TÉCNICAS USADAS POR TRES ESTUDIANTES PARA LA COMPRENSIÓN DE LA TEORÍA DE DIVISIBILIDAD. ESTUDIO DE CASOS.

DIANA MENDOZA

20041145039

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR: LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, 2017

TÉCNICAS USADAS POR TRES ESTUDIANTES PARA LA COMPRENSIÓN DE LA TEORÍA DE DIVISIBILIDAD. ESTUDIO DE CASOS.

DIANA MENDOZA

Trabajo de grado para optar por el título de: Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas

Director:
MS. Jhon Helver Bello Chávez

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR: LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2017

La Universidad no será responsable de las ideas expuestas por los graduandos en el Trabajo de Grado, según el artículo 117 Acuerdo 029 que el Consejo Superior de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas expidió en junio de 1988.

Nota de aceptación

Director

Evaluador

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA

Este trabajo de grado es el resultado de muchos sacrificios y luchas en diferentes adversidades por eso, aunque me tomó mucho tiempo en concretarlo debido a problemas de salud puedo decir que al fin lo logré, aquellos que confiaron en mí y siempre estuvieron para darme la energía necesaria en los momentos que parecía desfallecer:

En principal a mis padres que me vieron en todo momento aguantar mis decaídas tanto emocionales como físicas y que siempre estuvieron ahí para darme un aliento y apoyo constante, para ellos es un gran orgullo verme como profesional y realizada tanto como mujer y una persona íntegra.

A mi hermano Andrés quien con sus consejos y apoyo en todo momento me permitió levantarme y seguir para poder culminar mi carrera profesional, siempre seguiré sus consejos y lo apoyaré cuando me necesite.

A mi director Jhon Bello quien con sus saberes y experiencia me ayudó a realizar este trabajo quien tuvo una gran paciencia y tolerancia necesaria para orientarme.

Por último, a la memoria de mi tía Elvia Alfonso que me enseñó la sencillez, responsabilidad y un ejemplo a seguir como mujer valiente y guerrera, gracias a ella muchas veces pude levantarme porque me escuchó y me dio consejo. QEPD.

Contenido

Pag.

Índice de figuras

Págs.

Índice de tablas

Págs.

Indice de anexos

Pags.

Introducción

Este informe describe y analiza las técnicas para estudiar la teoría de la divisibilidad de tres integrantes del curso problemas aritméticos III (PAIII) del proyecto curricular Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC). Por consiguiente, es un estudio cualitativo-descriptivo cuyo objetivo principal es dar a conocer las técnicas de estudio usadas en matemáticas y relacionarlas con aspectos de la resolución de problemas (RP) y como apoyo al procesamiento de la información (PI) contenida en el curso.

Se realizó una exploración sobre la forma como cada estudiante utilizó los recursos - como los textos, internet y sus propios cuadernos- para comprender la teoría de la divisibilidad desde la perspectiva del tratamiento de las representaciones. Se observaron de forma semiestructurada a 3 estudiantes mediante los registros en formatos durante el trabajo autónomo y se analizaron los registros de los cuadernos como soporte. El trabajo de campo se realizó en el año 2015 en varios espacios de la universidad donde se hizo un seguimiento durante 5 sesiones por estudiante. El resultado de esta exploración consistió en relacionar el PI con la metodología RP propuesta en la educación matemática para la enseñanza-aprendizaje de la matemática según se plantea en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) y además se pone en consideración la pertinencia del uso de técnicas de estudio (TE) en el aprendizaje de la matemática.

El informe está estructurado en cuatro capítulos. El capítulo 1 contiene la propuesta de investigación; el tema; los objetivos; el planteamiento del problema; los antecedentes y su justificación; el capítulo 2 reúne el marco teórico respecto a las TE, la teoría del procesamiento de la información (TPI); el capítulo 3 presenta la metodológica de trabajo donde se resume las técnicas de recolección de datos y las técnicas de análisis. Finalmente, los resultados, conclusiones y discusión de la información recolectada en el trabajo de campo se encuentran en el capítulo 4.

Proyecto de investigación

1.1. Planteamiento del Problema

Los informes del Ministerio de Educación Nacional (MEN) sobre la deserción estudiantil en las Instituciones de Educación Superior (IES) muestran que han sido altas en los últimos años. según el informe que presentó el Centro de Estudios de Economía (CEDE) de la Universidad de los Andes (2007) para el Sistema de Prevención y Análisis de la Deserción en Instituciones de Educación Superior (SPADIES) del MEN, alrededor del 46 % de los matriculados en pregrado se retiró en los primeros semestres en comparación con otros países, así mismo en el informe del SPADIES (2015) sobre las estadísticas de permanencia mostró que las tasas de deserción disminuyeron al aplicar las políticas de permanencia mediante apoyo de dos tipos: económico y académico. Estos esfuerzos conllevaron a promover continuamente los procesos de permanencia estudiantil y la reducción de los bajos desempeños académicos en las IES. El apoyo económico consistió en la creación de becas y créditos con el Instituto Colombiano de Crédito Educativo y Estudios en el Exterior (ICETEX) y el apoyo académico para que cada IES brinde el apoyo a los procesos académicos.

El apoyo académico en la UDFJC se caracteriza por brindar a los estudiantes con dificultades en los procesos académicos a participar de los programas de intervención donde aprenda el manejo del tiempo, hábitos y técnicas de estudio. Estas políticas representan el incentivo para mejorar el rendimiento académico y reducir el riesgo de deserción sobre todo cuando se incurre en pruebas académicas.

La metodología RP en los cursos del núcleo de problemas y pensamiento matemático avanzado (PMA) de la LEBEM (2015) puede convertirse en sí mismo un problema para algunos estudiantes porque se ven “obligados” a pensar y construir el conocimiento de los objetos matemáticos (OM) desde sus conocimientos previos y en su mayoría desarrollar el trabajo autónomo y colaborativo fuera del aula. La formación de profesores de matemáticas en la UDFJC se enfoca en generar prácticas de enseñanza y aprendizaje innovadoras donde se quiere enseñar a pensar matemáticamente sobre un problema y resolverlo; sin embargo, podría ser difícil controlar que los estudiantes se desprendan del todo de la bibliografía del curso. Es decir que es inevitable que en las asignaturas del núcleo de problemas los estudiantes no usen los textos de referencia para estudiar los OM y sus propiedades, esta consulta influye en la resolución pues los estudiantes usan este tipo de estrategias externas como recurso para clarificar los procedimientos como se entiende en el trabajo realizado por Narváez (2011).

Una dificultad detectada en algunos estudiantes del curso PAIII del proyecto curricular LEBEM es el tratamiento de las representaciones que se encuentran en la literatura referente porque son generalizaciones que se han construido durante la historia de la matemática. Los textos formales de la teoría de números contienen en su mayoría lenguaje alfanumérico que puede resultar muy difícil de comprender y que se vuelve tedioso para algunos estudiantes al tratar de entender su significado. Esta situación representa una problemática de tipo cognitivo lo que implica que se puede estudiar desde la didáctica con el fin de desarrollar las habilidades de escritura y generalización en el curso PAIII. De este modo es pensar sobre la posibilidad del uso de TE en el aprendizaje de las matemáticas. Teniendo en cuenta los resultados del estudio del bajo rendimiento en la UDFJC realizada por el Grupo de Investigación en Deserción y Permanencia Universitaria (GIPUD), uno de los factores de riesgo analizados fueron los hábitos y métodos de estudio y su incidencia en las pruebas académicas. Así se encontró que las variables referidas a TE específicas como la lectura previa, las ayudas sugeridas por el docente y la preparación de exámenes influyen de manera significativa en la disminución del riesgo de incidir en prueba académica.

Para resolver la problemática de los bajos rendimientos en la UDFJC que encontró el GIPUD y en articulación con el CBI se fomentan políticas de apoyo a los estudiantes para que adelanten de manera satisfactoria sus actividades académicas; una de esas políticas es la implementación de talleres de apoyo psicopedagógico ofrecidos por el CAP. Así mismo desde el proyecto LEBEM se quiere aportar a las investigaciones sobre el bajo rendimiento asociado al factor académico entonces se puede explorar las experiencias del estudio individual y responder a la siguiente pregunta:

- ¿Cómo se puede describir las técnicas de tres estudiantes del curso PAIII del proyecto LEBEM frente al estudio de la teoría de la divisibilidad en los textos propuestos y su pertinencia en los procesos de resolución?

1.2. Justificación

Este estudio exploratorio quiere presentar un aspecto teórico y práctico para caracterizar las experiencias de aprendizaje de los estudiantes del proyecto LEBEM de la UDFJC para comprender la teoría de divisibilidad. Así mismo desde la experiencia personal del estudio de la teoría en el curso PAIII, es conveniente conocer a profundidad las formas como se está estudiando y reflexionar sobre las causas de las dificultades al estudiar y entender los OM construidos en este curso.

De acuerdo a las problemáticas detectadas en el estudio de los OM y en especial para la comprensión y el desarrollo de la habilidad para transformar las representaciones como se propone en D'Amore (2006) y las tensiones reflejadas por algunos estudiantes respecto a la complejidad de las temáticas trabajadas en el curso PAIII, es pertinente profundizar y reflexionar sobre los espacios de estudio personal – es decir fuera del aula- y como se puede brindar apoyo a los estudiantes para profesor (EPP) que presentan dificultades al generar nuevas estrategias de aprendizaje en torno a las representaciones que usa la matemática. Por tanto, esta exploración pretende realizar aportes a la didáctica de la matemática y el CBI de la UDFJC para complementar investigaciones futuras.

1.3. Objetivos

1.3.1 **General.**

Caracterizar las técnicas de tres estudiantes del proyecto LEBEM de la UDFJC para estudiar la teoría de divisibilidad y su relación con la metodología RP.

1.3.2 Específicos

- Identificar las principales acciones de los estudiantes para realizar los tratamientos y conversiones de las representaciones usadas en el curso PAIII.
- Relacionar los aspectos de la metodología RP con la TPI como base para explicar las técnicas de cada estudiante.
- Describir las técnicas usadas por tres estudiantes para hacer el tratamiento de las representaciones de la teoría de la divisibilidad.
- Realizar una reflexión didáctica sobre los resultados de las experiencias observadas y los registros de los cuadernos.

1.4. Antecedentes

En la revisión bibliográfica de los trabajos realizados sobre el problema de la falta de TE a nivel global e institucional se encontraron de dos tipos: cualitativos y cuantitativos. A nivel de Suramérica se encontraron las investigaciones de Garavito (2008) y Benavides (2011) que consistieron en un análisis de tipo cuantitativo y correlacional entre hábitos, técnicas de estudio y desempeño académico en educación básica. El trabajo realizado por Garavito (2006) consistió en una investigación de tipo cuantitativo en la cual se estableció la correlación entre las variables: hábitos de estudio y rendimiento académico de los estudiantes de cuarto de primaria de una institución educativa en el Perú. Los hábitos de estudio se especificaron en las técnicas de lectura, subrayado, organización del espacio y el tiempo; las cuales fueron medidas o evaluadas por medio de cuestionarios aplicados a los estudiantes y a los padres de familia. Su metodología consistió en un análisis estadístico de los resultados de las encuestas y realizar una correlación entre las variables: hábitos de estudio y rendimiento académico. Este trabajo concluyó que los estudiantes poseían escasos hábitos de estudio tanto en el aula como fuera de ella y esta conducta repercutía directamente en su rendimiento académico, las recomendaciones que él propuso fue la urgencia de implementar en el currículo la formación de hábitos de estudio desde temprana edad con la orientación de padres y docentes.

En relación con las TE y el rendimiento académico en el área de matemáticas se puede destacar el trabajo realizado por Benavides (2011) en una institución de educación básica en la ciudad de Quito -Ecuador, la investigación que llevó a cabo fue de tipo cuantitativa, en la cual se realizó una descripción de los hábitos de estudio en alumnos de noveno año de educación básica y la influencia que estos tuvieron en el rendimiento académico en el área de matemáticas. El trabajo de investigación realizado por Benavides estuvo basado en estudios de carácter cuantitativo-cualitativo correlaciónales entre técnicas de estudio y rendimiento académico. Su metodología consistió en aplicar cuestionarios e inventarios de hábitos de estudio y un análisis de tipo descriptivo-explicativo utilizando métodos estadísticos como la correlación entre estas variables: hábitos de estudio y rendimiento académico, cuyo resultado se apoyó en la sistematización de las respuestas de los cuestionarios y su categorización, así como del seguimiento de los desempeños académicos a partir de los documentos oficiales. Concluye, al igual que otros trabajos, la influencia significativa entre la presencia de hábitos de estudio y un buen rendimiento académico en el área de matemáticas.

