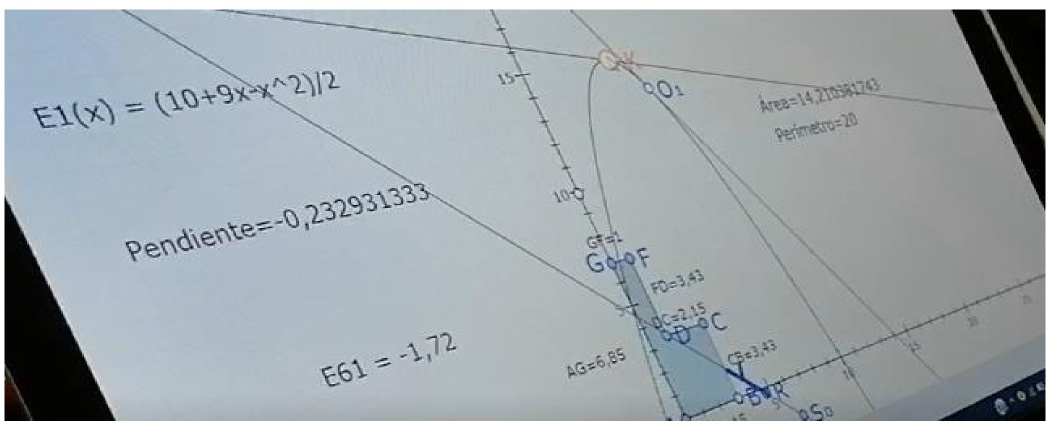
| | |
|---|---|
| 124. | E2: ¿En cualquier parte? |
| 125. | P: sí |
| 131 | P: Entonces si vamos a relacionar la abscisa del punto K con la pendiente de la recta tangente que pasa por K. Entonces ¿Qué coordenadas debe tener ese punto R? |
| 132 | E1: La misma coordenada de K |
| 133 | P: Pero en las abscisas ¿Verdad? |
| 134 | E2: Sí en las abscisas |
| 138 | (Los estudiantes establecen la relación en la calculadora para el punto R)<br><br><br>*Figura. Uso de la calculadora para establecer la relación* |
| 139 | P: Ya relacionamos el punto R para que sea igual al movimiento del punto K, pero en la abscisa. Ahora nos falta relacionar el valor de la pendiente. Entonces para esto |

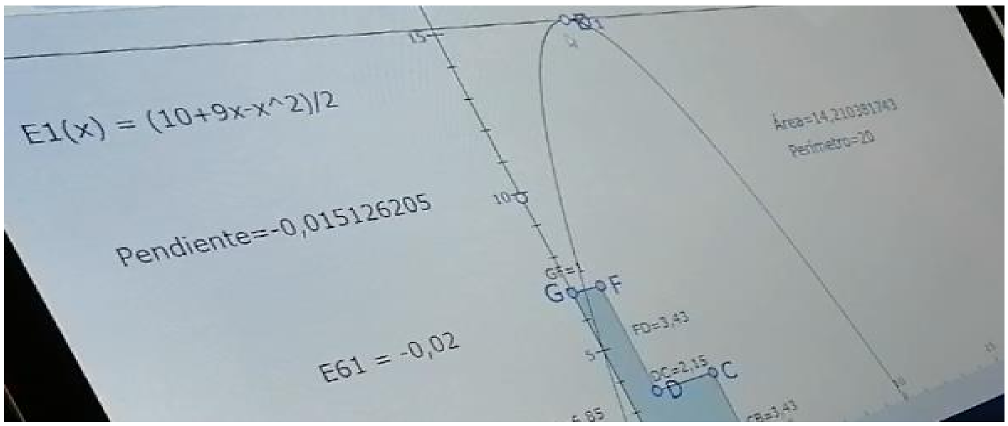
| | |
|---|---|
| | seleccionamos en la calculadora el valor de la pendiente (En la ordenada del punto R) |
| 140 | (Los estudiantes establecen la relación en la calculadora para el punto R) |
| 145 | P: Ok, ahora movamos el punto K. ¿Hay relación? |
| 146 | E1 y E2: Si es el movimiento de R, R siempre acompaña al punto K en el eje *x* |
| 147 | P: En *y(R),* ¿con qué lo pueden relacionar? |
| 148 | E1: Ah, es una función decreciente. Sí, es una línea recta. |
| 149 | P: Si se dan cuenta, el valor de K en *x* es el mismo en R en *x*. ¿Pero es el mismo en *y*? |
| 150 | E2 y E1: No |
| 151 | P: ¿Qué comportamiento tiene *y(R),* con qué valores lo pueden relacionar? Tengan en cuenta lo que varía en la construcción |
| 152 | E1: La pendiente |
| 153 | P: Ahora activa la traza del punto R. ¿Esa traza que está representando? |
| 154 | E1: No se me ocurre nada, o sea sé que está relacionada con K en *x*.<br><br>Ah me di cuenta que si K se va hacia la derecha R disminuye. Si K aumenta en *x* entonces R disminuye en *y* |

| | |
|---|---|
| 161 | P: Exacto, el rastro azul nos relaciona en la parte *x* el movimiento del punto K, y en *y* el valor de la pendiente. Entonces, cuando aparentemente encontramos el punto más alto, el punto R se ubica en el eje *x*. |
| 162 | E1 y E2: Sí |
| 163 | P: Listo, entonces ahora necesitamos saber cuál es el valor de ese punto en el que se va a ubicar R (Cuando toca a *x*). |
| 164 | E1: Sí, yo creo que cuando R está fuera del eje *x*, entonces K ya no está en el punto más alto. |
| 173 | P: Sí, y si le damos zoom a la construcción que tenemos ¿Qué pasa Para encontrar el punto de corte en R? |
| 174 | E2: Se pierde la traza<br><br>(Los estudiantes al hacer zoom se dan cuenta que el punto R no está exactamente sobre el eje *x*, está más abajo o más arriba y además se pierde la traza) |

Como se esperaba, los estudiantes concluyen que cuando la traza corta el eje *x* se va a encontrar el punto más alto de la curva, al relacionar que el punto R representa todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola, indicando que el punto R al estar sobre el eje *x* la pendiente de la recta será cero.

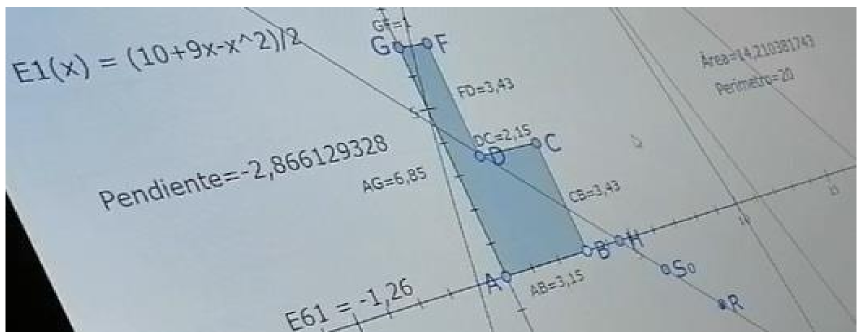
El profesor propone que se calcule el lugar geométrico de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola, para encontrar el punto donde la pendiente es cero.

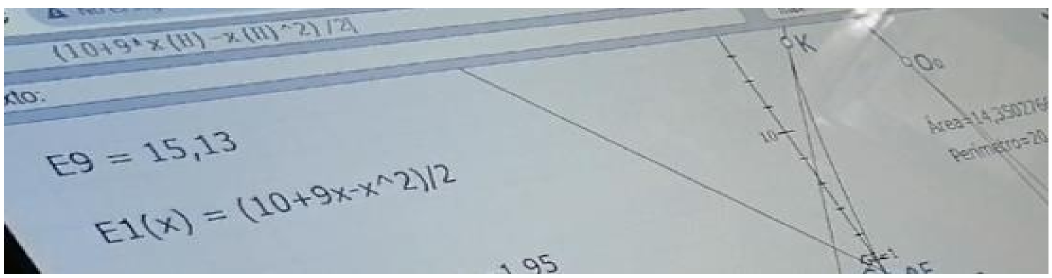
| | |
|---|---|
| 222. | P: ¿Cumple con la condición para crear la recta o nos faltaría un punto? |
| 223. | E1: Ya tenemos los dos puntos |
| 224. | P: ¿Cuáles son? |
| 225. | E1: son S y R |
| 226. | P: Ahí hay una herramienta que nos permite crear la recta, dale sobre uno de los dos puntos, ahí aparece un cuadrito con un dibujo de una recta con dos puntos, dale sobre un punto y le dejas oprimido hasta arrastrarlo al otro punto.<br><br>(los estudiantes crean la recta que pasa por R y S)<br><br><br><br><br>*Figura. Construcción de la recta que pasa por el punto R y el punto S* |
| 232 | P: Entonces teniendo esas características y esa recta, ¿Podríamos saber ahora sí el punto de corte entre la recta que creamos y el eje *x*? que se supone que ahí debe estar R |
| 233 | E2: Si se le hace zoom, sí |

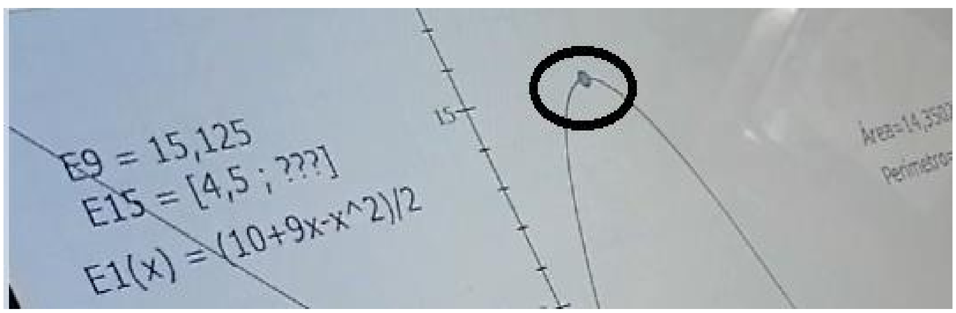
| | |
|---|---|
| | (los estudiantes hacen zoom para ubicar de forma visual el punto sobre el eje *x*, sin embargo, ven que no está sobre el eje *x* al intentar mover el punto K, los estudiantes observan que al poner un punto encima del otro la recta desaparece) |
| 234 | E2: Se tendría que dejar uno que marque la recta<br><br><br>*Figura. Superponer los puntos de la gráfica*<br>Los estudiantes observan que cuando las rectas tangentes a la curva están superpuestas, la recta RS desaparece |
| 235 | P: entonces, para hacer eso podemos utilizar la herramienta intersección, ¿Qué nos va a permitir esta herramienta? la recta que creamos, que haga intersección la recta RS con el eje *x* ese punto va hacer el que necesitamos.<br>(Se muestra la herramienta a los estudiantes, logrando hacer la intersección entre la recta RS y el eje *x*, los estudiantes mueven a R para verificar si efectivamente el punto se creó en la intersección) |
| 236 | P: ¿Ese es el punto que estábamos buscando o no? |

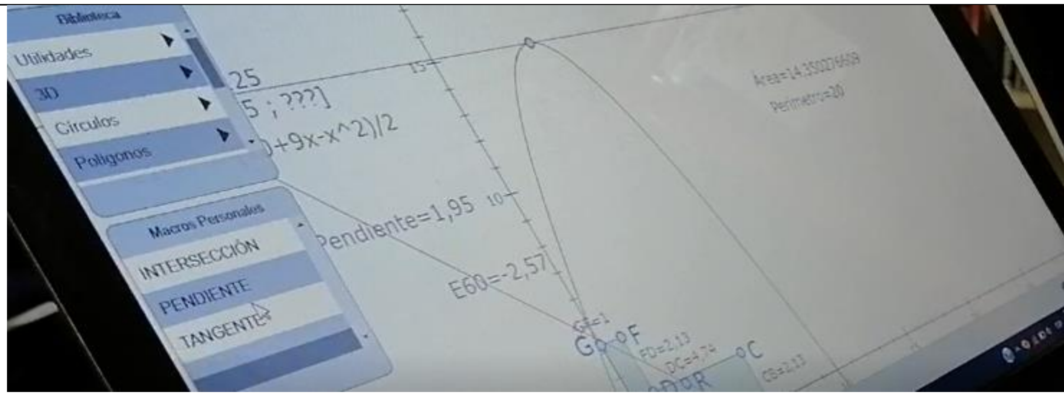
| | |
|---|---|
| 237 | E1: Sí |

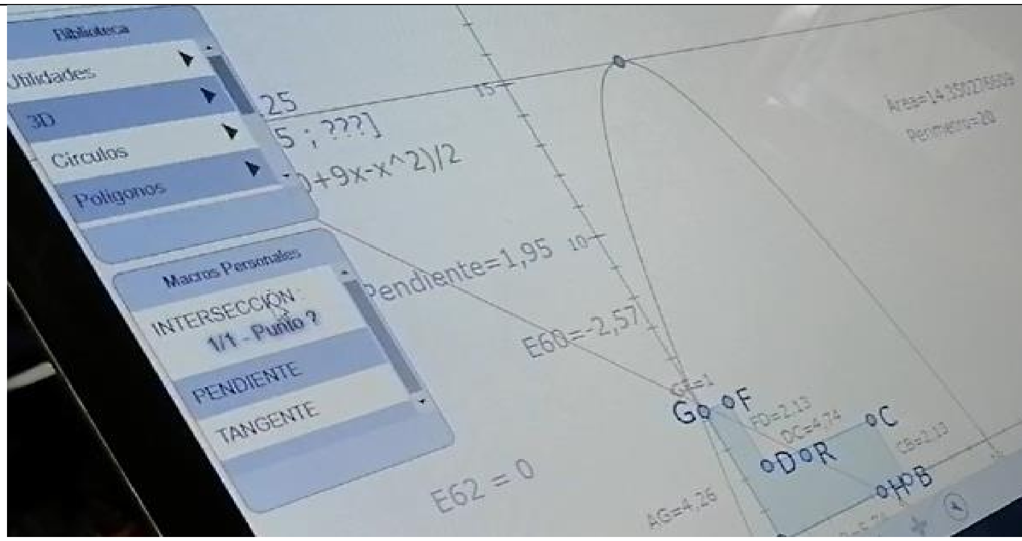
Los estudiantes concluyen que el punto H es el punto de intersección que estaban buscando entre el eje *x* y la recta RS

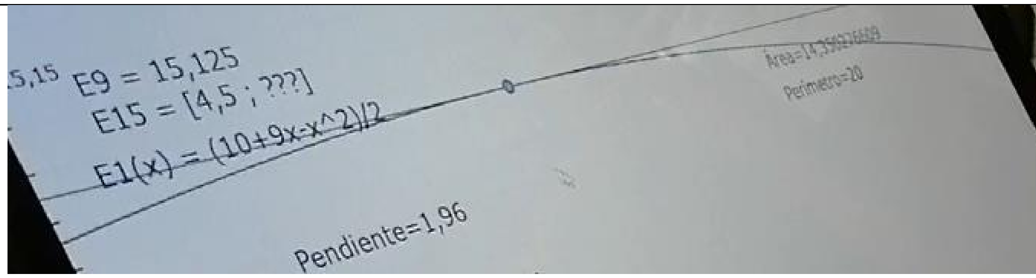
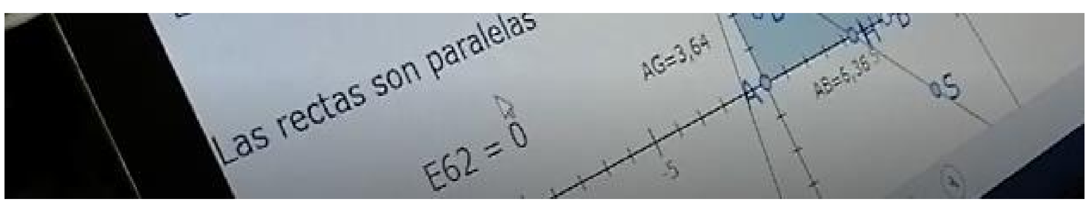
<table>
<tr><td>238.</td><td>P: Listo, entonces vamos a llamar a ese punto H<br><br>(los estudiantes se acuerdan de cómo poner el nombre, logrando nombrar el punto H)<br><br>
<br><br>*Figura. Construcción del punto H*<br><br>Los estudiantes crean el punto H</td></tr>
<tr><td>239.</td><td>P: Ahora, teniendo ese punto que es la intersección entre la recta RS y el eje *x* podemos ya calcular el punto máximo del área de la figura</td></tr>
<tr><td>240.</td><td>E1: Sí</td></tr>
<tr><td>267</td><td>P: Nosotros en la ecuación que relacionamos, el lado de AB ¿con quién?</td></tr>
<tr><td>268</td><td>E1: Con el área</td></tr>
<tr><td>269</td><td>P: Si yo reemplazo en *x* ¿Qué me va a dar?</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 270 | E1: Sí reemplazo en *x* me va a dar la altura máxima |
| 271 | P: Sí ya tenemos el *x* ¿Qué tenemos que hacer? |
| 272 | E2: Nos faltaría *y* |
| 273 | P: Sí ya tenemos el *x* ¿Quién es *x*? |
| 274 | E1: *x* seria *x(H)* |
| 300 | (Los estudiantes generan una nueva expresión para poner la función en las ordenadas y poder generar el punto que se quiere).<br><br><br>*Figura. Expresión generada en la calculadora*<br>Forma utilizada por los estudiantes para hallar la ordenada del punto más alto |
| 301 | P: Ese valor que nos dio ¿Qué vendría siendo? |
| 302 | E1: Sería el valor más alto |
| 303 | P: Entonces si ese es el punto más alto ¿Ahora sí podría crear el punto? |
| 304 | E1: ¿Será que si es el punto más alto? |
| 305 | E2: Creo que sí |

| | |
|---|---|
| | (El estudiante le aumenta los decimales para verificar y mira que el valor es 15,125, por lo cual, los profesores hacen mención de que por más que se le aumente los decimales no van a aumentar si es un valor fijo y concluyen que el valor corresponde a la ordenada del punto) |
| 306 | P: ¿Quién es nuestro *x* e *y*? |
| 307 | E2: Nuestro *x* es *x(H)* y nuestro *y* es el valor que acabamos de obtener.<br><br>(los estudiantes empiezan a crear el punto en la parte más alta de la gráfica)<br><br><br><br>*Figura. Punto máximo generado por los estudiantes para solucionar la situación* |
| 310 | P: ¿Cumple con las condiciones de lo que se requiere cuando hiciste la actividad de medición? se acuerdan que mediamos los objetos y ustedes dijeron que debía cumplir dos condiciones. |
| 311 | E2: Debería estar tocando en un solo punto de esa función |
| 312 | E1: Que tiene que estar paralelo al eje *x* |
| 313 | P: Entonces, tracemos la recta tangente que pasa por ese punto con la macro |

| | |
|---|---|
| | <br><br>*Figura. Uso de las macros para verificar las condiciones*<br>Verificación por los estudiantes de la estrategia de la intersección y la tangente que pasa por el punto creado |
| 314 | P: ¿Qué más requería? |
| 315 | E1: Que la pendiente no tenga inclinación podemos verificar la pendiente |
| 316 | E2: Sí<br><br>(Los estudiantes utilizan la herramienta macro pendiente para saber si tiene inclinación, este caso la pendiente es llamada E=62 y le aumentan los decimales verificando que siempre va hacer cero y que no tiene inclinación.) |

| | |
|---|---|
| | <br><br>*Figura. Verificación con la macro pendiente*<br>Verificación con la macro pendiente, luego los estudiantes aumentan los decimales para verificar que se va a mantener en cero la pendiente |
| 317 | P: ¿Qué más hace falta? |
| 318 | E1: Que toque en un punto |
| 319 | P: ¿Se acuerdan de la herramienta que utilizamos para verificar que solo toca un punto?<br>(Los estudiantes vuelven a la macro y le dan en intersección para verificar). |
| 320 | P: ¿será que si hacemos zoom podemos ver que creó otro punto? o siempre va a ser el mismo punto. |
| 321 | E2: Siempre va a ser el mismo punto no cambia por más que se le haga zoom. (Los estudiantes le dan zoom para verificar) |

| | |
|---|---|
| | <br><br>*Imagen. Verificación de la condición de tangencia* |
| 322 | P: También podemos utilizar una herramienta que se llama test de paralelismo, para comprobar si la recta que se trazó es paralela ¿A quién? |
| 323 | E1: Al eje *x* |
| 324 | P: Vamos a la macro, le damos en la herramienta paralelismo, seleccionamos la recta que creamos y la recta que se creó en el eje *x* de A a B |
| 325 | E1: Las rectas son paralelas, |
| 326 | P: Ya como conclusión ¿Qué características cumplió? |
| 327 | E2: La primera que tocara un solo punto, que tocara una sola vez la función, que fuera paralelo a las abscisas y que la pendiente fuera cero<br><br><br>*Imagen. Test de paralelismo* |
| 328 | P: Ya con esto damos por resuelto el problema. |

Los estudiantes validan el resultado utilizando el test de paralelismo, calculando la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto I, aumentando los decimales y haciendo zoom a la construcción, de esta manera concluyen que el problema queda solucionado. Todas estas acciones de validación estaban previstas en el análisis a priori.

De igual manera, concluyen que las estrategias perceptivas utilizadas al principio no eran exactas para solucionar el problema por lo cual fue valida la estrategia matemática propuesta por el profesor.

***Conclusiones***

Con esta actividad los estudiantes adaptan las acciones realizadas en la actividad dos basadas en la medición de objetos, para proponer sus propias estrategias de solución validándolas o invalidándolas con el software DGPad-Colombia. Se observó que los estudiantes pusieron en práctica las conclusiones generadas en la actividad; esto se reconoció cuando los estudiantes construyeron una recta que pasara por un punto P sobre la curva, buscando que dicha recta en algún momento quedara "balanceada"; es decir, Que cumpliera con las condiciones que se establecieron en la actividad de las alturas de los objetos:

1) La regla graduada debe estar perpendicular al piso.

2) La regla que está tocando al objeto debe ser paralela al piso.

3) Se debe garantizar que la regla toque al objeto en su punto más alto.

Los estudiantes intentaban crear una recta tangente que estuviera horizontal, sin embargo no fue factible la estrategia utilizada por los estudiantes, siendo necesaria la intervención del profesor para proponer la estrategia del lugar geométrico que representa la pendiente de todas las rectas tangentes, sin embargo para ello se propuso que los estudiantes utilizaran la macro Tangente, no obstante no lograron hacerla horizontal por las retroacciones del software, como fue la corroboración  por el uso de la herramienta Test de paralelismo, que permitía confirmar si dicha recta estaba o no siendo paralela al eje x, además se enseñó la macro Pendiente para verificar si la recta tenía una pendiente igual a cero, ya que los estudiantes decían que la pendiente debía ser igual a cero, por las acciones que los estudiantes habían realizado con la herramienta nivel en los celulares.

Se vio necesaria la intervención del profesor para proponer la estrategia  que consiste en calcular las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva y encontrar los puntos en los que esa pendiente es cero para la determinación de la altura máxima de la gráfica de la función, por lo tanto el profesor debió convencer a los estudiantes de que para resolver un problema particular se puede pasar por la resolución de un problema general; en este caso, fue necesario la mención que para encontrar un punto de la curva cuya recta tangente tiene pendiente cero, se calculan todas las pendientes de todas las rectas tangentes y se utiliza la representación gráfica de ese conjunto de valores para determinar los puntos en los que la pendiente es cero.

Con la intervención del profesor para construir el lugar geométrico de todas las rectas tangentes, los estudiantes deducen el cómo crear la recta a partir de un punto ya creado, el cual permite dibujar la traza del lugar geométrico; concluyendo que cuando la traza corta al eje x se encuentra la abscisa del punto de la curva que se quiere hallar. (intersección de la recta creada con el eje x). Por último, el profesor ve necesario proponer el remplazo de las coordenadas de la abscisa en la ecuación de la parábola generada por los estudiantes, y posteriormente verificar con las herramientas de las macros (test de paralelismo, pendiente), por lo tanto, la actividad 3 salió como fue previsto en el análisis a priori.

## Análisis Segundo Pilotaje

A continuación, se presentará el desarrollo de las actividades por dos estudiantes de grado 11, en donde se muestran las estrategias perceptivas, las invalidaciones y las intervenciones del profesor para solucionar la situación propuesta del hexágono planteada en el análisis a priori. La aplicación de esta actividad se desarrolló de manera virtual, excepto la actividad 2.

