PROPUESTA DE MONOGRAFÍA "DISEÑO DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA FOMENTAR EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS ESPECÍFICAMENTE LA ENSEÑANZA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS A PARTIR DEL SOFTWARE DINÁMICO DGPAD"

Dirigido por el profesor

MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER

DANIELA CHÁVEZ BENÍTEZ.

CÓDIGO: 20122145035

MÓNICA DANIELA MÉNDEZ PALOMINO.

CÓDIGO: 20122145003

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Bogotá D.C 2018-1

Tabla de contenido

Lista de imágenes

Lista de figuras

Lista de tablas

1. Introducción

En el presente trabajo se muestra el diseño de una secuencia de actividades que aportan a la enseñanza de la geometría, en específico a la enseñanza del concepto de congruencia de triángulos bajo el enfoque de Teoría de Situaciones Didácticas, aprovechando el potencial del software de geometría dinámica DGpad, para producir aprendizajes por adaptación.

Para el desarrollo de estas actividades se empleó como metodología una ingeniería didáctica, desarrollando las dos primeras fases; la primera de análisis preliminar, en la cual se realizó un abordaje teórico para dar fundamento al diseño, tomando como soporte didáctico a Brousseau y a Euclides y Hilbert como soporte matemático (cognitivo); la segunda fase de diseño y análisis a priori, en la cual se presenta el diseño de las actividades, sus objetivos, posibles acciones de los estudiantes y retroacciones del software. Por último, se realizó un pilotaje con dos estudiantes del grado séptimo y dos estudiantes del grado noveno, este pilotaje sirvió para verificar los análisis planteados y realizar ajustes al diseño de las actividades.

Las características del software que se aprovecharon en el diseño de las actividades fueron las retroacciones dinámicas que permiten diferenciar entre construcciones exactas y no exactas, posibilitando plantear situaciones a-didácticas en las que el estudiante mismo verifica si las respuestas del software y las construcciones realizadas corresponden a las pedidas.

El documento está organizado en los siguientes apartados: Problematización y justificación, donde se presenta la pregunta orientadora para el desarrollo y realización del trabajo; Objetivos, donde se establecen las metas generales y específicas para el desarrollo del trabajo; Metodología, donde se define la estructura del trabajo; Marco teórico y análisis preliminar, donde se muestran los referentes didácticos y matemáticos para el diseño de las actividades; análisis a priori, donde se definen las actividades; pilotaje, donde se muestra la experimentación de estudiantes de grado séptimo y noveno en cuanto a las actividades diseñadas; conclusiones, donde se presenta los resultados y alcances con el diseño de las actividades y los referentes bibliográficos tomados para sustentar el trabajo.

2. Planteamiento del problema

Una de las contribuciones de la enseñanza de la geometría para la formación matemática en los niveles básico y medio es el desarrollo de competencias de argumentación y razonamiento, competencias que se trabajan en la actividad matemática de demostración. Siguiendo el ejemplo de Los Elementos de Euclides, la mayoría de las propuestas curriculares articula el trabajo de la demostración en geometría alrededor de los criterios de congruencia de triángulos. Así mismo, los Estándares básicos de competencias en matemáticas plantean que los estudiantes al terminar séptimo grado deben "*Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales",* y al terminar noveno grado deben "*Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas".*

Villella (2001) citado por Carbó, A. y Mántica A. (2010), sostiene que, en geometría habitualmente, *"… el uso de la demostración para justificar la validez de una propiedad suele ser confundida por los alumnos y también por algunos docentes, con la enunciación o la representación gráfica de ejemplos que la verifican",* esto sustenta por ejemplo que los estudiantes utilizan los criterios de congruencia dentro de un proceso de argumentación sin tener control de lo que dicen. De tal modo y según Itzcovich (2005), se considera importante que los estudiantes verifiquen y determinen la veracidad de ciertas propiedades en una figura a partir de su propia experiencia en la construcción. Por esto para que los estudiantes reconozcan el significado de los criterios de congruencia más allá de unas palabras mágicas que funcionan en determinado problema y que justifican ciertas construcciones, las actividades diseñadas están centradas en construir los criterios de congruencia como estrategias de solución de problemas de construcción.

Por otra parte, el software de geometría dinámica es una herramienta de enseñanza que transforma las relaciones entre los estudiantes y el saber matemático, gracias a las posibilidades de experimentación que ofrece; posibilidades de enfrentar verdaderos problemas, generar conjeturas sobre su solución y diversas estrategias de verificación de dichas conjeturas. En relación con esto Acosta (2005) señala que, aunque se reconoce el potencial del software en la educación matemática y se acepta la necesidad de introducirlo en nuevas prácticas de la enseñanza de las mismas, no se integra dentro de la práctica profesional para hacer matemáticas, lo que parece contradictorio, ya que se tiene la intención de cambiar las prácticas didácticas pero estos cambios no se asumen en las prácticas profesionales. De tal manera el objetivo es aprovechar las características que ofrece el software para promover un aprendizaje racional de los criterios de congruencia de triángulos.

A partir de esto, surge la pregunta:

¿Qué aspectos se deben tener en cuenta al utilizar el software de geometría dinámica DGpad para aprovechar su potencial en la enseñanza de los criterios de congruencia de triángulos?

3. Objetivos

3.1 General

Diseñar una secuencia de actividades para la enseñanza de los criterios de congruencia de triángulos, que aprovechen el potencial del software DGpad para producir aprendizaje por adaptación.

3.2 Específicos

- Referenciar las características del software dinámico DGpad que potencian el aprendizaje del concepto de congruencia de triángulos en el contexto de la construcción de triángulos.
- Diseñar actividades didácticas y a-didácticas dentro de las cuales se incentive e involucre al estudiante en el aprendizaje de la congruencia de triángulos.

4. Metodología.

Se utiliza la metodología de ingeniería didáctica (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. 1995); específicamente se abordan las fases de análisis preliminar y diseño y análisis a priori de las actividades.

4.1 Ingeniería didáctica:

La ingeniería didáctica surgió en los años ochenta como método de investigación en educación, por la necesidad de consolidar una metodología de investigación específica de la didáctica de la matemática para responder a las exigencias de la educación frente a las producciones significativas de la enseñanza; se caracteriza por esquemas experimentales apoyados en las acciones didácticas en el aula de clase, registros y validaciones internas, las cuales se basan en confrontaciones o comparaciones entre los análisis a priori y a posteriori.

Según Artigue et *al* (1995, p. 34) la metodología de ingeniería didáctica delimita su proceso experimental en cuatro fases:

Fase 1 de análisis preliminar: consiste en el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Fase 2 de diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería: en esta fase se identifican las variables a tener en cuenta según el problema a investigar y las situaciones a proponer a los estudiantes, bajo un control de las variables didácticas y su efecto en los estudiantes y sus comportamientos frente al aprendizaje, específicamente las tareas en un análisis micro-didáctico.

Fase 3 de experimentación: en esta fase se lleva a cabo o se ejecuta lo previsto y diseñado en las fases anteriormente mencionadas para recolectar datos necesarios para el análisis a posteriori.

Fase 4 de análisis a posteriori y evaluación: consiste en el análisis de lo obtenido en la fase de experimentación, con el fin de contrastarlo con el análisis a priori y validar las hipótesis planteadas al inicio de la investigación.

En este trabajo se desarrollarán las dos primeras fases de la ingeniería didáctica.

5. Marco teórico y análisis preliminar

Para el desarrollo de este trabajo, se tomarán como base dos referentes teóricos: Brousseau como soporte didáctico y a Euclides y Hilbert como soporte matemático. Bajo lo planteado por Euclides, y Hilbert, se estudiará el aprendizaje geométrico de los criterios de congruencia en la demostración, estableciendo condiciones de igualdad entre figuras geométricas, segmentos y ángulos. Bajo la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau se abordará el concepto del aprendizaje por adaptación para así definir el rol del software DGPad y la interacción del sujeto y el medio en el aprendizaje.

5.1 Teoría de las situaciones didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas como lo propone Panizza (s.f) se convierte en herramienta vital en la formación y práctica docente ya que busca incentivar al estudiante a interactuar con el medio convirtiéndose así en un explorador, investigador y constructor de sus propios esquemas cognitivos.

Según Brosseau (2007):

> *"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son las marcas del aprendizaje".*

Para comprender el rol de la tecnología dentro de esta la teoría se hace necesario profundizar en conceptos como aprendizaje por adaptación, medio, validación y devolución.

5.1.1 Aprendizaje por adaptación.

Según Acosta, Monroy, y Rueda (2010), el aprendizaje por adaptación es el resultado de la interacción entre el sujeto y el medio. El sujeto tiene una intención y para alcanzarla actúa sobre el medio, el medio reacciona a esa acción por medio de una retroacción, la cual el sujeto interpreta y le asigna un sentido, permitiéndole así decidir si su acción le permitió alcanzar lo que se proponía (validación). Ver Figura 1

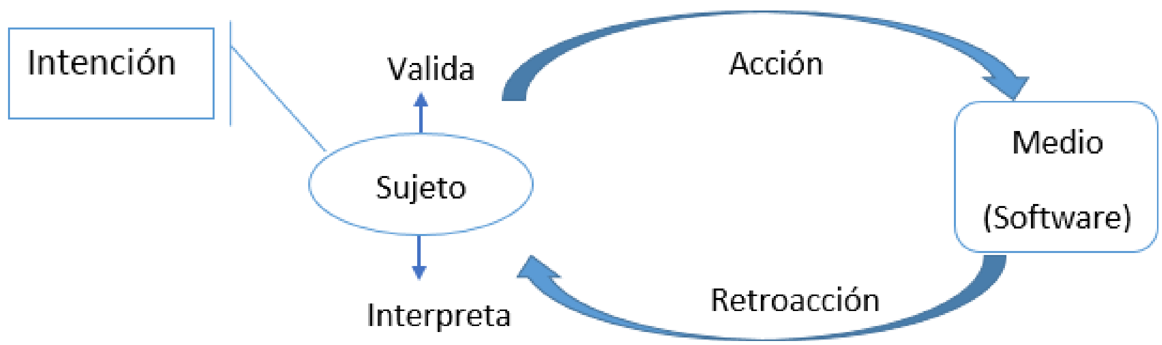


Figura 1 Aprendizaje por adaptación

5.1.2 Medio

El medio para la teoría de situaciones didácticas es una herramienta facilitadora de aprendizaje; debe permitirle al alumno actuar sobre él, mostrándose imparcial frente a las intenciones del alumno, y reaccionando a las mismas, de manera que el alumno pueda deducir de esas retroacciones información relevante sobre la validez de sus estrategias. (Acosta *et al*., 2010)

5.1.3 Situación didáctica y situación a-didáctica

Basados en Acosta *et al* (2010), puede decirse que una situación es didáctica cuando un individuo (profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (alumno) un saber dado y una situación es a-didáctica cuando se da interacción entre un sujeto (alumno) y un medio para resolver un problema, sin intención didáctica pues el medio no tiene intención de enseñarle nada al alumno. la situación a-didáctica puede verse como una parte de una situación didáctica.

El profesor utiliza la situación a-didáctica para que los alumnos construyan conocimiento, en esta situación se involucran dos procesos:

5.1.3.1 Validación

La validación es todo el proceso de interacción entre el sujeto con el medio, pues esta conduce al alumno a validar sus acciones sobre el medio, pero el alumno no puede dar por válidas sus acciones sin haber interpretado las retroacciones del medio, ya que esto le permitir invalidar o validar las estrategias matemáticas y contrastarlas con su intención.

No es posible para el alumno decidir sobre la validez de una acción sin hacer referencia a su intención o sin haber interpretado las retroacciones del medio.

5.1.3.2 Devolución.

En este proceso el profesor acompaña y refuerza el proceso de validación de los estudiantes haciéndoles tomar conciencia de sus acciones y de las retroacciones del medio, llevando a que sea el estudiante quien decida si resolvió el problema, todo esto sin interrumpir ese proceso como afirma (Panizza, s.f)

> “La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.”

5.2 DGPad como medio

En este trabajo se utiliza el software DGPad como medio con el que el estudiante interactúa para adquirir un aprendizaje por adaptación. Dicho Software permite realizar construcciones geométricas, manipular construcciones dadas por medio del arrastre de objetos y herramientas que el mismo proporciona.

La programación interna del software garantiza que los objetos construidos en la pantalla tengan relaciones correspondientes a las propiedades geométricas, y que dichas propiedades se mantengan al arrastrar los objetos, únicamente si se cumple una de las siguientes dos condiciones: 1) para producir la propiedad se utiliza una herramienta de construcción que garantiza dicha propiedad, o 2) existe una combinación de otras propiedades que garantiza lógicamente la propiedad buscada (lo cual corresponde a un teorema de la geometría).

De esta manera, al trabajar en el software es posible diferenciar experimentalmente entre una construcción exacta, aquella que tiene determinadas propiedades que se mantienen al arrastrar los objetos, y una construcción no exacta, en la que las propiedades se pierden al arrastrar. Así que al utilizar DGPad para resolver problemas de construcción, el estudiante tiene la posibilidad de validar experimentalmente, por medio del arrastre, sus propuestas de solución.

Este software es un medio adecuado para que la actividad de solución de problemas de construcción se convierta en una situación a-didáctica, ya que las retroacciones (específicamente los efectos del arrastre de los objetos) dan la posibilidad al alumno de validar sus estrategias.

5.3 Geometría de Euclides

Alrededor del año 300 a.C, Una de las contribuciones esenciales de Euclides de Alejandría en su famosa obra Los Elementos, fue tomar los saberes geométricos de su tiempo, ordenarlos, clasificarlos y sistematizarlos, mostrando componentes como nociones comunes, definiciones de conceptos, axiomas y postulados, para luego ponerlos a disposición de una comunidad de estudiosos en su conocido texto los Elementos**,** sentando de esta forma las bases de un sistema axiomático para la geometría. Sánchez (como se citó en Calderón 2016).

