

El principio de mínima acción como escenario para resignificar la optimización
matemática

David Maldonado Rico

Universidad la Gran Colombia
Facultad de ciencias de la educación
Programa de licenciatura en Matemáticas y tecnologías de la información
Bogotá
2015

Dedicatoria

A mis padres por haber sido la inspiración y apoyo para lograr culminar mis estudios.

Agradecimientos

A mi asesor de trabajo de grado el Dr. Carlos Eduardo León Salinas.

Por las sugerencias y motivación para llevar a buen fin el presente trabajo, y por su siempre buena disposición en cada una de las fases del mismo.

A los docentes Jefer Camilo Sachica y Juliana del Pilar Santamaría Vargas.

Por contribuir en la elaboración de algunas fases del presente trabajo.

Contenido

1.	Antecedentes	1
2.	Planteamiento del problema de investigación.....	8
2.1	Pregunta de investigación	8
2.2	Objetivo general.....	11
2.3	Objetivos específicos	11
2.3	Justificación	11
3.	Marco conceptual.....	16
3.1	Formulación del problema de cálculo de variaciones.....	16
3.1.2	Conceptos previos.....	16
3.1.3	Formulación del problema de cálculo de variaciones.....	18
3.1.4	Condiciones necesarias de optimalidad	21
3.1.4.1	<i>Condición necesaria de primer orden. Ecuación de Euler.....</i>	21
3.2	Principio de mínima acción	22
3.3	Problemas relacionados con el cálculo de variaciones	23
3.3.1	El problema de la reina Dido	24
3.3.2	El teorema de Herón	29
3.3.3	Johann Bernoulli y La braquistócrona	32
4.	Marco teórico	43
5.	Metodología	54
5.1	Enfoque epistemológico.....	54
5.2	Método	57
5.3	Del taller del artesano al laboratorio científico.....	58
5.4	Medición como práctica social	68
5.5	El laboratorio de Matemática fundamentado en el principio de mínima acción.	72
5.5.1	Primera estación: historia de la reina Dido.	72
5.5.2	Segunda estación: la esfera	76
5.5.3	Tercera estación: aplicaciones del principio de mínima acción a partir de experimentos con pompas de jabón.	79
5.5.4	Cuarta estación: superficies minimales en bastidores poliédricos.....	81
5.5.5	Instrumento para analizar la medición realizada en las cuatro estaciones.....	86
6.	Análisis de resultados	95
6.1	Medición de áreas	95
6.1.1	Medición de áreas modificables a partir de un perímetro fijo	95

6.1.2 Medición de áreas modificables a partir de un perímetro fijo más el perímetro del marco de la tabla	96
6.2 La esfera.....	99
6.3 Conexiones mínimas	101
6.4 Superficies mínimas en bastidores poliédricos	104
6.4.1 Análisis de lo conceptual: variable dependiente y variable independiente.....	104
7. Conclusiones-recomendaciones.....	113
8. Bibliografía	118
9. Anexos	120
9.1 Anexo 1: instrumento dado a los estudiantes para la recolección de datos.	120
9.2 Anexo 2: Evidencias implementación del laboratorio	131
9.2.1. Con estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemáticas y tecnologías de la información de la Universidad la Gran Colombia.	131
9.2.2 Pilotaje realizado con estudiantes del colegio distrital Federico García Lorca	132

Índice de ilustraciones

Ilustración 1: Norma de una función (Cerde, 2012).	17
Ilustración 2: Distancia entre dos funciones. (Cerde, 2012)	17
Ilustración 3: Bola abierta de centro x_0 radio δ (Cerde, 2012)	18
Ilustración 4: Funciones admisibles	20
Ilustración 5: Generalidades de la formulación lagrangiana del principio físico de mínima acción	23
Ilustración 6: Transformación de una curva no convexa en una curva convexa. (Hildebrandt & Tromba, 1990)	27
Ilustración 7: Una curva convexa dividida por dos puntos, R S en dos arcos de la misma longitud. (Hildebrandt & Tromba, 1990)	27
Ilustración 8: Simetrización de una curva convexa. (Hildebrandt & Tromba, 1990)	28
Ilustración 9: Razonamiento para completar la demostración de la propiedad isoperimétrica de la esfera. (Hildebrandt & Tromba, 1990)	29
Ilustración 10: Ilustración principio de Fermat	30
Ilustración 11: Ilustración demostración principio de reflexión. (Hildebrandt & Tromba, 1990)	32
Ilustración 12: El problema de la braquistócrona. (Cerde, 2012)	34
Ilustración 13: Variación de la longitud del arco de curva. (Cerde, 2012)	36
Ilustración 14: Curva braquistócrona	42
Ilustración 15: esquema metodológico. (Montiel & Buendia, 2011)	56
Ilustración 16	56
Ilustración 17: Montaje de la estación de la reina Dido	75
Ilustración 18: Contornos de alambre	78
Ilustración 19: Materiales cuarta estación	83
Ilustración 20: Generalidades del tetraedro	84
Ilustración 21: Materiales preparación solución jabonosa	84
Ilustración 22: Instrumentos para preparar la solución jabonosa	85
Ilustración 23	85
Ilustración 24: Pompa de jabón en un bastidor tetraédrico	89
Ilustración 25: Método para encontrar el área minimal de la pompa de un bastidor tetraédrico	90
Ilustración 26: Resultados primera estación	96
Ilustración 27: Resultados primera estación	97
Ilustración 28: Resultados primera estación	98
Ilustración 29: Resultados primera estación	99
Ilustración 30: Resultados segunda estación	100
Ilustración 31: Resultados segunda estación	100
Ilustración 32: Resultados segunda estación	101
Ilustración 33: Resultado tercera estación	102
Ilustración 34: Resultado tercera estación	102
Ilustración 35: Resultados tercera estación	103
Ilustración 36: Resultados cuarta estación	105
Ilustración 37: Resultados cuarta estación	107
Ilustración 38: Resultados cuarta estación	109
Ilustración 39: Resultados cuarta estación	111

Índice de tablas

Tabla 1: Síntesis de la posible implementación del modelo Van Hiele a la evolución histórica de los isoperimétricos.	7
Tabla 2: Principales logros técnicos obtenidos en la Grecia Antigua, derivados de la técnica desarrollada hasta ese entonces.....	64
Tabla 3: Planificación de experimentos, elaborada a partir de (Hurtado, 2006)	71
Tabla 4: toma de datos	91
Tabla 5: Identificación de variable dependiente e independiente	92
Tabla 6: perímetro fijo vs área modificable	95
Tabla 7: Perímetro fijo más perímetro del marco utilizado vs área	97

Resumen

Este trabajo de investigación muestra la implementación de un escenario (laboratorio) configurado a partir del principio de mínima acción, para mostrar, desde diferentes etapas, la evidencia física de un concepto matemático: la optimización. Lo anterior como respuesta a la ausencia de marcos de referencia, al momento de comprender algunos conceptos matemáticos, convirtiéndose en un recurso metodológico en el que los estudiantes forman sus propios criterios, conjeturan y concluyen, sobre uno de los principios físicos que ha permitido la explicación de algunos fenómenos evidenciados en la naturaleza, y en algunas conductas propias de los seres vivos.

Se fundamenta la implementación de este escenario desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, debido a que, esta teoría, enfatiza en el uso de los conceptos matemáticos en contextos caracterizados por los sujetos que los conforman. Mediante este uso reiterado de los conceptos matemáticos se logra su resignificación, noción que permite dar significado a los conceptos matemáticos desde la actividad propuesta y no directamente desde el concepto matemático.

Palabras clave

Socioepistemología, principio de mínima acción, optimización, medición, resignificación, pompas de jabón, isoperimétrico, braquistócrona, práctica social.

Abstract

This research shows the implementation in a laboratory as a scenario configured from the principle of *minimum action*. It presents from different stages, the first one is the physical evidence of a mathematical concept such as the optimization. This concept in response to the lack of references frames, when a person wants to understand some mathematical concepts, becoming as a methodological resource in which students create their own criteria, speculate and conclude about one of the physical principles that allowed the explanation of a phenomena in nature, and some characteristics of living things and their behavior.

The implementation of this scenario is based on the socio-epistemological mathematics education and its theory because of this one emphasizes about the use of mathematical concepts characterized by individuals who are in context. Through this repeated use of mathematical concepts and their redefinition is achieved, a notion that allows give meaning to Math concepts from the proposed activity and not directly from the mathematical concept.

Key words

Socio-epistemology, principle of *minimum action*, optimization, measurement, re- signification, soap bubbles, Isoperimetric, brachistochrone, social practice.

El principio de mínima acción como escenario para resignificar la optimización matemática.

1. ANTECEDENTES

Aunque el principio de mínima acción no hace parte del currículo escolar, su importancia en la interpretación de algunos fenómenos de la naturaleza, y aun en algunos comportamientos de los seres vivos, han permitido seleccionarlo y asimilarlo para contextualizar ciertos conceptos matemáticos donde es posible identificar este principio físico.

“En nuestra vida cotidiana tenemos continuamente que tomar decisiones del siguiente tenor: qué situación es “la mejor” o “la peor”; qué objeto posee determinada propiedad en grado “máximo” o “mínimo”; cuál es la estrategia “óptima” para hacer máximo el placer, el éxito, o los beneficios, o para hacer mínimas la incomodidad, el fracaso, las pérdidas” (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 22).

El principio de mínima acción ha evolucionado desde lo narrativo hasta lo científico en un periodo aproximado de 2.500 años. La primera referencia de un problema asociado con este principio físico es ubicado en el siglo IX A.C; cuando el poeta Virgilio enunció en su epopeya latina: la Eneida, un problema de tipo variacional que involucraba perímetros y áreas, o lo que se ha dado a conocer como problemas isoperimétricos (el problema de la reina Dido). Es conveniente, dada la influencia de los isoperimétricos en la primera enunciación de un problema asociado al principio de mínima acción, citar algunas investigaciones que están basadas en este tipo de problema y que resaltan su

importancia en el ámbito de la enseñanza de la matemática en diferentes contextos históricos y culturales.

Para comprender la importancia del problema de los isoperimétricos se mencionarán algunas observaciones que tienen al respecto, el grupo de investigación conformado por Rafael Pérez Gómez, Belén Cobo, María Dolores Daza, Ana María Paya, Francisco Fernández, Miguel Pasadas, María Isabel Berenguer y Luis Berenguer, quienes en conjunto conforman el grupo construir las matemáticas. En una serie de once artículos publicados en la revista suma en el año 2000, abordan el problema de los isoperimétricos, que para este grupo, reviste un interés particular debido a que pueden identificarse en diferentes contextos como la literatura, la música, la arquitectura, en la historia y en las mismas matemáticas. Se menciona igualmente la importancia que ha tenido la resolución de problemas matemáticos para el desarrollo de esta ciencia debido a que “*la resolución de problemas es el corazón mismo de la actividad matemática*” (Perez, y otros, 2000, pág. 103) . De esta serie de once artículos se seleccionaron tres: el problema isoperimétrico en la arquitectura, literatura, música..., en la naturaleza, isoperimétricos en la Grecia antigua e isoperimétricos en el islam medieval.

En el primer artículo: el problema isoperimétrico en la arquitectura, literatura, música..., en la naturaleza, de (Perez, y otros, 2000) se plantea un problema asociado a la construcción de las ventanas de los balcones en las fachadas de las casas. Se puede afirmar que las funciones principales de las ventanas de los balcones son: primero, observar a través de ellas y segundo brindar la mayor iluminación posible en el interior,

sumado a lo anterior independientemente de su forma, el tamaño de la ventana debe ser estándar con respecto a su entorno (es decir no debe ser demasiado grande ni demasiado pequeño debido a que no estaría acorde con la estética de la fachada). Este problema puede ser planteado a un arquitecto y matemáticamente puede ser enunciado de la siguiente forma: *“Entre un cristal rectangular, con unas determinadas dimensiones y otro con una forma diferente y dimensiones similares ¿Cuál optimiza su función?”*. (Perez, y otros, 2000, pág. 105). Más allá de interesarnos la solución al problema planteado, la cual obedece a una de las propiedades maximales de la circunferencia en la naturaleza, y que se mostrara con detalle más adelante, conviene resaltar la intención que tiene la implementación de esta clase de problemas en el aula de clase, al final del artículo los autores mencionan que: *“Quienes leemos suma tenemos como denominador común el interés por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva, un problema es más interesante si podemos llevarlo al aula”* (Perez, y otros, 2000, pág. 106).

Del segundo artículo seleccionado, (Perez, y otros, 2000) se puede mencionar que en la Grecia antigua existió un interés particular por el estudio de los isoperimétricos. El grupo de investigación: grupo construir las matemáticas, en el artículo titulado: *isoperimétricos en la Grecia Antigua*, mencionan los principales pensadores griegos, de esta época, que realizaron estudios relacionados con los isoperimétricos: Arquímedes, Zenodoro, Herón de Alejandría, Pappus, Theon de Alejandría, entre otros. Es conocida la representación que los griegos tenían de su entorno. Estos habían configurado el universo de tal forma que cada una de las estrellas que giraban alrededor de la tierra (que a su vez

era un círculo rodeado por las aguas de los océanos), estaban ubicadas dentro de una semiesfera (sistema Ptolomeico). Aunque se atribuye a Pitágoras, el haber ideado uno de los primeros sistemas para ubicar los cuerpos celestes conocidos hasta ese entonces. En él, se situaba por separado a las estrellas en una esfera de cristal móvil, unida a la tierra por medio de un eje, y a cada uno de los planetas en otras esferas móviles independientes. Como consecuencia de la anterior representación del universo se generó, también por iniciativa del mismo Pitágoras, una teoría que involucraba los supuestos sonidos armónicos que producían los giros de estas esferas de cristal (la música de las esferas), que se originaban debido a las razones de longitud de cuerda que separaban dichas esferas, y que fundamentaban, a su vez, su teoría de la armonía musical.

Independientemente que se crea o no, en que los movimientos de los cuerpos que conforman el universo produzcan algún tipo de sonido, el grupo construir las matemáticas, realiza la siguiente observación con respecto al interés suscitado por los griegos en lo referente a la esfera y el círculo: ” *La visión simultanea de los isoperimétricos en 2D y en 3D, la relevancia del círculo y la esfera*” (Perez, y otros, 2000, pág. 96). A partir de la anterior observación este grupo de investigación sugiere que la enseñanza de la matemática, debe estar encaminada a cumplir uno de los propósitos de esta ciencia en sus orígenes, propósito que se deriva de su significado, debido que la palabra matemática:

“*procede de la palabra griega -Mathema- con la que se identifica un tipo de conocimiento humano mediante el cual se intentaba comprender el mundo; percepción, conocimiento, cognición o comprensión de la naturaleza y la sociedad deberían ser los objetivos primordiales en la educación matemática de*

las personas para contribuir que puedan ejercer y gozar de su libertad”. (Perez, y otros, 2000, pág. 96)

La exposición de los conceptos matemáticos en el aula de clase, que normalmente se realizan de forma tradicional en un tablero, alejan por completo a los estudiantes de su realidad tridimensional al enmarcar dicha realidad en las dos dimensiones del tablero. El hecho que los griegos hayan estudiado los isoperimétricos en 2D y en 3D, permite inferir la visión global que los griegos tenían de su entorno.

En este mismo artículo se menciona uno de los ejemplos en donde es posible evidenciar el principio de mínima acción en la naturaleza, esa naturaleza que hace parte de la realidad de los seres humanos. Este ejemplo hace referencia a la arquitectura de un panal de abejas. Aunque no entraremos en detalles con relación a la demostración presentada del teorema de Pappus (que se ilustra de forma detallada en este artículo) si indicaremos que las abejas han diseñado su morada de forma tal que el material empleado para su construcción sea el mínimo posible. Pappus demostró por consiguiente que *“dentro de todos los polígonos que pueden recubrir el plano por yuxtaposición, es el hexágono regular el que presenta perímetro mínimo para un área dada.*

En el tercer artículo seleccionado (Perez, y otros, 2000) del grupo de investigación: grupo construir las matemáticas se describe el estudio del problema de isoperimétricos en la edad media por parte de Al Kindi, Al Khazin, e ibn al-Haytham en la cultura árabe. Los estudios de estos matemáticos árabes están inspirados en los resultados obtenidos en la antigüedad, por parte de Arquímedes y Zenodoro, los cuales

fueron transmitidos a la posteridad a través de los resúmenes realizados por Theon de Alejandría en su obra *los comentarios*, y por parte de Ptolomeo en su obra *almagesto*. Durante el periodo medieval los matemáticos árabes mencionados dirigieron sus estudios a demostrar dos problemas óptimos de la geometría ya reconocidos en la antigüedad: primero, que la esfera es el sólido de mayor volumen entre todos los sólidos y segundo, que el círculo es la figura plana de mayor área entre todas figuras planas.

Lamentablemente no existen registros de los resultados obtenidos por Al Kindi, contraria fue la suerte de los estudios de Al Khazin con respecto a estos dos problemas. En sus estudios, según el artículo, Al Khazin demuestra que si se tienen dos polígonos regulares de igual perímetro P_1 y P_2 de lados l_1 y l_2 respectivamente con $l_1 > l_2$ el área de P_1 es mayor que el área de P_2 , por consiguiente el área de un círculo de igual perímetro que los polígonos regulares descritos anteriormente, será mayor. Lo interesante de la descripción realizada por el grupo de investigación, después de hacer mención del método empleado por Al Khazin y del realizado por Zenodoro (con la correspondiente aclaración que este último cometió ciertos errores en sus razonamientos) para demostrar el primer problema de optimización geométrica mencionado con anterioridad, es el siguiente planteamiento que realizan: “¿Puede ser la evolución histórica hasta aquí presentada un esquema que permita planificar la actuación en clase de la mano del modelo de Van Hiele?” . (Perez, y otros, 2000, pág. 98). Aunque no se profundizará en el modelo de Van Hiele, el artículo permite realizar la siguiente síntesis de la aplicación de este modelo a la evolución histórica del problema formulado respecto a la optimización del área

Tabla 1: Síntesis de la posible implementación del modelo Van Hiele a la evolución histórica de los isoperimétricos.

Nivel	Descripción
Diagnóstico	Discutir si el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier triángulo isósceles de igual perímetro
Orientación dirigida	Demostrar que el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier otro de igual perímetro
La explicación	La anterior reflexión puesta en este mismo momento del análisis histórico, puesta en la boca del alumnado
La orientación libre	Demostrar que si se tienen dos polígonos regulares de igual perímetro P_1 y P_2 de lados l_1 y l_2 respectivamente con $l_1 > l_2$ el área de P_1 es mayor que el área de P_2 , por consiguiente el área de un círculo de igual perímetro que los polígonos regulares será mayor.

La evolución histórica del problema como esquema, es el planteamiento formulado por el grupo: grupo construir las matemáticas, que se deriva de un problema isoperimétrico, es decir encontramos que como elemento para fundamentar la validez de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría funciona debido a su trascendencia histórica y conceptual.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 Pregunta de investigación

En la actualidad, no es un secreto para la comunidad educativa el desinterés y la falta de motivación presente en los estudiantes para comprender conceptos matemáticos. Esto es debido, entre muchos otros factores, a la falta de metodologías que permitan generar espacios para evidenciar en el aula de clase, que los conceptos matemáticos pueden llevarse a un plano distinto del abstracto. Si bien, el carácter abstracto de la matemática es lo que ha permitido diferenciarla de otras ciencias, también es cierto que una saturación de la misma en la enseñanza de la matemática, puede ocasionar animadversión hacia aquellos conceptos poco evidenciables y carentes de contexto en el proceso de aprendizaje llevado a cabo en el área de matemáticas, *“Nuestros actuales programas llevan a impartir una matemática carente de significado, ahistórica y acultural: el formalismo por el formalismo. El alumno está obligado a trabajar de forma rutinaria y memorística. La falta de referencias es absoluta”*, (Jimenez, 1992).

Como ocurrió a principios de la segunda mitad del siglo pasado cuando se realizó la sustitución, en la educación matemática, de la geometría elemental por el álgebra estructurada, que privilegiaba el rigor lógico, desplazando con ello, la fuente inagotable de contenidos y problemas interesantes que brindaba la geometría euclidiana. Como lo percibió (Bochner, 1966) cuando afirmaba: *“Muchas veces las abstracciones de posibilidad se hacen en exceso, como cuando hay en algún contexto más abstracciones que afirmaciones que las relacionen”*

Dentro del sistema teórico que tiene como objeto de estudio la Construcción Social del Conocimiento Matemático y su difusión institucional, denominado Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se hace necesario establecer prácticas sociales que permitan generar la construcción y reconstrucción social del conocimiento matemático, a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, *“En un sentido teórico y filosófico, la práctica social es un constructo teórico que pretende establecer la intención transformadora, a la vez que ubica a la actividad humana como un acto social”*, (Cantoral, 2013, pág. 152) De esta manera se modifica la idea que se tiene del conocimiento matemático y su aprendizaje, los cuales han estado enmarcados desde hace bastante tiempo como elementos fijos y preestablecidos.

Para este trabajo en particular; el principio de mínima acción y las diferentes prácticas que es posible establecer a partir de él, permitirán contextualizar desde una perspectiva: histórica y experimental: la optimización matemática. ¿Por qué se opta por este principio? Porque es un principio físico que sustenta la idea generalizada que se tiene del mundo desde la antigüedad, en cuanto a que es posible interpretarlo por medio de nociones matemáticas, *“Una de las ideas que el mundo moderno hereda del mundo antiguo es la existencia de un orden fundamental, de armonía en el universo, de una armonía que se encuentra reflejada en la belleza de las estructuras matemáticas”*, (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 29) . Por otro lado existe una tendencia en los seres humanos a minimizar la energía, el tiempo o hasta el dinero que emplean, en las diferentes actividades que realizan a diario. Por ejemplo, ¿Que padre de familia no busca estrategias para el ahorro del consumo en los servicios públicos, para con ello minimizar

a su vez el gasto en el pago de los recibos de los mismos? o ¿Qué empleado no busca la ruta de transporte público que le permita llegar desde su lugar de residencia hasta su lugar de trabajo en el menor tiempo posible? Esto puede ser producto, quizá, de la misma tendencia que ha tenido la naturaleza a la economía de medios, y no podría ser de otra manera debido a que el hombre hace parte de la naturaleza.

A su vez al ser un principio físico permite generar prácticas para la constitución de un espacio en donde se puede difundir, a una población heterogénea en cuanto a su instrucción intelectual, las situaciones y nociones básicas de este principio. De esta manera se constituirá lo que se ha denominado un laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio físico de mínima acción. El laboratorio de matemáticas es descrito como un espacio que permite la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde un punto de vista experimental y al respecto (Jimenez, 1992) aclara, *“el laboratorio es antes que nada una estructura para la enseñanza y el aprendizaje en la que se concreta la enseñanza experimental* (pág. 36). Este mismo autor basado en una investigación elaborada por Fortuny y Giménez, quienes a su vez citan al pedagogo italiano De Bartolomeis, analizan la definición de laboratorio proporcionada por este, *“un laboratorio es un espacio de comportamiento y una forma de producción”* . Para su respectivo análisis describen las dos características propias de esta definición: espacio de comportamiento y forma de producción; la primera de ellas corresponde a, *“el proceso o forma de construir un concepto, de asumir una línea gradual y personal de aprendizaje”*, (Jimenez, 1992, pág. 36), la segunda característica corresponde a *“Una actitud investigadora respecto a la construcción de conceptos, la resolución de problemas, la*

innovación organizadora, la preparación de procedimientos de investigación de técnicas de colaboración, etc.”, (Jimenez, 1992, pág. 36). A partir de lo anterior se plantea la siguiente situación problema

¿De qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática en estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas y tecnologías de la información de la Universidad la Gran Colombia?

2.2 Objetivo general

Construir un laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción para resignificar la optimización matemática, en estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas y tecnologías de la información de la Universidad la Gran Colombia.

2.3 Objetivos específicos

Identificar situaciones históricas y experimentales donde se evidencie el principio de mínima acción.

Reconstrucción de situaciones históricas por medio de la experimentación, a través de las cuales los estudiantes realizaran el proceso de medición, entendido este como práctica social.

2.3 Justificación

“El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, y los caracteres son triángulos, círculos y otras formas geométricas”. (Galileo Galilei).

Desde el momento en que Galileo Galilei afirmó que la matemática era el lenguaje por medio del cual era posible describir la mayoría de manifestaciones presentes en la naturaleza, se categorizó a la matemática como ciencia universal. Esta idea de universalidad ya había sido inferida mucho tiempo atrás por quien realizó la transición de una matemática como instrumento práctico para la solución de problemas de agrimensura y arquitectura, desarrollada por babilonios y egipcios, a una matemática como ciencia deductiva al implementar la demostración matemática como herramienta para garantizar la veracidad de los enunciados matemáticos; Pitágoras, quien afirmó: *todo es número*, de lo cual puede inferirse que todo es matemática. Pero ¿Por qué Galileo Galilei y Pitágoras, se atrevieron a realizar tal sentencia? ¿Habían acertado en su conjetura o por el contrario se habían dejado llevar por observaciones a priori sin ningún tipo de fundamento?

La naturaleza, y el planteamiento de algunos problemas de carácter físico, entre los que se puede mencionar los siguientes:

“¿Cuál habrá de ser la forma de un coche que haga mínima la resistencia del aire para un volumen interior prescrito? ¿Qué forma de casco determinará que el barco sea el más veloz? ¿Qué forma de casa proporciona la superficie mínima con volumen interior dado para que las pérdidas de calor al exterior sean las mínimas posibles? (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 22).

han sido el preámbulo y la fuente de inspiración para la concepción de principios físicos y matemáticos. Uno de estos, que se evidencia en gran variedad de fenómenos ocurridos en el entorno del hombre, fue descubierto desde el momento en que los preceptos religiosos implantados por el catolicismo dejaron de perfilar los destinos del intelecto, de lo científico, de lo moral y de lo político en occidente. La sociedad antropocéntrica que desplazaba la idea de un Dios inalcanzable por el hombre, se dio a la tarea de estudiar lo que por sentido común debía ser uno de sus objetivos inmediatos: el mundo, ese mundo que los griegos dentro de sus posibilidades habían interpretado y del cual habían perfilado ciertas características (aunque no siempre correctas) que le permitieron poseer una visión más detallada y amplia de lo que estaba a su alrededor.