### Actividad 1

Se entrega una representación gráfica dinámica del hexágono, gracias a la cual los estudiantes pueden emplear una estrategia perceptiva para buscar el valor máximo del área y se espera que invaliden esa estrategia. Luego se introduce la función que asocia el área a valores variables de un lado del hexágono, y su gráfica, invalidando estrategias perceptivas para determinar el punto más alto de la gráfica de la función.

| | |
|---|---|
| 7 | P: Ustedes observan que la construcción representa la situación del hexágono que leyeron, entonces lo primero que vamos a hacer es verificar si esa construcción cumple con las condiciones que nos da el enunciado del problema.<br>¿Recuerdan cuáles son las condiciones? Podemos volver a poner el enunciado en pantalla y miramos cuáles son las condiciones que se dan. |
| 8 | E1: Un lado debe tener de longitud un metro |
| 9 | (El estudiante señala las medidas de los lados de acuerdo a la descripción de la situación con el cursor) |
| 10 | P: ¿Qué otras condiciones se dan? |
| 11 | E2: El perímetro debe ser 20 metros |

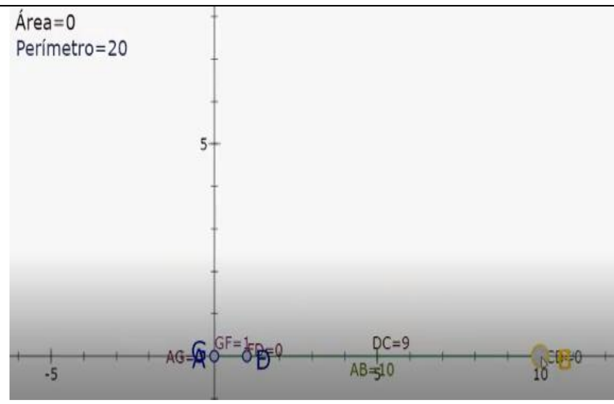
<table>
<tr><td>16</td><td>(Los estudiantes intentan arrastrar todos los puntos y señalan que el punto B es el único que se puede mover)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes al arrastrar todos los puntos del hexágono, concluyen a partir de las retroacciones del software que el único punto que se mueve es B y que siempre se cumplen las condiciones del enunciado, cumpliendo con lo previsto en el análisis a priori.</td></tr>
<tr><td>22</td><td>E1 y E2: Se puede mover hasta 10 en x</td></tr>
<tr><td>23</td><td>

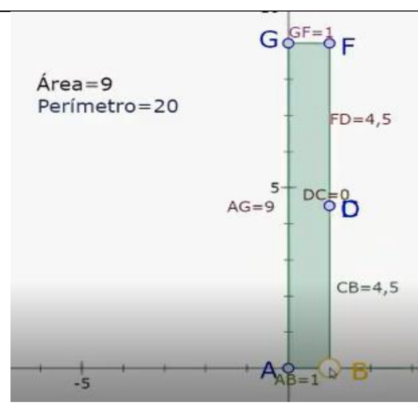
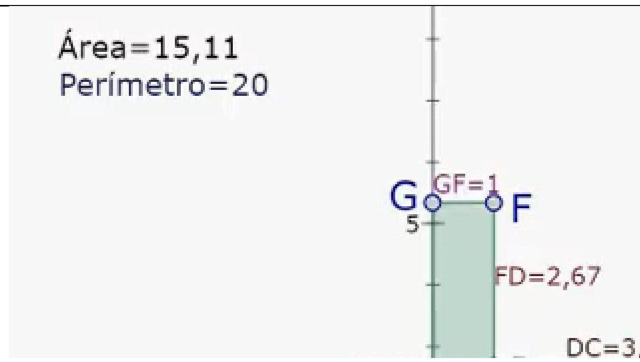
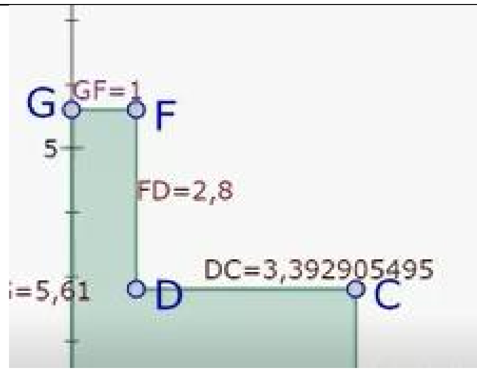
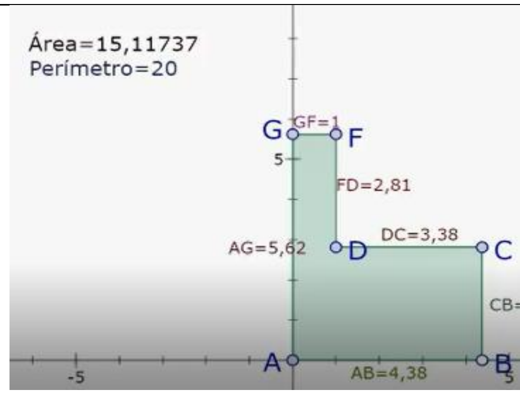
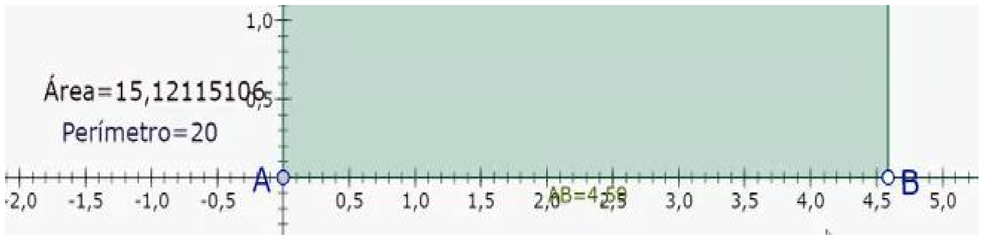
Imagen. Verificación de las condiciones de la figura (Máximo en x)</td></tr>
<tr><td>24</td><td>P: ¿Y lo mínimo?</td></tr>
<tr><td>25</td><td>E2: 1 en x</td></tr>
<tr><td>26</td><td>

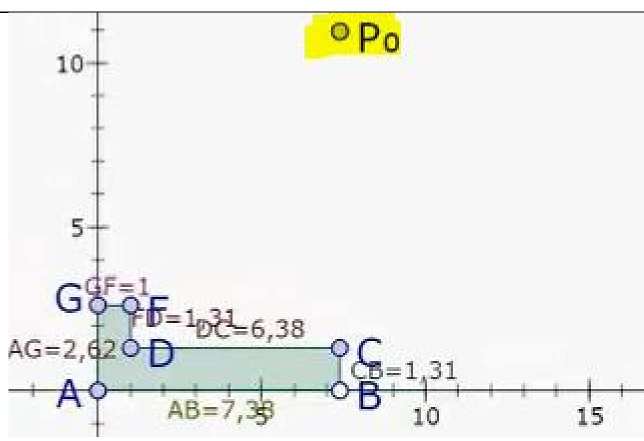
Imagen. Verificación de las condiciones de la figura (Mínimo en x)</td></tr>
<tr><td>28</td><td>E1: El área aumenta o disminuye cada vez que se mueve el punto B</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 35 | E1: Pero lo que veo, que donde tiene mayor área es más o menos 15,1 |
| 36 | (Los estudiantes siguen moviendo el Punto B para intentar establecer la mayor área posible) |
| 37 | P: Según ustedes, con la variación del área, ¿cuál sería el área mayor? |
| 38 | E2: 15,1 |
| 39 | E1: 15,11 |
| 40 | <br>*Imagen. Área del hexágono inicial* |
| 41 | P: ¿Será que podemos hallar una mayor? |
| 42 | E1: Sí hay mayor |
| 43 | E2: Creo que el máximo es 15,12 |
| Se observa que los estudiantes intentan encontrar perceptivamente la mayor área arrastrando el punto B y piensan haberla encontrado | |
| 47 | P: Ustedes que considerarían: si de pronto hubiera la posibilidad de que se aumentaran los decimales, ¿seguiría igual o cambiaría? |
| 48 | E2: Cambiaría |
| 59 | (Los estudiantes aumentan los decimales del área y de los lados.) |
| 60 | E1: ¿Lo hago en todos lados o solo en ese? |

| | |
|---|---|
| 61 | <br>*Imagen. Aumento de los decimales a los lados del hexágono* |
| 62 | P: ¿Consideran que es necesario hacerlo por todos lados? |
| 66 | E1: Aunque se coloquen más decimales, el área sigue siendo la misma, no cambia, solo cambia si movemos el punto B. |
| 67 | E2: Solo se aumenta la precisión, pero no el resultado |
| 70 | (Los estudiantes aumentan los decimales al valor del área) |
| 71 | E2: Pasa lo mismo, se aumenta los decimales, aumentando la precisión, pero no cambia la exactitud. |
| 72 | P: ¿En la anterior ustedes habían dicho que el área máxima era 15,12 cierto? |
| 73 | E2: Sí señor |
| 74 | P: ¿Con más decimales puedo encontrar un área más grande de 15,12? |
| 77 | E2: El área mayor con decimales sería este |

| | |
|---|---|
| | <br>*Imagen. Aumento de los decimales al valor del área* |
| 90 | (Los estudiantes empiezan a mover de nuevo el punto B para estipular el área mayor) |
| 110 | E2: Los decimales aumentan la medida |
| 111 | P: Sabemos que si le aumentamos los decimales pueden encontrar una medida mayor ¿cierto? |
| 112 | E2: Sí |
| 116 | E2: La mayor medida sería:<br><br>*Imagen. Área mayor propuesta* |
| 117 | P: La anotan de nuevo por favor. A continuación, le vamos a hacer zoom, vamos a mover de nuevo B y observar si hay una medida más grande en el área. |

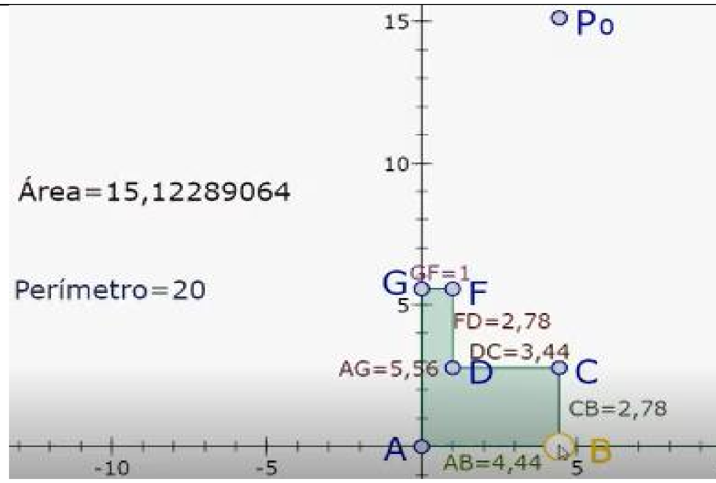
<table>
<tr><td>118</td><td>(Los estudiantes hacen zoom y mueven el punto B para buscar la mayor área, anotando la siguiente medida)<br>
<br>Imagen. Área mayor propuesta al hacer zoom</td></tr>
<tr><td>119</td><td>P: Esa es la medida que ustedes dicen que es la mayor ¿cierto?</td></tr>
<tr><td>120</td><td>E1: Sí</td></tr>
<tr><td>121</td><td>P: Si quiere la anotan de nuevo por favor. Vamos a seguir haciendo lo mismo, sigamos haciendo zoom a la figura e intentamos encontrar una más grande</td></tr>
<tr><td>129</td><td>P: ¿Ustedes consideran que, si de pronto se pudiera hacer más zoom, será que encontraríamos una mayor?</td></tr>
<tr><td>130</td><td>E1: Sí</td></tr>
<tr><td>131</td><td>E2: Sí señor</td></tr>
<tr><td>133</td><td>P: Ahora teniendo eso en cuenta ¿podríamos resolver el problema, de hallar una medida exacta, la cual sea la mayor?</td></tr>
<tr><td>134</td><td>E2: No</td></tr>
<tr><td>135</td><td>E1: Sería como un número infinito porque siempre vamos a encontrar una mayor</td></tr>
<tr><td>136</td><td>P: En este caso la estrategia que estamos utilizando ¿nos servirá o no?</td></tr>
<tr><td>137</td><td>E2: No, nos sirve</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se observa que la estrategia perceptiva usada por los estudiantes queda invalidada al encontrar un valor mayor después de hacer zoom y arrastrar el vértice B, y concluyen que cada vez que hagan</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| zoom van a encontrar una mayor, no logrando solucionar el problema, por lo tanto, se cumple lo previsto en el análisis a priori. | |
| 138 | P: Ahora bien, como dicen que esa estrategia no nos sirve, entonces vamos a proponer otra estrategia para encontrar el área mayor. |
| 139 | Vamos a crear un punto, pero antes reduzca el zoom de la figura. |
| 140 | E2: ¿En qué parte creo que punto? |
| 141 | Los estudiantes crean el punto, y lo nombran P |
| 142 | <br>*Imagen. Creación del punto P* |
| 143 | E2: ¿Por qué aparece $P_0$? |
| 144 | P: Aparece así porque en algún momento ya se creó el punto P, pero como es el único P lo vamos a dejar así nombrado, entonces cuando nos refiramos al punto P es el punto $P_0$ |
| 176 |  |

<table>
<tr><td></td><td>Imagen. Ubicación de P en la parte más alta (Visualmente)</td></tr>
<tr><td>180</td><td>(Los estudiantes empiezan a arrastrar el punto B)<br>E1: Mira ese movimiento</td></tr>
<tr><td>181</td><td>E2: Parece semi-parabólico</td></tr>
<tr><td>191</td><td>P: ¿El valor de $x$ del punto B y el $x$ del punto P es el mismo?</td></tr>
<tr><td>194</td><td>E2: Sí es el mismo</td></tr>
<tr><td>197</td><td>E2: El punto P se va a mover según la medida, es decir; la medida en $y$ va a depender según la medida del área.</td></tr>
<tr><td>199</td><td>P: Exacto, $y$ de P se va a comportar igual que el área<br>Ya entendiendo las relaciones que se dijo ¿para ustedes donde estaría la mayor área?</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Los estudiantes buscan la mayor área, no utilizan el punto P para buscarla, sino la medida que aparece en el área.)</td></tr>
<tr><td>229</td><td>P: Recuerden que esa no es el área mayor, no sabemos cuál es el área mayor, pero tal vez si supiéramos cuál es el área mayor, ¿dónde quedaría el punto P?</td></tr>
<tr><td>230</td><td>E2: Estaría en la parte más alta</td></tr>
</table>

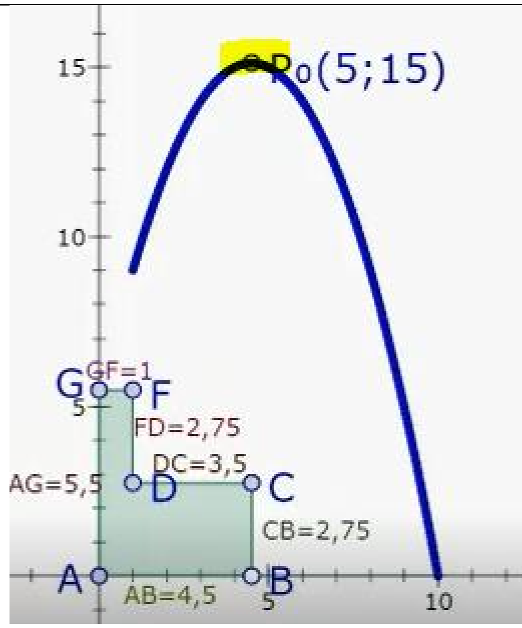
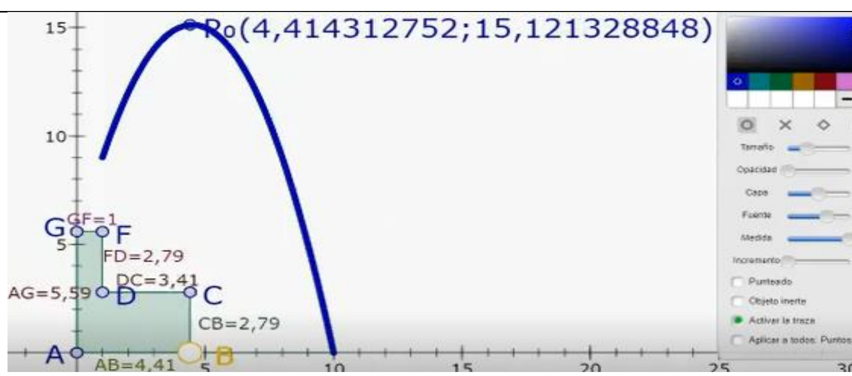
En esta parte, se cumple lo esperado en el análisis a priori que es: el estudiante puede encontrarle sentido a la estrategia propuesta por el profesor, al concluir que “entre más alto esté el punto P más grande es el área”.

| | |
|---|---|
| 235 | P: Visualmente se podría decir, ¿P está en el lugar más alto? |
| 236 | E1: Sí |

| | |
|---|---|
| | <br>*Imagen. Ubicación de P en la parte más alta (Visualmente)* |
| 237 | P: ¿Y cómo podríamos probar que sea el lugar más alto? |
| 238 | E2: Se haría moviendo B |
| 239 | E1: Se supone que la parte más alta quedaría acá. |

Los estudiantes concluyen que: el punto P está en la parte más alta pero no tienen como argumentarlo, simplemente se guían por la visualización. En esta parte se pasa a la Etapa 2 prevista en el análisis a priori que es utilizar la traza para observar las distintas posiciones del punto P.

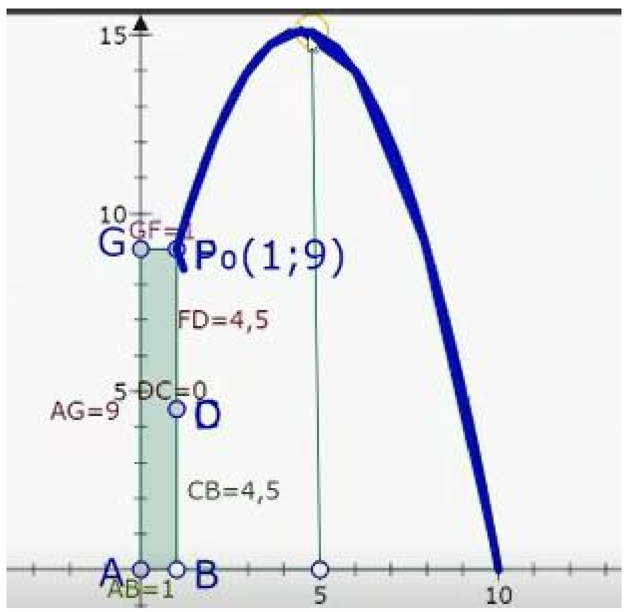
| | |
|---|---|
| 242 | P: Para poder tener una mejor apreciación del movimiento que está haciendo P vamos a utilizar una herramienta, la cual tiene como función activar una traza, entonces le oprimen encima del punto P para sacar las herramientas, dale en el engranaje y le das activar la traza. Ahora mueve el punto B |
| 251 | E1, E2: Este es el punto más alto |

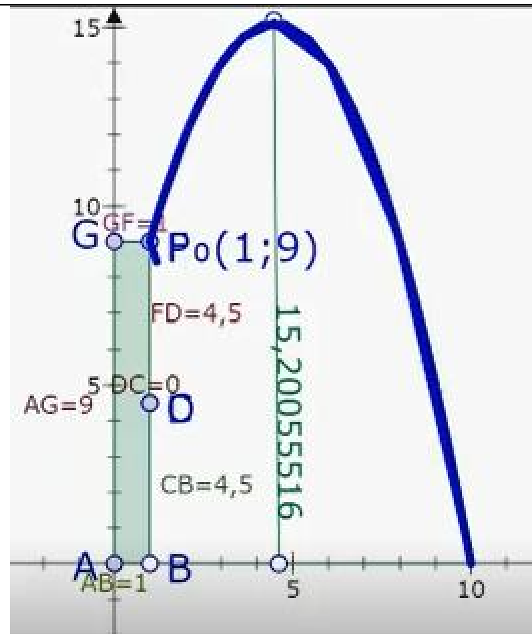
| | |
|---|---|
| 252 | <br>*Imagen. Uso de la traza al mover P* |
| 254 | P:¿Cómo verificamos que efectivamente es el punto más alto? |
| 255 | E2: Yo diría, aunque no está la opción, lo que pienso es oprimir en el P y aumentar los decimales. |
| 256 | P: Exacto entonces por ejemplo ustedes pueden aumentar los decimales dándole sobre el punto y en medida. |
| 257 | (Los estudiantes aumentan los decimales) |
| 258 | <br>*Imagen. Aumento de decimales a P* |

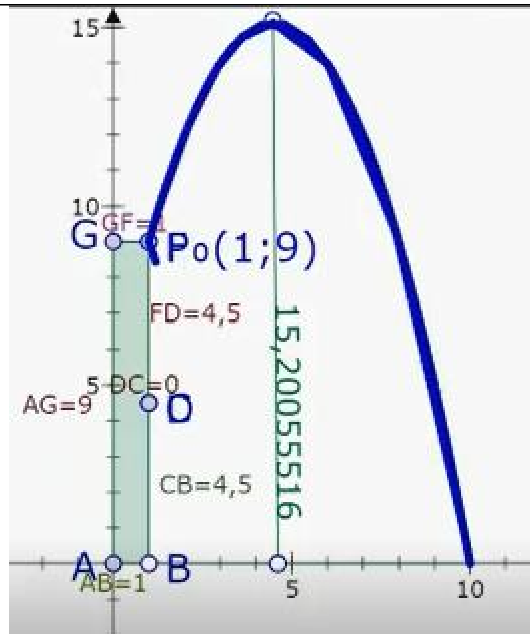
| | |
|---|---|
| 259 | P: ¿Y ese es el punto más alto? |
| 260 | E2: Sí |
| 265 | P: Por favor anoten las coordenadas.<br>Cuando las tengan anotadas vuelvan a mover la figura, para ver si podemos encontrar un punto más alto y medida más alta, pero en este caso haciendo zoom a la figura. |
| (Los estudiantes determinan que para conocer el punto más alto necesitan las coordenadas del punto P y no tienen en cuenta la traza realizada por el punto P, ya que solo con las coordenadas es suficiente para determinar si es el mayor o no)<br>(Los estudiantes antes se hacer zoom buscan una medida mayor a la que anotaron) | |
| 270 | P: ¿Qué pasa cada vez que se aumenta el zoom? |
| 271 | E1: Se aumentan los decimales. |
| 272 | P: ¿Qué más sucede? |
| 273 | E2: Desaparece la traza |
| 274 | P: Entonces para que no se pierda la traza necesitamos otro tipo de representación ¿cierto? |
| 275 | E2: Sí |
| 276 | P: Pero antes, ¿si yo le sigo dando zoom y ubicando el punto P a partir de la medida, siempre vamos a encontrar un valor más grande? |
| 277 | E1, E2: Sí |
| 278 | P: ¿En este sentido la estrategia que se está realizando sirve? |
| 279 | E1, E2: No |

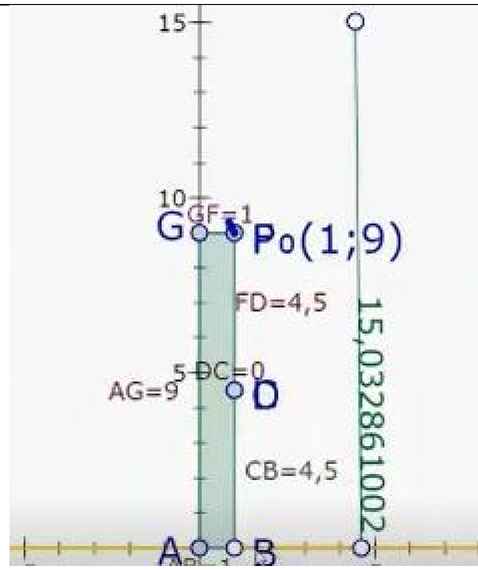
Los estudiantes invalidan la estrategia propuesta (aumentar el número de decimales al punto P) porque al hacer zoom siempre van a encontrar un valor más grande para el área.