La investigación realizada por Narváez (2011) consistió en el rastreo del uso de estrategias internas y externas de los estudiantes del curso PAIII del periodo 2008-1 para resolver varios grupos de problemas. Este estudio fue de tipo cualitativo, descriptivo, exploratorio e interpretativo; se encargó de describir las estrategias a las que acudieron los estudiantes para enfrentar los problemas e interpretar el desarrollo de los procesos de matematización (Freudenthal 2001). Se hizo análisis de datos recolectados con los registros de los procesos de resolución de los estudiantes, las grabaciones de audio del trabajo grupal en el aula y las entrevistas aplicadas. Ella encontró que el 80% de los estudiantes usaron estrategias heurísticas, el 54% de los estudiantes usaron la reflexión sobre sus propios procesos de resolución y entre el 75% y 90% uso estrategias externas como dominio del conocimiento o recursos como las asesorías, trabajo con compañeros y consulta de bibliografía. Este trabajo es significativo en cuanto provee una estadística sobre las estrategias usadas por los estudiantes del curso PAIII para resolver un problema y profundizar en los OM construidos en colaboración de los compañeros y la mediación de la profesora, por tanto, fue el punto de partida para profundizar un poco en el estudio de las estrategias externas como el uso de bibliografía por parte de los estudiantes para hacer su conceptualización.

Marco Teórico

Para abordar la pregunta de investigación esta propuesta se enfocó en los conceptos cognitivos que apoyaron el conocimiento y la comprensión de las formas como una persona realiza el PI conocida como la TPI de R. Gagné (Bruning, 2001), las TE que propone Salas (2000) y la RP en matemáticas que indica R. Charnay citado en (Parra & Sais, 1994).

2.1. La TPI de Robert Gagné.

Esta teoría surge hacia los años 60 y es de corte científico-cognitiva con influencia de la informática, es prácticamente una síntesis de la TPI aplicada a los seres humanos y tiene el concepto de que el hombre es un procesador de información cuya actividad es recibir información, elaborarla y actuar de acuerdo con ella. Es decir, todo ser humano es procesador activo de la experiencia mediante el complejo sistema en el que la información es recibida, transformada, acumulada, recuperada y utilizada (Bruning, 2001, pág. 67).

El PI hace referencia a los procesos lógicos de la sistematización en informática y el funcionamiento de los computadores; sin embargo, muchos teóricos han hecho la analogía con el funcionamiento del cerebro humano durante el aprendizaje. Dentro de estas teorías están las de las ciencias de la educación ya que allí se presentan procesos mentales como el lenguaje y el pensamiento alrededor de los objetos de aprendizaje, y por tal motivo esta teoría explica el PI en el cerebro humano (Castejon, Gilar, & Miñano , 2010, pág. 42).

Teniendo en cuenta lo que se explica en la TPI desde el punto de vista de la pedagogía, esta pasa por diferentes etapas desde que entra por los sentidos hasta que se estructura como conocimiento. En resumidas cuentas, toda esta teoría se basa en algunos supuestos teóricos y uno de ellos es que en este procesamiento participan todas las actividades cognoscitivas: percibir, repasar, pensar, resolver problemas, recordar, olvidar e imaginar (Pozo, 2006, pág. 49).

El estímulo en el aprendizaje de la matemática puede representar varias cosas, las representaciones simbólicas, gráficas, tablas, figuras geométricas, enunciados de problemas y toda la información de contenido matemático que se pueda recibir de cualquier fuente. La respuesta es el resultado de la codificación de la información recibida en el estímulo.

A través de los receptores (órganos sensoriales) la información pasa al registro sensorial donde las percepciones de los objetos y eventos son decodificadas. Luego la información pasa a la memoria de corto alcance donde es nuevamente codificada, esta vez en forma conceptual.

Si hay un estímulo adecuado, la información se repetirá internamente un cierto número de veces, lo que ayudará a que pase a la memoria de largo alcance, aquí es posible que la información esté relacionada con otra ya existente, en tal caso puede ser inmediatamente codificada, una vez que la información ha sido registrada puede ser retirada o recuperada a través de un estímulo externo y pasará al generador de respuestas, el cual tiene la función de transformar la información en acción, luego la información pasa a través de los efectores hacia el ambiente.

Estos elementos constituyen los organismos internos de aprendizaje los mismos que se transforman en fases o etapas del acto de aprender: motivación, aprehensión, adquisición, retención, recuperación, generalización, desempeño y retroalimentación.

2.1.1 **Fases de la TPI**

Retomando el modelo de TPI propuesto por Gagné (1987) la forma como se "estudia" se puede llevar a cabo en cuatro fases definidas que se designarán como: recepción, codificación, recuperación y comunicación.

2.1.1.1 ***Recepción (Estímulos)***

Cómo se entiende en Pozo (2006) en esta fase el ser humano recibe los estímulos externos, por ejemplo, información escrita, auditiva o gráfica y que constituyen la base para el uso de representaciones externas. Esta etapa se caracteriza por el primer acercamiento de los seres humanos a la nueva información y en la cual se desarrollan estrategias para la activación de la mente receptiva. La percepción es importante en esta fase ya que se emprende el camino hacia las representaciones internas (mentales) como la primera respuesta a los estímulos que después vienen a convertirse en las representaciones externas como resultado de la codificación.

2.1.1.2 *Codificación*

Una vez superados los procesos de sensibilización y de atención por parte del aprendiz, entonces llega una etapa crucial que marca el salto hacia el verdadero aprendizaje. En este momento surge la necesidad de incorporar la nueva información al esquema cognitivo actual, es decir empezar el camino de la comprensión de la información y como hacerla más accesible. En este ciclo se reconocen dos procesos cognitivos muy importantes como la comprensión y la retención, en esta fase se ponen en juego técnicas como la elaboración de esquemas, diagramas, notas y el uso de recursos para sintetizar y analizar la información.

2.1.1.3 *Recuperación*

Esta fase representa la recta final del procesamiento de la información, es allí donde el sujeto “recupera” los conocimientos que son producto de la codificación de la información. Aquí también se evidencia el nivel de apropiación y abstracción que se hace de los objetos de estudio. Por ejemplo, cuando se usan los algoritmos en matemáticas que ya se habían olvidado pero una vez practicados se recuerda el orden del procedimiento. En pocas palabras se pone en juego la memoria a largo plazo (MLP). La repetición hace posible desarrollar y almacenar información en la memoria MLP.

2.1.1.4 *Comunicación*

Esta fase es el resultado de todo el proceso y se caracteriza por usar representaciones externas que permitan comunicar a otros lo que se entendió de la información recibida. Por ejemplo, cuando en las lecciones de matemáticas el profesor expone sus saberes a los estudiantes y viceversa. En la RP de matemáticas constituye la institucionalización de los saberes construidos en el proceso mediado por las orientaciones del profesor y los compañeros de clase dando cuenta de los OM y sus representaciones.

2.2. Las TE y su implicación en la TPI

Respecto al objeto de esta investigación se utilizó el término TE al tratamiento de las representaciones de los OM en estudio que cada sujeto realiza para codificar y entender la información. La relación radica en que cada persona tiene habilidades diferentes para procesar la información. Eso implica el uso de diferentes estrategias para abordar un tema y que se explica mejor desde la psicología cognitiva como los estilos de aprendizaje donde se reconocen tres: el visual, auditivo y kinestésico (Pozo, 2006).

A continuación, según indica Salas (2000) en el libro de *Técnicas para secundaria y universidad* se definen algunas TE generales que se ejecutan durante el estudio.

2.2.1 **Técnicas durante el estudio.**

En la recepción cuando el ser humano hace la búsqueda de fuentes de información como las visuales (videos tutoriales) o auditivas, no hay interpretación ni significado solamente una revisión bibliográfica y la identificación de una idea general. En la codificación el sujeto analiza uno a uno los componentes de la información recibida e interpreta su significado, por ejemplo, en un video tutorial puede detenerse en las escenas, tomar apuntes, retomar el video y analizar elementos como diálogos, discursos, acciones, etc. La recuperación es la activación de la MLP, se revisa nuevamente las interpretaciones y significados que se dieron en la codificación y el sujeto (referido a las personas que reciben y analizan la información) hace uso de técnicas de memorización como el repaso y las fichas. En la comunicación entonces se presume que ya se tiene un dominio de símbolos y representaciones para comunicar las ideas, conceptos o procedimientos que se incorporaron a las redes conceptuales y que tienen significado cuando la información estudiada se usa, de lo contrario se puede olvidar y requiere recomenzar el PI.

Para el aprendizaje de la matemática se pueden usar algunas TE que plantea Salas (2000):

-Consulta de textos: cuando se resuelve un problema y se aplican algunos conceptos y procedimientos se hace útil revisar la bibliografía que aborda las temáticas que se puedan desprender del problema son complemento para encontrar la solución, aunque no sean estrictamente necesarios de consultar si se sugiere ya aprendidos.

-Toma de apuntes: es el registro de la información que se encuentra en las fuentes: en clase, libros, internet y que es necesaria para tener una idea principal sobre el contenido.

-Uso de esquemas, diagramas y mapas conceptuales: representación que permite organizar la información y ver en síntesis los elementos principales y sus relaciones.

-Plantear ejemplos: los ejemplos son los principales elementos que indican la comprensión de un tema, específicamente en la teoría de números donde se estudian las relaciones entre números como la divisibilidad.

-Realizar ejercicios: es la repetición de un procedimiento como ejercitación y apropiación de los tratamientos a las representaciones simbólicas. Por ejemplo, resolver congruencias.

-Plantear y resolver problemas tipo: buscar y resolver problemas referidos a un OM, modificar los datos del problema.

-Recursos WEB: utilizar fuentes de información que estén en la web como por ejemplo videos en página de internet de YouTube que ayuden a comprender procedimientos, libros digitales, ejercicios resueltos o software matemático cuando se requiera.

2.2.1.1 ***Mapas conceptuales, esquemas y diagramas.***

2.2.1.1.1 *Mapa conceptual.*

Un mapa conceptual es una herramienta de aprendizaje basada en la representación gráfica de un determinado tópico a través de la esquematización de los conceptos que lo componen. Estos conceptos son escritos de forma jerárquica dentro de figuras geométricas como óvalos o recuadros, que se conectan entre sí a través de líneas y palabras de enlace. El uso de los mapas conceptuales permite organizar y comprender ideas de manera significativa. El origen de esta herramienta radica en la década de 1960 con las teorías sobre psicología del aprendizaje significativo desarrolladas por David Ausubel y fue puesto en práctica en 1970 por Joseph Novak (Ontaria, 1995).

En la figura 1 se presenta un mapa conceptual de la divisibilidad y sus componentes. En el primer nivel está el concepto principal; en segundo nivel están los criterios; en tercer nivel los múltiplos y divisores; en cuarto nivel la clasificación de múltiplos y divisores; y en ultimo nivel los procedimientos.

2.2.1.1.2 *Esquema conceptual*

Un esquema es una manera de analizar, mentalizar y organizar todos los contenidos presentes en un texto. Se trata de una expresión gráfica del subrayado y el resumen de un texto luego de su lectura. Un esquema se ocupa de expresar gráficamente y jerarquizar diversas ideas sobre un contenido tal que sea entendible tras una simple observación (Salas, 2000). Ver ejemplos de mapa y esquema en las figuras 1 y 2 respectivamente.