Este principio enunciado de manera intuitiva y filosófica por el sabio francés del siglo XVII Pierre Louis Moreau de Maupertuis fue expresado por él de la siguiente manera como principio general: *“En todo cambio que se produzca en la naturaleza la cantidad de acción para tal cambio ha de ser la mínima posible”* (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 15).

Más adelante Joseph Louis Lagrange y William Rowan Hamilton enunciaron este principio intuitivo y filosófico de forma matemática, para con ello dar apertura, a una de las más importantes ramas de esta ciencia: el cálculo de variaciones. Este principio del mínimo, ha permitido establecer que la naturaleza, ciertas conductas humanas y la solución dada a algunos problemas de carácter físico, se fundamentan en este principio universal, con el que es posible optimizar diferentes magnitudes, como el tiempo, la

longitud, el volumen, la energía, el espacio, la superficie etc. ¿Es posible establecer una relación entre este principio universal y las aseveraciones realizadas por parte de Galileo Galilei y Pitágoras, para con ello mostrar a los estudiantes que la matemática si puede ser un lenguaje a partir del cual es posible interpretar algunos fenómenos ocurridos en la naturaleza y dar solución a algunos problemas que se manifiestan en la cotidianidad de los individuos?.

La naturaleza muestra eficiencia en sus acciones, el hombre ha forjado a través del tiempo grandes y portentosas creaciones que han beneficiado a la humanidad, no hay que olvidar que el hombre es el resultado de la evolución, por consiguiente sus creaciones también lo son, y si es de esta manera, es permitido ver en ellas, el principio que con el paso del tiempo ha moldeado el mundo: el principio de mínima acción. Es necesario que los individuos en el transcurso de su proceso educativo, comprendan que sí es posible revelar y observar las sentencias que en su debido momento realizaron los grandes hombres de ciencia. Solo es cuestión de identificar por medio de que metodologías es posible tal propósito. Generar espacios apropiados para comprender el principio de mínima acción y con ello comprender a su vez los conceptos matemáticos que se evidencian en las prácticas elaboradas a partir de él, permitirá alcanzar uno de los elementos que han permitido la construcción de los conceptos, los denominados constructos teóricos, que *“son todos los recursos cognitivos de quien aprende a fin de actuar sobre los objetos de conocimiento y de esta forma construir conocimiento”*, (Cantoral, 2013, pág. 130)

A partir de lo anterior se justifica la elección del principio de mínima acción para la elaboración del laboratorio matemático en cuanto ofrece los recursos necesarios para desarrollar una práctica social: la medición. Con el objetivo de lograr la construcción social del conocimiento matemático tal cual lo plantea la teoría socioepistemológica de la matemática educativa. A través de esta práctica social se pretende captar la atención y suscitar la motivación de los estudiantes hacia algunos conceptos matemáticos, debido a que si se tienen en cuenta las funciones de la práctica social “ *orientar las acciones en la actividad humana, al adquirir la capacidad de producir intencionalidad e iteración de la actividad con la práctica hasta alcanzar niveles de competencia deseado*” (Cantoral, 2013, pág. 164) y los de producir identidades, “*pues configura un escenario de representaciones sociales en los que se auto confirma el rol del sujeto en el mundo, del individuo en su comunidad y del individuo hacia su yo interno*”, (Cantoral, 2013, pág. 164) , es posible guiar esta práctica de medición de algunas magnitudes matemáticas, originadas por medio del laboratorio fundamentado en el principio de mínima acción.

3. MARCO CONCEPTUAL

3.1 Formulación del problema de cálculo de variaciones.

A continuación se presentará la manera como debe realizarse la formulación de un problema de cálculo de variaciones, que es la fundamentación matemática para el principio de mínima acción. Esta formulación se obtuvo de (Cerde, 2012)

3.1.2 Conceptos previos

Sean t_o, t_1 , números reales, verificando que $t_o < t_1$. Se considera el intervalo cerrado $[t_o, t_1]$. Se define el siguiente conjunto de funciones:

$$\Omega = \{x: [t_o, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ posee derivadas primera y segunda en } [t_o, t_1]\}$$

En este conjunto de funciones, se consideran las operaciones habituales de suma y producto por un número real:

Para $x_1, x_2 \in \Omega, t \in [t_o, t_1]$, se define

$$(x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}, x_1 \in \Omega, t \in [t_o, t_1]$, se define

$$(\lambda x)(t) = \lambda \cdot x(t)$$

El conjunto Ω , sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con las dos operaciones definidas, tiene estructura de espacio vectorial.

En Ω , se define ahora la siguiente norma

$$\|\cdot\|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \|x\| = \max_{t \in [t_o, t_1]} |x(t)|$$

Esta norma tiene una sencilla interpretación geométrica

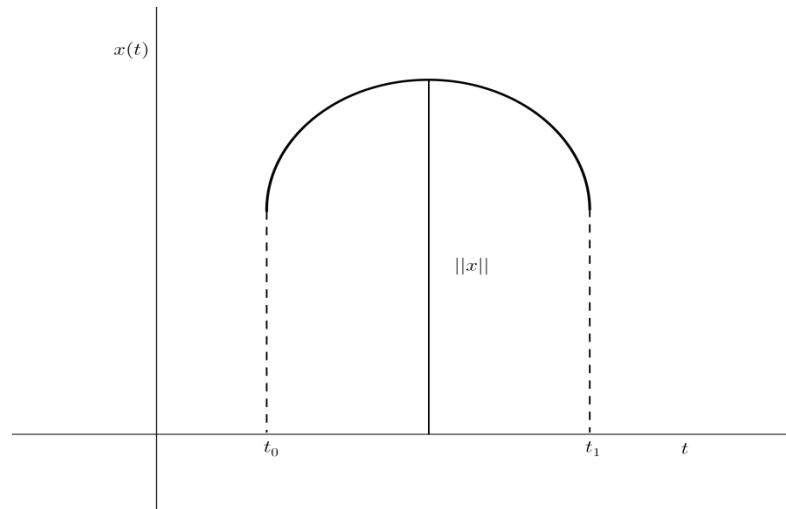


Ilustración 1: Norma de una función (Cerda, 2012).

El espacio vectorial Ω , con la norma definida, es un espacio normado, la norma considerada induce una distancia, que es la siguiente:

Para $x_1, x_2 \in \Omega$,

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x_1(t) - x_2(t)|$$

La interpretación geométrica de la distancia definida se ve en la ilustración 2

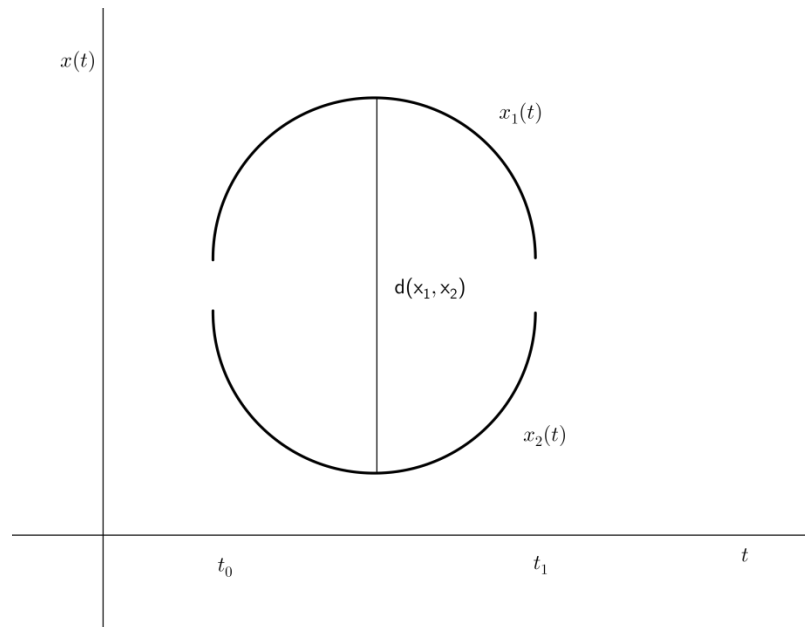


Ilustración 2: Distancia entre dos funciones. (Cerda, 2012)

El conjunto Ω con la distancia d es un espacio métrico.

Sean $x_0 \in \Omega, \delta \in \mathbb{R}, (\delta > 0)$. Se define bola abierta de centro x_0 y radio δ , el siguiente conjunto

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \Omega: d(x, x_0) < \delta\}$$

Cualquier $x \in \Omega$, cuya grafica esté contenida en la franja representada en la ilustración 3 pertenece a la bola $B(x_0, \delta)$

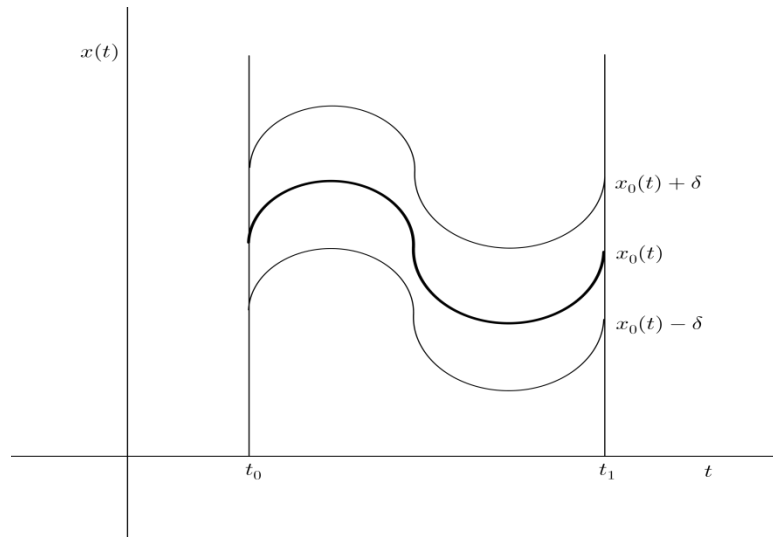


Ilustración 3: Bola abierta de centro x_0 radio δ (Cerde, 2012)

Terminamos este apartado definiendo el concepto de **funcional**

Un funcional es una aplicación, cuyo dominio es el conjunto de funciones, y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

En el caso que nos ocupa, consideramos funciones J cuyo dominio es el conjunto Ω , es decir:

$$J: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow J(x)$$

3.1.3 Formulación del problema de cálculo de variaciones

A continuación, se define el problema de cálculo de variaciones para el caso escalar, con extremos fijos

Sea F una función de tres variables, de clase $C^{(2)}$ (es decir que posee todas las derivadas parciales primeras y segundas, y son continuas). Se considera el siguiente funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), \dot{x}(t), t] dt,$$

En donde $\dot{x}(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto a t .

Se trata de encontrar aquella función $x^*(t)$, con derivadas primeras y segunda continuas en $[t_0, t_1]$, verificando que $x^*(t_0) = x_0$ y $x^*(t_1) = x_1$, siendo x_0 y x_1 dados, para que el funcional J alcance el valor máximo (o mínimo).

El problema, por tanto, en el caso de maximización es

$$\max_{x \in \Omega} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), \dot{x}(t), t] dt, \quad (3.1)$$

$$\text{con: } x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

En donde recordemos que

$$\Omega = \{x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ posee derivadas primera y segunda en } [t_0, t_1]\}.$$

Por tanto, para este problema, el conjunto factible (llamado conjunto de funciones admisibles) es

$$\Psi = \{x \in \Omega \mid x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}$$

Como es habitual en optimización, el considerar solo el máximo (o el mínimo) de la función objetivo, en este caso del funcional objetivo, no supone ninguna pérdida de generalidad, ya que

$$\min J(x) \text{ es equivalente a } -\max[-J(x)]$$

y, además, el elemento x que minimiza $J(x)$ es el mismo x que maximiza $[-J(x)]$.

A continuación se presenta un ejemplo de formulación de problema de cálculo de variaciones

Ejemplo 1: Dados los puntos (a, α) y (b, β) , del plano (t, x) , siendo $a \neq b$, se trata de encontrar la función $x^*(t)$ que une dichos puntos, cuya longitud sea mínima.

Solución. Obtengamos la función matemática del problema:

En la ilustración 4 se representan diferentes funciones que unen los puntos dados

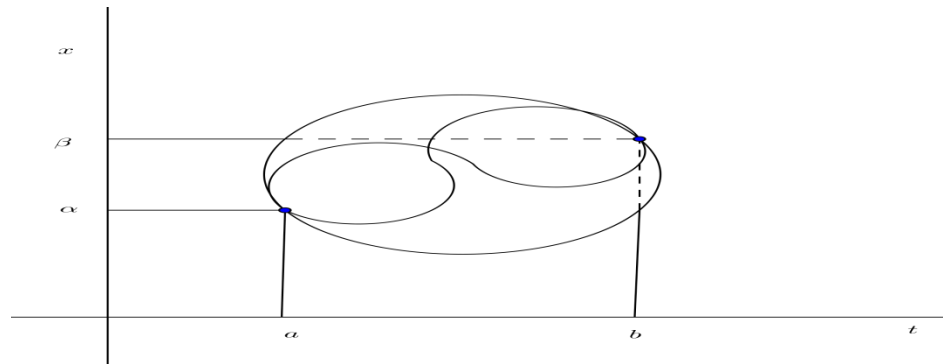


Ilustración 4: Funciones admisibles

Dada $x(t)$ una función cualquiera como la que aparecen en la figura anterior, se sabe que la longitud de curva entre los puntos dados viene dada por

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt.$$

Por tanto, el problema que nos ocupa es

$$\min J(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt,$$

$$\text{con } x(a) = \alpha, x(b) = \beta.$$

3.1.4 Condiciones necesarias de optimalidad

3.1.4.1 Condición necesaria de primer orden. Ecuación de Euler.

La condición que vamos a obtener, llamada condición o ecuación de Euler, es la más importante del cálculo de variaciones. Su deducción es muy sencilla y fácilmente comprensible, pues se apoya en la programación matemática clásica de funciones diferenciables.

Condición de Euler

Si $x^*(t)$ es un máximo local del problema (3.1) entonces en $x^*(t)$ se verifica la siguiente condición:

$$F_x[x^*(t), \dot{x}^*(t), t] - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}[x^*(t), \dot{x}^*(t), t] = 0, \forall t \in [t_0, t_1],$$

que es la ecuación de Euler, en donde F_x es la derivada parcial de F con respecto a su primera variable x , y $F_{\dot{x}}$ es la derivada parcial de F con respecto a su segunda variable $\dot{x}$. Algunas consideraciones sobre la ecuación de Euler.

La ecuación de Euler (aportación de L. Euler, en 1744) para una función admisible $x(t)$ genérica, es por tanto

$$F_x(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

Se puede desarrollar el segundo sumando, calculando a partir de la regla de la cadena la derivada con respecto a t , obteniendo:

$$F_x - F_{\dot{x}x}\dot{x} - F_{\ddot{x}x}\ddot{x} - F_{\dot{x}t} = 0 \quad (3.2)$$

en donde $F_{\dot{x}x}$ es la derivada segunda de F , con respecto a sus variables x y $\dot{x}$, $F_{\ddot{x}x}$ es la derivada segunda de F , con respecto a su variable $\dot{x}$ dos veces $F_{\dot{x}t}$ es la derivada segunda de F con respecto a sus variables $\dot{x}$ y t , $\ddot{x}$ es la derivada segunda de $x(t)$ respecto de t dos veces

La ecuación de Euler es, por tanto, una ecuación diferencial de segundo orden, como se ve claramente en (3.2). Las soluciones de dichas ecuaciones se llaman extremales y dependen de dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 , es decir, son de la forma:

$$x = x(t, C_1, C_2)$$

Para obtener soluciones que verifiquen la condición necesaria de máximo local del problema (3.1), hay que resolver la ecuación de Euler e imponer al resultado las condiciones inicial y final dadas

3.2 Principio de mínima acción

El principio de mínima acción se definió de forma metafísica y filosófica por parte del sabio francés Louis Pierre Moutre Maupertuis de la siguiente manera “*En todo cambio que se produzca en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para tal cambio ha de ser la mínima posible*”. (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 15)

Aunque la anterior definición es válida, es necesario comprenderla de una manera formal y se puede resumir en la siguiente forma:

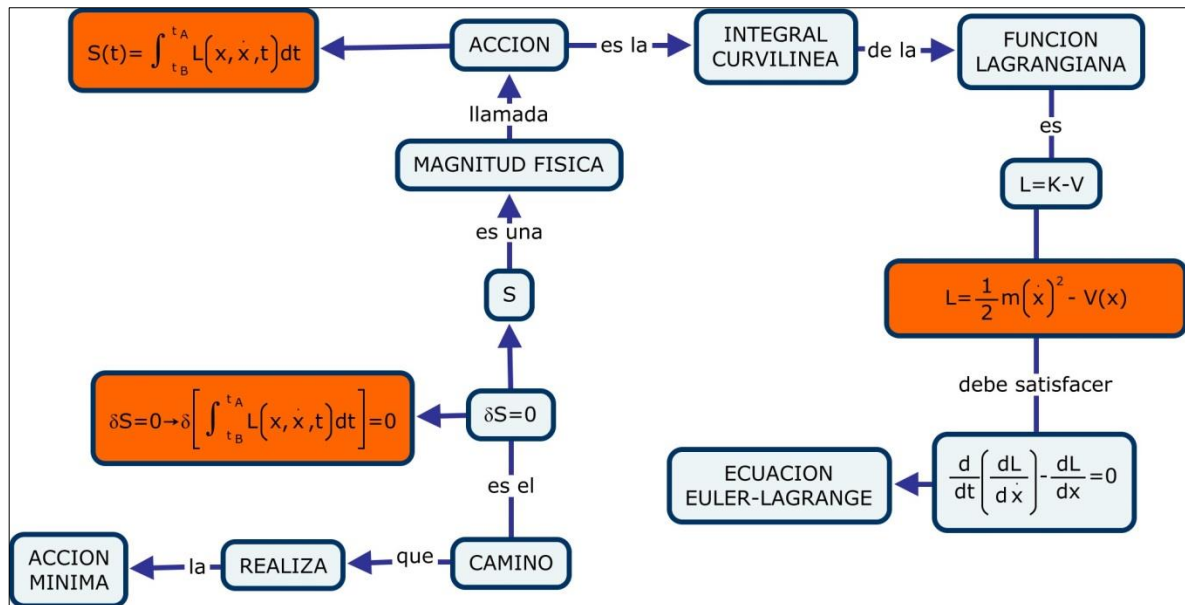


Ilustración 5: Generalidades de la formulación lagrangiana del principio físico de mínima acción

3.3 Problemas relacionados con el cálculo de variaciones

Si bien, la geometría euclídea, establecida en el siglo III A.C y admitida hoy en día como la primer rama de la matemática que mediante un sistema deductivo y sistemático que se fundamenta en definiciones, axiomas, postulados y reglas de la lógica clásica, consigue con el mayor rigor posible, demostrar las verdades que quiere establecer, proceso que para los matemáticos griegos clásicos era el principal objetivo del pensamiento geométrico, para las civilizaciones de Egipto y Babilonia, la geometría

tuvo un propósito totalmente diferente, estas civilizaciones la utilizaron para fines completamente prácticos.

Tanto los egipcios como los babilonios la utilizaron, en la agrimensura y en la construcción de edificaciones. Los conceptos abstractos que se plasmaron en la geometría euclídea y que son admitidos con toda certeza en el mundo de las ideas y desvinculados del mundo físico, el cual solo ofrece una imprecisa representación de dichos conceptos, no fueron tenidos en cuenta en los descubrimientos de estas civilizaciones, debido a que lo importante para estas culturas, era lo práctico, lo concreto.

Esta idea, de ver en la geometría un medio para configurar e interpretar el mundo físico, se evidencia, también, en la creación y solución de problemas que a simple vista no contribuirían en lo más mínimo, a la evolución del conocimiento matemático-geométrico. Uno de estos problemas, considerado como el primer problema de máximos y mínimos registrado en la historia, citado en el célebre poema épico del poeta latino Virgilio, la Eneida, describe una leyenda que se cree fue originada alrededor del siglo IX A.C.

3.3.1 El problema de la reina Dido

Dido, princesa fenicia de la ciudad de Tiro, tras el asesinato de su marido a manos del rey Pigmalión, hermano de la princesa, se vio forzada a trasladarse a las costas septentrionales de África. Al encontrarse allí, contactó con el rey de aquel lugar, el rey Jarbas de Numidia, para adquirir terrenos y establecerse con toda su comitiva en el lugar

que el rey indicara para ellos. El rey Jarbas, quizá por reserva hacia los extranjeros y el posible establecimiento de estos en sus dominios, o por ironizar con la princesa, le expuso que ella tendría tanto terreno como pudiera limitar la piel de un buey. La princesa Dido, en vez de extender la piel del buey, procedimiento con el que seguramente no hubiera obtenido una superficie adecuada en cuanto a magnitud, decidió cortar en tiras muy delgadas la piel del animal, y posteriormente, según cuenta la historia, las enlazó, procedimiento que le permitió obtener una cuerda cerrada de gran longitud. Con esta cuerda cerrada, el siguiente paso era elegir la curva cerrada plana que encerrara el terreno donde se encontraban, con la mayor área posible.

La forma elegida por la princesa Dido fue una semicircunferencia, lo que indica, que la princesa Dido había intuido que la circunferencia es la figura, que en comparación con otras figuras planas cerradas, posee la mayor área.

La primera demostración matemática, completa, que confirma esta aseveración, es decir, que la circunferencia es la figura plana cerrada que encierra una mayor superficie, fue iniciada por Jacob Steiner en el año de 1838 y terminada por Weierstrass en el año de 1872.

Hay que mencionar, igualmente, la demostración realizada por Zenodoro, quien vivió alrededor del siglo II A.C, demostración que presentaba ciertos vacíos, razón por la cual se da mayor importancia a la demostración ofrecida por Steiner- Weierstrass.

Este problema, estudiado por la cultura griega clásica, y considerado como un problema isoperimétrico (isos: igual; perímetro: medida del contorno), se enuncia matemáticamente, de la siguiente manera: *De todas las curvas planas cerradas con un perímetro dado, encontrar aquella que encierra un área mayor.* (Castro, 2001).

Y su solución: *De todas las superficies limitadas por curvas cerradas, sin puntos dobles y de la misma longitud, la de mayor área es el círculo.* (Rego, 2003)

A continuación se presenta la demostración de este problema isoperimétrico, tomada de (Hildebrandt & Tromba, 1990)

Supongamos que exista al menos una solución del problema isoperimétrico. Tendremos entonces una *curva C*, que, entre todas las líneas cerradas de cierta longitud dada, encierra en sí el máximo de área. Nos gustaría demostrar que tal curva es una circunferencia. Ante todo, observemos que ha de ser una curva convexa, es decir, que todo segmento rectilíneo que conecte dos puntos situados en el interior de la curva *C* ha de hallarse enteramente contenido en el interior de la curva (comparemos los dibujos A y B de la ilustración 6). De no ser así la curva se encontraría a uno de los lados de una línea recta *L* que pasaría por los puntos *P* y *Q* de la curva; por lo cual, aquellos puntos de *L* que

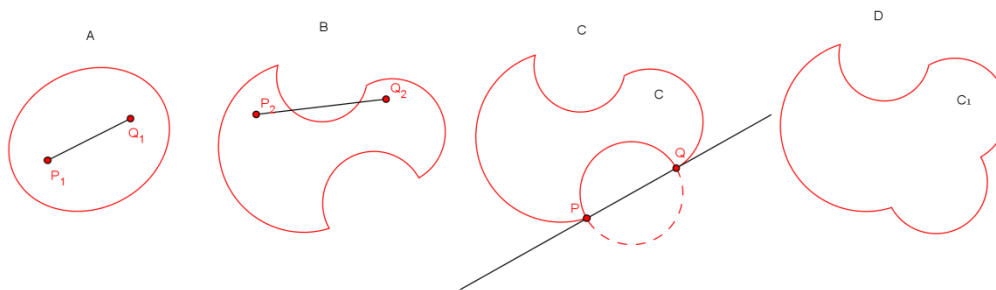


Ilustración 6: Transformación de una curva no convexa en una curva convexa. (Hildebrandt & Tromba, 1990)

encuentran entre P y Q no pertenecen a la curva C , véase el dibujo C). En tal caso, como se indica en el dibujo D podríamos construir una nueva curva C_1 , que abarcara un área mayor que la curva C y siguiera teniendo el mismo perímetro. Tal conclusión contradice, sin embargo, la hipótesis de que C abarca máxima área. Por consiguiente, nuestra curva solución a de ser convexa.

Seguidamente elegimos sobre la curva convexa C dos puntos R y S , de modo que dividan a C en dos arcos de igual longitud, C_1 y C_2 . La línea recta trazada por R y S divide el interior en dos piezas B^1 y B^2 , como se muestra en la figura 7.

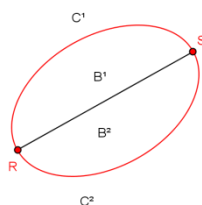


Ilustración 7: Una curva convexa dividida por dos puntos, R y S en dos arcos de la misma longitud. (Hildebrandt & Tromba, 1990)

La propiedad optimal de la curva C implica que B^1 y B^2 tengan la misma área. Podemos ver que así es. Supongamos, por ejemplo, que B^1 tuviera un área mayor que B^2 . Entonces, si reflejásemos la región B^1 respecto del segmento rectilíneo RS , obtendríamos una nueva región, la imagen simétrica de B^1 como vemos en la ilustración 8.