De igual manera, observan que al hacer zoom la traza desaparece impidiendo reconocer perceptivamente si el punto P es el más alto, por lo cual el profesor hace la intervención y propone la estrategia matemática de construir la gráfica de la función como fue previsto en el análisis a priori

| | |
|---|---|
| 282 | P: ¿Si la traza se quedará fija nos ayudaría o no? |
| 283 | E2: Sí |
| 284 | P: ¿Si la parábola que tenemos ahí estuviera fija nos ayudaría a resolver el problema? |
| 291 | E2: Sería como hacer algún segmento, por ejemplo, del punto:   *Imagen. Estrategia para hallar la altura máxima de la parábola* |
| 292 | E1: Pero esta torcido, ¿usted qué haría? |
| 293 | E2: Volverla recta, pero no funcionaría. |
| 294 | E1: Yo estaba pensando colocar las medidas del segmento: |

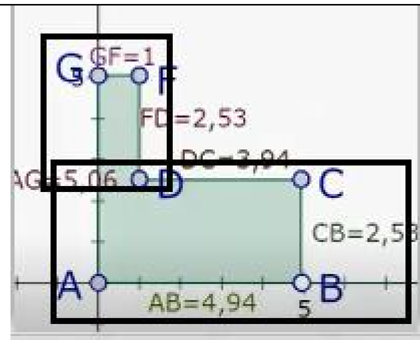
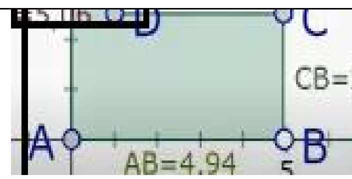
| | |
|---|---|
| 295 | <br>*Imagen. Medida del segmento creado* |
| 296 | E2: Esa sería mi idea, que es poner un segmento desde el punto más alto de P hasta el punto x, que es el punto central. |
| 297 | P: Analicemos esa idea que están proponiendo.<br>Digamos que ese es el punto más alto, por lo tanto, sería el área mayor, pero si le hacemos zoom a la figura, verificamos que sea el punto más alto. |
| 298 | E2: No cambia. |
| 299 | E1: Yo diría que si se mantuviera fijo no cambiaría, para mi será la respuesta |

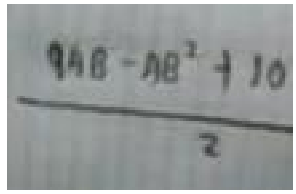
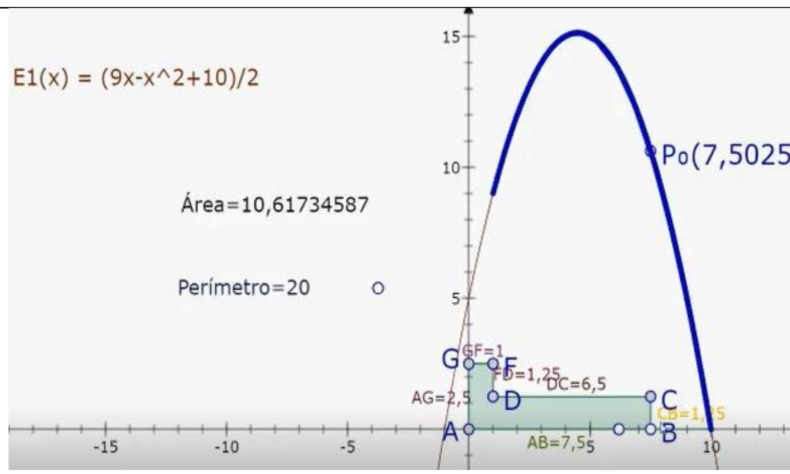
| | |
|---|---|
| 300 | <br>*Imagen. Estrategia para hallar la altura máxima de la parábola* |
| Los estudiantes proponen una nueva estrategia perceptiva que no se tenía propuesta en el análisis a priori: piensan que al tener una representación semejante al eje de simetría de una parábola, puede ser la posible representación que se está buscando, sin tener en cuenta que al hacer zoom o al mover el punto de la parte superior del segmento va a cambiar su posición y sus valores, generando la intervención del profesor para invalidar la estrategía. | |
| 301 | P: Hagamos zoom enfocándonos en la parte de arriba, o sea que en el punto que crearon... |
| 302 | (Los estudiantes mueven el punto B para mirar la traza) |
| 303 | P: ¿El punto que crearon está sobre la traza o está por fuera de la traza? |
| 304 | E2: Está por fuera un poco. |
| 307 | P: Haz un poco de zoom |
| 308 | E1: Listo |
| 309 | P: ¿Qué pasó? |

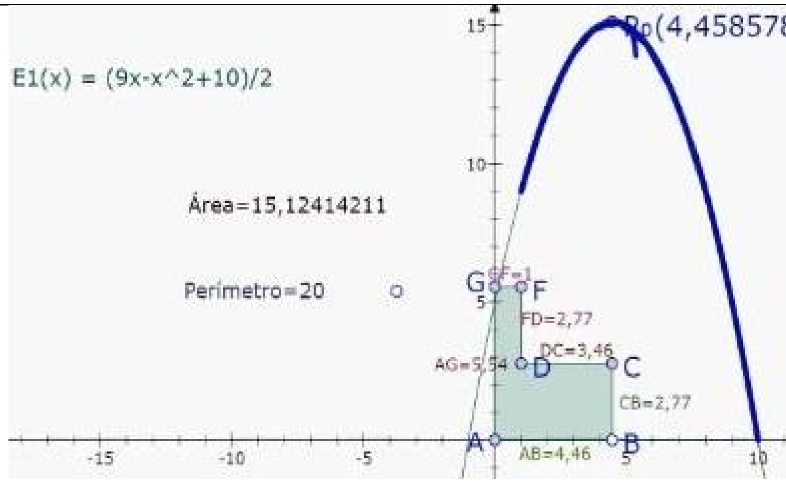
| | |
|---|---|
| 310 | E1: Desapareció la traza |
| 311 | <br>*Imagen. Invalidación de la estrategia propuesta* |
| 312 | P: Si se desaparece la traza, no podemos estipular bien si ese punto está sobre la traza que se hace ¿cierto? |
| 313 | E2: Sí |
| 314 | P: Sería más fácil si la traza se quedara quieta y no desapareciera al hacer zoom. Cuál sería la idea, la idea sería construir esa traza de tal forma que no desaparezca. entonces ¿la traza que forma tiene? |
| 315 | E1: Parabólico. |

Los estudiantes borran el segmento y el punto que crearon, invalidando la estrategia que propusieron, por lo cual se pasa a la etapa 3 como se tenía propuesto en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 337 | P: Recuerden que, cuando ustedes tienen un rectángulo y quieren encontrar el área multiplica la base por altura, ¿pero en este caso que figura es? |
| 338 | E1: Un hexágono |

| | |
|---|---|
| 339 | P: Siendo así que otra estrategia podrían utilizar. |
| 340 | E1: La otra sería encontrar el valor que hay de acá (Los estudiantes seleccionan los rectángulos del hexágono) |
| 351 | E2: Sería unir este acá y ya tendríamos el valor que hay acá como muestra en la imagen |
| 352 |   *Imagen. División del hexágono* |
| 353 | E1: y ya tendríamos el valor, sería multiplicar 2,53, por 4,94 y ya tendríamos ese rectángulo |
| 354 |   *Imagen. Estrategia para calcular el área* |
| 355 | P: Ya tendríamos el primer rectángulo, ¿ahora cuál sería el segundo? |
| 356 | E1: A con razón, en el primer rectángulo que tendríamos como el más grande tendríamos que multiplicar 4,94 por 2,53 y eso daría 12,4982. |
| 357 | En el más pequeño sería multiplicar 1 por 2,53. |
| 358 | P: Listo, ustedes están haciendo las operaciones con la parte numérica, ¿qué pasaría si le agregamos más decimales, sería igual de fácil las operaciones o ya se complicaría? |
| 359 | E2: Se complicaría más |

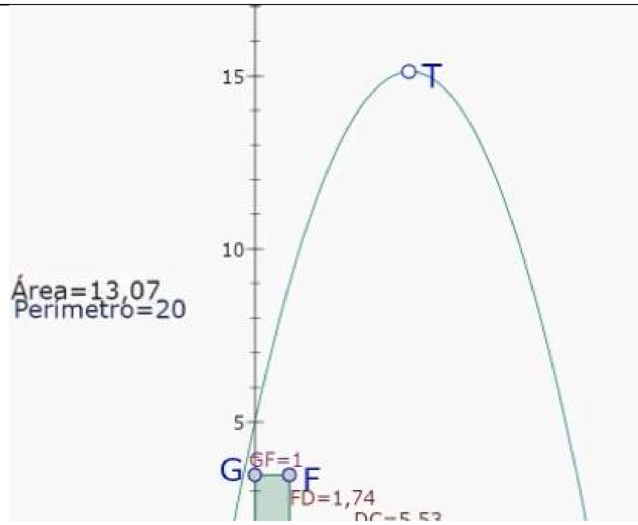
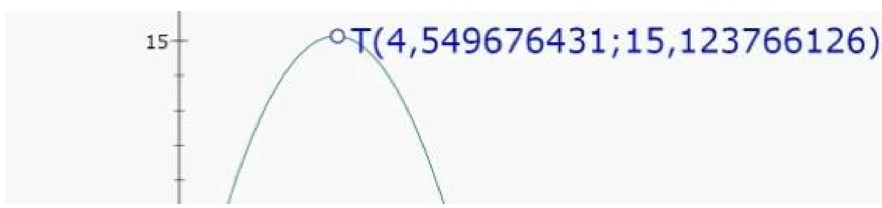
| | |
|---|---|
| 360 | P: ¿Cómo se expresaría la estrategia que ustedes están utilizando, pero en vez de darle el valor que ustedes están utilizando, utilizamos el nombre de los segmentos? |
| 615 | Los estudiantes realizan el proceso algebraico necesario para establecer la ecuación de la gráfica:   *Imagen. Ecuación establecida para el área del hexágono* |
| 632 | P: Recuerden que el AB lo reemplazaron por $x$. |
| 633 |   *Imagen. Uso de la grafica creada* |
| 634 | P: Listo ¿Que graficó? |
| 635 | E1: Una función cuadrática |
| 647 | P: Entonces, ya tenemos la gráfica, si quieren pueden mover el punto B para que se vea todo el recorrido. Listo, entonces aquí ¿Por qué la traza no escribe toda la gráfica, o sea por qué la parte azul no está en toda la gráfica? |

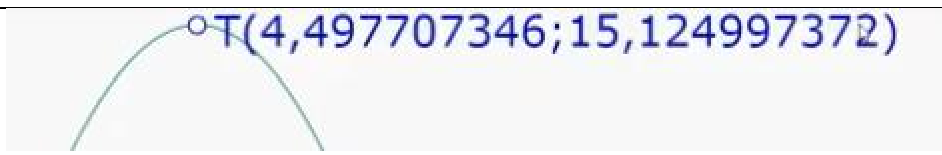
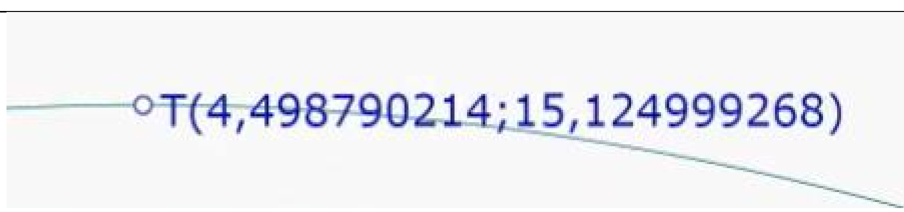
| | |
|---|---|
| 648 | <br>*Imagen. Ubicación de P en la parte más alta* |
| 656 | P: Exacto. ¿Por qué el segmento AB no puede ser más pequeño que uno? |
| 657 | E2: Porque si fuera más corto no estaría mostrando, o no empezaría desde GF |
| 658 | P: Exacto, ¿Se acuerdan de la condición de GF? |
| 659 | E1: Sí señor, solamente puede valer un metro |
| 660 | P: Vale, entonces ahora ¿Qué pasa si se toma un punto sobre la gráfica en un cuadrante diferente al primero? |
| 661 | E2: No cumpliría la primera condición |
| 662 | P: ¿Cuál sería? |
| 663 | E2: Que solo puede valer un metro |
| 664 | P: Listo, ¿Algo más por lo que no se pueda o que pasaría? |
| 665 | E2: ¿Podría llegar a cambiar el perímetro? |
| 666 | P: Podría llegar a cambiar el perímetro, ¿Por qué? Por ejemplo, si eso se hiciera en un cuadrante negativo, el perímetro que valor sería ¿Positivo o negativo? |
| 667 | E2: Negativo |
| 677 | P: ¿Y el perímetro es negativo? |

| | |
|---|---|
| 678 | E1: No señor |
| 679 | P: Listo, esa sería otra de las razones. Otra pregunta que nos podemos hacer es: ¿Puede eso tener un lado negativo? |
| 680 | E1: Yo diría que no porque estamos buscando, lo mayor no lo menor |
| 681 | P: ¿Y hay áreas y perímetros negativos? |
| 682 | E2: No, no hay perímetros negativos |

Los estudiantes comprenden que, si se cambia de cuadrante, o si un segmento es negativo no podría existir perímetro. De igual manera, reconocen el dominio de la función, en el cual la gráfica tiene validez para el problema. Con estas aclaraciones se da paso a la Etapa 4.

| | |
|---|---|
| 685 | (Los estudiantes colocan un punto cualquiera sobre la gráfica) |
| 686 | P: ¿Ese punto cualquiera que colocaron, representa también los mismos movimientos del punto P? |
| 687 | E2: Sí señor |
| 689 | P: Listo, entonces coloquémosle un nombre al punto que esta sobre la gráfica, podría ser llamado punto T. ¿si queremos encontrar la mayor área, en donde debería estar ubicado el punto T? |
| 691 | E1: (Los estudiantes arrastran el punto T hacia la parte más alta de la gráfica) |

| | |
|---|---|
| | <br>*Imagen. Punto T sobre la grafica* |
| 692 | P: Listo, ustedes están intentando ubicar el punto T en la parte más alta de la gráfica, ¿verdad? |
| 682 | E2: Sí, señor. |
| 698 | P: En este caso, ¿a qué medida de área corresponde ese punto T? (donde está ubicado) |
| 700 | E2: Según eso, es 15,123766126<br><br>*Imagen. Valor para el punto T* |
| 702 | P: Exacto, si se supone que está en la parte más alta esa debería ser la medida más grande. Ahora les pregunto, ¿pueden encontrar una medida más alta? |
| 703 | (Los estudiantes hacen un intento para encontrar una medida más alta, hacen zoom y ubican el punto en donde creen que es la medida más alta) |

| | |
|---|---|
| 704 |   *Imagen. Medida del punto T* |
| 705 | E2: Tal vez sea, pero no hay más. |
| 706 | P: ¿Esa medida que ustedes pusieron ahí se parece a una de las medidas que ustedes dijeron que eran mayores al principio? |
| 707 | (Los estudiantes miran las medidas registradas al principio) |
| 708 | P: ¿Esa es mayor o menor a la que tenían anotada? |
| 709 | E1: Es mayor |
| 710 |   *Imagen. Nueva medida del punto T* |
| 713 | P: Listo, ¿ustedes consideran que se puede encontrar un número mayor? |
| 714 | E1: Tal vez sería si hacemos zoom, pero sería como un número infinito, entre más haga zoom tal vez podría encontrarse un número más grande. |
| 718 |   *Imagen. Nueva medida del punto T* |

| | |
|---|---|
| 727 | P: ¿Si hacemos el proceso otra vez, de hacer zoom y mover el punto para encontrar uno más alto, creen que vamos a seguir encontrando uno más alto cada vez que hagamos esto? |
| 728 | E1: Sí señor |
| 729 | E2: No vamos a poder encontrar un punto más alto |
| 730 | P: Es importante tener en cuenta esta conclusión, siempre que hacen zoom van a poder encontrar un punto más alto por lo tanto un valor más grande y no van a poder solucionar el problema de esta manera. |

Los estudiantes vuelven a invalidar la estrategia porque siempre están encontrando un valor mayor en el área al hacer zoom, por lo cual se da paso a la segunda actividad como se tenía previsto en el análisis a priori

Dentro de la etapa 1 y la etapa 2, se cumple lo esperado en el análisis a priori: los estudiantes invalidan las estrategias propuestas para encontrar el área mayor, gracias a la herramienta del zoom y la medida. De igual manera, se entiende la relación del punto P entre la longitud de un lado del hexágono con el área.

También se observa que los estudiantes mostraron las coordenadas del punto P, guiándose siempre por los valores para encontrar el área mayor del hexágono. Se sugiere no poner medidas al punto P para que los estudiantes se centren únicamente en la relación y el movimiento que describe el punto P.

En la etapa 3, los estudiantes proponen una forma de encontrar la mayor área del hexágono, sin embargo, se identifican dificultades y errores al momento de operar términos algebraicos por lo cual es necesaria la intervención del profesor frecuentemente.  Finalmente, en la etapa 4 Se cumple lo previsto en el análisis a priori.

**Actividad 2**

En este apartado se espera la determinación de las condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible.

| | |
|---|---|
| 3 | P: Encontrar el punto más alto en la gráfica. Entonces para ello se tienen 2 objetos, un balón y un sombrero. La idea es que cada uno de ustedes busque cual es la altura máxima de los dos objetos, entonces, cada uno encuentre la altura máxima del balón y el sombrero y lo anota en una hoja, sin mirarse los datos uno al otro, para luego comparar los datos que a cada uno registró. Pueden empezar a medir la altura del balón |
| 4 | E1: (Empieza a tomar las medidas del balón y el sombrero, luego las escribe en una hoja) |
| 5 | E2: (También calcula la altura máxima de los objetos y registra las medidas) |
| 7 | E1: 19,5 cm (Altura del balón) |
| 8 | E2: 18,7 cm (Altura del balón) |
| 9 | P: ¿Y el sombrero? |
| 10 | E1: 11,1 cm |
| 11 | E2: 11 cm |
| 12 | P: Bueno, la altura que más varia es la del balón ¿Por qué creen que dio medidas distintas? Si están midiendo el mismo objeto |

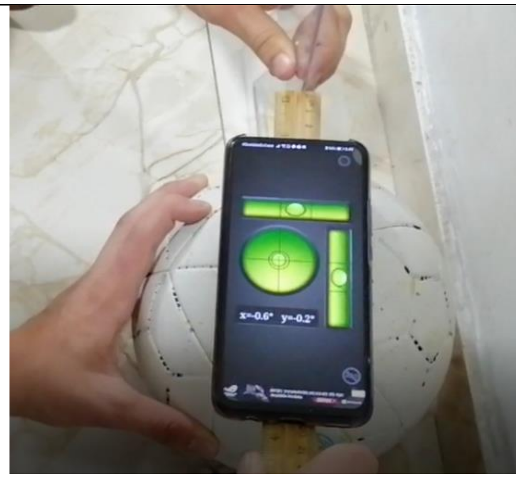
| | |
|---|---|
| 13 | E2: Tal vez al momento de medirlo se dobló o no se sostuvo bien la regla y por eso dio diferente |
| 14 | P: ¿Será que si lo miden de nuevo van a obtener medidas más parecidas? |
| 15 | E1: Es que ninguno de los dos objetos son planos, tal vez no hay una medida exacta porque hay una curva. |

Se observa que los estudiantes inician aplicando de una vez la estrategia dos (Colocar la regla graduada encima del objeto y la escuadra al lado del objeto. La regla que se ubica encima del objeto le permite leer la altura en la escuadra) para encontrar la altura de los objetos, luego al comparar los valores obtenidos entre ellos se dan cuenta que son diferentes, porque no pueden establecer una altura exacta en objetos esféricos, como se previó en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 16 | P: Ah, porque son curvos los objetos, listo. Entonces, ahora entre los dos van a intentar medir de nuevo la altura de los dos objetos, pero esta vez utilizando las aplicaciones que tienen en el celular. Ya los dos pueden ayudarse a medir el mismo objeto y utilizando la aplicación. |
| 17 | E1: ¿Utilizamos los dos niveles? |
| 18 | P: Como consideren, si hay que utilizar dos niveles o solo uno. |
| 19 | E2: Listo |
| 20 | (Empiezan a medir de nuevo la altura del sombrero y el balón, esta vez utilizando el nivel) |
| 21 | (Los estudiantes proponen una acción, en este caso, posicionan el nivel de manera horizontal sobre el balón) |

| | |
|---|---|
| |  *Imagen. Uso de la aplicación nivel* |
| 24 | P: Listo, al usar el nivel de esa forma, ¿les ayudaría a encontrar la altura? |
| 25 | E1: No |
| 26 | P: ¿En qué nos podría ayudar el nivel? |
| 27 | E2: Tal vez en mirar que tan plano esta (hacen referencia al celular ubicado horizontalmente en el balón). Pero no se puede porque se mueve mucho el balón y los valores del nivel se mueven demasiado. |
| 28 | E1: ¿Se puede hacer algo para que se quede quieto el balón? |
| 29 | P: Claro, lo pueden apoyar o hacer lo que quieran. Si se apoya el balón contra la pared sería más fácil que se quede quieto, ¿no? |
| 30 | E1 y E2: Pero es que el celular se inclina |
| 31 | P: El celular se inclina, ¿cierto? |

<table>
<tr><td>32</td><td><br><br>Imagen. Uso de los instrumentos de medición</td></tr>
<tr><td>40</td><td>P: ¿Y no sería mejor poner el balón apoyado en la pared para que no se mueva? (Apoyan el balón sobre la pared y colocan el celular sobre el balón de forma horizontal).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes utilizan la estrategia 3 para apoyar los objetos contra la pared de manera que no se muevan como fue previsto en el análisis a priori.</td></tr>
<tr><td>46</td><td>P: Listo, para poder establecer la altura máxima que condiciones tienen que cumplir las reglas para que usted diga que es el punto máximo.</td></tr>
<tr><td>47</td><td>E2: Primero una regla tiene que estar sobre el balón, que este como acostada, pero en lo plano, que no esté inclinada para que mantenga la altura exacta. (Hacen referencia a ideas intuitivas de la condición de horizontalidad)</td></tr>
<tr><td>48</td><td>P: Listo, usted está diciendo que tiene que estar nivelada. ¿Cómo haría para asegurar con las herramientas que tiene que este nivelada?</td></tr>
<tr><td>49</td><td>E1: ¿Con la herramienta?</td></tr>
<tr><td>50</td><td>P: Sí, y con las reglas. Seria utilizar la forma que lo hicieron en la estrategia anterior, pero en este caso apoyándose con la herramienta del nivel</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 59 | (El estudiante coloca el nivel horizontalmente, pero esta vez apoyado sobre la regla, para verificar que no esté inclinada). |
| 60 |   *Imagen. Uso de los instrumentos de medición* |
| 61 | P: ¿Y ahí cual es la altura? |
| 62 | (Los estudiantes sostienen las reglas de tal manera que la regla que está apoyada sobre el balón tenga una inclinación de cero grados o muy aproximada a cero grados). |
| Los estudiantes aplican la estrategia 4, colocando un nivel sobre la regla horizontal, buscando que el nivel estuviera en cero grados. | |
| 63 | P: Listo en $y$ ya está prácticamente en cero grados, tocaría que lo cuadraran en $x$ un poco mejor. (La aplicación del nivel muestra los grados de inclinación tanto en $x$ como en $y$). Igual no tiene que ser exacto (el valor de cero grados), lo más aproximado posible. |
| 64 | E1 y E2: La altura seria 19,6cm |
| 65 | P: ¿Y cuál fue la medida que tenia del balón anteriormente? |
| 66 | E1 y E2: 19,5 cm y 18,7 cm |

| | |
|---|---|
| 67 | P: Entonces tenemos una mejor aproximación utilizando el nivel. Ahora sería hacer lo mismo con el sombrero.<br><br>*Imagen. Uso instrumentos de medición para el sombrero* |
| 68 | E1, E2: 10,7 cm es la altura |
| 69 | P: ¿Qué medidas les habían dado inicialmente? |
| 70 | E1: 11,1 cm |
| 71 | E2: 11 cm |
| 72 | P: ¿Cuál fue la medida que más varió, la del balón o la del sombrero? |
| 73 | E1, E2: La del balón |
| 74 | P: ¿Qué características vieron en relación de cómo se ubicaba la escuadra respecto a la regla? |
| 75 | E2: Con una podíamos mediar la altura porque estaba al lado del balón (haciendo referencia a la escuadra) y con la regla medir exactamente cuánto era la parte más alta |
| 76 | P: Ósea necesitaron dos reglas para saber la altura del objeto.? |
| 77 | E1: Sí |
| 78 | P: Que más conclusiones pueden sacar. Por ejemplo, ¿para qué les sirvió el uso del nivel? |

| | |
|---|---|
| 79 | E2: Como los objetos son curvos se tiene una mayor precisión |
| 80 | P: Listo, entonces para sacar las conclusiones de la actividad, ¿si se acuerdan de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo? ¿De pronto los han escuchado alguna vez? |
| 81 | E1: La perpendicularidad es cuando las rectas chocan entre sí, ósea, que se cruzan y la paralela es cuando no. |
| 82 | P: ¿Qué otra característica tiene la recta perpendicular? ¿Digamos en este caso cual sería perpendicular? |
| 83 | E2: La perpendicular es cuando, por ejemplo, choca la regla con la escuadra para medir la altura máxima. Y la paralela seria como el celular con la regla, tal vez. |
| 84 | P: ¿La regla a quién es paralela? |
| 85 | E1: A la escuadra |
| 86 | E2: No, prácticamente las reglas son como dos líneas, entonces si dice que chocan perpendicular. |
| 87 | P: Listo, ¿ahora quien es paralela a quién? ¿La regla que está ubicada sobre el sobrero a quien es paralela? |
| 88 | E1: Yo diría que la única sería el celular, en si la dos reglas no podrían ser paralelas. |
| 93 | P: Entonces el nivel en que nos ayudaba en esa relación de paralelismo. |
| 94 | E1: A que la regla estuviera igual de plana que el suelo y perpendicular al suelo, para eso están los niveles. |

<table>
<tr><td></td><td><br>*Imagen. Uso instrumentos de medición para el balón*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes aplican la estrategia 5, utilizando los dos niveles para garantizar horizontalidad en la regla no graduada y la verticalidad en la escuadra, calculando la altura máxima del balón y el sombrero como se evidencia en el análisis a priori.</td></tr>
<tr><td>95</td><td>P: Para concluir, ¿si quiero saber la altura máxima de un objeto que tiene que haber?</td></tr>
<tr><td>96</td><td>E2: Tiene que esta igualados los grados del suelo con la regla.</td></tr>
<tr><td>97</td><td>P: Listo, ustedes ya mencionaron dos características, ¿la primera la ubicación entre las dos reglas que como era?</td></tr>
<tr><td>98</td><td>E1: Perpendicular</td></tr>
<tr><td>99</td><td>P: Listo y la otra conclusión es la paralela de la regla con el suelo.</td></tr>
<tr><td>100</td><td>Ahora, cuando apoyaban la regla sobre el objeto ¿cuántos puntos tocaba la regla al objeto?</td></tr>
<tr><td>101</td><td>E2: Solo un punto</td></tr>
<tr><td>102</td><td>P: Listo, solo debe tener un punto para que sea la altura, no pueden tocar más.</td></tr>
</table>

Como se esperaba del análisis a priori los estudiantes utilizaron todas las estrategias excepto la estrategia 1, logrando que perceptivamente el nivel que estaba horizontal estuviera en cero grados para encontrar la altura de los objetos.