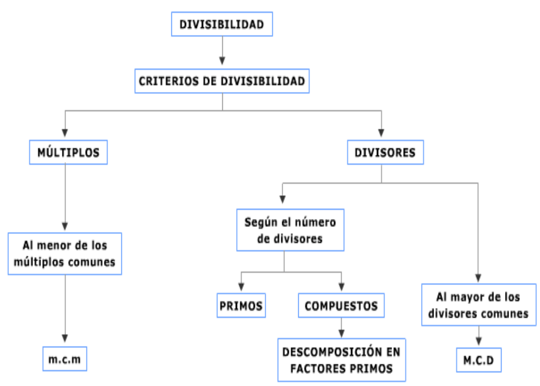


Figura 1. Mapa conceptual de divisibilidad
Fuente: Autor

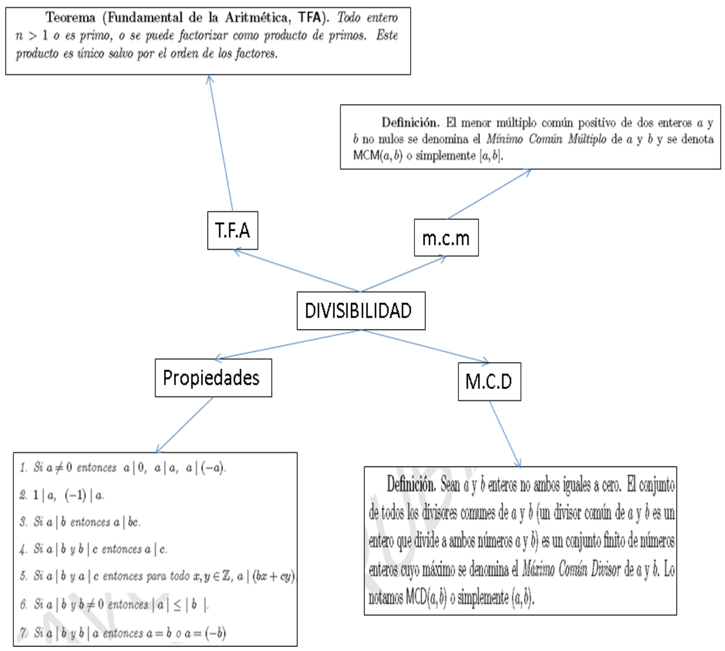


Figura 2. Esquema conceptual
Fuente: Autor

En la figura 2 se representan los conceptos derivados de la divisibilidad que se desprenden en su estudio, se relaciona los conceptos de forma circular la cual indica no necesariamente deben tener un orden específico. Solo es la representación semiótica de las ideas que se generalizan durante el estudio.

Un diagrama es un gráfico que puede ser simple o complejo, con pocos o muchos elementos, pero que sirve para simplificar la comunicación y la información sobre un proceso o un sistema determinado. Existen diversos tipos de diagrama que se aplican según la necesidad comunicacional o el objeto de estudio: existen diagramas de flujo, conceptuales, florales, sinópticos (Salas, 2000, pág. 63).

Para las descomposiciones factoriales se pueden usar dos representaciones. Por ejemplo, para descomponer en factores primos el número 1250 se usa la línea vertical que se caracteriza por escribir el número que se va a descomponer en la parte izquierda y debajo los residuos y en la derecha los divisores que deben ser números primos y el uso de árbol de factores. Ver figura 3.

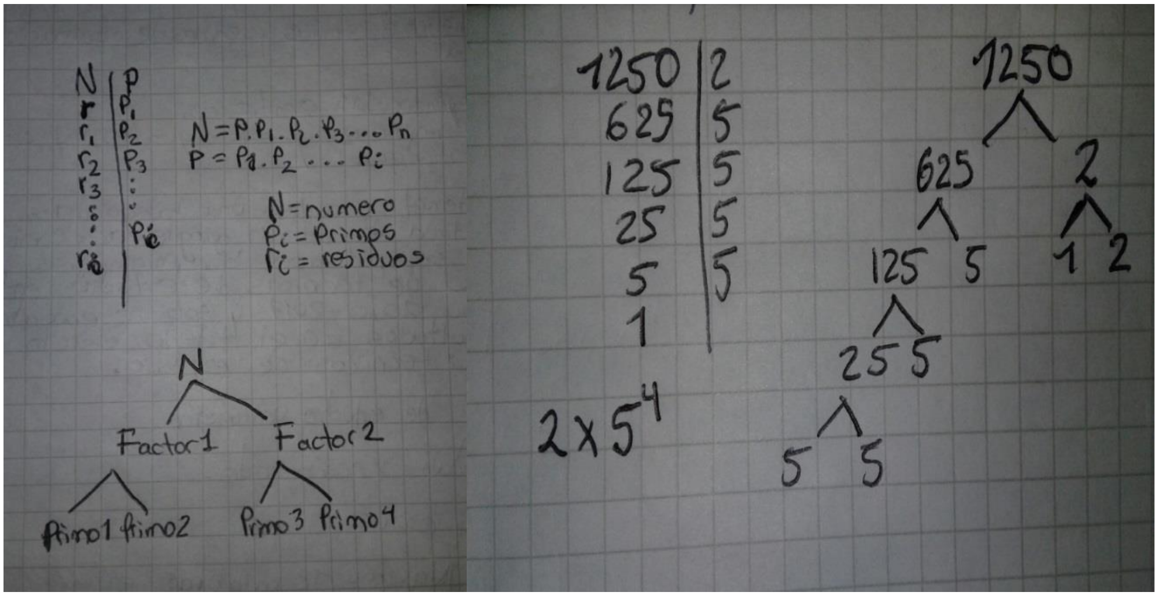


Figura 3: Algoritmos para la descomposición de números
Fuente: Autor

Posteriormente, realizada la descomposición en factores se necesita realizar multiplicaciones entre factores para hallar otros divisores, lo que resulta en un proceso de "combinación" usando un diagrama similar al de descomposición, pero en este caso sería un "árbol de multiplicación". La representación por tablas de doble entrada también serviría, aunque se limitaría a solo dos números primos. Ver figura 4.

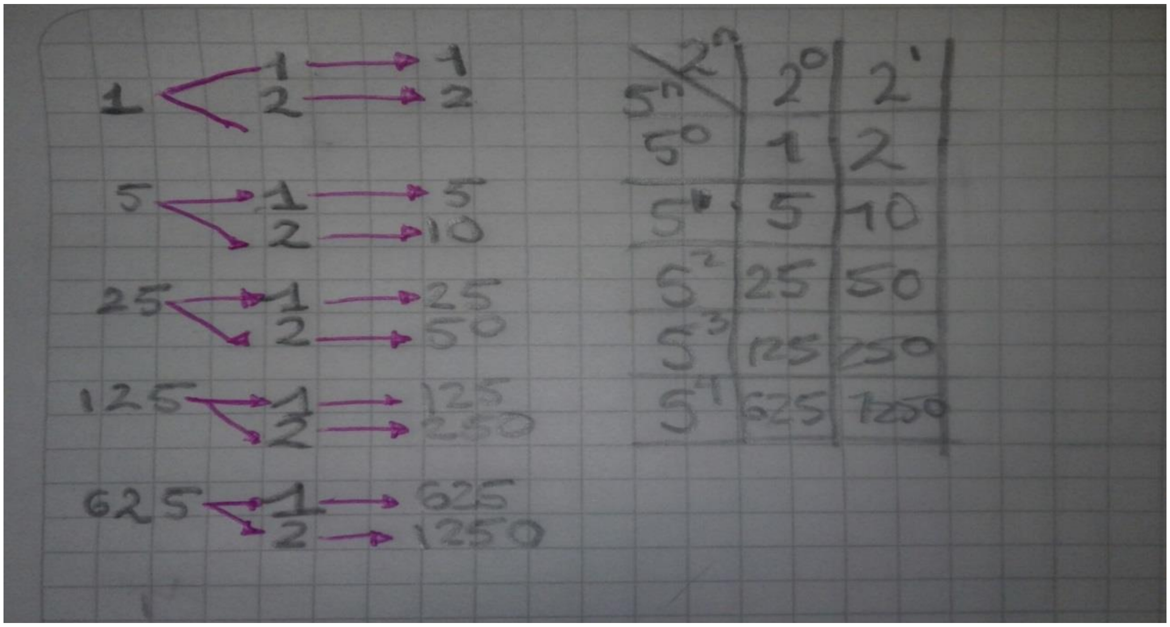


Figura 4. Representaciones para hallar divisores
Fuente: Autor

2.3. Relación de TE con el aprendizaje de las matemáticas basado en la RP

La metodología RP en la formación de profesores de matemáticas es clave que el estudiante construya su conocimiento a partir de la experiencia de resolver situaciones similares a las que se enfrentaron los matemáticos en la historia. Debido a que es una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la matemática siempre va a estar influenciada por la urgencia de cada estudiante por consultar las temáticas en otras fuentes; sin embargo, no siempre se encontraran respuestas o estrategias de resolución porque es la experiencia y el razonamiento individual sobre cada problema que se puede avanzar. Por ejemplo, en el libro ***Teoría de Números para Principiantes*** (TNP) publicado por Rubiano et al (2004) hay algunos ejemplos de problemas resueltos y los teoremas que se pueden aplicar para que el estudiante los analice y proponga otros de la misma estructura. Luego nadie construye una técnica para resolver un problema y es solo imitación de los tratamientos que hacen otros estudiantes o que el profesor "insinúa" por tanto no hay creatividad en las estrategias. Es decir, solo se hace repetición de los tratamientos de la información.

2.3.1 La resolución de problemas según Roland Charnay.

El conocimiento de los OM según R. Charnay está ligado a los problemas como un medio para llegar al conocimiento. El aprendizaje de las matemáticas debe tener un sentido para el alumno, la metodología de resolución de problemas es la respuesta ante modelos conductistas que él denomina "normativo" donde el maestro presenta o comunica un saber, provee ejemplos y el rol del alumno se limita a estar atento, imitar y ejercitar procedimientos; aquí el saber ya está construido. Por otro lado, el autor expone otros dos modelos que se diferencian del primero pero que se centra más en los roles de cada integrante de la relación alumno -maestro-saber, el modelo incitativo y el "aproximativo", este último es donde entra en juego la construcción del propio conocimiento por parte del alumno y constituye la base para la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Parra & Sais, 1994).

El problema se constituye en la base del aprendizaje de la matemática según R. Charnay. La resolución de problemas se convierte así en una fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber en dónde se destacan 4 acciones principales para resolver un problema: la acción, formulación, validación e institucionalización. En estas etapas el alumno busca un procedimiento de resolución, los pone a prueba, reconstruye y da significado. Los problemas son elegidos por el docente y constituyen la base de todo el proceso de aprendizaje.

2.3.2 **Representaciones semióticas.**

Según lo que propone R. Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. En este sentido la enseñanza y aprendizaje de la matemática refiere la necesidad de que las actividades cognitivas además del uso del lenguaje natural o de imágenes, desarrolle el uso de diferentes registros de representación y expresión.

En esta área teniendo en cuenta la teoría de Duval (2004) hay diferentes formas de escribir números: escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que van a la par con el lenguaje natural para expresar relaciones, operaciones y figuras geométricas. Cada actividad cognitiva constituye una forma semiótica diferente es decir la formación de representaciones realizadas por signos (Lee, 2010, pág. 38).

Lo primordial que plantea Duval (1999) es el dominio de las operaciones necesarias para cambiar de una representación semiótica a otra y que se relaciona con el tratamiento constituyéndose en una operación cognitiva básica que puede fortalecer la conceptualización.

Debido a que los objetos matemáticos son abstractos; es decir, que no tienen una forma propia de representación entonces se consideran imperceptibles y por tanto requieren un sistema de representaciones para poder estudiarlos. Teniendo en cuenta que las representaciones semióticas no son las representaciones mentales del sujeto sino las formas de comunicarlos, se consideran importantes para el desarrollo de la actividad matemática, así mismo propende por desarrollar la habilidad de cambiar el registro de cualquier representación semiótica lo que ayuda en la comprensión de la matemática.

Por otro lado, Duval también afirma que la adquisición conceptual de un OM se basa sobre dos características muy importantes:

-Uso de más de un registro de representación semiótica.
-Las creaciones de nuevos sistemas semióticos indican un progreso en el conocimiento.

2.3.2.1 *Representaciones semióticas y registros semióticos.*

La representación semiótica es el conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros objetos. Esto se liga inmediatamente con la actividad del pensamiento para acceder al conocimiento de un objeto que requiere la Semiosis para aprehender los objetos representados, por tanto, si no hay uso de representaciones no hay posibilidad de conocimiento (D'amore, 2006).

