

**PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS USANDO  
DIVERSAS TECNOLOGÍAS PARA SU DESARROLLO**

**CARLOS ALBERTO QUINTERO PÉREZ**

**COD: 20121145222**

**JHONATAN ALEXANDER ARAGÓN LUGO**

**COD: 20121145076**

**CARRANZA VARGAS EDWIN ALFREDO**

**Profesor que avala la propuesta**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**2017**

## Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN .....	4
PROBLEMA .....	5
PREGUNTA ORIENTADORA.....	6
OBJETIVOS .....	6
GENERAL .....	6
ESPECÍFICOS .....	6
JUSTIFICACIÓN .....	7
CAPITULO UNO, MARCO TEÓRICO.....	9
1.1 ASPECTO MATEMÁTICO .....	9
1.1.2 ASPECTO TECNOLÓGICO .....	17
1.1.3 PLASTILINA COMO MEDIO .....	21
1.1.4 GEOMETRÍA DEL DOBLADO.....	21
1.1.5 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DE DOBLADO.....	22
1.1.6 GEO-GEGBRA COMO MEDIO .....	27
1.2 ASPECTO DIDÁCTICO .....	27
1.2.1 SITUACIONES A-DIDÁCTICAS .....	29
1.2.2 ASPECTO METODOLÓGICO .....	30
CAPITULO DOS, PLANEACIÓN DE ACTIVIDADES.....	31
2.1 Actividad cortes del cono .....	31
2.2 Actividad dos, construcción de los lugares geométricos por medio de dobleces. ....	33
2.3 Actividad tres, recurso en Geo-gebra .....	36
CAPITULO TRES, ANÁLISIS ACTIVIDADES.....	37
3.1 Análisis actividad uno, cortes del cono .....	37
3.1.1 Objetivo de aprendizaje actividad cortes del cono .....	37
3.1.2 Cortes diferentes.....	38
3.1.3 Observación.....	38
3.1.3 Trascipción videos, cortes del cono .....	38
3.1.4 Trascipción sesión uno, video cortes del cono elipse, (VCCE) .....	38
3.1.4.1 Descripción de la acción del niño.....	39

3.1.5 Trascrición del video cortes de cono hipérbola (DVCH).....	39
3.1.6 Trascrición del video, corte del cono parábola (TVCP) .....	41
3.1.6.1 Descripción de las acciones realizadas el niño (TVCP).....	42
3.1.7 Trascrición del video dos, diferenciación de cada uno de los cortes. (TVDDCC) .....	42
3.1.7.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TVDDCC).....	46
3.1.8 Cono en plastilina como medio, artefacto .....	46
3.1.8.1 Tipo de acción recortar.....	47
3.1.8.2 Comparación .....	47
3.1.9 Trascrición cortes del cono software (TCCS).....	47
3.1.9.1 Descripción de las acciones realizados por los estudiantes (TCCS): .....	50
3.1.10 Recurso en Geo-gebra como medio.....	50
3.1.10.1 Tipo de acción arrastrar .....	51
3.2 Análisis actividad dos construcciones de las secciones cónicas como lugares geométricos ..	51
3.2.1 Descripción del medio.....	52
3.2.2 Objetivo de aprendizaje actividad dobleces: .....	52
3.2.3 Diferencia entre los dobleces.....	52
Movimiento:.....	52
3.2.3.1 Movimiento uno .....	52
3.2.3.2 Movimiento dos.....	52
3.2.3.3Movimiento tres .....	53
3.2.3. Acciones .....	53
3.2.3.1 Tipo de acción doblar.....	53
3.2.3.2 Tipo de acción medir.....	53
3.2.4 Trascrición actividad dos dobleces.....	53
3.2.5 Descripción video uno, dobleces elipse (DVUDE) .....	53
3.2.6 Trascrición del video dos dobleces elipse (TVDE) .....	54
3.2.6.1 Acciones realizada por los estudiantes (TVDE):.....	55
3.2.7 Trascrición del video tres dobleces elipse (TVTDE).....	55
3.2.7.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TVTDE).....	57
3.2.8 Trascrición institucionalización dobleces elipse (TIDE).....	58
3.2.8.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TIDE).....	59
3.3 Trascrición actividad dobleces, parábola (TADP) .....	60
3.3.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TADP) .....	61

3.4 Descripción actividad dobleces hipérbola.....	62
3.5 Análisis a priori de la actividad recurso en Geo-gebra.....	64
CONCLUSIONES GENERALES .....	66
BIBLIOGRAFÍA.....	75
ANEXOS .....	76
“Anexo # 1” .....	76

## INTRODUCCIÓN

En la siguiente monografía se encuentra una propuesta diseñada para la enseñanza y aprendizaje en relación a las **Secciones Cónicas** por medio de actividades que se desarrollarán a partir de diferentes tecnologías, (plastilina, geometría del doblado y software de geometría dinámica), esto con el objetivo de generar un proceso de enseñanza aprendizaje en torno a la temática que se piensa implementar en el aula, es decir haciendo énfasis en las tres secciones cónicas y en su proceso de aprendizaje donde permita que los estudiantes de grado noveno del colegio Alfonso Reyes Hechandia, implementen los diferentes artefactos puestos en juego y experimenten de manera tal, que al final, en su desarrollo haya quedado interiorizado el concepto de las cónicas trabajadas.

Posteriormente se muestra el problema, el cual va dirigido a una pregunta orientadora y con base a esta se generan unos objetivos direccionados a la creación de una situación fundamental que desarrolle un aprendizaje significativo para los estudiantes, donde se tiene en cuenta la gestión en el aula, la aplicación de las actividades propuestas y el cómo se desenvuelven los estudiantes con las herramientas durante su aprendizaje.

Seguido a esto se muestra su respectiva justificación, posteriormente se encuentran los diferentes referentes teóricos desde tres aspectos importantes, el primero el matemático, donde se evidencia el cómo se enseñan las secciones cónicas, es decir su didáctica, el cual representa nuestro objeto estudio, luego de este aspecto se encuentra el tecnológico donde hace una breve descripción sobre la importancia del uso de las tecnologías para la enseñanza de las matemáticas, además haciendo una descripción de cada una de las tecnologías propuestas en el trabajo, plastilina, geometría del doblado como medios de aprendizaje y el uso de Geo-gebra, así mismo en el marco didáctico, donde se evidencia el cómo y el porqué del desarrollo de las clases explicado desde el punto de vista de Brousseau con su teoría de situaciones didácticas y finalmente el marco metodológico, donde se va a evidenciar la secuencia de actividades en las que los estudiantes se apropien del razonamiento matemático, luego a este el aspecto metodológico y la bibliografía.

## **PROBLEMA**

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son objeto de interés e investigación para un docente por lo cual él en su rol de investigador debe preocuparse por las dificultades de los estudiantes durante el aprendizaje de las nociones matemáticas, por lo que este trabajo se enfoca en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, en particular las secciones cónicas, por tanto se observa que en los Estándares básicos de competencias en matemáticas, MEN (2006), menciona que un estudiante de noveno grado debe hacer “uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas”(pág. 86) así mismo “identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas”(pág. 87), ente otros estándares que las refieren.

Por lo tanto se cree desde la experiencia con las secciones cónicas, son abordadas de manera superficial, es decir su desarrollo está dado básicamente por dos tecnologías, como lo son, el tablero y el marcador, esto no permite una interacción directa entre el concepto y el estudiante, donde Moreno L. & Waldegg G. (2002) afirman que “el proceso de articulación entre el concepto matemático (el “objeto” matemático) y sus representaciones es un proceso de mutua constitución”(pág.21) es decir el estudiante aprende cuando interactúa con el objeto matemático; por tal motivo usaremos otras tecnologías que nos permitan generar un proceso de enseñanza aprendizaje, ya que estas pueden servir como mediadoras y permiten evidenciar una manipulación de las diferentes representaciones de las secciones cónicas vistas como cortes de un plano y lugar geométrico.

## **PREGUNTA ORIENTADORA**

¿Cómo usar diferentes tecnologías para la enseñanza de las secciones cónicas?

## **OBJETIVOS**

### **GENERAL**

- Diseñar una secuencia de actividades haciendo uso de las diferentes tecnologías que potencien el proceso de enseñanza de las secciones cónicas.

### **ESPECÍFICOS**

- Aplicar una secuencia de actividades que den cuenta de las estrategias desarrolladas por los estudiantes.
- Potenciar el aprendizaje por medio de los diferentes artefactos en relación a las secciones cónicas.
- Recolectar y estudiar los datos para evaluar la propuesta.
- Evaluar la pertinencia de cada una de las tecnologías usadas.

## JUSTIFICACIÓN

Con base a la necesidad de diseñar una propuesta monográfica que nos permita desarrollar el concepto de las secciones cónicas, por medio de diferentes artefactos que generen, permitan y evidencie un proceso de enseñanza-aprendizaje en torno a la temática nombrada anteriormente. Donde involucre elementos fundamentales como la pertinencia de la implementación de diferentes tecnologías que potencien los procesos de enseñanza-aprendizaje que se pretende generar en relación a la elipse, parábola e hipérbola; ya que es importante que la educación matemática se vaya adaptando a los diferentes cambios tecnológicos de los últimos años y de esta manera se pueda lograr la interiorización del concepto mencionado anteriormente.

Las nuevas tecnologías implementadas han generado un cambio y al mismo tiempo un desarrollo en el conocimiento no sólo matemático si no de manera general del ser humano, por lo que la producción de artefactos o herramientas ha cambiado la estructura cognitiva, así mismo se ha generado nuevos procesos de adaptación al mundo exterior. Por lo tanto, es importante señalar que la interacción con los diferentes sistemas de ejecución, es decir la interacción entre el sujeto y las herramientas, generan los signos, símbolos y representaciones ya sea de manera oral o escrita, por tal motivo es importante señalar lo pertinente de diseñar y planificar una propuesta monográfica, que permita potenciar la enseñanza y aprendizaje de las cónicas mencionadas.

De la misma manera se hace referencia a los diferentes aspectos (matemático, tecnológico, didáctico y metodológico), ya que son parte importante para la planeación de la propuesta monográfica elaboradas en base a unos recursos grafico textuales y manipulativos tangibles... Rusell (SF) “las matemáticas son una disciplina que trata con entidades abstractas y el razonamiento es la estrategia para comprender lo abstracto”. (Pág. 1). Los cuales nos posibilitan que los estudiantes comprendan y construyan el valor del objeto matemático para su proceso de aprendizaje, de esta forma se pueda producir en el estudiante un interés por encontrar y/o dar solución a un problema. Esta metodología nos permite ver



los diferentes aspectos que se involucran en el desarrollo de una sesión de clase, además que los aprendizajes realizados mediante ésta, podría hacer que los estudiantes interiorizan y construyen los conocimientos puestos en juego.

## **CAPITULO UNO, MARCO TEÓRICO**

Con el ánimo de tener bases teóricas sobre las cuales sustentar la propuesta de enseñanza en relación a las secciones cónicas, haciendo uso de diversas tecnologías para el desarrollo de dicho concepto; en este apartado se podrá observar en primer lugar lo propuesto por el MEN (2006), quienes mencionan que un estudiante de grado décimo u once debe identificar “en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono” (pág. 86) en concordancia con el (pensamiento espacial y sistemas geométricos), que son los que según los estándares y el pensamiento tendremos en cuenta para su desarrollo.

En segundo lugar, se encuentra el aspecto matemático el cual refiere una breve historia respecto a las secciones cónicas, seguido de este el aspecto tecnológico el cual hace énfasis en la mediación instrumental, y, por último, pero no menos importante, se encuentran el aspecto didáctico y metodológico los cuales guardan una estrecha relación dado que están apoyados en la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

### **1.1 ASPECTO MATEMÁTICO**

En el presente aspecto se encuentra el aspecto matemático, el cual se encuentra planteado desde la historia de las secciones, para ello en primer lugar se plantea como eran vistas las cónicas en los tiempos Arquímedes, Euclides y Apolonio; para lo cual se hará énfasis en los aportes y perspectivas que plantean cada uno de ellos. Por otra parte, y haciendo un salto en la historia se llega al renacimiento donde se mencionan algunos autores que las abordan y caracterizan como lugares geométricos.

Teniendo en cuenta que desde el siglo III y II A. se venían realizando trabajos respecto a las cónicas, donde Apolonio de Perga (262-190) A.C fue uno de los tres matemáticos más importantes de la época junto a Euclides y Arquímedes, siendo el único de los tres que trabajo

las secciones cónicas introduciéndolas públicamente y de esta manera fue el primero en realizar estudio sobre ellas, mencionando como tal el tratado más importante sobre la ellas, para ello las mostró como cortes de un cono por un plano, donde cada corte genera una características respecto a focos, ejes y diámetros.

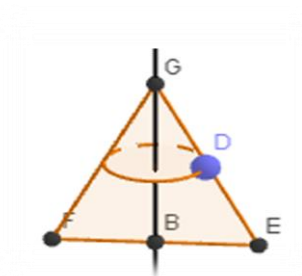
Según (Bello.J,2015) quien afirma que “en diferentes problemas de la antigüedad (trisección del ángulo, problema de Pappus, entre otros) y en la axiomatización de la geometría, la noción de curva ha sido fundamental para la interpretación y modelación de diferentes situaciones problema” (p.34) es decir que se utilizaron elementos de la geometría de la época, geometría euclidiana, para establecer relaciones geométricas y caracterizar las curvas, por ejemplo Apolonio en su texto “Conics” identifica que cuando un cono es cortado por el medio con un plano genera una línea recta, la cual a su vez genera un triángulo, esta propiedad es demostrada en la proposición tres “Si un cono es cortado por un plano a través del vértice, la sección es un triángulo”.

Luego se pasa un plano por la mitad de la base del triángulo generado un triángulo axial (Forero. A, 2015) afirma que al “pasar exactamente por un diámetro de la base permite establecer relaciones de razón entre segmentos y áreas; consiguiendo con ello demostrar la existencia de secciones como la del círculo; la cual se presenta en la proposición 4:

“Si cualquiera de las dos superficies verticalmente opuestas es cortada por algún plano paralelo al círculo a lo largo del cual la línea recta que genera la superficie se mueve, el plano que corta la superficie generará un círculo que tiene su centro en el eje, y la figura contenida por el círculo y la superficie cónica interceptada en el plano cortante en el lado del vértice será un cono.” (Bello. J, 2015, p.35) citando a (Apoloni.P,1970)

Lo cual lo lleva a generar la sección cónica círculo ya que toda la la corte paralela a la base del triángulo axial será bisecada por la recta, es decir dicho corte genera una nueva

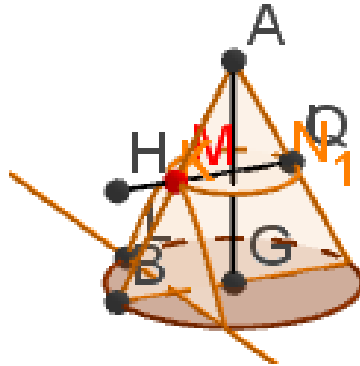
circunferencia y a su vez un nuevo cono, de lo cual se puede concluir que la recta que genera el triángulo axial será el eje de simetría de la sección, ya que esta esta recta genera el centro de la circunferencia. ilustración 1



*Ilustración 1. Triángulo axial*

De la misma manera según (Forero. A, 2015,) citando a (Apoloni.P,1970) afirman que las proposiciones aparecen las condiciones para nombrar la sección parábola:

“Si se corta un cono por un plano a través de su eje, y si se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono hasta el diámetro de la sección paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono; tendrá su cuadrado igual al rectángulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y por otra línea recta; ésta línea recta tendrá la misma razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección como el cuadrado de la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo. Sea ésta sección llamada parábola.”(p.35)



*Ilustración 2. Sección parabólica en Apolonio*

En otras palabras, se debe inicialmente construir un triángulo axial análogamente se debe cortar el cono de tal forma que cumpla:

1. El plano que corte la base del cono debe ser paralelo al lado del triángulo axial,
2. El diámetro debe ser cortado por planos perpendiculares a la base del triángulo axial.

Además (Bello.J,2015) señala que “cualquier línea recta trazada desde la sección hasta el diámetro de la misma debe cumplir:”

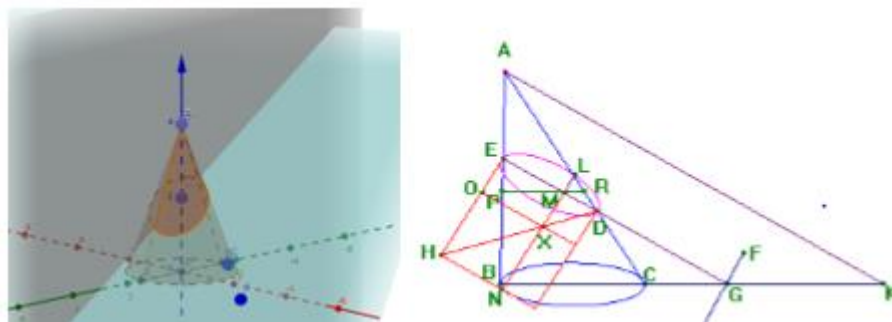
1. Paralelismo con la intersección entre el plano de la sección y la base del cono.
2. Su cuadrado será igual al rectángulo cuyos lados son la línea recta comprendida entre el vértice de la sección y la intersección de éste con el diámetro de la sección; y una línea recta dada. (p.36)

Es decir, los cortes formados guardan una proporción, dada por los cuadrados formados por los cortes de los planos perpendiculares, por lo que:

$$FM: FA:: BG: \text{es al rectángulo BA, BG}$$

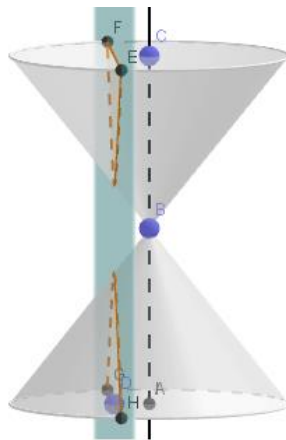
Del mismo modo Apolonio realiza el tratamiento de la elipse para lo cual (Bello.J,2015) citando a (Apoloni.P,1970) plantea que el la proposición 13.

“Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y éste también es cortado por otro plano encontrando ambos lados del triángulo axial, y extendido no es paralelo a la base ni tampoco está ubicado de manera su contraría, y si el plano de la base del cono está; y el plano que corta, encuentra una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial o a su prolongación, entonces cualquier línea recta trazada desde la sección del cono al diámetro de la sección paralela a la sección común de los planos, tendrá su cuadrado igual al área aplicada a una línea recta que al diámetro de la sección tendrá la razón que el cuadrado sobre la línea recta trazada desde el vértice del cono a la base del triángulo paralela al diámetro de la sección tiene al rectángulo contenido por las intersecciones de éstas líneas rectas (sobre la base) de los lados del triángulo, en área teniendo como ancho la línea recta que corta más allá sobre el diámetro desde el vértice de la sección por la línea recta desde la sección al diámetro, y deficiente por una figura semejante y similarmente situada al rectángulo contenido por el diámetro y el parámetro. Sea ésta sección llamada elipse.” (p.37)



*Ilustración 3, Sección elipse en Apolonio*

Finalmente, la hipérbola es la curva abierta que se genera con intersecar de un y un plano paralelo al eje de simetría del triángulo axial, es decir existe un ángulo de corte de  $0^\circ$  el cual corta la base del cono, ilustración 4.



*Ilustración 4. Sección hipérbola en Apolonio*

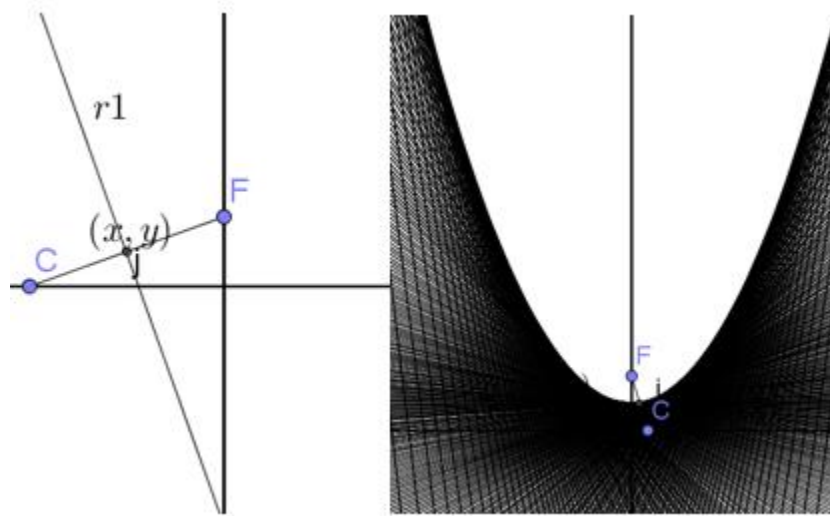
De esta manera y después de varios siglos, las cónicas no tuvieron un papel importante en los estudios matemáticos, hasta que se observó que todo lo que nos rodea en el planeta tierra y en el universo está rodeado por cónicas. Luego en el siglo XVI uno de los primeros en abordar de nuevo las cónicas fue el astrónomo-matemático Kepler J. (1571-1630) quien realizó estudios sobre la elipse por medio del enigma planetario, ya que era un estudio en relación al movimiento que describen los planetas alrededor del sol teniendo en cuenta las órbitas, lo que le permitió observar que marte describe un movimiento elíptico, es decir tenía órbitas elípticas, donde el sol está ubicado en uno de sus focos.

En este sentido Rene Descartes y Fermat en el siglo XVI plantea la geometría a analítica como la síntesis de la matemática, (Urbaneja ,2001) menciona que “el álgebra mecaniza la matemática de forma que el pensamiento se simplifica y disminuye el esfuerzo de la mente ante la automatización de los procesos, para Descartes el álgebra precede las ramas de las matemática y encierra de modo de extensión de la lógica como mecanismo del razonamiento” (p.156) es decir utilizando el álgebra analítica se puede caracterizar y generalizar aspectos geométricos.

Por lo tanto, se procederá a mostrar las definiciones de las secciones cónicas como lugar geométrico, teniendo en cuenta que estas se generan con la relación con un conjunto de

coordenadas  $(x, y)$  y un punto fijo llamado foco, donde según las características de estas distancias el lugar geométrico formado puede ser, parábola elipse o hipérbola.

**Parábola:** Se entiende como el lugar geométrico del conjunto de puntos  $(x, y)$  que equidistan de un punto fijo llamado foco (F) y de una recta llamada directriz (r1), donde la distancia entre (F) y (r1) es de  $2p$  por lo tanto la parábola es el conjunto de puntos cuya distancia a (F) y (r1) es igual, ver figura 5.



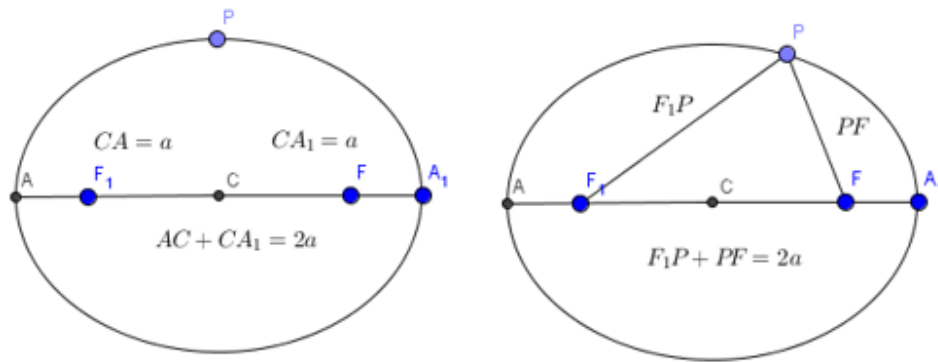
*Ilustración 5. Parábola como lugar geométrico y envolvente*

**Elipse:** Se entiende como el lugar geométrico del conjunto de puntos  $(x, y) = P$ , tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados foco (F) y  $(F')$  es  $2a$ , por lo tanto, se debe cumplir que:

$$PF + PF' = 2a$$

Dichas relaciones se pueden apreciar en la figura 6, donde se pueden observar las indicaciones anteriormente mencionadas.



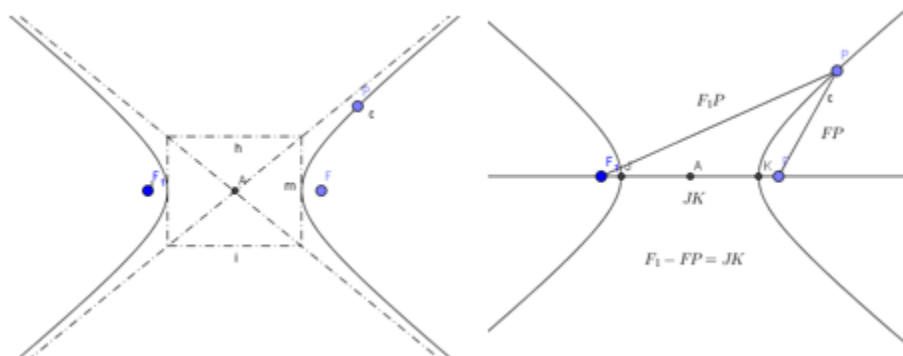


*Ilustración 6. Elipse como lugar geométrico*

**Hipérbola:** Se entiende como el lugar geométrico cuyos puntos  $(x, y) = P$  equidistan de dos puntos  $(F)$  y  $(F')$  llamados focos de tal manera que se debe cumplir que:

$$PF - PF' = K$$

Es decir, la diferencia del valor absoluto de los puntos que se mueven en el plano es una constante  $(K)$  positiva menor a la distancia entre los focos, ver figura 7.



*Ilustración 7. Hipérbola como lugar geométrico*

### 1.1.2 ASPECTO TECNOLÓGICO

Para empezar a desarrollar este apartado el cual va estar encaminado a la explicación y a la importancia que se le atribuye al manejo de diferentes tecnologías para los procesos de enseñanza aprendizaje que se llevan al aula y generar una mejor educación, por lo que se realizará desde tres perspectivas, los cuales van a estar enfocadas en una concepción de la tecnología y su aplicación para la educación, de igual manera sobre mediación de todo acto cognitivo y finalmente la caracterización de los artefactos que se implementarán para el trabajo.

Nos parece importante resaltar la relevancia y de definir desde un punto de vista teórico la tecnología, para luego continuar con el desarrollo y su aplicación para la educación y para este trabajo, por lo que aclaramos de antemano lo que vamos a entender de ella para su relación con la propuesta como tal.

La tecnología para definirla, es muy variada lo que se puede decir de ella, por lo que la tomaremos como un nivel que ayuda a estimular y potenciar los niveles de formación. Así mismo Soto, A. (2008) afirma que:

“La tecnología es un saber práctico e interdisciplinario desarrollado a través de la relación teórico-práctica que permite logros de calidad en los procesos aplicados a objetos e instrumentos tecnológicos y a la producción de bienes y servicios con el fin de dar solución a problemas y necesidades humanas” (Pág. 26)

Por lo que la tecnología es vista como lo que potencia los procesos de enseñanza aprendizaje y ayuda a resolver situaciones problema aplicados a la vida cotidiana de los estudiantes y demás personas, pero una cosa es clara, la tecnología tiene diferentes representaciones de ella como lo son artefactos, instrumentos u objetos tecnológicos, pero no son lo mismo, es decir solo son manifestaciones de la tecnología. En este sentido implica una comprensión y un sentido del desarrollo para el pensamiento que es importante generarlos en el estudiante, por lo que su aplicación para la enseñanza no se debe reducir solo a áreas puntuales si no ha todo el proceso educativo.

Con base a lo anterior Soto, A. (2008) menciona que “Desde esta óptica se plantea la necesidad de desarrollar actividades escolares que permitan la incorporación del componente tecnológico en el sistema educativo, fundamentando desde la educación básica” (Pág.27)

Así mismo la tecnología es algo práctico, es importante señalar no solo el hacer sino la combinación de una acción que potencie el pensamiento y el razonamiento para el desarrollo de un nuevo conocimiento. Posteriormente “incorporar la tecnología en el espacio escolar es crear espacios y tiempos para el desarrollo de las estructuras del pensamiento y desarrollo de las capacidades y competencias en maestros y alumnos” (Soto, A. 2008, p.28).

De igual manera y en concordancia con lo expuesto anteriormente es relevante destacar el proceso de todo acto cognitivo que está mediado por un instrumento, con base al contexto del alumno y la manera en la que se desenvuelve para la generación del objeto matemático, por lo que Inicialmente podemos entender la cognición situada como “El objetivo básico de la aproximación sociocultural a la mente (COGNICIÓN) para elaborar una explicación de los procesos mentales humanos que reconozca la relación esencial entre estos procesos y sus escenarios culturales, históricos e institucionales.” (Vygotsky, s., pág. 3). Es decir que esta teoría sostiene que el aprendizaje no es una actividad individual de la práctica, sino que es un acto inseparable de los contextos socioculturales.

Además de ello la cognición ya no se concibe como un desarrollo del conocimiento enteramente de la persona como individuo, sino un proceso (íntimo) debido al producto entre la interacción del sujeto y el medio; esto implica que la cognición situada defiende la idea de que las conductas cognitivas de un individuo no podrían comprenderse sin tomar en cuenta el entorno donde se está desenvolviendo, de esta forma se puede determinar si una actividad es significativa para los estudiantes, en los casos en donde se presenta alguna dificultad en una situación escolar o el estudiante no le haya significado a la actividad, lo cual se puede dar porque el alumno no percibe el sentido del trabajo escolar, dado a esto podemos trabajar desde el concepto de claridad cognitiva en donde los alumnos comprendan la finalidad de las situaciones y de las tareas que les son propuestas, de esta forma tendrá un mejor situación cognitiva.

Por lo tanto, hoy día las fuentes teóricas que tienen mayor impacto a nivel educativo, mencionan la pertinencia del **principio de Medicación instrumental**, ya que según Guillermina W. & Moreno L. (s.) afirman que “todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico” (Pág.21). Donde (Wertsch, 1993) “convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición” (Pág.21) Esto para mencionar que no existe un acto cognitivo que no esté mediado por algún instrumento.

En este mismo sentido, en el momento de desarrollar un nuevo conocimiento mediado por unas ciertas representaciones, se debe considerar la idea, que en cierta medida es gracias a la necesidad que se ha venido generando por la incertidumbre frente a ¿cómo? transmitir un conocimiento y así mismo por la exploración para identificar uno nuevo. Así mismo un nuevo conocimiento va de la mano con la implementación de una tecnología que está caracterizada por ser un elemento mediador del conocimiento que se está generando, dónde está según su uso puede ser un artefacto o un instrumento, para nuestro caso serían instrumentos para desarrollar la noción de las secciones cónicas.

Por consiguiente, cuando se habla de un nuevo conocimiento matemático va estar mediado por las representaciones semióticas, ya que son las que más se acercan al objeto matemático, siendo estas el instrumento para alcanzar un conocimiento. Por lo que según Duval (1998) afirma que “La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas” (Pág.21). Existe un proceso de articulación entre lo que puede ser el concepto matemático y las mismas representaciones, donde es de vital importancia que tienen una fuerte constitución entre sí, ya que las representaciones como tal se están tomando como él mismo objeto matemático o también como un medio para generar significados y no solo como un medio para transmitir una comunicación, por tal motivo la importancia de la relación entre dichos aspectos.

Posteriormente cabe señalar que el razonamiento matemático juega un papel fundamental dado que genera un desarrollo cognitivo en los estudiantes, debido al instrumento y al

significado que este le da al mismo, donde realiza juicios, se plantea hipótesis y las desarrolla con el fin de comprender de una manera más profunda el objeto matemático, lo cual puede permitir que se acerque a la generalización, modelación y abstracción en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto matemático. Además (Russell,1999) menciona que “el razonamiento es la herramienta para entender lo abstracto, es decir, pensar propiedades de los objetos para desarrollar generalizaciones; de este modo el razonamiento sería la capacidad de desarrollar, justificar y usar las generalizaciones”. (Pág. 493).

Posteriormente se presenta una visión relacionada a los recursos que se piensan implementar para el desarrollo de la propuesta y que nos permita realizar un proceso de enseñanza y aprendizaje en torno al concepto de cónicas. Por lo que nos parece de gran importancia que el docente debe tener una actitud propicia para la implementación de recursos didácticos de cualquier índole, donde según Godino (2004) afirma que

“En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de las comunidades autónomas españolas, y de otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza” (Pág. 127).

Ya sean manipulativos tangibles o gráfico textual, que le van ayudar a generar un conocimiento respecto a un concepto matemático.

Por tal motivo nos parece pertinente implementar para la propuesta de enseñanza aprendizaje, tres artefactos o tres diferentes tecnologías que nos van a permitir hacer una mediación de los dos conceptos, con los cuales se piensa desarrollar las secciones cónicas, vistas como (cortes de un plano y lugar geométrico) para ello nos enfocamos en dos tipos de recursos que están caracterizados por ser manipulativos tangibles y gráfico textual, los cuales definiremos según Godino (2004)

“Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático” referidos como “objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos, etc. Que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.” (Pág. 128).

Con base a lo anterior este diseño de actividades va estar desarrollado también por medio de recursos didácticos, más específicamente el material manipulativo, es de vital importancia definirlo desde un carácter teórico para referirnos a los dos tipos de materiales que se piensa utilizar para la elaboración de las actividades, que permitan desarrollar las temáticas mencionadas con los estudiantes, por lo que Godino (2004) afirma que “manipulativos tangibles, que ponen en juego la percepción táctil” y también “es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas” de la misma manera refiere a “Manipulativos gráfico-textuales-verbales, en los que participan la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc. Sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos y al mismo tiempo son instrumentos de trabajo matemático”. (Pág. 131, 133).

Por lo tanto, los recursos que se piensan implementar en la propuesta cumplen con la función de ser mediadores del conocimiento que se piensa abordar, además porque brindan la posibilidad de que el alumno interactúe de manera directa con los artefactos y se genere de esta manera un aprendizaje por adaptación.

A continuación, se mostrará una breve descripción de lo que se pretende generar con los estudiantes y la manipulación con cada uno de los recursos puestos en juego para generar el objeto matemático.

### **1.1.3 PLASTILINA COMO MEDIO**

Nos va permitir observar las diferentes representaciones que realicen los estudiantes con cada uno de los cortes que realicen a cada sólido (cono) que se le brinde para la actividad, con esto se pretende que el estudiante logre una transposición de la sección cónica de manera visible y concreta al manipular el recurso y su forma abstracta.