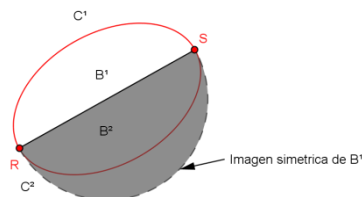


Ilustración 8: Simetrización de una curva convexa. (Hildebrandt & Tromba, 1990)

La unión de B^1 con su imagen reflejada formaría entonces una figura de área mayor que la abarcada por C , mientras que la longitud de su perímetro seguiría siendo igual a la de C . Se tendría entonces, una contradicción con carácter óptimo de la curva C ; por consiguiente, las áreas de B^1 y de B^2 han de ser iguales.

Para demostrar que C es una circunferencia, será suficiente ahora demostrar que C^1 y C^2 son semicírculos. Volveremos a razonar nuevamente por contradicción.

Supongamos que uno de los dos arcos —el C^1 , pongamos por caso— no fuera un semicírculo. Entonces un teorema clásico atribuido a Tales implicaría la existencia sobre el arco C^1 de un punto A_1 tal que el ángulo que el triángulo $R_1 A_1 S_1$ tiene en el vértice A_1 no es de 90° . Imaginemos ahora que los lados $A_1 R_1$ y $A_1 S_1$ pudieran moverse gracias a una bisagra instalada en A_1 , y nos fuera concedido reducir o aumentar el ángulo en la juntura; supongamos, además, que las dos lúnulas mostradas en color gris la ilustración 9, estuvieran rígidamente ligadas a los brazos del ángulo, de modo que al abrirlo o cerrarlo se moviera con ellos.

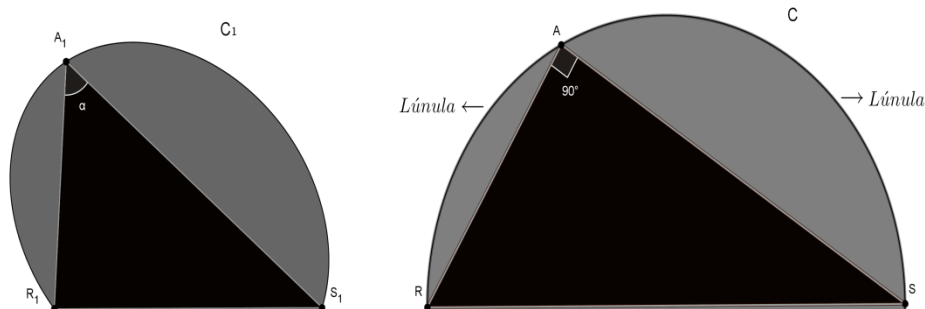


Ilustración 9: Razonamiento para completar la demostración de la propiedad isoperimétrica de la esfera.
(Hildebrandt & Tromba, 1990)

Podríamos entonces cambiar la apertura de la bisagra desde el ángulo primitivo α hasta un ángulo de 90° , lo que haría aumentar el área del triángulo $R_1 A_1 S_1$. La nueva figura, juntamente con las lúnulas a ella ligadas, tendrían mayor área que la antigua, la que poseía ángulo α en A_1 . Empero el área de primera figura era, como hemos visto, la mitad de la abarcada por la curva C en su interior. Por consiguiente si reflejásemos la nueva figura respecto de la curva R y S y la unificásemos con su imagen reflejada, obtendríamos un dominio del mismo perímetro que C , pero de mayor área. Esto no puede ser; por consiguiente, el arco C^1 ha de formar un semicírculo. Se deduce de igual manera que C^2 ha de formar un semicírculo y, por ende, que C constituye una circunferencia.

Hemos demostrado así que la única solución que el problema isoperimétrico puede tener es una circunferencia. (Hildebrandt & Tromba, 1990)

3.3.2 El teorema de Herón

Pierre de Fermat había anunciado, previamente, que la luz viaja a diferentes velocidades en diferentes medios y que el camino que la luz escoge es el que toma menos

tiempo. Maupertuis adicionó a este principio de menor tiempo, la existencia de una cantidad presente en los eventos de la naturaleza llamada acción que siempre es mínima. Miremos una situación que requiere del principio de Fermat para la obtención de una solución satisfactoria del mismo.

Supongamos que un juego de niños consiste en salir de un punto A tocar una pared y luego llegar al punto B en el menor tiempo posible. (Ver ilustración 10)

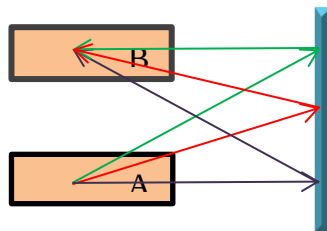


Ilustración 10: Ilustración principio de Fermat

Como se observa en la ilustración 10 los niños pueden seleccionar varios caminos para llegar al punto B, La pregunta es ¿cuál de todos ellos permite recorrer la distancia en el menor tiempo posible?

Si se tiene en cuenta el principio de Fermat, la luz brindaría el camino más rápido. Esto último es importante aclararlo: *“la luz no toma el camino más corto sino el más rápido”*. Analicemos las condiciones presentes en esta situación. Primero, el medio donde se desarrolla el juego es homogéneo, segundo como es un medio homogéneo la luz (como la solución óptima para llegar más rápido al punto B) se propaga en línea recta y si tenemos en cuenta una de las definiciones de la línea recta esta trayectoria sería la del camino más corto. Pero como puede observarse la trayectoria que debe seguirse en el

juego no corresponde a una línea recta, esto último avalado con el primer postulado de Euclides: *por todo par de puntos pasa una recta*” (Stewart I. , 1975).

En el juego los niños deben salir del punto A, tocar la pared y llegar al punto B, lo que indica que el camino a seguir está descrito por tres puntos no colineales, pero a pesar que el camino no corresponde a una línea recta la luz elegirá el camino más corto, ¿Por qué?. Antes de responder a este interrogante es necesario mencionar que este tipo de situaciones se enmarcan dentro de lo que se conoce como el principio de reflexión de la luz el cual tiene dos reglas fundamentales, a saber:

- ✓ El plano de incidencia del rayo coincide con su plano de reflexión
- ✓ El ángulo de incidencia del rayo es igual a su ángulo de reflexión

Con base en estas dos reglas el sabio Herón de Alejandría propuso una ley más fundamental para el principio de reflexión: *la luz ha de tomar el camino más corto*.

Demostración:

Dado que la línea recta es la más corta que une dos puntos, podemos suponer que el camino más corto está compuesto por segmentos rectilíneos. Supongamos que el camino más corto toque a la recta L en el punto F. Para hallar F, tracemos la perpendicular desde C hasta L y sea D su pie en L. Marquemos sobre esta perpendicular, por debajo de D, una distancia igual a CD. Queda así determinado un punto C'. Sea F el punto de intersección de L con la línea recta que pasa por C' y E. Tracemos

seguidamente el segmento rectilíneo que va de C a F, observemos que los tres ángulos definidos en F, α , β y θ son todos iguales. Sea G cualquier otro punto de L. Dado que la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero, se sigue que CFE es el mínimo de los caminos que unen C y E tocando a L. (ilustración 11)

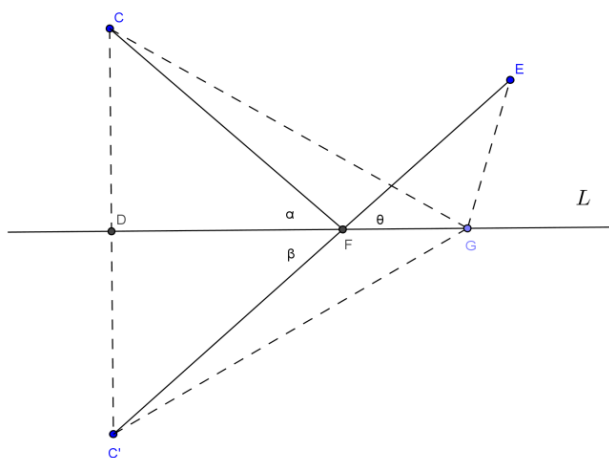


Ilustración 11: Ilustración demostración principio de reflexión. (Hildebrandt & Tromba, 1990)

3.3.3 Johann Bernoulli y La braquistócrona

Continuado con problemas relacionados con máximos y mínimos, (problemas que pueden ser solucionados en casos simples, por medio del cálculo infinitesimal, y en casos más complejos, por medio de técnicas más sofisticadas, registradas, en lo que se conoce como *cálculo variacional*) debemos citar el problema planteado por Galileo Galilei en el año de 1630. Este problema, considerado como el primer problema genuinamente variacional, se plantea de la siguiente forma: “*Dados dos puntos A y B en un plano vertical hallar el camino AMB por el que una partícula móvil M, descendiendo por su propio peso, iría de A a B en el menor tiempo posible*”. (Castro, 2001, pág. 130).

Ya en su momento, Galileo Galilei había ofrecido una solución, aunque equivocada a este problema. Según él, la curva solución correspondía a un arco de circunferencia. Como ya se aclaró, anteriormente, su solución era equivocada, y el problema planteado por él, permaneció en el olvido por más de seis décadas. Hay que esperar, entonces, hasta junio de 1696, para que este problema fuera revisitado por los miembros de la comunidad matemática. El primero en reformularlo fue, nada más y nada menos que: Johann Bernoulli, el mejor geómetra de su tiempo, quien junto a Jacob Bernoulli, su hermano mayor, se encargarían de la difusión y aplicación del nuevo cálculo de Leibniz en la Europa continental.

Johann, había propuesto, a los matemáticos que quisieran abordar el problema, entregar la solución del mismo, antes de terminarse el año de 1696. En palabras del propio Johann, el problema queda explicado de la siguiente manera:

“Entre las infinitas curvas que unen los dos puntos dados o que pueden dibujarse del uno al otro, elegir una tal que si la curva se reemplaza por un tubo delgado o ranura en los que se coloca una pequeña esfera y se deja caer, entonces esta esfera pasaría de un punto al otro en el tiempo más breve posible”. (Castro, 2001, pág. 130).

Debido a que la solución a este problema, consiste en encontrar la curva que da el tiempo mínimo de descenso, (donde la gravedad es la única fuerza considerada), Johann llamó a esta curva braquistócrona, palabra de origen griego que significa tiempo mínimo. El primero en darle solución, fue el matemático alemán Wilhelm Gottfried Leibniz, le siguieron Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, el marqués L'Hôpital e Isaac Newton. La

curva solución a este problema, consiste en un arco de cicloide, es decir: “*la curva que describe un punto del borde de una circunferencia, mientras la circunferencia rueda sobre una recta sin deslizarse*”. (Odifreddi, 2006, pág. 78).

Demostración

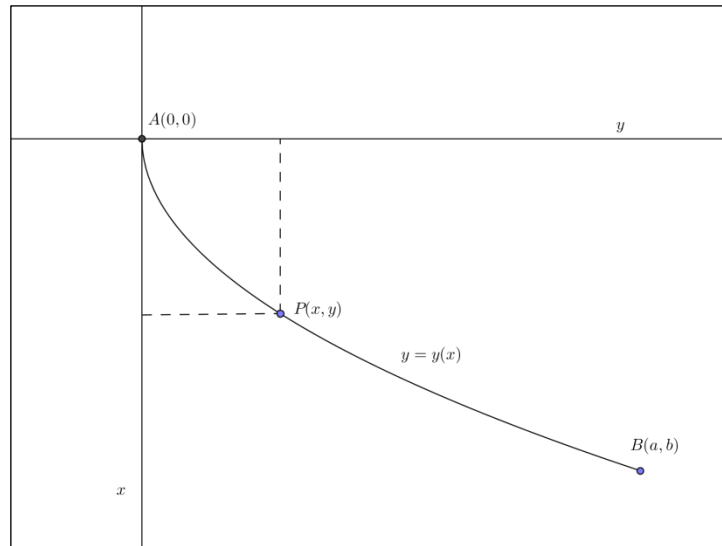


Ilustración 12: El problema de la braquistócrona. (Cerde, 2012)

Consideremos los puntos A y B. El punto A ubicado en el origen de coordenadas y el punto B ubicado en (a, b) , ambos en un plano vertical. En la figura anterior se rotó los ejes 90° en sentido horario. Sea s el arco de curva que une A con B e imaginemos una partícula que se desliza a través de s . La velocidad de la partícula en un punto P cualquiera del arco de curva, está determinada por la siguiente expresión

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.3)$$

Al despejar dt tenemos

$$dt = \frac{ds}{v} \quad (3.4)$$

Si integramos en ambos miembros de la igualdad

$$t = \int_0^a \frac{ds}{v} \quad (3.5)$$

A continuación expresaremos ds y v en términos de x y de $y(x)$

La energía cinética de la partícula en el instante inicial es nula, debido a que la velocidad en ese momento es igual a 0, por otro lado la energía cinética de la partícula en un punto P cualquiera es $\frac{mv^2}{2}$. Como el trabajo efectuado por la acción de la gravedad para mover la partícula desde el punto A hasta un punto P cualquiera es mgh , y al suponer que no existe rozamiento, aplicamos el principio de conservación de la energía, y obtenemos

$$mgx = \frac{mv^2}{2} - \frac{m0^2}{2} \quad (3.6)$$

$$mgx = \frac{mv^2}{2} \quad (3.7)$$

Por lo tanto al despejar v que es uno de nuestros propósitos, esta queda relacionada por la siguiente expresión

$$v = \sqrt{2gx} \quad (3.8)$$

En cuanto al diferencial ds , supongamos dos puntos P y Q . El primer punto P con coordenadas (x, y) , mientras que el punto Q con respecto a P tiene coordenadas $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Sea Δs la variación de pasar del punto P al punto Q

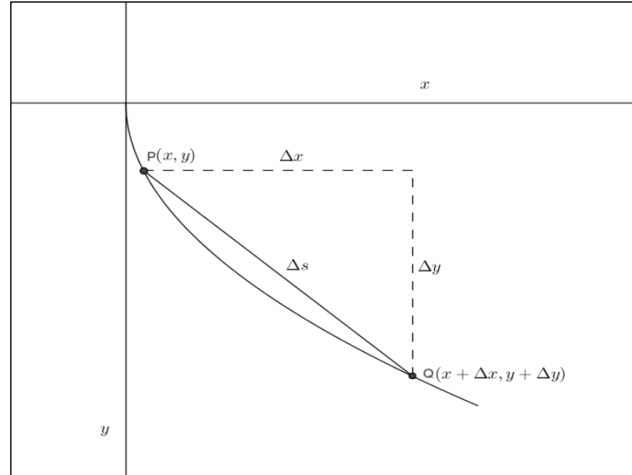


Ilustración 13: Variación de la longitud del arco de curva. (Cerda, 2012)

y consideremos Δx pequeño, por el teorema de Pitágoras Δs es aproximadamente igual a

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (3.9)$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (3.10)$$

Multiplicando la raíz por el factor $\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2}}$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2}} \quad (3.11)$$

$$\Delta s = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2}} \cdot \sqrt{(\Delta x)^2} \quad (3.12)$$

$$\Delta s = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \Delta x \quad (3.13)$$

$$\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad (3.14)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad (3.15)$$

Si se toma el límite cuando Δx tiende a cero, entonces

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.16)$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.17)$$

Si sustituimos (3.17) y (3.8) en (3.5) se tiene que el tiempo que tarda la partícula de ir del punto A al punto B por medio de la trayectoria definida por la función $y(x)$ viene dada por

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gx}} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{2gx}} dx \quad (3.18)$$

Por último el problema consiste en hallar una curva $y = f(x)$, que pasa por los puntos A y B y hace mínima la integral planteada en (3.18). Si se tiene en cuenta lo anterior, reescribimos convenientemente (3.18) de la siguiente forma

$$T[y(x)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gx}} dx \quad (3.19)$$

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{x}} dx \quad (3.20)$$

Como queremos encontrar un extremal (en este caso un mínimo) aplicamos la condición de Euler al integrando de (3.20), al que asignaremos la letra F .

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (3.21)$$

Como F depende únicamente de x y de $y'(x)$ entonces utilizamos, de la condición de Euler, la siguiente relación

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (3.22)$$

Si se tiene en cuenta lo planteado en (3.22) entonces es de suponer que $F_{y'} = K$, es decir igual a una constante, como

$$F_{y'} = \frac{y'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \quad (7.23)$$

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = K \quad (3.24)$$

Si hacemos $K_1 = \frac{1}{K}$ entonces $K = \frac{1}{K_1}$, y sustituimos en (3.24), obtenemos

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = \frac{1}{K_1} \quad (3.25)$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\frac{[y'(x)]^2}{x(1 + [y'(x)]^2)} = \frac{1}{K_1^2} \quad (3.26)$$

$$\frac{[y'(x)]^2}{(1 + [y'(x)]^2)} = \frac{x}{K_1^2} \quad (3.27)$$

$$K_1^2 [y'(x)]^2 = x + x[y'(x)]^2 \quad (3.28)$$

$$K_1^2 [y'(x)]^2 - x[y'(x)]^2 = x \quad (3.29)$$

$$(K_1^2 - x)[y'(x)]^2 = x \quad (3.30)$$

$$[y'(x)]^2 = \frac{x}{K_1^2 - x} \quad (3.31)$$

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x}{K_1^2 - x}} \quad (3.32)$$

A continuación introduciremos una nueva variable independiente θ de la siguiente forma

$$x(\theta) = \frac{K_1^2}{2}(1 - \cos\theta) \quad (3.33)$$

Que se puede obtener por medio de la fórmula para reducir potencias: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

si se tiene en cuenta la siguiente relación

$$x(\theta) = K_1^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (3.34)$$

Al introducir una nueva variable independiente en este caso θ , se puede establecer a partir de la regla de la cadena

$$\frac{dy}{d\theta} = y'(x)x'(\theta) \quad (3.35)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = y'(x) \frac{K_1^2}{2} \sin \theta \quad (3.36)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{x}{K_1^2 - x}} \frac{K_1^2}{2} \sin \theta \quad (3.37)$$

Como x viene dada por (3.33), entonces

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{\frac{K_1^2}{2}(1 - \cos \theta)}{K_1^2 - \frac{K_1^2}{2}(1 - \cos \theta)}} \frac{K_1^2}{2} \sin \theta \quad (3.38)$$

Al realizar operaciones en el denominador del subradical, obtenemos

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{\frac{K_1^2}{2}(1 - \cos \theta)}{\frac{K_1^2}{2}(1 + \cos \theta)}} \frac{K_1^2}{2} \sin \theta \quad (3.39)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)}} \frac{K_1^2}{2} \sin\theta \quad (3.40)$$

Al multiplicar numerador y denominador del subradical por $1 - \cos\theta$ se obtiene

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \frac{K_1^2}{2} \sin\theta \quad (3.41)$$

Al extraer la raíz cuadrada

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \frac{K_1^2}{2} \sin\theta \quad (3.42)$$

Al simplificar

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{K_1^2}{2} (1 - \cos\theta) \quad (3.43)$$

Al integrar

$$y(\theta) = \frac{K_1^2}{2} (\theta - \sin\theta) + K_2 \quad (3.44)$$

Si se tiene en cuenta la condición inicial $y(0) = 0$, entonces $K_2 = 0$

$$y(\theta) = \frac{K_1^2}{2} (\theta - \sin\theta) \quad (3.45)$$

Consideremos las relaciones (3.45) y (3.33)

$$x(\theta) = \frac{K_1^2}{2} (1 - \cos\theta) \quad y(\theta) = \frac{K_1^2}{2} (\theta - \sin\theta)$$

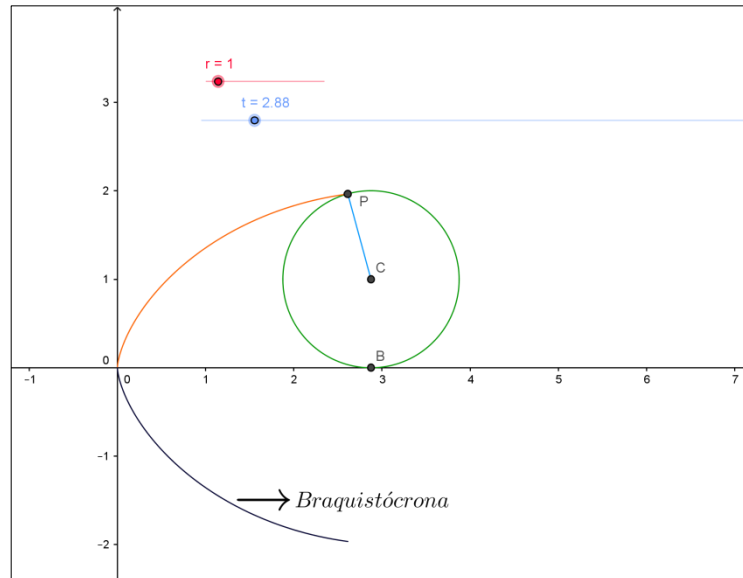
Si hacemos $\frac{K_1^2}{2} = R$, se obtiene

$$x(\theta) = R(1 - \cos\theta) \quad (3.46)$$

$$y(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \quad (3.47)$$

La curva descrita por las ecuaciones (3.46) y (3.47), corresponde a una cicloide que pasa por $(0,0)$.

Ilustración 14: Curva braquistócrona



4. MARCO TEORICO

La explicación de la construcción social del conocimiento matemático por medio del acercamiento sociopistemológico a la matemática educativa, sus origen y desarrollo; que Ricardo Cantoral denomina un “misterio”, es abordado, según su propio autor, de forma genética y evolutiva en el cuarto capítulo de su libro Teoría Sociopistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013). A partir de un marco teórico estructurado y consolidado por medio de categorías y nociones claves como: descentración del objeto, idea germinal, transversalidad y fenomenología intrínseca fue posible realizar investigaciones sobre la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional por parte del equipo de investigación de Ricardo Cantoral.

Estos conceptos, unidos a los de práctica de referencia, noción introducida por Rosa María Farfán “*que permitió explicar los mecanismos constructivos situados en escenarios socioculturales*”, (Cantoral, 2013, pág. 100) y una variante de la actividad humana que localiza la mente en el exterior del individuo introducida por Francisco Cordero, permitieron problematizar el saber y con ello dar inicio a un programa de investigación que tenía como objetivo abordar problemas relacionados con distintos escenarios de la matemática educativa, y que hasta ese entonces no habían sido identificados. La Matemática educativa es descrita por el autor como: “*una disciplina científica que se encarga del estudio de fenómenos didácticos relacionados con el saber matemático* (Cantoral, 2013, pág. 137)” El autor hace mención a este concepto para observar la diferencia existente entre este; el de Matemática escolar y Matemática, aludiendo a que el primero (Matemática escolar) es una especie de transposición hacia el ámbito escolar de la Matemática, podría entenderse como una recreación de los

descubrimientos realizados a lo largo de la historia de esta ciencia en una comunidad específica. La Matemática es interpretada por el autor como: “Una *rama del saber científico establecido con sólidos criterios de verdad y comunidades internacionales robustas*” (Cantoral, 2013, pág. 137)

Mediante intervenciones en grupos de profesores del bachillerato y de universidad; en áreas de física, Matemática e ingeniería se llevaron a cabo experiencias didácticas limitadas por una práctica, y por lo que se llegó a considerar en ese entonces como una mística. La práctica orientada por un programa de formación y actualización de profesores de nivel superior de educación diseñada por el equipo de investigación en Matemática educativa del Cinvestav-IPN. La “mística” y quizás de allí el hecho de considerar la intervención de la socio epistemología para abordar problemas relacionados con la Matemática educativa como un “misterio”, radicaba en el hecho de creer que era posible la formación de conceptos y procesos matemáticos bajo la influencia de los contextos donde adquieren *significación propia*. Es adecuado mencionar la aclaración realizada por parte del autor con respecto al objetivo de esta primera investigación, la cual consistía en “*analizar procesos de producción del conocimiento matemático cuando estos se guiaban por la transversalidad del pensamiento físico*”, (Cantoral, 2013). Pero aceptar esta transversalidad, que permite hablar de una *racionalidad contextualizada*, implicó analizar la proximidad existente en cuanto la formación de conceptos y procesos matemáticos contruidos a partir de la predicción (noción claramente vinculada con los procesos físicos) y lo analítico (propio de la Matemática). Este análisis encaminó la investigación a considerar las dimensiones socioculturales del saber apartando las relaciones existentes entre sujeto, objeto y contexto desde un punto de vista dialéctico.

Se infiere del texto la existencia de un concepto principal, a partir del cual es posible plantear los demás conceptos y sus características: la práctica social. El autor enfatiza que este concepto no debe entenderse de forma coloquial al afirmar que:

“La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo (no es la práctica ejecutada), sino el motivo de hacer lo que se hace, digamos que norma su accionar (es la orientación de la práctica, es la práctica social)” (Cantoral, 2013, pág. 150). Las prácticas sociales son construcciones sociales que la teoría socioepistemológica ha denominado como “emergentes”, emergentes en el sentido que se han originado de un colectivo, de la sociedad, al igual que muchas otras construcciones sociales como la religión, los decálogos, los juicios morales. Al ser ideados por la sociedad deben estar adaptados a la norma debido a que ella por sí misma es un emergente social, de ahí que las prácticas sociales sean construcciones sociales normadas.

La importancia del concepto de práctica social en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa es fundamental, debido a que, es a partir de él que es posible consolidar el conocimiento matemático en cuanto ofrece las bases para alcanzar la construcción social de este conocimiento. En un sentido amplio la práctica social permite la articulación entre el conocimiento y la sociedad, debido a que transforma y orienta la actividad humana como un acto social, a su vez que direcciona la construcción del conocimiento matemático a partir de la actividad humana, se enfatiza de manera constante en esto último, es decir: existe conocimiento en tanto es aceptado y construido en sociedad. Para comprender en mayor medida las prácticas sociales es indispensable

mencionar una de ellas, la cual es abordada en este mismo capítulo y es denominada *praediciere*.