Las actividades mentales ligadas a la semiosis son tres: formación, tratamiento y conversión. La formación que es la presencia o identificación de una representación en un registro, el tratamiento que es la trasformación interna de una representación en un mismo registro y la conversión que es la transformación de una representación a otra representación en otro registro. En toda actividad matemática lo que importa no es la representación de un OM sino las trasformaciones que se hacen de ellas como son las de tratamientos y las de conversión, B. D'Amore (2001) presenta el siguiente ejemplo:

Para el número ½ se puede hacer varias representaciones en diferentes registros semióticos:
Registro semiótico 1: lenguaje natural
Representación A: un medio
Representación B: uno de dos
Representación C: la mitad
Registro semiótico 2: lenguaje aritmético

Representación A: ½ (fraccionaria)

Representación B: 0.50 (Decimal)

Representación C: $5*10^{-1}$ (Exponencial)

Registro semiótico 3: lenguaje algebraico

Representación A: $\{x \in Q \ / \ 2X - 1 = 0\}$

Representación B: y = f(x): x → x/2

Registro semiótico 4: lenguaje Grafico

Representaciones con figuras geométricas

Registro semiótico 5: lenguaje figural (recta numérica)

2.3.3 Representaciones en las matemáticas.

Existen dos tipos de representaciones en el aprendizaje de las matemáticas que surgen del proceso de resolución de problemas aritméticos: las internas y las externas. Estas representaciones son las "imágenes" que el sujeto elabora y transforma para comprender el enunciado, descubrir las relaciones numéricas establecidas, el contexto donde está planteado el problema y la cuestión que debe resolver. Además de esto las representaciones externas permiten trabajar con las cantidades presentes en los problemas aritméticos y ayudan a reforzar las representaciones internas. Estas dos están interrelacionadas porque favorecen el paso del lenguaje informal al formal, así como del uso de representaciones concretas hacia las representaciones simbólicas y la abstracción. En este sentido y de acuerdo con lo que plantea Duval (2004), los errores en la resolución de los problemas aritméticos que están ligados a la comprensión lectora y el conocimiento conceptual son superados con la edad y la madurez intelectual del sujeto, es por eso por lo que se supone que los estudiantes universitarios deben estar en la fase de la manipulación de representaciones simbólicas, es decir deben comprender el lenguaje simbólico como se expuso anteriormente. Finalmente, el acceso al conocimiento matemático requiere de una variedad de registros de representación semióticas.

2.4. Cómo estudiar la teoría de la divisibilidad.

En este apartado se consideró algunas técnicas para leer y comprender la teoría de números del texto base: TNP. Son solo ejemplos de las técnicas que se pueden usar y no representa una ley general.

2.4.1 Introducción a la divisibilidad en la teoría formal.

Uno de los primeros aspectos que se abordan en la teoría de números es la definición y axiomas de los números naturales y la divisibilidad como punto de partida para construir el conjunto de los números enteros Z. Como es la teoría formal entonces las representaciones usadas son símbolos que reemplazan a los números como lo presentan en los textos de educación básica, lo que implica un razonamiento por parte de la persona que lo estudia.

- Revisar bibliografía: al iniciar el estudio de la divisibilidad y partiendo del desarrollo de las lecciones se realizará una búsqueda de información referente a los objetos que se quieren estudiar, así por ejemplo para calcular el número de divisores de un numero de dos, tres o más cifras se requiere una reconceptualización que va más allá de aplicar los algoritmos aprendidos en la educación básica y que necesitan ser estudiados de manera organizada.

- Explorar otros recursos que puedan ayudar a complementar la información: ver videos tutoriales, asistir a asesorías, pagar un profesor privado, estudiar en grupo, etc.

2.4.2 Tratamiento de las representaciones en la teoría de divisibilidad.

- La “lectura analítica”: en este caso es analizar con profundidad la información que está presente en los registros del cuaderno del sujeto y la bibliografía recomendada por el profesor para la divisibilidad. Al sintetizar lo estudiado se da un cambio en los registros semióticos a los que refiere Duval (1999) y se da cuando la divisibilidad vista en la secundaria varía de un lenguaje natural a uno simbólico que se constituye una generalidad. Por ejemplo, en la lectura de las propiedades de divisibilidad el estudiante puede hacer una conversión de la representación algebraica a una representación numérica donde pueda comunicar lo que está entendiendo en el enunciado. Por ejemplo, para una proposición que está en lenguaje alfanumérico se puede transformar al lenguaje natural, por ejemplo: *si a divide a b y a divide a c entonces para cualquier par de enteros a también divide a la suma de sus productos*.

El estudiante requiere usar ejemplos con números para comprender a que se refiere esta propiedad y usarlo como estrategia de solución a un problema; por ende, está haciendo una conversión de esta representación que no necesariamente implique una generalidad en el proceder de los sujetos que la estudian.

- Realizar una nueva lectura es necesario cuando se tenga dificultad de entender la información sobre la teoría. Esto implica analizar cada componente; por ejemplo, en las generalizaciones identificar las variables y como se relacionan.
- Usar el lenguaje natural para expresar las ideas que se tienen en la mente, es decir lograr convertir o transformar representaciones dentro de un registro o pasar de una representación de un registro a otro registro (Duval, 2004).

2.4.3 Aplicación de conceptos y procedimientos de la divisibilidad.

Aquí se utilizan todos los recursos posibles para memorizar las definiciones y los algoritmos principales de la divisibilidad, así como para recordar y repasar los símbolos utilizados para las demostraciones. En este sentido es muy importante ejercitar la memoria tomando ejercicios resueltos y analizarlos para aplicar lo aprendido a otros ejercicios similares, solo basta recurrir a los apuntes realizados en las lecciones y actividades extra clase.

- Revisar apuntes: en las primeras lecciones de clase referente a la divisibilidad se realizan las anotaciones pertinentes para conocer y llevar control de lo estudiado durante el desarrollo de una temática, así mismo los apuntes pueden ser punto de partida para identificar las situaciones y actividades que se van a estudiar, como por ejemplo, las preguntas que se plantean al tratar de solucionar un problema matemático y las tareas que se derivan de esta actividad (la resolución de problemas).

- Realizar ejercicios de aplicación: practicar los algoritmos que se presenten y hacer transferencia a otros problemas matemáticos del mismo tipo.

- Usar el lenguaje formal para expresar los conceptos que se han aprendido: esta actividad sirve para poner en práctica la memoria de largo plazo y regular el propio aprendizaje.

- Usar fichas para repasar expresiones algebraicas (generalización).

2.4.4 **Comunicar lo aprendido sobre la teoría de la divisibilidad**

Como esta es la fase final de la TPI, se usan las representaciones que fueron producto de la codificación de la información y la incorporación a la red conceptual. Además, se evidencia en el dominio de las representaciones internas del objeto matemático estudiado, por ejemplo, para las congruencias se sabe que es una forma de trabajar con las clases residuales y por tanto se pueden usar varias representaciones para comunicar a los demás sobre el concepto y los tratamientos que se hacen sobre ellas (las representaciones). En las socializaciones y los exámenes se pueden evidenciar y evaluar (por el profesor) las apropiaciones que hizo el estudiante después de la RP y la revisión de bibliografía para profundizar sobre el OM de estudio.

2.5. Descripción de las acciones realizadas por los estudiantes en las fases de la TPI y RP alrededor del OM de aprendizaje

En la tabla 1 se describen las acciones de los estudiantes respecto a los OM en cada fase de la TPI y la RP. El problema en esta metodología de resolución constituye el punto de partida para que el estudiante ponga en práctica sus conocimientos previos y además sienta la necesidad de buscar solución cuando se da cuenta que no puede hallar la respuesta con la red conceptual que tiene. El planteamiento de preguntas y la identificación de la información que se tiene (valores numéricos) hacen parte de la estimulación para construir un nuevo conocimiento. La codificación es donde el estudiante aplica algoritmos y otros razonamientos sobre el problema que le permita entender y construir un "diagrama" del problema, puede hacer inferencias, dibujos, hallar regularidades, etc. En la formulación y validación el estudiante plantea generalizaciones y las valida con otros compañeros para culminar con la institucionalización y comunicación de los resultados obtenidos. La recuperación va ligada en la medida que se requiera la aplicación de los conceptos y procedimientos aprendidos ya sea en los ejercicios o los problemas tipo que se asemejen al problema inicial.

Tabla 1. Cuadro explicativo de las acciones de los estudiantes en las fases de la TPI y la RP alrededor del conocimiento matemático.

METODOLOGÍA RP	TPI
Acción: abordaje individual del problema con el uso de conceptos previos y crear un plan de trabajo. **Formulación**: el estudiante comunica sus avances sobre la resolución es decir intercambian información con otro(s) compañero(s). **Validación**: se validan las conjeturas hechas en la formulación mediante preguntas. Se deben demostrar las generalizaciones. **Institucionalización:** construcción del objeto matemático desde las experiencias de formulación y validación.	**Recepción**: lectura del enunciado del problema planteado por el docente y pensar sobre las acciones a seguir. **Codificación**: analizar y abordar el problema de forma individual usando conceptos previos y varias estrategias de solución para construir el objeto matemático requerido. Revisar la bibliografía que permita estudiar con más profundidad el objeto matemático que se identifica en el problema. **Recuperacion**: Aplicar los conceptos y procedimientos en otros problemas similares, proponer ejercicios para dominar los símbolos y expresiones algebraicas. Recordar el proceso. **Comunicación**: el estudiante presenta los resultados de la resolución y los objetos matemáticos asociados.

Metodología

3.1. Tipo de investigación

Esta exploración se caracterizó por ser cualitativa-descriptiva con estudio de casos. El papel del investigador fue de observador no participante pues no interfirió durante el estudio y no pretendió modificar conductas de los participantes. Consistió en una observación directa y estructurada del uso de técnicas durante el desarrollo de tareas o resolución de problemas de matemática. Los hechos no fueron alterados por eso los participantes nunca modificaron sus comportamientos (Garcia, 2011).

En el contexto de esta exploración se observaron las TE que usaron los participantes para el tratamiento del lenguaje y las representaciones que están en los textos sobre teoría de números recomendados en la bibliografía del curso PAIII, primero se hizo una observación directa usando una guía para anotar los recursos, las acciones y las temáticas que fueron abordadas en cada sesión. Es de carácter inductivo porque desde la observación de las particularidades de las acciones de los sujetos se pudo hacer una explicación de las técnicas de estudio aplicadas al conocimiento de los objetos matemáticos.

La observación estructurada estuvo limitada a la verificación del uso de técnicas como tipo de textos elegidos, uso de otros recursos, toma de apuntes y la fuente de información utilizada, así como a las conversiones y tratamientos de las representaciones semióticas observadas en los cuadernos. Los ambientes que escogieron los participantes fueron: la biblioteca y laboratorio de didáctica en la UDFJC. Al final se relacionó los datos recogidos de la observación y los registros de cada sesión para dar cuenta de los sucesos observados.

3.2. Población

La población como se indica en Hernández, Fernández y Baptista (2006) de una investigación está compuesta por todos los elementos, objetos, personas que participan de la situación delimitada en el problema de investigación. Participaron 3 estudiantes voluntarios, con edades de 19, 20 y 22, con disponibilidad de tiempo, no trabajaron y asistieron al curso PAIII del proyecto LEBEM de la UDFJC en el periodo2015-1.

3.3. Instrumentos de recolección de datos

Para recolectar la información necesaria y pertinente en la investigación, teniendo en cuenta los límites de espacio-tiempo, las preguntas de investigación y la autorización de los estudiantes participantes se usaron los siguientes instrumentos:

3.3.1 **Anotaciones de trabajo de campo (fichas de observación)**

Las anotaciones como se afirma en Fernández, Hernández y Baptista (2006) sirvieron para las observaciones directas y para tener fácil acceso a la información en el análisis. Las anotaciones que se realizaron en las fichas de observación (anexo 1) constituyeron anotaciones muy puntuales de las acciones y recursos de los estudiantes complementado con el análisis de las evidencias. Las descriptivas relataron los acontecimientos relacionados con las acciones visibles de los participantes (uso de textos, portátil, toma de apuntes, etc.), -es decir los recursos para estudiar- y las temáticas respecto al contenido que se buscó en cada sesión (Hernandez, Fernández, & Baptista, 2006, pág. 542).

3.3.2 **Cuaderno de apuntes de cada estudiante.**

Es el registro escrito de los productos académicos de los estudiantes ya sea dentro del aula o fuera de ella, en este caso no se ha acordado dentro del contrato didáctico un modelo para trabajar el cuaderno en la asignatura PAIII; por lo tanto, los estudiantes consignaron los aspectos que consideraron relevantes en las clases. Debido a que no se pudo observar al estudiante en todo su proceso entonces es posible que no se pueda dar cuenta de todas las TE usadas por ellos.

3.4. Trabajo de campo

Para iniciar la exploración primero se comentó a algunos estudiantes que estaban en la biblioteca de la UDFJC resolviendo un ejercicio de PAIII sobre divisibilidad. Se les presentó la metodología, sus características: tiempo-espacio y tres de ellos manifestaron su voluntad para participar. Se hizo un consenso con los tres estudiantes para encuentros personales en donde se observó mientras estudiaron sin intervención del observador con la condición de que no se revelaran sus verdaderas identidades porque no permitieron fotos y videos de sus rostros, de acuerdo con esto se les designaron como estudiante 1 (E1), estudiante 2 (E2) y estudiante 3 (E3). Después se diseñaron los instrumentos para realizar la observación directa, se inició los acuerdos para los encuentros con los estudiantes por separado, las anotaciones y fotos de los cuadernos como evidencias de las sesiones de estudio que se designaron por Sn donde n representa el numero de la sesión (S1, S2, S3, S4 y S5). Los datos se recolectaron desde el 3 de febrero hasta el 21 de marzo del año 2015.