Los Elementos de Euclides poseen limitaciones de diferente naturaleza, pero forma el primer sistema o método axiomático formal, según Sánchez (2012) esto quiere decir que se organiza la teoría de la siguiente manera:

- Se definen los objetos, o nociones a estudiar.
- Se fijan unos principios básicos que se son evidentes y no es necesaria su demostración.
- Se establecen unos principios lógicos, nociones comunes o axiomas, (se suponen válidos para todas las ciencias).
- A partir de lo anterior se deducen las proposiciones de la teoría que se está axiomatizando.

Así la forma como se expone el saber geométrico en los elementos de Euclides puede expresarse en representaciones visuales y formulación verbal, esto quiere decir que la actividad geométrica euclídea se realiza en dos sistemas de representación según (Angulo, 2009) representación de las figuras y el discurso, el primero permite representar visualmente los objetos geométricos y observar sus propiedades y el segundo, permite enunciar las definiciones, los teoremas y sus demostraciones.

En el libro uno de los Elementos de Euclides se exponen 23 definiciones, 5 postulados, 8 nociones comunes y 48 proposiciones, entre estas 48 proposiciones existen tres que reciben hoy en día el nombre de criterios de congruencia entre triángulos, los cuales se proponen al inicio del libro para utilizarlos en gran parte de las demostraciones de las demás proposiciones. Estas proposiciones son:

- **Proposición I-4**

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente. (corresponde al llamado criterio LAL)

- **Proposición I-8**

Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y también tienen la base igual, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales. (corresponde al llamado criterio LLL)

- **Proposición I-26**

Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante. (corresponde al llamado criterio ALA).

Euclides hace una demostración de estas proposiciones basándose en la superposición y movimientos de los objetos. Por ejemplo, en la demostración de la proposición I,4 (LAL) podemos encontrar argumentos como "sea $AB\Gamma$, ΔEZ, dos triángulos que tienen los dos lados $AB, A\Gamma$ iguales a ΔE, ΔZ respectivamente. Si se aplica el triángulo $AB\Gamma$ al triangulo ΔEZ y el punto A se coloca sobre el punto Δ y la recta AB sobre la recta ΔE, coincidirá también el punto B sobre el punto E por ser igual AB a ΔE". Pero esta operación (superposición) no está definida en las definiciones, postulados o nociones comunes que se suponen son necesarias para demostrar, razón por la cual fue criticado por matemáticos posteriores como Hilbert, quienes se propusieron resolver esa inconsistencia.

5.4 Geometría de Hilbert.

A finales del siglo XIX, el matemático David Hilbert (1862-1943) expone su obra "***fundamentos de la geometría***" en la cual formula sus principios de axiomatización de la geometría, como una propuesta de mayor rigor lógico con respecto a Los Elementos de Euclides. Comienza con tres términos no definidos y cinco relaciones indefinidas como lo son *punto, recta, plano, estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo, ser continuo* respectivamente. Hilbert mostró que con sus axiomas podía demostrar los teoremas fundamentales de Euclides (Cardenas, 2013).

En los fundamentos de la geometría de Hilbert existen cinco categorías de axiomas: Pertenencia, Orden, Igualdad o Congruencia, Paralelismo y Continuidad. la categoría III da cuenta de los axiomas de congruencia los cuales establecen condiciones de igualdad entre figuras geométricas, segmentos y ángulos, que permiten hacer las demostraciones de congruencia sin recurrir a acciones perceptivas como la superposición.

Los criterios de congruencia en *los fundamentos de la geometría* son expuestos como teoremas y al igual que en Euclides se proponen al inicio, para luego utilizarlos en gran parte de las demostraciones de su sistema de axiomas. Estos teoremas son:

- **Teorema 10**. (Primer teorema de congruencia de triángulos, correspondiente al criterio LAL)

Si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$, se cumplen las siguientes congruencias:

$$AB = A'B'$$

$$AC = A'C'$$

$\acute{a}ngulo\ A = \acute{a}ngulo\ A'$. Entonces los dos triángulos son congruentes.

- **Teorema 11** (Segundo teorema de congruencia de triángulos, correspondiente al criterio ALA).

Si en cualesquiera dos triángulos un lado y los dos ángulos adyacentes son respectivamente congruentes, los triángulos son congruentes

- **Teorema 16** (Tercer teorema de la congruencia de triángulos, correspondiente al criterio LLL)

Si dos triángulos tienen los tres lados de uno congruente respectivamente a los tres lados correspondientes del otro, los triángulos son congruentes.

En la demostración de estos teoremas Hilbert, a diferencia de Euclides, hace uso de todo el sistema axiomático que estableció previamente en la categoría III, en los axiomas se evidencia la congruencia entre segmentos y ángulos como una relación de equivalencia y usa para la demostración solo lo establecido con anticipación.

Los axiomas, teoremas y definiciones de congruencia son:

- **Axioma III.1**

Si A, B son dos puntos de la recta α y además A' es otro punto de la misma o distinta recta α', dado un punto A' sobre la recta α' puede encontrarse solo un punto B', de tal manera que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ sean congruentes o iguales. Esta relación en signos se expresa de la siguiente manera

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

- **Axioma III.2**

Si los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ son congruentes con el segmento $\overline{AB}$, también el segmento $\overline{A'B'}$ es congruente con el $\overline{A''B''}$. Dicho brevemente: si dos segmentos son congruentes con un tercero, son congruentes entre sí.

Si $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ y $\overline{A''B''} \cong \overline{AB}, entonces\ \overline{A'B'} \cong \overline{A``B``}$

- **Axioma III.3**

Sean $\overline{AB}$ $y\ \overline{BC}$ dos segmentos de la recta α sin puntos comunes diferentes a B, y por otra parte $\overline{A'B'}$ $y\ \overline{B'C'}$ dos segmentos sobre la misma o distinta recta α', pero en todo caso sin puntos comunes diferentes a B: si entonces $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $y\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, siempre se verifica. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

- **Axioma III.4**

Dados un ángulo $\angle(h,k)$ en un plano β, una recta a' en un plano β', supongamos que en una de las regiones de β determinadas por a'; representemos por h'una semirrecta de a' que parte de O'. Existe entonces, en el plano β una y solo una semirrecta k' tal, que el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente o igual al ángulo $\angle(h',k')$, y a la vez todos los puntos interiores del ángulo $\angle(h',k')$ están situados en la región dada con respecto a a'. Esta relación se expresa mediante la siguiente relación

$$. \ \angle(h,k) \cong \angle(h',k').$$

Todo ángulo es congruente consigo mismo, es decir:

$$\angle(h,k) \cong \angle(h,k).$$

$$\angle(h,k) \cong \angle(k,h).$$

- **Axioma III.5**

Si el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente con el ángulo $\angle(h',k')$ y el ángulo $\angle(h'',k'')$, entonces el ángulo $\angle(h',k')$ es congruente con el ángulo $\angle(h'',k'')$; es decir, si $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$ y $\angle(h,k) \cong \angle(h'',k'')$, entonces $\angle(h',k') \cong \angle(h'',k'')$

- **Axioma III.6**

Si dos triángulos $\Delta\mathrm{ABC}$ y $\Delta\mathrm{A'B'C'}$ verifican las congruencias $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, también queda satisfecha siempre la congruencia $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

- **Teorema III.1**

La congruencia de dos segmentos es reflexiva: Todo segmento es congruente con sí mismo, es decir $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

- **Teorema III.2**

La congruencia de segmentos es simétrica: Si un segmento $\overline{AB}$ es congruente con otro segmento $\overline{A'B'}$, entonces $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$

- **Teorema III.3**

La congruencia de segmentos es transitiva. Si un segmento $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y a la vez este segmento es congruente con otro $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$, se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$.

- **Definición III.1**

La longitud de un segmento es la clase de equivalencia de los segmentos congruentes con él. La longitud de un segmento $\overline{AB}$ se simboliza $long\ (AB)$. Así que (AB) = long(CD) significa $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. A partir de esto, se deducen directamente las siguientes propiedades de la longitud de segmentos:

1. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
2. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ implica que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.
3. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{A'B'} = \overline{A'B'}$ entonces $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
4. Si C es un punto del segmento $\overline{AB}$ y C' es un punto en el segmento $\overline{A'B'}$ y si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, entonces por el axioma 1.3, tenemos que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Es decir, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$

En conclusión, a pesar de las diferencias de tratamiento de los axiomas y los procedimientos de demostración entre Euclides y Hilbert, ambos autores introducen los criterios de congruencia como herramientas potentes para la demostración de muchos de sus teoremas, y por lo tanto los exponen al comienzo de sus obras.

Gran parte de los textos antiguos y actuales de geometría siguen este mismo esquema de exposición, enunciando los criterios de congruencia (muchas veces sin demostración) y utilizándolos como base para demostrar los demás teoremas. Al analizar libros de textos utilizados para la enseñanza de la geometría como: Geometría Elemental de Edwin Hemmerling (2005), Matemáticas II de Santiago Valiente Banderas y Matemáticas III de José Juárez, Arturo Martínez y Armando Flórez (2015), se observa que estos enuncian los criterios de congruencia al inicio de sus textos y después los utilizan sin demostración ni justificación, imponiéndolos ante los estudiantes como una verdad de la cual no conocen el origen pero que debe ser aceptada.

Lo anterior, como lo afirma (Carbò & Màntica, 2010) es una de las razones por la que los alumnos tienen grandes dificultades para aprender y utilizar correctamente los criterios de congruencia, presentando problemas principalmente en la comprensión misma de los criterios de congruencia, su significado y el porqué de su formulación, vaciando de significado la actividad demostrativa.

La ingeniería propuesta en este trabajo se propone lograr que el sentido de los criterios de congruencia surja como una justificación experimental de fenómenos observados al intentar resolver problemas de construcción de triángulos.

Se proponen estas actividades partiendo de que los criterios de congruencia de triángulos, más allá de ser utilizados en demostraciones, son económicos al resolver por ejemplo problemas que relacionen la medida de una magnitud desconocida en un triángulo congruente a otro, permitiendo resolver tipos de problemas que involucren el conocimiento de una magnitud desconocida de un triángulo que es congruente a otro con magnitudes conocidas.

6. Diseño

La intención de estas actividades es que los estudiantes construyan el sentido de los criterios de congruencia de triángulos, es decir, que los criterios de congruencia surjan de la actividad de resolución de problemas de los estudiantes como estrategias óptimas para resolver problemas.

Formulamos la siguiente hipótesis: *es posible hacer que los criterios de congruencia surjan de la actividad del estudiante en la resolución de problemas de construcción.*

Aunque normalmente los criterios de congruencia se utilizan en problemas de demostración, el hecho de que el software de geometría dinámica permite distinguir claramente entre una construcción exacta (que cumple unas determinadas propiedades que se mantienen al arrastrar) y una construcción no exacta (en las que las propiedades se pierden al arrastrar), posibilita plantear problemas de construcción de triángulos con medidas como datos. De esta manera los criterios de congruencia pueden aparecer como estrategias óptimas de resolución.

En efecto, los criterios de congruencia se refieren a las condiciones mínimas suficientes para que dos triángulos tengan las mismas medidas. Por ende, son respuestas al siguiente problema: “¿cuáles son los datos necesarios y suficientes para determinar un solo triangulo?”

6.1 Características de las actividades

Gracias a la actividad de resolución de problemas se espera que el estudiante:

- Tome conciencia de que no es posible anticipar las seis medidas de un triángulo (los tres lados y los tres ángulos).
- Tome conciencia de que hay unas medidas que determinan otras medidas.
- Tome conciencia de que hay propiedades de los triángulos como la desigualdad triangular y la suma de los ángulos internos de un triángulo que deben tenerse en cuenta, pero al mismo tiempo son insuficientes al anticipar la construcción de un triángulo.
- Especifique cuál es el número mínimo o máximo de medidas que determinan todas las medidas de un triángulo y que permiten anticipar la construcción del mismo.

Se pedirá a los estudiantes que escriban todas las medidas de un triángulo que luego tendrán que construir con el software. Al intentar hacer una construcción exacta podrán hacer las tres primeras tomas de conciencia. Luego, se planteará un concurso en el que cada equipo recibe puntos por cada medida propuesta (si es posible construir un triángulo con esas medidas), y el total de puntos se divide en el número de triángulos diferentes que puedan construirse. De esta manera se ven obligados a dar el mayor número posible de medidas y a garantizar que pueda construirse exactamente un triángulo.

6.2 Prerrequisitos

Para el desarrollo de estas actividades es necesario que los estudiantes sepan utilizar las herramientas del software que les permiten construir triángulos con medidas dadas: *circunferencia de radio fijo, ángulo de amplitud fija, medida de un ángulo.*

Por otro lado, es necesario que comprendan la diferencia entre construcción exacta y construcción no exacta por medio del arrastre como estrategia validación. También es necesario que el estudiante comprenda que todo problema de construcción implica dos cosas:

1. Saber qué propiedades se tienen que garantizar
2. Saber cómo garantizarlas

Hay dos formas de garantizar que las propiedades se mantengan al arrastrar, la primera y más sencilla es utilizar una herramienta de construcción que garantice esas propiedades y la segunda es utilizar una combinación de propiedades que garantizan una propiedad.

7. Análisis a priori

7.1 Ejemplo de Actividades para trabajar los prerrequisitos

Se entrega a los estudiantes una figura preparada, donde hay construido un triángulo rectángulo.

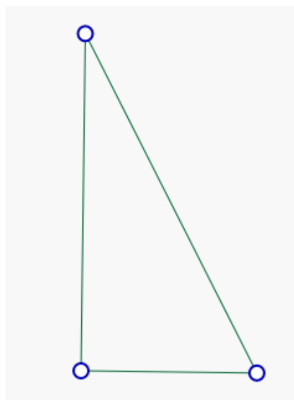


Imagen 1: Construcción propuesta

Se les pide que observen el triángulo y que construyan uno igual. Se espera que utilicen las herramientas segmento o polígono para construirlo.