### **1.1.4 GEOMETRÍA DEL DOBLADO**

Esta geometría nos permitirá caracterizar las secciones cónicas como lugares geométricos, dado que con esta se pueden establecer relaciones de las distancias de los puntos que las generan los lugares geométricos respecto a los focos, puesto que el doblado de papel se ha convertido en una alternativa para el razonamiento ya que según (Jaramillo.M & Zaida.R,2010) afirman que “debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático” (p.240)

Además, se debe tener en cuenta que estos dobleces permiten realizar construcciones tan precisas como las relacionadas con regla y compás, por lo que se deben cumplir cada uno de los postulados y axiomas de la geometría euclidiana, por lo tanto, deben existir coherencia entre las hipótesis y el desarrollo de las mismas, en otras palabras, debe existir coherencia entre los postulados básicos y teoremas.

Teniendo en cuenta que esta geometría tiene sus cimientos en axiomas y teoremas pasaremos a establecer cada uno de ellos esto con el fin de llegar a establecer los axiomas y teoremas de que se deben usar para llegar a caracterizar las secciones cónicas como lugares geométricos.

### **1.1.5 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DE DOBLADO**

Según (Jaramillo & Zaida.R,2010) quienes establecen que “la geometría del doblado de papel establecemos como conceptos primitivos el doblar, el punto y la hoja de papel, de la misma manera que en la geometría euclidiana se establecen el punto, la recta y el plano” (p.341), por lo tanto, puede establecer que el doblar de la hoja se convierte una abstracción de la recta.

**Punto:** Es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel (Jaramillo.M & Zaida.R,2010, p.342). por lo cual se puede pensar que en la hoja de papel se podrían formar infinitas rectas por lo tanto se pueden realizar infinitos puntos.

**Hoja de papel:** “Una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito” (Jaramillo.M & Zaida.R,2010, p.342). por lo que se puede afirmar que el papel a su vez de plano, de este modo se establece que en dicha hoja se pueden realizar infinitas puntos y rectas.

### **Axiomas y postulados de la geometría del doblado.**

**Primer axioma:** Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que pasa a través de ellos (Lang, 1996 – 2003, p. 38).

**Segundo axioma:** Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que lleva a  $P_1$  sobre  $P_2$  (p. 38), este axioma está relacionado con el lugar geométrico mediatriz.

**Tercer Axioma:** dadas dos líneas  $r_1$  y  $r_2$ , se puede hacer un doblado que pone a  $r_1$  sobre  $r_2$  (p. 38). Este axioma es análogo a la construcción con regla y compás del lugar geométrico bisectriz, dado que hace referencia al doblado que equidista de  $r_1$  y  $r_2$ , y al estar a la misma distancia se establece que la recta formada por el doblado es paralela a  $r_1$  y  $r_2$ .

### **Cuarto axioma: D**

Dado un punto  $P_1$  y una línea  $r_1$ , se puede hacer un doblado que pone a  $r_1$  sobre sí misma y pasa por  $P_1$  (p. 38). Este axioma se relaciona con la construcción realizada con regla y compás de la perpendicular.

**Quinto axioma:** Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y una línea  $r$ , se puede hacer un doblado que pone a  $P_1$  sobre  $r$  y pasa por  $P_2$  (p. 38). Este axioma es análogo al lugar geométrico circunferencia dado que  $P_2$  se mantiene fijo  $P_1$  es movable, es decir se genera una circunferencia de radio  $\overline{P_1P_2}$  y centro  $P_2$ .

**Sexto axioma:** Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y dos líneas  $r_1$  y  $r_2$ , se puede hacer un doblado que pone a  $P_1$  sobre  $r_1$  y a  $P_2$  sobre  $r_2$  (p. 38). la aplicación de este axioma está relacionada con la solución de problemas de cálculo según (Huzita, 1989), la aplicación de este axioma “consiste en encontrar una recta tangente a dos curvas, en este caso a dos parábolas. De



hecho, la aplicación sucesiva del segundo axioma con un dobléz y un punto exterior, genera el lugar geométrico de la parábola.

**Séptimo axioma:** Dados un punto  $P1$  y dos líneas  $r1$  y  $r2$ , se puede hacer un dobléz perpendicular a  $r2$  que ponga el punto  $P1$  sobre la línea  $r1$  (Lang, 1996 – 2003, p. 39). este axioma permite construir la parábola por medio de envolventes donde el punto  $P1$  es el foco y  $r1$  es la directriz, donde las rectas obtenidas por el dobléz son rectas tangentes a la parábola.

**Construcción de los lugares geométricos por medio de dobleces:** Para realizar la construcción se tendrán en cuenta los axiomas anteriormente expuestos haciendo énfasis en el séptimo axioma.

**Parábola:** Para la construcción de la parábola se deben tener en cuenta el siguiente proceso:

1. Tener una hoja pergamino
2. Construir el eje de simetría, para ello se une los dos extremos de las hojas, dicha recta llámela ( $p1$ ), ver figura 8.
3. Sobre ( $p1$ ) construya un punto llámelo ( $F$ )
4. Una la recta  $r1$ , con el punto  $F$ , donde se genera una recta ( $r2$ ) la cual a su vez es el vértice. ver figura 8.
5. la recta paralela a  $r2$ , llámela  $e1$ , está será la directriz de la parábola.
6. Marque sobre  $r2$  puntos a una distancia de medio centímetro, menciónelos ( $A$ ,  $B$ ,  $C...$ )
7. Luego una cada uno de estos puntos con el punto  $F$  y masque el doble obtenido. ver figura 8.



*Ilustración 8. Construcción parábola geometría del doblado*

### **Elipse:**

1. Tener una hoja pergamino
2. Construir una circunferencia con centro en F radio FA, mencionar dicha circunferencia como (c1)
3. Construir un punto dentro de la circunferencia, llámalo F'.
4. Luego sobre la circunferencia escribe 25 puntos, y mencionarlos (A, B, C...)
5. Por medio de dobleces une el punto F' con cada uno de los puntos anteriormente mencionados, ver figura 9.



*Ilustración 9. Construcción elipse la geometría del doblado*

### hipérbola:

1. Tener una hoja pergamino
2. Construir una circunferencia con centro en F radio FA, mencionar dicha circunferencia como (c1)
3. Construir un punto fuera de la circunferencia, llámalo  $F'$ .
4. Luego sobre la circunferencia escribe 25 puntos, y mencionarlos (A, B, C...)
5. Por medio de dobleces une el punto  $F'$  con cada uno de los puntos, ver figura 10.



*Ilustración 10. construcción hipérbola geometría del doblado*

Por otro lado, el uso de artefactos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático es importante, tanto así que, Godino (2004) afirma que “Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada.” (Pág.142). buscando potenciar los conocimientos de los estudiantes por medio la interacción de un medio tecnológico como lo es Geo Gebra y sus capacidades para fortalecer sus comprensiones e intuiciones más concretas y generar el saber que se busca desarrollar con este medio. Por lo que es importante el uso de este instrumento, ya que según Godino (2004) menciona que “Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.” (Pág. 142).

Del mismo modo es importante destacar la idea de que los recursos tecnológicos están modificando la manera de diseñar e implementar unas ciertas actividades para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas enfocadas a un objeto en específico, permitiendo de esta

manera que al momento de que los estudiantes interactúen de manera propia frente a un ordenador, recurra a una reflexión de su proceso de aprendizaje y lo haga crear un razonamiento del mismo, debido a esto (Godino,2004 citando a NCTM, 2000) "La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (Pág.143).

### **1.1.6 GEO-GEBRA COMO MEDIO**

En la propuesta se presenta el software de geometría dinámica Geo Gebra, nos va permitir realizar representaciones directas e interactuar con él para la construcción del conocimiento sin la intervención del docente sino un proceso meramente del estudiante.

El proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas mediado por unos recursos, puede ser descrito como un desarrollo en torno a la modelización debido a que se realiza una interpretación de manera abstracta, simbólica y concreta del objeto matemático, creando un sistema de diferentes representaciones que surge de la descripción de su realidad.

### **1.2 ASPECTO DIDÁCTICO**

Para el desarrollo de esta propuesta se debe señalar que el trabajo que queremos gestionar no es solo una aplicación de la actividad, sino una orientación de la misma, para que de esta forma los estudiantes se involucren de tal manera que relacione las actividades a circunstancias de la vida cotidiana.

Por ello se tomará la teoría de situaciones fundamentales de Guy Brousseau quien propone un aprendizaje por adaptación, lo cual permite que el conocimiento no sea enseñado de una manera directa, es decir debe de existir un medio, con el que él estudiante interactúa, por tal motivo se utilizarán algunos artefactos; uno de los principales será el software Geo-gebra; para que el alumno transite por cada una de las etapas de ésta teoría, las cuales serán abordadas este aspecto; Por consiguiente (Otros & Acosta,2010) citando a Brousseau(1992) establece que “ el aprendizaje debe producir por interacción entre un sujeto y un medio” (pág. 174)

Con base a lo expuesto anteriormente (Otros & Acosta,2010) citando a Brousseau (1986) establece que “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno” (pág. 175).

En este sentido el sujeto tiene una intención, que está relacionada con un símbolo u objeto; la cual lo lleva a realizar una acción sobre el medio, éste reacciona a dicha acción y a esto se le denomina retroacción. Él interpreta si la retroacción es negativa o positiva para analizar si la acción aplicada al medio es válida, en caso de que la acción sea negativa, él sujeto modifica su acción para poder alcanzar lo que se propone. Si la acción alcanza el objetivo propuesto por el sujeto la validación es positiva, entonces pasa a reforzar dicha acción; a este proceso se le denomina validación.

Según la concepción de Brousseau, “las retroacciones del medio son fundamentales para el aprendizaje, puesto que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un “medio” resistente con el que interactúa, lo cual hace que este medio sea modificable” (Otros & Acosta,2010). es decir que el alumno toma un rol reflexivo frente a las acciones realizadas hacia el medio, puesto que toda acción genera una retroacción; cabe aclarar que en este aprendizaje no interviene directamente el docente; el rol de éste está dirigido en la adaptación del medio; para cumplir con los objetivos de aprendizaje.

Por consiguiente (Otros & Acosta, 2010, pág. 175) apoyándose en Brousseau, menciona que el medio debe presentar las siguientes características:

1. Ser exterior al alumno: el alumno debe reconocerle una existencia objetiva.
2. Ser material: el alumno puede interactuar con él por medio de acciones.
3. No debe tener ninguna intención: no debe ser percibido como una persona.
4. Reaccionar: las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. Imponer restricciones a la acción: no cualquier acción es posible.

Por lo tanto, es necesario que el docente pueda estructurar el conocimiento matemático, con el fin de poder establecer medios modificables, es decir

“el profesor debe anticipar las posibles acciones del estudiante y las retroacciones del medio para garantizar que puedan ser interpretadas por el estudiante, con el fin de validar o invalidar sus acciones, y que de esta manera se dé un aprendizaje por adaptación” (Otros & Acosta, 2010, pág. 176).

en estos puntos surgen las situaciones a-didácticas y didácticas; las cuales están ligadas para la construcción del conocimiento matemático.

### **1.2.1 SITUACIONES A-DIDÁCTICAS**

Es un concepto fundamental en esta teoría ya que esta es una situación que produce un aprendizaje por adaptación, interviniendo el sujeto y el medio por lo tanto no hay una intención didáctica, está solo puede comprenderse desde una situación didáctica; (Otros & Acosta, 2010) define que se produce una situación didáctica cuando “un individuo (profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (alumno) un saber matemático dado” (pág. 178). Sin embargo, estas dos situaciones se relacionan directamente, pues las situaciones a-didáctica puede hacer parte de la situación didáctica, en el momento que se produce una interacción entre alumno, profesor y saber.

la situación didáctica comprende la relación entre estudiante, profesor y saber, donde el docente busca enseñar un conocimiento de manera indirecta, estableciendo una situación a-didáctica, con la intención de generar un aprendizaje por adaptación. para ello el docente proporciona, un medio y un problema, pensando en un saber en específico, los cuales generarán una interacción entre estudiante y medio, esté permite que reflexione sobre su proceso, por medio de las acciones y retroacciones, que son las que le permitirán alcanzar la intención que se proponga para validar su acción, así mismo construir un conocimiento respecto a un saber, cumpliendo con los objetivos de la situación.

En este sentido es importante tener claro que el conocimiento y el saber son diferentes, dado que, por un lado el conocimiento es propio y contextualizado y el saber es universal y se adquiere con la construcción de un conocimiento, por lo tanto el docente construye un conocimiento respecto a un saber, en contraste con lo anterior (Otros & Acosta, 2010, p.177) menciona que “una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor debe explicitar las

relaciones entre el conocimiento construido por el alumno gracias a la situación a-didáctica y el saber que desea enseñar”. a este proceso se le denomina institucionalización, es decir la aclaración por parte del docente del conocimiento construido con base a la situación presentada al alumno y el saber puesto en juego.

Por otra parte, es importante intentar que la actividad que se facilite dentro del aula contenga situaciones que propicien el aprendizaje por adaptación, de acuerdo con la teoría de Brousseau (1986). De esta manera generar en los estudiantes un buen desarrollo de aprendizaje significativo.

Para concluir parece de gran importancia la adquisición del concepto secciones cónicas, teniendo en cuenta la TSD, ya que esto permite que el estudiante establezca relaciones entre el medio (instrumento) y el conocimiento, logrando caracterizar cada uno de los conceptos; lo cual puede permitir crear una situación que genere conocimiento matemático, desarrollada de tal manera que el estudiante genere una situación de enseñanza- aprendizaje, por medio de un proceso que evidencie y valide su aprendizaje, donde se vea involucrado la participación del docente para validar o no el proceso cognoscitivo desarrollado por el estudiante y determinar la adquisición del saber.

### **1.2.2 ASPECTO METODOLÓGICO**

En este trabajo vamos a presentar un análisis con base al proceso de enseñanza aprendizaje en torno a las secciones cónicas, vistas desde dos perspectivas como lo son, cortes de un cono y lugar geométrico, estas serán mediadas por tres artefactos (plastilina, regla y compás y un software de geometría dinámica como GeoGebra), buscando generar por medio de la TSD, explicadas en el aspecto anterior, un proceso de enseñanza por adaptación, utilizando de esta manera los diferentes instrumentos como medio.

Para ello en primer lugar se procederá a caracterizar cada uno los procesos que se desarrollaran en el aula a partir de cada una de las perspectivas que se piensan abordar las

cónicas, además de los artefactos puestos en juego, todo esto aplicado a TSD, la cual describe unas fases, (intención, acción, retroacción y validación).

A continuación, se mostrará la descripción de las actividades que se piensan implementar para el desarrollo de la propuesta, como tal son tres actividades las cuales cada una va a tener un desarrollo diferente y una interacción con artefactos diferentes, todo para generar un proceso de enseñanza sobre las secciones cónicas.

## **CAPITULO DOS, PLANEACIÓN DE ACTIVIDADES**

### **2.1 Actividad cortes del cono**

#### **Objetivos profesor:**

- Identificar si los estudiantes por medio de los cortes reconocen las secciones cónicas.
- Observar que conocimiento tienen los estudiantes en relación a las características de los cortes para cada sección cónica.
- Analizar cómo los estudiantes interactúan con el instrumento y lo relacionan con la forma de las secciones cónicas.

#### **objetivo estudiante:**

- Reconocer por medio de cortes de un cono las secciones cónicas.
- Caracterizar los cortes que generan cada sección cónica.
- Identifiquen similitudes entre los dos medios manipulados.

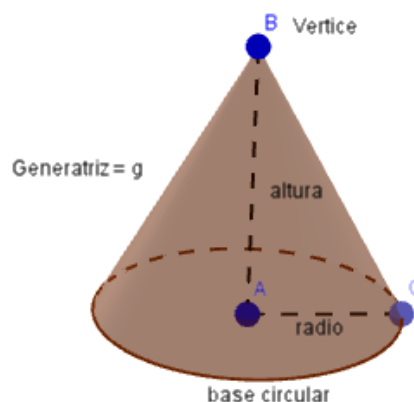
#### **Metodología**

Se trabajará con un grupo de estudiantes de grado noveno, las cuales van a contar con tres conos cada una y con un hilo, el cual les va permitir hacer los cortes con base a las indicaciones que se le brinden para aplicar el corte, de antemano se les hará una breve introducción sobre qué es el radio, altura generatriz, base, simetría, paralelo y perpendicular. Que nos parece importante tener en claro para el desarrollo de la actividad, tal como se puede apreciar en la ilustración 11.

Posteriormente se realizará un contraste del manejo de un material concreto a una visión desde el software de geometría dinámica Geo gebra, en esté se realizará un proceso en el que



los estudiantes van interactuar desde este programa, para poder observar el razonamiento matemático de los estudiantes frente a las dos tecnologías puestas en juego.



*Ilustración 11. Partes del cono*

### **Descripción de la actividad 1:**

El desarrollo de esta actividad estará planteado en dos fases en la primera identificación de cada uno de los cortes que generan las secciones, para ello se les suministrará tres conos y una guía (anexo 1) donde se encuentran las secciones cónicas sin sus nombres, los estudiantes deberán encontrar la estrategia para identificar la manera en que deben cortar el cono para que se genere una sección determinada.