Esta actividad fue pertinente y permitió que los estudiantes implícitamente le dieran sentido geométrico al procedimiento de calcular la función derivada de una función e igualarla a cero, pues equivale a encontrar una recta horizontal tangente a la curva.

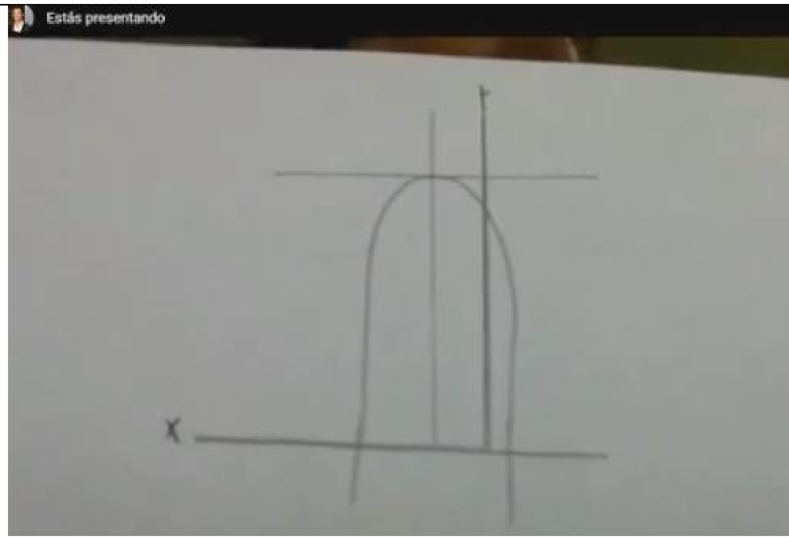
Los estudiantes concluyeron lo que se esperaba en el análisis a priori, lo cual les permitió adaptar esas ideas a la situación del hexágono. También se destaca el fácil uso de la aplicación del nivel para los estudiantes, permitiéndoles ubicar lo más aproximado posible para garantizar la perpendicularidad y la horizontalidad.

**Actividad 3**

De la aplicación de la estrategia de medición desarrollada en la segunda actividad se espera que los estudiantes le den sentido para determinar la altura máxima de la gráfica de la función. Asimismo, se propone la utilización de la función derivada como lugar geométrico.

| | |
|---|---|
| 1. | P: Damos inicio a la actividad 3, la cual nos va a permitir solucionar el problema que estamos buscando. ¿Entonces qué conclusiones se pudieron sacar de la actividad 2? |
| 2. | E1: Se utilizaron reglas y escuadras y se concluyó que había dos tipos de rectas, una paralela y otra perpendicular. La perpendicular era cuando chocaban la escuadra y la regla. La paralela era el piso con la escuadra |
| 9 | P: Retomando las conclusiones de la actividad 2, ¿cómo podríamos aplicar esas ideas para solucionar el problema en DGPad-Colombia? |

| | |
|---|---|
| 10 | E2: Necesitaríamos una superficie que este recta a la figura |
| 15 | E1: Tal vez sería algo de adición, como una línea que este acá. (El estudiante señala la parte más alta de la parábola)<br>(Es decir, que propone la construcción de la recta horizontal que toque la parte más alta de la parábola) |
| 16 | P: Ósea poner una línea que pase por el punto más alto, ¿cumpliendo que características? |
| 17 | E2: Debe estar en el punto más alto y debe estar en el centro de la curva. |
| 22 | P: ¿Pero entonces esta regla tenía una propiedad, como tenía que estar la regla? |
| 23 | E2: Tenía que ser paralela |
| 24 | P: Exacto, en este caso no tenemos piso, ¿pero si tenemos qué? |
| 25 | E1: El eje $x$ |
| 33 | P: Hagamos lo siguiente, traten de expresar su idea en una hoja y nos dicen la línea que quieren agregar a quien es perpendicular. |
| 34 | (Los estudiantes dibujan la línea (en una hoja) que quieren agregar en la construcción)<br>(En el dibujo hacen el eje $x$ y el eje $y$) |

| | |
|---|---|
| |   *Imagen. Representación de la idea propuesta* |
| 35 | P: Exacto, ¿La línea de la parte de arriba que es horizontal, verdad? Así podríamos encontrar el punto más alto. ¿Basándonos en la última línea que hicieron ya sabemos que tiene que ser paralela al eje $x$ y esa línea a su vez será perpendicular a quién? |
| 36 | E1: Al eje $y$ |
| 37 | P: Exacto, entonces vamos aplicar esa estrategia, pero en DGPad-Colombia. |
| 38 | E2: (Los estudiantes para construir la recta paralela al eje $x$ que pasa por la parte más alta de la parábola, hacen lo siguiente: A partir del punto T crean una recta cualquiera, y arrastran el otro punto de la recta hacia el eje $y$. en donde aparentemente y visualmente la recta es paralela al eje $x$ y perpendicular al eje $y$)<br>Como lo muestra la siguiente imagen: |

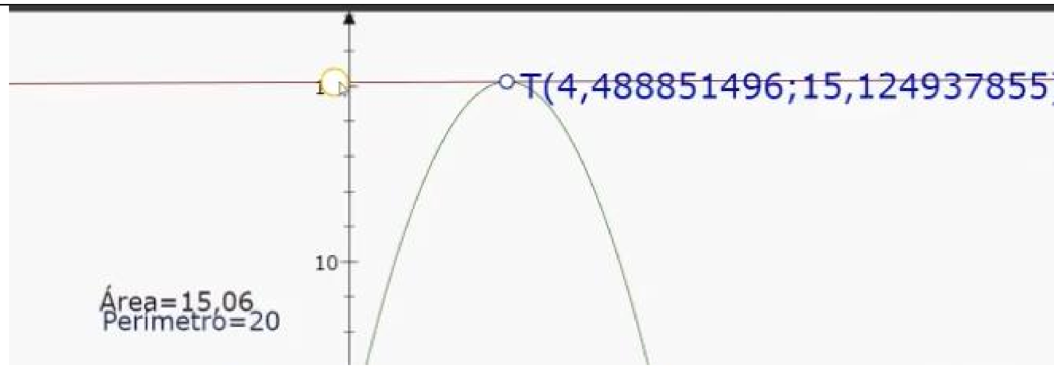
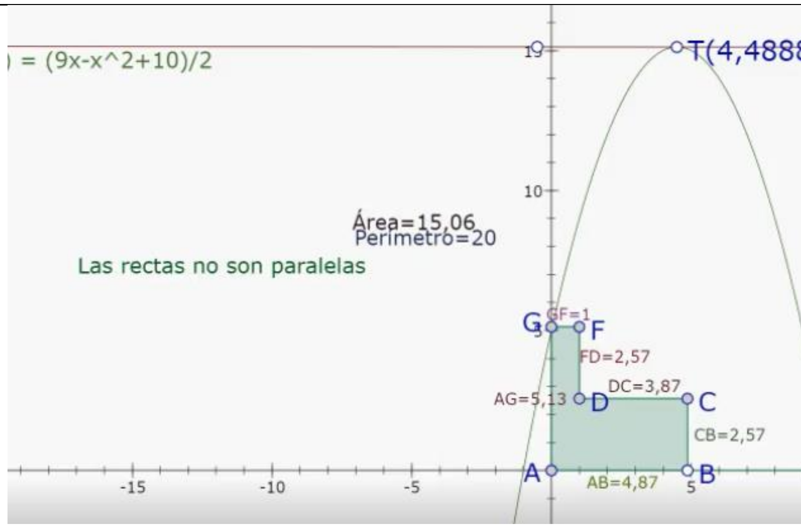
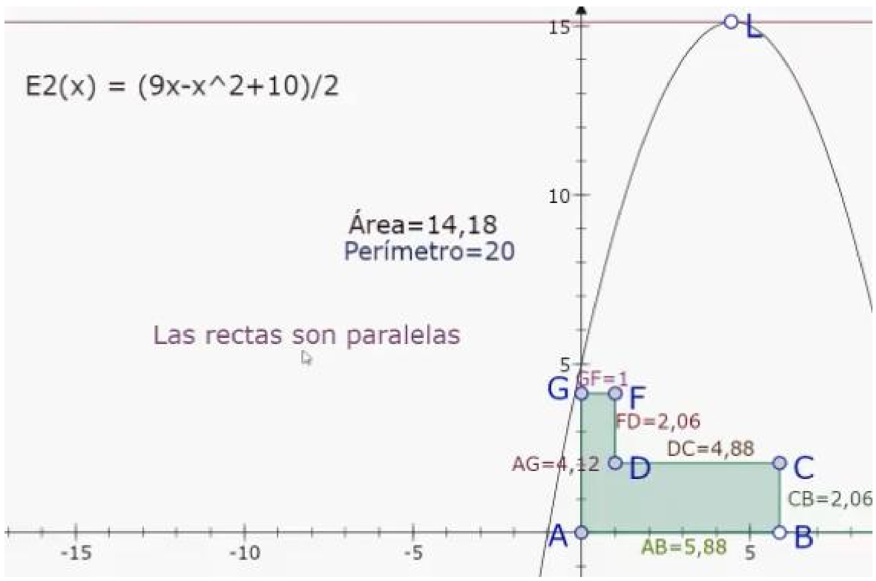
<table>
<tr><td></td><td>

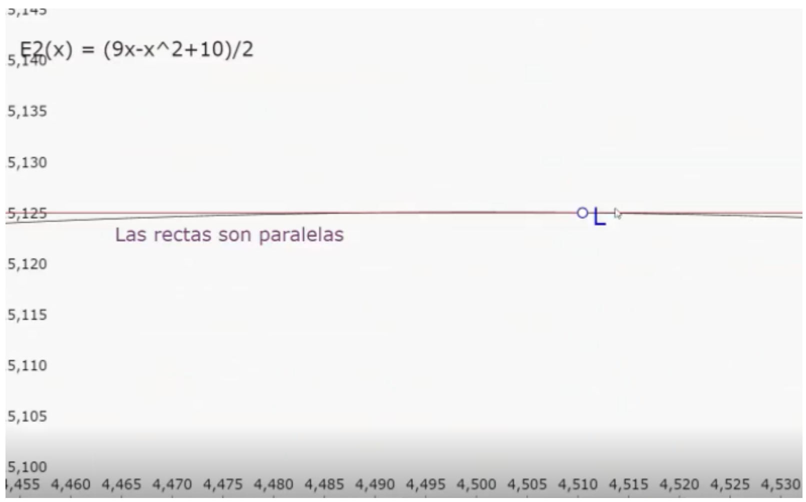

Imagen. Estrategia para la horizontalidad</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes dan sentido a la aplicación de la actividad dos, ya que afirman que es necesario construir una recta horizontal y otra perpendicular para medir la altura de la parábola tal como se evidencio en el análisis a priori.</td></tr>
<tr><td>39</td><td>P: ¿Cómo hacemos para verificar si la recta cumple con las condiciones que mencionaron?</td></tr>
<tr><td>40</td><td>E1: Que esta paralela al eje $x$ y que este perpendicular al eje $y$ y que este en un punto medio de la gráfica. (En esta parte el estudiante hace referencia a que el punto más alto está en la mitad de la parábola)</td></tr>
<tr><td>41</td><td>P: Listo, vamos a verificar una de esas condiciones con una herramienta llamada "macros" y seleccionamos paralelismo. Para esto seleccionamos primero la recta que queremos verificar y luego seleccionamos la otra recta (a la cual es paralela).</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | <br><br>*Imagen. Uso del test de paralelismo e invalidación de la estrategia propuesta por los estudiantes* |
| 42 | E2: Las rectas no son paralelas |
| 43 | P: ¿Entonces cumpliría con las condiciones que se habían dicho? |
| 44 | E1 y E2: No señor |
| 45 | P: Entonces esa recta no nos sirve, ¿será que se puede volver paralela (al eje $x$)? |
| 46 | (E1 y E2 Llegan a la conclusión de que no sabrían cómo construirla) |

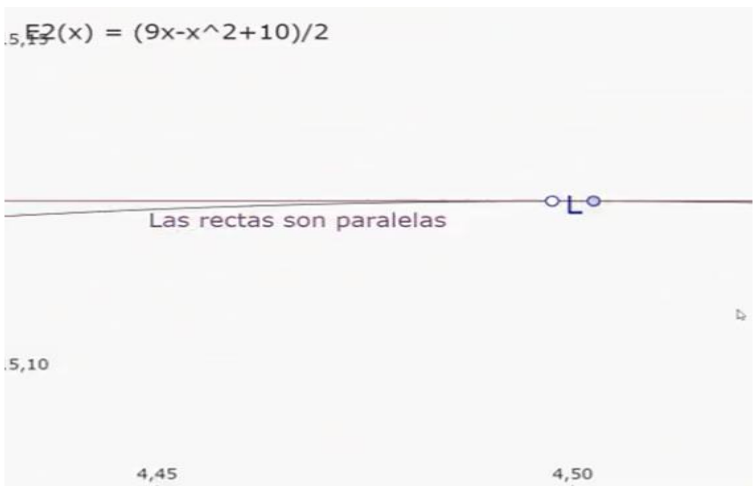
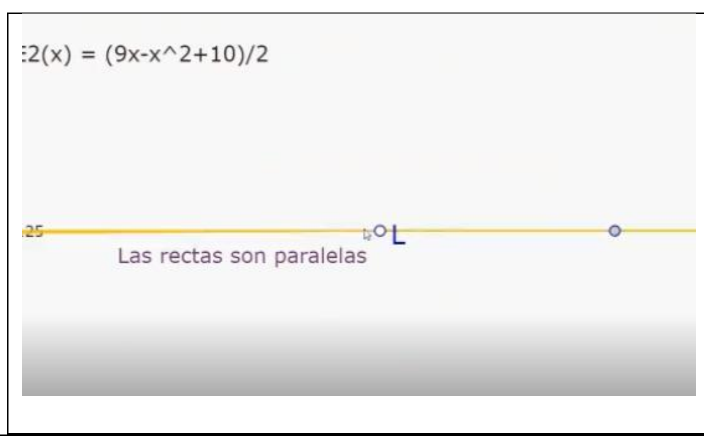
Los estudiantes invalidan la estrategia, ya que no pueden garantizar que la recta construida es paralela con el eje $x$. Por lo cual, el profesor hace la intervención de que se puede construir una recta horizontal con la herramienta del software tal como fue previsto en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 47 | P: Para esto, creamos un nuevo punto sobre la parábola y lo nombramos L. Luego, señalan el eje $x$, seleccionan la herramienta "paralela" y lo arrastran al punto L para crear la nueva recta. |
| 48 | P: Ahora podemos verificar (con la herramienta) si la recta que pasa por el punto L, es paralela al eje $x$. |

| | |
|---|---|
| | La macro aparece como "paralelismo"<br><br>(Los estudiantes utilizan la macro para verificar si la recta es paralela al eje $x$) |
| 54 | E2 y E1: Sí, acá dice que las rectas son paralelas<br><br>*Imagen. Uso del test de paralelismo* |
| 55 | P: Listo, se cumple una de las condiciones (paralelismo), ¿qué otra condición debería cumplir? |
| 56 | E1: Que la recta sea perpendicular con el eje y. |
| 57 | P: ¿Listo y es perpendicular? |
| 58 | E2: Sí señor |
| 59 | P: ¿Y qué otra condición? |
| 60 | E1: Debe estar en la parte más alta de la grafica |
| 61 | P: ¿Y ahí está en la parte más alta de la gráfica? |
| 62 | E1 y E2: Sí señor |
| 63 | P: ¿Y cómo podemos verificar que es la parte más alta de la gráfica? |

| | |
|---|---|
| 66 | E2: Debe tocar un punto |
| 67 | P: Listo, como debe tocar en un punto, lo que vamos hacer es darle zoom a la figura y verificar si efectivamente toca en un punto. |
| 68 | E1: La grafica toca solo en un punto |
| 70 | E2: Sí señor, solo toca en un punto así le hagamos zoom.<br><br>*Imagen. Uso de la herramienta zoom para verificar* |

Como se evidencio del análisis a priori los estudiantes al principio hacen zoom y visualmente se convencen de que la recta corta solo en un punto a la parábola, luego les pedimos seguir haciendo zoom para que comprueben si la recta corta en un solo punto a la parábola. Sin embargo, los estudiantes siguen haciendo zoom, pero llega un momento en que de tanto hacer zoom es difícil visualmente reconocer si toca en dos puntos, por lo cual los estudiantes reafirman la idea de que solo toca en un punto. En ese momento se hace la intervención para utilizar la macro de "intersección".

| | |
|---|---|
| 71 | P: Listo, entonces vamos a utilizar una herramienta que se llama "intersección", está ubicada en el mismo sitio donde encontraron la herramienta de paralelismo.<br><br>Señalan el punto L y ya queda. ¿Qué hizo la herramienta intersección en la construcción? |
| 72 | E1: Mirar en cuantos puntos la recta toca a la gráfica. |
| 73 | P: ¿Exacto, en este caso en cuantos tocaría? Si quieren pueden hacerle zoom hasta que consideren necesario para ver en cuantos puntos toca a la curva<br><br><br>*Imagen. Punto de corte al hacer zoom* |
| 78 | E1: Sería como mover el punto L hacia donde está el otro punto.<br><br> |

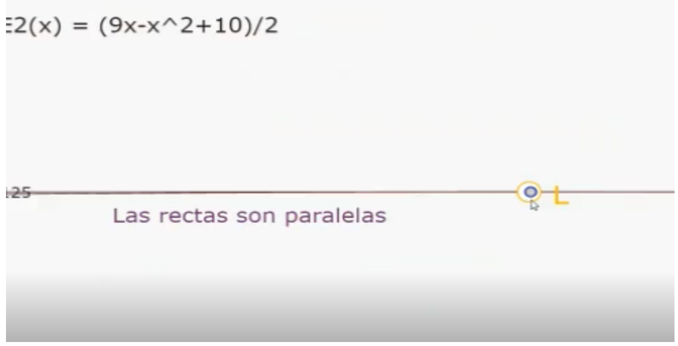
<table>
<tr><td></td><td></td><td>

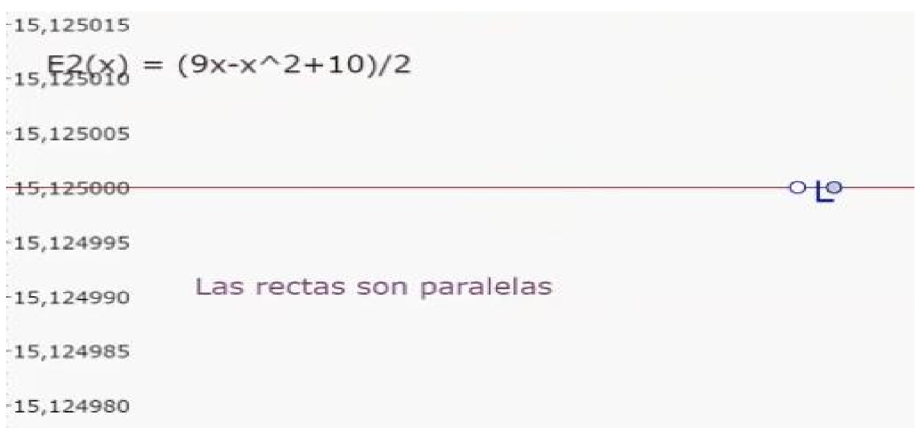
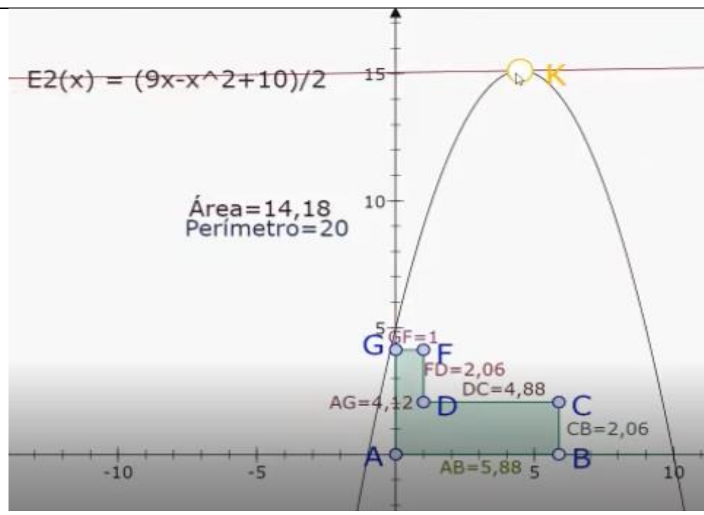
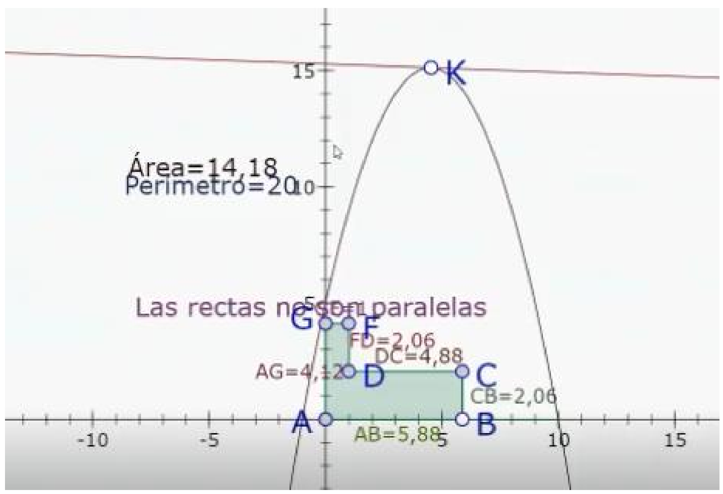
Imagen. Estrategia de sobreponer los puntos</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Los estudiantes hacen la estrategia propuesta en el análisis a priori, la cual es llevar el punto L hacia el otro punto de corte para solo formar el punto centro. Luego, se les pide utilizar zoom para comprobar si al unir esos dos puntos (El punto L y el otro punto de corte) se convierten en el punto centro, por lo cual, notan que sigue cortando en dos puntos e invalidan esa estrategia.</td></tr>
<tr><td>80</td><td colspan="3">P: Ustedes creen que, si volvemos a unir esos dos puntos y hacer zoom, ¿van a volver a separarse otra vez?</td></tr>
<tr><td>81</td><td colspan="3">E2 y E1: Si señor</td></tr>
<tr><td>82</td><td colspan="3">P: ¿Ok entonces la estrategia nos serviría para encontrar el punto más alto?