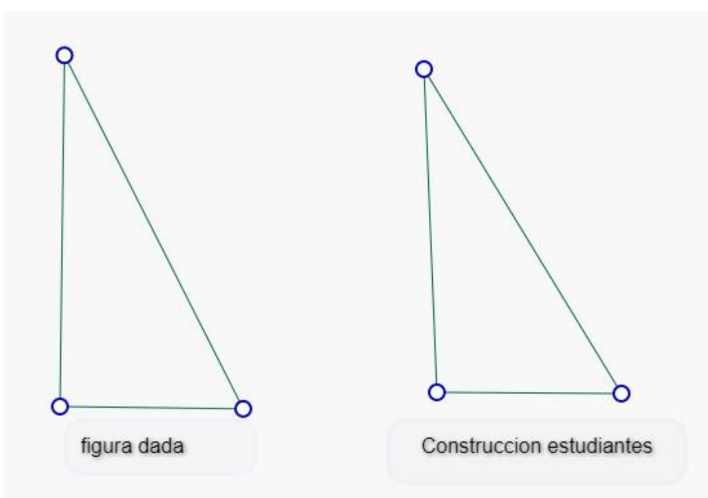


Imagen 2. Construcción estudiante

Cuando terminen su construcción, se les pide que arrastren los vértices de la figura dada y de la que ellos construyeron. Se espera que digan que la figura que ellos construyeron no se comporta de la misma manera que la figura dada.

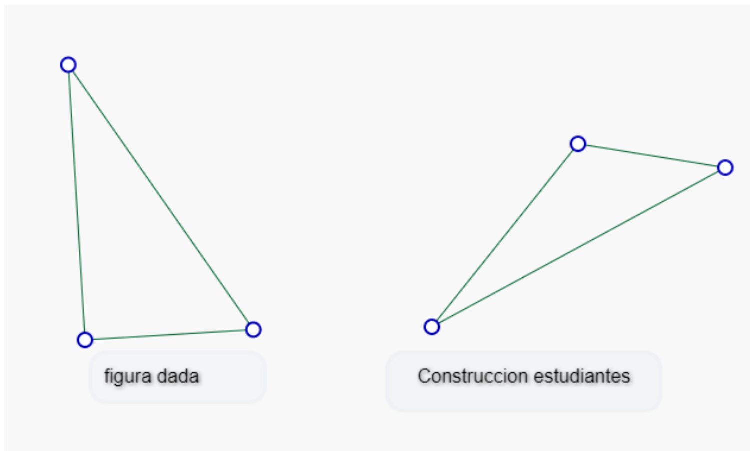
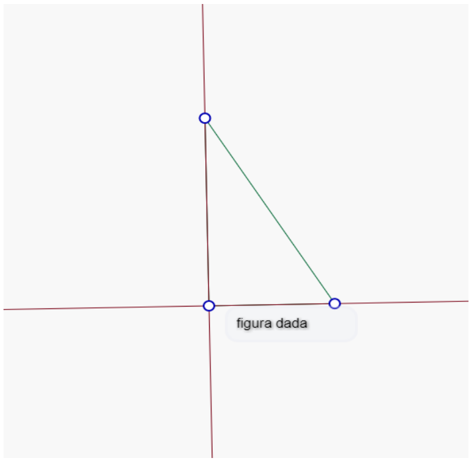


Imagen 3. Estrategia de validación

Se les pide entonces que intenten construir un triángulo que se comporte igual al que se les presentó. Los estudiantes podrán intentar diversas estrategias perceptivas para acomodar su construcción, pero al arrastrar los vértices podrán invalidar su construcción, concluyendo que no se comporta de la misma manera que el triángulo dado. El profesor les pide que revisen la figura modelo y digan qué propiedades se mantienen al arrastrar los vértices. Como recurso para que los estudiantes se den cuenta de la propiedad que se desea resaltar en la figura dada (ángulo recto), se les propone que construyan las rectas que contienen los lados y arrastren vértices tanto en la figura dada como en la que ellos construyeron y que comparen lo que observan.



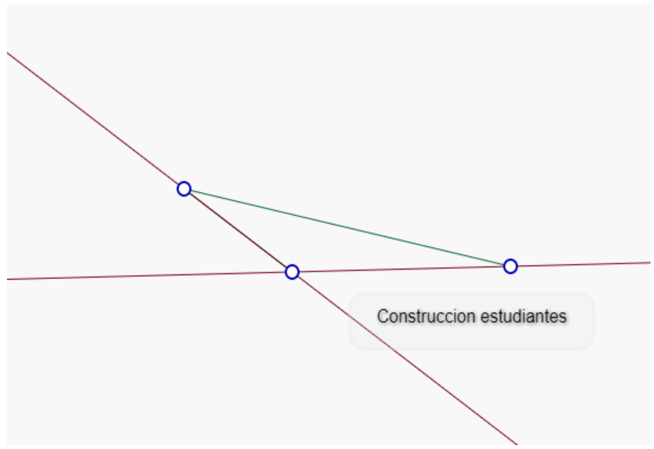


Imagen 4. Construcción de rectas que contienen dos de los lados del triángulo.

Se espera que digan que las rectas trazadas sobre los segmentos de la figura dada son perpendiculares y se mantienen al arrastrar los vértices, pero las rectas trazadas en su construcción no se comportan de la misma manera, se les indicará que las rectas perpendiculares en su intersección forman un ángulo recto y por lo tanto el triángulo que deben garantizar es rectángulo, y se les mostrará la herramienta ‘recta perpendicular’, que permite obtener esa propiedad.

7.2 Problema 1

7.2.1 Primera tarea.

Se les pide a los estudiantes escribir las medidas de los tres lados y los tres ángulos de un triángulo cualquiera. Se espera que los estudiantes propongan las medidas de los tres lados y los tres ángulos sin tener en cuenta los criterios de congruencia (ya que se supone que no los conocen). Es posible que los estudiantes tengan en cuenta o no la desigualdad triangular y la suma de los ángulos internos de un triángulo.

7.2.2 Segunda tarea.

Se les pide que construyan un triángulo en DGPad que tenga las 6 medidas propuestas. Se espera que utilicen las herramientas *circunferencia de radio fijo* para construir los lados y *ángulo de amplitud fija* para construir los ángulos.

Si las medidas de los ángulos no suman 180°, no será posible construir el triángulo, pues no habrá un punto de intersección entre las semirrectas que determinan la amplitud de dos de los ángulos. Por ejemplo, si se dan los ángulos 115°, 90° y 70°, cuando intenten construir obtendrán las siguientes configuraciones:

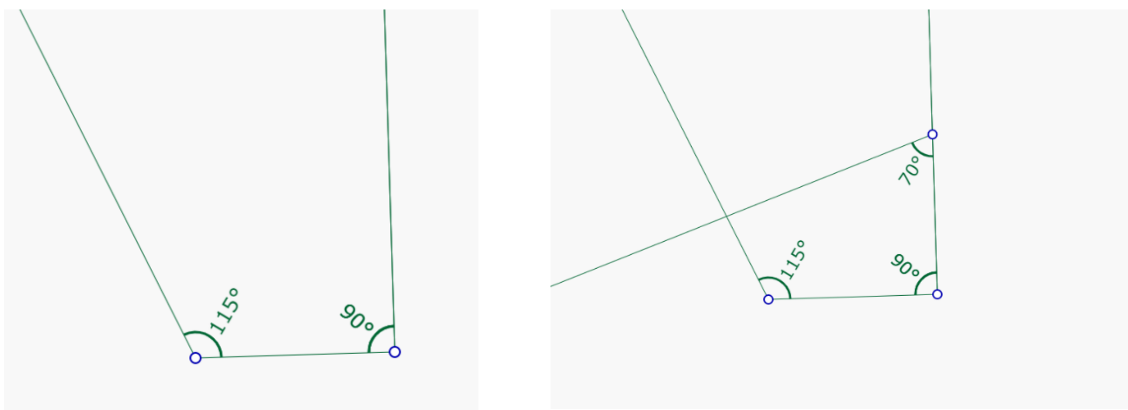


Imagen 5. Construcción que excede la suma interna de los ángulos de un triángulo.

Si las medidas de los lados no cumplen la desigualdad triangular, no existirá intersección entre las circunferencias que determinan las longitudes de los lados. Por ejemplo, si se dan las medidas 10 cm, 5 cm y 3 cm, al tratar de construir un triángulo con estas medidas se obtienen:

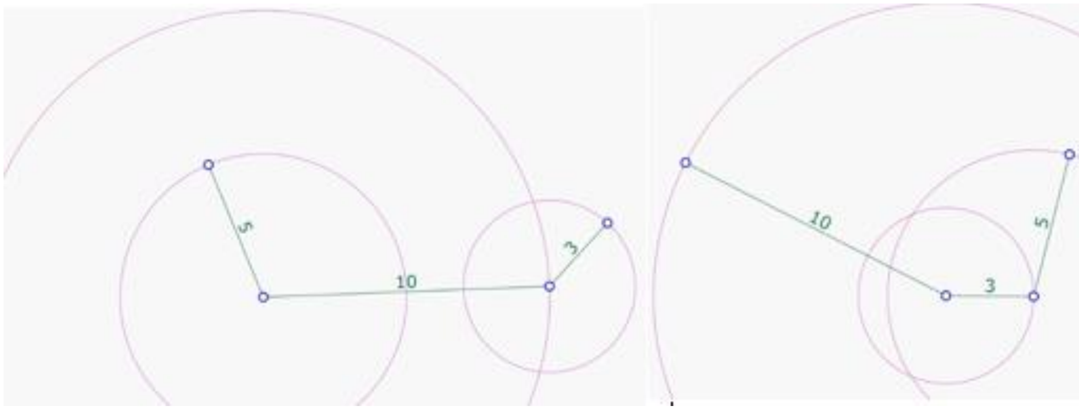


Imagen 6: construcción de los estudiantes

Como ya se dijo anteriormente las circunferencias no se cortan y por lo tanto no puede formarse un triángulo.

Lo anterior lleva a los estudiantes a reconocer que no todas las medidas de los lados y de los ángulos corresponden a un triángulo. El profesor podrá introducir los teoremas de desigualdad triangular y de la suma de los ángulos internos de un triángulo, o solicitar a los estudiantes que busquen información sobre las medidas de los triángulos, o también podrá organizar una experimentación sistemática que conduzca a los estudiantes a identificar y formular esos teoremas.

Si los estudiantes tienen en cuenta la desigualdad triangular y la suma de los ángulos internos de un triángulo, es muy poco probable que las seis medidas correspondan a un triángulo. Al hacer la construcción se darán cuenta, gracias a las retroacciones del software, que el triángulo queda determinado antes de haber garantizado todas las medidas. Ejemplo: si se dan las seis medidas 48º, 75º, 57º, 7cm, 5cm y 10cm

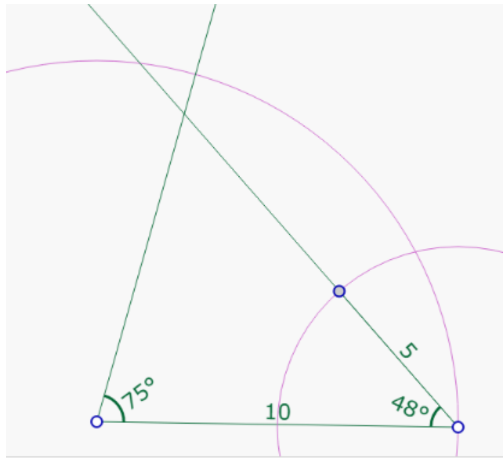


Imagen 6, Construcción del triángulo determinada antes de garantizar las 6 medidas

En este caso las medidas cumplen con las propiedades de la suma interna de los ángulos de un triángulo y con la desigualdad triangular, sin embargo, el triángulo queda determinado antes de poder garantizar las seis medidas; es decir, al construir los ángulos de 75° y 48° sobre el lado de 10cm, ya quedan determinados los otros dos lados, sin que cumplan las medidas pedidas.

Puede existir el caso en el que algunos estudiantes reconozcan los tipos de triángulos y propongan las seis medidas para construir un triángulo equilátero (el cual es posible construir con seis medidas dadas) de ser así se les pedirá a los estudiantes que den nuevas medidas para construir un triángulo que no sea equilátero.

De esta manera los estudiantes concluirán que es muy poco probable predecir las seis medidas de un triángulo.

7.3 Problema 2

7.3.1 Primera tarea

Como los estudiantes concluyeron que es muy poco probable predecir las seis medidas de un triángulo, se les pedirá que experimenten con números diferentes de medidas.

Después de hacer la experimentación, las retroacciones del software, al igual que en el problema anterior, les permitirán llegar a las siguientes conclusiones:

- **Cinco medidas:**
  - ✓ la medida de tres ángulos y dos lados, la medida de tres lados y dos ángulos. Es muy poco probable que se pueda construir un triángulo con estas medidas.
- **Cuatro medidas:**
  - ✓ dos ángulos y dos lados, un ángulo y tres lados. Es muy poco probable que se pueda construir un triángulo con estas medidas.
  - ✓ tres ángulos y un lado. Se puede construir un triángulo con estas medidas.
- **Tres medidas**
  - ✓ Tres lados, tres ángulos, dos lados y un ángulo o un lado y dos ángulos, con estas medidas los estudiantes sí podrán construir un triángulo.
- **Dos medidas**
  - ✓ dos ángulos, dos lados, un lado y un ángulo. Es posible construir un triángulo con esas medidas.
- **Una medida**
  - ✓ Un ángulo o un lado. Es posible construir un triángulo con estas medidas.

Es posible que los estudiantes, al concluir que se puede predecir tres medidas de un triángulo para su construcción, no piensen en dar dos o una medida, por lo tanto se les propondrá que den dos y una medida y construyan un triángulo, a lo que se espera que concluyan que también es posible construir un triángulo con dichas medidas.

7.3.2 Segunda tarea

Se plantea un concurso entre los estudiantes: cada equipo debe proponer un cierto número de medidas para que otro equipo construya un triángulo; si el triángulo es construible con las medidas dadas, se asigna un punto por medida dada al equipo proponente, pero si se puede construir más de un triángulo, los puntos se dividen por el número de triángulos que se puedan construir.

Se espera que cada equipo proponga el máximo de medidas posibles tal como lo concluyeron en la experimentación del problema anterior, y que cada equipo intente construir triángulos diferentes con los datos dados:

- Si proponen tres ángulos y un lado.