Esta práctica social emerge a partir de las consideraciones que se tenían con respecto al surgimiento del cálculo, el cual se debía, no a lo que generalmente se cree que permitió su origen; como el concepto de infinitesimal, limite, función, entre otros, si no, a la existencia de espacios que permitieron la construcción del conocimiento matemático es decir al trasfondo de su constitución. A su vez está relacionada con fenómenos del movimiento de los cuerpos en el espacio o de la mecánica de medios continuos. En general este esquema interpreta el todo a partir de la parte. El autor con respecto al *praediciere* plantea: “*El praediciere quedaría caracterizado como: la acción intelectual del sujeto epistémico sobre los datos fácticos para establecer los patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse*” (Cantoral, 2013, pág. 109)

Por medio del método de investigación seguido por el grupo de investigación de Ricardo Cantoral, se identificaron tres niveles de evolución del *praediciere*: esquema, modelo y teoría.

El primer nivel: el *praediciere* como esquema permitió, a partir de la observación de los atributos inherentes a los cuerpos, la elaboración de tablas numéricas, y la anticipación por medio de la interpolación y extrapolación de los datos obtenidos, predecir resultados de la experiencia realizada. Situó el pensamiento humano en un nivel de preconcepción es decir el nivel donde se establecen los principios.

El segundo nivel el: praediciere como modelo, es una evolución del primer nivel donde se estableció un principio a partir de la observación de los hechos. Este principio se organiza en una estructura matemática precisa, que se consolida con la evolución histórica de las ideas. Para esta práctica en particular, las ideas concernientes con el movimiento y la relación de este con otras magnitudes físicas como el tiempo, la posición, velocidad y aceleración.

El tercer nivel: el praediciere como teoría es posible solo si los dos primeros niveles han sido ubicados en un marco racional de organización. Una vez posicionado es posible que el modelo evolucione por medio de corolarios, axiomas, teoremas, procedimientos. A partir de su consolidación esta presentación de las nuevas ideas, como lo denomina el autor, se constituyen en la base de los diversos esquemas educativos.

La importancia de estos tres niveles radica en que permitieron crear un vínculo entre conocimiento y saber, el conocimiento depende de las experiencias vividas y el saber lo define como el conocimiento puesto en uso. El uso como noción, permitió a la teoría socioepistemológica iniciar la problematización del saber desde una perspectiva histórica y dialéctica, logró hacer la transposición de la noción psicológica de adquisición por aprendizaje que privilegiaba el sentido estático del conocimiento, al estudio del conocimiento puesto en uso, que como se indicó anteriormente corresponde al estudio del saber. Paralelo a la noción de uso se encuentra la de usuario y la de contexto; la interacción de las tres garantiza la existencia una práctica de referencia que el autor describe como “*La acción material e ideológica de un paradigma*”.

Para comprender el concepto de conocimiento el autor menciona que “*es una tendencia hacia una disposición para hacer (función pragmática) y para decir (función discursiva)*” (Cantoral, 2013, pág. 145), de igual forma menciona que debido al uso que se dio a este concepto en el lenguaje, su propósito fue re direccionado a cumplir una función de sujeto es decir se sustantivó, por ello para restablecer al conocimiento como tal, comprender su fundamento, su funcionalidad y verdadero propósito era necesario asimilarlo como acción; es decir conocer.

El conocer como noción de partida del conocimiento permite recuperar el objetivo de este; que necesariamente se manifiesta en cuanto se use en alguna situación específica. El uso del conocimiento desde el punto de vista sociopistemológico, da sentido al conocimiento y lo proyecta para configurar otro concepto fundamental en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa: el de saber. Esta transición del conocimiento al saber es expresión del aprendizaje como construcción social del conocimiento y de esta manera queda definido el saber cómo el conocimiento puesto en uso.

Se señala que el estudio minucioso del saber fue una innovación obtenida a partir de los estudios emprendidos por el equipo de investigación de Ricardo Cantoral, y a partir de este descubrimiento fue posible atender las múltiples dimensiones del saber, soslayando las relaciones que hasta ese entonces habían permanecido estandarizadas y que fueron la base para el estudio de fenómenos didácticos. Estas relaciones que fueron reemplazadas por el estudio minucioso del saber fueron: las relaciones entre profesores,

alumnos y conocimiento, como el estudio de las restricciones institucionales de tipo pedagógico. Este singular tratamiento del saber permitió desligar la Matemática educativa de orientación socioepistemológica de la pedagógica, de la educación, sociología y psicología, orientándola como una “*disciplina científica emergente de naturaleza sistémica*”, (Cantoral, 2013, pág. 97). Es de naturaleza sistémica en cuanto permite el estudio de los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento (fenómenos didácticos) desde una perspectiva múltiple. Involucra el estudio y la interacción entre: epistemología, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización; todos ellos orientados hacia la enseñanza.

Como se indicó al principio, el concepto de práctica social es fundamental en el desarrollo de las distintas fases que han dado cuerpo la socioepistemológica en general, y la teoría socioepistemológica de la matemática educativa en particular, por esta razón continuaremos con el desarrollo de las ideas que han fundamentado los principios de la socioepistemología, es decir con aquello que es particular a este campo, proporcionando las características esenciales que han permitido ubicarla y asimilarla para el soporte en diversas investigaciones.

Existen cuatro principios sobre los que se consolida la socioepistemología: el principio de racionalidad contextualizada, el principio de relativismo epistemológico, el principio de la resignificación progresiva o la apropiación situada y el principio normativo de la práctica social. El principio normativo de la práctica social: está fundamentado en el hecho de asumir las prácticas sociales como orientadoras y generadoras del conocimiento. La construcción de una práctica, en general, depende a su

vez de una práctica de referencia; asumida esta, como el marco material e ideológico de un paradigma, es decir está regulada por lo ideológico, disciplinar y cultural. Por otro lado depende de las normas dictadas a partir de la práctica social. Esta última caracterización de la práctica permite definir la función de la misma, en tal caso su función debe ser normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva. Por última, y para aclarar aún más el concepto de práctica social citaremos las características de esta, las cuales son descritas por el autor de la siguiente forma:

“Debo señalar que las prácticas sociales se caracterizan por ser insustanciales, pero inferibles. Permanentes aunque no estáticas. Normativas pero no mandatorias o determinísticas. Se expresan en los planos individuales, colectivos e históricos. Son el producto de un análisis, no de una observación” (Cantoral, 2013, pág. 156)

El principio de la racionalidad contextualizada: Este principio se fundamenta a partir del contexto en el cual se desarrolla el saber, que inevitablemente influirá en la relación que se establece entre este y el sujeto. En segundo lugar la apropiación de una epistemología que el autor denomina “de partida” y que está estrechamente vinculada al individuo, a la cultura y al contexto del cual hace parte el individuo. Para el establecimiento de este principio se hizo necesaria una revisión detallada de la racionalidad como concepto. No es adecuado asimilar la racionalidad tal cual se ha asimilado tradicionalmente, esto en consonancia con las características de la Teoría, debido a que al ser de carácter social, no era permitido ubicar la racionalidad como un método regido por reglas abstractas y universales, que no consideran los contextos

específicos en los cuales se realizan los análisis de los procesos o actividades que desencadenan en prácticas sociales. Lo anterior apoyado desde investigaciones de carácter psicológico y filosófico. En síntesis el contexto influye en la manera como debe actuar la racionalidad, convirtiendo al conocimiento en un producto sociocultural, caracterizado por la sociedad que lo origina, organiza y construye.

El principio de relativismo epistemológico: El autor (Cantoral, 2013) define en primer lugar el concepto de relatividad, enfatizando en que la verdad es subjetiva y depende de los marcos de referencia en los cuales se sitúen las circunstancias sobre los cuales se desea lanzar un juicio de verdad. Menciona los dos grandes antagonistas por medio de los cuales se han abordado las circunstancias y los juicios de verdad de la naturaleza social: el objetivismo y el relativismo. La diferencia entre ambos radica en la manera como es visto el sujeto y el contexto donde se experimenta. Para el objetivismo se soslaya la importancia de estos dos entes involucrados en el proceso mientras; que para el segundo su influencia e importancia para obtener un juicio de verdad es vital. Si se tiene en cuenta la manera como la teoría socioepistemológica de la Matemática educativa aborda el saber, el subjetivismo es la posición adecuada para obtener un juicio de verdad. Sin embargo el autor demarca que si bien el subjetivismo es apropiado para analizar los sentidos de verdad, ello no implica que se deban aceptar la diversidad de opiniones frente a determinado hecho. De este principio se desliga un hecho importante para la Matemática educativa: el hecho de no acertar en un juicio de verdad, debe ser visto como un obstáculo mas no como un error por parte del alumno, textualmente el autor señala: *“el paso del error al obstáculo fue el gran salto de la Matemática educativa”* (Cantoral, 2013, pág. 160). Para la teoría socioepistemológica todos los saberes son válidos: el

popular, el saber técnico, el saber culto, es a partir de su conjunción que se genera la sabiduría universal.

El principio de la resignificación progresiva: El término clave en este principio es el de símbolo. Por medio de él es posible significar al objeto, por medio de la significación es posible que los símbolos adquieran sentido. Desde la epistemología genética los significados construidos se derivan de la interacción manifiesta entre sujeto y objeto por medio de una acción, que deriva en un primer significado. Una vez establecido este primer significado, se somete de nuevo a una nueva situación que conlleva a adquirir una resignificación del saber propuesto inicialmente, que permite la producción de nuevos conocimientos.

Como enfoque metodológico la teoría socioepistemológica de la Matemática educativa, plantea la acertada estrategia de estudiar los mecanismos de difusión institucional del saber; registrado este, en los textos escolares de la época en la cual fue conformado el conocimiento. De esta forma se plantea una línea metodológica distinta a la seguida por las investigaciones de corte histórico y psicologista, debido a que tanto la una como otra no daban importancia a estos medios de difusión, al no garantizar, según estos lineamientos, resultados idóneos por tratarse de información claramente contextualizada en otra época. A partir de lo anterior Ricardo Cantoral sugiere el análisis de las producciones intelectuales originales, de los científicos del siglo XVII y XVIII, en particular en ámbitos físicos de fenómenos de flujo, el objetivo principal de este análisis es identificar y establecer las estrategias formales e informales seguidas por los intelectuales de aquel entonces que propiciaron la construcción de conocimiento

matemático. Surgen diferentes trabajos a partir del análisis de la obra de: Isaac Newton en lo referente a fenómenos de cambio.

Centrados en la misma metodología pero tratando un nuevo objeto: la serie de Taylor, se concluyó que debido al tratamiento de este objeto en diversos contextos socioculturales se logra su constitución evolucionando a partir de estos acompañamientos.

5. METODOLOGÍA

5.1 Enfoque epistemológico

A partir de las apreciaciones realizadas por Gisela Montiel y Gabriela Buendía, con respecto al esquema metodológico bajo el cual deben orientarse las investigaciones desarrolladas con un enfoque socioepistemológico, y que fue considerado para sus respectivas investigaciones, se presenta a continuación los elementos característicos de este esquema. Antes, es oportuno indicar que uno de los objetivos de las investigaciones que se fundamentan bajo un enfoque socioepistemológico, es “*entender y comprender, al seno de la matemática educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción y transmisión del conocimiento matemático*” (Montiel & Buendia, 2011, pág. 444). Especificar los fenómenos es relevante dentro de este enfoque teórico debido a que es considerado como su objeto de estudio y, por otro lado, su importancia radica también, en un principio fundamental: la problematización del saber. Esta problematización del saber se sustenta debido a que la matemática puede ser vista como un *actor de la unidad de análisis*, en la que es adecuado indagar sobre el rol institucional que ha desempeñado la matemática en el quehacer educativo (un conocimiento estático que debe ser aprendido). De esta forma se da especial atención al uso de los contenidos matemáticos, los cuales pueden ubicarse en distintos escenarios. Para este trabajo en particular se considerará la experimentación con diseños no tradicionales, aunque también se pueden aceptar escenarios como el histórico, el profesional, el cotidiano, entre otros. Con la mención de la noción de uso, es posible hablar de otra noción que es considerada como una unidad de análisis en las investigaciones socioepistemológicas, y que permite la problematización del saber: La noción de *resignificación*, de esta forma

“hablamos de resignificación para referirnos al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos, esto es los significados que subyacen a la actividad y no exclusivamente al objeto matemático” (Montiel & Buendía, 2011, pág. 444). La problematización del saber cumple otro objetivo importante: *“Identificar aquellos significados y procesos de significación que le son propios al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos”* (Montiel & Buendía, 2011, pág. 444).

Es a partir de la identificación de los significados y procesos de significación que es posible la construcción del conocimiento matemático, con la singularidad que deben identificarse en los ambientes que le son propios a aquellos que interactúan en la actividad. La construcción del conocimiento matemático está orientada, por lo que se ha dado a conocer como práctica social:

“La práctica social no es lo que hace en si el individuo o grupo (no es la práctica ejecutada), si no lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (es la orientación de la práctica, es la práctica social)” (Cantoral, 2013, pág. 150)

El esquema presentado a continuación es una representación del modelo original presentado por Gisela Montiel y Gabriela Buendía, está constituido por nodos que pueden interpretarse como *momentos* o *fases* de un instante de la investigación y que contribuye de forma significativa al estudio global de la misma. (Ver ilustración 15).

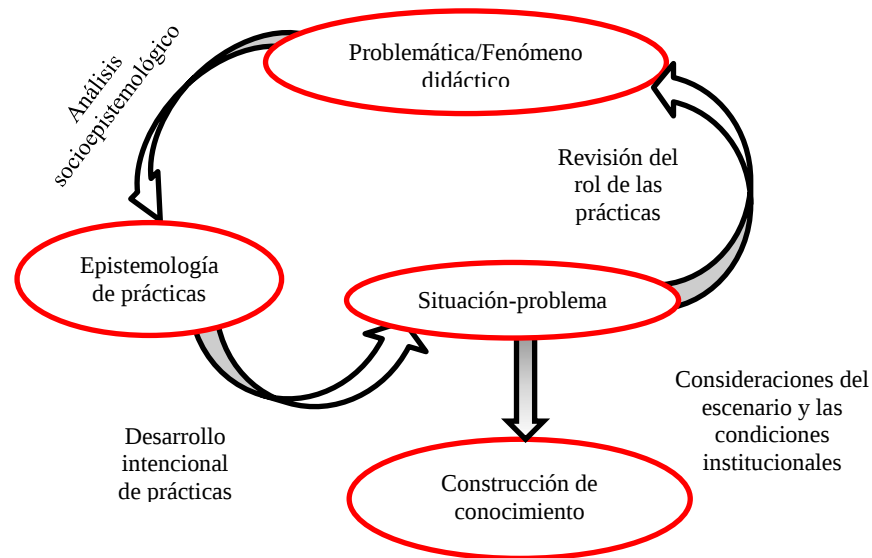


Ilustración 15: esquema metodológico. (Montiel & Buendía, 2011)

La presente investigación se situaría en el nodo

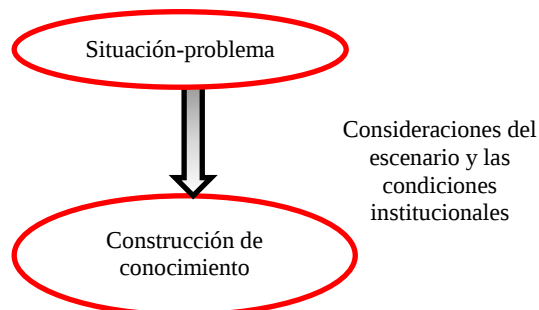


Ilustración 16

Debido a que se plantea como situación problema: la falta de metodologías que permitan generar espacios para evidenciar en el aula de clase, que los conceptos matemáticos pueden llevarse a un plano distinto del abstracto. En cuanto a la construcción del conocimiento, las diferentes prácticas que se desarrollaran en el

laboratorio generaran conclusiones y conjeturas relacionadas con el principio de mínima acción y la optimización matemática.

5.2 Método

Esta propuesta se enmarca dentro de los parámetros de una investigación cualitativa dado que es posible articularla de forma adecuada con los lineamientos del enfoque socioepistemológico descrito anteriormente, dado que *“la investigación cualitativa se plantea como una forma de abordar la realidad, con unas herramientas teóricas y técnicas específicas que serán utilizadas (o no), según la naturaleza del objeto social”* (Abarca, 2012, pág. 11). Si se tiene en cuenta la definición de socioepistemología:

*La socioepistemología (del latín socialis y el griego **ἐπιστημη**, episteme, “conocimiento” o “saber” y **λογος** logos, “razonamiento” o “discurso”), también conocida como epistemología de las prácticas o filosofía de las experiencias, es considerada como una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento. (Cantoral, 2013, pág. 140).*

es posible establecer que los estudiantes que participan de la actividad y los resultados que obtienen, ante las diferentes manifestaciones externas a él, pueden ser interpretados como los principales elementos a tener en cuenta para el análisis de la construcción social del conocimiento en el marco de los grupos humanos. El carácter social delimita tanto a la socioepistemología como a los proyectos de investigación cualitativa debido a que el principal objetivo de esta última es ocuparse *“principalmente*

de las relaciones entre las personas en la sociedad: lo que producen, piensan, dicen y lo que hacen frente y con los demás” (Abarca, 2012, pág. 11)

5.3 Del taller del artesano al laboratorio científico

A los hombres de ciencia suele asociárseles actitudes propias de los ermitaños. Para forjar sus descubrimientos, los científicos crean espacios propios, ya sea mentales o físicos en donde con arduo trabajo logran descubrir nuevas teorías y con ellas, modificar o complementar las ya existentes. Piénsese por ejemplo en uno de los más grandes científicos de los últimos tiempos: Nicola Tesla, quien tenía la capacidad de vislumbrar, en su mente, todo lo que quería realizar mucho antes de llevarlo a lo tangible. Pero mental o físico, este lugar permite dotar a los individuos de método, inculcándonos disciplina y sistematicidad incluso en todo lo que realizamos. El laboratorio es más que un lugar dotado de instrumentos especializados y técnicas para la elaboración o corroboración de teorías, es por sí mismo un espacio donde es posible lograr que los individuos que interactúan en él, evidencien en parte, algunos fenómenos que rigen la naturaleza. Dada su importancia es necesario indagar sobre este espacio y el aporte que realiza, no solo en la instrucción de ciencias experimentales, sino incluso en ciencias abstractas como la matemática, que requieren para su enseñanza y aprendizaje de escenarios donde los estudiantes exploren los conceptos no desde un plano abstracto, sino desde un espacio tangible.

Para comprender el origen y desarrollo del laboratorio debemos, como es natural (en la mayoría de los casos) regresarnos a la antigüedad y registrar los descubrimientos

realizados por la cultura griega. Antes de ello es adecuado mencionar que uno de los procedimientos que dio origen al laboratorio, y que permitió al hombre adquirir un mejor desarrollo y con ello una mejor condición de vida, en lo que respecta a satisfacer sus necesidades básicas, como la alimentación, resguardo y protección, fue la técnica; que es descrita como *“una serie de operaciones definidas de actos coordinados mediante los cuales se obtiene la transformación deseable de las cosas que nos rodean”*, (Ducasse, 1973, pág. 5). Las ideas técnicas, promovidas por las necesidades planteadas en diferentes campos, se relacionó de manera decisiva con la ciencia, unión que permitió manifestar la inventiva humana y por primera vez en la historia la construcción de instrumentos propios del laboratorio científico moderno, *“Estas ideas, unidas estrechamente a las ciencias, tenían por si solas una importancia considerable: gracias a ellas los griegos pudieron construir instrumentos científicos de medición, de nivelación, de mira que más tarde los hombres modernos utilizarían en sus trabajos”*, (Ducasse, 1973, pág. 47) . Pero este desarrollo técnico, promovido exclusivamente por el ser humano se originó, como plantea Pierre Ducasse, en su libro historia de las técnicas, a partir de algunas diferencias fisiológicas que el hombre posee con relación a las demás especies, debido a que este al poseer un cerebro más desarrollado que el de los animales y al contar con una mano cuyo pulgar es oponible a los demás dedos, transformó los diferentes tipos de materiales disponibles en su entorno en instrumentos multifuncionales. Ya el hombre prehistórico había condicionado pedernales, guijarros o huesos, en lo que puede catalogarse como los primeros objetos derivados de la industria humana: las armas. Burdas en estilo o no, estas primeras armas representan, al igual que la construcción de pequeños resguardos que le sirvieron de alojamiento, el paso del hombre

prehistórico por la tierra. Pero la fabricación de armas primitivas o la construcción de espacios para habitar, no significó un gran avance con respecto a las demás especies que habitan el planeta tierra. Si lo fue la manipulación de un elemental: el fuego. Es tan de vital importancia la manipulación y conservación de este elemento por parte del hombre, que la misma mitología desarrollada en el Ática lo registra, al narrarnos como el creador de la especie humana, al menos desde el punto de vista griego: Prometeo, sufrió las inclemencias del todopoderoso Zeus, al dar este (Prometeo) el fuego a los hombres, en parte porque con esta adquisición el ser humano alcanzó cierto grado de divinidad, al poder transformar la materia y con ello dar apertura sin retorno alguno, al progreso de la técnica humana. Aunque es válida y respetable la creencia y fundamentación mística por parte de las culturas antiguas en lo que respecta a la adquisición del fuego por parte del hombre, existen razones para afirmar que este, debido a la interacción con diferentes materiales como la piedra o la madera logro encender, manipular y conservar el fuego por sus propios medios, *“Mucho antes, sin duda, de comenzar la historia humana se utilizó la chispa de pedernal para encender el fuego; aunque parece que el método más antiguo para obtenerlo sea el de frotar la madera”*, (Ducasse, 1973, pág. 13). Fueron muchas las actividades que se desarrollaron con la manipulación del fuego: empezando por la cocción de los alimentos, así como la ambientación del primer lugar idóneo en el cual los hombres lograron reunirse, dando inicio de esta manera a la conformación de los hogares, pilares de la sociedad, que en épocas antiguas se reunían alrededor de la luz y el calor del fuego. La luz suministrada por el fuego ofreció al hombre el primer sistema de seguridad ante la amenaza de fuerzas externas, y no hay que olvidar tampoco, que dio apertura a una de las principales actividades de la especie humana desde el punto de vista

industrial: la metalurgia, técnica que permitió fusionar procesos y herramientas ideadas y concebidas por el hombre en el momento en que esta fue originada, con el objetivo de sofisticar uno de los materiales que utilizaba: el metal. En la prehistoria, por ejemplo, fue destinada exclusivamente a la fabricación de armas. *“la metalurgia es una síntesis. Supone el uso coherente de un conjunto de procedimientos, y no el empleo de una herramienta única. Su verdadero origen es aún desconocido”*, (Ducasse, 1973, pág. 24).

Los avances técnicos primitivos no se limitaron exclusivamente al progreso de la metalurgia, a medida que surgían las necesidades del hombre, estas impulsaron el desarrollo de otras actividades como el transporte, la agricultura, la alfarería. Estas técnicas fueron concebidas en un periodo específico, cuando el clima europeo se aplacó después de los últimos glaciares ocurridos cien o doscientos siglos antes de nuestra era. *“las grandes fieras desaparecieron, los hombres se establecieron en campamentos, fuera de las grutas y cavernas, y comenzaron a cultivar la tierra y a domesticar los animales. En ese periodo, llamado periodo neolítico o nueva edad de piedra, surgieron las bases técnicas de nuestras civilizaciones”*, (Ducasse, 1973, pág. 22). Este breve repaso por el origen de las primeras técnicas desarrolladas por la humanidad, nos muestra la importancia que ha tenido la naturaleza, y en general el medio en cual ha vivido el hombre, para la adquisición de estos procedimientos. Procedimientos que posteriormente asimilara el artesano en su taller y de manera muchos más sofisticada el científico en su laboratorio.

En el párrafo anterior se menciona un oficio: el del artesano. A partir de esta figura nos adentramos en la cultura griega y los aportes que esta civilización realizó con

respecto al desarrollo y evolución de la técnica. Pierre Ducasse en su libro Historia de las técnicas plantea, en el sexto capítulo, lo que él denomina el milagro griego. Este milagro consiste en la conjunción de dos actividades provenientes de Babilonia y Egipto: las técnicas industriales; con los sueños, religiones y mitos desarrollados en estas civilizaciones. Por medio de este vínculo los griegos dan origen a un nuevo espíritu: el de la ciencia, la cual debe estar encaminada a estudiar, enfrentar y solucionar, las diferentes problemáticas acaecidas en el entorno del hombre e incluso las de su propia integridad, si tenemos en cuenta la vulnerabilidad del cuerpo físico. De esta manera la ciencia conforma sus propias leyes que permiten comprender la realidad de los seres vivos y de su entorno. El artesano junto con el espacio en el cual manifestaba su creatividad: el taller; representó una evolución del arte y de la técnica con respecto a lo concebido en el mundo egipcio debido a que:

“cuando pasamos del arte egipcio al arte griego, de los telares y ritos del Nilo a la vida del artesano heleno, observamos una transformación tan profunda que tenemos la impresión de que, al cambiar de espacio hemos cambiado también de humanidad” (Ducasse, 1973, pág. 36).

La manifiesta evolución del arte griego se expresó en la perfección con que el artesano concibió sus creaciones. Esta caracterización está estrechamente relacionada con dos situaciones. En primer lugar con la mística y la religión, debido a que eran los dioses quienes concebían los dones al artesano, por lo tanto los resultados obtenidos debían ser equiparables a los favores recibidos por la divinidad; y en segundo lugar con el desarrollo de técnicas que permitieran obtener resultados afines con la realidad, para eliminar las representaciones impersonales y estáticas del arte egipcio.