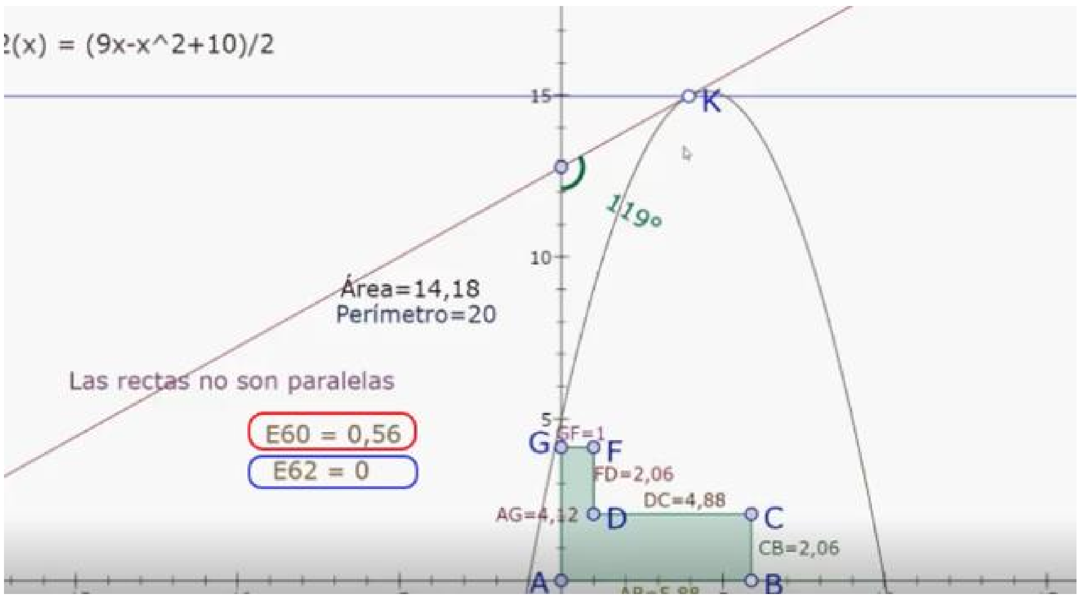
Imagen. Invalidación de la estrategia al hacer zoom</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 83 | E2: Yo diría que no porque pasa lo mismo de la otra vez, entre más se le hace zoom hay un área más grande. (Refiriéndose a la estrategia aplicada en la primera actividad) |
| 84 | P: Ok, en ese orden de ideas, que condiciones no ha cumplido la recta (de las que ustedes mencionaron) |
| 85 | E2: Que solamente toque en un punto. El resto de condiciones si las cumple porque la recta en perpendicular en $y$ y es paralela en $x$ |

Los estudiantes invalidan la estrategia de poner el punto L en la parte más alta. Debido a las retroacciones del software, al hacer zoom y utilizar la marco intersección observan que la recta siempre va a cortar en dos puntos, invalidando lo que perceptivamente parecía tangente. Por lo cual, el profesor propone construir una recta tangente a la curva que pase por un punto K tal como se había propuesto en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 86 |  *Imagen. Construcción recta tangente a la parábola* |
| 87 | E1: Por el momento toca solamente en un punto, pero faltaría hacer zoom para ver qué pasa |
| 93 | P: Listo volviendo a las condiciones para encontrar la altura máxima, ¿cuáles cumple? |

| | |
|---|---|
| 94 | E2: Las condiciones de la recta son: Que la recta solamente toque en un punto a la curva y este punto sea el punto medio. Que sea paralela al eje $x$ y perpendicular al eje $y$ |
| 95 | P: Ok, de esas 3 condiciones, ¿en este momento cuales tenemos? |
| 99 | P: ¿Podemos verificar qué efectivamente es paralelo?<br>(Los estudiantes recuerdan la macro de paralelismo y la utilizan para verificar si la recta efectivamente es paralela al eje $x$, luego invalidan esta idea al darse cuenta de que no son paralelas)<br> <br>*Imagen. Uso del test de paralelismo* |
| 100 | E1: No son paralelas |
| 101 | P: ¿Y si no se cumple el de paralelo se cumple la condición de perpendicular (Se hace referencia a que la recta que pasa por el punto K es perpendicular al eje $y$)? |
| 102 | E2: Perpendicular yo diría que sí |
| 103 | P: ¿Qué características tiene una recta para que sea perpendicular a otra? |
| 104 | E1: Debe chocar entre dos líneas y que formen un ángulo de 90 grados |

<table>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes crean dos rectas, una horizontal a la curva y otra tangente a la curva. Con el fin de mirar qué condiciones se cumple en cada una y luego comparar.</td></tr>
<tr><td>124</td><td>P: Hagamos una cosa, pongámosle un color a la recta horizontal [color azul] y la recta tangente [Color rojo] ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta azul y la roja?</td></tr>
<tr><td>125</td><td>E1: La azul es cero y la roja 0,56.<br><br><br>Imagen. Rectas tangentes y sus respectivas pendientes</td></tr>
<tr><td>126</td><td>P: ¿Cuál es el ángulo que forma la recta azul con el eje y?</td></tr>
<tr><td>127</td><td>E1: 90 grados (Los estudiantes lo verifican utilizando la herramienta en DGPad para medir ángulos)</td></tr>
</table>

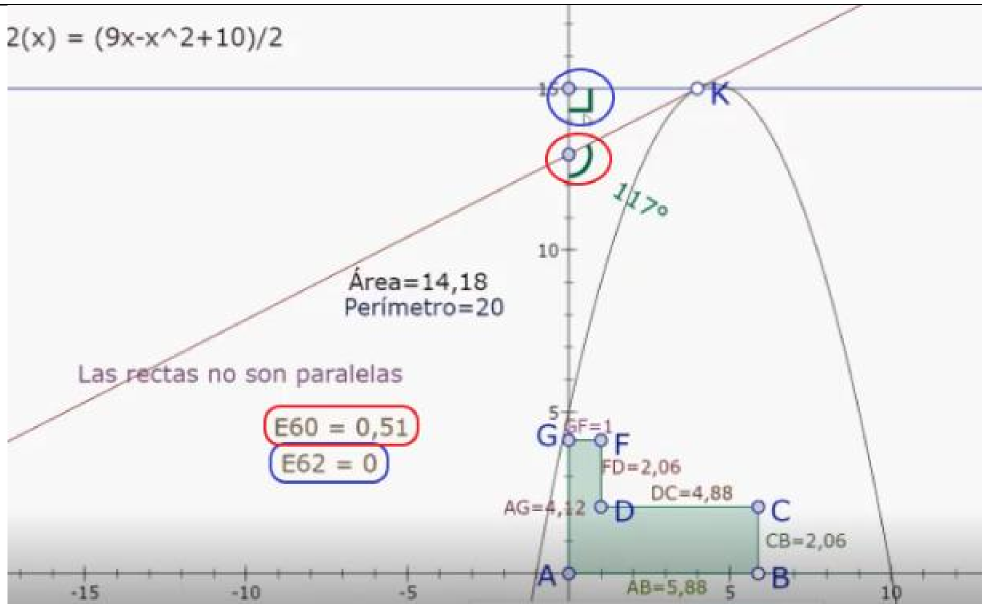
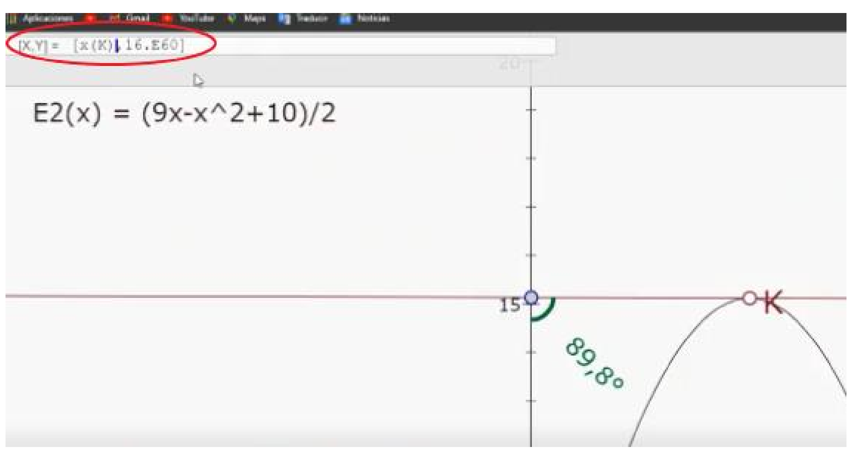


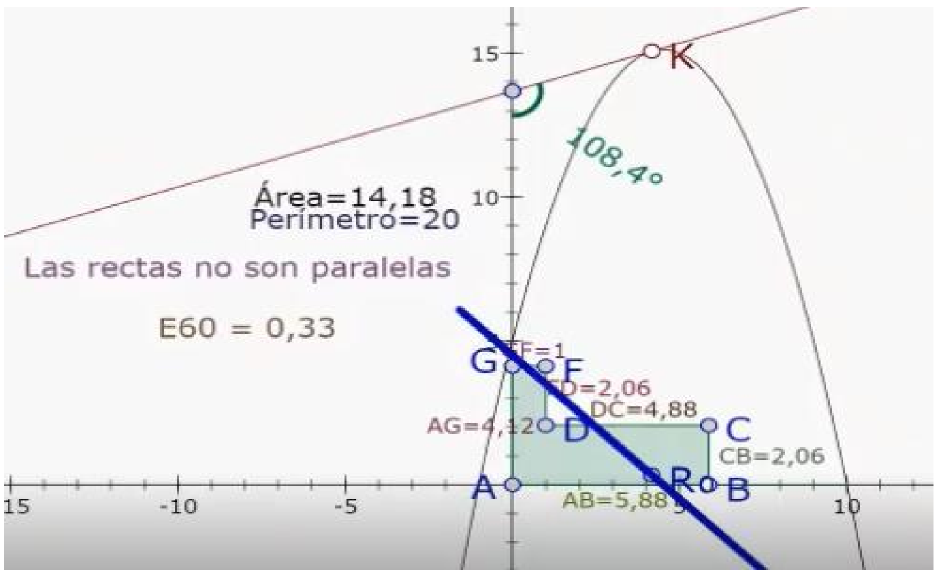

*Imagen. Rectas tangentes y sus respectivas pendientes*

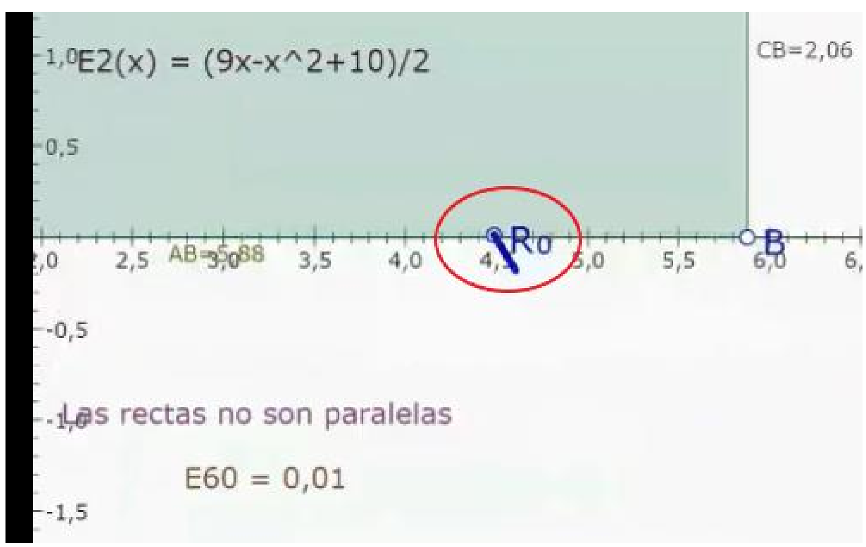
| | |
|---|---|
| 128 | P: ¿En ese orden de ideas la recta qué condiciones debe cumplir para que toque el punto más alto de la curva? |
| 129 | E1 y E2: Perpendicular, paralelo y un solo punto. De tener la recta una pendiente de cero y un ángulo de 90 grados (Haciendo referencia al corte que se forma con el eje $y$) |
| 130 | P: Ósea que ya debemos tener esas condiciones específicas para construir la recta que queremos.<br>¿Ahora que condición no cumple la recta azul? |
| 131 | E1 y E2: Toca en dos puntos, no cumple la condición de que toque en un solo punto. |
| 132 | P: Listo, no cumple una condición, ¿Ahora la recta roja que condiciones no cumple? |
| 133 | E1 y E2: Solamente cumple la que solo toca un punto. |
| 134 | P: Exacto, si comparan las condiciones que cumple la recta azul y los que cumple la recta roja, ¿En qué se diferencian? |
| 135 | E2: La azul: Tiene 90 grados, es perpendicular y es paralela. |

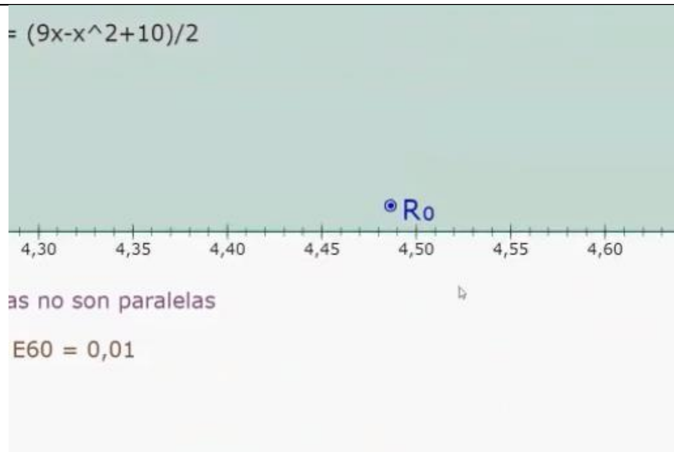
| | |
|---|---|
| | La roja: No tiene 90 grados, no es paralela y tampoco es perpendicular, pero solamente toca un punto. |

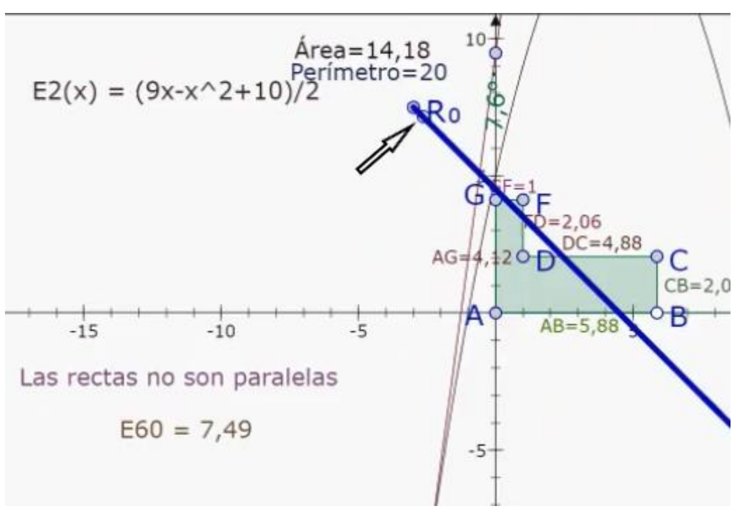
Los estudiantes se dan cuenta que la estrategia que propusieron, el cual no fue prevista en análisis a priori fue invalidado ya que la recta azul como la recta roja no cumplen las condiciones de tocar en un solo punto y ser horizontal. Por lo cual el profesor debe intervenir para la construcción de una estrategia matemática para construir la recta que cumpla esas condiciones.

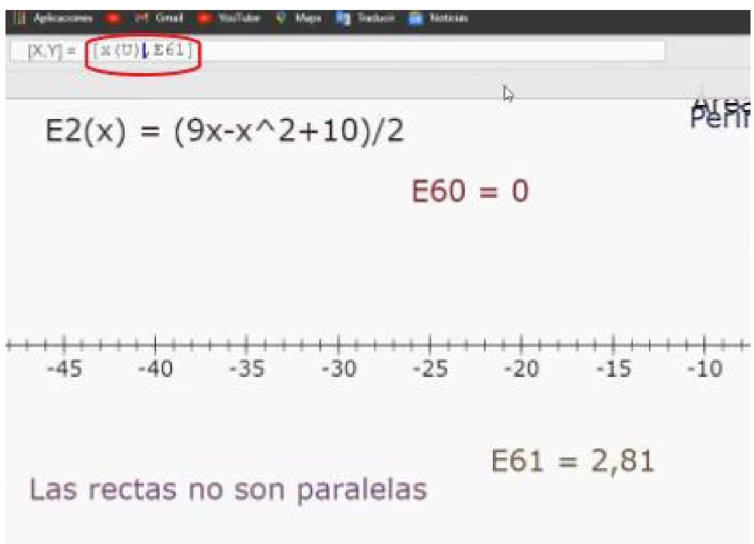
| | |
|---|---|
| 140 | P: Exacto, para esto, construimos un punto cualquiera sobre la pantalla y lo nombramos como R.<br>La idea de este punto es relacionar dos cosas: el movimiento en $x$ del punto K y el valor de la pendiente de la recta.<br>¿Tienen alguna idea de cómo hacer esto? |
| 141 | E1 y E2: Sería como colocar algo así, no sé.<br>(Los estudiantes abren el punto R con la herramienta de calculadora, tiene clara las relaciones que se deben establecer (el movimiento en $x$ del punto K y el valor de la pendiente de la recta) e intentan expresarlas en la calculadora de la siguiente forma)<br><br><br>*Imagen. Relación establecida en la calculadora* |

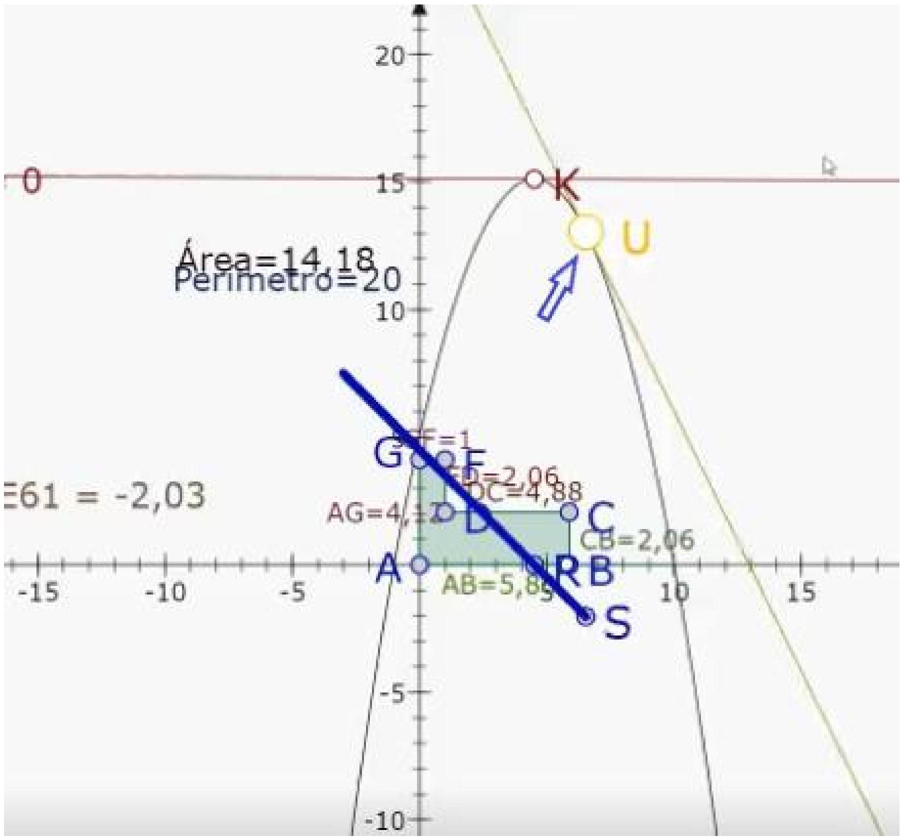
| | |
|---|---|
| 148 | P: Listo entonces cómo se comporta $R_0$, |
| 149 | E2: se mueve en $x$ igual que el punto K |
| 150 | P: ¿Y qué valores toma $R_0$ en $y$? |
| 152 | E2: Toma la pendiente |
| 153 | P: Exacto, entonces el $R_0$ me va relacionar el x del punto K y el valor de la pendiente, esas dos cosas. Entonces si quieren le dan click sobre $R_0$ y activamos la función de activar la traza en propiedades.<br><br><br>*Imagen. Traza de Ro*<br>¿Qué características pueden observar del rastro que está generando $R_0$ y el movimiento de K? |
| 154 | E2: Que es un movimiento vertical<br>Que toca en el eje $x$ |
| 155 | P: ¿Cuándo ustedes ponen el punto K en la parte más alta que pasa? |
| 156 | E1: va estar en el eje $x$ |

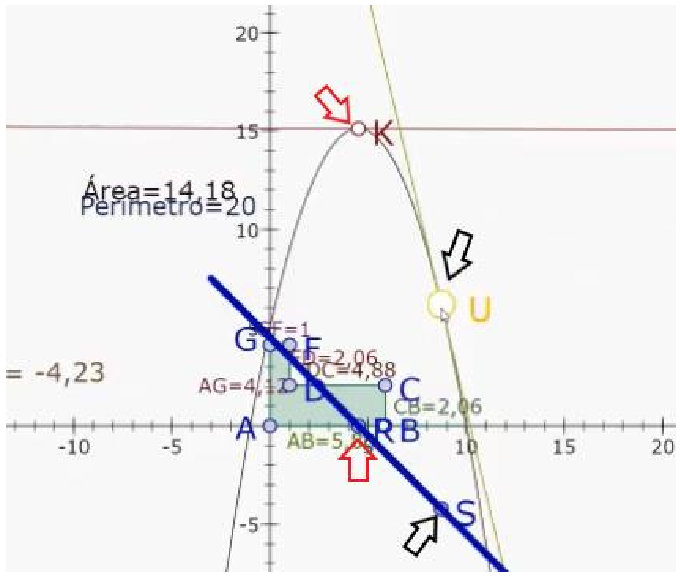
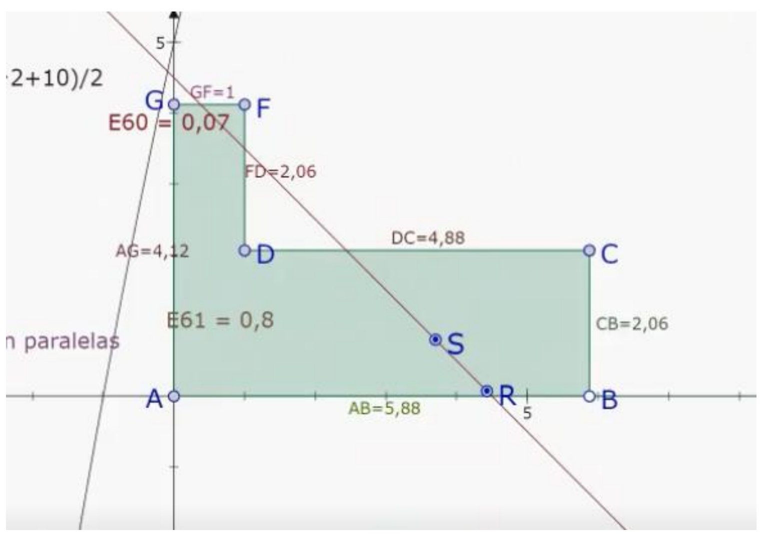
| | |
|---|---|
| 157 | P: ¿En ese orden de ideas que podemos intuir? ¿Si encontramos el punto más alto que pasaría con $R_0$? |
| 158 | E2: va estar en el eje $x$ |
| 159 | P: Exacto, y esto pasa porque $R_0$ está relacionado con todas las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva por eso es que deja la traza. Entonces cuando $R_0$ está ubicado en el eje $x$, ¿qué valor de la pendiente va tomar? |
| 160 | E2: Cero |
| 161 | P: Exacto, y dentro de las condiciones que ustedes escribieron en el cuaderno, la recta que buscamos que valor de pendiente debe tener. |
| 162 | E1: Cero |
| 163 | P: Listo entonces ya sabemos que $R_0$ debe estar sobre el eje $x$, exactamente. ¿Pero en este momento ustedes pueden decir que está bien ubicado sobre el eje $x$? |
| 164 | E2: A simple vista se ve que está en el eje $x$ |
| 165 | P: ¿Y si le hacemos zoom o verificamos?   *Imagen. Corte de la traza con el eje x* |

| | |
|---|---|
| 166 |  |
| 167 | (Los estudiantes hacen zoom para verificar si $R_0$ esta exactamente ubicado sobre el eje $x$, pero se dan cuenta que no es así) |
| Los estudiantes concluyen que cuando la traza corta el eje x se va a encontrar el punto más alto de la curva, al relacionar que el punto $R_0$ representa todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola, indicando que el punto $R_0$ al estar sobre el eje x la pendiente de la recta será cero como se propuso en el análisis a priori. | |
| 168 | P: ¿Qué necesitaríamos hacer para encontrar ese punto exacto? |
| 169 | E2: Necesitaríamos que el punto se quede fijo |
| 170 | P: Listo, ¿cómo podríamos construir ese punto fijo? |
| 171 | E1: ¿Hay alguna opción en el programa?<br>(Los estudiantes intentan generar una estrategia, pero no saben cómo) |
| 172 | P: Listo, en este caso la solución a esta pregunta está relacionada con la traza que deja el punto $R_0$, ¿Qué forma tiene esta marca? |
| 173 | E2: Es una recta |
| 174 | P: ¿Y si encontramos esa recta ya podríamos encontrar el punto exacto sobre el eje $x$? |
| 175 | E1: Sí señor, porque nos mostraría en qué punto corta al eje $x$. |

| | |
|---|---|
| 176 | P: ¿En ese orden de ideas como construiríamos esa recta? |
| 177 | (Los estudiantes para construir la recta, lo que hacen es mover el punto K y ver como el punto $R_0$. forma la recta a partir de la traza. Pero se dan cuenta que cuando hacen zoom tienen que volver hacer el mismo procedimiento porque la traza se borra) |
| 178 | P: ¿Qué pasa cuando se hace zoom? |
| 179 | E1: La traza se borra: ¿Necesitaríamos formar un segmento? |
| 180 | P: Si, para ser más precisos una recta. ¿Qué elementos necesito para poder construir una recta? |
| 181 | E2: Tener dos puntos |
| 182 | P: ¿y cuántos puntos tenemos en estos momentos? |
| 183 | E1 y E2: 1 |
| 184 | P: Entonces nos faltaría construir otro punto que tenga las mismas características del punto $R_0$. ¿Qué podríamos hacer para construir ese punto que cumpla con el mismo movimiento del punto $R_0$.? |
| 185 | E1: Tendríamos que colocar el otro punto en el eje $y$   |