3.5. Unidades de análisis

De acuerdo con las TE se observaron acciones del estudiante al encontrarse solo frente al problema y los recursos para hacer los tratamientos o conversiones a las representaciones de los registros. Como se hizo una observación directa de acuerdo con un formato, los escritos del observador fueron muy cortos para facilitar su clasificación, encontrando las categorías y subcategorías que se presentan en la tabla 2 como resultado de la codificación de las fichas y los cuadernos.

Para relacionar los datos recolectados se hizo una relación cualitativa con las TE identificadas en cada sesión y el análisis de la evidencia física de las producciones de cada estudiante. De esta forma se pudo caracterizar cada caso e inferir sobre las TE individuales.

Tabla 2: Categorías de análisis en la observación directa y los registros de los EPP

OBSERVABLES	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
Acciones -A	Consulta de textos- CT Recursos-R Toma de apuntes -TA	Texto impreso -TI Texto digital -TD Video tutoriales- VT Otras fuentes -OF
Registros del cuaderno -RC	Esquemas-ESQ Procesos de resolución PR Ejemplos – EJ Contraejemplos- CEJ Demostraciones-D Copia textual- CTxt Temáticas- T	Listas numéricas- LN Expresiones algebraicas-EA

Nota: Datos obtenidos de la exploración.

Para clasificar la información en acciones observadas se tuvo en cuenta anotaciones donde se usaron frases como las siguientes:

"… el estudiante revisó varias veces el texto, usó el portátil varias veces, lee y escribe al tiempo, solo lee, no tomó apuntes, lee primero luego escribe, copia textual, se agarra la cabeza, parece concentrado…"

"… uso un libro, revisó varias páginas, lee atentamente…"

"… usa otro cuaderno, transcribe de un cuaderno al otro cuaderno…"

Posteriormente estas expresiones se clasificaron en dos tipos: los recursos y las acciones. Dentro de los recursos están los textos en varios formatos, el uso de internet y los cuadernos. En las acciones se clasificaron las expresiones referidas a lo que hicieron los estudiantes con los recursos, es decir expresiones como: *toma apuntes, observa un video, consulta un texto, etc.*

Para categorizar la información presente en los registros del cuaderno se tuvo en cuenta: esquemas, procesos de resolución, ejemplos, contraejemplos, demostraciones, copia textual y por último las temáticas.

Resultados y discusión

La presentación y análisis de los resultados se realizó en tres momentos, en el primero se hizo una codificación de la información de las fichas de observación; en el segundo momento se realizó una descripción y codificación de la información contenida en los registros de cada cuaderno y finalmente la descripción de las TE usadas por cada participante.

Se consideraron tres tipos de anotaciones de la observación directa para cada estudiante y se complementaron con los registros del cuaderno. Los aspectos relevantes que se observaron en la investigación fueron: el uso de recursos, las acciones de los estudiantes frente a los recursos y las temáticas estudiadas (Hernandez, Fernández, & Baptista, 2006). Por consiguiente, las anotaciones de la observación fueron clasificadas en tres categorías: acciones (A); recursos (R) y temáticas (T) teniendo presente la idea de estrategia planteada por Arguelles & García (2010). Las acciones y recursos se relacionaron con palabras como: *consulta texto, usa portátil, lee y toma apuntes, solo lee, lee despacio y toma apuntes, etc.* Las acciones y los recursos se diferenciaron en los actos normales de una persona mientras estudia (obviamente cuando hay motivación e interés) como leer y escribir, verbalizar, hacer gestos, rascarse la cabeza, cruzar los brazos, pasar páginas en un libro, buscar en internet, usar audífonos, etc. y todas las decisiones que toma alrededor de los recursos (en pocas palabras como los aprovecha). Los registros son el fundamento de las acciones principales referidas al uso de los recursos y las temáticas vistas. Se considera como el producto final de la sesión.

4.1. Estudio de caso N° 1 (E1)

En la tabla 3 se resumen las observaciones de las cinco sesiones con respecto a tres aspectos principales: los recursos R, las acciones A y las temáticas T y que se relacionan mediante la terna recursos-acciones-temáticas (RAT) para inferir sobre la TE usada. Aquí se presenta el resultado de la codificación de las fichas de observación para establecer la relación RAT y posteriormente se contrastó con el análisis de los registros.

Tabla 3. Resultados de RAT caso N° 1(E1)

Relación Sesiones y RAT			
Sesiones	**Recursos**	**Acciones**	**Temáticas**
S1	Texto Aritmética Baldor Internet Cuaderno	Consulta Toma de apuntes Observar video tutorial	Criterios de divisibilidad Descomposición en factores primos Cálculo de divisores
S2	Texto impreso TNP (pág. 25) Cuaderno	Consulta Toma de apuntes Uso de hojas auxiliares	Propiedades de divisibilidad con demostraciones MCD y mcm
S3	Texto digital TNP Cuaderno	Consulta Toma apuntes	Demostraciones de las propiedades de divisibilidad Algoritmo de Euclides
S4	Internet Texto digital TNP Cuaderno	Consulta Toma apuntes	Combinación lineal Algoritmo de Euclides Teorema fundamental de la aritmética
S5	Texto TNP impreso Internet Cuaderno	Consulta Toma de apuntes Observar video tutorial Procesos de resolución	Aritmética modular Ecuaciones Diofanticas Congruencias Números primos

Fuente: datos de observación y registros del cuaderno.

4.1.1 Interpretación de los resultados

En este caso como se observa en la tabla 3 el estudiante usó recursos combinados en el 80% de las sesiones analizadas, como videos, textos e internet y relaciona la información en cada uno de ellos. En la primera sesión solamente se usó el libro de Aritmética de Baldor como consulta para los criterios de divisibilidad como estrategia para resolver un problema planteado en la clase. En las cuatro sesiones siguientes se usó el texto TNP referido en la bibliografía y alternando sus dos formatos. Dentro de los recursos siempre estuvo presente el cuaderno ya que, aunque en matemáticas es difícil de hablar de una lectura regular como se hace en sociales, español u otras asignaturas, debido a que los OM no se pueden percibir sin representaciones semióticas, entonces es normal que la consulta y análisis de la información presente en este tipo de textos (como en el libro TNP) se acompañe con la escritura alfanumérica y las transformaciones/conversiones que se realicen para comprender la generalización. Es decir, a diferencia con la lectura tradicional "leer matemática" requiere altos niveles de abstracción y por tanto se trabaja sobre las representaciones mentales del sujeto. En este caso los recursos bibliográficos y el cuaderno estuvieron presentes en un 90% de las sesiones porque fue la parte introductoria a la divisibilidad alrededor de un problema numérico y la construcción de las generalidades constituyeron un mayor esfuerzo del estudiante induciéndolo a la necesidad de buscar la teoría con orientación del docente.

El internet fue un recurso usado en el 40% de las sesiones estudiadas y se observaron video tutoriales para tener claridad en procedimientos como: la construcción de los divisores de un número a partir de su descomposición y los procedimientos para resolver una ecuación diofántica. Sin embargo, aunque fue un aporte para resolver el problema no se encontró una generalización respecto a la cantidad de divisores. La representación usada en el video (ver anexo 2) mostró un esquema similar al diagrama de árbol que se usa en estadística. Este esquema es una pequeña ayuda para construir la generalización ya que el estudiante puede aplicar el algoritmo y buscar regularidades. Por otro lado, la visualización del video tutorial sobre aritmética modular consistió en memorizar los pasos para resolver una ecuación diofántica planteada como congruencia (ver anexo 3). Una vez más se imitaron los tratamientos simbólicos que realizó el presentador del video.

En el aspecto de las acciones la constante observada fue la consulta de textos y toma de apuntes según las necesidades, por ejemplo; en la primera sesión cuando el estudiante se supone ya tiene claro los criterios de divisibilidad consulta un libro elemental para clarificar las reglas que se supone son difíciles de recordar como la del 11. La consulta en internet también estuvo presente en dos sesiones porque se buscó videos para minimizar el proceso de razonamiento y tener una ayuda extra. Aunque esta ayuda no representó significado en la metodología RP ya que no fueron representaciones ni razonamientos propios del estudiante.

Las temáticas estudiadas hacen referencia a la teoría de la divisibilidad como un aspecto importante en la construcción de los números enteros; por tanto, algunos contenidos trabajados en el texto TNP hacen parte de la formación de los profesores de matemáticas de la UDFJC. La relación que se pudo establecer entre las temáticas con los recursos y las acciones es que las comprensiones de las primeras dependen del uso de los dos restantes conformando así las estrategias básicas para construir los OM (en el contexto metodológico de LEBEM) además el estudiante desde un problema base y motivado por las rutas de otros compañeros, tomó la decisión de buscar la teoría que le ayudaría a solucionar el problema, por eso hizo las consultas.

Teniendo en cuenta que el 90% del libro TNP está dado en lenguaje alfanumérico lo que requiere un alto grado de abstracción si se quiere comprender, por eso es importante realizar las demostraciones para validarlas o encontrar contraejemplos. Simplemente el estudiante puede guiarse por una demostración hecha para aplicar el esquema de demostración a otra proposición. Por otro lado, se pudo haber usado el Libro VII de Euclides porque allí se usa el lenguaje natural, pero con la lógica proposicional. En las sesiones que correspondieron a las demostraciones el estudiante utilizó números como casos específicos para mostrar en qué casos se cumple y en cuáles no.

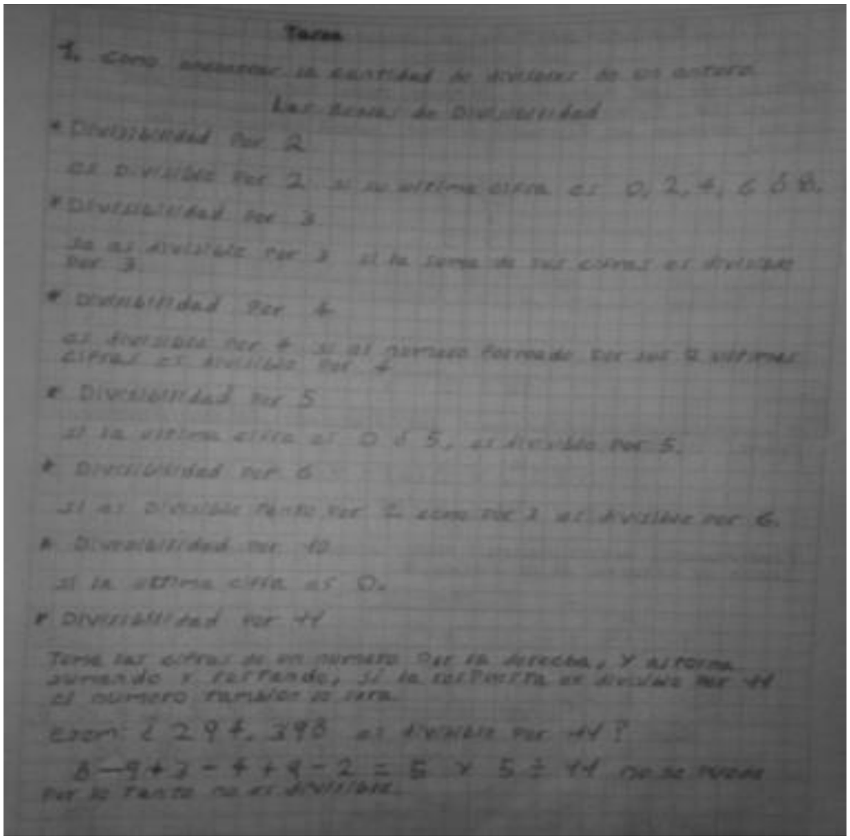
4.1.1.1 *Análisis descriptivo de las evidencias caso N°1*

En la tabla 4 se relaciona cada una de las figuras que se presentan en las evidencias con sus descripciones generales. Estas descripciones se hicieron con la codificación de la información presente en los registros del cuaderno del E1.