Posteriormente en la siguiente fase deberán interactuar con el software Geo-gebra, donde encontrarán tres casillas de control que les permitirá observar los diferentes planos que caracterizan los cortes para cada sección cónica.

### **Preguntas primera fase:**

1. Describe y dibuje el corte obtenido.

Con base a la indicación anterior se presentan las siguientes preguntas:

1. ¿lo asocia con un objeto de la vida cotidiana? ¿cuál?
2. ¿Reconoce la imagen de cortar el cono?

### **Preguntas segunda fase:**

1. Con base a las partes del cono, describe las características del corte para cada una de las imágenes.
2. Cree usted que con un solo corte se podrían construir las tres imágenes ¿Si? o ¿No? ¿Por qué?
3. ¿Qué relación encuentra al manipular ambos recursos?
4. ¿Cuál de los recursos le permitió observar más cosas?

### **hipótesis elipse**

- Cortar el cono con el hilo de tal manera que al hacerlo se genere un corte en todas las generatrices del cono, de manera transversal, o un corte de manera que no sea ni paralelo ni perpendicular a la base del cono.

### **hipótesis parábola**

- Cortar el cono de manera tal que, al hacerlo, el corte sea transversal y que corte una generatriz y la base del cono, es decir el corte realizado es paralelo a la generatriz.

### **hipótesis hipérbola:**

- Realizará un corte de manera que sea perpendicular a la base del cono y corte la generatriz, análogamente el corte será paralelo a el eje de simetría del cono.

### **Análisis actividad cortes del cono**

#### **2.2 Actividad dos, construcción de los lugares geométricos por medio de dobleces.**

#### **Objetivos profesor:**

- Identificar si los estudiantes reconocen por medio de los dobleces las secciones cónicas.
- Observar si los estudiantes identifican por medio de los dobleces las características

de las secciones cónicas con

## Metodología

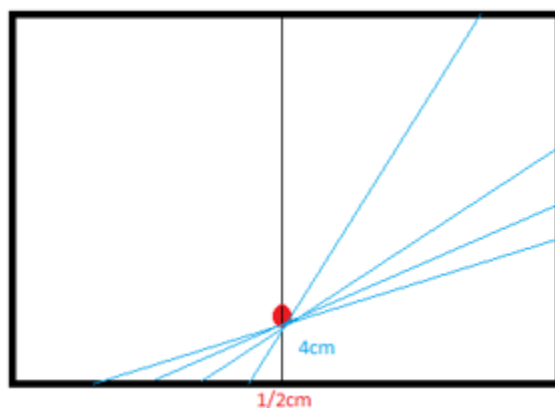
Por parejas los estudiantes contarán con tres hojas pergamino cada una, las cuales van a permitir que por medio de dobleces formen las secciones cónicas, claro está que cada una de las cónicas tienen un doblez en particular, donde el docente les brindará las indicaciones para el desarrollo de la actividad.

### Descripción de la actividad 2:

La actividad va a contar con tres fases cada una de ellas relacionada a cada una de las secciones cónicas, donde ellos deberán tener en cuenta las indicaciones del profesor:

#### Fase 1 (Parábola):

- Los estudiantes deberán hacer un eje de simetría en una de las hojas que se les dio.
- Luego tomarán una medida entre 2cm y 5cm en uno de los bordes del eje de simetría y lo van a nombrar como F.
- Así mismo, por el borde donde decidieron tomar la medida inicial, ese borde de la hoja la vamos a nombrar como la recta  $r_1$  y la vamos a dividir toda por  $\frac{1}{2}$  cm. Como se puede observar en la ilustración 12.



*Ilustración 12. Ejemplo doblez parábola*

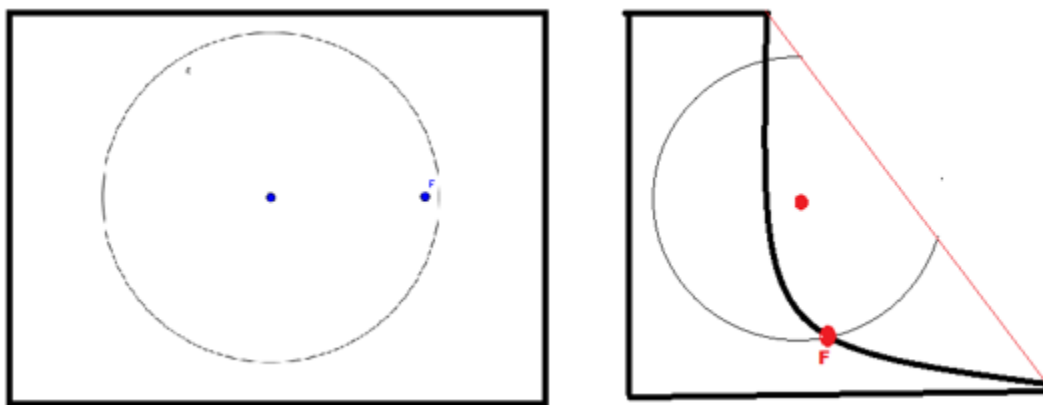
- Luego teniendo en cuenta la división de la  $r_1$  y el punto F, se comienza a doblar la

hoja.

- Posteriormente se realizará las siguientes preguntas:  
¿Cuál es la distancia de F a  $r_1$ ?
- Trace una recta perpendicular ( $r_2$ ) al eje de simetría que pase por F, donde se intersectan  $r_2$  con el lugar geométrico méncionala P y responda: ¿Cuál es la distancia de F a P?

### Fase 2 (Elipse):

- Con la otra hoja los estudiantes deberán graficar una circunferencia de cualquier radio, para luego poner un punto dentro de la circunferencia el cual llamaremos F.
- Luego se doblará la hoja teniendo en cuenta el punto F el cual se va a colocar sobre la circunferencia y se irá moviendo sobre ella al tiempo que se va marcando el doblez de cada movimiento hasta llegar de nuevo a donde se empezó.
- Basándose en la figura 2 y la figura 2.1

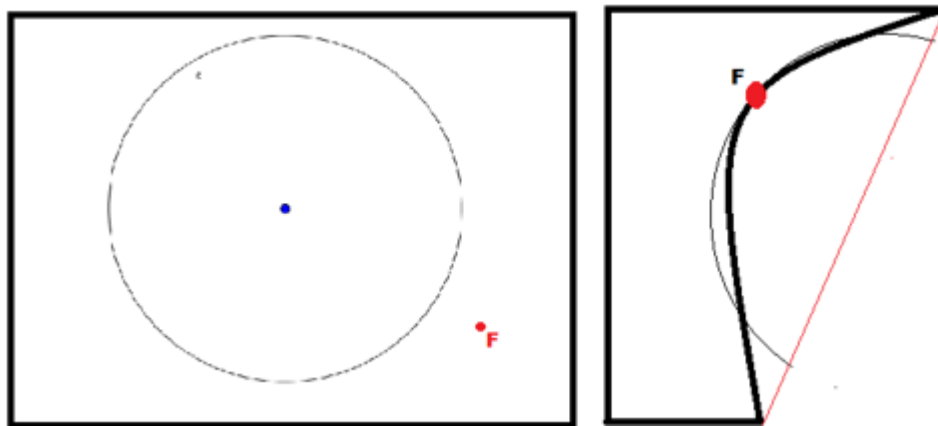


*Ilustración 13, Ejemplo dobles parábola.*

- Posteriormente se realizará las siguientes preguntas.

### Fase (Hipérbola):

- Con la última hoja los estudiantes deberán graficar de nuevo una circunferencia con cualquier radio y tomarán un punto fuera de ella y lo van a llamar F.
- Luego doblará la hoja teniendo en cuenta ese punto F y lo colocarán sobre la circunferencia y lo irán moviendo y marcando los dobleces en base a los movimientos de ese punto sobre la circunferencia.
- Lo podrán observar en la figura 3 y en la figura 3.1



*Ilustración 14, Ejemplo indicaciones hipérbola*

- Posteriormente se realizarán las siguientes preguntas.
  1. Logra identificar la figura formada luego de realizar los dobleces.
  2. Logra encontrar una relación entre la figura realizada por los dobleces y la realizada por los cortes del cono.
  3. Cada figura a que corte se relaciona
  4. En la figura se observa un punto F, llamado foco, ese punto se puede observar en la actividad de la clase anterior.

### **2.3 Actividad tres, recurso en Geo-gebra**

Metodología

Esta actividad se desarrollará con un recurso en el software Geo-gebra, en cual los estudiantes encontrarán unas preguntas las cuales les permitirán entender las propiedades como lugares geométricos de las secciones cónicas, (anexo 2,3 y 4)

## **CAPITULO TRES, ANÁLISIS ACTIVIDADES**

Para realizar el análisis de cada una de las actividades plantearemos cada uno de los componentes de la teoría de las situaciones didácticas presentes en esta, tratando de mostrar la importancia de cada uno de los medios proporcionados a los estudiantes (plastilina, hilo y software) y el como la interacción existente en el medio y el estudiante genera nuevos conocimientos, dado que según (Acosta & otros, 2010) citando a (Brousseau,1993) “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” p.175 Es decir el estudiante realiza acciones y retroacciones que le permiten generar nuevos conocimientos, por lo tanto, se realizara un análisis a posteriori, de cada uno de los medios acá utilizando haciendo énfasis en como una puede complementar a la otra.

Asimismo, se tendrán en cuenta las afirmaciones realizadas por los estudiantes, haciendo énfasis en los roles del docente como la persona que tiene la intención de enseñar y además aporta sus saberes, por con siguiente se planteara la descripción de los videos e imágenes tomadas a los estudiantes de grado noveno del colegio EID Alfonzo Reyes Echandi. Analizando si la actividad cumple con los objetivos de aprendizaje los cuales mostraremos a continuación.

### **3.1 Análisis actividad uno, cortes del cono**

#### **3.1.1 Objetivo de aprendizaje actividad cortes del cono**

El objetivo de las actividades fue guiar a los estudiantes de noveno grado a caracterizar los cortes que generan cada sección cónica y que de este modo el estudiante comprenda que

cada sección se generaba con un corte diferente, lo cual los llevo a establecer comparaciones de cada uno de los cortes.

**3.1.2 Cortes diferentes:** el alumno puede identificar que un corte con características diferente generara una sección diferente, es decir cada sección tiene propiedades diferentes, por lo que se da cuenta que no es posible generar con un solo corte generar todas las secciones.

**3.1.3 Observación:** Observa las características de los planos que cortan el cono truncado, donde analizan de manera general las características de los cortes que generan cada sección.

### **3.1.3 Transcripción videos, cortes del cono:**

De antemano se realizará una descripción del video tomado para cada sesión de clase que se desarrolló y posteriormente las intervenciones de los estudiantes y del docente, las cuales van a estar caracterizadas de la siguiente manera, así como la respectiva evidencia de la acción que presento el estudiante:

P: Profesor

E: Estudiante

Figura 1: Elipse.

Figura 2: Parábola.

Figura 3: Hipérbola.

Con base a lo expuesto anteriormente pasaremos con el análisis de cada video en el orden de las sesiones de clase.

### **3.1.4 Transcripción sesión uno, video cortes del cono elipse, (VCCE)**

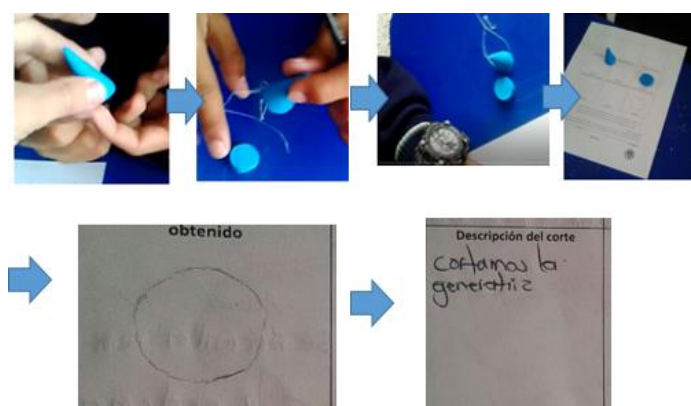
El video describe la intervención del docente con relación al proceso desarrollado por los estudiantes para cada figura puesta en la guía de trabajo. Por lo que para la figura 1 (Elipse) de la guía de trabajo, el profe realizo las siguientes intervenciones:

**P:** ¿Este corte para la figura 1, (elipse) como lo generaron?

**P:** Primero identifica la base del cono, para generar este corte ¿la base es cortada? (como se observa en la ilustración 15)

**P:** ¿Y qué más se cortó?

**E2:** la generatriz.



*Ilustración 15. Secuencia de acciones realizadas por los estudiantes para la construcción de la elipse*

**3.1.4.1 Descripción de la acción del niño:** Como se muestra en la ilustración 15, el estudiante genera la **acción de cortar el cono**, teniendo en cuenta sus partes describe el corte mencionando que “*corta la generatriz*” de lo que se puede observar que al estudiante ya tiene una intuición del concepto elipse como corte de un cono, es decir que el medio y la acción le permite pasar de un concepto concreto a un concepto abstracto.

**P:** Ahora, para la figura 3 (Hipérbola) ¿Qué cortaron?

**P:** ¿Y qué más se cortó?

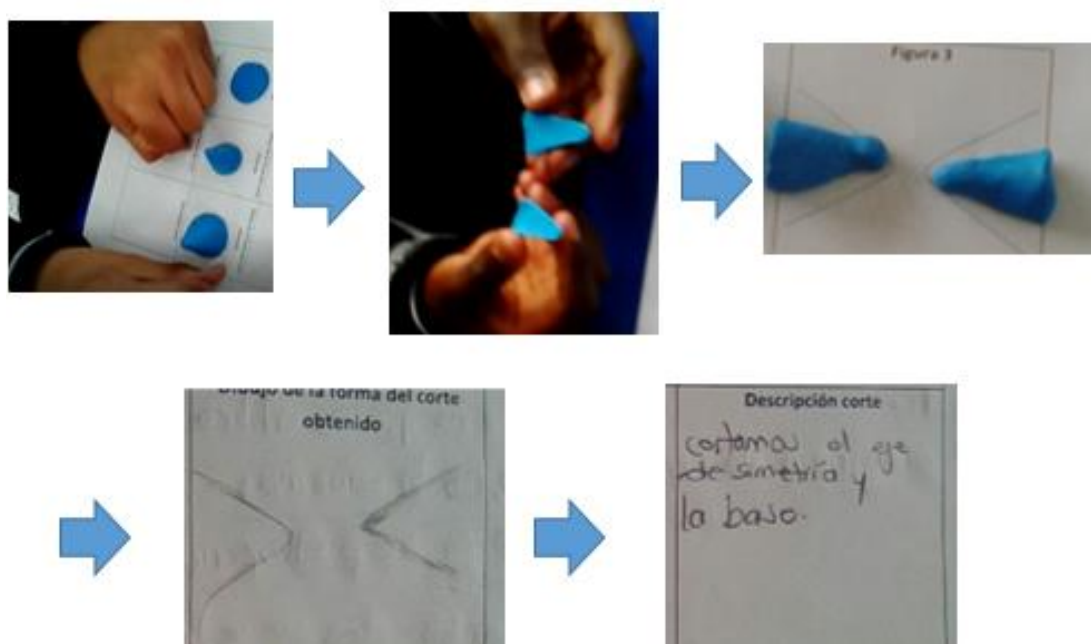
**E1:** La generatriz, el eje de simetría y la base

**P:** También el punto de arriba ¿Qué cómo se llama?



**E2: Vértice.** (Ilustración 16)

**P:** Tengan en cuenta que, en este caso, las generatrices no se cortan, solo lo que ustedes mencionaron sin contar con esta.



*Ilustración 16, Secuencia de acciones realizadas por los estudiantes para generar la hipérbola*

**Descripción de la acción del niño:** En la ilustración 16 se muestra como el corte realizado por el estudiante para generar la sección cónica hipérbola, donde realiza afirmaciones respecto a dicho corte, menciona que cortan “*las generatrices, el eje de simetría y la base*” momento en el que interviene el docente con el fin de hacerles ver que la generatriz, no la están cortando, señalando nuevamente las partes del cono, lo cual permite que ellos identifiquen el corte que genera la sección hipérbola, es decir el estudiante debe caracterizar correctamente cual es la acción que genera la sección hipérbola, en este momento el estudiante se encuentra en la retroacción, puesto que al identificar las partes del cono que está cortando, lo que lo lleva a describir el corte como se observa en la

ilustración 16, donde el estudiante afirma que “*corta el eje de simetría y la base*” es decir identifica el corte que le genera la sección hipérbola, sin embargo en no comprende que los cortes paralelos a eje de simetría también generan dicho sección.

### **3.1.6 Transcripción del video, corte del cono parábola (TVCP)**

**P:** Para la figura 2 (parábola) ¿Qué corte realizaron?

**E1:** Lo mismo

**P:** ¿Lo mismo?

**E2:** No porque nos quedarían dos pedazos y nos tienen que quedar uno.

**P:** Recuerda que lo que genera el corte es la curva, no necesariamente que se genere dos pedazos, por ejemplo, miremos el corte para la figura 1 (Elipse) los dos pedazos que les quedaron son similares, generen un corte que pase lo mismo, pero para la figura 2 (parábola).

**P:** ¿Qué van a cortar?

**E1:** La base, el vértice y el eje de simetría.

**P:** Pero recuerda que si haces ese corte te forma la figura 3 (hipérbola), entonces ¿Qué deberías cortar para formar la figura 2 (parábola)?