Se espera que el equipo receptor construya primero el lado dado por medio de la herramienta *circunferencia de radio fijo*, y en cada uno de los extremos de este construya dos de los ángulos dados por medio de la herramienta *ángulo de amplitud fija*, obteniendo un triángulo con las medidas dadas. Cuando construyan un triángulo con las medidas propuestas, se les plantea (a quien propuso las medidas y a quien construyó el triángulo) la siguiente pregunta, ¿Es posible construir un triángulo que tenga las medidas dadas pero diferente al construido inicialmente?

Entonces, se les propondrá que construyan el lado dado (por medio de la herramienta *circunferencia de radio fijo*), y sobre uno de los extremos construyan el ángulo que no tomaron en la construcción inicial (que obtenían en la intersección de los dos ángulos construidos) y en el otro extremo uno de los ángulos restantes, obteniendo dos triángulos diferentes a la inicial, pero con las medidas dadas.

Ejemplo: si los estudiantes dan como medidas: 5 cm, 75 °, 35° y 70°.

Obtendrán tres triángulos diferentes:

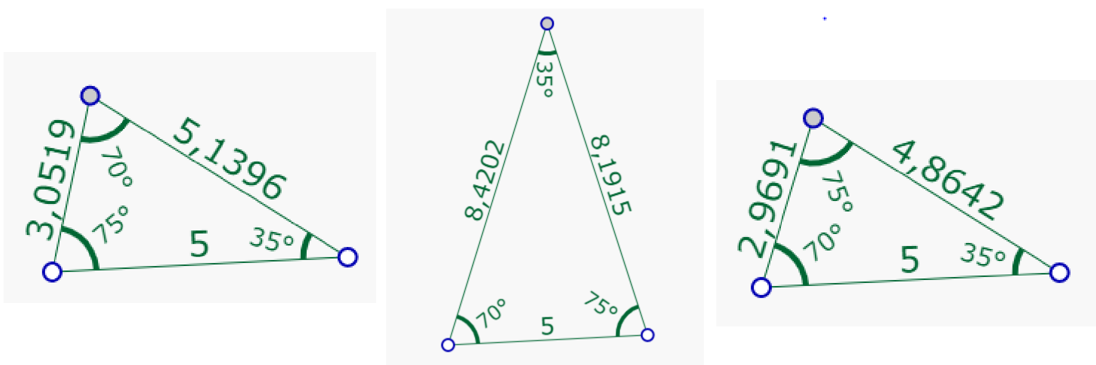


Imagen 7. Construcciones si se proponen tres ángulos y un lado.

Como se pueden construir tres triángulos diferentes cuando se dan tres ángulos y un lado, el estudiante que los propuso tiene 1/3 de los 4 puntos que pudo haber ganado (4 puntos porque el triangulo es construible, pero se dividen estos puntos en tres porque se pueden construir tres triángulos diferentes con las medidas dadas).

- Si proponen tres lados.

Se espera que con la herramienta *circunferencia de radio fijo* construyan uno de los tres lados y en cada uno de sus extremos construyan las circunferencias de radio igual a la medida de los otros dos lados (centro en el extremo del segmento inicial, radio igual al lado dado), al unir los vértices para construir el triángulo pueden pasar dos cosas:

1. El estudiante toma uno de los dos puntos de intersección entre las dos circunferencias.
2. El estudiante toma los dos puntos de intersección entre las dos circunferencias.

Si el estudiante sólo toma uno de los dos puntos de intersección, para hacer que tome conciencia de que hay en realidad dos puntos se le preguntará ¿Cuántos puntos de intersección hay entre dos circunferencias?

Con esto se espera que los estudiantes logren ver que hay dos puntos de intersección entre las circunferencias pero que los triángulos que se construyen tienen las mismas medidas. Entonces se les plantea la siguiente pregunta, ¿Es posible construir un triángulo diferente al construido inicialmente pero que tenga las medidas dadas?

Se espera que el estudiante construya el triángulo tomando como base los otros lados, obteniendo triángulos de medidas iguales a las del triángulo inicialmente construido.

Como no es posible construir un triángulo diferente a la inicial, pero de medidas iguales a las dadas, el estudiante debe concluir que cuando se dan las tres medidas de los lados de un triángulo los ángulos quedan determinados para estas medidas, por ende, se puede construir un solo triángulo. El equipo que propuso estas medidas obtiene tres puntos.

- Si proponen tres ángulos.

Se espera que el estudiante construya un segmento cualquiera (base del triángulo) y desde sus extremos construya dos de los ángulos dados por medio de la herramienta *ángulo de* *amplitud fija* y en el punto de intersección de estos dos ángulos determine el tercer ángulo. El estudiante dirá que ya construyó el triángulo con los tres ángulos dados y se le planteará la pregunta ¿Es posible construir un triángulo diferente al construido inicialmente, pero con las medidas dadas?

Se espera que el estudiante mida los lados y al arrastrar los vértices se dé cuenta de que existen infinitos triángulos diferentes que tienen esos tres ángulos. El equipo que propuso las medidas no obtiene puntos

- Dos lados y un ángulo

Se espera que el estudiante construya dos triángulos diferentes, pero con las medidas dadas, uno cuando el ángulo dado está comprendido entre los dos lados dados y otro cuando el ángulo dado no está comprendido entre los dos lados dados.

Ejemplo: si se dan las medidas 3cm, 6cm y un ángulo de 45° (ángulo comprendido entre los lados), se obtiene:

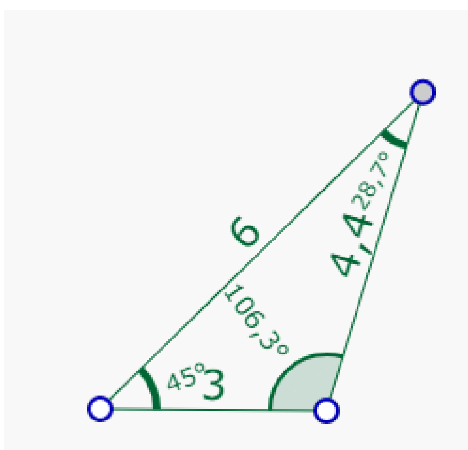


Imagen 8.Construccion si se dan dos lados y un ángulo comprendido por los lados

Y si se dan las mismas medidas, pero el ángulo no esta comprendido entre los lados dados.

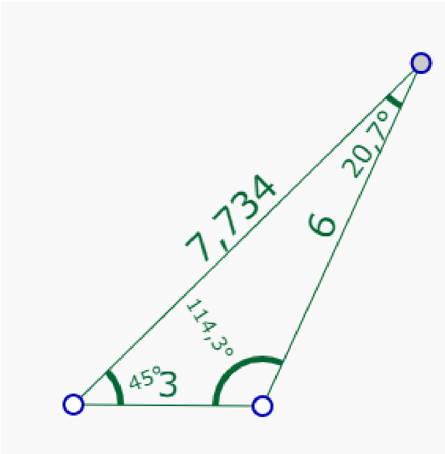


Imagen 9. Construcción si se dan dos lados y un ángulo no comprendido por los lados.

- Dos ángulos y un lado

Se espera que los estudiantes construyan un triángulo que tenga como base el lado dado y dos ángulos sobre cada uno de los extremos de este.

Ejemplo: 7cm, ángulo de 58° y ángulo de 35°.

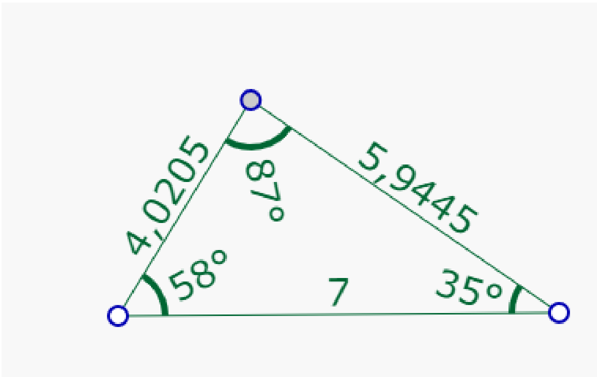
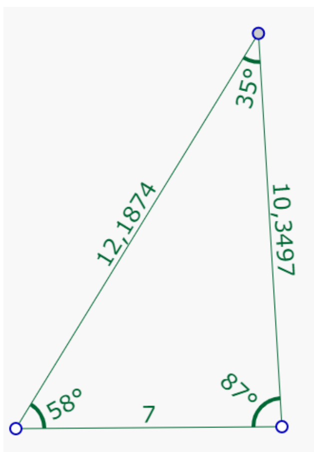


Imagen 10. Construcción si se dan dos ángulos y un lado

Cuando se les pregunta si se puede construir otro triangulo con las medidas dadas se espera que el estudiante construya el triángulo a partir del ángulo que no esté dado tomando conciencia de que cuando propone dos ángulos, en realidad está dando la medida de los tres ángulos (propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo), si no es así se le propone al estudiante que lo halle (puede hallarlo mediante la suma de los ángulos dados restados a 180°) y lo construya en uno de los extremos del lado dado, obteniendo dos triángulos diferentes al construido inicialmente con las medidas dadas.



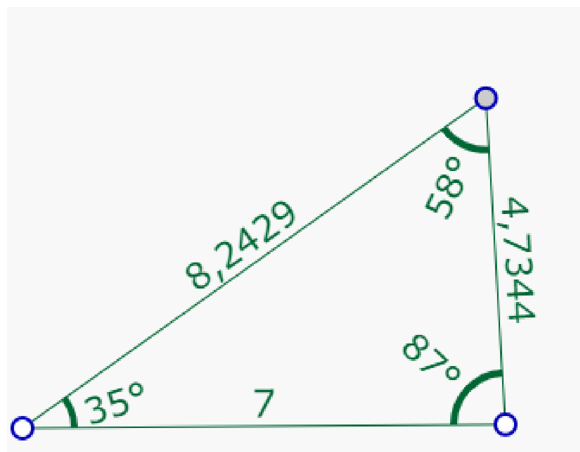


Imagen 11. Construcciones a partir del tercer ángulo.

- Dos lados

Se espera que el estudiante comprenda que si da dos lados, cuando construyen uno de ellos por medio de la herramienta *circunferencia de radio fijo* y sobre uno de sus extremos, otra circunferencia de radio igual al lado restante, la amplitud del ángulo que separa estos dos lados queda determinada por el vértice sobre la circunferencia que fija cada segmento, por lo tanto, se puede mover por toda la circunferencia los vértices cambiando la amplitud de este ángulo y las medidas restantes.

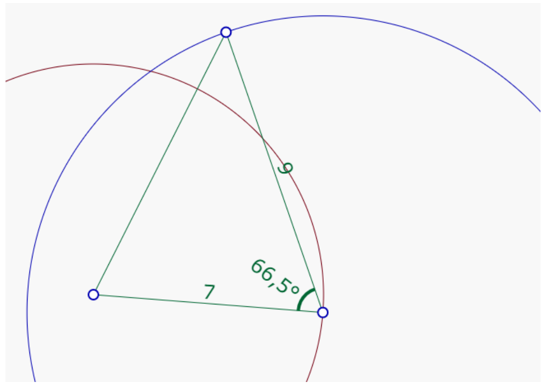


Imagen 12. Construcción si se dan dos lados.

- Un lado y un ángulo

Se espera que el estudiante comprenda que cuando toman un lado y un ángulo, la amplitud del ángulo queda determinada por una semirrecta infinita, por lo tanto, se puede tomar cualquier punto sobre esta y construir el triángulo con las medidas dadas, luego se pueden construir infinitos triángulos con un lado y un ángulo dado.

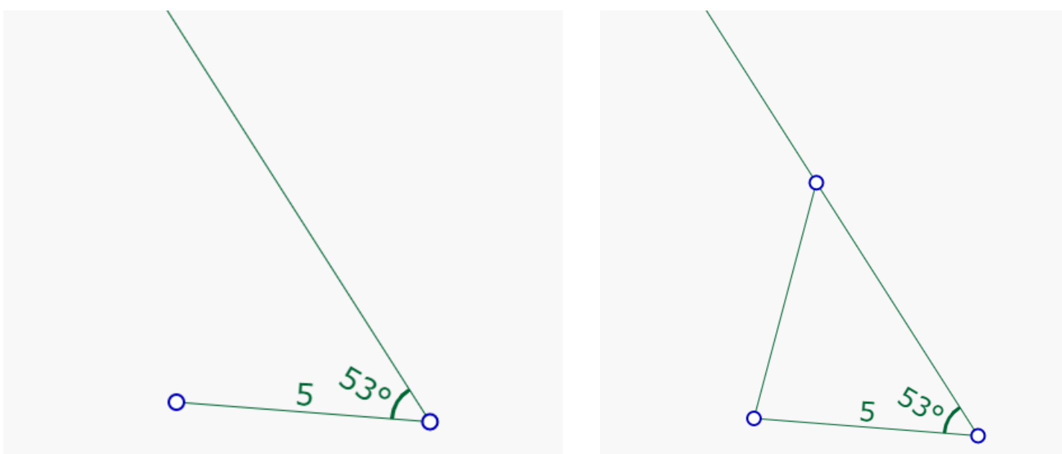


Imagen 13. Construcción si se dan un lado y un ángulo

- Un lado o un ángulo

Se espera que los estudiantes determinen que cuando se dan un lado o un ángulo se pueden construir infinitos triángulos ya que las otras medidas no quedan determinadas.

Los estudiantes deben concluir que:

- Construyen infinitos triángulos cuando proponen la medida de tres ángulos, o cuando proponen dos medidas y una medida (independiente de cuales sean)
- Construyen tres triángulos cuando proponen la medida de tres ángulos y un lado o dos ángulos y un lado
- Dos triángulos cuando proponen la medida de dos lados y un ángulo
- Un triángulo cuando proponen la medida de los tres lados.