Tabla 4. Descripción de las evidencias cuaderno E1

N° de figura	***Análisis descriptivo***
5	***Copia de los criterios de divisibilidad, aunque no corresponde a la tarea consignada hace parte de su solución puesto que las reglas es solo la forma de evaluar los divisores de un número, pero no su cantidad, sin embargo; hace parte de la solución (en esta ocasión la generalidad al evaluar en diferentes casos).***
6	***Descomposición en factores primos del número 36 de la forma tradicional: uso de la línea vertical que separa el numero compuesto (izquierdo) y de sus primos (derecho).***

7	***Generalizaciones construidas a partir de la descomposición del número 36, usando expresiones numéricas de los números primos 3 y 2 con sus máximas potencias que son 2 y 2 respectivamente.***
8	***Esquema para hallar los divisores de 36, este es similar a un diagrama de árbol usado para el cálculo de probabilidades.***
9	***Demostración de propiedad de divisibilidad usando números para secuenciar el orden de la demostración y usando las ecuaciones pertinentes al caso.***
10	***Demostración de número par con símbolos propios para el razonamiento lógico y un contraejemplo para el caso 1.***
11	***Realización de tarea sobre demostración de propiedades.***
12	***Demostración de propiedades de divisibilidad, se usaron ecuaciones, pero no se terminó la prueba: si a divide a b entonces también divide a su cuadrado.*** ***Uso se símbolos de lógica, conectores, implicaciones.***
13	***Definición formal de MCD es una síntesis de la formalidad.***
14	***Esquema o diagrama que representa la relación de MCD, mcm y el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) con sus expresiones generales.***
15	***Uso del Algoritmo de Euclides, se reduce a hallar el MCD de dos números cuando se expresan con respecto a los residuos consecutivos y el MCD se determina con el residuo anterior al 0.***
16	***Aplicación del Algoritmo de Euclides y la combinación lineal como regresión de las expresiones numéricas como reemplazos de residuos.***
17	***Proceso de resolución de problema: números primos relativos con 120 y menores de 1000. Se realizó una lista numérica.***
18	***Copia textual de teorema de congruencia y la demostración.***



Tarea

1. Como encontrar la cantidad de divisores de un entero

Las Reglas de Divisibilidad

* Divisibilidad por 2

es divisible por 2 si su ultima cifra es 0, 2, 4, 6 ó 8.

* Divisibilidad por 3

* Divisibilidad por 4

* Divisibilidad por 5

si la ultima cifra es 0 ó 5, es divisible por 5.

* Divisibilidad por 6

si es divisible tanto por 2 como por 3 es divisible por 6.

* Divisibilidad por 10

si la ultima cifra es 0.

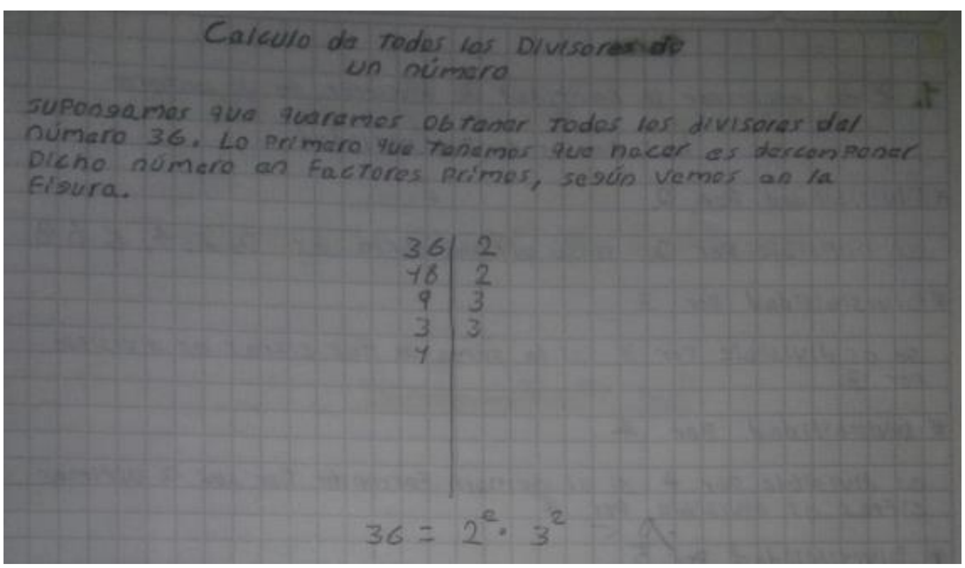
* Divisibilidad por 11

Ejem: ¿ 294.398 es divisible por 11 ?

8 − 9 + 3 − 4 + 9 − 2 = 5 y 5 ÷ 11 no se puede

por lo tanto no es divisible.

Figura 5. Criterios de divisibilidad
Fuente: Cuaderno E1



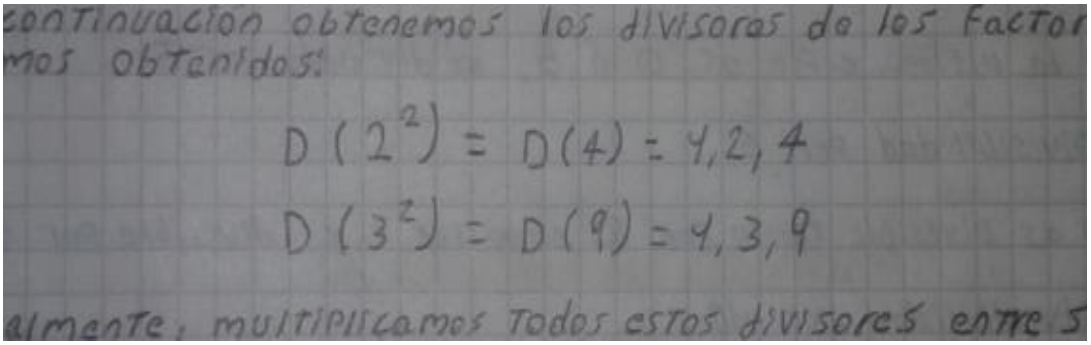
Calculo de todos los Divisores de un número

Supongamos que queremos obtener todos los divisores del número 36. Lo primero que tenemos que hacer es descomponer Dicho número en Factores primos, según vemos en la Figura.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

Figura 6. Descomposición de un número entero en factores primos
Fuente: Cuaderno E1



continuación obtenemos los divisores de los factor
mos obtenidos:

$$D(2^2) = D(4) = 1, 2, 4$$
$$D(3^2) = D(9) = 1, 3, 9$$

almente, multiplicamos todos estos divisores entre s

Figura 7. Generalización para hallar divisores de 4 y 9
Fuente: Cuaderno E1

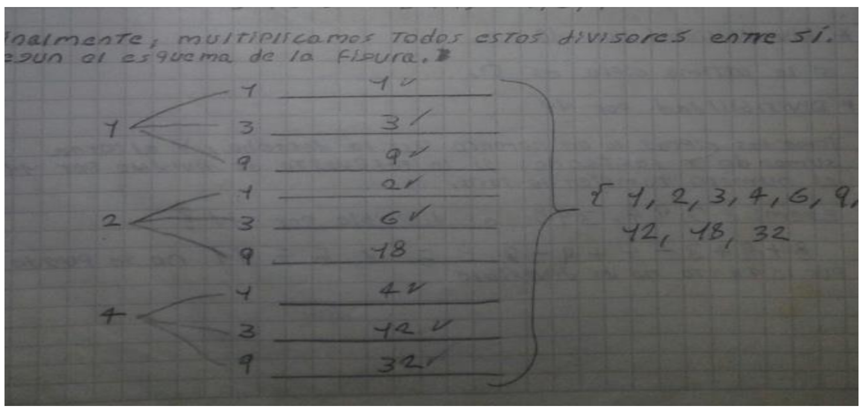
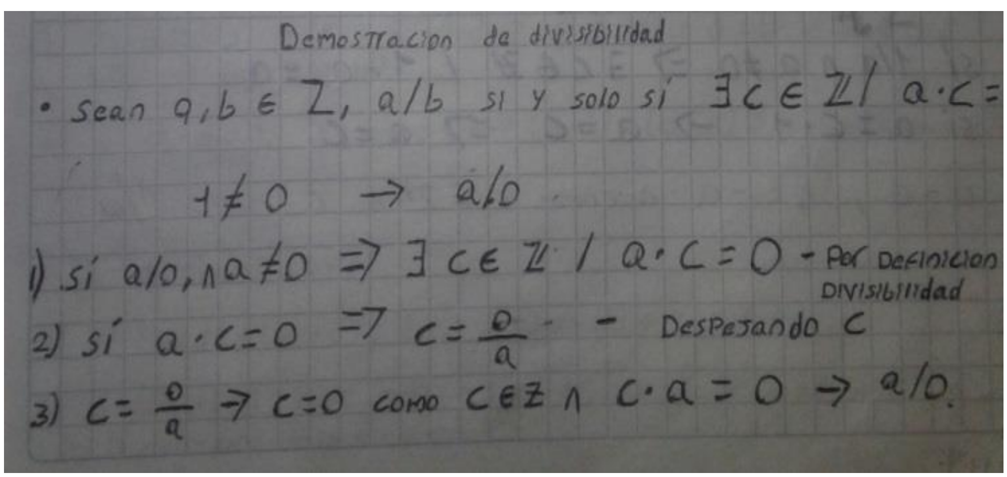


Figura 8. Esquema para hallar divisores de un número entero
Fuente: Cuaderno E1



Demostración de divisibilidad

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, a/b si y solo si $\exists c \in \mathbb{Z} / a \cdot c =$

$1 \neq 0 \rightarrow a/0$

1) sí $a/0, \wedge a \neq 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} / a \cdot c = 0$ - Por Definición Divisibilidad
2) sí $a \cdot c = 0 \Rightarrow c = \frac{0}{a}$ - Despejando c
3) $c = \frac{0}{a} \Rightarrow c = 0$ como $c \in \mathbb{Z} \wedge c \cdot a = 0 \rightarrow a/0$.