La anterior descripción de las técnicas asimiladas y perfeccionadas por la cultura griega del mundo Babilónico y egipcio, se hizo con el objetivo de ubicar históricamente el primer lugar en donde se desarrollaron de manera sistemática los procedimientos con los cuales fue posible obtener herramientas, utensilios y esculturas: el taller. A su vez identificar cuáles fueron los primeros procedimientos que permitieron el nacimiento de la ciencia, que como se describió anteriormente reposan en las habilidades desarrolladas en el arte, la alfarería, la escultura y demás actividades que se concibieron en la antigüedad, *“en efecto, la noción de ciencia pura, creación suprema del genio griego se relaciona con el culto de la belleza y de la verdades científicas, con toda la fuerza demostrativa que les acordamos actualmente, esbozar la conquista de esas verdades en muchos campos y formularlas con matemática exactitud: estos grandes inventos intelectuales nacieron de las viejas técnicas, pero las superaron en profundidad y por lo tanto, en potencia de acción”*, (Ducasse, 1973, pág. 38). Para que estos procedimientos se re direccionaran al ámbito científico era indispensable que surgieran personalidades que cultivaran la ciencia pura descubierta por los mismos griegos. Inspirados de las necesidades establecidas en diferentes escenarios como el campo miliar, la medicina, el transporte, la dotación de los teatros; se originaron ideas técnicas que permitieron concebir inventos y construcciones, las cuales se describirán a continuación. Con este cuadro finalizamos la inspección realizada en la cultura griega, concluyendo de ante mano que esta sociedad exploró el mejor y más amplio laboratorio que existe: el mundo. Aproximándose de manera definitiva a la idea de ciencia pura, y de esta manera modificando la forma de concebir los recursos técnicos e industriales. *“Con la ciencia*

nacida de las libres especulaciones de Grecia, el genio moderno podrá transformar radicalmente la condición industrial de la humanidad”, (Ducasse, 1973, pág. 39) .

Tabla 2: Principales logros técnicos obtenidos en la Grecia Antigua, derivados de la técnica desarrollada hasta ese entonces

Invento	Inventor	Fecha	Origen
“Trust” de molinos de aceite	Thales de Mileto	Siglo VI a.C	Fenómenos meteorológicos
Perforación del túnel de Samos	Eupalinos	Siglo VI a.C	Arte militar
El ancla		Siglo VII a.C	Técnicas del mar
Palanca	Arquímedes	278 a.C	Mecánica
Paloma de madera voladora	Arquitas	Siglo IV a.C	Operaciones técnicas de un ser vivo
Turbina de vapor de reacción	Herón de Alejandría	Siglo I d.C	Neumática
Clepsidra (Reloj de agua)	Perfeccionado por Platón	Siglo IV a.C	Hidráulica

Factores como la esclavitud, muy arraigada en las culturas mediterráneas, fundamentan la idea que se tiene de la inutilidad de los inventos griegos, al menos desde un punto de vista práctico, debido a que la sociedad griega no concibió la sustitución de la energía humana por artefactos mecánicos. Pero independientemente de esta situación, el genio griego estableció, de esta forma, la idea de la ciencia por la ciencia, aislándola de situaciones prácticas, *“De este modo podemos decir que los inventos técnicos de los antiguos, exceptuando tal vez el molino de agua y los instrumentos quirúrgicos, sirvieron más para la observación científica o la curiosidad”* (Ducasse, 1973, pág. 53).

Observación científica y curiosidad, el gran legado griego para la ciencia y sus innumerables alcances.

Conocida es la decadencia institucional producida en occidente por la caída del imperio romano, sus consecuencias ocasionaron un retroceso significativo, en las regiones conquistadas por el imperio y aun en el mismo corazón de este, con respecto a la manipulación de las técnicas concebidas en Grecia y llevadas a la práctica por Roma. El cristianismo fue lo único que pudo llenar el gran vacío que ocasionó la caída de la civilización más grande que había existido hasta ese entonces al menos en occidente. Pero no todo fue desgracia, el gran mérito que se atribuye a la edad media fue el hecho de empezar prácticamente de ceros en lo que se refiere a la reconquista de las técnicas agrícolas, industriales y científicas. “ *Esta época, que solía describirse como un periodo oscuro, intermedio entre el esplendor de la Antigüedad griega y romana y la genialidad renacentista, estuvo en realidad llena de importantes logros, de la que son muestra los progresos en la agricultura, la alquimia, la anatomía y la navegación*”, (Uribe, 2008, pág. 109). Si bien es cierto que la iglesia asumió el rol administrativo de esta época bajo los preceptos del cristianismo, también es cierto que al ser la poseedora del saber de la antigüedad, impulsó el progreso de la sociedad de aquel entonces, empezando por lo más inmediato que podía gobernar: la tierra. “*Las órdenes religiosas prosiguieron metódicamente, en pequeña escala durante los siglos VI a X y, en mayor grado entre los siglos IX y XIII, la obra de colonización agrícola y la adaptación de la tierra*”, (Ducasse, 1973, pág. 64). La reconquista de la tierra revivió el interés por normalizar muchas otras funciones indispensables en la sociedad como: las formas de transporte (innovación para modificar la fuerza de la tracción animal, reinvento o invento de la herradura, adquisición del sistema de enganchar en fila los caballos, mantenimiento y modificación de las rutas),

el comercio (expansión de la economía hacia el este y hacia el norte), la navegación (descubrimiento del timón axial y la brújula, progresos en la cartografía), la industria (progreso de la metalurgia y sus industrias derivadas como la fundición, cerrajería y herrería), la artesanía, entre otras. Esta última reviste particular importancia en cuanto fue la actividad que permitió recopilar y conservar los procedimientos técnicos conocidos en ese entonces, “ *la artesanía de las ciudades, cuyo destino estuvo estrechamente ligado a la conquista y defensas de las libertades comunales, se transformó en depositaria de la técnica medieval y en su más viva expresión.* (Ducasse, 1973, pág. 70) .

¿Podríamos establecer un punto de conexión entre los anteriores oficios y el rol que cumple el científico en su laboratorio? ¿Fue el artesano en su taller quien con sus procedimientos permitió concebir la idea de un sujeto y un lugar de trabajo, en donde se ejecutara de manera sistemática una actividad? Cuando se nombra la figura del artesano quizás se perciba que su función no tenga ninguna relación con la ciencia, antes bien se concibe la idea de un sujeto cuyo objetivo sea el de construir utensilios o herramientas domésticas. Las siguientes afirmaciones declaradas por reconocidos hombres de ciencia pueden hacernos cambiar de opinión.

En primer lugar puede mencionarse al matemático y filósofo francés del siglo XVI, pinero de la geometría analítica: Rene Descartes: quien consideraba en grado sumo las ventajas y beneficios de asimilar el trabajo mecánico debido a su inestimable valor intelectual,

Esta es una filosofía práctica, con la que si conociéramos las fuerzas y las aplicaciones del fuego, del aire, de los astros, de los cielos y de todos los otros cuerpos que nos rodean, con la misma precisión con que conocemos lo distintos oficios de nuestros artesanos, podríamos emplearlos correctamente en todos los usos que le son propios y hacernos dueños y señores de la naturaleza (Ducasse, 1973, pág. 89) .

Se infiere inmediatamente que los artesanos poseían técnicas sofisticadas, con el suficiente mérito para ser asimiladas por los científicos, y con ellas iniciar el estudio de sus propios temas de interés. Por otro lado tenemos la figura del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz quien descubrió, dentro de otras cosas, el cálculo integral, con respecto a la importancia que daba Leibniz al artesano, Pierre Ducasse menciona, “*Leibniz, con perspicacia similar, comprobará más tarde que la técnica por humilde que sea, instruye. El artesano debe estar familiarizado con el modo de tratar la naturaleza y estos conocimientos son en realidad muy superiores a los que se obtiene en los libros*”, (Ducasse, 1973, pág. 90). Por ultimo mencionaremos las ideas que tenía el matemático y físico francés del siglo XVII Blaise Pascal, quien comprendía,

un buen físico, además del talento matemático, debe poseer el arte de manipular la materia, de doblarla con fines definidos. Al aplicar en sus actos las lecciones de la experiencia, debe poseer la técnica de la ciencia como el buen artesano posee las técnicas de la industria (Ducasse, 1973, pág. 91).

Con lo anterior se quiere demarcar que el oficio del artesano sí cumplió cierta influencia en la concepción del laboratorio científico, y en el de la ciencia en general. Si el artesano trabaja en el taller ¿dónde desempeña su labor el físico para manipular la materia? En el laboratorio, espacio donde se manifiesta la creatividad en el ámbito artesanal y científico. Para tal fin está dotado de instrumentos especializados. La concepción de estos instrumentos, cada vez más sofisticados, se dio a medida que progresó la sociedad científica y la técnica industrial, *“basada en la experiencia, y en incesante evolución gracias a mediciones rigurosas, la ciencia exige aparatos de observación, de experimentación y de medición”*, (Ducasse, 1973, pág. 129)

5.4 Medición como práctica social

La construcción del laboratorio de matemáticas, fundamentado en el principio físico de mínima acción, proporciona actividades adecuadas para llevar a la práctica el proceso de medición. Esta práctica, permitirá obtener algunas conclusiones sobre las ideas básicas de este principio. Por lo tanto consideramos relevante definir el proceso de medición y las características más importantes del mismo.

Definición 1: medición:

Es el proceso por el cual se asigna un número a una propiedad física de algún objeto o fenómeno con propósito de comparación, siendo ese proceso una operación física en la que intervienen necesariamente cuatro sistemas: el sistema objeto que se desea medir, el sistema de mediación o instrumento, el sistema de comparación que se define como unidad y que suele venir unido o estar incluido en el instrumento, y el operador que realiza la medición” (Hurtado, 2006)

Existen dos clases de medición: medición directa y medición indirecta; las cuales se definen a continuación

Definición 2: Medición directa:

Se realiza comparando la magnitud que interesa medir con un patrón o con las unidades de una escala material, y contando el número de veces que la unidad está contenida en la magnitud. Por ejemplo para medir la longitud del margen en un cuaderno se realiza una medición con el empleo de una regla (Hurtado, 2006).

Definición 3: Medición indirecta:

Es la que supone medición directa (de algo que no es lo que se mide) y computo. Un ejemplo muy sencillo es la determinación del volumen de una esfera a partir de la medición directa de su diámetro y el empleo de la formula $V = \frac{1}{6} \pi D^3$ (Hurtado, 2006)

Las prácticas que se desarrollaran en el laboratorio, implicaran realizar las dos clases de medición. Por un lado, una medición directa de longitudes y por otro lado la medición de áreas y volúmenes a partir de fórmulas (medición indirecta).

En toda práctica de laboratorio se desarrolla el método científico que se constituye de las siguientes fases:

“observación cuidadosa, reflexión acerca de la hipótesis, predicción de sus consecuencias, planeación del experimento para someter la hipótesis a prueba, diseño del experimento, ejecución del experimento planeado, obtención de resultados y confrontación de los resultados experimentales y las predicciones teóricas para la interpretación de las conclusiones” (Hurtado, 2006)

A continuación se definirán las características principales de estos pasos

El primer paso que constituye al método científico es el planeamiento del problema el cual se define como

Definición 4: Problema: *“cualquier dificultad que no se pueda resolver automáticamente; es decir, con la sola acción de nuestros reflejos instintivos y condicionales”* (Hurtado, 2006)

En segundo lugar se formula la hipótesis que es entendida como

Definición 5: Hipótesis: *“Una suposición comprobable que se basa en conocimiento previo y se destina a dar solución a un problema”* (Hurtado, 2006)

Una vez formulada la hipótesis se realizará la experimentación para verificar que dicho planeamiento puede dar solución o no al problema.

Definición 5: Experimento: *“Es la experiencia científica en que se provoca deliberadamente algún cambio y se observa e interpreta su resultado con alguna finalidad cognoscitiva. El experimento es directriz en la búsqueda de respuestas a los problemas que se plantea el investigador”* (Hurtado, 2006) .

A continuación se describe una manera de planificar experimentos. Esta planificación esta constituida por preguntas asociadas al experimento y que permitirán obtener mejores resultados.

Tabla 3: Planificación de experimentos, elaborada a partir de (Hurtado, 2006)

En cuanto al objetivo	• ¿Cuál es el objetivo del experimento?
En cuanto a las variables	• ¿Cuáles son las variables por investigar? • ¿Cuáles son las más importantes? • ¿Qué rangos de las variables serán necesarios? • ¿Cuántos valores se deberán tomar en los diferentes rangos de operación?
En cuanto al equipo y medio ambiente	• ¿es necesario un ambiente especial para realizar el experimento? • ¿Qué equipo es necesario para la realización del experimento? • ¿Cuál es el equipo disponible? • ¿De qué fuentes financieras se dispone para llevar a cabo el experimento
En cuanto a los instrumentos de medición	• ¿existen comercialmente los instrumentos o se deben fabricar especialmente para el experimento? • ¿Cuál es la exactitud que se requiere para efectuar cada medición? • ¿Qué tanto se apegan las características de los instrumentos al presupuesto asignado? • ¿se calibraron los instrumentos? • ¿Cuál debe ser la respuesta a la frecuencia del instrumento si es medición dinámica?
En cuanto al procedimiento	• ¿Qué procedimiento es el adecuado? • ¿Cuál secuencia se deberá utilizar en la variación de parámetros? • ¿cuáles son los aspectos de seguridad preventiva necesarios si dentro del experimento existe una operación peligrosa?
En cuanto a la evaluación de resultados	• ¿Son confiables los resultados? • ¿Qué tipo de relación existe entre las variables?
En cuanto a la presentación de resultados	• ¿Cuáles son los resultados significativos? • ¿Cómo se van a presentar los resultados?
En cuanto a conclusiones	• ¿satisfacen las conclusiones el objetivo original • De existir discrepancias entre las predicciones y los resultados experimentales

A continuación se describen los objetivos que tienen en común los experimentos, independientemente del problema a partir del cual han sido constituidos fue tomado de (Hurtado, 2006):

- Eliminar los efectos de ciertas variables
- Reducir y controlar el número de variables por investigar
- Realizar mediciones precisas y exactas
- Estimar el error experimental
- Interpretar de forma objetiva los resultados

5.5 El laboratorio de Matemática fundamentado en el principio de mínima acción.

El laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción como escenario para resignificar la optimización matemática, está constituido por cuatro actividades que se han denominado estaciones debido a que conforman un recorrido :

5.5.1 Primera estación: historia de la reina Dido.

Debido a su importancia histórica y didáctica, el problema de la reina Dido se ha convertido en un punto referente para la mayoría de trabajos que tiene como objetivo abordar el cálculo de variaciones y las implicaciones que tiene este, en la formulación del principio de mínima acción. En un sentido histórico es importante debido a que es una leyenda que se remonta al siglo IX a. de J.C, época en la que no se había establecido la matemática de manera formal, inclusive el término matemática no había establecido tal como se entiende en la actualidad, esto solo fue posible en la época de Pitágoras de Samos (siglo VI a. de J.C) en donde el término matemática fue acuñado por los eruditos de la época y a su vez adquirió el matiz de ciencia deductiva, al establecer la

demostración como método para la adquisición de las verdades matemáticas. El hecho que se haya abordado este problema y su solución en aquel entonces, aunque exclusivamente en términos prácticos, demuestra que la humanidad de manera empírica se ha preocupado por abordar problemas de tipo variacional. El empirismo con que fue abordada la solución, ofrece un marco idóneo para su recreación en el aula de clase, permitiendo de esta manera que los estudiantes se acerquen a la idea de figura plana, de forma similar a como lo hicieron en la antigüedad. Se indaga, igualmente, las ideas metafísicas que los antiguos tenían de las figuras geométricas, por ejemplo, con la circunferencia, la cual queda resumida en la afirmación realizada por el filósofo griego Proclo en el siglo V d. de .C: “ *la circunferencia es la primera, la más sencilla y la más perfecta de las figuras* ”.

Lo expuesto anteriormente permite seleccionar la historia de la reina Dido como práctica, en la cual los estudiantes iniciaran la comprensión del principio de mínima acción y la relación que este tiene con el cálculo de variaciones, el cual lo fundamenta matemáticamente. Las actividades que se pueden realizar a partir de la leyenda de la reina Dido son las siguientes:

Dada su enunciación el problema de la reina Dido permite:

- La recreación del espacio donde ocurrió el acontecimiento (desierto de Númida, en el actual sur del Líbano). Esto permite que los estudiantes se ubiquen histórica y geográficamente.

- Paralelo a la recreación histórica y geográfica del lugar, es posible por medio de elementos accesibles, recrear el problema y su posible solución, la cual será abordada por los estudiantes por medio de la experimentación.
- Por medio de esta actividad los estudiantes podrán abordar conceptos geométricos como los de superficie y perímetro de figuras planas.
- Contrarrestar los diversos resultados obtenidos por los estudiantes que son partícipes de la actividad.
- Comprender uno de los primeros principios variacionales: *“La única entre todas las curvas cerradas que hace máxima el área abarcada en su interior es la circunferencia”*

De esta manera la primera estación se plantearía de la siguiente forma

PRIMERA ESTACIÓN: HISTORIA DE LA REINA DIDO

Objetivos

- Conocer el primer problema de tipo variacional registrado en la historia, el problema de la reina Dido (problemas isoperimétricos)
- Resolver el problema de la reina Dido a partir de un fragmento de cuerda de 20 cm, y tomar las respectivas medidas para verificar la solución dada.

Historia

Dido era una princesa fenicia de la ciudad de Tiro (parte hoy del Líbano). El rey Pigmalión, implacable hermano suyo, asesino al marido de Dido, para despojarla de sus posesiones y esta huyó por mar. Cuando Dido arribó a las costas de África, hacia el 900 a. de C; en el lugar que más tarde sería Cartago, quiso comprar al cacique local, el rey Jarbas de Numidia, tierra donde asentarse ella y su gente y donde establecer su nueva patria. Es posible que Dido fuera cicatera, o que el rey Jarbas no quisiera colonias en su país: cerraron el trato con la condición de que la reina no tendría más tierra que la que pudiera encerrar una piel de un buey. Dido sacó el máximo partido de la situación. En primer lugar interpretó la palabra “encerrar”, en el sentido más amplio posible. Se dice que hizo cortar a su gente la piel en finas tirillas, las cuales empalmadas, formaron una cuerda cerrada de gran longitud. Suponiendo que las tirillas tuvieran tan solo un par de milímetros de anchura, tal longitud debió estar entre los 1000 y 2000 metros.

Segundo, Dido extendió el cordel sobre el terreno de modo que encerrase la mayor área posible. Suponiendo que el suelo fuera completamente llano, podemos imaginar que Dido tuvo que resolver el siguiente problema matemático: “Hallar entre todas las líneas posibles de longitud dada, aquellas que encierran una región interior de área máxima” (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 46)

¿Qué solución crees que es la correcta, para que Dido obtenga el mayor terreno posible?

Con el siguiente fragmento de cuerda de 20 cm encierra la mayor área posible y compara tus resultados con los obtenidos por otros estudiantes.

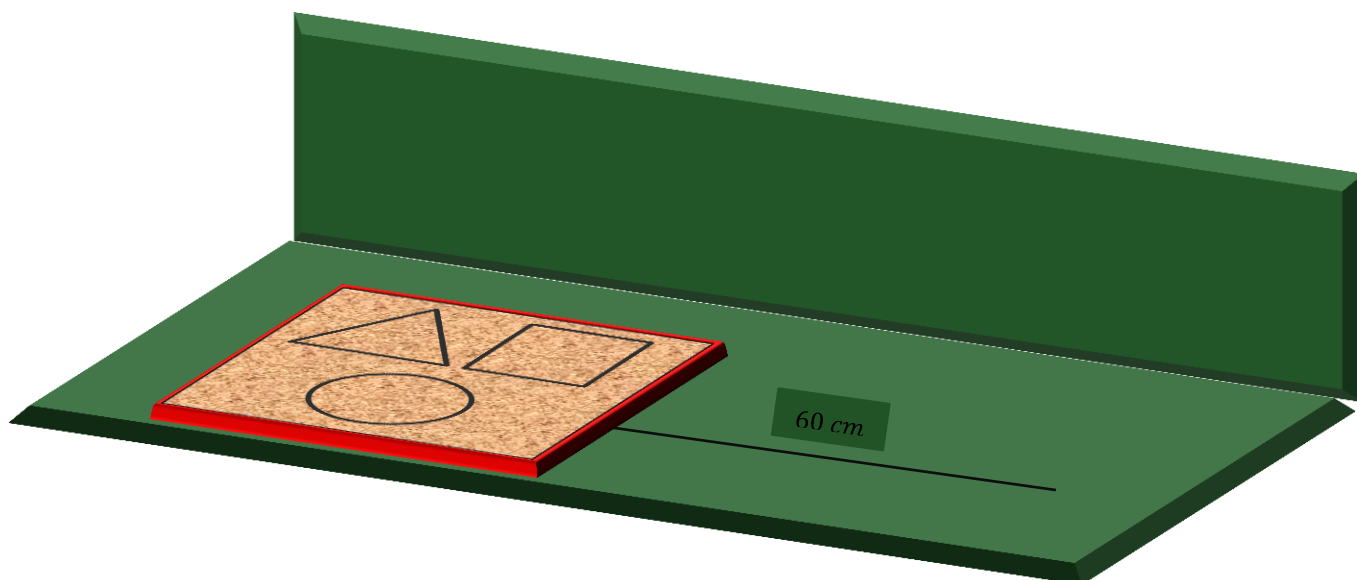


Ilustración 17: Montaje de la estación de la reina Dido

5.5.2 Segunda estación: la esfera

Al igual que lo expuesto anteriormente la segunda estación permite comprender otro de los principios universales donde es posible evidenciar el principio de mínima acción, a saber: “*entre todos los sólidos de volumen dado, la esfera tiene una superficie de área mínima*” (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 150). De la misma forma que la circunferencia la esfera suscitó toda una lista de ideas metafísicas, hasta tal punto de influir incluso, a uno de los más grandes filósofos de la antigüedad: Aristóteles quien afirmaba:

En efecto divinidad y poder divino significan superioridad, significan ser lo más excelso de todo, no ser sobrepasado... por consiguiente solo puede haber Dios, el mismo en todas sus partes, que todo lo ve, lo oye y lo siente. De lo contrario, las diversas partes, serian unas superiores y unas inferiores a otras, y eso es imposible. Así, tal homogeneidad universal de Dios implica que ha de tener forma esférica (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 1)

Es casi unánime que uno de los divertimentos infantiles más populares en todo el mundo; son las burbujas de jabón. Su elaboración no implica mayores recursos, pero su resultado, las burbujas (esferas) implica estar frente a uno de los hechos o principios universales de la naturaleza. ¿Por qué las gotas de agua, los planetas y aun las mismas burbujas de jabón: adoptan una superficie esférica? ¿Por qué no una piramidal, cubica, paralelepípeda, octaédrica, etc.?

El tipo de burbujas que se obtiene al soplar por un contorno cualquiera es simplemente aire atrapado en una solución jabonosa. Mientras no se sople el contorno, se formara una pompa de jabón, que tiene la propiedad de adherirse al contorno independientemente del que sea, ocupando la superficie. Esta propiedad elástica que permite a la pompa de jabón adoptar la superficie limitada por el contorno es denominada tensión superficial, que obliga a su vez a la pompa de jabón tomar la menor superficie posible, cuando no existe contorno alguno la pompa de jabón se adhiere a si misma y en este caso la forma o superficie más pequeña para que suceda es la esfera.

A partir de lo anterior y para evidenciar este principio de mínimo (aunque también existe un principio maximal) de la superficie esférica se plantea a los estudiantes la siguiente actividad.

SEGUNDA ESTACION: LA ESFERA

Objetivos:

- Identificar en la esfera el principio de mínima acción
- Comprobar mediante experimentación el principio de mínima acción presente en la esfera.

Propiedad maximal de la esfera

De todos los sólidos cuya superficie tiene un área prescrita, la esfera es el de máximo volumen

Propiedad minimal de la esfera

En una burbuja de jabón hay una cierta cantidad de aire que se encuentra encerrada en una superficie de área minimal: *“entre todos los sólidos de volumen dado, la esfera tiene una superficie de área mínima*

- Elaborar contornos con alambre que encierren una superficie circular, triangular, cuadrada y pentagonal.

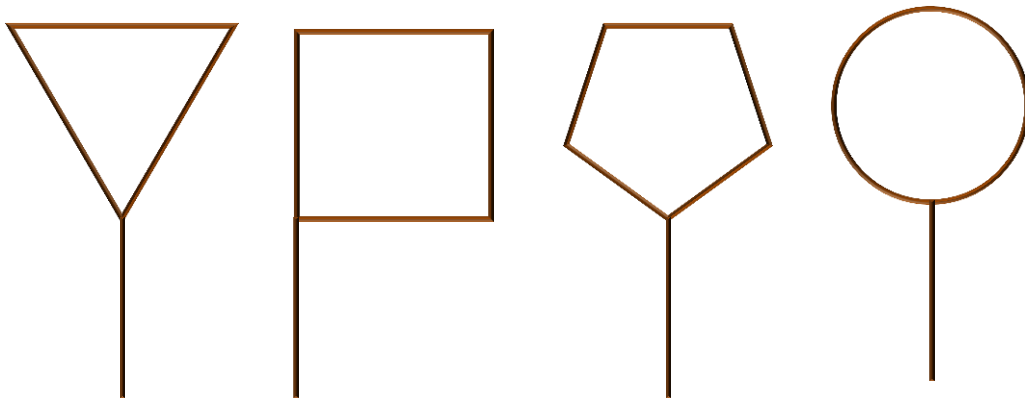


Ilustración 18: Contornos de alambre

- Preparación de la solución jabonosa.
- Y el experimento, que consiste en sumergir los contornos en la solución jabonosa y soplar la pompa de jabón que se forma en el alambre.