7.3.3 Tercera tarea

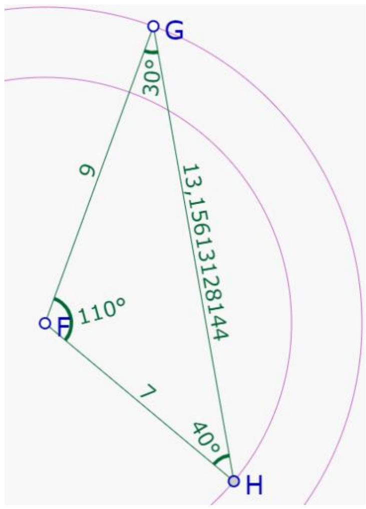
Se les vuelve a proponer la competencia, pero esta vez los estudiantes deben nombrar el triángulo y sus elementos, sin olvidar que el objetivo es determinar el máximo de medidas que garanticen la construcción de un solo triangulo.

- Si dan dos lados y el ángulo comprendido entre los dos lados dados: $\Delta ABC; lados\ AB\ y\ BC;\ \angle ABC$

Se espera que construyan un solo triángulo con estas medidas y que concluyan que como el ángulo está entre los dos lados, la amplitud que los separa es siempre la misma, por ende, solo se puede construir un triángulo con estas medidas. Entonces se le propone que den unas medidas en las que el ángulo no esté comprendido entre los dos lados dados.

Hay tres posibilidades:

1. Si la semirrecta que define el ángulo de amplitud dada corta el círculo que define el tercer lado en dos puntos puede construirse dos triángulos diferentes con las medidas dadas. Ejemplo: triángulo FGH, FG =9, FH=7 y FGH= 30°.



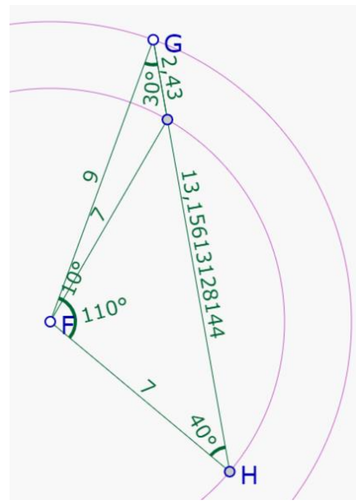


Imagen 14.intersecciòn de la semirrecta y la circunferencia en dos puntos

2. Si la semirrecta que define el ángulo de amplitud dada corta el círculo que define el segundo lado en un solo punto podrá construirse un solo triángulo. Existen dos casos: a) cuando el origen de la semirrecta está dentro del círculo que define el segundo lado y b) cuando la semirrecta es tangente a ese círculo. Es muy poco probable que los estudiantes encuentren este último caso ya que no se produce con valores enteros para el ángulo y los lados. Por esta razón solo presentamos un ejemplo del caso a).

   Ejemplo: triangulo DEF, EF=5, DEF 94° y FD=9

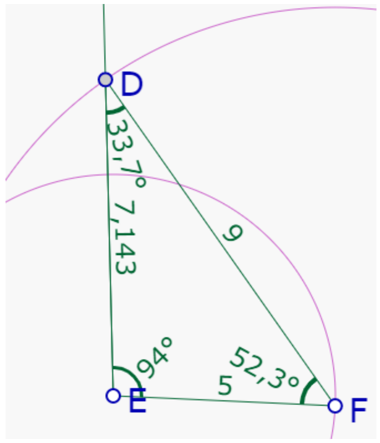


Imagen 15. Intersección de la semirrecta de la amplitud del angulo y el círculo en un solo punto

3. Si la semirrecta que define el ángulo de amplitud dada no corta el círculo que define el tercer lado, no podrá construirse ningún triángulo. Ejemplo: triángulo ΔABC; $ángulo\ ACB$ 110°; $lado\ AB = 7cm\ y\ lado\ AC = 11c$m

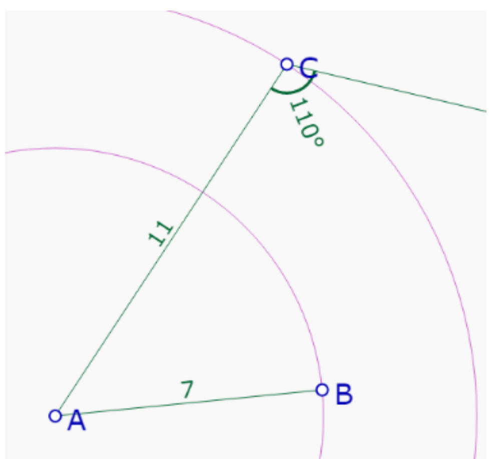


Imagen 16.cuando la semirrecta que define la amplitud del ángulo no corta el círculo

Es indispensable que los estudiantes se enfrenten a los tres casos. Si los valores propuestos por ellos corresponden únicamente a uno o dos de los tres casos, el profesor deberá proponerles ejemplos que correspondan a los otros casos. Si los estudiantes encuentran ejemplos de los tres casos, concluirán que no siempre es posible construir un solo triángulo dadas las medidas de dos de sus lados y del ángulo que no está comprendido entre ellos.

- Dos ángulos y un lado, con el lado comprendido entre los dos ángulos dados.

Se espera que los estudiantes construyan el lado dado y sobre sus extremos construyan los dos ángulos dados. Entonces se les pregunta: ¿Es posible construir un triángulo diferente pero con las medidas dadas? Se espera que los estudiantes propongan intercambiar los ángulos, suceden dos cosas, primero que las medidas del triángulo son iguales y segundo el triángulo no va a corresponder a los datos propuestos.

Ejemplo $\Delta ABC; ángulos\ BAC\ 54°\ y\ ABC\ 69°;\ \ lado\ BC = 8cm.$

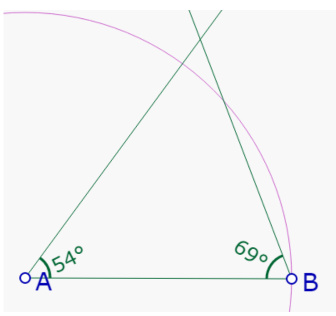


Imagen 17. construcción del triángulo ABC

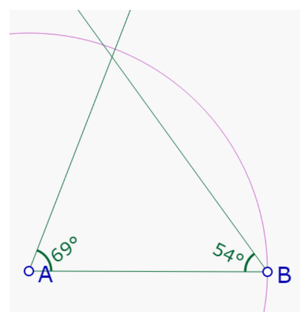


Imagen 18. construcción del triángulo ABC intercambiando los ángulos.

Se espera que los estudiantes concluyan que solo se puede construir un triángulo cuando se dan dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, ya que la intersección de las semirrectas de los ángulos de amplitud fija condiciona el tercer ángulo y los lados restantes.

Se les propone que den las medidas de dos ángulos y un lado que no esté comprendido entre los dos ángulos dados.

Se espera que el estudiante construya el lado dado y sobre uno de sus extremos uno de los ángulos dados; pero se enfrenta a la siguiente dificultad: para poder construir el otro ángulo necesita el vértice y por lo tanto necesita definir la longitud de otro lado. Si el estudiante no logra superar esta dificultad, el profesor le recordará que es posible calcular el tercer ángulo y éste tiene como vértice el segundo extremo del segmento dado. Ejemplo $\Delta XYZ; ángulos\ XYZ\ 37°\ y\ XZY\ 45°;\ \ lado\ XY = 5cm.$

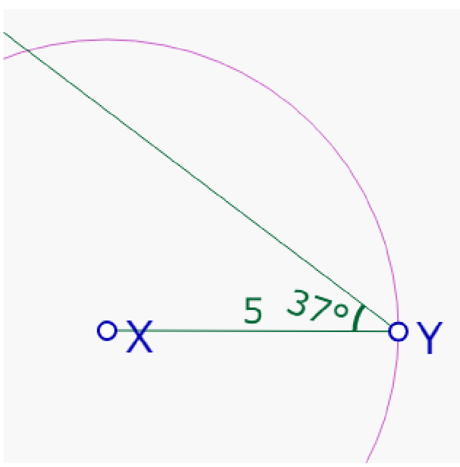


Imagen 19. Dificultad para construir el ángulo XZY

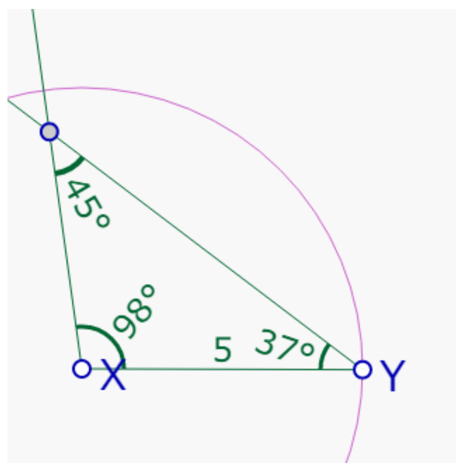


Imagen 20. Solución de la dificultad para construir el ángulo YXZ para poder construir el triángulo XYZ

Se espera que los estudiantes se den cuenta que al calcular el tercer ángulo caen en el caso anterior cuando el lado está comprendido entre los dos ángulos.

- Tres ángulos. (ΔABC; $ángulos\ ABC, BCA\ y\ CAB$).

Se espera que los estudiantes digan que es posible construir infinitos triángulos cuando proponen tres ángulos, ya que pueden escoger un segmento de cualquier medida como base para la construcción de los ángulos.

Después de realizar los experimentos correspondientes a los casos anteriores, los estudiantes concluirán que para ganar el máximo de puntos en el concurso deben proponer:

1. las medida de los tres lados
2. las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
3. la medida de dos ángulos y un lado.

Estas estrategias corresponden a los criterios de congruencia.

7.4 Problema 3 (Anticipación)

7.4.1 Primera tarea

Se les propone a los estudiantes una lista de triángulos (nombrando sus elementos) de tal manera que sin construirlos sean capaces de dar puntos a cada triángulo de la lista (un punto por cada medida si se puede construir solo un triángulo y cero puntos si se puede construir más de un triángulo con esas medidas), cuando los estudiantes asignen los puntos se les preguntará ¿Por qué le corresponden esos puntos a cada triángulo? ¿Cómo saben que le corresponden esos puntos sin haber hecho la construcción? Luego se les propone a los estudiantes que hagan la construcción del triángulo para verificar sus respuestas.

Los estudiantes deben ser capaces de anticipar la construcción de un solo triángulo si las medidas dadas son: tres lados, dos lados y un ángulo comprendido entre ellos y dos ángulos y un lado que este comprendido entre ellos.

7.5 Problema 4.

7.5.1 Primera tarea

Se les muestra a los estudiantes la figura de un triángulo con sus medidas, luego se les presenta otro triángulo con medidas no visibles y se enuncia que los dos triángulos son iguales, se les pregunta ¿Qué debe pasar para que los dos triángulos sean iguales? Se espera que ellos realicen un razonamiento y digan que las medidas de los dos triángulos deben ser iguales y basta con conocer las medidas de uno de los dos triángulos para determinar las medidas del otro.

Se les presenta dos triángulos iguales y se pregunta ¿cómo verificar que los dos triángulos son iguales utilizando el mínimo de medidas? se espera que los estudiantes hagan un razonamiento sobre la igualdad de triángulos y enuncien los criterios de congruencia, es decir que determinen que dos triángulos son iguales si son respectivamente iguales sus tres lados, dos lados y un ángulo comprendido ellos o dos ángulos y un lado comprendido entre ellos (basta con verificar uno de los tres criterios para determinar la congruencia entre dos triángulos)

8. Pilotaje

Este pilotaje se realizó con dos equipos de dos estudiantes cada uno, un equipo de estudiantes de grado séptimo (equipo uno) y el otro de estudiantes de grado noveno (equipo dos).

A continuación, se compara el análisis a priori, presentado en el desarrollo de la propuesta, con la experiencia de los estudiantes durante la aplicación de las actividades.

8.1 Problema 1

8.1.1 Primera tarea:

Como se esperaba, los dos equipos dieron seis medidas para construir un triángulo.

Medidas propuestas por el equipo 1: 6cm, 5cm y 10cm, ángulos 28,53, 99.

Medidas propuestas por el equipo 2: 7cm, 5cm y 15cm, 75°, 35°,70°

Al formular las medidas los dos equipos tuvieron en cuenta la suma de los ángulos internos de un triángulo, pero no tuvieron en cuenta la desigualdad triangular, lo que provocó que las medidas que propuso el equipo 2 no cumplieran esta propiedad.

8.1.2 Segunda tarea:

Cada grupo construyo el triángulo con las medidas que el otro equipo propuso y como se había previsto utilizaron las herramientas *circunferencia de radio fijo* para construir segmentos y *ángulo de amplitud fija* para construir los lados.

Equipo 1

Por medio de la experimentación y retroacción del software llegaron a la conclusión que con las medidas de los lados que dio el grupo dos no pueden construir un triángulo pues no hay un punto de intersección entre las circunferencias de radio igual a dos de los lados dados (cuando toman como base el lado mayor)

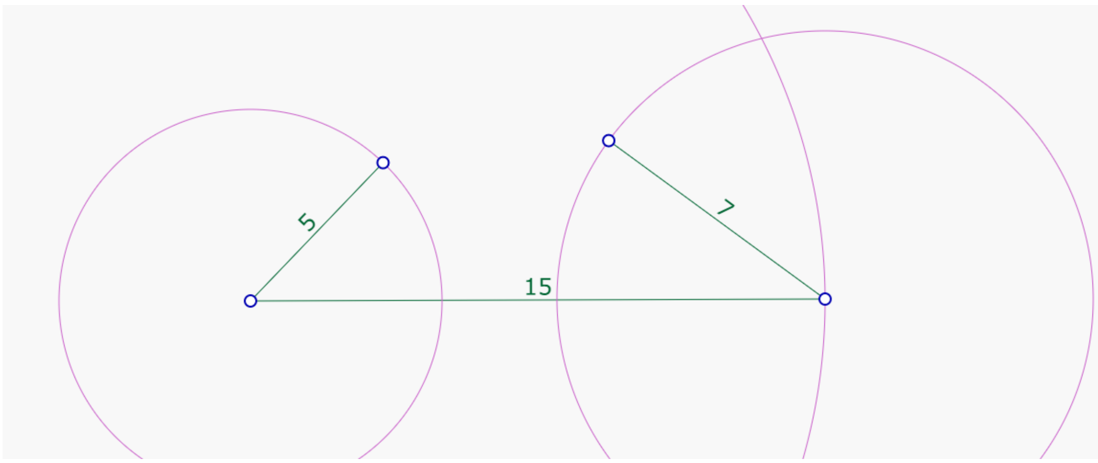


Imagen 21. Construcción dada los tres lados realizado por los equipos

Lo que les hizo pensar en una propiedad relacionada a los lados y que las medidas dadas no cumplen, por lo tanto, se pidió que investigaran sobre propiedades de los triángulos y lograron verificar que las medidas de los lados no cumplían una de las propiedades de los triángulos (desigualdad triangular, un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia), específicamente no cumplía cuando verificaban la propiedad para los lados de 15 y 7cm:

$$15 > 7 + 5 = 12 \quad \text{Y} \quad 7 < 15 - 5 = 10$$

Ya que 15 es mayor que la suma de los otros dos lados y 7 es menor que la diferencia de los otros dos lados.