**E2:** La generatriz, el eje de simetría y la base.

**P:** listo, realicen un corte donde pase eso que acaban de mencionar.

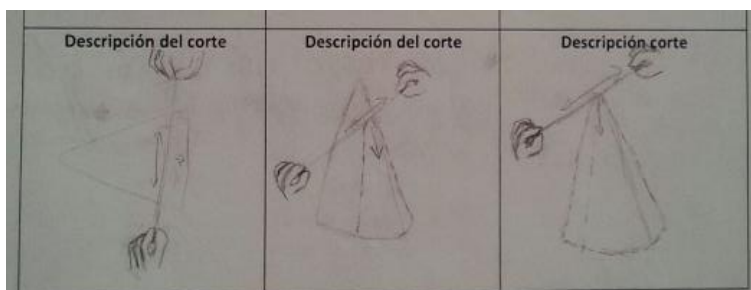
**E2:** ¿Qué corte esas tres?

**P:** Si claro. Luego describan en la hoja el proceso del corte para cada figura que realizaron.

Figura



*Ilustración 17, Secuencia de acciones realizadas por los estudiantes para generar la parábola*



*Ilustración 18, Descripción de los cortes realizados por los estudiantes para generar cada sección cónica*

**3.1.6.1 Descripción de las acciones realizadas el niño (TVCP):** En la ilustración 17, se evidencia el corte realizado por los estudiantes, del mismo en la (TVCP) el estudiante (E2) afirma que la figura 2 (parábola) se forma cortando “*La generatriz, el eje de simetría y la base*” después de revalidar su acción teniendo en cuenta las observaciones planteadas por el docente, del mismo modo el estudiante describe cada una de los cortes realizando con un dibujo, donde se puede evidenciar que **la acción de dibujar**, ver ilustración 18, la cual le permite caracterizar los corte para cada sección, donde se establecen relaciones entre el corte deseado, el corte obtenido y el dibujo realizado.

**3.1.7 Trascrición del video dos, diferenciación de cada uno de los cortes. (TVDDCC)**

En este video se evidencia el proceso de un estudiante para cada corte generado por cada uno de los conos, donde se contó con la intervención del docente, el cual tuvo en cuenta el proceso de los estudiantes para el desarrollo de la actividad, a continuación, mostraremos el diálogo del profesor y los estudiantes en este proceso.

**E1:** Listo profe ya hicimos la figura 3 (Hipérbola)

**P1:** Bueno miremos acá a la figura 1 (elipse), lo que te queda es esta luego de hacer el corte cierto (Ilustración 19), pero mira la figura 3 me estas mostrando la parte exterior del cono (Ilustración 19) ¿Qué deberías mostrarme?



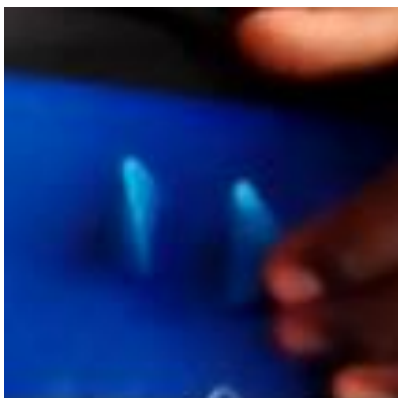
*Ilustración 19, cortes realizados por los estudiantes para generar la elipse y la hipérbola*

**E1:** La interior.

**P:** El corte, listo, ustedes dicen que cuando la cortan de la manera que la cortaron se les forma la figura 3 (Hipérbola) ¿Cuáles son las características de ese corte para que se les genere esa figura 3?

**E2:** Cortarla por la mitad, por el eje de simetría. (Ilustración 20)

Y finalmente para la figura 2 (Parábola), el profesor realizó las siguientes intervenciones a la que los estudiantes respondieron de la siguiente manera:



*Ilustración 20, corte al cono por el eje de simetría*

**P:** Ahora cuando se les genero la figura 1 (Elipse) ¿Qué características tenía ese corte? O ¿Qué debieron cortar ustedes para que se les generara la figura 1?, listos cual es la base, para la figura 1 cortan la base? (Ilustración 21)

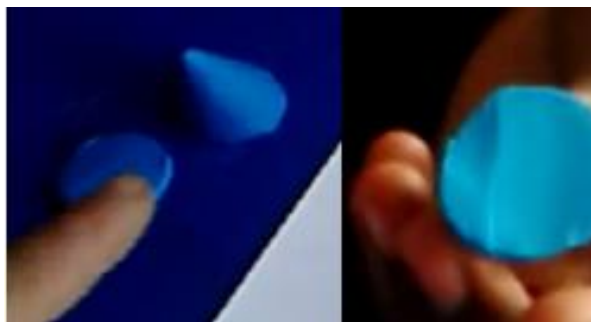
**E2:** No

**P:** ¿Qué cortaron?

**E2:** Las generatrices.

**P:** Perfecto entonces quiere decir que ya saben que cortan cuando generan la figura 1, cortan las generatrices. ¿Qué escribieron ustedes respecto a ese corte que hicieron para la figura 1?

**E1:** Pues que salió un poco torcido pero similar a la figura que se muestra ahí en la guía. (ilustración 21)



*Ilustración 21, corte que genera la figura 1 (elipse)*

**E1:** el eje de simetría y la base. (Ilustración 22)

**P:** Perfecto entonces quiere decir que ya saben que cortan cuando generan la figura 1, cortan las generatrices. ¿Qué escribieron ustedes respecto a ese corte que hicieron para la figura 1?

**E1:** Pues que salió un poco torcido pero similar a la figura que se muestra ahí en la guía. (ilustración 21)

**P:** Listo, Ahora, resumiendo lo que se hablado, ¿Qué corte deberían hacer para formar la figura 1? ¿Cuál sería la característica de ese corte? Ustedes ya lo mencionaron.

**E1:** Pues las generatrices.

**P:** Ahora ustedes me dicen que para formar la figura 1 cortan todas las generatrices y para la figura 3 cortan el eje de simetría y la base. Qué pasaría si hacemos un corte similar al que hicieron para la figura 3, pero un poco corrido ¿se generaría la misma?

**E2:** Si, por que solo se correría, daría igual por que daría similar pero diferente tamaño.

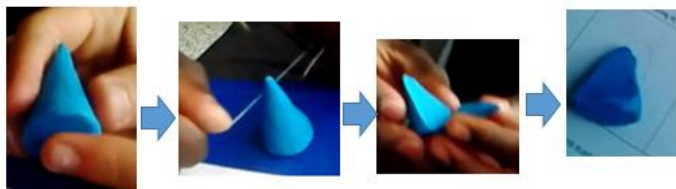
**P:** Ustedes ya saben cómo generar la figura 1 y la 3 ¿Cómo generarían la figura 2? Como creen ustedes que es la característica del corte para generar la figura 2.

**P:** Recuerden que ese corte que acabaron de realizar es diferente, listo esa es, ahora quiero que miren con respecto al cono ¿cuál fue el corte que hicieron, que cortaron?

**E1:** la generatriz

**P:** ¿Y qué más corta?

Se evidencia el proceso del estudiante en las siguientes tres Ilustraciones 22



*Ilustración 22, El realiza el corte para generar la sección parábola, y la compara con la figura solicitada*

**P:** Muy bien corta esas tres cosas, ahora quiero que describan eso que acabamos de decir para cada figura.

**3.1.7.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TVDDCC):** En este momento del video se puede observar que los estudiantes realizan **la acción de comparar**, ver ilustración 19, la cual permite establecer relaciones entre la sección solicitada y el corte necesario para generar dicha sección, además el identifican que para cada corte se existe un sección diferente es decir existe una relación uno a uno entre las características del corte y la sección, dado que el (E2) afirma para generar la figura 3 (hipérbola) se debe “*cortarla por la mitad, por el eje de simetría*” ver ilustración 20, del mismo modo describe que el corte necesario para generar la figura 1 (elipse) se debe cortar “*las generatrices*” ver ilustración 21. Análogamente el docente sigue realizando preguntas con fin de caracterizar la sección parábola donde el estudiante E1 afirma que para generar la sección figura 2 (parábola) se debe cortar “*el eje de simetría y la base*” ver ilustración 22.

En esta transcripción se puede observar el rol que desempeña el docente quien es el que valida cada una de las acciones y retroacciones plantadas por los estudiantes, además la importancia del medio quien es el que les permite observar y analizar si las acciones realizadas les permite llegar a la figura solicitada por el docente, esto les permite generar relaciones de objeto matemático, lo cual los puede llevar a realizar una abstracción del concepto, lo cual permite que el estudiante interiorice su conocimiento, teniendo un aprendizaje más significativo.

En esta primera parte se puede observar la importancia del medio el cual permite que los estudiantes interactúen con el conocimiento dado que la actividad está sustentada en una situación a-didáctica “Cortar el cono de tal manera que se generen las figuras 1,2 y 3” lo cual lo lleva a pensar de qué manera cortar el cono, por lo tanto vamos mostrar las acciones y retroacciones que permitieron que los estudiantes realizarán el corte que genera la figura y del mismo modo lo describiera dicho corte teniendo en cuenta las partes del cono, a continuación mostraremos cada uno de los aspectos que intervinieron en la actividad.

### **3.1.8 Cono en plastilina como medio, artefacto**

En la actividad plateada utilizamos la plastilina como medio, este le permitía al estudiante interactuar para lograr el aprendizaje por adaptación es decir el estudiante en primer lugar debía realizar el corte y validar si el corte obtenido era igual a la figura solicitada, luego de ello debía caracterizar dicho corte.

De este modo se pudo evidenciar que los estudiantes podían realizar dos acciones la cual les generaba retroacciones correspondientes:

**3.1.8.1 Tipo de acción recortar:** haciendo uso del hilo y el cono el estudiante establece cual es el corte que le genera la figura 1 (elipse), para ello la retroacción correspondiente es cortar todas las generatrices del cono, del mismo modo

identifica que al cortar el cono por el eje de simetría se genera la figura 3 (hipérbola) y por ultimo identifica que al cortar las generatrices y la base del cono se genera la figura 2 (parábola).

**3.1.8.2 Comparación:** Después de realizar el corte el estudiante comparaba si la figura obtenida era igual alguna de las figuras solicitadas, de ser así el estudiante validaba la acción.

En cada una de estas acciones se evidencia la importancia de la percepción y la comparación dado que los estudiantes realizaban la acción y observaban si el corte realizado correspondía a la curva solicitada. Como se muestra en cada uno de los videos anteriores.

### **3.1.9 Transcripción cortes del cono software (TCCS)**

En este video se evidencia la interacción de los estudiantes con el software, en el cual se muestra los diferentes cortes que debieron haber trazado los estudiantes para cada cono y cada figura, a lo que el docente intervino de la siguiente manera, es este video es importante observar como el docente trata de articular lo realizado en la actividad con la plastilina y el software.

### **Descripción del video**



**P:** Que es lo que le dice la casilla de control. Que menciona que es plano paralelo al eje de simetría.

**E1:** Que esta igual al eje de simetría. (Ilustración 23)

**P:** conocen que es una ¿recta perpendicular?

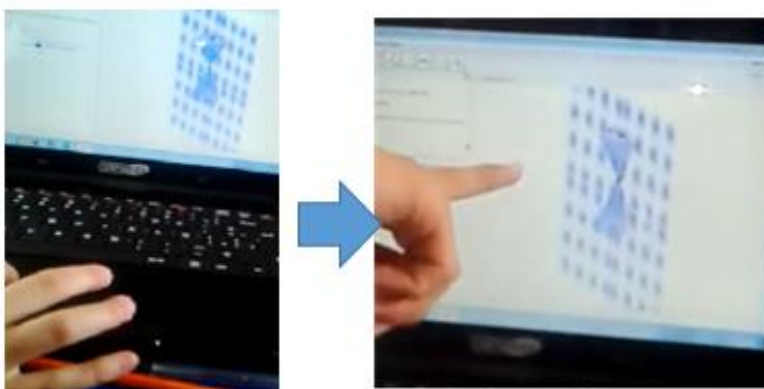
**E2, E1:** No

**P:** Solo voy hacer que recuerden, es cuando dos rectos se intersecan en un punto formando un ángulo de  $90^\circ$ , ¿Qué es una recta paralela?

**E2:** Que son iguales y que nunca se van a tocar.

**P:** ¿Respecto a los planos que debería pasar?

**E1:** Que nunca se junten al eje. (Ilustración 23)



*Ilustración 23, Corte del cono truncado con un plano paralelo a la base.*

**P:** Si y que esos planos van a estar a la misma distancia sobre el eje de simetría y ¿Qué característica tiene ese corte del eje de simetría?

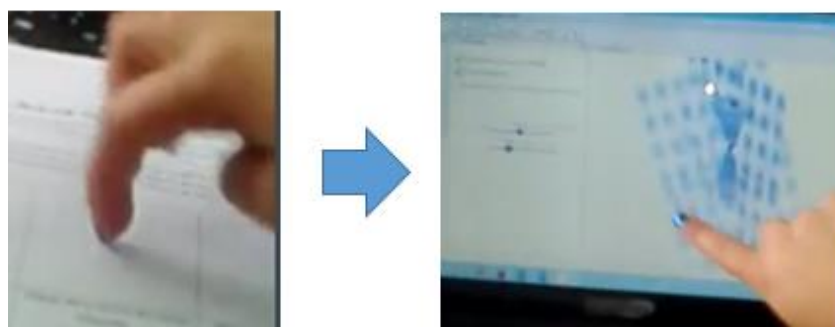
**E2:** Que son igual, ese es un ángulo de  $90^\circ$ , siempre que se trace ese plano va a tener un ángulo de  $90^\circ$ .

**P:** Listo con relación a que, recuerdan ¿Qué es lo que esta abajo, que es?

**E1:** La base, ha respecto a la base. Es decir que ese plano siempre va a ser de  $90^\circ$  respecto a la base que tenga.

**P:** Listo, ¿si es claro?

Los estudiantes se dieron cuenta del corte que debieron haber realizado para la figura 2, luego de darle clic a la segunda casilla de control, el corte que debimos haber hecho era desde la generatriz hasta la base. (Ilustración 24)



*Ilustración 24, Estudiante señala a que sección pertenece el corte*

**E2:** Profe una pregunta de la guía ¿cree que con un solo corte se pueden hacer las tres figuras? Como así.

**P:** Tiene que ser con un solo corte para formar las tres figuras ¿es posible?

**E2:** No, porque cada figura necesita un corte diferente.

**P:** Muy bien, qué ventajas tiene trabajar con el software que no ven al manipular la plastilina ¿Qué alcanzan a ver en el software que no ven con lo que se hizo inicialmente?

**E1:** Se puede ver una forma más clara el interior del cono, en cambio con la plastilina (Ilustración 25) y esperar hacer el corte, con el programa se ven los cortes sin necesidad de hacerlos (Ilustración 25), se ve más claro el corte.



*Ilustración 25, Estudiante compara el corte realizado en la plastilina con el corte realizado en el recurso en Geo-gebra.*

**3.1.9.1 Descripción de las acciones realizadas por los estudiantes (TCCS):** En la ilustración 24, se evidencia como el estudiante realiza **comparaciones** entre lo realizado con la plastilina y el software y lo realizado en la plastilina, es decir el estudiante ya reconoce como debe ser el corte que le genera una de terminada sección, del mismo el recurso en Geo-gebra le permite por medio de **acción de arrastrar** observar de manera general como era el corte que debía realizar para construir cada curva, dado que (E2) afirma que “*se puede ver una forma más clara el interior del cono, en cambio con la plastilina (Ilustración 25) y esperar hacer el corte, con el programa se ven los cortes sin necesidad de hacerlos (Ilustración 25), se ve más claro el corte*” En otras palabras el software permite que al interactuar con los estudiantes observen propiedades de manera general, dado que identifican que para cada corte se asocia una sección diferente.

En este sentido la actividad uno se planteó desde una **situación didáctica**, Recurso en Geo-gebra, medio que le permitía al estudiante observar y percibir cada una de las propiedades de los cortes que formaban las secciones, este recurso les permite a los estudiantes ver las propiedades de los cortes de manera precisa, y en este momento identifican que hilo estaba representando el plano, de lo que se puede establecer que las dos formas de representación permitieron que el estudiante constituyera cosa de su saber, es decir establecen relaciones entre lo concreto y los abstracto.

### **3.1.10 Recurso en Geo-gebra como medio.**

En este recurso didáctico la intensión de enseñar se ve de manera directa, por lo tanto, es una situación didáctica dado que según (Acosta & otros, 2010) menciona que un “concepto fundamental de esta teoría es el de situación a-didáctica, que es aquella situación que produce un aprendizaje por adaptación. La situación a-didáctica sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica, que es una situación normal de clase” p.176 dado que permite observar los cortes que generan cada una de las curvas, donde los estudiantes realizan acciones que les permitía corroborar cada una de sus acciones y retroacciones planteadas en la actividad anterior.

En Geo-gebra se pueden realizar un tipo de acción y un tipo de retroacción.

**3.1.10.1 Tipo de acción arrastrar:** Haciendo uso de las casillas de control y el desplazamiento de cada uno de los deslizadores el estudiante identifica de manera general cada uno de los cortes, donde establece relaciones con los cortes realizados en la actividad anterior, donde identifica la retroacción correspondiente a cada uno de los cortes.