Figura 9. Demostración de divisibilidad
Fuente: Cuaderno E1

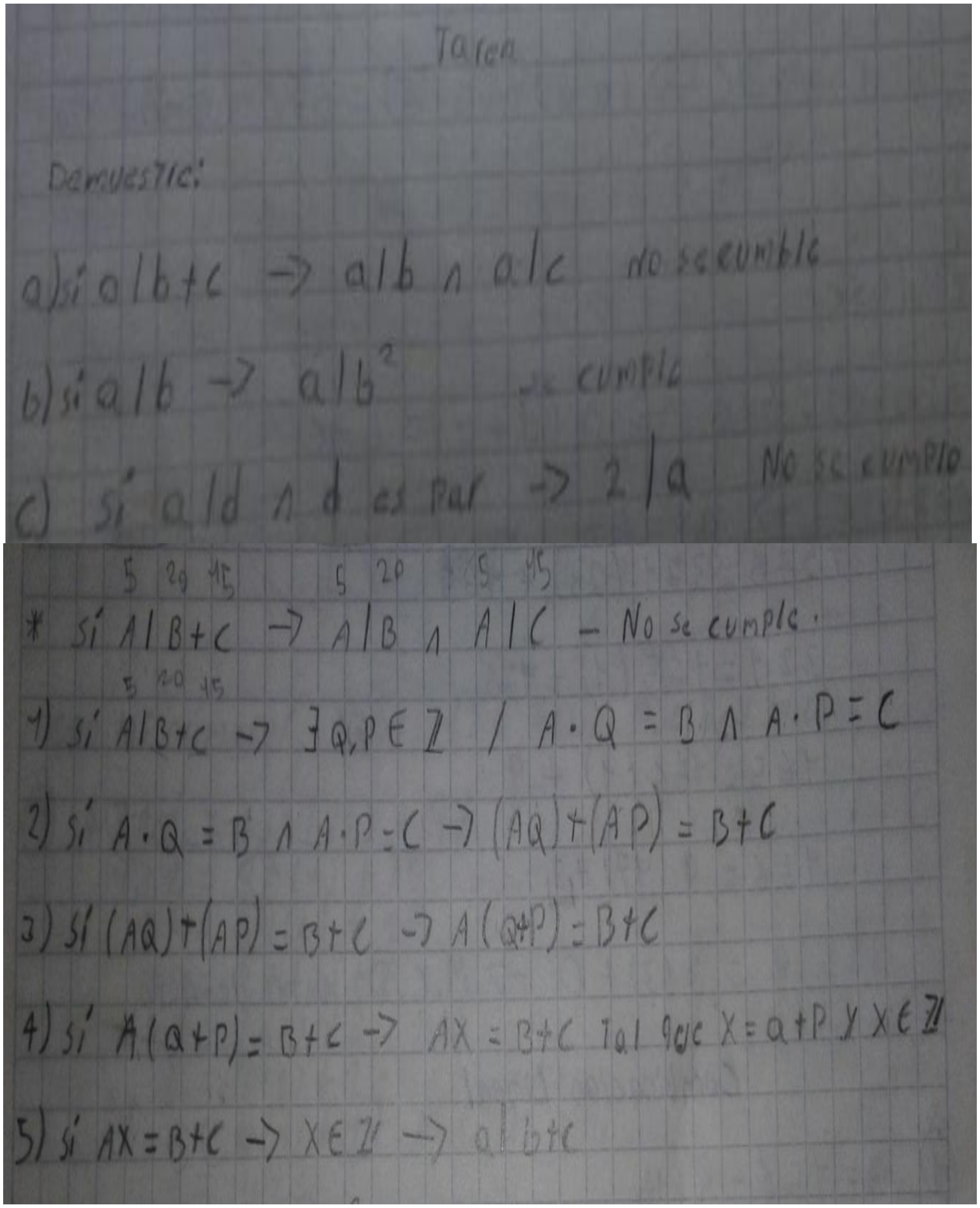


Figura 10. Lenguaje alfanumérico en demostración
Fuente: Cuaderno E1

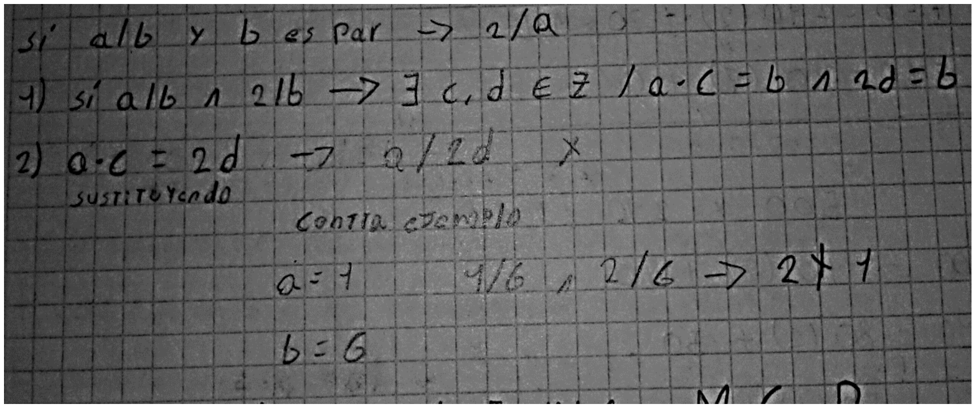


Figura 11. Demostración de propiedad número par
Fuente: Cuaderno E1

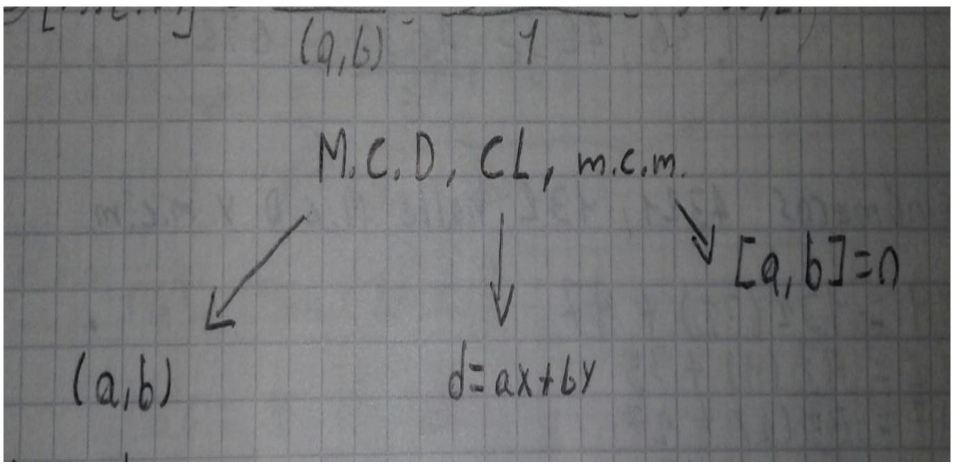


Figura 12.Esquema de OM y sus representaciones
Fuente: Cuaderno E1

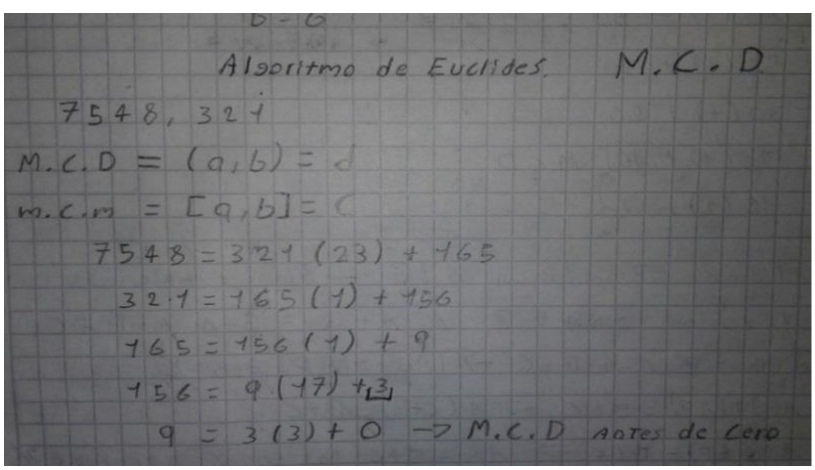
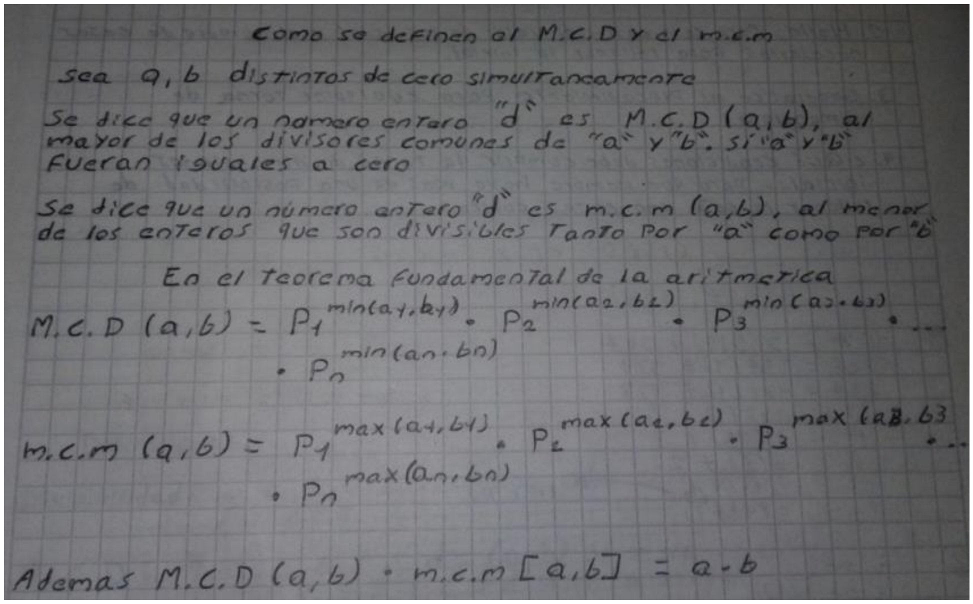


Figura 13. Algoritmo de Euclides para hallar MCD
Fuente: Cuaderno E1


Como se definen el M.C.D y el m.c.m

Sea a, b distintos de cero simultaneamente

Se dice que un número entero "d" es M.C.D (a, b), al mayor de los divisores comunes de "a" y "b". si "a" y "b" fueran iguales a cero

Se dice que un número entero "d" es m.c.m (a, b), al menor de los enteros que son divisibles tanto por "a" como por "b"

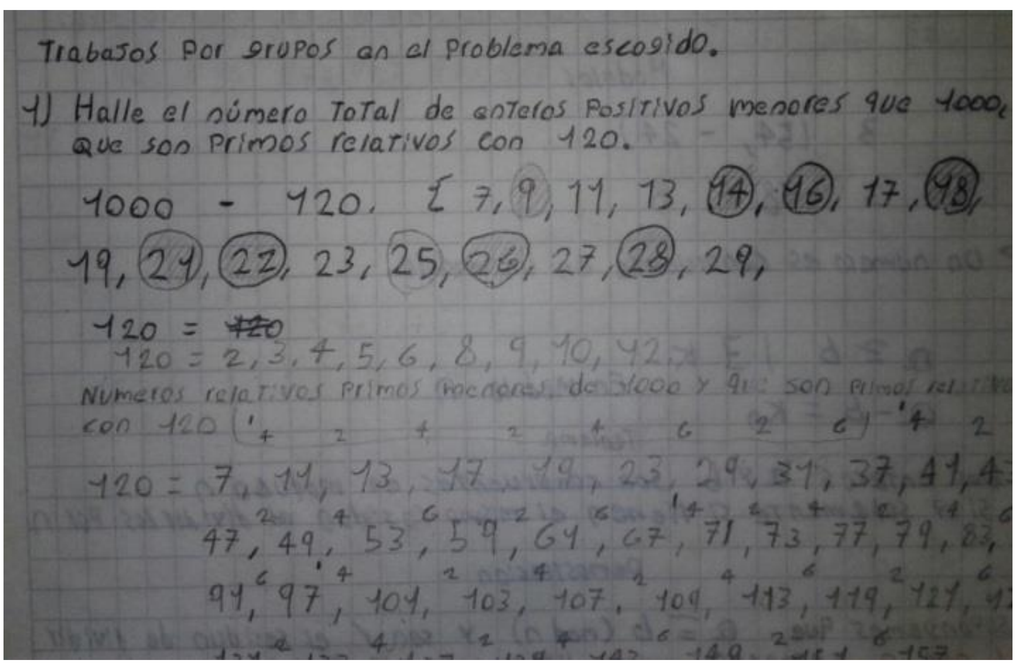
En el teorema fundamental de la aritmetica

$$M.C.D\,(a,b) = P_1^{\min(a_1,b_1)} \cdot P_2^{\min(a_2,b_2)} \cdot P_3^{\min(a_3,b_3)} \cdots P_n^{\min(a_n,b_n)}$$

$$m.c.m\,(a,b) = P_1^{\max(a_1,b_1)} \cdot P_2^{\max(a_2,b_2)} \cdot P_3^{\max(a_3,b_3)} \cdots P_n^{\max(a_n,b_n)}$$

Ademas $M.C.D\,(a,b) \cdot m.c.m\,[a,b] = a \cdot b$

Figura 14. Definición de mcm y MCD
Fuente: Cuaderno E1


Trabajos por grupos en el problema escogido.

1) Halle el número total de enteros positivos menores que 1000, que son primos relativos con 120.

1000 - 120. { 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29,

120 = ~~120~~
120 = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12

Numeros relativos primos menores de 1000 y que son primos relativos con 120

120 = 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 119, 121, ...