El experimento permite plantear las siguientes preguntas a los estudiantes, ¿Qué superficie obtendríamos si el contorno es una circunferencia es decir la forma con la que regularmente se realizan las burbujas de jabón?, Se espera, en la mayoría de los casos la misma respuesta, es decir una esfera. Posteriormente se realiza la misma cuestión pero esta vez para los contornos: triangular, cuadrado y pentagonal. La actividad se realiza con el propósito de verificar el principio minimal y maximal de la esfera, el cual fue descrito anteriormente y el de dar respuesta a los siguientes interrogantes sobre las mediciones que se pueden realizar al obtener los resultados.

5.5.3 Tercera estación: aplicaciones del principio de mínima acción a partir de experimentos con pompas de jabón.

En ocasiones suele realizarse la siguiente pregunta por parte de los estudiantes en clase de matemáticas, independientemente del tema estudiado: ¿Para qué nos sirve aprender estos temas? La anterior pregunta suele ocasionar inconvenientes a algunos docentes de matemáticas, y no es para menos, debido a que en la mayoría de los casos, una respuesta convincente sobre la aplicación de los temas explicados es prácticamente nula por parte de él; y esto se presenta por la falta de marcos de referencia, que en caso de existir, le permitirían a los docentes contextualizar los contenidos matemáticos a ser estudiados. Comprender el principio de mínima acción a partir de las pompas de jabón es una actividad más, pero ¿es posible establecer algún tipo de actividad adicional para evidenciar en otros campos del saber, la aplicabilidad del principio de mínima acción a partir de las pompas de jabón? Existen. Estas actividades están fundamentadas en lo que se considera como conexiones mínimas-enlaces óptimos y en el concepto de superficies minimales.

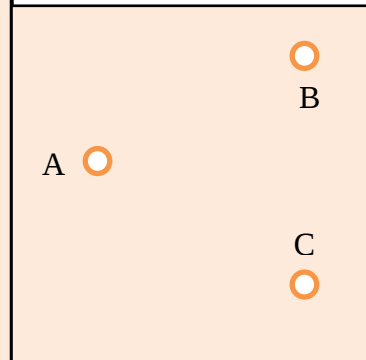
Quizás la mayoría de personas en algún momento se ha enfrentado con un problema de tipo variacional. Uno de los más comunes es el siguiente: Supongamos que tenemos planeado viajar, nos hemos de preguntar cuál es la trayectoria que minimice el tiempo empleado en el recorrido. Puede que existan varias trayectorias pero nos interesa exclusivamente la que minimiza el tiempo. Este problema se encierra dentro de lo que se considera como *conexiones mínimas-enlaces rápidos* y las pompas de jabón con su propiedad minimal ofrece una solución adecuada. Existen más problemas donde se debe minimizar o maximizar alguna situación, pero la situación mencionada anteriormente es

la que se abordara en las actividades que tiene como objetivo: mostrar la aplicación del principio de mínima acción a partir de las pompas de jabón. Es idónea debido a que la mayoría de nosotros en algún momento de nuestra existencia, ha tenido que enfrentarla.

Para la actividad se dispondrá de un dispositivo conformado por dos vidrios colocados de forma paralela entre los que se podrán ubicar fragmentos de madera que simularan los puntos a ser unidos. Una vez dispuestos estos pedazos de madera, se sumergirá en la solución jabonosa y los estudiantes podrán evidenciar el camino que minimiza la longitud total.

EL PROBLEMA DE JAKOB STEINER

Es preciso enlazar tres ciudades A, B y C mediante una red de carreteras. Supongamos que no hay obstáculos, por lo que tenemos libertad de construir las carreteras como queramos, supongamos también que la región circundante a las ciudades es llana. El problema consiste en hallar el sistema de caminos de mínima longitud total. Parafraseando matemáticamente la situación se nos dan tres puntos A, B y C de un plano y se nos pide hallar un punto P, así como caminos que conecten P con A, B y C, tales que la longitud total de los caminos se mínima. Dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, podemos suponer además que estos caminos son rectilíneos.



Para evidenciar las aplicaciones del principio de mínima acción, en otras disciplinas a partir de las pompas de jabón, se muestra la manera como el arquitecto del siglo XX Frei Otto ha realizado diseños a escala de pompas de jabón para crear cubiertas de estadios o de otras edificaciones. Sus diseños se asemejan con las carpas circenses y comparten propiedades como: economía de material, estructuras livianas en

comparación con las construcciones clásicas de edificios, facilidad de desmantelamiento y transporte. La actividad propuesta para visualizar este tipo de superficies consiste en: *“dejar que una película jabonosa se tienda sobre un contorno que tenga la configuración deseada. Si tal película no se rompe fácilmente, se hallara en equilibrio estable; se trata de una superficie minimal, una superficie cuya área es mínima”*. (Hildebrandt & Tromba, 1990, pág. 138).

5.5.4 Cuarta estación: superficies minimales en bastidores poliédricos

En la anterior estación se mencionó el concepto de superficie minimal; “una superficie minimal se caracteriza por tener menor área que cualquier otra superficie cercana tendida sobre el mismo marco” (Hildebrandt & Tromba, 1990). A mediados del siglo XIX Joseph Antoine Ferdinand Plateau físico belga, realizó una serie de experimentos de pompas de jabón sobre bastidores poliédricos. A partir de estos experimentos se enunció lo que se ha denominado el problema de Plateau: *“Hallar la superficie de menor área limitada, en el espacio, por un contorno cerrado dado”*. (Newman, 1980)

Los experimentos realizados por Plateau ofrecen una solución física a este problema, debido a que si se sumerge un contorno de alambre en una solución jabonosa, se genera sobre este; una pompa o lamina de jabón de área mínima.

Las láminas formadas sobre estos bastidores ofrecen modelos llamativos de estructuras poligonales que crecen en complejidad dependiendo del contorno que se utilice, puede ser un tetraedro, un hexaedro, un octaedro, etc.

Estos experimentos han sido seleccionados para conformar el laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción debido a que: en primer lugar ofrece un espacio viable para despertar la atención y curiosidad de las personas partícipes del mismo debido a los resultados que se obtienen al sumergir los contornos en la solución jabonosa, y que dada sus característica, encajan dentro de lo que se ha denominado como experimentos discrepantes, los cuales arrojan resultados que no concuerdan con los resultados esperados por la intuición.

En segundo lugar permite recrear las experiencias realizadas por Joseph Plateau siglo y medio atrás para que los estudiantes se acerquen a este tipo de actividades y vivencien con ello las dificultades, los aciertos a los que se vieron enfrenados Plateau y sus colaboradores, a su vez, está dentro de lo posible, que a partir de las observaciones realizadas por los estudiantes se generen nuevos descubrimientos de principios relacionados con las láminas formadas en los contornos.

En tercer lugar permite realizar una serie de mediciones que permitirán concluir que la superficie de la lámina de jabón es mínima con respecto a la superficie propia del sólido. En síntesis el objetivo principal de esta actividad es que los estudiantes a partir de la observación y de mediciones previamente definidas comprueben el problema de Plateau.

De esta manera la cuarta estación del laboratorio se elaboraría a partir de las siguientes instrucciones de la siguiente forma

1. Construcción de los tetraedros de 1cm a 20 cm con pitillos.

Materiales:

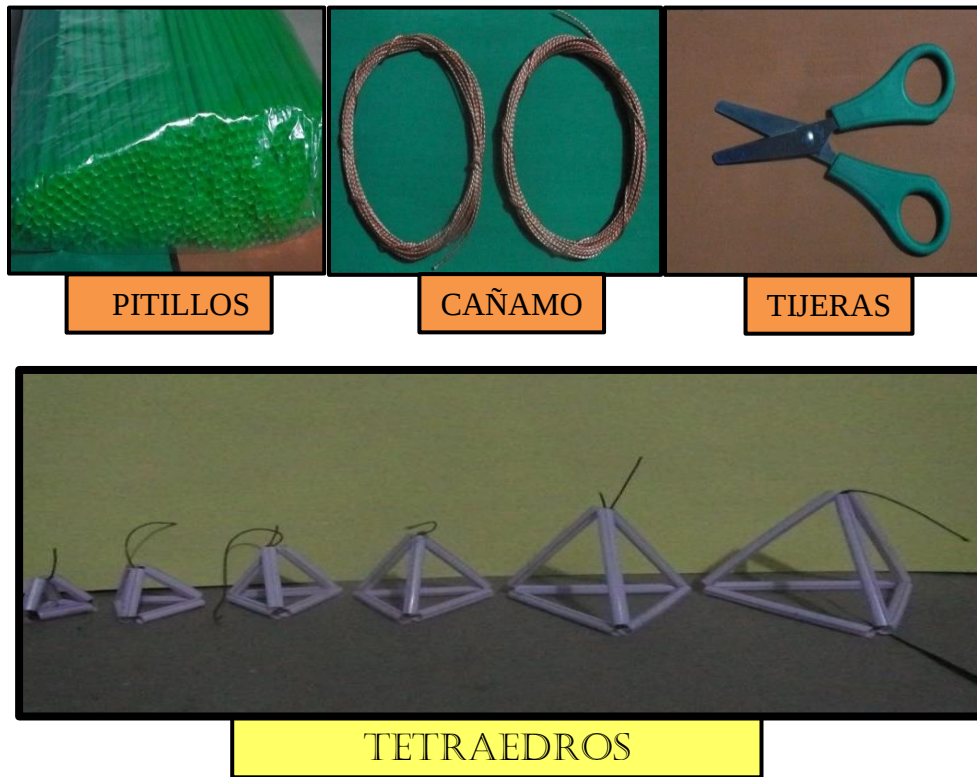


Ilustración 19: Materiales cuarta estación

Para la construcción de los tetraedros se organizaran grupos constituidos por cinco estudiantes, los cuales tendrán la función de construir cinco de los 20 tetraedros

Definición: Un tetraedro es un poliedro formado por cuatro caras triangulares, siendo el poliedro con el menor número de caras. En el *tetraedro regular* sus cuatro caras son triángulos equiláteros iguales.

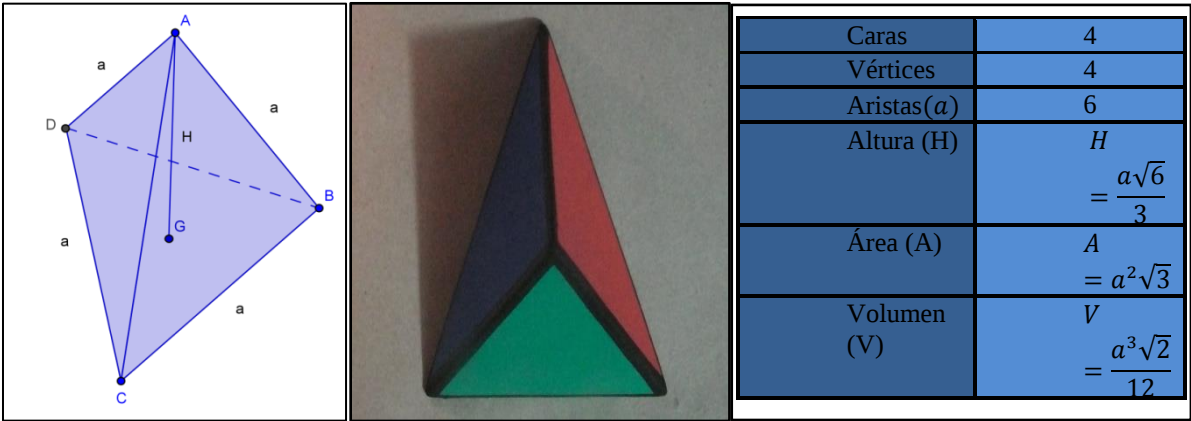


Ilustración 20: Generalidades del tetraedro

2. PREPARACION DE LA SOLUCION JABONOSA

Materiales



Ilustración 21: Materiales preparación solución jabonosa

Instrumentos



Ilustración 22: Instrumentos para preparar la solución jabonosa.

Montaje:



Ilustración 23

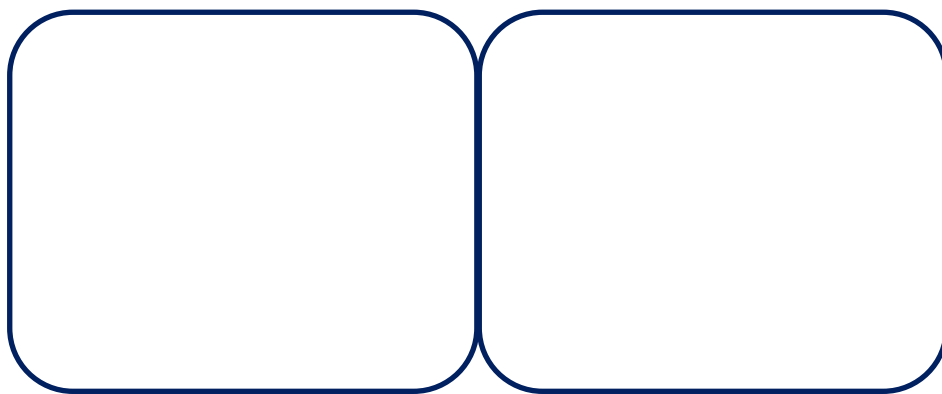
Las observaciones que se realizaran con respecto a la medición, se especificaran a continuación en el instrumento diseñado para este propósito

5.5.5 Instrumento para analizar la medición realizada en las cuatro estaciones

En cada una de las estaciones que conforman el laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción, se realizarán preguntas que acompañarán la actividad, y que tendrán como objetivos, guiar el proceso de los estudiantes que participarán en la actividad, y ser un instrumento para el posterior análisis de la manera como se realiza el proceso de medición.

❖ El problema de la reina Dido.

Una vez dispuesta la forma que creemos es la que encierra un área mayor con respecto a las demás posibles soluciones, dibujar en los recuadros que se mostraran a continuación las dos soluciones que crees dan una solución al problema de la reina Dido



¿Qué elementos de la figura se requieren para realizar la medición del área? ¿Por qué?

¿Cuál de estas dos soluciones define un área mayor? ¿Qué características tiene?

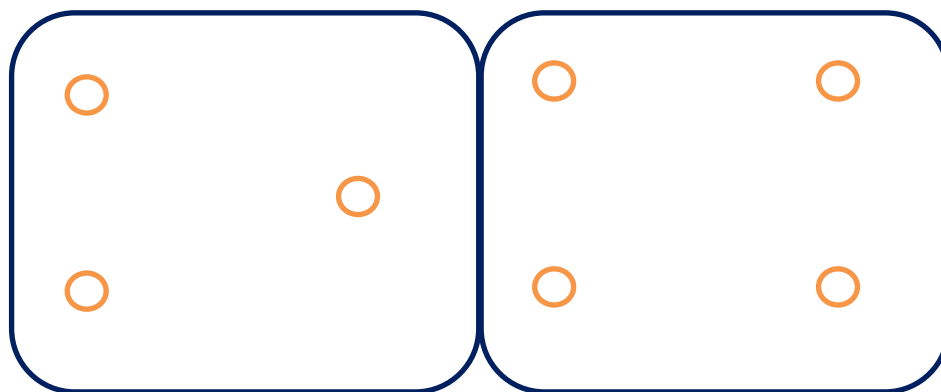
❖ La esfera.

¿Qué forma se obtiene al soplar por los contornos de alambre?_____

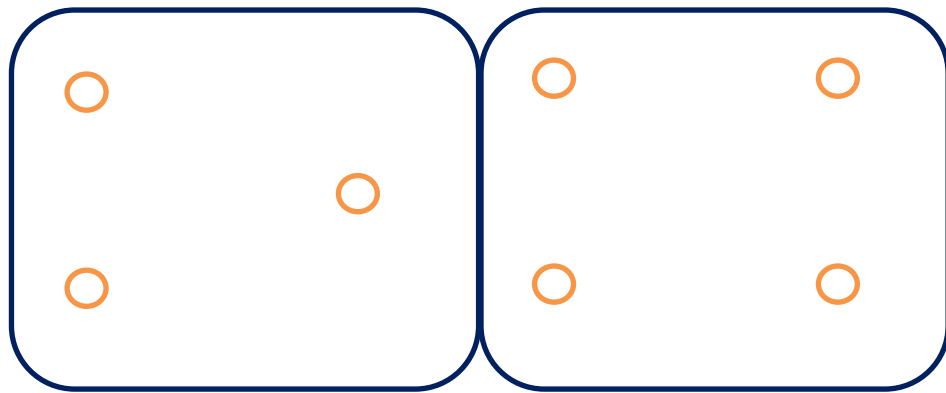
Con respecto al resultado obtenido ¿Qué elementos del contorno de alambre se requieren para realizar una medición de la superficie y volumen de la esfera? ¿Porque?

❖ Aplicaciones

Antes de sumergir la estructura de vidrio en la solución jabonosa, trazar el camino que une los puntos de la manera más corta posible. Dibujar la solución que crees es la correcta con las mediciones realizadas sobre la estructura de vidrio, en los recuadros que se muestra a continuación. ¿De qué forma has realizado la medición de la trayectoria trazada?



Sumergir la estructura de vidrio en la solución jabonosa, dibujar la solución dada por la pompa de jabón, con las medidas correspondientes a los segmentos que los unen, en los recuadros que se muestran a continuación



Comparar la solución que habías dibujado antes de sumergir la estructura de vidrio y la que se obtuvo después de sumergida en la solución jabonosa. ¿Qué diferencias y semejanzas existen?

❖ Superficies mínimas

Primera parte: Reconocimiento de una pompa de jabón.

Antes de iniciar la experimentación es necesario conocer el concepto de pompa de jabón, debido a que es a partir de este concepto que inicia nuestro estudio con

superficies minimales. *Una pompa de jabón es una superficie de jabón que no encierra aire dentro*, contraria a la burbuja que si encierra aire dentro

Experimento: Sumergir el contorno del tetraedro en la solución jabonosa. Antes de realizarlo, responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué pompa de jabón crees que se forma al sumergir el tetraedro?

- Una vez sumergido el tetraedro, ¿La observación que hiciste previa al experimento, es acorde con la pompa de jabón que observas en el tetraedro?

- La pompa de jabón que se configura dentro del tetraedro está conformada por seis triángulo isósceles, si quisiéramos calcular el área de esta pompa de jabón, solo tendríamos que calcular el área de uno de ellos y multiplicarla por 6. Que podrías decir del área de la pompa de jabón con respecto al área del tetraedro. ¿Es mayor o menor que esta, o no es posible establecerlo?

Segunda parte: medición - toma de datos

- ¿Qué vamos a medir?



En primer lugar se Medirá el segmento $\overline{AB}$, que se muestra en la figura

Ilustración 24: Pompa de jabón en un bastidor tetraédrico

Con esta medición será posible (mediante el procedimiento que se describe a continuación), calcular el área minimal, que es el área de la pompa de jabón.

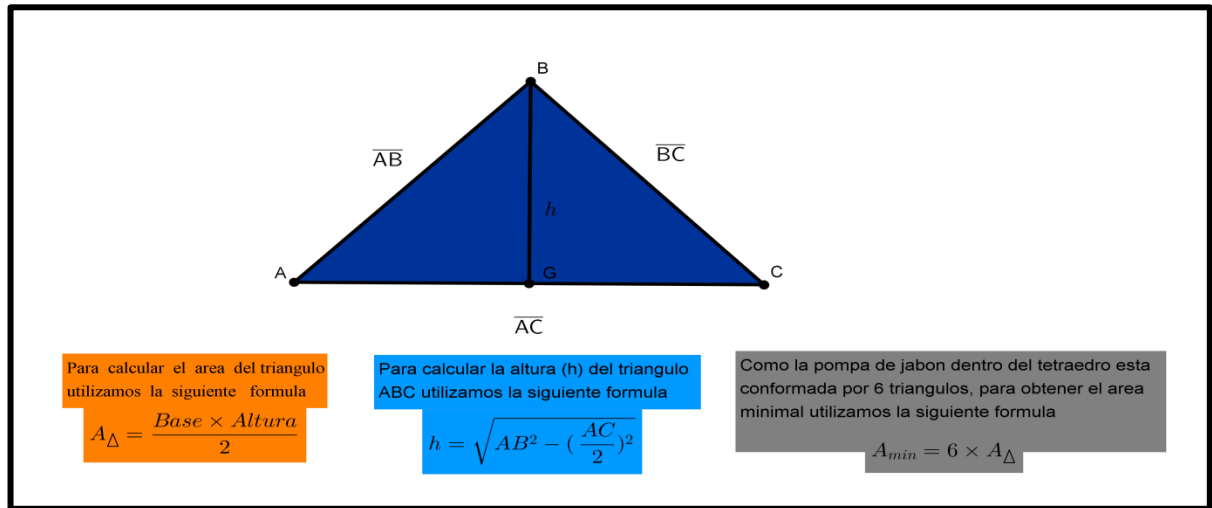


Ilustración 25: Método para encontrar el área minimal de la pompa de un bastidor tetraédrico

Toma de datos

Tabla 4: toma de datos

TETRAEDRO #	ARISTA	AREA TETRAEDRO	VOLUMEN TETRAEDRO	AREA MINIMAL
1	1 cm			
2	2 cm			
3	3 cm			
4	4 cm			
5	5 cm			
6	6 cm			
7	7 cm			
8	8 cm			
9	9 cm			
10	10 cm			
11	11 cm			
12	12 cm			
13	13 cm			
14	14 cm			
15	15 cm			
16	16 cm			
17	17 cm			
18	18 cm			
19	19 cm			
20	20 cm			

Constesta la siguiente pregunta:

El perímetro, el área, el volumen y el área mínima del tetraedro pueden considerarse como variables. Establece cual de ellas son variables dependientes y cual de ellas variables independientes. Puedes realizar la comparación con el área de un círculo; el área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A , por lo que A es función de r . (Stewart J. , Calculo Trascendentes tempranas, 2008)

Tabla 5: Identificación de variable dependiente e independiente

Variable dependiente	Variable independiente

➤ **Modelo matemático**

Un modelo matemático es una representación matemática de un objeto o proceso. Con frecuencia un modelo matemático es una función que describe cierto fenómeno. Los modelos matemáticos son útiles porque permiten aislar aspectos críticos del objeto bajo estudio y predecir cómo se comportará. (Stewart J. , 2006, pág. 239) .

Para obtener y representar la curva de regresión (función que representa el modelo matemático) utilizaremos uno de los programas de geometría dinámica: geogebra.

Paso 1: Comenzaremos definiendo los puntos correspondientes a cada una de las parejas de valores (x, y) . (en campo de entrada).

Paso 2: A continuación definimos la lista P formada por los puntos anteriores. (Una lista será un conjunto de datos que debemos representar entre llaves separando por comas sus elementos. $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$

Paso 3: Obtener la curva de regresión. En campo de entrada elegir según convenga: Ajuste (Lineal, Cuadrático, exponencial, logarítmico, etc).

➤ **Mediante el proceso descrito anteriormente realiza el ajuste de los datos correspondientes a las siguientes magnitudes.**

❖ **área del tetraedro y área minimal**

A partir de los resultados obtenidos, responde

- 1) El ajuste de los datos corresponde a
 - a) Un comportamiento lineal
 - b) Un comportamiento cuadrático
 - c) Un comportamiento exponencial
 - d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

- 2) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación _____

- 3) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

❖ Volumen del tetraedro y área minimal

A partir de los resultados obtenidos, responde

- 4) El ajuste de los datos corresponde a
 - a) Un comportamiento lineal
 - b) Un comportamiento cuadrática
 - c) Un comportamiento exponencial
 - d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

- 5) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación _____

- 6) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos. ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

6. ANALISIS DE RESULTADOS

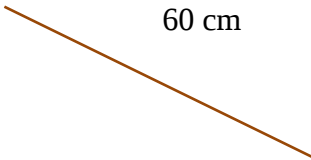
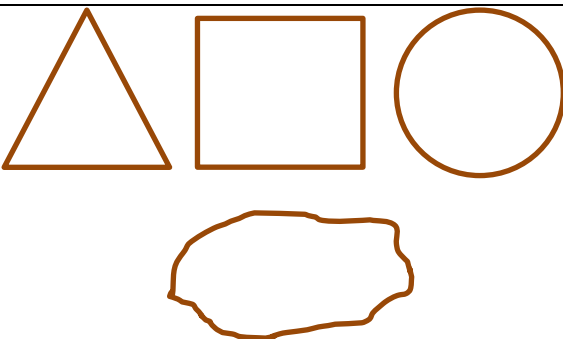
6.1 Medición de áreas

6.1.1 Medición de áreas modificables a partir de un perímetro fijo

Por medio de las respuestas de los estudiantes que participaron en la actividad de la reina Dido, y que constituye la primera estación del laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio físico de mínima acción, es posible analizar la forma como los estudiantes realizaron la medición del área que se configuraba a partir del segmento de cuerda de longitud de 60 cm.

En primer lugar, es adecuado mencionar que los estudiantes lograron concluir que era necesario modificar la forma del contorno para generar un área mayor. Con la anterior aclaración es posible realizar la siguiente relación entre perímetro fijo (segmento de cuerda de 60cm) y el área encerrada por este segmento.