<table>
<tr><td></td><td>Imagen. Comportamiento de la traza<br><br>¿Sería como colocar un punto en $y$ y ese punto relacionarlo con el punto K?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes proponen una estrategia prevista en el análisis a priori que consiste en: Primero generar la traza para saber cuál será el segmento, luego colocar un punto cualquiera sobre la traza y crear el segmento que tiene como extremos al punto cualquiera con el punto R. Pero luego abandonan la estrategia porque observan que necesitan algo más exacto, ya que el punto que crearon al moverlo se sale de la traza.</td></tr>
<tr><td>195</td><td>E1: Tendríamos que crear otra recta</td></tr>
<tr><td>196</td><td>P: Exacto, y se acuerdan como crear, ¿sí?</td></tr>
<tr><td>219</td><td>(Los estudiantes crean el punto S teniendo en cuenta las relaciones que utilizaron para crear el punto $R_0$, pero en este caso utilizando la nueva recta que pasa por el punto U y su correspondiente pendiente)<br><br>
<br><br>Imagen. Relación establecida en la calculadora</td></tr>
<tr><td>220</td><td>P: Listo, ya tienen el punto S, ¿Con eso ya podemos construir la recta?</td></tr>
</table>

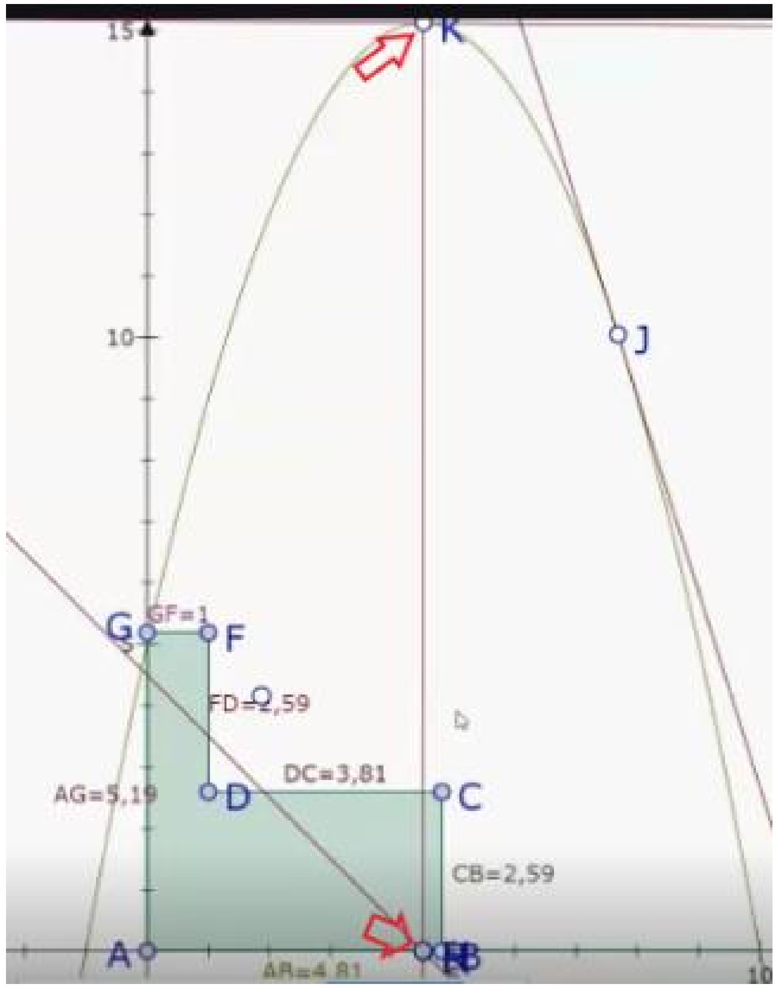
| | |
|---|---|
| 221 | Los estudiantes activan la traza al punto S para ver si corresponde con la misma traza del punto R y como conclusión mencionan que los puntos se mueven la misma dirección, por lo tanto, la traza del punto R y el punto S tienen el mismo punto de corte con el eje x.<br><br><br>*Imagen. Correspondencia entre la traza del punto R y el punto S* |
| 22 | P: Listo, ¿ósea que ya podemos construir la recta que marca la traza? |
| 223 | E1: sí<br>(En este momento fue necesario recordarles que la traza ellos la describieron que tenía una forma de línea recta, y que también mencionaron que una línea recta se construye a partir de 2 puntos) |
| 225 | E1: Para poder colocar un punto en $y$ |

| | |
|---|---|
| | (Los estudiantes piensan que para formar la recta que dibuja la traza tiene que encontrar los puntos de corte con el eje $x$ e y, pero se les recuerda que el punto R y S también son puntos que hacen parte de la recta, es decir, que con esos 2 puntos ya se puede construir la recta RS).     *Imagen. Construcción de la recta SR* |
| 226 | P: Listo, ¿ya tienen la recta SR, que punto específico necesitamos encontrar de esa recta? |

| | |
|---|---|
| 227 | E1: El punto que este con el eje $x$ (punto de corte)<br><br>(En este momento, se les explica que existe una herramienta que marca el punto de corte entre dos rectas. Ese punto de corte lo nombran como H) |
| 228 | P: ¿Para que queríamos encontrar el punto H? |
| 229 | E1: Para encontrar el punto que corta con el eje $x$ y así encontrar la pendiente. |
| 230 | P: Qué valor tiene la pendiente en el punto H<br><br>Se acuerdan que el punto R relacionaba el $x$ del punto K con las pendientes de la recta tangente. Entonces en H que valor de la pendiente es |
| 233 | E1: ah, cero |
| 234 | P: Listo ¿La recta que queremos encontrar que valor de pendiente debe tener? |
| 235 | E2: cero |
| 236 | P: Exacto, ¿entonces con ese punto H ya podemos solucionar el problema?<br><br>Recuerden que parte del problema es encontrar el punto máximo de la curva |

Los estudiantes empiezan a proponer estrategias sobre como el punto H ya les ayuda a resolver el problema, Dentro de las ideas toman como referencia la idea que el punto H es el punto céntrico de la parábola, es decir que si trazaran una recta perpendicular al eje x que pase por H encontrarían el punto más alto, siendo una estrategia no prevista en el análisis a priori.

| | |
|---|---|
| 238 | E1 y E2: No estamos muy seguro, pero ya que la pendiente tiene que valer cero y la recta tangente que pasa por K si la ubicamos en la parte más alta vale cero. Entonces una solución de pronto seria trazar el segmento HK. |

<table>
<tr>
<td>239</td>
<td>P: digamos que el punto H ya sabemos que va representar la pendiente de la recta tangente cuando vale cero, entonces si quieren pueden aplicar la estrategia que ustedes proponen y ya miramos<br>

<br>
Imagen. Punto H</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Cuando los estudiantes trazan la recta HK, se les pide que muevan el punto K, en ese momento la construcción se mueve y ellos mismos invalidan la estrategia, porque, aunque visualmente la recta parece perpendicular al eje x, cuando se arrastra un punto notan que la recta no es estática invalidando la estrategia que no estaba prevista en el análisis a priori.</td>
</tr>
</table>

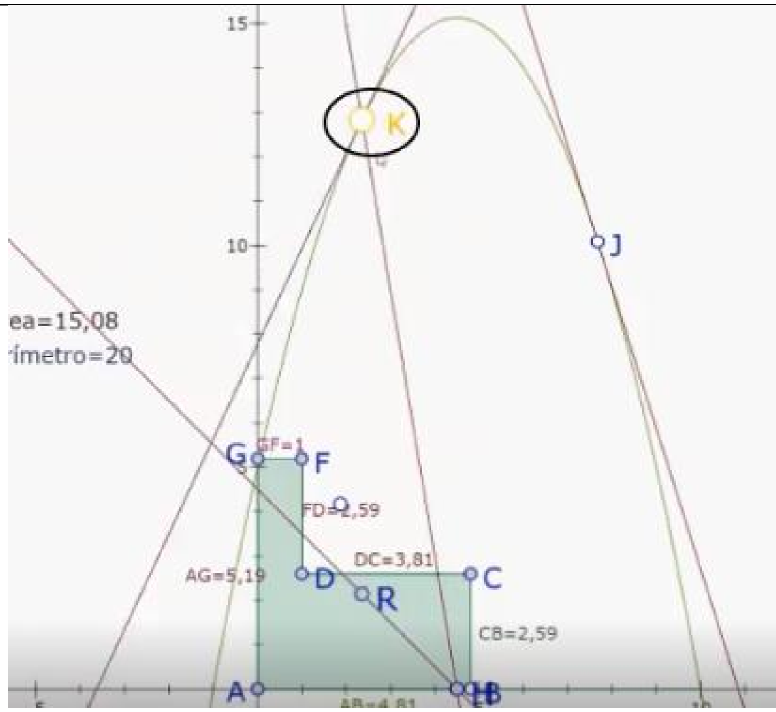
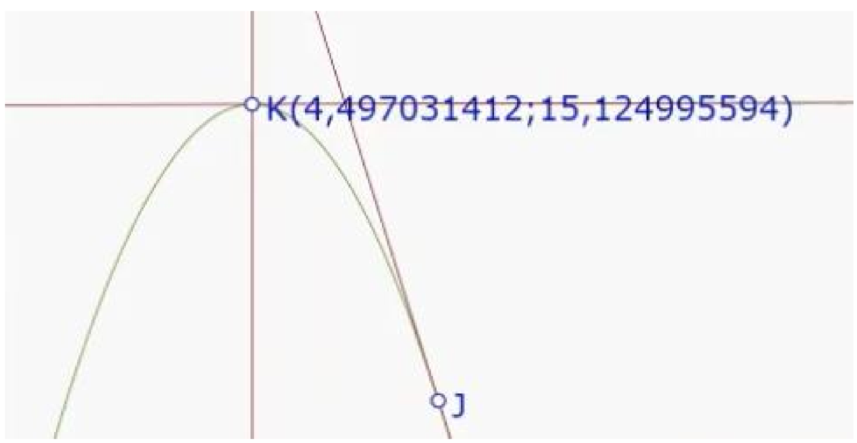
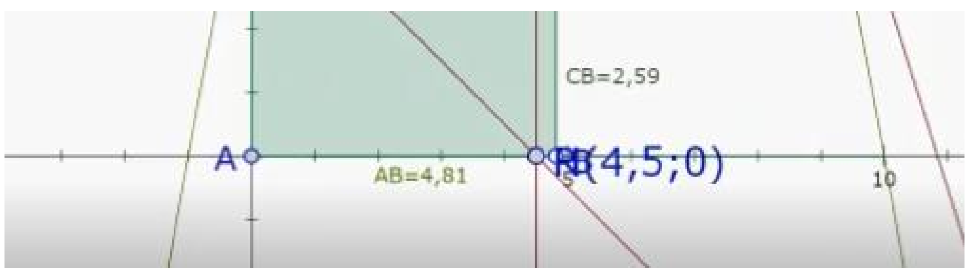
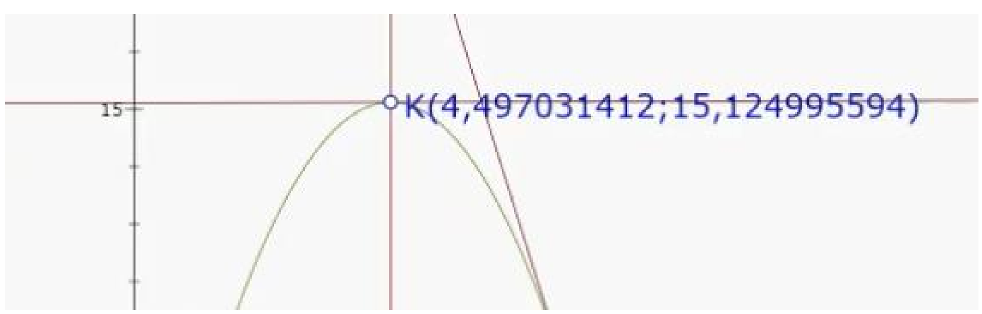
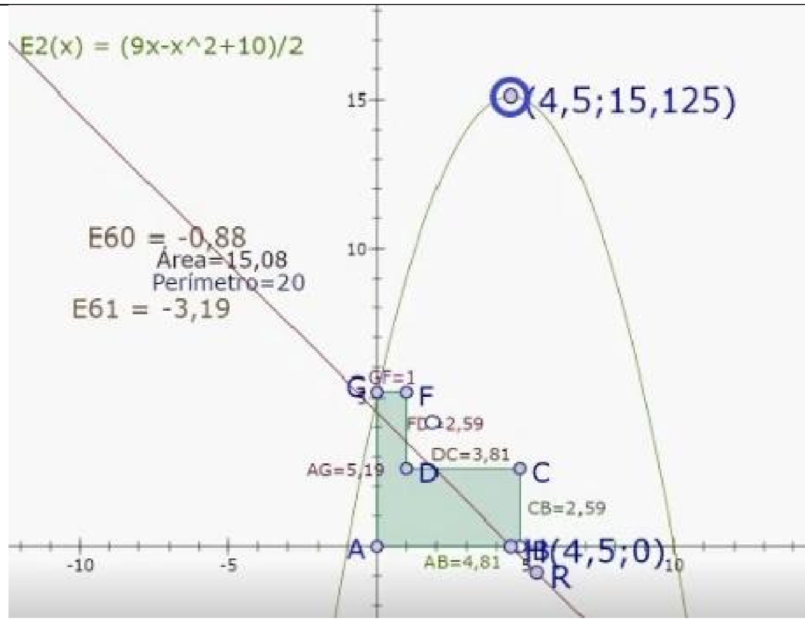



*Imagen. Invalidación de la estrategia*

| | |
|---|---|
| 241 | P: Por ese lado va la idea, ¿si fuera K cual sería el x(K)? |
| 242 | E1: sería como colocarle las medidas del punto K.<br><br>(los estudiantes colocan las medidas para poder responder la pregunta)<br><br><br><br><br>*Imagen. Medida del punto K* |
| 243 | P: ¿Que coordenada tiene K entonces en $y$? |

| | |
|---|---|
| 244 | E1: 4,5 |
| 245 | P: ¿En ese orden de ideas quien más podría tener esa misma coordenada en $x$? |
| 246 | E1: El punto H |
| 247 | P: Ah listo, entonces si se supone que vamos a encontrar el punto más alto, ¿ese punto que coordenada tendrá en $x$? |
| 248 | E1: 4,5 |
| 249 | P: Démosle un nombre en específico, no un valor numérico. ¿De quién va tener la misma coordenada? |
| 250 | E2: De H |
| 251 | P: Exacto, sería la coordenada que tiene $x$ (H), bien ya tenemos una coordenada. Pero antes de seguir pongamos la coordenada de H para ver si es la misma de K |
| 252 | (Ponen la coordenada de H, pero cuando aumentan los decimales se dan cuenta que el $x$ (H) y $x$ (K) son diferentes)     *Imagen. Medida del punto H y el punto K* |

| | |
|---|---|
| | Listo, entonces vemos que K no es el punto más alto, ¿que podríamos hacer?<br>Si ya sabemos que el punto más alto tendrá como coordenada en $x$ =4,5. |
| 253 | E1: Tendría que ubicar el punto K para que tuviera la misma coordenada |
| Los estudiantes concluyen que el punto H es el punto de intersección que estaban buscando entre el eje $x$ y la recta RS. Además, que $x$ (H) es la misma abscisa del punto más alto, como se fue previsto en el análisis a priori. | |
| 261 | P: Exacto, entonces se supone que el área máxima va estar ubicada en la parte más alta de la parábola. Por lo cual, ese punto tiene un $(x, y)$, entonces ya tenemos el punto en H (4.5,0) y ya sabemos que el punto más alto debe tener la misma coordenada que $x$ (H), por lo cual si ya conozco el $x$ (H), ahora necesito él $y$.<br>¿La fórmula nos ayudaría a encontrar esto? |
| 262 | E1: Sí, pero no sé cómo se puede resolver |
| 263 | E2: Ah ya, seria intercambiar los valores, entonces $x$ =4,5.<br>(Los estudiantes evalúan la función en $x$ =4,5) |
| 264 | E1: Daría 15,125<br>(los estudiantes hacen la operación en el cuaderno) |
| 265 | P: Listo, reemplazar $x$ =4,5 también se puede hacer en el software y con eso les daría el valor exacto. Entonces abren la calculadora<br>(Los estudiantes crean el siguiente punto, en donde relacionan el $x$ (H) y la parábola evaluada en $x$ =4,5). |

| | |
|---|---|
| | <br>*Imagen. Punto generado (solución)* |
| 266 | P: Ocultemos los otros objetos y solo dejamos el punto más alto y la parábola. |
| 267 | P: Entonces esa es parte de la respuesta al problema inicial. ¿Cómo hacemos para verificar que efectivamente ese punto es el punto más alto en la parábola? |
| 268 | E1: Sería como trazar una línea por ese punto y mirar que solo toque en el punto. También mirar si es paralelo al eje $x$.<br>* Los estudiantes con ayuda de las macros primero trazan la recta tangente a la parábola que pasa por el punto más alto.<br>* Luego calculan la pendiente de la recta tangente con ayuda de la macro, lo cual les da E62=0<br>* Finalmente para verificar si la recta que generaron es paralela con el eje $x$ utilizan la macro de paralelismo y obtiene que las rectas son paralelas. |
| 269 | P: Listo, al parecer ya solucionamos el problema. Pueden volver a leer el enunciado inicial para ver que nos pide encontrar. |

| | |
|---|---|
| | (Los estudiantes vuelven a leer el enunciado y se dan cuenta que se preguntan por la medida de los lados para que el área sea la mayor posible. Para dar solución a esta pregunta ellos arrastran el punto B hacía en punto H y verifican que hay un lado que tiene como longitud un metro y hay dos lados adyacentes donde uno es el doble del otro. Al final, los estudiantes deducen que el segmento debe medir 4,5). |

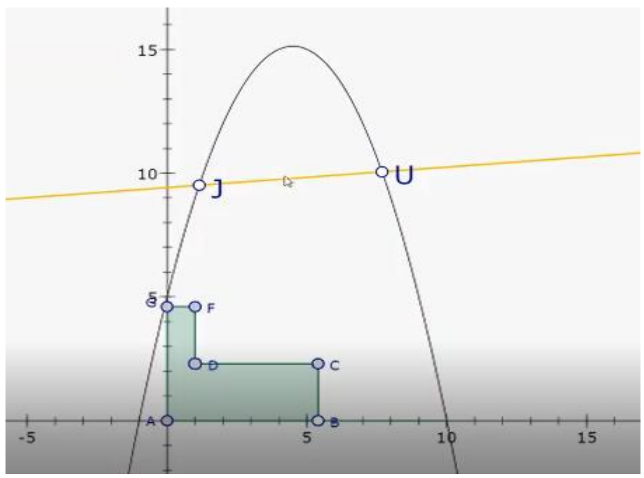
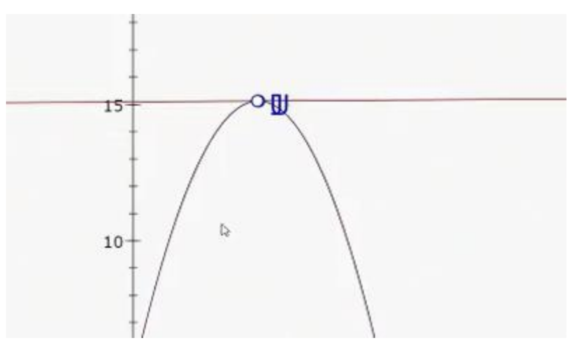
Los estudiantes inicialmente solucionan la situación en el cuaderno evaluando $x$ =4,5 en la función del área, obteniendo el área mayor. Luego crean en el software un punto con esas coordenadas, validando el resultado utilizando el test de paralelismo, calculando la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto creado, aumentando los decimales y haciendo zoom a la construcción, de esta manera concluyen que el problema queda solucionado como fue previsto en el análisis a priori.

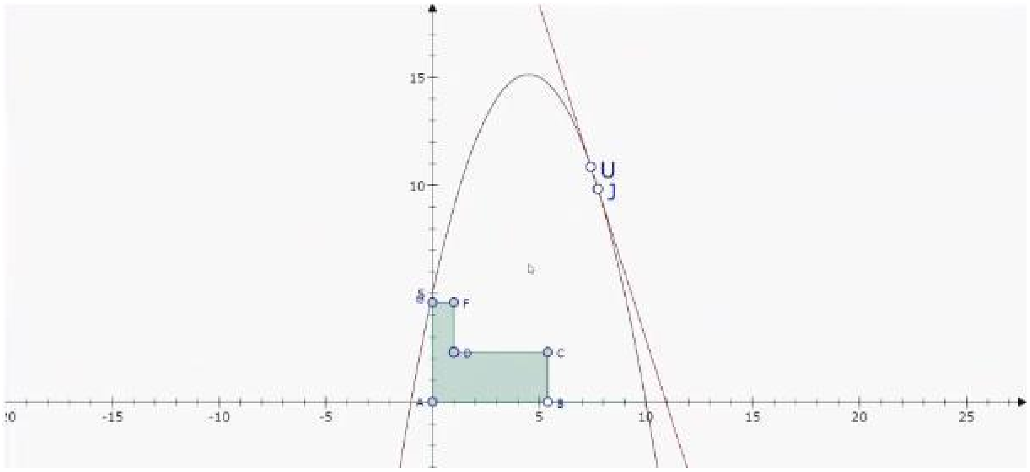
Los estudiantes transfirieron la estrategia de medición de la altura de un objeto a la medición de la altura de la gráfica de la función para determinar el punto máximo. Por lo cual, resaltaban la importancia de la horizontalidad y perpendicularidad al momento de encontrar el punto máximo.