De estos artefacto se puede evidenciar que los objetos matemáticos conservan cada una de sus propiedades y relaciones, dado que cuando se genera el corte la curva obtenida siempre será la misma, esto aporta una gran ventaja puesto que, las retroacciones obtenidas en el medio corresponde a un saber geométrico, según (Acosta & otros, 2010) señala que “los conocimientos que construyen los alumnos en interacción con (...) el medio tendrán una correspondencia directa con el saber que se quiere enseñar”. P.178 donde los estudiantes establecen relaciones generales respecto a las características de los cortes que generan cada sección cónica. Es decir, los estudiantes en la primera fase de la actividad (cortes del cono) pueden experimentar realizando acciones y retroacciones y en el segundo parte pueden establecer de manera general y precisa, lo cual le permite validar lo anteriormente desarrollado.

### **3.2 Análisis actividad dos construcciones de las secciones cónicas como lugares geométricos**

A continuación, mostraremos cada una de las acciones plateadas por los estudiantes, para caracterizar las las secciones cónicas como lugares geométricos, para ello tomamos algunas imágenes y videos en las que se evidencia dicho proceso, del mismo modo es importante

aclarar que el material, hoja pergamino con una circunferencia y un punto F dentro de la circunferencia, fue suministrados por los docentes

### **3.2.1 Descripción del medio.**

En este sentido es importante aclarar que el medio suministrado a los estudiantes, es papel pergamino el cual permite realizar abstracciones de conceptos tales como, recta, punto, circunferencia y cada una de las sesiones cónicas como lugares geométricos, esto se debe a que este artefacto permite ver los puntos con los cuales se desea generar el lugar, debido a su translucidez, además en el momento que se realiza el doble permite ver de una manera clara la recta que genera, del mismo modo en el momento que se intersectan dos rectas se puede observar el punto generado, lo cual permite generar distancias dentro del medio, con las cuales los estudiantes establecen relaciones.

### **3.2.2 Objetivo de aprendizaje actividad dobleces:**

Caracterizar por medio de la geometría del doblado la elipse, hipérbola y parábola, como lugares geométricos, y mostrar como los estudiantes por medio de mediciones establecen la regularidad de cada lugar geométrico abordado, lo cual le permite tener una noción de las características de cada uno de ellos.

**3.2.3 Diferencia entre los dobleces:** El estudiante identifica que, a cada tipo de dobleces, se asocia una curva diferente, del mismo modo diferentes propiedades.

**Movimiento:** Se evidencian tres tipos de movimientos condicionados a cada lugar geométrico.

**3.2.3.1 Movimiento uno:** En este se tiene una circunferencia con centro F y un punto F<sub>1</sub> dentro de la circunferencia, se debe tomar la hoja y doblarla de tal manera que punto F<sub>1</sub> quede sobre la circunferencia, se realizó este proceso sucesivamente hasta generar el lugar geométrico elipse.

**3.2.3.2 Movimiento dos:** En este se tienen la directriz, el eje de simetría y un punto foco; en este movimiento se debe llevar los puntos de la directriz al punto foco sucesivamente hasta obtener el lugar parábola.

**3.2.3.3 Movimiento tres:** En este se tiene una circunferencia con su centro y punto  $F_1$  fuera de la circunferencia, en este se debe llevar el punto  $F_1$  sobre cada uno de los puntos de la circunferencia sucesivamente hasta generar el lugar geométrico hipérbola.

**3.2.3. Acciones:** Las acciones realizadas por los estudiantes en esta actividad fueron dos (doblar y medir) la acción de doblar está asociada a cada uno de los movimientos anteriormente mencionados, ya que cada uno de estos movimientos generaba una curva diferente.

**3.2.3.1 Tipo de acción doblar:** Haciendo uso del medio suministrados y las indicaciones realizados por los docentes, se puede observar que la acción de doblar genera tres tipos de retroacciones asociados al movimiento uno dos y tres, es decir cada uno de estos movimientos del doble genera características diferentes, del mismo modo permite realizar la abstracción de conceptos tales como; plano, recta, segmento, punto, entre otros.

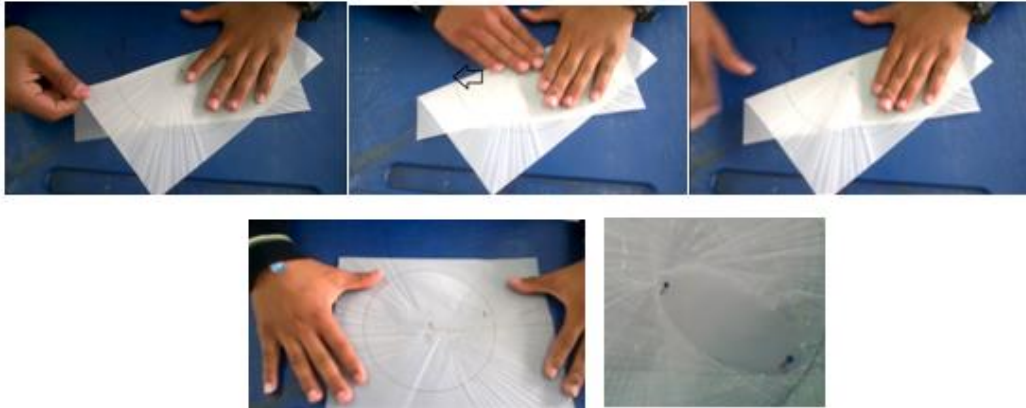
**3.2.3.2 Tipo de acción medir:** La acción de medir permite establecer relaciones, esta acción es un complemento de la acción de doblar dado que los estudiantes toman el pedazo de recta, el cual mide, realizando esta acción sucesivamente hasta empezar a comparar cada una de las medidas; por ejemplo, en el caso de la elipse logro establecer que la suma de las distancias es igual a una constante.

A continuación, se mostrará la descripción de los videos imágenes que nos permitieron identificar cada una de la acción propuesta para esta actividad.

#### **3.2.4 Transcripción actividad dos dobleces:**

#### **3.2.5 Descripción video uno, dobleces elipse (DVUDE)**

la actividad empieza con las indicaciones realizadas por los docentes para empezar a generar los lugares, en esta se evidencian dos tipos de estrategias, la primera el estudiante realiza el doblez de la manera solicitada y desdobla la hoja para realizar el siguiente doblez, ver ilustración 26, y en la segunda el estudiante realiza el doble de la forma solicitada sin necesidad de desdoblar la hoja, ver ilustración 27.



*Ilustración 26, Primera estrategia realizada por los estudiantes*



*Ilustración 27, Segunda estrategia realizadas por los estudiantes*

Teniendo en cuenta la secuencia se realizará la descripción de los siguientes videos.

### **3.2.6 Transcripción del video dos dobleces elipse (TVDE)**

**P:** Te acuerdas cuando hicimos la actividad con los conos, ¿lo asocias con alguno de los cortes que hicimos en esa clase?

**E1:** Si señor al primer corte (figura 1), que quedaba como un óvalo.

**P:** bueno y recuerdas las partes del cono, generatrices, vértice, eje de simetría y base, ¿qué corte teníamos que hacer para que se generara esa curva que tienes ahí?

**E1:** La generatriz.

**3.2.6.1 Acciones realizada por los estudiantes (TVDE):** En este video se evidencia dos tipos de acciones realizadas por los estudiantes la primera asociada la **comparación** de la curva obtenida con el dobles, lo cual se observa cuando E1 afirma que se parece a un “óvalo” y lo relaciona a la figura uno (elipse) del mismo modo recuerda el corte necesario para generar dicha sección, seguido de esto, la **acción de doblar** permite generar una nueva representación de la cosa que ellos llaman “óvalo” dado esta se genera como lugar geométrico es decir por medio envolventes, donde **la acción de doblar** la hoja de tal manera que F1 quede sobre la circunferencia permitió genera la mediatriz entre los puntos pertenecientes a la circunferencia y el punto F1, ver ilustración 26 y 27, lo cual muestra la invariancia del proceso de los dobleces donde se analiza que a diferentes estrategias de doblado la forma del lugar se preserva.

Del mismo modo es importan recalcar el medio suministrado, pues permite la abstracción de conceptos, como rectas, mediatrices puntos y planos, sin la necesidad de definir ninguno de ellos.

como la primera a actividad permitía que los estudiantes reconocieran la forma de la elipse, es decir asociaban la forma de la curva a una de las figuras realizadas en la actividad uno; además de recordar cual era el corte que las generaba donde se puede mostrar el como ellos establecen una comparación de la forma de del lugar geométrico elipse a los que ellos llaman “óvalo”, lo cual nos lleva a pensar que en este momento se encuentra en la etapa de formulación dado que el estudiante trata de explicar las ideas constituidas en la actividad anterior.

### **3.2.7 Trascrición del video tres dobleces elipse (TVTDE)**

Posterior a los dobleces se procedió a establecer puntos qué pertenecieran a la curva construida, para este caso la elipse a lo que debido a esto el docente realizo las siguientes preguntas:



**P:** Tienen varias líneas y se intersecaban con algo, pero es el punto que escogieron de la curva y en realidad es el punto (Ilustración 28), ¿Cuáles son las condiciones de esos puntos respecto a los focos?



*Ilustración 28, Punto perteneciente al lugar geométrico elipse*

**E1:** Que pase por el foco. (Ilustración 29)

**P:** Entonces la distancia del foco al punto que escogieron daba un número (Ilustración 29), y del punto al otro foco daba otro número ¿cierto?

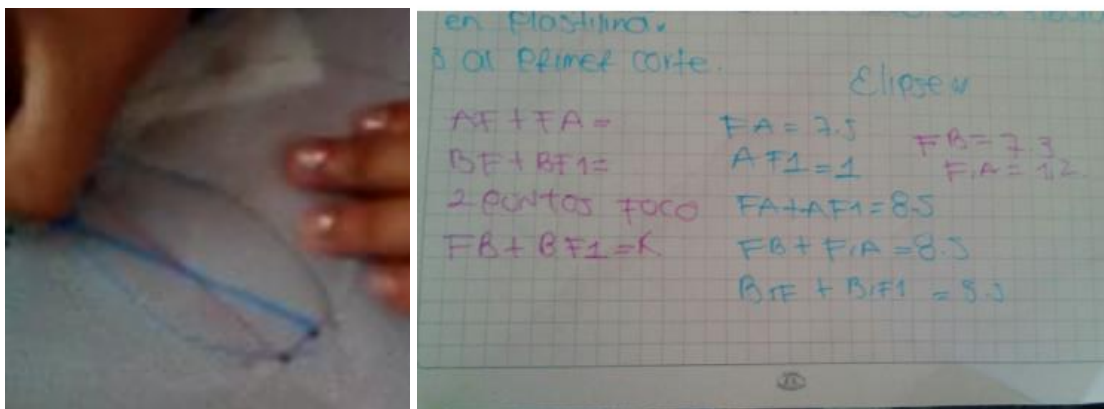


*Ilustración 29, Estudiante señalando la distancia existente de los puntos focos a un punto del lugar geométrico elipse*

**E1:** Sí.

**P:** Eso con la relación de las líneas azules (Ilustración 29) y ahora tienen una relación de líneas rojas. Ahora esa distancia que sumaste de la relación roja que es respecto a la relación azul, es decir súmalos ¿cuánto te da cada una?

**E2:** Nos dieron 8.5 las dos. (Ilustración 30)



*Ilustración 30, Características de las distancias que forman el lugar geométrico elipse*

En la ilustración 30 el estudiante establece la relación de los segmentos que forman el lugar donde afirma que “ $FA=7.5$   $AF1=1$  y  $FA+FA1=8.5$ ,  $FB=7.3$   $F1B=1.2$  y  $FB+FB1=8.5$ ”

**P:** Quiere decir que la característica de los puntos que se están formando ahí la distancia en relación a los focos ¿Cómo va a hacer?

**E1:** La misma, entonces la elipse es la figura que se forma a partir de los trazos.

**P:** Si, ¿pero qué condición tiene esos trazos?, describe eso.

**P:** Ahora descríbanme las condiciones de esos puntos de manera general, nombren los puntos que tomaron de la curva y hagan la relación con respecto a los focos, ¿Cómo llaman a los puntos?

**E1:** J y R

**P:** Entonces desde  $FJ+jF1=k$  y el otro punto  $F1R+RF=k$ , esto para decir que para cualquier punto de la curva la relación con los focos es la misma, ver ilustración 30.

**3.2.7.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TVTDE):** En este video se observa dos

Tipos de acciones:

**3.2.7.1.1 Acción de doblar:** los estudiantes realizaban el dobles estableciendo que el dobles debía pasar por los puntos focos, donde la intersección entre estas dos rectas generaba un punto perteneciente a lugar geométrico, ver ilustración 28. Lo cual lleva al estudiante a estar

en la etapa de formulación dado que establece las condiciones de las rectas que al intersectarse genera el lugar geométrico.

**3.3.7.1.2 Acción de colorear y medir:** El estudiante colorea los segmentos de color rojo y azul, ver ilustración 29, donde establece las relaciones de la distancia entre los puntos, es decir identifica que la suma de los segmentos rojos, es igual a la suma de las distancias azules, es decir asocia la acción de colorear y la de medir para establecer las similitudes de los segmentos formados, identificando que al sumar el segmento  $FA=7.5$  más  $F1B=1$  es igual a la suma de  $FB=7.3$  más  $F1B=1,2$  ver ilustración 30, lo cual le permite establecer una relación de las distancias de los puntos que forman el lugar geométrico elipse, donde el docente teniendo en cuenta dichas características procede a institucionalizar dicho concepto teniendo en cuenta las propiedades mencionadas por los estudiantes, como se mostrará a continuación.

### **3.2.8 Transcripción institucionalización dobles elipse (TIDE).**

En este video se evidencia una socialización del grupo y del profesor para llegar todos a un solo acuerdo, que es definir la curva que se realizó por medio de los dobles y qué características tiene para que sea definida como una elipse.

**P:** ¿Cuál era la condición del otro doblez?

**E1:** Que pasara por el punto o por el óvalo.

**P:** Que pasara por el óvalo, lo que ustedes mencionan como óvalo la distancia en este caso de  $B1F+B1F1$ , ¿a qué era igual?

**E2:** En el caso que estamos trabajando es igual a 8.5.

**P:** Ustedes ya observaron que con dos dobles pasa eso, al realizar un tercer doblez ¿Pasaría lo mismo, o es necesario hacer otro?

**E2:** No es necesario, por que la suma sería igual a 8.5

Hablan de la invariancia

**P:** Ya identificamos que la suma para cualquier doblez es la misma 8.5, Si nos pidieran definir a lo que ustedes han llamado óvalo, ¿Cómo creen ustedes que se podría definir? Claro teniendo en cuenta las características que acabamos de encontrar sobre la curva que se construyó por medio de los dobleces.

**P:** Vamos a empezar desde el principio, ¿esos puntos que tienen, que son respecto a la curva?, son focos, ¿Cuáles son las características de esos puntos?

**E1:** Que están dentro y son fijos.

**P:** Con relación a los puntos que forman la curva, o lo que ustedes han llamado ovalo ¿Qué debe pasar?, que se hizo inicialmente para tener la distancia de 8.5. Vamos a tomar un punto cualquiera de  $FB+BF1$  ¿Debe ser igual a qué?

**E1:** 8.5

**P:** En este caso, pero a los que les dio diferente, entonces que se puede decir, que es igual a una constante. Esa constante la vamos a llamar  $k$ . Entonces se deduce que la suma de cualquier punto con los focos va a ser igual a una constante.

**P:** Todas esas características que hemos descrito, dan el nombre a la curva como elipse, es decir eso que construyeron se llama elipse

**P:** ¿Cuáles son las características de los puntos que la forman?, pues que la suma de un foco a cualquiera de los puntos que la forman la elipse va a ser igual a una constante. Partiendo de todas las ideas que se dieron traten de definirla con sus propias palabras la elipse.

**3.2.8.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TIDE)** En este video se muestra en como el docente pone a consideración cada uno de los aspectos planteados por los estudiantes, para ello plantea preguntas respecto al proceso realizado para la construcción del concepto elipse como lugar geométrico, teniendo en cuenta las acciones realizadas por los estudiantes

(doblar, colear y comparar) para ello en primer lugar pasa a caracterizan los dos punto Focos como puntos fijos cuando El afirma que “ *Que están dentro y son fijos* ” teniendo en cuenta las la distancias hallada por ellos el profesor procede a consultar si en necesario hallar más distancias para generar el lugar a lo que ellos respondieron que “*no es necesario, por que la suma sería igual a 8.5*” en este sentido se puede analizar la invariancia del concepto elipse donde siempre la suma de la distancias de dos puntos fijos llamados focos va hacer a una constante, definición con la cual interactuaron los estudiantes.

### 3.3 Trascrición actividad dobleces, parábola (TADP)

la actividad empieza con las indicaciones realizadas por los docentes para empezar a generar los lugares, en esta se evidencian dos tipos de estrategias, la primera el estudiante realiza el dobles de la manera solicitada y desdobra la hoja para realizar el siguiente dobles, ver ilustración 30, y en la segunda el estudiante realiza el dobles haciendo uso de la regla esto con el fin de realizar trazos más precisos, ver ilustración 31.