Tabla 6: perímetro fijo vs área modificable

Perímetro fijo	Área modificable
 60 cm	

A continuación se muestran las gráficas realizadas por los estudiantes cuando el perímetro permaneció fijo

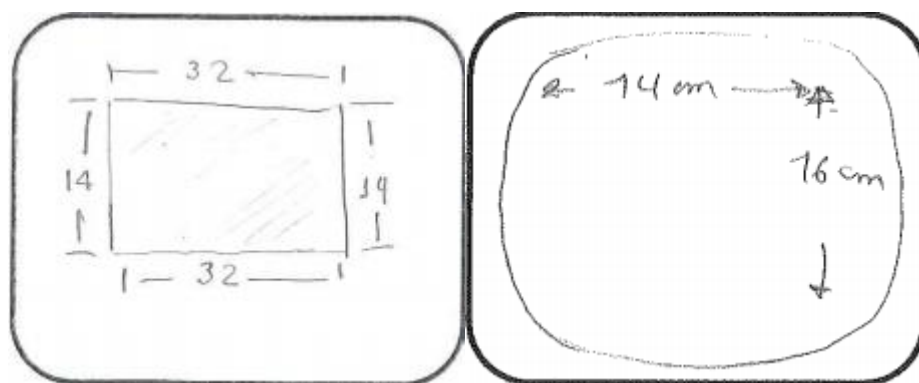


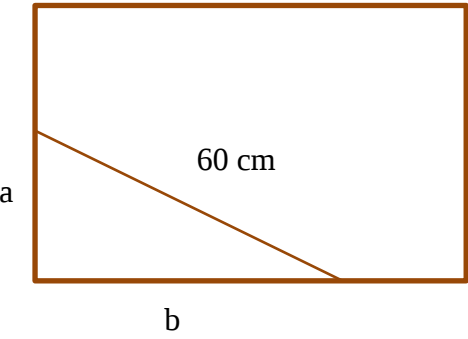
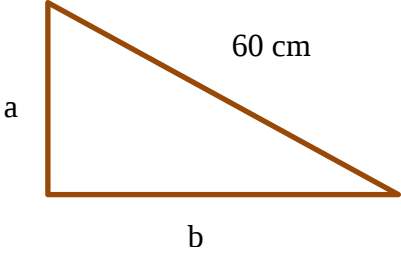
Ilustración 26: Resultados primera estación

Las dos figuras mostradas anteriormente presentan características distintas. La figura de la izquierda formada por segmentos rectilíneos facilita en grado sumo la relación matemática que permite encontrar el área de la figura. Mientras que la figura de la derecha está bosquejada por medio de una línea curva, lo que dificulta, en cierta medida, calcular su área. Aunque las dos soluciones dadas por los estudiantes son viables e igualmente válidas, una de ellas reviste mayor grado de importancia: la figura constituida por la línea curva. Esto es debido a que permite hacer referencia a uno de los dos problemas que aborda el cálculo: El área. Los estudiantes que participaron de la actividad aun no conocen los métodos para dar solución al problema de encontrar el área bajo la curva, pero lograron determinar que era posible realizar una aproximación mediante figuras planas inscritas en la curva.

6.1.2 Medición de áreas modificables a partir de un perímetro fijo más el perímetro del marco de la tabla

A partir de una pregunta realizada por uno de los estudiantes en cuanto si era posible utilizar el marco de la tabla de madera que se utilizó, se presentó una situación no prevista con antelación, de esa manera se planteó otra relación entre un nuevo perímetro generado por la cuerda de 60cm y el perímetro del marco utilizado para dar la solución.

Tabla 7: Perímetro fijo más perímetro del marco utilizado vs área

Perímetro fijo+ Perímetro del marco utilizado	Área
	

A continuación se muestran las gráficas realizada por los estudiantes cuando el perímetro fijo se le adicionó el perímetro del marco utilizado

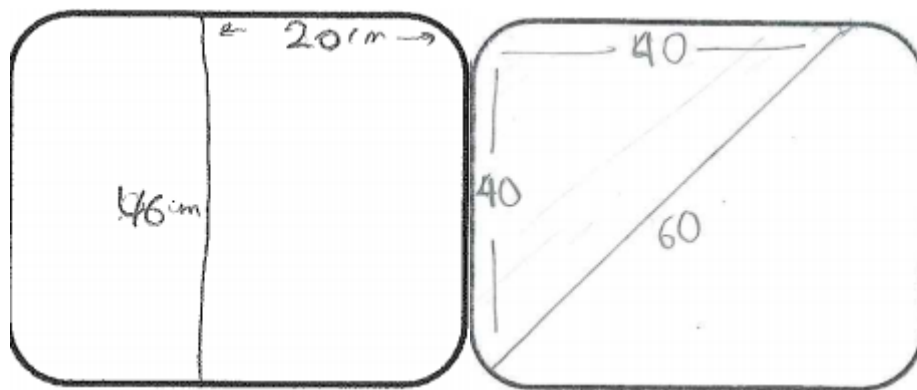


Ilustración 27: Resultados primera estación

Es evidente el aumento del área al utilizar el marco de la tabla. De este hecho, consideramos que se resignifica el concepto de optimización matemática, debido a que: en primera instancia, los estudiantes tenían unas condiciones iniciales, (encontrar la mayor área posible con un segmento de cuerda de 60cm), después de dar una primera solución, advirtieron que era posible aumentar (maximizar) el área al incluir el marco de la tabla.

El uso reiterado de un concepto matemático, en este caso optimizar (maximizar), el área y su correspondiente medición, permite la correspondiente apropiación del problema por parte de los estudiantes que participaron de la actividad. Se aborda el problema, con base en los conceptos y percepciones propias de cada estudiante. La verificación de la optimización del área obtenida, independientemente que se utilice o no el marco, es a partir de la medición, en este caso la medición del área por medio de las formulas convencionales para calcular áreas de figuras planas. Se enfatiza en la medición, debido a que es esta práctica la que motiva a encontrar una solución.

Con respecto a la posible solución al problema de reina Dido y su correspondiente medición se obtuvieron las siguientes respuestas:

¿Qué figura crees que encierra la mayor área posible?
¿Porque? el Rectángulo ya que uno de sus lados es mucho más largo, lo cual permite que se origine una mayor área.

Ilustración 28: Resultados primera estación

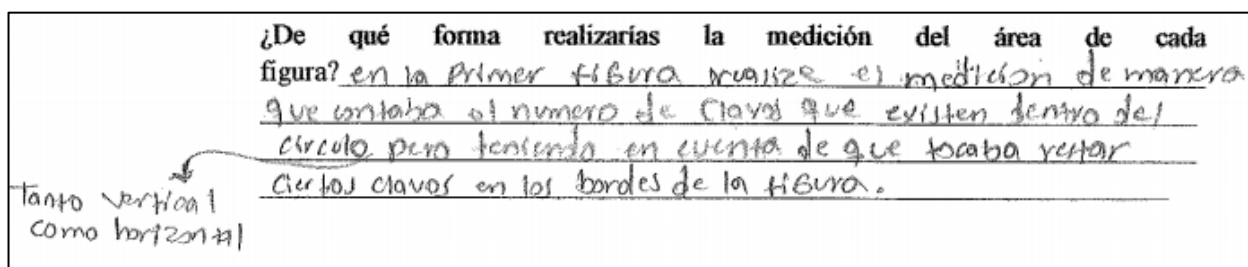


Ilustración 29: Resultados primera estación

Con base en las respuestas obtenidas es posible establecer que: se percibe a los cuadriláteros como figuras que pueden optimizar áreas (maximizar), más exactamente al rectángulo, dada sus características, (tener dos lados paralelos, con mayor longitud que los otros dos lados paralelos). En cuanto a su medición (en ambas figuras), se tuvo en cuenta la disposición de los clavos para bosquejar la medida del área, pero con la correspondiente observación que para una mejor precisión en la medida, era necesario *restar* unos cuantos clavos, para obtener el resultado.

6.2 La esfera

En la segunda estación: la esfera, se intentaba evidenciar la propiedad óptima de estas superficies. La primera actividad consistía en dibujar las burbujas que ellos creían se formaban antes de soplar por los diferentes contornos contruidos con alambre (contornos triangular, cuadrado, circular y pentagonal). A continuación se presenta uno de los resultados

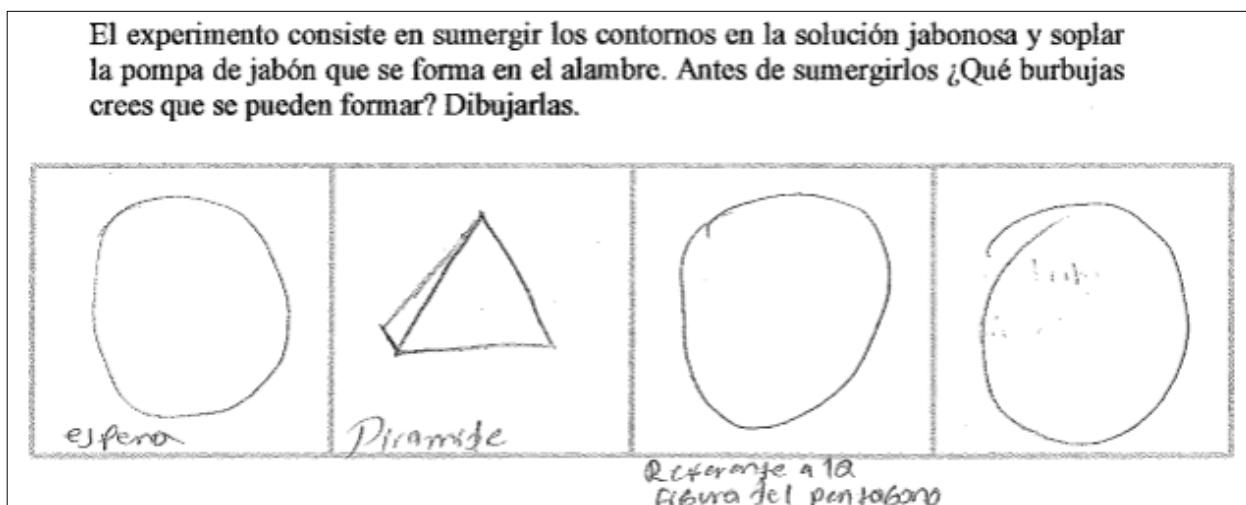


Ilustración 30: Resultados segunda estación

En la anterior ilustración se aprecia que: a partir de los contornos circular, pentagonal y cuadrado, el estudiante comprende que el resultado es siempre una burbuja esférica. Para el caso del contorno triangular, el estudiante cree, es posible obtener una piramide debido a la forma del contorno. La existencia de burbujas piramidales es posible, *casi* en su totalidad, si se sumerge dos veces el contorno de un tetraedro en una solución jabonosa. Con respecto a la segunda pregunta el estudiante respondió:

¿Qué burbujas se formaron? ¿Por qué crees que se forman esta clase de burbujas? en todas se formaron esferas y se forman debido a que las puntas de la figura se al ser introducidas en el líquido y soplarlas originan que todas las puntas se unan en "centro"

Ilustración 31: Resultados segunda estación

Plantea la existencia de un punto de acumulación o “centro” donde confluyen los puntos establecidos entre la pompa de jabón y el contorno de alambre. La observación realizada por el estudiante puede considerarse como una conjetura, que implicaría la demostración de dicho “centro” o punto de acumulación. Se aclara igualmente que la pompa de jabón que recubre el contorno tiene la propiedad de minimizar superficie, al

dejar de recubrir el contorno después de haber soplado a través de él, la burbuja que se configura debe conservar esta misma propiedad, y lo hace, cuando se adhiere a ella misma y forma una burbuja esférica.

Por último, con respecto a la tercera pregunta el estudiante propone:

¿De que forma se puede realizar la medición de la superficie y el volumen de la figura obtenida? se puede realizar de acuerdo al tamaño del molde y aumentarlo por 2

Ilustración 32: Resultados segunda estación

La intención de la pregunta era establecer que elementos del contorno debían considerarse para determinar estas dos magnitudes. Al establecer que el tamaño del molde debe tenerse en cuenta, el estudiante percibe una relación entre la superficie o área del contorno, es decir la *posible área de la burbuja*, con su volumen. El volumen de una esfera se establece a partir de la siguiente relación: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y el área de la misma a partir de $A = 4\pi r^2$, es decir si derivamos el volumen con respecto al tiempo obtenemos la fórmula para determinar el área de la esfera. La relación establecida por el estudiante es viable si se tiene en cuenta la anterior relación. Si bien la medición no se establece directamente con instrumentos de medida, inferir que elementos del contorno se deben considerar para su hipotética medición es una fase abstracta de esta práctica

6.3 Conexiones mínimas

En la tercera estación: conexiones mínimas, se proponía mostrar una de las aplicaciones del principio de mínima acción por medio de las pompas de jabón para dar solución al problema propuesto por Jakob Steiner. Se obtuvieron los siguientes resultados al primer interrogante

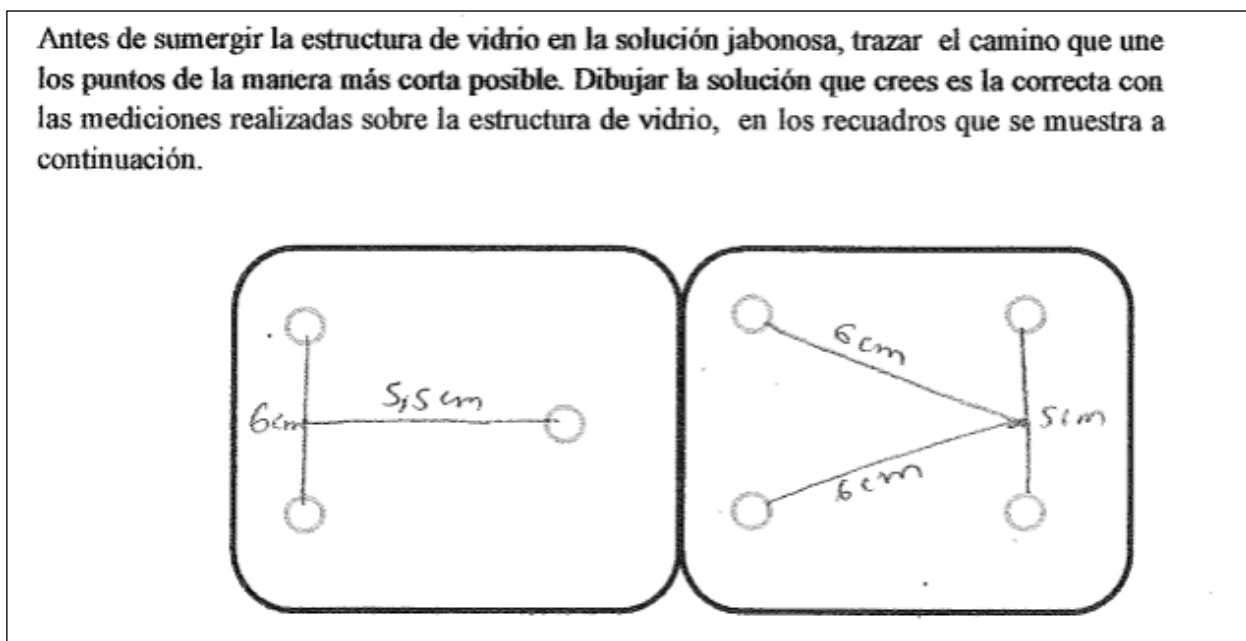


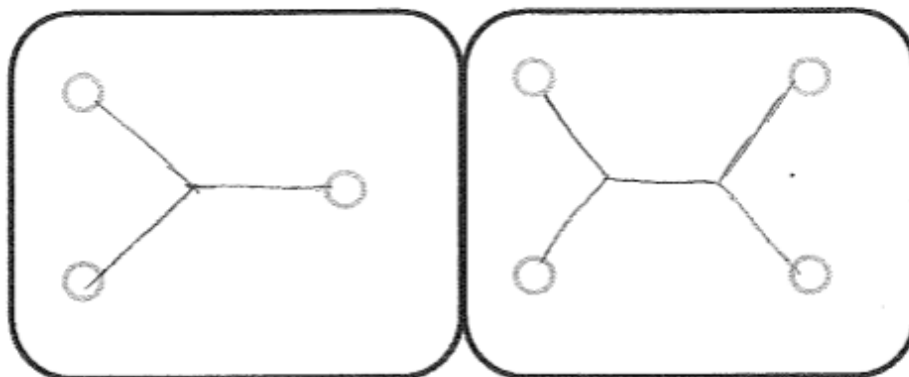
Ilustración 33: Resultado tercera estación

¿De qué forma has realizado la medición de la trayectoria trazada? mediante la medición de la regla y analizando de
manera respectiva y lógica

Ilustración 34: Resultado tercera estación

Al igual que en el problema de la reina Dido, para obtener la solución óptima al problema de Jakob Steiner, era necesario que los estudiantes, que participaron de la actividad, se aproximaran a esta solución, por medio la medición de la solución sugerida por ellos, antes de evidenciar la solución dada por la pompa de jabón y realizar la respectiva comparación. Se mostrarán a continuación los resultados obtenidos después de sumergir las estructuras de vidrio en la solución jabonosa

Sumergir la estructura de vidrio en la solución jabonosa, dibujar la solución dada por la pompa de jabón, con las medidas correspondientes a los segmentos que los unen, en los recuadros que se muestran a continuación



Comparar la solución que habías dibujado antes de sumergir la estructura de vidrio y la que se obtuvo después de sumergida en la solución jabonosa. ¿Qué diferencias y semejanzas existen? en cuanto a la figura primera tenía una "T" acostada
y la solución era una "Y" horizontal y en la segunda medio
como resultado una "H" al introducirla en el líquido

Ilustración 35: Resultados tercera estación

Al realizar la comparación de sus soluciones, con las obtenidas después de sumergir las estructuras de vidrio en la solución jabonosa, indican las diferencias en cuanto a *forma*, mas no en cuanto a su medición. Evidencian físicamente la solución a un problema de optimización, por medio de las pompas de jabón. El uso que se da al concepto matemático evidenciado en una solución física, proporcionada por la pompa, discrepa completamente con su intuición y quizás por esto se da mayor importancia a la forma. Se usa el concepto, se evidencia físicamente, y genera en los estudiantes interés debido a que los métodos para encontrar la solución no habían sido evidenciados con anterioridad, o simplemente solo conocían una manera de aproximarse al problema, el

obtenido por medio de un diagrama, mas no evidenciado en un laboratorio de matemáticas.

6.4 Superficies mínimas en bastidores poliédricos

Con respecto a la última estación se realizó, en primer lugar, una discusión con respecto a los conceptos matemáticos de variable dependiente y variable independiente de una función, la cual se presentó debido a uno de los objetivos de la actividad el cual era: determinar una función que relacione el área del tetraedro y el área minimal como también el volumen del tetraedro y el área minimal. En segundo lugar se realizó el análisis del comportamiento de las funciones obtenidas por medio del programa de geometría dinámica: geogebra. Más allá de determinar con precisión la naturaleza de la función obtenida, se enfatiza el análisis en el comportamiento de los puntos graficados y las posibles interpolaciones que se pueden realizar a partir de la curva obtenida.

6.4.1 Análisis de lo conceptual: variable dependiente y variable independiente.

Para decidir cuál de las variables en consideración correspondía a la variable dependiente y cual a la independiente se presentó un recuadro que mostró los siguientes resultados:

Variable dependiente	Variable independiente	Variable dependiente	Variable independiente
Área Minimal	Área Tetraedro	Área minimal	Área del tetraedro
Volumen Tetraedro	Área Tetraedro	"	Volumen del tetraedro

Variable dependiente	Variable independiente	Variable dependiente	Variable independiente
Área minimal	Volumen del tetraedro	Área minimal	Área tetraedro
Área del tetraedro	"	Área del tetraedro	Arista
		Área minimal	Volumen del tetraedro

Ilustración 36: Resultados cuarta estación

En las respuestas se infiere que todos los estudiantes determinaron que la variable dependiente era el área minimal, aunque también se aprecia que algunos estudiantes, como segunda opción eligieron el área del tetraedro, la decisión correcta dependía del proceso que se quería analizar, en este caso la magnitud a considerar en la toma de datos era el área minimal que a su vez dependía del perímetro, área o volumen del tetraedro. Una vez realizada la discusión se continuó con el ajuste de los datos en geogebra. Una vez dispuestos los datos en una hoja de cálculo y su posterior análisis en regresión de dos variables, se realiza el análisis del comportamiento de la disposición de los datos y la curva obtenida

6.4.2 Análisis del comportamiento de las gráficas.

6.4.2.1 Primera relación área del tetraedro vs área minimal

La primera pregunta fue diseñada tipo I selección múltiple con única respuesta y estos fueron los resultados

A partir de los resultados obtenidos, responde

1) El ajuste de los datos corresponde a

- ☒ a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- ☒ d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

2) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a

continuación Polinomial, ya que al usar el modelo de regresión
la curva tiende a estar sobre mas puntos

A partir de los resultados obtenidos, responde

1) El ajuste de los datos corresponde a

- ☒ a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

2) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a

continuación Presenta un comportamiento lineal debido a que
al ser directamente proporcionales las variables aumenta
cada punto en una misma cantidad.

A partir de los resultados obtenidos, responde

1) El ajuste de los datos corresponde a

- a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- ☒ d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

2) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación Se parece a un comportamiento
logarítmico

A partir de los resultados obtenidos, responde

1) El ajuste de los datos corresponde a

- a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- ☒ d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

2) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación se ajusta mas a una función polinomial

Ilustración 37: Resultados cuarta estación

Como se puede observar tres de los cuatro estudiantes no identificaron ningún comportamiento sugerido en las respuestas. Uno de los estudiantes identificó, por medio de la disposición de los datos, un comportamiento logarítmico mientras que dos de sus compañeros identificaron un comportamiento polinomial. El cuarto estudiante respondió

que la curva presentaba un comportamiento lineal en cuanto era posible identificar una relación directamente proporcional entre las magnitudes analizadas.

En cuanto a la tercera pregunta que consistía en realizar, si era posible, una descripción de tipo físico o matemático de la curva obtenida estos fueron los resultados.

- 3) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

Si se es posible hallar los cálculos de la función con valores muy amplios, y también tiende a ser una parábola cuyo vértice sería el mínimo de la función en el ~~auto~~ ~~minimal~~ ~~origen~~ del tetraedro

- 3) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

Según la gráfica asumen que es directamente proporcional.

- 3) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

porque crece de manera lenta

3) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

Yo creo que con los datos que ya tenemos podemos
calcular (o) va a ser los siguientes valores

Ilustración 38: Resultados cuarta estación

El estudiante que identificó un comportamiento lineal realiza una descripción de tipo matemático en cuanto establece la proporcionalidad directa entre las dos magnitudes. Es claro, a partir de la descripción, que el vínculo establecido entre estudiante y concepto (función) es estrictamente matemático y que la relación de tipo físico no es identificada en la curva de regresión. Para dirigir la discusión hacia una descripción de tipo físico, se plantea la siguiente pregunta: Si la curva obtenida representa un comportamiento lineal, y si se tiene en cuenta que la variable independiente es el área del tetraedro y la variable dependiente el área minimal ¿se podría conjeturar que independientemente del área del tetraedro es posible encontrar un área minimal? Después de plantear el interrogante un estudiante propuso que el área minimal crecía hasta el infinito, otro estudiante, como se puede observar en una de las respuestas, propone que es posible, dada la cantidad de datos registrados, poder encontrar los *siguientes valores*. Es posible que los estudiantes comprendieran que el comportamiento lineal de los puntos, sugería un crecimiento indefinido, y entonces, poder encontrar un área minimal independientemente del área del tetraedro.

6.4.2.2 Segunda relación volumen del tetraedro y área mínima

Al igual que en la primera relación se plantea una pregunta tipo I selección múltiple con única respuesta y estos fueron los resultados

4) El ajuste de los datos corresponde a

- a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- ☒ d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

5) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a

continuación Polinomial, ya que en la herramienta
la función tiene a ser una parábola

4) El ajuste de los datos corresponde a

- ☒ a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

5) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a
continuación _____

A partir de los resultados obtenidos, responde

4) El ajuste de los datos corresponde a

- a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- ☒ d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

5) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación presenta un comportamiento polinomial porque a mayor volumen observamos mayor área.

A partir de los resultados obtenidos, responde

4) El ajuste de los datos corresponde a

- a) Un comportamiento lineal
- b) Un comportamiento cuadrático
- c) Un comportamiento exponencial
- d) Ningun comportamiento descrito anteriormente

5) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación _____

Ilustración 39: Resultados cuarta estación

En esta segunda relación, volumen del tetraedro y área minimal, los estudiantes percibieron un comportamiento exponencial, polinomial y lineal. En cuanto a los estudiantes que sugirieron un comportamiento polinomiales establecen que este

comportamiento se puede presentar, debido a que es posible visualizar una parábola y porque se observa un incremento considerable del área minimal al incrementarse el volumen. Es claro que para esta relación en particular se observa mayor grado de complejidad al concluir sobre la curva de regresión. Si bien no es posible realizar un análisis detallado con respecto a esta última relación, se puede indicar que aquellos estudiantes que identificaron una parábola infirieron que el vértice de la misma, podría indicar un área minimal máxima, debido a que después de este vértice los valores empiezan a decrecer.

7. CONCLUSIONES-RECOMENDACIONES.

Como se indicó en el marco teórico esta investigación se aborda por medio de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, uno de sus objetivos, según (Cantoral, 2013), es la posibilidad de rediseñar el discurso matemático escolar con el fin de facilitar el aprendizaje de la matemática, por medio prácticas en las cuales el ser humano y su cotidianidad, permiten dar funcionalidad a los constructos teóricos propios de cada individuo. Con la intención de construir escenarios que permitan a los estudiantes comprender conceptos matemáticos en planos distintos del abstracto, esta investigación centra su interés en la implementación de un laboratorio matemático fundamentado en el principio físico de mínima acción, para evidenciar físicamente la optimización matemática.