A pesar de que los estudiantes nunca habían trabajado sobre problemas de optimización, ni habían visto las nociones de derivada, resolvieron el problema teniendo en cuenta las condiciones del problema, como se esperaba en el análisis a priori. Lo anterior les puede permitir más adelante darle sentido geométrico al proceso de encontrar la derivada de una función e igualarla a cero. De igual manera, el uso de la calculadora fue importante y de esa forma ellos encontraron el punto más alto en la parábola.

**Actividad 4**

A continuación, se muestra una estrategia matemática para construir una recta tangente a una curva en un punto. En esta actividad se aborda la noción de límite, mostrando la imposibilidad de calcular directamente la pendiente de la recta tangente y se introduce la estrategia matemática de cálculo del límite por medio de un lugar geométrico.

| | |
|---|---|
| 3 | P: Listo es una recta secante. ¿Esa recta se podría volver tangente? |
| 4 | E1: No<br><br><br>*Imagen. Recta secante* |
| 15 | P: ¿En ese caso ustedes pueden hacer que sea tangente?<br>(El estudiante ubica los puntos J y U en la parte superior de la curva de manera que queda una línea paralela al eje x)<br><br> |

| | |
|---|---|
| | *Imagen. Punto J sobre el punto U* |
| 27 | E2: Pues no sé, sería alinearlos, pero al alinearlos se quita la recta, pero la otra sería que solamente cruzara así, como se muestra en la siguiente imagen:   *Imagen. Recta secante JU* |
| 28 | P: ¿Listo, para ustedes eso sería una recta tangente? |
| 29 | E2: Ese que tenemos acá o la que plantee |
| 30 | P La que tienen ahí |
| 31 | E2: No porque está tocando en dos puntos |
| 32 | P: Listo efectivamente está tocando dos puntos, entonces por consiguiente ¿Qué recta es? |
| 33 | E1: Secante |
| 34 | P: Listo y con la otra estrategia que utilizaron de poner un punto encima de otro ¿Qué pasa? |
| 35 | E1: Desaparece la recta |

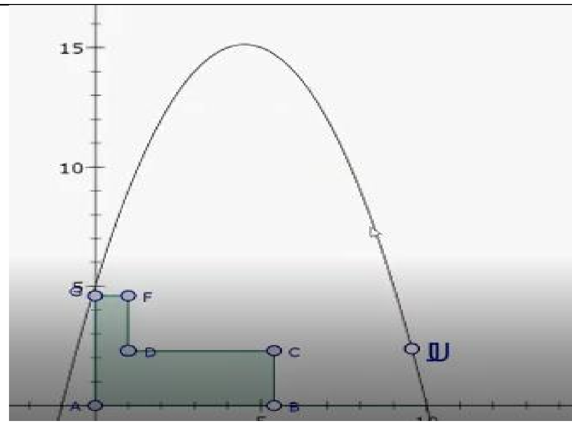
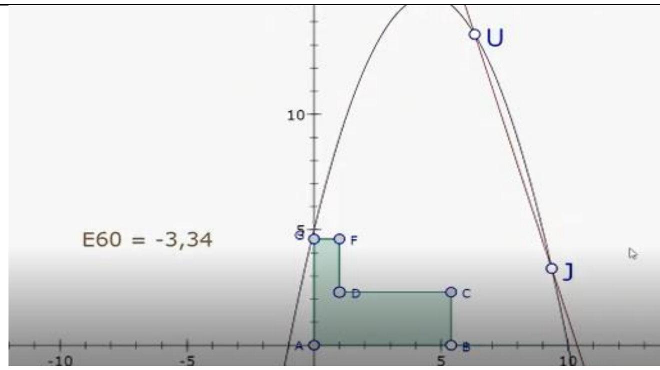
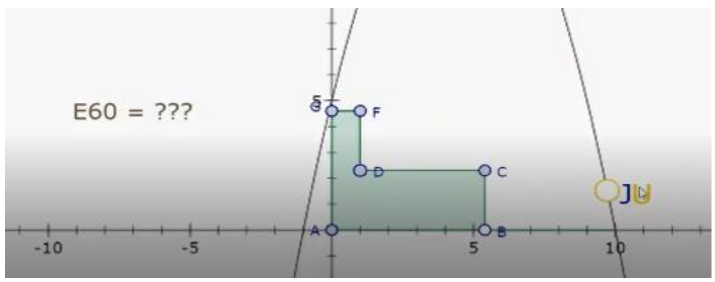
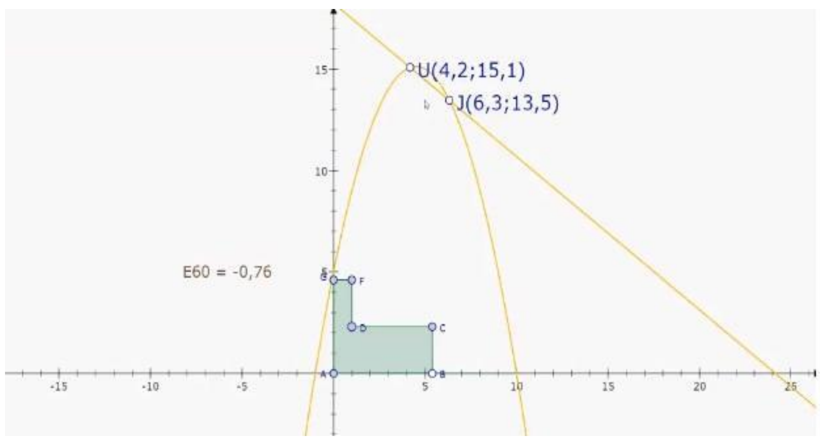
<table>
<tr><td></td><td>

Imagen. Desaparición de la recta JU</td></tr>
<tr><td>36</td><td>P: Si desaparece la recta ¿Se puede sacar la recta tangente?</td></tr>
<tr><td>37</td><td>E1: No señor</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes invalidan la estrategia de generar la recta tangente a partir de superponer el punto J sobre U, debido a las retroacciones del software, ya que la recta desaparece como se prevé en el análisis a priori.</td></tr>
<tr><td>38</td><td>P: Listo entonces en ese orden de ideas ¿Podemos calcular la pendiente de esa recta?</td></tr>
<tr><td>39</td><td>E1: ¿Pero se estarían utilizando las macros no?</td></tr>
<tr><td>40</td><td>P: Sí, aquí sí pueden usar la macro-pendiente</td></tr>
<tr><td>41</td><td>E1: Tiene que valer 0, pero para ser 0 imagino que debe estar acá arriba</td></tr>
<tr><td>42</td><td>P: ¿Qué valor toma la pendiente cuando ustedes quieren volver esa recta tangente, es decir que solo toque un punto?</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | <br>*Imagen. Valor de la recta JU* |
| 45 | E2: Cuando se alinean los dos, que se supone deben estar alineados para hacer la tangente, esta toma un valor de incógnita<br><br>*Imagen. Pendiente de la recta JU, cuando están superpuestos* |
| 46 | P: Exacto, esto que nos quiere decir, que podemos determinar qué ¿En el momento en que ambos puntos están superpuestos podemos determinar la pendiente? |
| 47 | E1: No señor |
| 48 | P: Listo, en este caso como notamos que al superponer un punto encima del otro la pendiente aparece con un incógnito ¿cierto? ¿Alguna idea de por qué pasa esto? |
| 49 | E1: Porque se borra la recta |

Los estudiantes proponen usar la macro de pendiente, para saber el valor que tendrá la pendiente de la recta cuando el punto J esta sobre el punto U. Sin embargo, invalidan esta estrategia porque no aparece ningún valor en E60 tal como fue previsto en el análisis a priori.

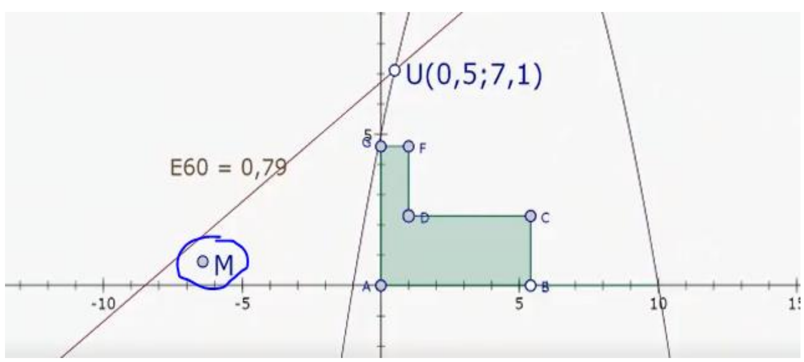
Por lo cual el profesor propone la estrategia de calcular la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por J y U.

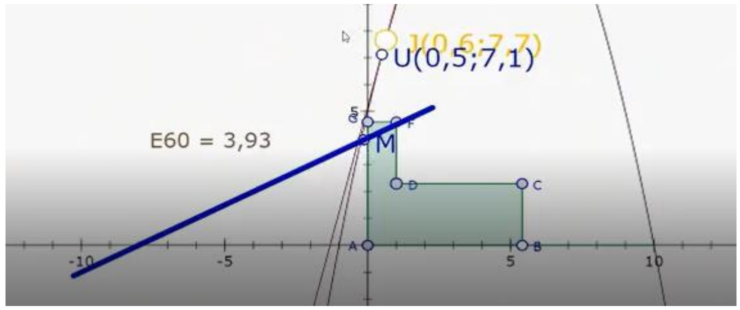
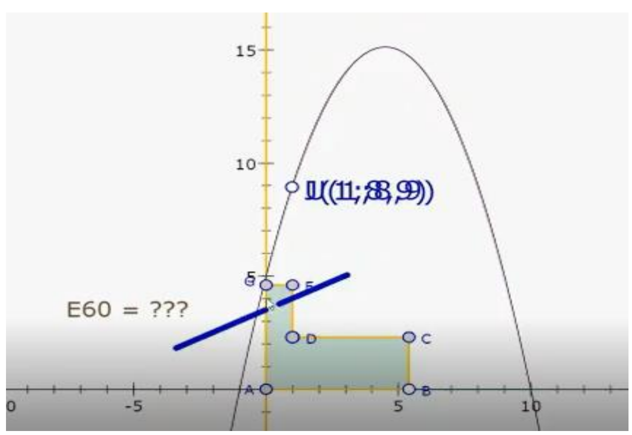
| | |
|---|---|
| 50 | P: Exacto, entonces vamos a hacer una cosa. Van a calcular la pendiente de la recta JU cuando J es igual a U, cuando un punto esté encima del otro. Entonces para esto, van a usar la fórmula aritmética para calcular la pendiente de una recta ¿Si se acuerdan cómo es esa fórmula para calcular la pendiente de una recta que pasa por dos puntos? |
| 51 | E1: ¿$\frac{y1-y2}{x1-x2}$? |
| 59 | (El estudiante usa la barra de herramientas para sacar las coordenadas de los puntos J y U. Una vez tiene las coordenadas comienza a usar la fórmula para sacar la pendiente)   *Imagen. Medida del punto J y el punto U* (El estudiante asigna los datos de la siguiente manera $\frac{y1-y2}{x1-x2}=\frac{3,5-15,1}{6,3-4,2}$ |
| 66 | P: Listo, en este caso está bien calculada, ese es el procedimiento, pero recuerden que lo que queremos hacer es calcular la pendiente de la recta ante un punto encima del otro. Cuando el punto J está encima del punto U. ¿Si se entiende la indicación? |
| 67 | E1: Sí señor |

| | |
|---|---|
| | (Los estudiantes analizan los datos de las coordenadas y realizan nuevamente la fórmula, la cual les arroja como resultado error y ellos dicen que ellos creen que daría 0) |
| 68 | P: Listo en este caso ¿Qué fue lo que hicieron para calcular? |
| 69 | E1: Se supone que cada punto sobre sí mismo tendría las mismas coordenadas, solo sería colocar ese mismo 8,9 y 5,7 en la fórmula. Entonces quedaría $\frac{8{,}9-8{,}9}{5{,}7-5{,}7}$ |
| 70 | P: Exacto, ¿Y eso cuánto da? |
| 71 | E2: Para mi daría 0 y en la calculadora sale error |
| 72 | P: De acuerdo, que queda arriba en el numerador ¿0 cierto? y en el denominador que queda? |
| 73 | E2: 0 |
| 74 | P: o sea sería 0 entre 0, ¿Cierto? |
| 75 | E2: Sí señor |
| 76 | P: Listo, entonces en este caso la respuesta no es 0 sino "indeterminado". No sé si ustedes recuerden que cuando se expresa una fracción en el denominador nunca puede ir 0, porque la fracción sería indeterminada. Por eso es que en la calculadora sale que es un error; por ende, en la figura cuando se pone un punto sobre otro punto no calcula la pendiente y desaparece la pendiente |
| 79 | P: En ese orden de ideas ¿podrán calcular la pendiente de la recta tangente? |
| 80 | E1: No señor |
| Los estudiantes intentan calcular de forma aritmética la pendiente, pero el resultado les da error. Concluyendo que no es posible conocer la pendiente de la recta cuando J esta sobre U tal como se | |

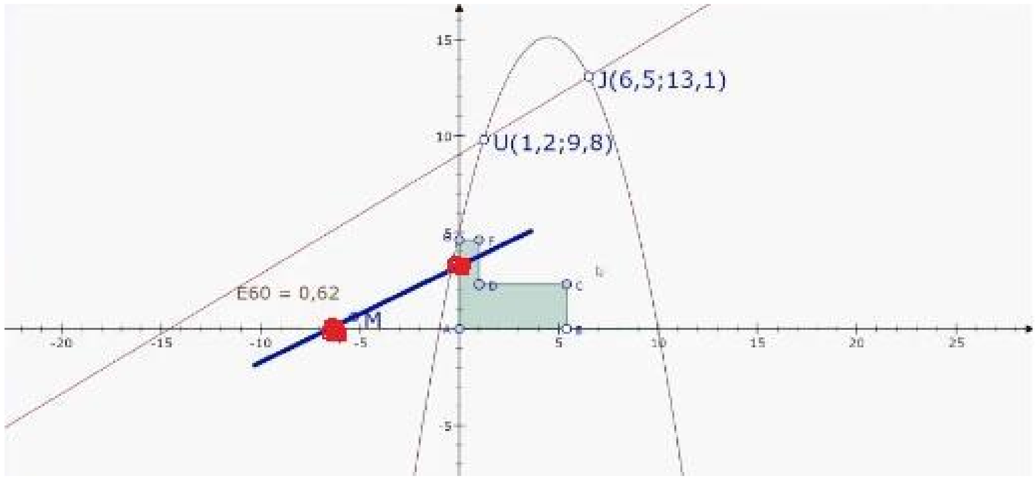
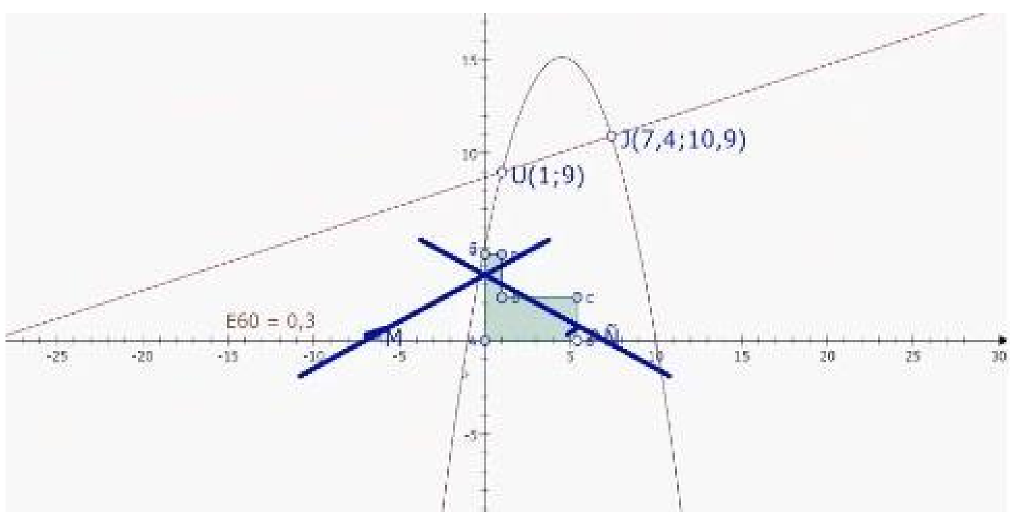
| | |
|---|---|
| previó en el análisis a priori. Por lo cual el profesor propone calcular la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por el punto U. | |
| 88 | P: ¿Ustedes se acuerdan como se hizo para sacar la pendiente de todas las rectas tangentes en la actividad anterior? ¿Se acuerdan que había un punto que me relacionaba con la pendiente de la recta tangente que se llamaba "R? |
| 89 | E1: Sí señor. Entonces ¿Sería crear un nuevo punto? (El estudiante crea un nuevo punto dentro de la construcción) |

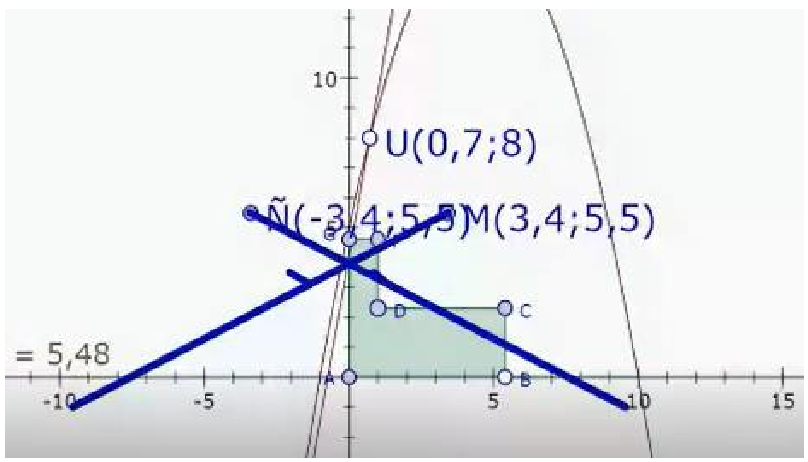
Se observa que los estudiantes le dieron sentido a la estrategia de calcular el lugar geométrico de la pendiente de todas las rectas tangentes a la curva. Adaptando esa estrategia para esta actividad.

| | |
|---|---|
| 91 | P: "$x$ paréntesis U menos $x$ paréntesis J" $(x(U) - x(J))$<br>(El estudiante escribe la fórmula dada por el profesor en la construcción y busca el punto M)<br><br><br><br><br>*Imagen. Punto M* |
| 92 | P: Recuerden que el punto U va a quedar quieto. |
| 93 | E2: Listo |

| | |
|---|---|
| 94 | P: Bueno como el punto U va a quedar quieto, cuando mueven J ¿Cómo se comporta el punto M? |
| 97 | (El estudiante hace uso de la herramienta, la cual traza una línea que indica el movimiento del punto M)<br><br><br>*Imagen. Traza del punto M* |
| 98 | P: ¿Qué pueden observar frente al movimiento de M? |
| 99 | E1: Toca el eje $x$ y el eje $y$ |
| 120 | P: Pueden hacer ese movimiento más despacio para ver en qué punto desaparece el punto. Recuerden que el punto U se deja quieto y el que se mueve es el punto J<br>(Los estudiantes mueven el punto J para analizar su respuesta)<br><br><br>*Imagen. Comportamiento de la traza* |
| 121 | P: Listo, ¿En qué punto ustedes creen que está desapareciendo el punto? |

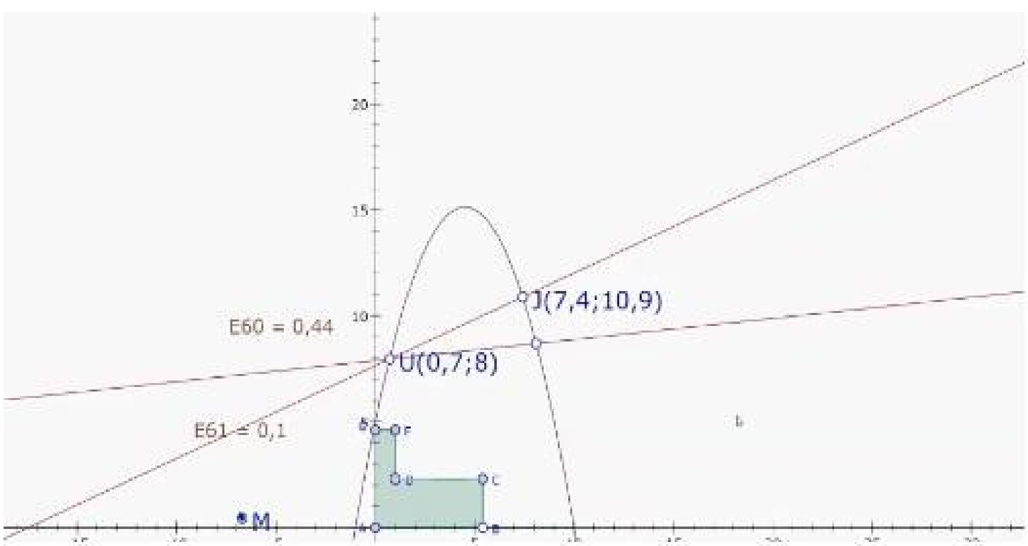
| | |
|---|---|
| 122 | E1: En $y$ |
| 123 | P: ¿O sea cuando la traza corta con el eje $y$? |
| 124 | E1: Sí señor |
| 125 | P: Listo, en ese orden de ideas en esa posición que desaparece el punto M ¿Qué coordenada en $x$ tendría ese punto? |
| 128 | E1: En $y$ tal vez tendría 4,3 |
| 129 | P: Listo, y hablando en forma general ese valor ¿A qué haría referencia? |
| 130 | E1: ¿A " $y$”? Porque también podría ser la pendiente |
| 131 | P: ¡Ah!  listo. Exacto ¿Qué sería entonces? |
| 132 | E2: La pendiente |
| 133 | P: La pendiente que queríamos calcular. Listo en este sentido hemos concluido una cosa. Que cuando el punto M toca el eje $y$ ese valor en que corta me va a representar la pendiente de la recta tangente que queremos encontrar. ¿Si se entiende esa idea? |
| 134 | E1: Sí señor, sí se entendió |
| Como se previó en el análisis a priori, los estudiantes concluyen que la ordena del punto Q es la pendiente de la recta tangente a la curva. | |
| 143 | P: Listo y si se acuerdan cuando en la actividad anterior cuando teníamos ese rastro ¿Que necesitábamos hacer? |
| 144 | E2: Era colocar los dos puntos en donde tocaba en $x$ y en $y$ y hacer una recta |
| 145 | P: Listo, entonces en ese orden de ideas ¿La podríamos hacer? |
| 146 | E1: Sería como colocar un punto acá (señalan sobre la recta con el cursor), que acá es donde toca en $y$ (Como se muestra en la imagen en los puntos rojos) |

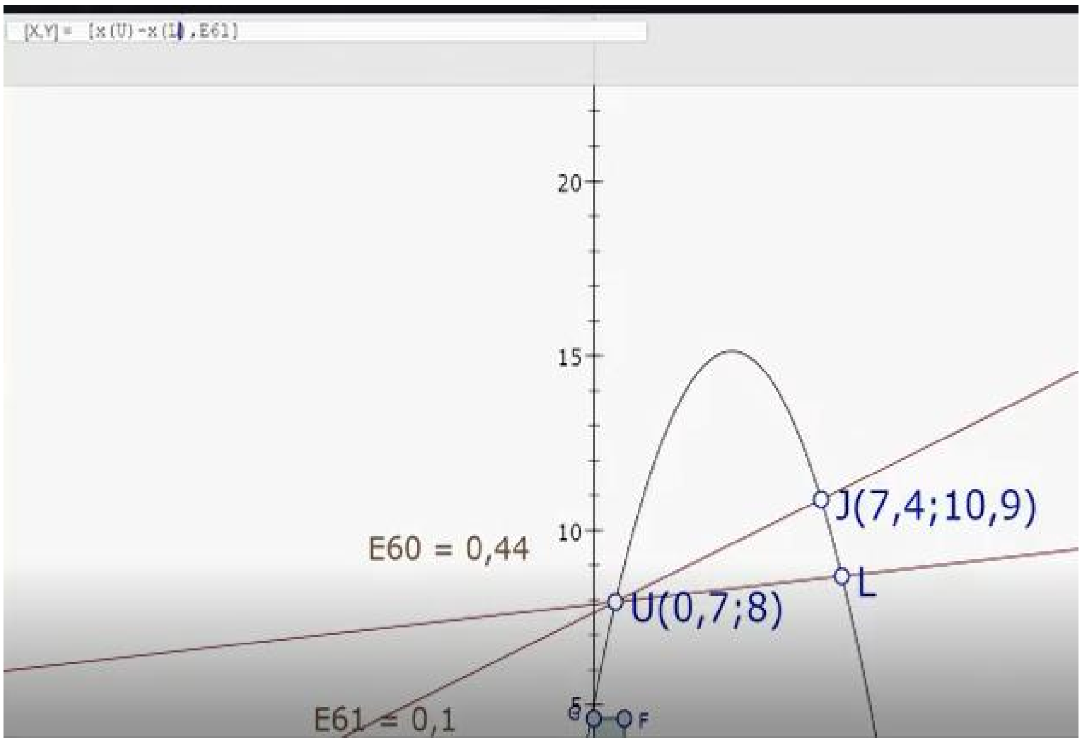
| | |
|---|---|
| | (El estudiante señala con el cursor los puntos que muestra la imagen)<br><br>*Imagen. Puntos de intersección de la recta que pasa por el punto M* |
| 151 | P: Exacto, necesitaríamos otro punto para poder construir la recta. ¿Tienen alguna idea de hacerlo? |
| 152 | E1: Colocar los valores en este caso de U y el valor de la pendiente |
| 153 | P: ¿Lo pueden intentar?<br>(Los estudiantes usan la barra de herramientas para crear un nuevo punto llamado Ñ como se muestra en la imagen)<br><br>*Imagen. Corte de las trazas* |