Por lo tanto, el grupo 1 le explico al grupo 2 que no podían construir el triángulo ya que las medidas de los lados no cumplen la desigualdad triangular, lo que llevó al grupo dos a revisar las medidas que propusieron y las medidas que propuso el equipo 1.

Equipo 2

Construyen el triángulo con las medidas que ellas propusieron y observan que no hay un punto de intersección entre las circunferencias que se hacen a los extremos del lado construido inicialmente, ya que no cumplen la propiedad mencionada por el equipo 1, por lo tanto, vuelven a proponer otras medidas, pero teniendo en cuenta la desigualdad triangular: 12cm, 17cm y 8cm.

Tras verificar las medidas y por medio de las retroacciones del software los dos grupos llegaron a la conclusión que, aunque las medidas cumplían las propiedades de un triángulo, no se podía construir un triángulo con esas medidas pues cuando construían el triángulo a partir de unas medidas las otras quedaban determinadas sin haberlas construido, lo que les permitió concluir que es muy difícil anticipar las seis medidas de un triángulo.

8.2 Problema 2

8.2.1 Primera tarea

Los grupos propusieron que para determinar el máximo de medidas que permiten la construcción de un triángulo con dichas medidas disminuirían la cantidad de medidas que proponían, por medio de la experimentación y retroacciones del software, el equipo 1 responde que se puede predecir máximo tres medidas de un triángulo para su construcción, estas pueden ser dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado y el equipo 2 responde que se puede predecir la construcción de un triángulo cuando se da la medida de tres lados o las medidas de los tres ángulos que cumplan la propiedad de la desigualdad triangular y la suma interna de los ángulos de un triángulo respectivamente.

Como los equipos tenían diferentes conclusiones las profesoras intervienen y proponen que construyan un triángulo con cada una de las medidas que el otro equipo relaciona en su conclusión.

El equipo uno propuso al grupo dos las siguientes medidas: dos lados de $5cm$ y $4cm$ y un ángulo de $30°$; dos ángulos $35°$ y $65°$ y un lado $7cm$.

El equipo dos propuso al grupo uno las siguientes medidas: tres lados $4cm, 7cm$ y $9cm$; tres ángulos $75°, 80°, 25°$

Construcciones del equipo uno

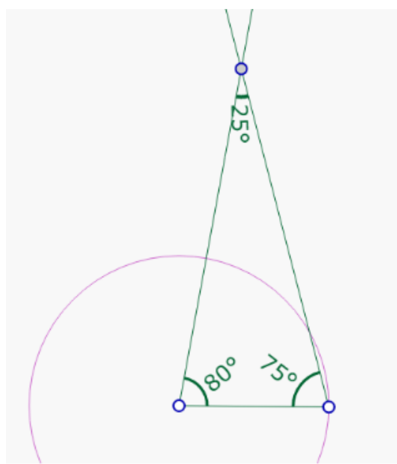


Imagen 22. construcción de un triángulo cuando se dan tres ángulos

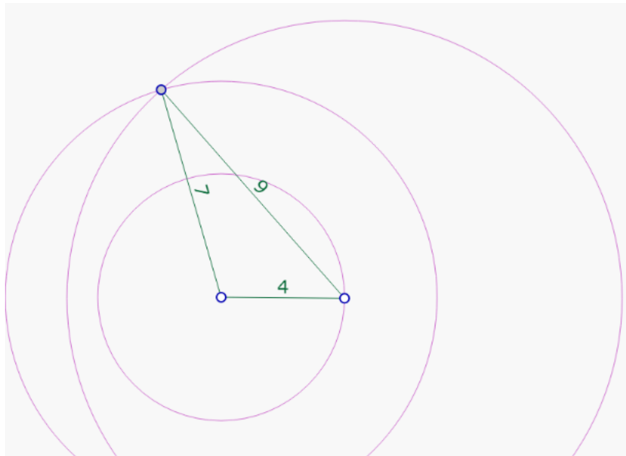


Imagen 23. Construcción de un triángulo cuando se dan tres lados

El equipo uno observa que las tres medidas de los lados que cumplan la propiedad desigualdad triangular y la medida de los tres ángulos que cumplan la propiedad de la suma interna de los ángulos de un triángulo, también permiten predecir la construcción de un triángulo.

Construcción del equipo dos

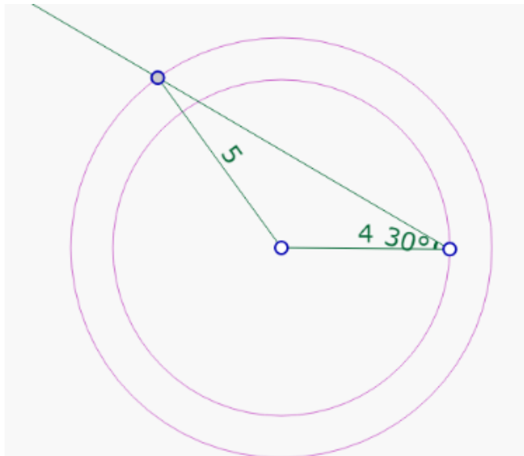


Imagen 24. Construcción de un triángulo cuando se dan dos lados y un ángulo

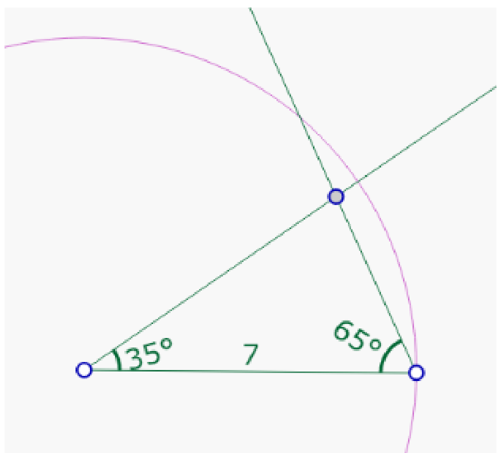


Imagen 25. Construcción de un triángulo cuando se dan dos ángulos y un lado

El equipo 2 observó que pueden predecir la construcción de un triángulo también cuando proponen dos ángulos y un lado o dos lados y un ángulo y no solamente cuando proponen tres lados y tres ángulos como habían concluido.

Como se había predicho los grupos no pensaron en dar dos medidas y una medida para la construcción de un triángulo, por lo tanto, se les propuso que dieran dos medidas y una medida y construyeran un triángulo, las medidas propuestas fueron: dos lados $8cm, 9cm$; dos ángulos $49°, 23°$; un angulo $63°$ y un lado $8cm$

Dos medidas

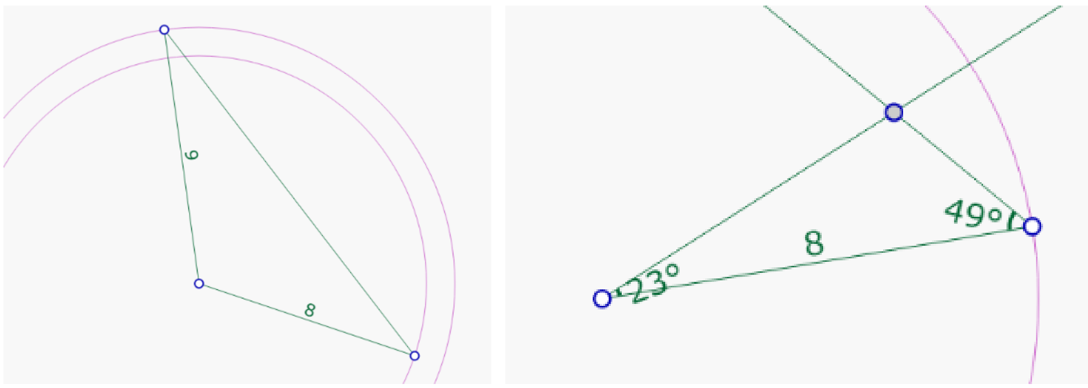


Imagen 26. Construcción de un triángulo cuando se dan dos medidas

Una medida

Imagen 27. Construcción de un triángulo cuando se da una medida

Los equipos concluyen que cuando se dan dos medidas y una medida también se puede predecir la construcción de un triángulo.

Se puede concluir que los estudiantes identificaron de manera espontánea que se puede construir un triángulo cuando se propone una medida, dos medidas o tres medidas.

8.2.2 Segunda tarea

La competencia se realizó por rondas:

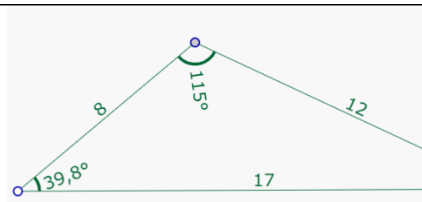
<table>
<tr><th colspan="4">Primera ronda</th></tr>
<tr><th colspan="2">Equipo 1</th><th colspan="2">Equipo 2</th></tr>
<tr><th>Medidas propuestas por el equipo 2</th><th>Construcción</th><th>Medidas propuestas por el equipo 1</th><th>Construcción</th></tr>
<tr>
<td>8 cm, 12cm y 17cm
.</td>
<td>

Imagen 28. construcción de un triángulo dado los tres lados

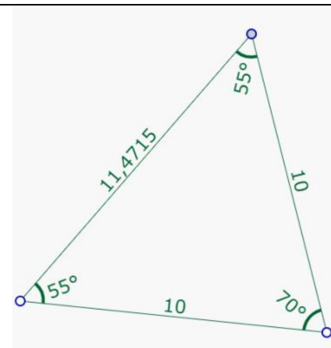
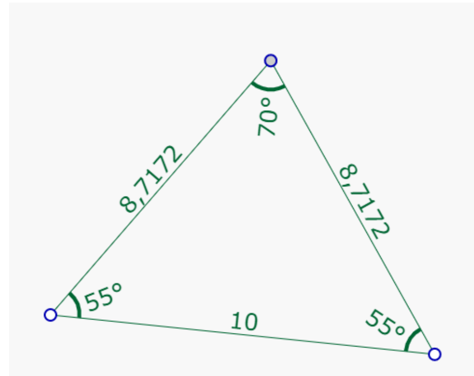
Los estudiantes concluyeron que construyen un solo triángulo con la medida de los tres lados, pues los ángulos</td>
<td>55°, 70° y
10 cm</td>
<td>

Imagen 29. Construcción de un triángulo dado dos ángulos y un lado</td>
</tr>
</table>

	quedan determinados para esos lados y siempre serán los mismos independientemente de cuál sea la base del triángulo. El equipo1 le da 3 puntos al equipo 2 ya que solo se puede construir un triángulo con las medidas propuestas.		 *Imagen 30. construcción a partir del tercer ángulo* los estudiantes reconocieron que cuando dan la medida de dos àngulos en realidad proponen la medida de los tres ángulos, por ende pueden construir un triángulo diferente si construyen el triángulo a partir del ángulo que obtienen al restar a 180 la suma de los àngulos propuestos: El equipo 2 concluye que construyen dos triángulos con dos ángulos y un lados, por lo tanto el grupo 1 tiene ½ de 3 puntos que pudieron haber obtenido (tres puntos porque el triángulo es construible, dividido en

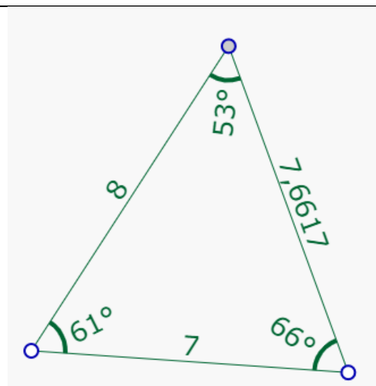
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>dos porque se pueden construir dos triángulos con esas medidas).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Segunda ronda</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipo 1</td><td colspan="2">Equipo 2</td></tr>
<tr><td>Medidas propuestas por el equipo 2</td><td>Construcción</td><td>Medidas propuestas por el equipo 1</td><td>Construcción</td></tr>
<tr><td>61°,7cm y 8cm.</td><td>

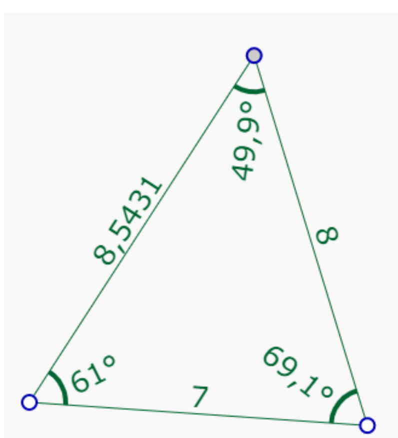
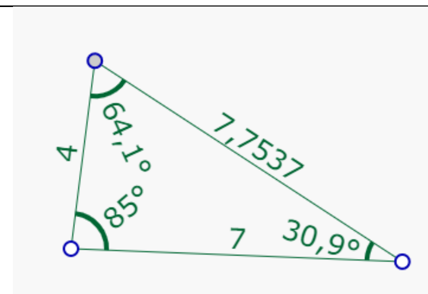
Imagen 31. construcción de un triángulo dado un ángulo y dos lados