El laboratorio

Con la implementación del laboratorio de matemáticas fundamentado en el principio físico de mínima acción, se logró evidenciar uno de los principios que fundamenta a la socioepistemología: *el relativismo epistemológico*, debido a que, si bien el instrumento de recolección de datos estaba diseñado para que los estudiantes participaran de forma individual, como consecuencia de la planificación de la actividad, los estudiantes recrearon un espacio para compartir sus soluciones y de esta forma compararlas con la de sus demás compañeros. Si en un principio habían identificado una solución particular (objetivismo), una vez compartida y comparada, se dan cuenta que sus resultados son subjetivos (relativismo), “*concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad o validez universal, sino que, en todo caso, solo poseen una verdad subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia*” (Cantoral, 2013, pág. 159). Se

tiene, entonces, al laboratorio como *comunidad de aprendizaje*, donde es posible la construcción social del conocimiento al valorar las ideas y resultados de los individuos que participan de la actividad, con la correspondiente aclaración que

no se está diciendo que existan en todo momento diversidad de opiniones, ante los mismos hechos, esto es un hecho conocido, se dice algo más: que el valor de verdad para el relativismo asume que dichas opiniones son verdaderas para esas personas, no hay una verdad única (Cantoral, 2013, pág. 159)

Con lo anterior, se enfatiza en uno de los grandes progresos de la matemática educativa: darle importancia a los obstáculos más no los errores.

Recomendación:

Se recomienda realizar el laboratorio con otros grupos y analizar esos resultados para hacer comparaciones.

Medición

Se verificó que la medición es una práctica social que tiene dos usos fundamentales

1° Argumentar: El resultado obtenido por cada estudiante, y que fue el elemento con el que se argumentó frente a los demás resultados, para encontrar la solución a los problemas planteados, fue consecuencia del proceso de medición, de esta forma es posible determinar que la medición cumple con la noción de práctica social, de la forma como es concebida por la socioepistemología, es decir “*no es lo que hacemos, sino lo que nos hace hacer los que hacemos*” (Cantoral, 2013, pág. 109), debido a que es por medio de la medición que es posible idear un resultado.

2° Comparar: Se obtuvieron resultados distintos, que permitieron realizar la correspondiente comparación de los mismos y de esta forma determinar una solución general de los problemas planteados.

Recomendación:

Se recomienda explorar otros contextos donde se haga uso de la medición, al igual que utilizar otros instrumentos de medición que permitan obtener resultados con mayor exactitud.

Principio de mínima acción

En esta investigación se preguntaba ¿De qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática en estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemática y tecnologías de la información de la Universidad la Gran Colombia? Se evidencia que mediante la manipulación directa con los instrumentos del laboratorio de matemáticas, fundamentado en el principio físico de mínima acción, los estudiantes comprenden a la vez que debaten, conjeturan y proponen soluciones a cada uno de los problemas propuestos en el marco de las actividades a realizar. El uso que se da del concepto matemático, en este caso de la optimización matemática, para interpretar las situaciones propuestas en cada estación, permitió generar en los estudiantes criterios propios, unos derivados de su experiencia con la manipulación previa de los conceptos evidenciados en las prácticas, como también, otros derivados al momento de la realización de la actividad, lo que permitió que se diera un contraste entre ambos criterios. Se logra de esta manera que los estudiantes a partir del uso que se da de la optimización matemática, evidenciada en el principio mínima acción por medio de cada

actividad propuesta, resignifiquen este concepto debido a que como lo plantea la teoría socioepistemológica, es mediante este uso del concepto matemático, y no propiamente mediante la manipulación directa del concepto, que se logra resignificar. Asimilar el principio de mínima acción para construir un laboratorio de matemáticas, fue asimilar un concepto que no está presente en los lineamientos curriculares, pero que si lo está en fenómenos de naturaleza, físicos e incluso fenómenos presentes en la cotidianidad de los individuos. De esta forma, el laboratorio fundamentado en este principio, se propone como discurso a partir del cual, el docente de matemáticas puede aproximar nociones que explican fenómenos que hacen parte de la realidad de los individuos.

Recomendación:

Se recomienda explorar otras disciplinas como la astronomía, la química, la biología, entre otros para estudiar otros usos del conocimiento matemático en contexto.

Por último, es apropiado mencionar, que este trabajo fue producto del semillero de investigación Mathema el cual aportó elementos en diferentes aspectos, como: el conceptual, el teórico, y sobre todo el metodológico al tener como propósito, recrear laboratorios que permitan contextualizar algunos conceptos matemáticos, que evidencian a su vez el uso de los mismos.

Por otra parte mediante la interpretación que se realizó de las curvas de regresión fue posible que cada uno de los estudiantes diera a conocer sus ideas con respeto a las posibles implicaciones matemáticas y físicas derivadas de estas curvas, que modelaban la relación existente entre las magnitudes consideradas. Esta interpretación generó que los

estudiantes realizaran conjeturas a partir de sus observaciones, aunque falta corroborarlas la intención de indagar, de interpretar, de darle sentido a sus ideas de valorar sus juicios

8. BIBLIOGRAFÍA

- Abarca, A. (2012). *Técnicas cualitativas de investigación*. San José: Editorial Universidad de Costa Rica.
- Asimov, I. (1999). *Breve historia de la química*. Madrid: Alianza Editorial.
- Bochner, S. (1966). *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Madrid: Alianza editorial.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Mexico: Gedisa.
- Castro, C. S.-C. (2001). *Los Bernoulli geometras y viajeros*. España: Nivola.
- Cerda, E. (2012). *Optimización dinámica*. Madrid: Alfaomega.
- Ducasse, P. (1973). *Historia de las técnicas*. Buenos Aires: Editorial universitaria de Buenos Aires.
- Hildebrandt, S., & Tromba, A. (1990). *Matemáticas y formas óptimas*. Barcelona: Prensa Científica S.A.
- Hurtado, A. (2006). *Experimentación y simulación*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Francisco José de Caldas.
- Jimenez, A. P. (1992). Matemáticas experimentales. *Suma*, 27-41.
- Montiel, G., & Buendía, G. (Diciembre de 2011). *Memoria EIME XIV propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica*. Recuperado el 26 de Mayo de 2015, de Red de centros de investigación en Matemática Educativa A.C: http://www.red-cimates.org.mx/images/pdf/EIMES/Memorias/memoria_eime_xiv.pdf
- Newman, J. R. (1980). *Sigma, el mundo de las matemáticas*. Barcelona: Ediciones Grijaldo.
- Odifreddi, P. (2006). *La Matemática del siglo XX*. Buenos Aires: Katz Editores.
- Perelman, Y. (1983). *Física recreativa*. Barcelona: Editores Martínez Roca.
- Perez, R., Cobo, B., Dolores, M., Paya, A., Fernandez, F., Pasadas, M., y otros. (2000). Isoperimétricos en la Grecia Antigua. *Suma*, 95-98.
- Perez, R., Cobo, B., Dolores, M., Paya, A., Fernandez, F., Pasadas, M., y otros. (2000). El problema isoperimétrico en la arquitectura, literatura, música..., en la naturaleza. *Suma*, 103-106.
- Perez, R., Cobo, B., Dolores, M., Paya, A., Francisco, F., Pasadas, M., y otros. (2000). El problema de los isoperimétricos en el Islam Medieval. *Suma*, 97-100.
- Rego, V. P. (2003). *Lagrange, la elegancia matemática*. España: Nivola.
- Stewart, I. (1975). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza editorial.

Stewart, J. (2006). *Precálculo*. Buenos Aires: Thomson.

Stewart, J. (2008). *Calculo Trascendentes tempranas*. Mexico D.F: Cengage Learning.

Uribe, D. (2008). *Historia de las civilizaciones*. Bogotá: Aguilar.

9. ANEXOS

9.1 Anexo 1: instrumento dado a los estudiantes para la recolección de datos.

PRIMERA ESTACION: HISTORIA DE LA REINA DIDO

Objetivos

- Conocer el primer problema de tipo variacional registrado en la historia, el problema de la reina Dido (problemas isoperimétricos)
- Idear una posible solución al problema de la reina Dido a partir de un fragmento de cuerda de 60 cm, y tomar las respectivas medidas para verificar la solución dada.

Historia

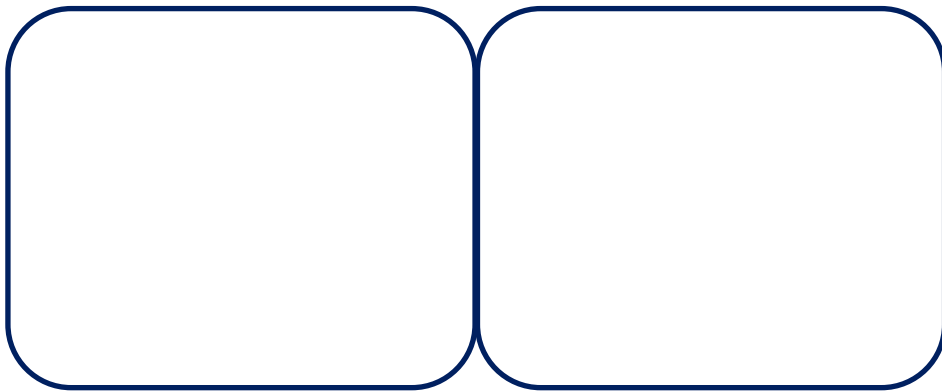
Dido era una princesa fenicia de la ciudad de Tiro (parte hoy del Líbano). El rey Pigmalión, implacable hermano suyo, asesinó al marido de Dido, para despojarla de sus posesiones. La princesa no tuvo más opción que huir por mar. Cuando Dido arribó a las costas septentrionales de África, hacia el año 900 a. de C; en el lugar que más tarde sería Cartago, quiso comprar al cacique local, el rey Jarbas de Numidia, tierra donde asentarse ella y su comitiva para establecer su nueva patria. Es posible que Dido fuera cicatera, o que el rey Jarbas no quisiera colonias en su país: cerraron el trato con la condición de que la princesa no tendría más tierra que la que pudiera encerrar una piel de un buey. Dido sacó el máximo partido de la situación. En primer lugar interpretó la palabra “encerrar”, en el sentido más amplio posible. Se dice que hizo cortar a su gente la piel en finas tirillas, las cuales empalmadas, formaron una cuerda cerrada de gran longitud. Suponiendo que las tirillas tuvieran tan solo un par de milímetros de anchura, tal longitud debió estar entre los 1000 y 2000 metros.

Segundo, Dido extendió el cordel sobre el terreno de modo que encerrase la mayor área posible. Suponiendo que el suelo fuera completamente llano, podemos imaginar que Dido tuvo que resolver el siguiente problema matemático: “Hallar entre todas las líneas posibles de longitud dada, aquellas que encierren una región interior de área máxima” (Hildebrandt & Tromba, 1990)

¿Qué solución crees que es la correcta, para que Dido obtenga el mayor terreno posible?

Con un fragmento de cuerda de 60 cm
encierra la mayor área posible.

Una vez dispuesta la forma que crees es la que encierra un área mayor con respecto a las demás posibles soluciones, dibujar en los recuadros que se muestran a continuación las dos soluciones que crees dan una solución al problema de la reina Dido



¿Qué figura crees que encierra la mayor área posible?

¿Porque? _____

¿De qué forma realizarías la medición del área de cada figura? _____

SEGUNDA ESTACION: LA ESFERA

Objetivos:

- Identificar en la esfera el principio de mínima acción
- Comprobar mediante experimentación el principio de mínima acción presente en la esfera.

Propiedad maximal de la esfera

De todos los sólidos cuya superficie tiene un área prescrita, la esfera es el de máximo volumen

Propiedad minimal de la esfera

En una burbuja de jabón hay una cierta cantidad de aire que se encuentra encerrada en una superficie de área minimal: *“entre todos los sólidos de volumen dado, la esfera tiene una superficie de área mínima*

El experimento consiste en sumergir los contornos en la solución jabonosa y soplar la pompa de jabón que se forma en el alambre. Antes de sumergirlos ¿Qué burbujas crees que se pueden formar? Dibujarlas.

--	--	--	--

¿Qué burbujas se formaron? ¿Por qué crees que se forman esta clase de burbujas?_____

¿De que forma se puede realizar la medición de la superficie y el volumen de la figura obtenida?_____

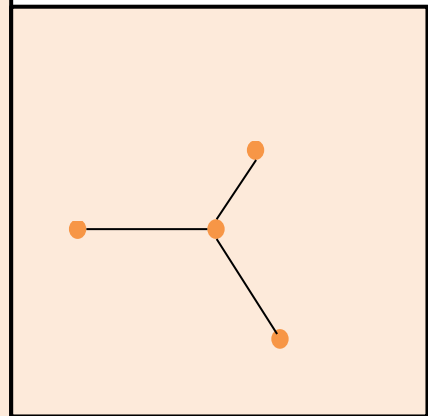
TERCERA ESTACION: APLICACIONES

Objetivos

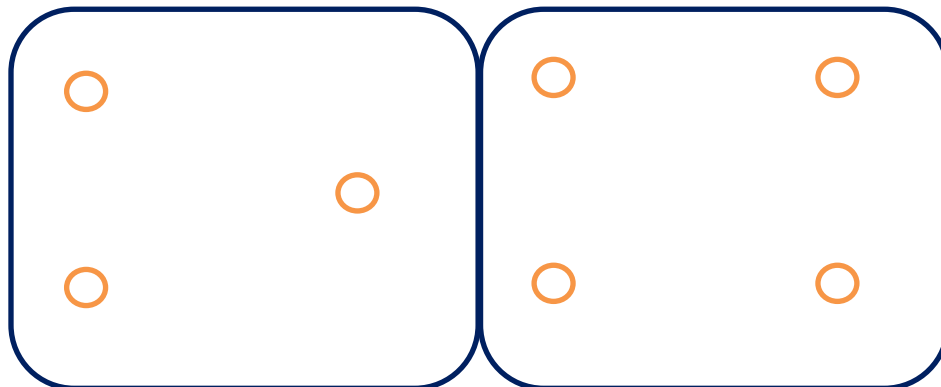
- Reconocer una de las aplicaciones del principio de mínima acción (conexiones mínimas) a partir de la experimentación con pompas de jabón
- Comparar la solución ideada antes de sumergir la estructura de vidrio, con la solución que ofrece la pompa de jabón.

EL PROBLEMA DE JAKOB STEINER

Es preciso enlazar tres ciudades A, B y C mediante una red de carreteras. Supongamos que no hay obstáculos, por lo que tenemos libertad de construir las carreteras como queramos, supongamos también que la región circundante a las ciudades es llana. El problema consiste en hallar el sistema de caminos de mínima longitud total. Parafraseando matemáticamente la situación se nos dan tres puntos A, B y C de un plano y se nos pide hallar un punto P, así como caminos que conecten P con A, B y C, tales que la longitud total de los caminos se mínima. Dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, podemos suponer además que estos caminos son rectilíneos.

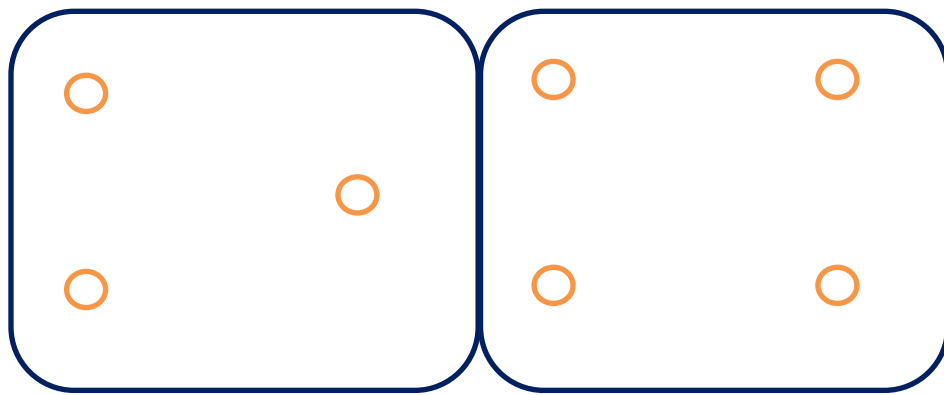


Antes de sumergir la estructura de vidrio en la solución jabonosa, trazar el camino que une los puntos de la manera más corta posible. Dibujar la solución que crees es la correcta con las mediciones realizadas sobre la estructura de vidrio, en los recuadros que se muestra a continuación.



¿De qué forma has realizado la medición de la trayectoria trazada?

Sumergir la estructura de vidrio en la solución jabonosa, dibujar la solución dada por la pompa de jabón, con las medidas correspondientes a los segmentos que los unen, en los recuadros que se muestran a continuación



Comparar la solución que habías dibujado antes de sumergir la estructura de vidrio y la que se obtuvo después de sumergida en la solución jabonosa. ¿Qué diferencias y semejanzas existen?

—

CUARTA ESTACION: SUPERFICIES MINIMALES EN BASTIDORES POLIÉDRICOS

Objetivos

- Reconocer una superficie minimal en los bastidores tetraédricos.
- Medir la superficie minimal que se configura en los bastidores tetraédricos.
- Determinar una función que relacione Perímetro tetraedro vs área minimal y Volumen del tetraedro vs área minimal.
- Analizar las gráficas de las función obtenidas en el objetivo anterior.

Primera parte: Reconocimiento de una pompa de jabón y una superficie minimal.

Antes de iniciar la experimentación es necesario conocer el concepto de pompa de jabón, debido a que es a partir de este concepto que inicia nuestro estudio con superficies minimales. *Una pompa de jabón es una superficie de jabón que no encierra aire dentro*, contraria a la burbuja que si encierra aire dentro. Una superficie minimal se caracteriza por tener menor área que cualquier otra superficie cercana tendida sobre el mismo marco

Experimento: Sumergir el contorno del tetraedro en la solución jabonosa. Antes de realizarlo, responde las siguientes preguntas.

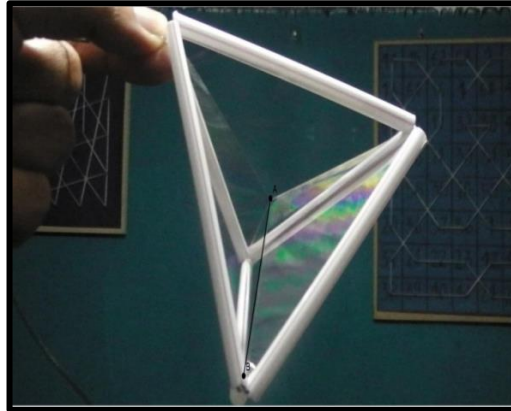
- ¿Qué pompa de jabón crees que se forma al sumergir el tetraedro?

- Una vez sumergido el tetraedro, ¿La observación que hiciste previa al experimento, coincide con la pompa de jabón que observas en el tetraedro? ¿Por qué?

- La pompa de jabón que se configura dentro del tetraedro está conformada por seis triángulo isósceles, si quisiéramos calcular el área de esta pompa de jabón, solo tendríamos que calcular el área de uno de ellos y multiplicarla por 6. Que podrías decir del área de la pompa de jabón con respecto al área del tetraedro. ¿Es mayor o menor que esta, o no es posible establecerlo?

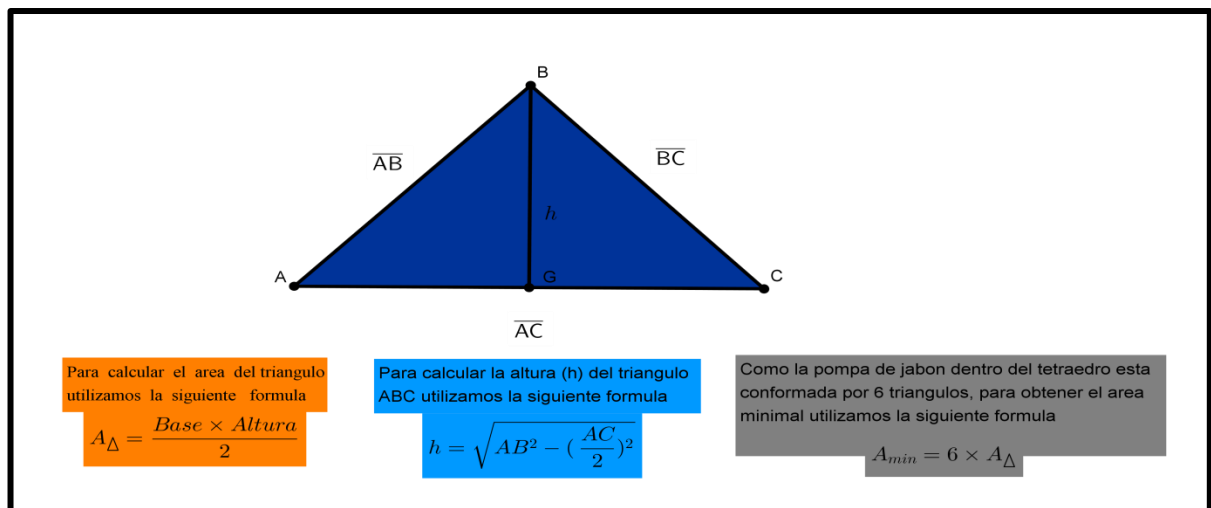
Segunda parte: medición - toma de datos

➤ ¿Qué vamos a medir?



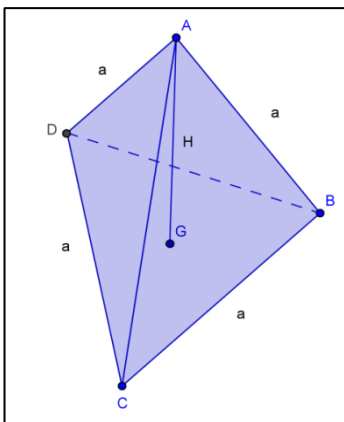
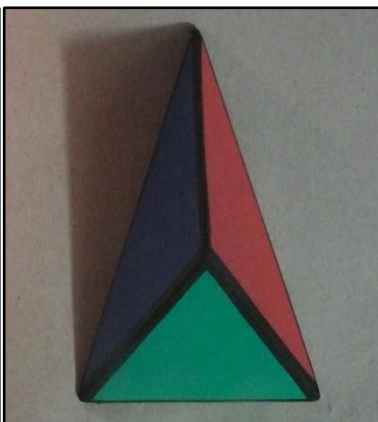
En primer lugar se Medirá el segmento $\overline{AB}$, que se muestra en la figura

Con esta medición será posible (mediante el procedimiento que se describe a continuación), calcular el área minimal, que es el área de la pompa de jabón.



Toma de datos

TETRAEDRO #	ARISTA	AREA TETRAEDRO	VOLUMEN TETRAEDRO	AREA MINIMAL
1	1 cm			
2	2 cm			
3	3 cm			
4	4 cm			
5	5 cm			
6	6 cm			
7	7 cm			
8	8 cm			
9	9 cm			
10	10 cm			
11	11 cm			
12	12 cm			
13	13 cm			
14	14 cm			
15	15 cm			
16	16 cm			
17	17 cm			
18	18 cm			
19	19 cm			
20	20 cm			

		Caras	4
		Vértices	4
		Aristas(<i>a</i>)	6
		Altura (H)	$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
		Área (A)	$A = a^2\sqrt{3}$
		Volumen (V)	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Constesta la siguiente pregunta:

El perímetro, el área, el volumen y el área minimal del tetraedro pueden considerarse como variables. Establece cual de ellas son variables dependientes y cual de ellas variables independientes. Puedes realizar la comparación con el área de un círculo; el área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A , por lo que A es función de r . (Stewart J. , Calculo Trascendentes tempranas, 2008)

Variable dependiente	Variable independiente

➤ Modelo matemático

Un modelo matemático es una representación matemática de un objeto o proceso. Con frecuencia un modelo matemático es una función que describe cierto fenómeno. Los modelos matemáticos son útiles porque permiten aislar aspectos críticos del objeto bajo estudio y predecir cómo se comportará. (Stewart J. , Precálculo, 2006) .

Para obtener y representar la curva de regresión (función que representa el modelo matemático) utilizaremos uno de los programas de geometría dinámica: geogebra.

Paso 1: Comenzaremos definiendo los puntos correspondientes a cada una de las parejas de valores (x, y) . (en campo de entrada).

Paso 2: A continuación definimos la lista P formada por los puntos anteriores. (Una lista será un conjunto de datos que debemos representar entre llaves separando por comas sus elementos. $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$)

Paso 3: Obtener la curva de regresión. En campo de entrada elegir según convenga: Ajuste (Lineal, Cuadrático, exponencial, logarítmico, etc).

➤ Mediante el proceso descrito anteriormente realiza el ajuste de los datos correspondientes a las siguientes magnitudes.

❖ área del tetraedro y área minimal

A partir de los resultados obtenidos, responde

7) El ajuste de los datos corresponde a

- e) Un comportamiento lineal
- f) Un comportamiento cuadrático
- g) Un comportamiento exponencial
- h) Ningun comportamiento descrito anteriormente

8) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación _____

9) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos, ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

❖ Volumen del tetraedro y área minimal

A partir de los resultados obtenidos, responde

10) El ajuste de los datos corresponde a

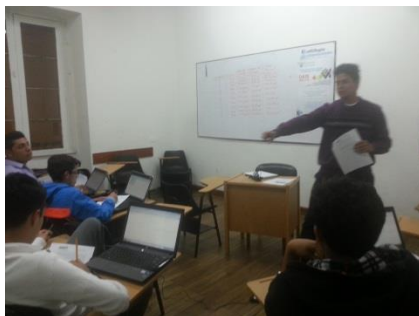
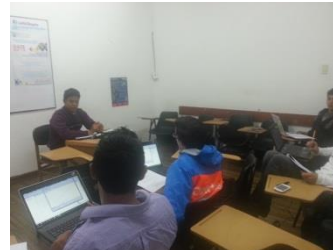
- e) Un comportamiento lineal
- f) Un comportamiento cuadrática
- g) Un comportamiento exponencial
- h) Ningun comportamiento descrito anteriormente

11) Si los resultados se ajustan a otro tipo de comportamiento descríbelo a continuación_____

12) Realiza una descripción del comportamiento que representa el modelo matemático obtenido a partir del ajuste de los datos. ¿Es posible realizar una interpretación física o matemática del proceso estudiado?

9.2 Anexo 2: Evidencias implementación del laboratorio

9.2.1. Con estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemáticas y tecnologías de la información de la Universidad la Gran Colombia.



9.2.2 Pilotaje realizado con estudiantes del colegio distrital Federico García Lorca