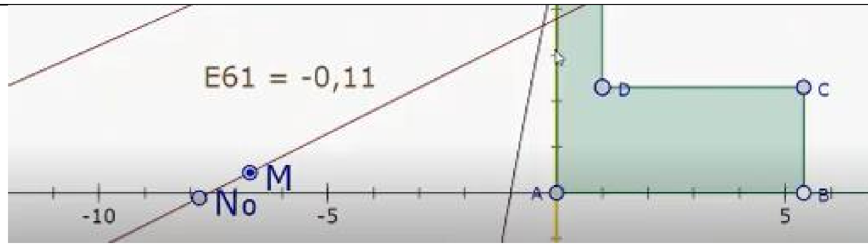
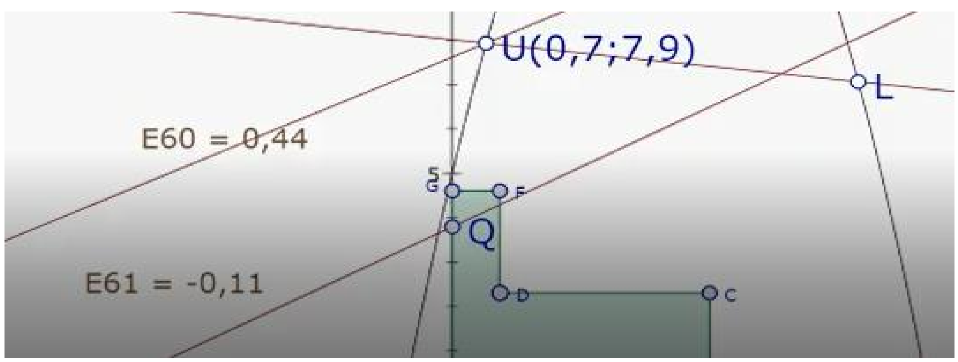
| | |
|---|---|
| 154 | P: Recuerden que el punto U se deja quieto, el que se mueve es el punto J |
| 155 | E1: Sí señor |
| 156 | P: Listo ¿Qué pueden notar de esa estrategia? |
| 157 | E1: Las dos chocan en un mismo punto |
| 158 | P: En el punto que necesitamos encontrar ¿Cierto? |
| 159 | E2: Sí señor |
| 160 | P: Exacto ¿ Nos sirve esta estrategia para encontrar ese punto de corte? |
| 161 | E1: Tal vez sí, sería como colocarle las coordenadas al punto M y Ñ y dejarlos en el punto donde chocan,<br>(Los estudiantes sacan las coordenadas de ambos puntos M y Ñ)<br><br><br>*Imagen. Medida punto M y punto Ñ* |
| 162 | P: Listo, ¿si se puede encontrar ese punto de corte?<br>E1: Si, se podría colocar un punto, pero no habría precisión |
| 163 | P: Exacto, si colocan un punto cualquiera no se sabe si ese punto es el que estamos buscando. Entonces, vamos a usar otra estrategia. Borremos el punto M y ocultemos las coordenadas del punto M. En la ruedita de configuración en la medida le ponen 0. |

| | |
|---|---|
| | (El profesor solicita disminuir el zoom y subir el punto J) |

Como se prevé en el análisis a priori fue necesaria la intervención del profesor para que los estudiantes invalidaran la estrategia de encontrar el punto de corte a partir de la intersección de las dos trazas. Por lo cual, se propone que el punto que se debe construir debe estar sobre la traza.

| | |
|---|---|
| 164 | P: Listo, para construir el punto M necesitaron una recta secante que pasará por U y una pendiente. Como necesitan construir otro punto. Necesitan otra recta que pase por U y que también sea secante y necesitan otra pendiente. Entonces ¿Pueden construir una recta que también sea secante y pase por U? |
| 171 | (Los estudiantes crean un nuevo punto sin nombre y trazan una recta secante con U) |
| 172 | E2: ¿Así? |
| 173 | P: Listo, sí. Entonces, ya tienen la recta ¿Cuál es la otra cosa que necesitábamos? |
| 174 | E1: La pendiente |
| 175 | (Los estudiantes calculan la pendiente (E61) de la nueva recta)   *Imagen. Medidas pendientes de las rectas secantes* |

| | |
|---|---|
| 176 | P: Listo, ya tenemos la recta y la pendiente; ya podemos crear el otro punto, pongámosle punto N.<br>(Los estudiantes crean el punto N) |
| 177 | P: Listo, ¿ahí tendrían que relacionar en la calculadora? |
| 182 | E2: Sería éste punto (señalando con el cursor el punto sin nombre de la recta secante) con la pendiente (señalando la pendiente E61=0,1 de la recta JU) |
| 186 | E2: L<br><br><br>*Imagen. Expresión establecida en la calculadora* |
| 190 | P: Listo, en ese orden de ideas ¿Que se procede a hacer ahora teniendo los dos puntos? |
| 191 | E1: Hacer una recta |
| 192 | P: Listo<br>(Los estudiantes crean una recta con los puntos N y M) |

| | |
|---|---|
| | <br><br>*Imagen. Punto de corte No* |
| 193 | P: Exacto, ya la recta está. ¿Para qué queríamos formar una recta? |
| 194 | E1: Para calcular el valor de .. |
| 199 | P: Ese punto, ¿Entre quienes y quienes están cortando? |
| 200 | E2: Entre el eje *y* y la recta |
| 201 | P: Listo, o sea que el punto que queremos hallar es la intersección, ¿Cierto? |
| 202 | E1: Sí señor |
| 207 | E1: Ese punto se va a llamar Q |
| 208 | P: Sí<br>(Los estudiantes le asignan el nombre de Q al punto)<br><br><br>*Imagen. Punto de corte Q* |
| 209 | P: Queríamos encontrar las coordenadas de Q. ¿Ya lo podemos saber? |
| 210 | E1: Sí señor |
| 211 | P: Listo. ¿Cómo sería? |

<table>
<tr><td>212</td><td>E2: Colocarle M y ya</td></tr>
<tr><td>213</td><td>P: Exacto. Entonces esas coordenadas ¿Qué nos quieren decir?</td></tr>
<tr><td>214</td><td>E2: Que el punto donde cruza M es en el eje $x$, en la parte 0 y en $(y)$ en 3,8</td></tr>
<tr><td>215</td><td>P: Y 3,8 ¿A qué hace referencia?</td></tr>
<tr><td>220</td><td>E1: La tangente</td></tr>
<tr><td>221</td><td>P: Exacto. Entonces cuando ustedes ponen J encima de U. La pendiente de esa recta tangente va a ser 3,8. ¿Esa parte si la entienden?</td></tr>
<tr><td>222</td><td>E1: Sí señor</td></tr>
<tr><td>226</td><td>P: Ahora queremos trazar la recta tangente al punto U y como ya conocemos la pendiente vamos a utilizar una estrategia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Se les explica a los estudiantes de donde sale la ecuación de la pendiente de una recta conociendo dos puntos. Luego se hace la relación de la formula con la construcción que se viene trabajando)</td></tr>
<tr><td>227</td><td>P: ¿Cuáles datos conocen hasta el momento en la construcción?</td></tr>
<tr><td>228</td><td>E1: Sería la pendiente, representada por 3,351.</td></tr>
<tr><td>229</td><td>E2: Ok. Entonces ya tenemos la pendiente $y(Q)$ y el punto U.</td></tr>
<tr><td>230</td><td>P: Recodemos que en este caso la pendiente va estar solo representada por el valor $y(Q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Se explica la relación de los valores que conocemos con la fórmula establecida previamente para encontrar el otro punto y poder formar la recta tangente a la curva que pasa por el punto U. Sin embargo, los estudiantes presentan confusiones por lo cual, fue necesario que ellos hicieran la representación gráfica de la estrategia para luego encontrar los datos que faltan siendo una intervención adicional a la prevista en el análisis a priori).</td></tr>
</table>

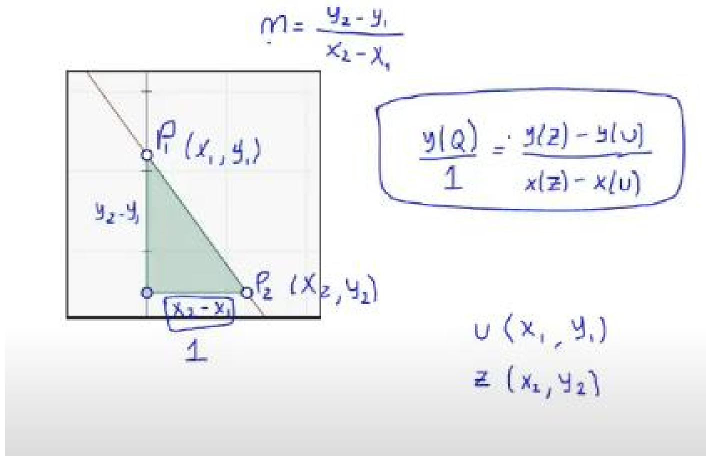
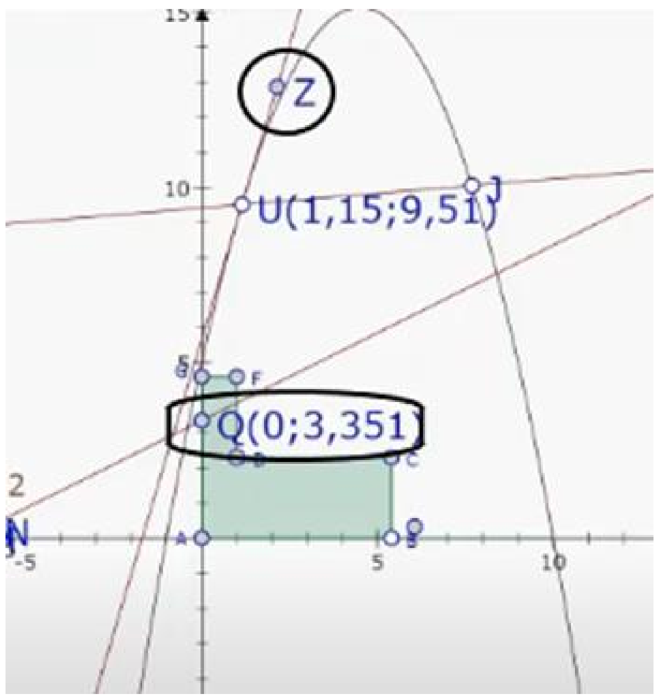
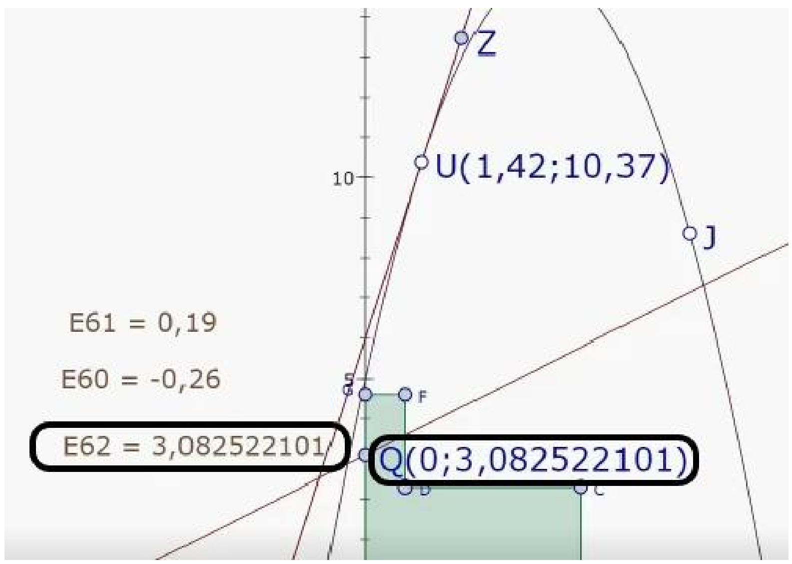
<table>
<tr><td>231</td><td>P: De toda esta ecuación establecida, ¿cuáles datos ya conocemos en la construcción y cuáles faltan?<br>
<br>Imagen. Relaciones a partir de la fórmula de pendiente</td></tr>
<tr><td>232</td><td>E1: Conocemos $y(Q), y\ (U), x(U)$.<br>No conocemos $y(Z), x(Z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Se hacen los despejes correspondientes en la ecuación para los valores que no se conocen y se les explica las relaciones que están en la proporción, al ver que los estudiantes presentan dificultades al momento operar la igualdad entre razones)</td></tr>
<tr><td>233</td><td>P: listo van a registrar esas expresiones resultantes y vamos a tenerlas presentes.<br>¿Qué ideas tendrían para colocar todo lo que se desarrolló dentro de la construcción?</td></tr>
<tr><td>234</td><td>E1: Sería como colocar otro punto dentro de la gráfica, y a ese punto darle las coordenadas que encontramos.</td></tr>
<tr><td>235</td><td>P: Ok, si quieren lo podrían intentar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Los estudiantes colocan un punto cualquiera sobre la pantalla y lo nombran como Z, e intentan ponerle las coordenadas mediante la calculadora)</td></tr>
</table>


*Imagen. Construcción del punto en la calculadora*

| | |
|---|---|
| 236 | P: ¿Que sería más fácil poner el valor numérico de y(Q) o simplemente poner $y$(Q) en la calculadora? |
| 237 | E2: Sí, para tomar todos los valores.<br>(Luego, los estudiantes construyen la recta)<br><br><br>*Imagen. Punto Z* |
| 238 | P: Listo, ¿cómo podemos verificar si quedo bien? |

<table>
<tr><td>239</td><td>E1: Con las macros, mirando si pasa por un punto<br>A simple vista se ve que solo pasa por U.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Para verificar lo primero que hacen es arrastrar el punto U para ver si se mantiene la recta ZU, luego utilizan la macro "tangente" para generar una recta y mirar si coincide con la recta ZU, este caso como coincidió, los estudiantes concluyeron que la recta ZU si es tangente a la parábola en el punto U. Se les siguiere verificar también la pendiente mediante la macro para ver si coincide con el punto $y$ (Q)). Finalmente concluyen que la recta si es tangente a la parábola, como fue previsto en el análisis a priori.<br><br><br>Imagen. Correspondencia entre los valores</td></tr>
<tr><td>240</td><td>P: Listo esta es una forma de encontrar una recta tangente, teniendo solo un punto y el valor de la pendiente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Finalmente, como los estudiantes resolvieron el problema por medio de la calculadora, una estrategia que no se tuvo prevista en el análisis a priori. Se les explica otra forma de resolverlo geométricamente (agregando objetos geométricos, como esta descrito en el análisis a priori)</td></tr>
</table>

Una vez construida la recta ZU (de la segunda forma) los estudiantes vuelven a verificar si quedó bien con ayuda de las macros)

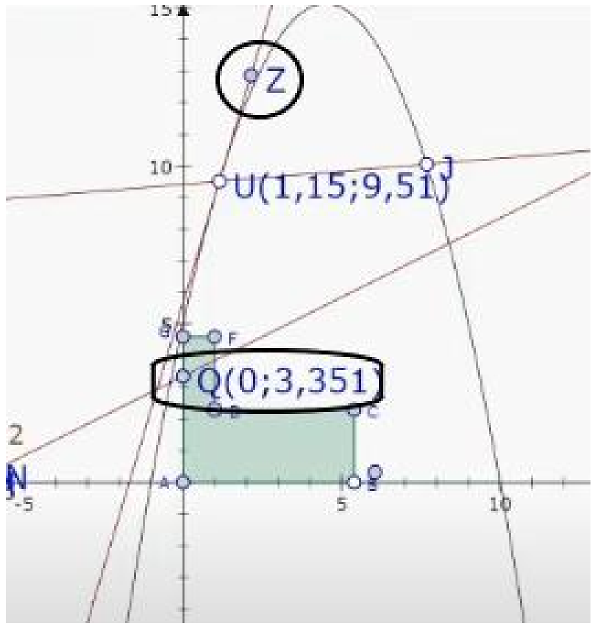



*Imagen. Solución de la situación*

Esta actividad fue adecuada para resaltar el concepto del lugar geométrico y lo que implica pasar de tener una recta secante a una recta tangente a una curva. Los estudiantes solucionaron la situación propuesta con ayuda de la calculadora, acción que no estaba prevista en el análisis a priori. De igual manera, con las acciones de verificación se validó que la solución era correcta.

## Conclusiones Generales

En esta ingeniería didáctica se abordó la fase de diseño, análisis a-priori de las actividades y un pilotaje de ese diseño, con un grupo reducido de estudiantes de grado décimo y once. El pilotaje se realizó para controlar la pertinencia del análisis a priori, verificando las hipótesis sobre las posibles acciones y el efecto de las retroacciones del medio. Se presentaron algunas acciones que no estaban previstas, pero en general las retroacciones del medio permitieron aprendizajes por adaptación relacionados con la noción de derivada al resolver problemas de optimización.

En esta ingeniería se adaptaron cuatro actividades en el software de DGPad-Colombia, a partir de un problema de optimización, donde se pide la maximización de un área. Se identificaron los siguientes aspectos en cada actividad diseñada:

- En la primera actividad los estudiantes invalidaron las estrategias perceptivas para determinar el área máxima del hexágono (Lo cual hace parte de la devolución del problema: Comprender que se busca una respuesta con el máximo posible de precisión); además se logra introducir la herramienta gráfica de una función para la determinación del punto máximo (Condición indispensable para la inteligibilidad del uso de la derivada para calcular el máximo: Determinación exacta del punto más alto de una curva).
- En la segunda actividad se logra que el estudiante identifique las condiciones necesarias para utilizar instrumentos de medida (Una regla graduada) para determinar la altura de objetos cuya altura es inaccesible de manera directa (La regla graduada, cuyo cero se encuentra en contacto con el piso, no puede estar en contacto con el punto más alto del objeto; por eso es necesario utilizar una segunda regla -no graduada- para conectar ese punto más alto con la graduación de la primera regla. Las condiciones son la

horizontalidad de la regla no graduada, la verticalidad de la regla graduada y el contacto de la regla no graduada con el punto más alto del objeto -tangencia-).

- En la tercera actividad, el estudiante aplica las condiciones de la actividad dos para determinar la altura máxima de la gráfica de la función y finalmente solucionar el problema.
- En la cuarta actividad, se abordó el cálculo de la pendiente de una recta tangente a la parábola a partir de la noción de lugar geométrico.

La TSD nos permitió identificar el rol del Software en la enseñanza: Es el medio con el que los estudiantes interactúan desarrollando un aprendizaje por adaptación. Las retroacciones de ese medio posibilitan la invalidación de las estrategias no matemáticas de solución. Esta invalidación le da la oportunidad al profesor de introducir gradualmente una estrategia matemática que podrá ser validada gracias a las retroacciones del medio.

Además, el software nos permitió proponer acciones de verificación para la validación de las tareas, gracias a las herramientas que brinda. Estas acciones serían imposibles de abordar con solamente el uso de lápiz y papel, reduciendo la solución de problemas de optimización a un simple algoritmo.

Las retroacciones garantizan la posibilidad de hacer una devolución adecuada de los problemas, y permiten la construcción conjunta (profesor/estudiante) de la estrategia de solución; esta construcción es conjunta, pues el profesor propone unas acciones iniciales, y gracias a las retroacciones del software el estudiante puede proponer las acciones subsiguientes que conducen a la solución.

Estas actividades sirven como iniciación para empezar a trabajar problemas de optimización utilizando la derivada, ya que permiten que el estudiante le encuentre sentido geométrico a cada uno de los pasos propuestos para encontrar el punto máximo o mínimo de una función.

Algunos de los aprendizajes obtenidos por los estudiantes con el desarrollo de las tareas son: la determinación de las condiciones para que una recta sea tangente o secante a una curva; el concepto y uso de lugar geométrico que representa todas las pendientes de las rectas secantes y tangentes a una curva; resolver un problema a partir de la generalidad para encontrar el caso de solución particular; las condiciones para encontrar la altura máxima de un objeto curvo; la construcción de una recta tangente a una curva a partir de la aproximación de la recta secante; manejo de las herramientas de verificación diseñadas en el software; mejoraron el lenguaje al momento de hacer referencia a los objetos geométricos.

## Reflexiones

Se identifica una deficiencia en el diseño de la ingeniería didáctica referente al conocimiento que el estudiante tiene del objeto matemático *función*, definiciones asociadas y procedimientos algorítmicos, por lo cual, es necesario examinar con más detalle el abordaje de este concepto para poder implementar las tareas propuestas en las actividades.

De igual manera, el profesor al introducir un objeto que no es familiar para el estudiante puede caer en intervenciones que no estaban previstas en el diseño de la ingeniería, por lo cual el enfoque del desarrollo de las tareas puede ser distinto. El profesor en su afán de que la ingeniería tome el resultado que se espera, hace que los estudiantes tomen decisiones acordes a lo que ellos piensan que quiere escuchar el profesor y no con respecto a la experimentación que desarrollan. El profesor debe ser cuidadoso con las intervenciones y con las preguntas que le puede formular al estudiante para que se dé el aprendizaje por adaptación.

Otro aspecto importante que observamos en la aplicación de las actividades a los estudiantes, fue reconocer algunas ventajas de aplicar el pilotaje virtual o presencial. Como el estudiante es la persona quien interactúa con el medio (DGPad-Colombia), se evidenció que los estudiantes que desarrollaron las estrategias en modalidad virtual (excepto la actividad 2) tuvieron un dominio apropiado de las herramientas del software, lo cual les permitía proponer estrategias de solución e implementarlas en DGPad-Colombia para invalidarlas o validarlas. Mientras que los estudiantes que desarrollaron las actividades de manera presencial tenían un dominio más básico, donde se requirió varias veces la intervención del profesor asegurándose que no se desconfigurara la construcción.

En la implementación de la ingeniería didáctica, el tiempo de trabajo con los estudiantes y la distribución de las sesiones fueron factores que influyeron en el desarrollo de las actividades de manera presencial y virtual. El distribuir la aplicación de las actividades planteadas en diferentes sesiones (Pilotaje 2) permitió un mejor desarrollo de las actividades, pues se podía abordar las temáticas con mayor calma, al igual que la disposición de los estudiantes era mejor porque no se abordaban tantos conceptos en un lapso tan corto de tiempo para proponer y validar o invalidar las estrategias, en ningún momento omitiendo una estrategia de solución.

Finalmente, consideramos que es necesario un trabajo posterior en donde se introduzca qué es la derivada de una función. Gracias al trabajo de la ingeniería los estudiantes tendrán una mejor interpretación al método de optimización.

## Bibliografía

Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración Escuela de Matemáticas, 173–189.
http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol28N2/V28N2-6Acosta.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamericano. https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Bustos, L. Vásquez, J. (2016). Uso del software Carmetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización. Trabajo de Maestría en educación énfasis en matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas facultad de ciencias y educación.

Gempeler, M. Fiallo, J. (2017) Enseñando geometría con tecnología digital, una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas. Doctorado Interinstitucional en Educación, Editorial U.D. Bogotá, Colombia

Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. (Acosta, M. y Fiallo, J.) Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1993)