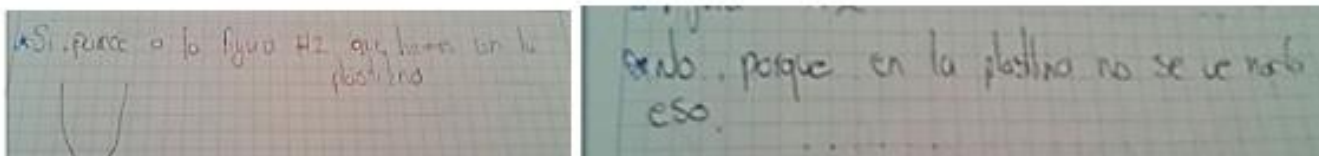
*Ilustración 31, primer estrategia de los estudiantes*



*Ilustración 32, segunda estrategia de los estudiantes*

### 3.3.1 Acciones realizadas por los estudiantes (TADP)

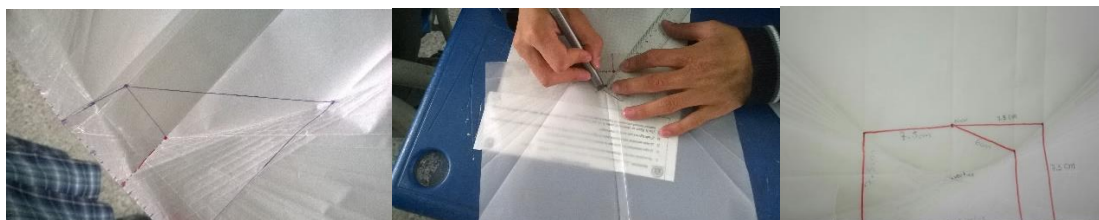
Luego de obtener la la curva con los dobleces los e estudiantes, se procedio a preguntar a que figura la relacionaban teniendo en cuenta la actividad, anterior a lo cual ellos respondian que a la figura numero 2, ver ilustración 33, del mismo modo a la pregunta “d) En la figura se observa un punto F, al cual llamamos foco, este punto se puede observar en la actividad de la clase anterior los estudiantes afirmaban que” no porque en la plastilina no se ve nada eso” ver ilustración 33



*Ilustración 33, respuestas de los estudiantes donde quien señala “que en la plastilina no se puede ver eso” es decir no se pueden ver los puntos focos”*

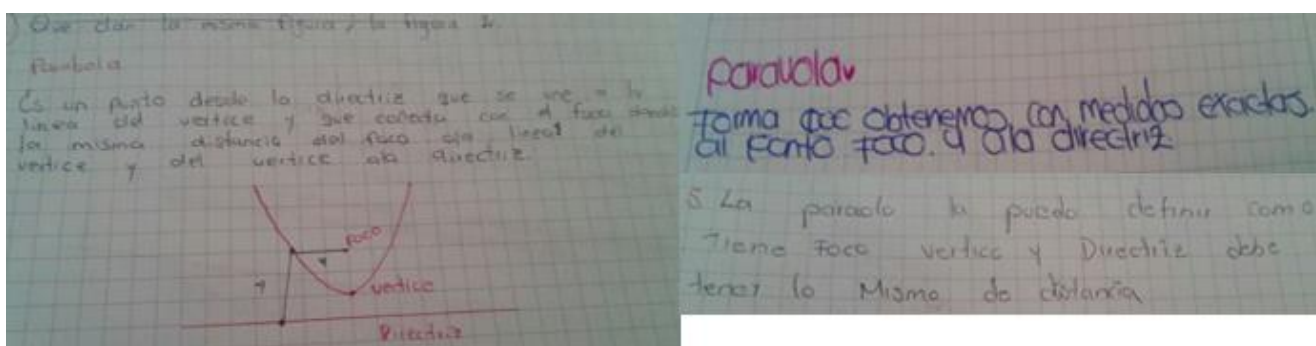
En este momento el estudiante compara estas dos tecnologías identificando que a pesar que son las misma cosa tiene representaciones y formas de generarse diferente, donde en la hoja pergamino se evidencian elementos que en la plastilina no.

Por otra parte y teniendo en cuenta esto se procedio a realizar la segunda parte de la actividad, en la cual con las indicaciones de los profesores los estudiantes iba a encontrar los puntos que generaban el lugar, luego de esto debian medir estas distancias y mirar que regularidad encontraban con cada punto hallado, ver ilustración 34.



*Ilustración 34, Relación de distancias encontradas por los estudiantes realizando la acción de doblar, medir y comparar”*

Donde se observa que los estudiantes identifican que las distancias del punto encontrado a la directriz es igual que la distancia de ese punto al foco, ver ilustración 35, es decir los estudiantes ya tienen una noción de las características de la parábola como un lugar geométrico, donde por medio de sus conocimientos se acercan a la definición de parábola por medio de las condiciones de los puntos, del mismo modo establecen una nueva representación del concepto parábola, dado que la caracterizan desde sus propiedades como lugar geométrico, cabe aclarar que en este caso los estudiantes solo realizan comparación de distancia, sin necesidad de realizar demostraciones algebraicas para deducir la forma canónica de cada una de las secciones cónicas.



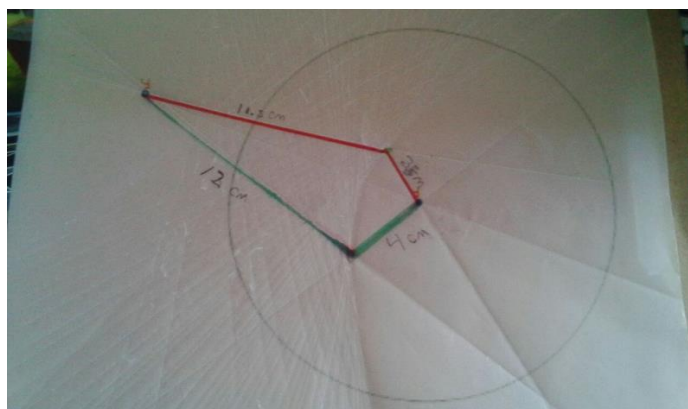
*Ilustración 35, Definiciones realizadas por los estudiantes respecto al lugar geométrico parábola quienes la definen como “es un punto de la directriz que se une a la línea del vértice y se conecta con el foco donde la misma distancia del foco a la línea del vértice a la directriz*

En este momento es fundamental señalar el papel de la relación establecida en términos de distancia para realizar su definición del lugar geométrico parábola, dado que para ello el estudiante realiza una representación del objeto que quiere definir, del mismo modo trata de definirlo con palabras teniendo en cuenta sus atributos, por lo que el estudiante abstrae el concepto matemático, lo cual permite que la adquisición de este conocimiento sea significativa.

### **3.4 Descripción actividad dobleces hipérbola.**

Realizadas por los docentes para empezar a generar los lugares, en esta se evidencian dos tipos de estrategias, las cuales son iguales a las estrategias para realizar los dobleces de la elipse, ver ilustración 26 y 27.

En este sentido los estudiantes teniendo en cuenta las indicaciones realizadas por los docentes generan el lugar geométrico hipérbola sin embargo, por cuestiones de tiempo no alcanzaron a caracterizarlo a pesar de haber realizado todo el proceso, ver ilustración 35.



*Ilustración 36, Construcción por medio de dobleces lugar geométrico hipérbola*

En la ilustración 36 se muestran los dobleces realizados por los estudiantes para generar el lugar hipérbola del mismo modo se muestran dos relaciones de distancias, relación roja y relación verde, sin embargo los estudiantes no identificaron que las el valor absoluto de la resta de la distancias iba hacer igual a una constante, en el caso específico mostrado en la imagen no identifican que doce menos cuatro es igual a ocho y que once punto cinco menos tres puntos cinco es igual a ocho.

En sentido es se puede analizar el cómo los estudiantes plantean una nueva representación, dada por los puntos del lugar geométrico hipérbola representación, donde hallan por medio de los dobleces los pedazos de recta coloreados con color rojo y verde, ver ilustración 36, pero en el momento de hallar cual era la relación entre estos dos colores no la encontraron, dado que este lugar geométrico no fue institucionalizado, razón por la cual queremos resaltar la importancia de la institucionalización, dado que este es un acuerdo entre los estudiantes y el docente en el que definen un conocimiento matemático, donde el docente con su saber



sabio y las acciones realizadas por los estudiantes hace tomar conciencia de los atributos del concepto matemático que se desea definir en este caso el concepto hipérbola como lugar geométrico.

### **3.5 Análisis a priori de la actividad recurso en Geo-gebra**

El trabajo se realizó enfocado en generar en los estudiantes un aprendizaje en relación a las secciones cónicas por medio de las tecnologías aplicadas (plastilina, geometría del doblado y uso del software Geo gebra). Debido a inconvenientes de tiempo no se logró aplicar la última. Lo que nos permitió observar al momento que se estaba aplicando la prueba con las dos primeras tecnologías, que implicaba más tiempo, debido a esto la prueba que pensábamos aplicar con Geo-gebra no fue posible. Esto conllevó a no lograr hacer un análisis de esta última, sin embargo, sirvió como retroalimentación para nuestra labor docente y para las conclusiones del trabajo.

Posteriormente surgieron varias preguntas como, ¿qué hubiese pasado si se hubiera aplicado la prueba con el software Geo-gebra? ¿La tercera tecnología hubiera permitido ver más cosas con los estudiantes en relación al objeto matemático a desarrollar? Y finalmente, ¿Los estudiantes hubieran comprendido más el concepto de las secciones cónicas? A lo que nos parece de gran importancia tener en cuenta estas cuestiones ya que nos permiten hacer un análisis a priori y a posteriori en relación a la sesión de clase que nos quedó faltando para aplicar.

Con base a lo expuesto anteriormente es importante señalar de ante mano que el uso de recursos tecnológicos en la clase de matemáticas permite desarrollar nuevas habilidades para generar un conocimiento matemático, ya que según (Villa-Ochoa, 2011; Ruiz, 2011; Ávila, 2012; Moreno, 2002) menciona que “se han mostrado que el uso de recursos tecnológicos en el aula de clase permiten la creación de ambientes de aprendizaje en el que los estudiantes pueden producir conocimiento matemático” (p. 447). Con el fin de desarrollar la competencia matemática como lo afirma el MEN (2006) “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por

situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.”(p. 49)

El software Geo-gebra facilita la integración de las diferentes áreas de matemáticas y con base a la propuesta, al concepto de secciones cónicas; ya que por medio de este nos hubiese permitido observar las diferentes representaciones validadas por los estudiantes al momento de tener una interacción directa con el recurso tecnológico para que se construyera el conocimiento pensado para su momento. Debido a esto era claro que el conocimiento pensado en desarrollar con este medio ya estaba fundamentado en nociones trabajadas y desarrolladas previamente con las dos primeras tecnologías en las sesiones anteriores y que se generará un aprendizaje significativo (Ausbel, s.f). Donde se hubiera evidenciado que él mismo estudiante hubiese construido su conocimiento relacionando lo aprendido en las sesiones anteriores y que le hubieran permitido desarrollar lo propuesto en la tercera.

Posteriormente para saber de qué manera el software Geo-gebra nos hubiera permitido observar más cosas en relación con los objetivos propuestos en el trabajo es pertinente tener en cuenta las nociones que los estudiantes han adquirido en las sesiones anteriores, porque son estos conocimientos los que les hubiese permitido hacer una relación entre lo visto y lo aplicado en la tercera prueba con el recurso tecnológico, a este proceso según Ausbel (s.f) lo nombra como aprendizaje significativo donde (Sabori, L. 2009, citando Ausbel (s.f))“Aquel que es útil al alumno para resolver problemas. Es la integración y la organización de información en la estructura cognitiva del alumno”, ya que hace una relación de los conocimientos adquiridos y posteriormente establece que “La adquisición de un cuerpo de conocimiento claro, establecido y organizado de parte del educando es la variable independiente más significativa que influye sobre su capacidad para adquirir nuevos conocimientos en el mismo campo” (Sabori, L. 2009, citando Ausbel (s.f)).

Por otra parte, es claro que las inclusiones de recursos tecnológicos permiten un mayor desarrollo del objeto matemático y que se pueda aprender matemáticas donde Godino (2004) menciona que “Hay que tener en cuenta, no obstante, que la tecnología no se debería usar como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera que estimule y favorezca tales intuiciones y comprensiones más sólidas” (p.142). Ya que el software Geo-gebra hubiera potenciado los conocimientos desarrollados con los

estudiantes en las sesiones anteriores y con los otros recursos empleados, además, se hubiese enriquecido los conocimientos adquiridos y de la misma manera hubiesen generado un aprendizaje significativo sobre las secciones cónicas más claro.

Es pertinente aclarar que una dificultad en relación al recurso de Geo-gebra es que los estudiantes no estaban familiarizados con el medio por lo que nos implicaba más tiempo mientras se brinda una enseñanza en relación al recurso tecnológico para luego aplicar la prueba planteada.

La intención que teníamos de implementar una sesión con el recurso tecnológico Geo-gebra era debido a que los estudiantes desarrollaran un razonamiento lógico matemático en torno a las secciones cónicas donde Godino (2004) menciona que “Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas” (p.143). debido a esto lo que nos hubiera permitido observar con este recurso es de que manera los estudiantes se apropien de sus conocimientos adquiridos y los ponían en juego para la solución de los problemas planteados en la segunda sesión, dando respuestas a cuestiones que ellos mismos dentro de su proceso intuitivo y directo si acompañamiento del docente hacían válida la información brindada por el software Geo-gebra para que generaran así mismo un razonamiento matemático por la reflexiones y validaciones en su proceso de construcción del conocimiento relacionado a las secciones cónicas.

## **CONCLUSIONES GENERALES**

Como resultado de la aplicación de la propuesta de enseñanza de las secciones cónicas por medio de las tecnologías utilizadas, nos parece pertinente dar muestra de los diferentes procesos que se llevarán a cabo para el cumplimiento de los objetivos estipulados en la presente propuesta.

En el desarrollo del presente trabajo ha dado lugar al cumplimiento de los objetivos propuestos en cuanto a:

Por medio de la secuencia de actividades, se pudo observar las diferentes estrategias que empleaban los estudiantes al momento de realizar la actividad propuesta.

Se evidencia en los resultados obtenidos, el interés por los estudiantes al momento del desarrollo de estas actividades planteadas ya que era algo nuevo para ellos, lo que nos ayudó a observar la interacción directa de los estudiantes con las tecnologías, donde el estudiante tomaba conciencia de acciones realizadas, lo cual lo permitía construir su conocimiento.

Las evidencias nos permitieron observar la importancia que tiene que los estudiantes manipularan las tecnologías aplicadas en la secuencia de actividades, ya que se identificó que al interactuar con estas los estudiantes evidenciaban un conocimiento que se iba adquiriendo y potenciando al mismo tiempo que se avanzaba con las diferentes actividades planteadas.

Al momento de estudiar cada tecnología, observamos que fue pertinente el uso de estas para cumplir con los objetivos de la propuesta, debido a que las evidencias muestran el acercamiento de los estudiantes en torno al objeto de estudio planteado en el presente trabajo.

La propuesta se desarrolló exitosamente al momento de llevarla al aula, sin embargo se presentó uno que otro inconveniente en relación al tiempo, ya que no fue posible aplicar la última actividad planeada y además el material con el que se desarrolló la actividad donde se aplicó la geometría del doblado, aunque consideramos que el problema no es el papel pergamino que fue el utilizado, si no, como tal las indicaciones de uso al momento de esta actividad, donde es una observación a tener en cuenta al momento de una nueva implementación de esta propuesta y llevarla al aula.

Del mismo modo este trabajo nos permitió evidenciar la importancia del uso de diferentes tecnologías para la enseñanza de un concepto, por lo que cada actividad contaba con su herramienta y cada herramienta cumplía con unas funciones, lo que permitía ir potenciando el conocimiento una tras otra y al final observar que la interacción con cada una permitió asociar el mismo conocimiento de sección cónica visto desde diferentes representaciones y lo más importante desde tres diferentes tecnologías que estaban en función de un objetivo, que era generar un conocimiento por medio de la interacción de los estudiantes con estos medios para tener una noción del concepto matemático.

Posteriormente en el desarrollo de la secuencia de actividades anteriormente planteadas se puede mostrar el como él hacer uso de diferentes tecnologías permite que los estudiantes se acerquen a la definición de las secciones cónicas, como cortes de un cono y lugares geométricos donde la interacción con el medio, las acciones y las retroacciones, permiten que el estudiante establezca la validez de las acciones realizadas. En este sentido fueron fundamentales los medios suministrados, Cono, hilo, software y hoja Pergamino, dado que permitía establecer relaciones entre los atributos que constituían el saber matemático, en otras palabras realizaba una abstracción respecto a las acciones realizadas, lo que lo acerca a la definición de las secciones cónicas como lugares geométricos.

**Plastilina:** La plastilina fue la primera tecnología implementada, se moldeó de tal manera que representara un cono, por medio de este los estudiantes realizaban un corte al este por medio de un hilo y tener su primer acercamiento a una sección cónica por cortes longitudinales, transversales y diagonales al cono respectivamente para obtener a través de los cortes la representación de las cónicas.