</td><td>85°,7cm y 4cm.</td><td>

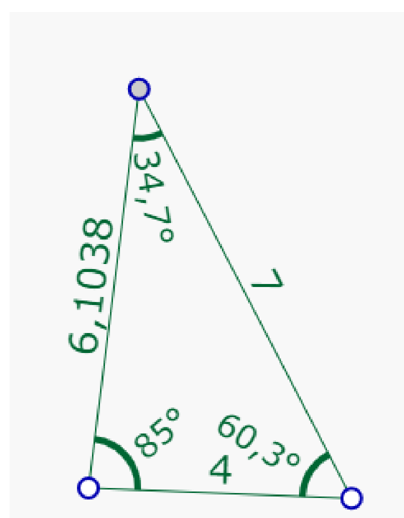
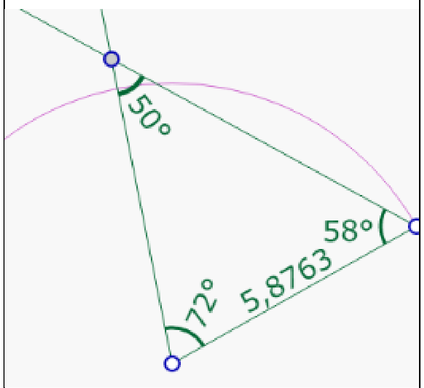
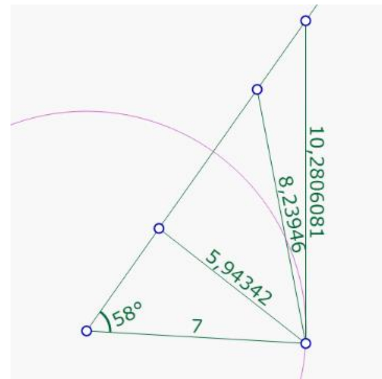
Imagen 33. construcción de un triángulo dado un ángulo y dos lados

</td></tr>
</table>

	Imagen 32. construcción de un triángulo cambiando de lugar los lados El equipo 1 concluye que construyen dos triángulos con las medidas propuestas (dos lados y un ángulo). Por lo tanto, el equipo 2 tiene ½ de los tres puntos que pudo haber obtenido.		*Imagen 34. construcción de un triángulo cambiando de lugar los lados* Este equipo concluye que construyen dos triángulos con dos lados y un ángulo. Por lo tanto, el equipo 1 tiene ½ de los tres puntos que pudo haber obtenido.
Tercera ronda			
Equipo 1		**Equipo2**	
Medidas propuestas por el equipo 2	**Construcción**	**Medidas propuestas por el equipo 1**	**Construcción**

72º, 18º, 90º	 *Imagen 35. construcción de un triángulo dado tres ángulos* El equipo concluye que si se dan los tres àngulos se pueden construir infinitos triàngulos porque puede construir infinitos lados y siempre se cumpliran los àngulos.	7cm y 58º	 *Imagen 36. construcción de un triángulo dado un ángulo y un lado* El equipo dos concluye que si se dan solo dos medidas, en este caso un lado y un àngulo podran hacer infinitos triàngulos porque pueden tomar infinitos puntos sobre la semirrecta para construir los lados restantes del triàngulo.
Ambos equipos no obtienen puntos porque se pueden construir infinitos triàngulos con las medidas dadas.			
Cuarta ronda			
Equipo 1		**Equipo 2**	
Medidas propuestas por el equipo 2	**Construcción**	**Medidas propuestas por el equipo 1**	**Construcción**

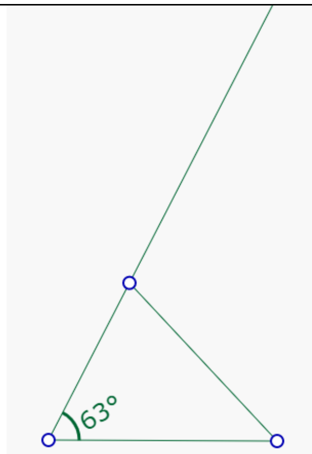
<table>
<tr>
<td>63º</td>
<td>

Imagen 37. construcción de un triángulo dado un ángulo

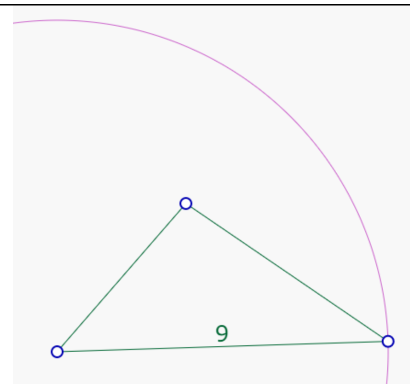
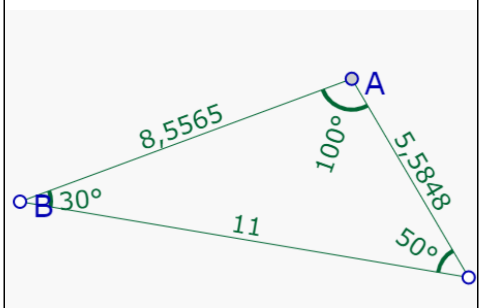
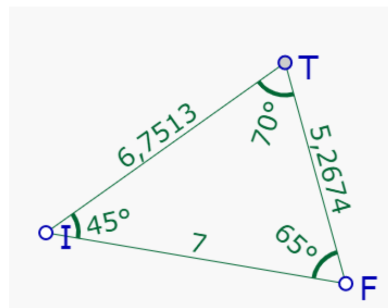
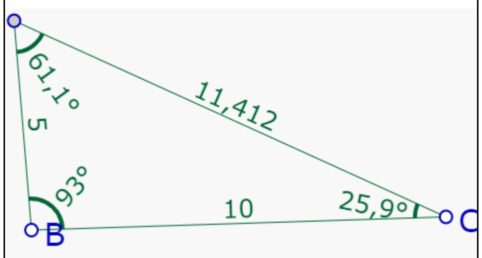
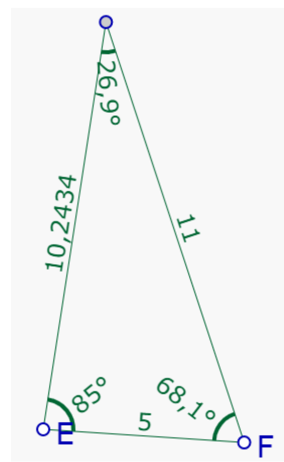
El equipo 1 determino que para construir un triángulo que tenga ese ángulo, toman cualquier segmento como base, además que la semirrecta que determina la amplitud del ángulo es infinita y se puede tomar cualquier punto sobre esta, por lo tanto, construyen infinitos triángulos que tengan un ángulo de 63°.</td>
<td>9cm</td>
<td>

Imagen 38. construcción de un triángulo dado un lado

El equipo 2, concluyo que se pueden construir infinitos triángulos con el lado propuesto, ya que pueden tomar otros lados que cumplan la desigualdad triangular o cualquier ángulo para construir los otros lados.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Ambos equipos obtienen cero puntos.</td>
</tr>
</table>

Tercera tarea (nombrando el triángulo y sus elementos)

Primera ronda			
Equipo 1		**Equipo 2**	
Medidas propuestas por el equipo 2	**Construcción**	**Medidas propuestas por el equipo 1**	**Construcción**
Triángulo ABC: ángulos ABC 30º y BCA 50°, BC: 11 cm	 *Imagen 39. construcción del triángulo ABC* el equipo 1 concluye construyen un solo triángulo cuando las medidas dadas son dos ángulos y un lado comprendido por los dos ángulos dados. Por lo tanto, le dan tres puntos al equipo 2.	Triángulo IFT: ángulos FIT:45° y ITF:70° IF:7 cm	El  *Imagen 40. construcción del triángulo IFT* equipo 2 concluye que construyen un solo triángulo cuando las medidas dadas son dos ángulos y un lado no comprendido por los ángulos dados y le dan al equipo 1 tres puntos.
Segunda ronda			
Equipo 1		**Equipo 2**	
Medidas propuestas	**Construcción**	**Medidas propuestas por el**	**Construcción**

por el equipo 2		**equipo 1**	
Triangulo ABC: ángulo ABC 93º, BC:10cm, AB:5cm	 *Imagen 41. construcción del triángulo ABC* El equipo 1 concluye que construyen un solo triángulo cuando proponen la medida de dos lados y un ángulo comprendido por los dos lados, y le otorgan tres puntos al grupo 2.	Triangulo DEF: ángulo DEF 85º, DF:11, EF:5	 *Imagen 42. construcción del triángulo DEF* El equipo 2 determina que construyen solo un triángulo con dos lados y un ángulo que no está comprendido por los dos lados y le dan al grupo 1 tres puntos.
Por lo anterior específicamente por la conclusión del equipo 2, las profesoras intervienen y proponen las			

siguientes medidas para que los dos grupos construyan un triángulo.

Triángulo FGH: FG:8 FH:6 ángulo FGH: 35°

Los dos grupos llegaron a la siguiente construcción:

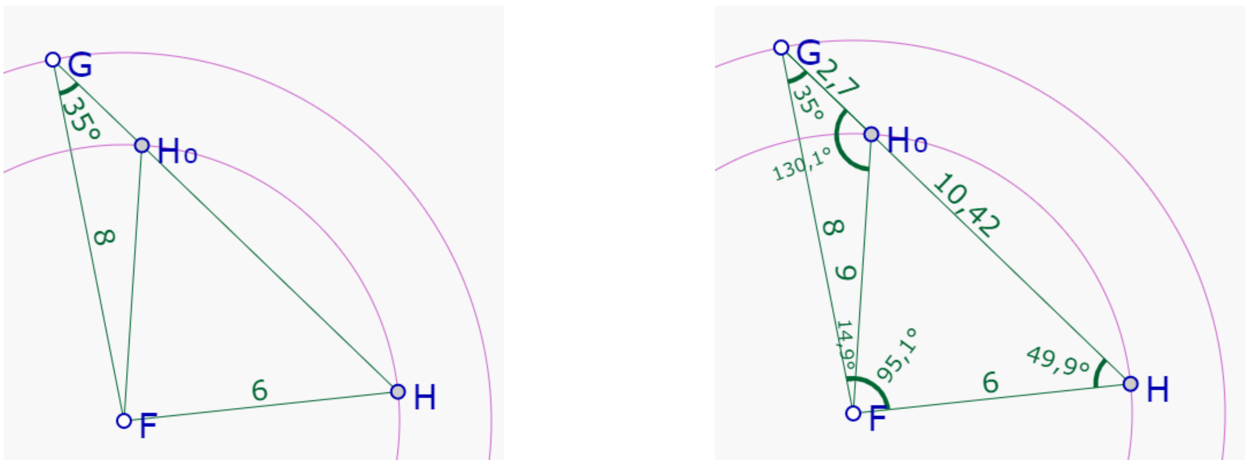


Imagen 43. construcción de los dos triángulos FGH a partir de los dos puntos de intersección

Los equipos concluyeron que las medidas dadas relacionaban también dos lados y un ángulo no comprendido entre los dos lados y construyen dos triángulos diferentes con las medidas dadas, por ende, compararon esta construcción con la que obtuvieron un solo triángulo.

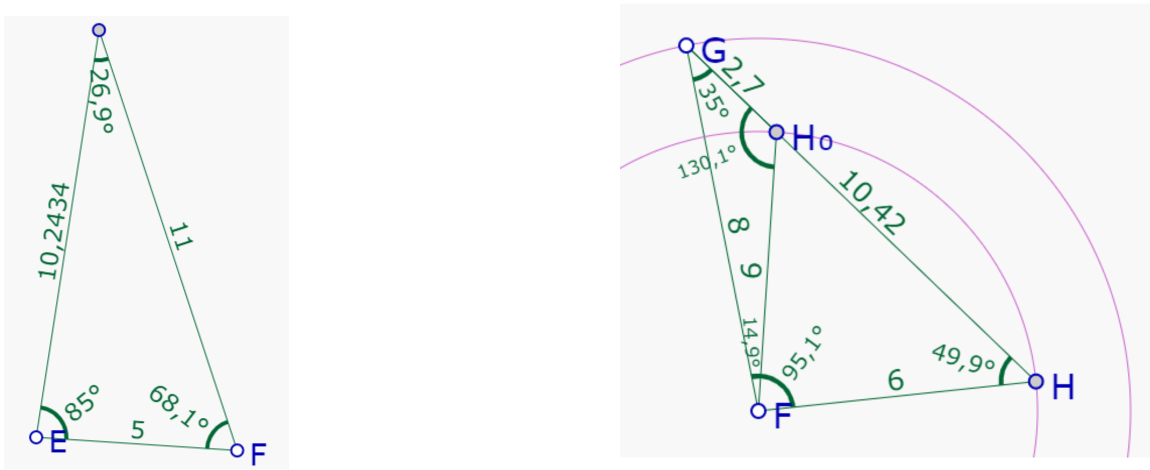


Imagen 44. comparación de las construcciones de los triángulos FGH y DEF

Aunque los dos triángulos relacionan dos lados y un ángulo no comprendido por los lados, en el primero construyen el ángulo dado (que en este caso es el mayor) sobre el lado dado de menor medida y en la segunda construyen el ángulo dado (en este caso el menor) sobre el lado dado de mayor medida, comprobaron lo anterior con varias experimentaciones y concluyen que no siempre que den dos lados y un ángulo no comprendido entre los dos lados se construye un solo triángulo (pues se construyen dos si el ángulo dado es el menor y esta sobre el lado dado de mayor medida), no pueden decir que construyen un solo triángulo con dos lados y un ángulo no comprendido por los dos.

Tabla 1. Pilotaje

Seguido a esto se les preguntó a los estudiantes cual es la mejor estrategia para ganar el mayor número de puntos en la competencia, a lo que los dos grupos respondieron que la mejor estrategia para ganar la competencia es dando las siguientes medidas:

- Tres lados
- Dos lados y un ángulo comprendido entre estos

- Dos ángulos y un lado comprendido entre estos o adyacente a uno de los lados dados.

8.3 Problema 3 (Anticipación)

8.3.1 Primera tarea

Se le entrego a los dos grupos la siguiente lista de triángulos.

Lista de triángulos.