**Pergamino:** Esta herramienta fue la segunda en la secuencia de actividades propuesta, se dividió en tres, es decir se utilizaron tres hojas pergamino y cada una según la cónica tenía sus especificaciones:

**Parábola:** Con indicaciones del docente el estudiante paso a paso iba construyendo por medio de dobleces el lugar geométrico, y al final por medio de un proceso donde los estudiantes daban cuenta de propiedad de parábola, es decir que entendían que iba a existir unas distancias que se mantenían, desde un punto foco y cualquier punto de la parábola y de esta a la directriz iba a ser igual.

**Elipse:** En este caso la hoja de papel pergamino contaba con una circunferencia de radio  $n$  y un punto dentro de ella, con indicaciones del docente el estudiante iba construyendo el lugar geométrico de esta sección cónica.

**Hipérbola:** En este caso al igual que en el anterior la hoja cuenta con una circunferencia de radio  $n$  y un punto fuera de ella, con indicaciones del docente el estudiante iba construyendo el lugar geométrico de esta sección cónica.

Colores: Los colores juegan un papel importante, ya que son los que me van a permitir observar las distancias que yo estoy relacionado para cada seccion conica en cada uno de los papeles pergamino implementados para cda una de estas.

Geogebra: Este recurso nos iba permitir concluir y potenciar todo el proceso desarrollado en las dos secciones anteriores, estaba dividido en tres actividades interactivas donde los estuiantes iban a tener la oportunidad de manipularlas y entender que estaba pasando y que podian asociar con las secciones anteriormente trabajadas.

Teniendo en cuenta la descripcion de las tecnologias anteriormente mencionadas, nos permite aclarar que al momento de la interacción del estudiante con estos medios, pudimos observar un proceso de aprendizaje donde el alumno ya podía dar cuenta del corte al cono para que el resultado de este sea una sección cónica, respectivamente y de esta manera evidenciar una intuición de las cónicas por medio de cortes al cono. Esto teniedeno en cuenta la primer herramienta implementada en la primera actividad que fue la plastilina. Asi mismo, en esta primera actividad propuesta los estudiantes evidencian que su primera interacción con el medio, realizan unas acciones que lo llevan a validarlas o no, ya que en el caso de la elipse, los estudiantes muestran un corte paralelo a la base del cono, observando que el resultado no es un elipse si no una circunferencia, al igual con la hiperbola, los estudiantes muestran el corte y mencionan que partes del cono cortarón, identificando que solo corta dos de ellas y vuelven a tener una accion para evidenciar correctamente las partes del cono para generar esta conica hiperbola, y finalmente cuando van a construir la parabola relacionan el corte de la hipérbola, donde caen en cuenta que los cortes para cada una de estas es diferente y las partes del cono que se cortan tambien; todo este proceso mediado por nosotros que fuimos los orientadores de la clase y vaidabamos las acciones del estudiante para cada uno de los casos, haciendo que este proceso los estudiantes lo tomarán como una accion me lleva a validar mi desarrollo y generar una aprendizaje por medio de la interacción con el medio directamente.

En esta primera actividad propuesta se puede observar la importancia que toma el papel del docente, quien es el que valida cada una de las acciones y retroacciones planteadas por los estudiantes, además la importancia del medio quien es el que les permite que observemos y analicemos si las acciones realizadas son las adecuadas para llegar a la figura solicitada, esto

les permite generar relaciones de objeto matemático a los estudiantes, lo cual los puede llevar a realizar una abstracción del concepto, lo cual permite que el estudiante interiorice su conocimiento, teniendo un aprendizaje más significativo.

En esta primera actividad, se trabajo con Geogebra, donde los estudiantes podían interactuar con el medio que tenia tres casillas de control las cuales al darles clic aparecia en el software dos conos y un plano que se podia deslizar y que al hacerlo me corta los conos de tal manera que me generaba cada seccion conica respectivamente, de esta mnaera los estudiantes hacian una reflexion del proceso realizado con la primera tecnologia (plastilina) e identificaban que corte era el correcto para realizarlas, todo esto permitio que los estudiantes observarón que para producir cada corte para cada curva tenia una característica y que generabán las tres secciones cónicas con un mismo corte.

En este sentido la actividad uno se propuso en base a la teoria de situaciones didacticas, Recurso plastilina y Geo-gebra, medios que le permitían al estudiante observar y percibir cada una de las propiedades de los cortes que formaban las secciones, que cumplieran con una relacion donde en uno, el hilo representaba el plano de la otra, ya que estos se complementaban para que al momento de realizar los cortes los estudiantes nos mostrarán las reflexiones de su proceso de aprendizaje y generarán de esta manaera una manera intuitiva de las secciones cónicas por medio de los cortes al cono y la interacción con el software Geogebra, permitiendo que los estudiantes establecieran relaciones entre lo concreto y lo asbtracto.

En esta segunda actividad se muestra tres hojas de papel pergamino con unas características para cada una de las secciones conicas, aplicando de esta manera la geometria del doblado para generar las tres curvas requeridas, observamos que al momento de que el estudiante tenia una primera interacción directa con el medio se le dificulta identificar la curva con los primeros dobleces, sin embargo ese proceso lo realizarón hasta que al desdoblar la hoja, mencionarán en un primer caso que la curva odtenida era un óvalo y de la misma manera lo asociaban con la figura 1 de la primera actividad que era la elipse, de esta misma manera para cada una de las cónicas restantes luego de finalizar el proceso de doblado; los estudiantes con las indicaciones brindadas por el docente, hacian uso de la regla y realizaban una accion de

medir las distancias entre las partes para cada sección cónica evidenciando las características para cada una de ellas y que propiedades cumplieran como lugar geométrico.

Luego, por medio de una socialización general del proceso realizado e identificando que el contrato didáctico se estableció ya que los estudiantes estaban de acuerdo con las características obtenidas, se les daba el nombre de cada curva por medio de los dobleces que se realizarán.

Del mismo modo es importante recalcar la importancia de hacer uso del medio suministrado, ya que era un complemento que permitía potenciar su conocimiento, pues este genera que el estudiante tenga una abstracción de conceptos que alguna vez había visto, como recta, punto, mediatriz y planos si tener a necesidad de profundizar en cada uno de estos.

En forma de conclusión del proceso implementado para cada actividad propuesta y las que se aplicaron podemos observar que la primera actividad nos permitía identificar en los estudiantes un acercamiento a las cónicas de manera visual y de reconocimiento de las mismas por medio de los cortes, es decir que asociaran la forma de la curva además de que corte se debe realizar para generarlas; y posteriormente la segunda permitía observar la abstracción generada de las relaciones, de las acciones y de las retroacciones, donde en la primera actividad se muestra como el estudiante debe adaptarse al medio, es decir el estudiante realiza los cortes y debe hacer conciencia de cómo cortar para generar cada una de las figuras oblicuas, cuando él observa que el corte realizado es igual a la figura solicitada, describe cómo obtuvo dicha figura, del mismo modo identifica que cada sección tiene un corte diferente.

Posteriormente para nosotros es importante resaltar que cada actividad nos permitió evidenciar las propiedades para una de las secciones cónicas, es decir sus características, las cuales se podían identificar en la segunda actividad propuesta, ya que la inicial solo fue un acercamiento visual y de reconocimiento de la curva como tal para cada sección cónica:

Parábola: Tiene la característica de que existe una distancia que se va a mantener constante, la cual es, que la distancia del punto foco a cualquier punto del lugar geométrico parábola, es igual que desde ese punto hasta la directriz.



Elipse: Tomando un punto del lugar geométrico hasta uno de los focos mas la suma desde ese mismo punto hasta el otro foco va hacer igual a una constante, es decir  $\overline{F_1a} + \overline{Fa} = C$ .

Hipérbola: Tomando un punto de cualquiera de las dos ramas de la hipérbola siempre y cuando pertenesca al lugar geometrico, se toma la distancia desde este punto hasta ambos focs y se resta la distancia menor de estas a la mayor da como resultado una constante.

Dentro del proceso metodológico, nos preguntamos si es posible saltar las actividades y realizarlas en otro orden, a lo que observamos en las dos actividades aplicadas que si es posible y no habría ningún inconveniente, ya que los estudiantes van a tener en cuenta las propiedades que se deben tener en cuenta para formar o generar un lugar geométrico de las secciones trabajadas, en primera parte y como segunda van hacer una relación entre sus propiedades y su representación ya sea de manera concreta y abstracta, lo que si cambiaría sería como tal las preguntas, ya que se debe buscar la manera que al responderlas los estudiantes hagan una abstracción del conocimiento construida por medio de una hacia la otra y de esta manera que se potencien entre cada actividad para buscar cumplir con el objetivo de la propuesta.

La metodología implementada para las actividades propuestas es la teoría de situaciones didácticas y se pueden evidenciar en cada proceso que se realizó con los estudiantes para el desarrollo de cada actividad propuesta, es decir en la primera actividad se puede observar la estrategia del estudiante la posibilidad de que manipule la tecnología haciendo uso de éste medio a su manera, donde la intervención del docente se evidencia al momento de orientar al estudiante para validar si las acciones que tomo la para el desarrollo de la actividad está bien o no y de esta manera ir generando de ante mano un primer acercamiento con las secciones cónicas desde un punto de vista concreto y abstracto que permitía que el estudiante asociara este proceso con la noción de sección cónica (parábola, elipse e hipérbola). En el mismo sentido con la segunda actividad, se le brindan unas indicaciones a los estudiantes los cuales contaban con el medio que estaba modificado para lograr construir mediante el proceso de los dobleces cada cónica, por lo que al finalizar se estableció un contrato didáctico donde todos los estudiantes de manera unánime estuvieron de acuerdo y llegaron a construir las curvas e identificar las características haciendo una relación también con la primera actividad, y se institucionalizó de manera tal que los estudiantes identificarán las propiedades

para cada cónica, su nombre y los atributos de los cortes a un cono para obtener una curva semejante al lugar geométrico de la segunda actividad. De esta manera se puede dar cuenta del uso de la teoría aplicada.

Posteriormente hubiera sido de gran aporte la aplicación de la tercera actividad ya que se llevaba un proceso positivo y de construcción del conocimiento en torno a las secciones cónicas como cortes de un plano y lugar geométrico con los estudiantes y se pudieron cumplir con los objetivos establecidos para cada actividad que se alcanzó a realizar, ya que esta tercera era para que los estudiantes de manera abstracta observaran por medio del software las propiedades y las pudieran modificar para dar cuenta de que se mantenían a pesar del arrastre que se realizara para cada una de las curvas y esto hubiera permitido obtener una abstracción del conocimiento desde el punto de vista concreto y abstracto para cada una de las tecnologías puestas en juego para el desarrollo del aprendizaje sobre las cónicas trabajadas.

Así mismo haciendo una observación en relación a las actividades y su gestión en el aula con los estudiantes, fue exitosa, pues el comportamiento de los estudiantes y su recibimiento de la actividad fue bueno, donde el análisis se logra evidenciar que los estudiantes logran establecer ciertas características de cada una de las secciones cónicas, dado que las acciones en cada una de las actividades les permitían comparar y visualizar cada uno de los aspectos matemáticos asociados a cada sección cónica (preconceptos).

Podemos entonces concluir que la secuencia está fundamentada en la teoría de las situaciones didácticas, dado que en esta se encontraron una situación fundamental, unas situaciones adidácticas y situaciones didácticas que permitieron que los estudiantes identifiquen relaciones y las mencionarán manipulando el medio, de esta forma se podría realizar una institucionalización de dicho tema.

Este proceso que se llevó a cabo nos formó como docentes y nos permitió ser críticos también de nuestra labor docente, de esta manera nos parece de gran importancia empezar a implementar nuevas metodologías haciendo uso de las diferentes tecnologías que nos brinda nuestro entorno para el desarrollo de cualquier tema de matemáticas, ya que los estudiantes le ven más sentido de aprender matemáticas de una forma diferente y más si es con artefactos que se relacionan con su vida cotidiana y llaman su atención, haciendo de esta manera la clase

de matemáticas un ambiente de aprendizaje más ameno para los estudiantes y para el mismo docente que implementa este tipo de estrategias para la enseñanza de los objetos matemáticos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas (J. Centeno, B. Melando y J. Murillo, Tras.). tomado de: [https://www.dropbox.com/s/flb8wspqu17e91n/Brousseau\\_Fondements.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/flb8wspqu17e91n/Brousseau_Fondements.pdf?dl=0) (Otros, 2010)
- Forero, B. &. (2015). LA NOCIÓN DE CÓNICA EN APOLONIO Y DESCARTES: UN ANÁLISIS COMPARATIVO. *Revista Brasileira de História da Matemática Vol.15nº*, 33-48.
- Godino J. (2004) “Didáctica de las matemática para maestros” Granada-España Edumat-Maestros
- Hatori, Koshiro (2003). Origami Construction. Recuperado el 15 de abril de 2017, del sitio web: <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>
- Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry, Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, p. 143-158.
- Menéndez C. (2012) MEDIADORES Y MEDIADORAS DEL APRENDIZAJE. COMPETENCIAS DOCENTES EN LOS ENTORNOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE. *Revista iberoamericana de educación*, 39 – 50
- Moreno L. & Waldegg G. (2002) FUNDAMENTACIÓN COGNITIVA DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS. Centro de investigación y estudios avanzados, México , 20 - 24
- Otros, Acosta. E. ( 2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de. *Revista de integración, Escuela de matemáticas Universidad Industrial de Santander*, 173-179.
- Otros, G. &. (2010). INTEGRACIÓN DE INSTRUMENTOS TÉCNICOS Y CONCEPTUALES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA. UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS . *Redalyc*, 81-89.
- Recuperado de : [http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas\\_teorico.pdf](http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf) el día 27 de Enero a las 12:25 pm
- Recuperado de:

<http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf> el día 25 de noviembre a las 7:45 pm.

- Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2663/1/PiedraCaracterizaci%C3%B3nAsocolme2012.pdf> el día 30 de noviembre a las 6:50 pm.
- Recuperado de: <http://williams.blogspot.es/> el día 9 de enero a las 10:35 am.
- Ruiz H. & otros (s,f) “USO DE GEOGEBRA DE HERRAMIENTA DIDACTICA DENTRO DEL AULA DE MATEMÁTICAS” Recuperado el día 10 de Agosto de 2017, del sistio wb: <http://funes.uniandes.edu.co/2187/1/ruizavilavillaaochoa.pdf>
- Sabori, Lourdes, (13, marzo, 2009) teoría de la educación (blog) recuperado de <http://teoriasunikino.blogspot.com.co/>
- Teoría de la educación, Sabori, L. (2009).teoria de la educación. Recuperado de <http://teoriasunikino.blogspot.com.co/>
- Urbaje.P (2001) “LOS ORIGINES DE LA GEOMÈTRIA ANALITICA” Fundación Canaria Oratava historia de la ciencia
- Vygotsky (SF) <http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/Vygotsky%20y%20teor%C3%ADas%20sobre%20el%20aprendizaje.pdf>

## ANEXOS

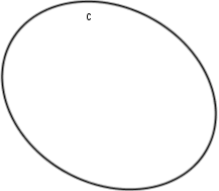
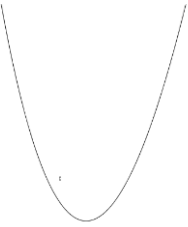
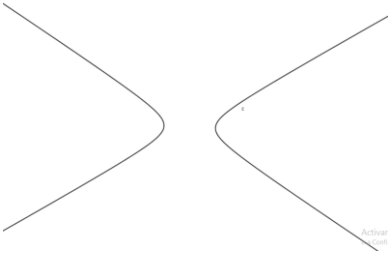
### “Anexo # 1”

#### Actividad 1

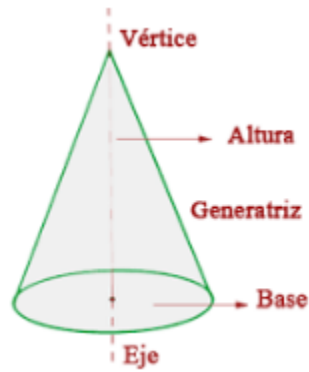
Nombres: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

En la siguiente tabla se encuentran tres filas y tres columnas; en la primera columna podrás observar tres figuras, teniendo en cuenta las partes del cono anteriormente mencionadas por el profesor completa la tabla:

1. ¿Cuál es la característica del corte para que la figura generada sea la figura 1?
2. ¿Cuál es la característica del corte para que la figura generada sea la figura 2?
3. ¿Cuál es la característica del corte para que la figura generada sea la figura 3?

<b>Figura 1</b>	<b>Figura 2</b>	<b>Figura 3</b>
		
<b>Dibujo del corte de la</b>	<b>Dibujo del corte de la</b>	<b>Dibujo del corte de la</b>
<b>Descripción del corte</b>	<b>Descripción del corte</b>	<b>Descripción corte</b>

- a) ¿Lo asocia con un objeto de la vida cotidiana? ¿cuál?
- b) ¿Reconoce la imagen de cortar el cono?



4. Con base a las partes del cono, describe las características del corte para cada una de las imágenes.
- a) Cree usted que con un solo corte se podrían construir las tres imágenes  
¿Si? o ¿No? ¿Por qué?
  - b) ¿Qué relación encuentra al manipular ambos recursos?
  - c) ¿Cuál de los recursos le permitió observar más cosas?

Anexo 2

<https://www.geogebra.org/m/dnsVrN4>

anexo 3

<https://www.geogebra.org/m/vUFuFqgh>

anexo 4

[www.geogebra.org/m/xfhe2eYf](https://www.geogebra.org/m/xfhe2eYf)