1. $Triangulo\ ABC.\quad AB = 4.7,\ BC = 4.2,\ AC = 4.4$
2. $Triangulo\ NJT.\quad NJ = 8,\ JT = 3.5,\ NT = 4.4$
3. $Triangulo\ KLM.\quad MK = 9,\ ML = 5,\ \angle LMK = 59°$
4. $Triangulo\ PNR.\quad PN = 6,\ PR = 12,\ \angle NPR = 52°$
5. $Triangulo\ JRS.\quad RS = 7,\ RJ = 7,\ \angle RSJ = 34°$
6. $Triangulo\ FGH.\quad \angle FGH = 34°,\ \angle HFG = 68°,\ GH = 5$
7. $Triangulo\ XYZ.\quad \angle XYZ = 83°,\ \angle YXZ = 59°,\ XY = 11$
8. $Triangulo\ OPQ.\quad OP = 7,\ PQ = 4,$
9. $Triangulo\ LMN.\quad \angle LMN = 45°,\ \angle MNL = 60°,\ \angle NLM = 75°$

Los dos equipos debían asignar un punto si se podía construir un solo triangulo y cero puntos si se podía construir más de un triangulo

Para los triángulos ABC y NJT los equipos asignaron uno y cero puntos respectivamente, para su justificación utilizaron la propiedad de desigualdad triangular y afirmaban que la usaban porque lo que se estaba dando eran las tres medidas de los lados del triángulos

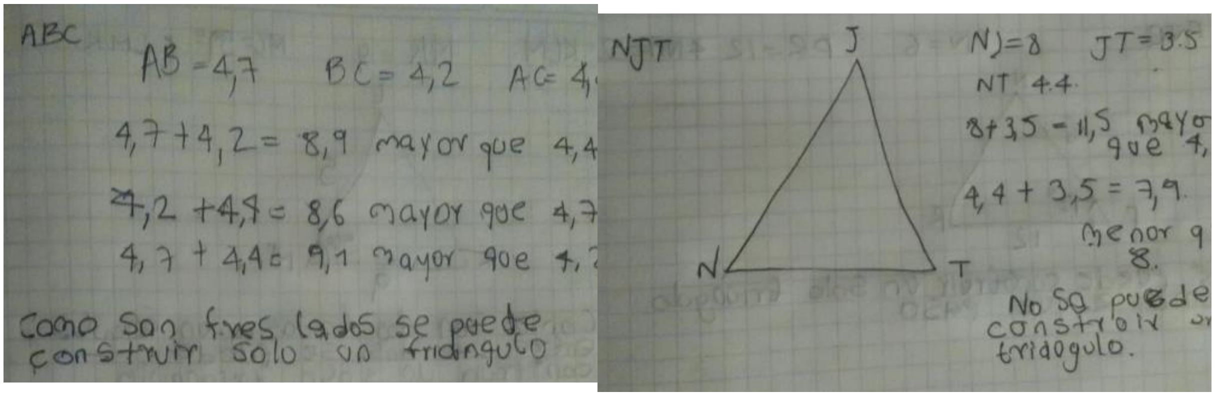


Imagen 45. Justificación de la anticipación de un triángulo cuando se dan 3 lados

Para los triángulos KLM, PNR, JRS, FGH, XYZ realizaban un bosquejo y ubicaban las medidas dadas, otorgándole un punto a aquellos triángulos en el que los lados tenían comprendido el ángulo o donde hubiera dos ángulos y un lado comprendido entre estos.

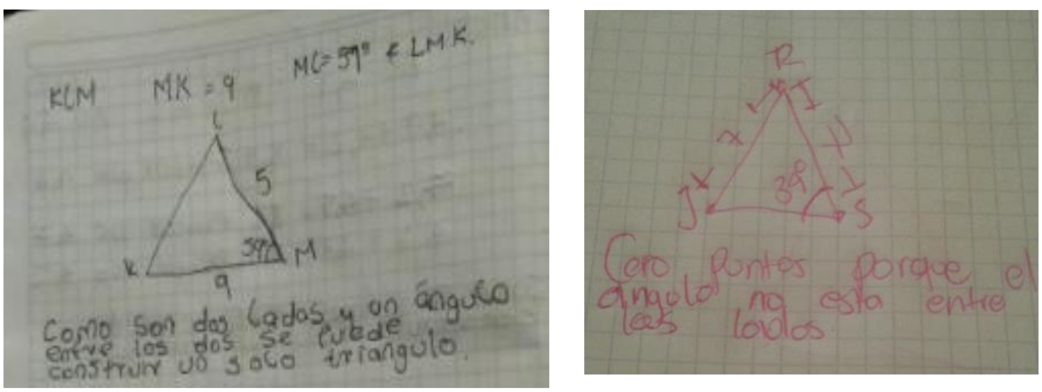


Imagen 46. Justificación de la anticipación de un triángulo cuando se dan dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado

A los triángulos OPQ y LMN les corresponde cero puntos porque a simple vista los equipos expusieron que para construir el triángulo OPQ solo dan dos medidas y el acuerdo era mínimo tres para garantizar la construcción de un solo triángulo y para el triángulo LMN le asignaron cero puntos porque solo se daban tres ángulos y no se daba un lado fijo, por lo tanto, se pueden construir infinitos triángulos.

Se concluye que los equipos son capaces de anticipar que elementos de un triángulo que permiten construir exactamente un solo triángulo, por las justificaciones que exponían se evidenció que los equipos construyeron los criterios de congruencia como estrategia para predecir si es posible construir un solo triángulo.

8.4 Problema 4

8.4.1 Primera tarea

Los equipos analizaron los triángulos presentados

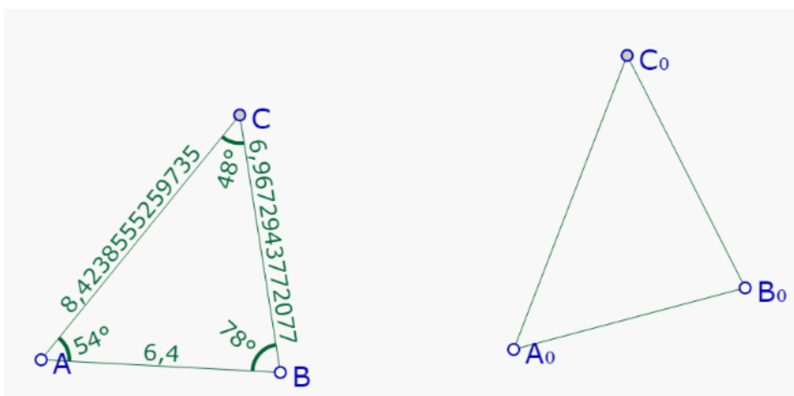


Imagen 47. Justificación de la igualdad entre triángulos

Como se había previsto, los dos equipos lograron determinar que dos triángulos son iguales si tienen todas sus medidas iguales.

8.4.2 Segunda tarea

Se les propuso los siguientes triángulos y se les pregunto ¿Cómo verificar que los triángulos son iguales utilizando el mínimo de medidas?

Equipos 1

Verificaron las medidas de los lados de los dos triángulos y vieron que eran iguales, igual que sus otras medidas, entonces propusieron que para determinar la igualdad de los triángulos bastaba con saber la medida de sus lados o de sus ángulos, por ende se les propuso que construyeran un triángulo de base cualquiera y ángulos de amplitud igual a los de los triángulos presentados y vieron que los lados no eran iguales a los de los triángulos dados, por lo tanto desecharon esa opción, pero esto los llevó a recordar que cuando se les pidió el máximo de medidas para construir solo un triángulo con esas medidas y proponían la medida de los tres lados solo se podían construir un triángulo y por el contrario cuando proponían la medida de los tres ángulos se construían infinitos lo que no garantiza la igualdad entre los triángulos presentados si solo se compara los triángulos, por ende pensaron que si median solo dos ángulos y un lado comprendido o dos lados y un ángulo comprendido entre ellos, también definían la igualdad de los triángulos y para comprobarlo tomaron de los triángulos presentados la medida de dos de los lados y un ángulo comprendido entre estos (de la misma manera para los dos triángulos) y realizaron otro triángulo a partir de esas medidas obteniendo un triángulo de medidas iguales a los que se presentaron inicialmente; lo mismo con los dos ángulos y un lado comprendido o no entre ellos.

Por lo anterior el equipo uno concluyó que puede verificarse la igualdad de dos triángulos con solo comprobar si sus lados son iguales, dos ángulos y un lado comprendido o no por ellos y dos lados y un ángulo comprendido por ellos.

Equipo 2

Revisaron primero las medidas de dos de los lados y un ángulo comprendido entre ellos.

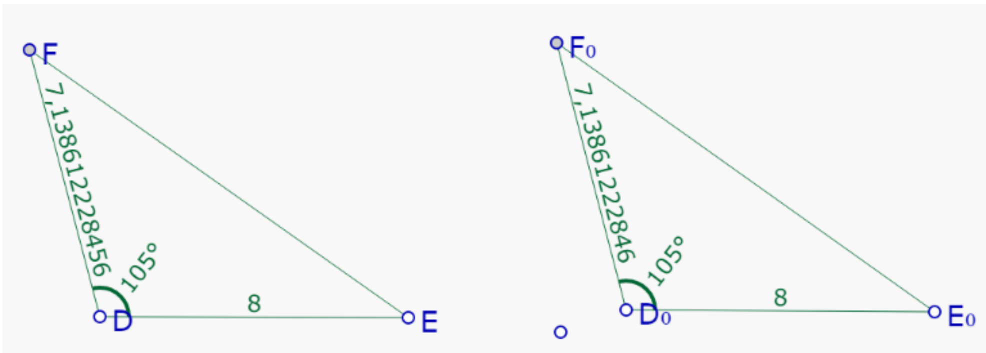


Imagen 48. Justificación de la mínima cantidad de medidas que se deben revisar entre dos triángulos iguales

Preguntaron si el mínimo de medidas para verificar la igualdad de dos triángulos tiene algún tipo de relación con el máximo de medidas que se deben dar para construir un solo triángulo con dichas medidas, y se les responde que expliquen, verifiquen y demuestren dicha relación si existe, entonces dijeron que cuando construían un triángulo a partir de la medida de sus tres lados, de dos de sus ángulos y un lado comprendido entre ellos o de dos de sus lados y un lado comprendido entre ellos, solo construían un solo triangulo por ende si otro triangulo es igual basta con verificar estas medidas pues no va a existe otro triangulo diferente con estas medidas.

El equipo 2 concluye que mínimo deben medir tres de las seis medidas en los dos triángulos para determinar su igualdad, ya sean sus tres lados, dos ángulos y un lado comprendido entre ellos o dos ángulos y un lado comprendido entre ellos.

Entonces se les dijo que el máximo de medidas para determinar la construcción de un solo triángulo tiene relación con el mínimo de medidas para verificar la igualdad entre dos triángulos lo que se conoce en el mundo matemático como los criterios de congruencia

9. Conclusiones y recomendaciones

Se logró un diseño de actividades en el software dinámico DGPad para la enseñanza del concepto matemático de criterios de congruencia. El análisis a priori presentado muestra cómo es posible lograr un aprendizaje por adaptación de los criterios de congruencia entre triángulos, ya que las retroacciones del software a la acciones de construcción de los estudiantes les permiten invalidar las estrategias que no corresponden a los criterios de congruencia y validar las que sí corresponden.

El pilotaje confirmó las hipótesis del análisis a priori. Sin embargo, no constituye una validación experimental de la ingeniería, para lo cual sería necesario realizar una experimentación con un grupo de clase ordinario.

Las actividades de anticipación y verificación permiten a los estudiantes poner en juego los criterios de congruencia construidos gracias a la experimentación con el software.

Por otro lado, las actividades diseñadas permiten que los estudiantes construyan el significado de los criterios de congruencia como las condiciones mínimas suficientes para que dos triángulos tengan las mismas medidas y determinen la construcción de un solo triangulo.

El diseño de las actividades está basado en la toma de conciencia y anticipación de medidas que determinan la construcción de un solo triangulo, mediante la experimentación con construcciones en el software.

La asociación de propiedades y herramientas de construcción contribuyen a la creación de una convicción en los estudiantes de la posibilidad o imposibilidad de una construcción. Esta convicción es el fundamento de los criterios de congruencia construidos experimentalmente. La característica esencial del software que contribuye a esta construcción de sentido es el hecho de que las herramientas de construcción (en nuestro caso circunferencia de radio fijo y ángulo de amplitud fija) garantizan unas propiedades que se mantienen al arrastrar.

10. Bibliografía

Acosta, M. (2005). *Geometría experimental con cabri: una nueva praxeología matemática. Redalyc*, 121-140.

Angulo, F. (2009). *De la geometría de Euclides a la geometría "a la Euclides": procesos demostrativos mediados por Cabri geómetre*. *ASOCOLME*, 1-14.

Artigue, M., Douady, R., & Luis, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamericana.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. En N. Balacheff, *s* (págs. 11-67). Bogotà: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Carbó, A., & Mántica, A. (2010). *Una propuesta para trabajar congruencia entre triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. REPEM III*, 376-386.

Cardenas, D. (2013). *bdigital.unal.* Obtenido de bdigital.unal.edu.co: http://www.bdigital.unal.edu.co/39409/1/1186559.2014.pdf

Euclides. (1991). *Elementos de Euclides. Libro I-IV*. Madrid: Gredos.

Fiallo, J., Camargo, L., & Guitiérrez, Á. (2013). *Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas*. Integración *Vol 23*, 181-205.

Garcia, S., & Lopez, O. (2008). *La enseñanza de la geometría.* México.

Giovannini, E. (2013). *Hilbert y la fecundidad matemática del método axiomático*. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 149-163.

Godino, J., & Batanero, C. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Granada.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* Illinois: La salle.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones* . Buenos Aires: Libros del Zorzal. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/39409/1/1186559.2014.pdf

Newman, G. (2006). *El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimetales y sociales* . *Laurus*, 4-23.

Ojeda, V., Saldivia, F., & Maglione, D. (2017). *Procesos de validación mediados por el software GeoGebra. Los criterios de congruencia para explorar, construir, argumentar y demostrar*. . *Dialnet*, 96-114.

Panizza, M. (s.f). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. crecer y sonreir. org*, 1-17.

Sànchez, C. (2011). *La historia como recurso didáctico: el caso de los elemetos de Euclides. TED*, 2-21.