Figura 15. Resolucion de problema:coprimos con 120
Fuente: Cuaderno E1

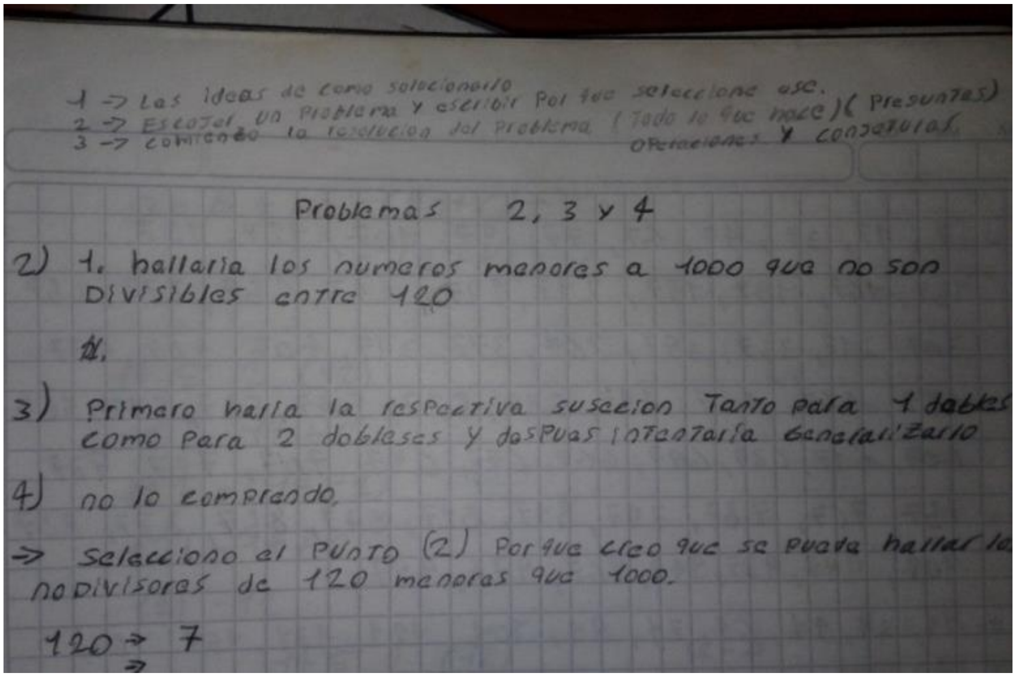


Figura 16. Problemas de divisibilidad
Fuente: Cuaderno E1

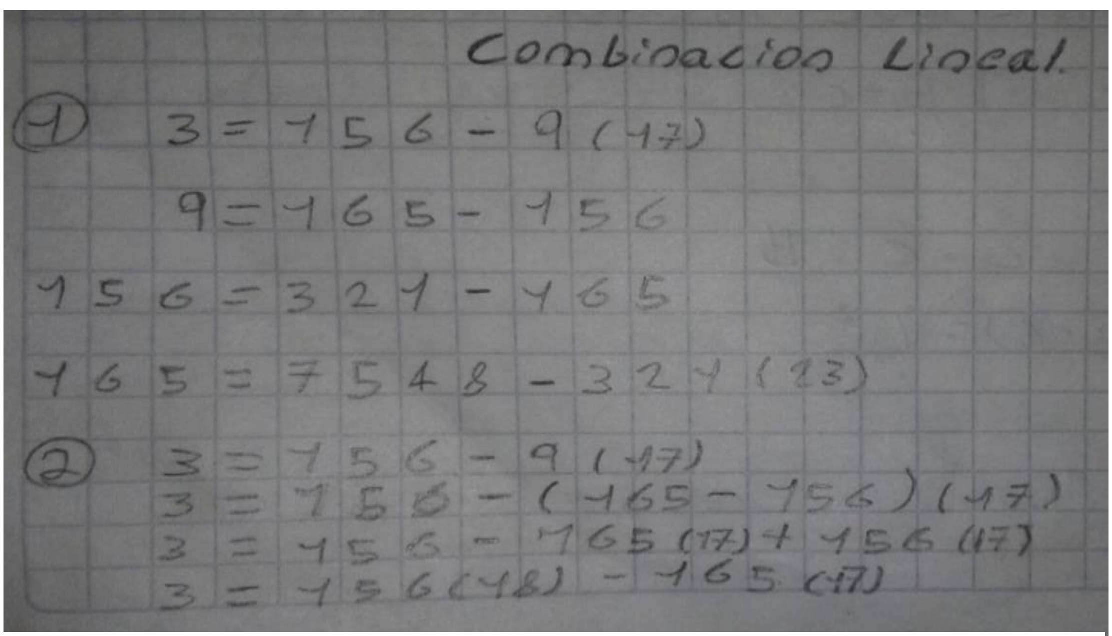


Figura 17. Aplicación de combinación lineal
Fuente: Cuaderno E1

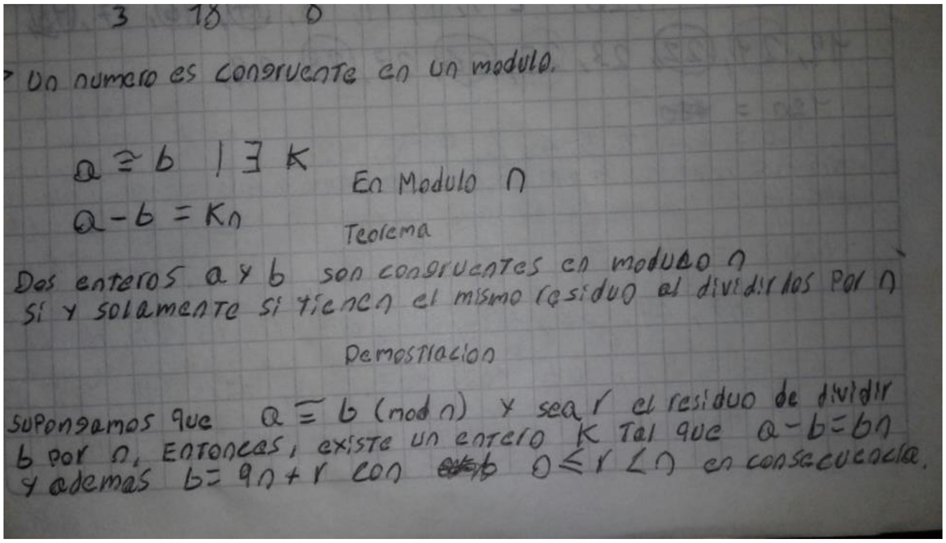


Figura 18. Definicion de número congruente
Fuente: Cuaderno E1

4.2. Estudio de caso N° 2 (E2)

Tabla 5. Resultados de RAT caso N°2(E2)

Relación Sesiones y RAT			
Sesiones	**Recursos**	**Acciones**	**Temáticas**
S1	Texto impreso: Aritmética Internet Cuaderno	Consulta de texto Toma de apuntes Copia textual	Divisibilidad Congruencias Ecuaciones diofánticas
S2	Texto impreso TNP Cuaderno Hojas auxiliares	Consulta de texto Toma de apuntes Copia textual Procesos de resolución	Números primos Problema sobre números primos
S3	Texto digital TNP Internet Cuaderno Hojas auxiliares	Consulta de texto Toma de apuntes Copia textual	Congruencias Problemas con congruencias
S4	Cuaderno Hojas auxiliares Calculadora	Consultar notas de cuaderno Procesos de resolución	Aplicación de las congruencias
S5	Cuaderno	Consultar apuntes del cuaderno Resolver problemas	Criptografía Problema de aplicación

Fuente: Datos de observación

4.2.1 **Interpretación de resultados**

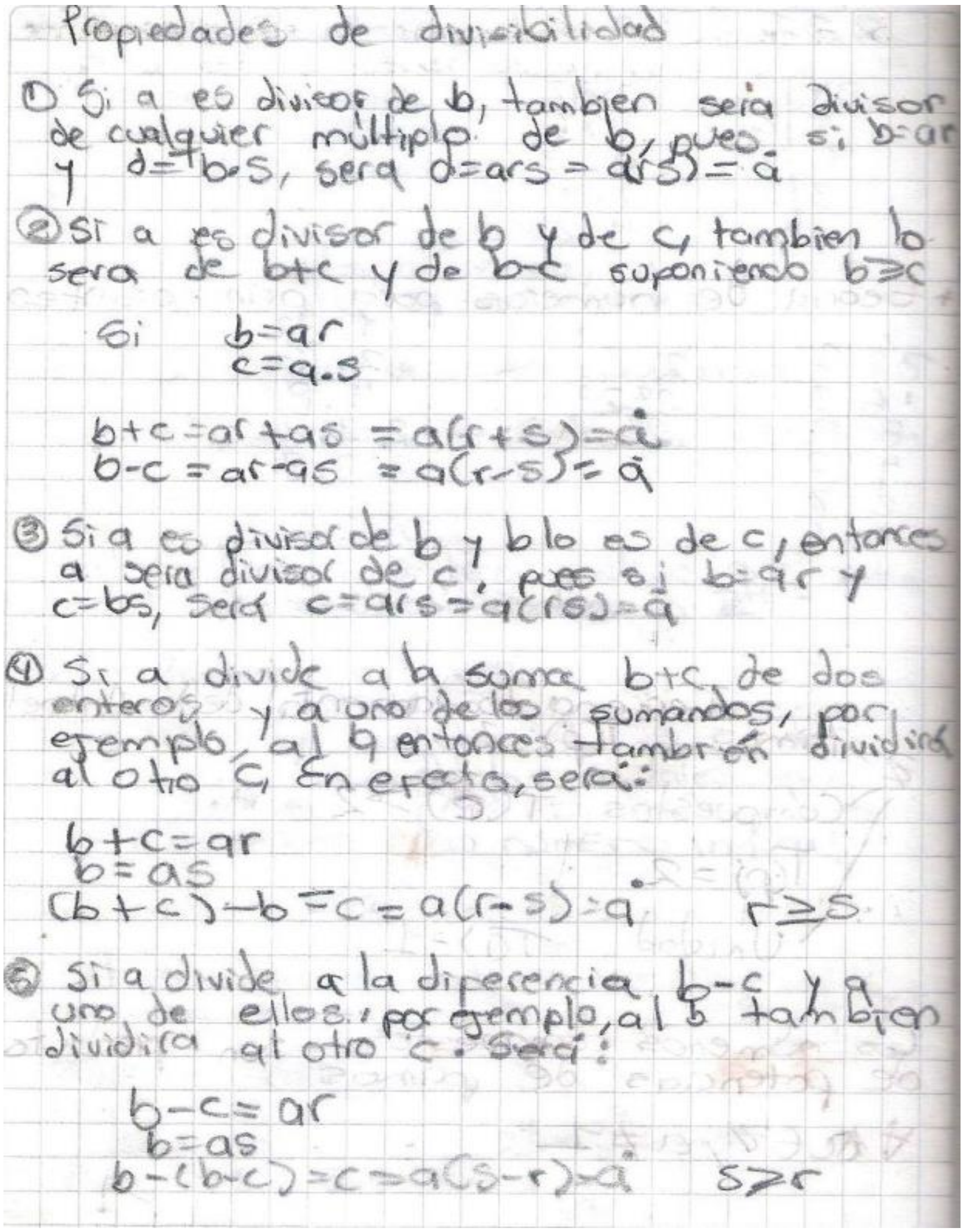
El uso de textos se observó en un 60% de las sesiones, así como en el mismo porcentaje se usó el internet y las hojas auxiliares, el cuaderno estuvo presente en un 100% del tiempo. Respecto a las acciones referidas al uso de estos recursos se encontró que en el 60% del estudio observado se consultó dos textos diferentes: uno de aritmética básica y el TNP, aunque este último se usó en un 40% en sus dos formatos, el 40% de las sesiones fueron transcripción de la información requerida en el proceso de resolución. Finalmente, el 40% de las sesiones observadas se verificaron procesos de resolución donde se trabajaron 2 problemas diferentes pero que uno abordaba más procedimientos: el primero sobre cálculo de divisores y el segundo sobre aplicación de congruencias para trabajar ecuaciones diofánticas. No se observaron formas de demostración en ninguna sesión porque a pesar de que se observaron las generalidades de algunos problemas no hubo un proceso de prueba ni reformulación; por tanto, en los procesos de resolución se destacaron el uso de regularidades en un problema de criptografía: que se probaron varios casos y la aplicación de procedimientos rutinarios: solución de problemas con ecuaciones diofánticas y el algoritmo de Euclides. El uso de internet no fue significativo porque solo se buscaron problemas resueltos para analizar su solución y aplicarlos a otros. En los registros se encontró ejemplos concretos de algunas propiedades de la divisibilidad y las congruencias.

4.2.1.1 ***Análisis descriptivo de evidencias caso N°2***

Tabla 6. Descripción de las evidencias cuaderno E2

N° de figura	***Análisis descriptivo***
19	***5 propiedades de la divisibilidad, uso de expresiones algebraicas para simplificar la relación establecida en cada definición.***
20	***Propiedades de divisibilidad y ejemplos.***
21	***Planteamiento de problemas sobre números primos relativos a 120, esquemas de descomposición y composición, listados de números, generalización.***

22	***Uso de esquema similar al usado en estadística para hallar divisores a partir de la descomposición de un número y el termino general para hallar cantidad de divisores de un número.***
23	***Definición textual de congruencias con ejemplos concretos usando algoritmo de división.***
24	***Propiedades de congruencias y aplicación a problemas.***
25	***Aplicación de congruencias a problemas y tablas de adición/multiplicación en Zn.***
26	***Planteamiento de problemas de aplicación de Teoría de Divisibilidad (Algoritmo de Euclides, combinación lineal, congruencias).***
27	***Problema para análisis de regularidades como introducción a la criptografía.***
28-30	***Proceso de resolución sobre criptografía, análisis con varios casos y análisis de regularidades.***



Propiedades de divisibilidad

① Si a es divisor de b, tambien sera divisor de cualquier múltiplo de b, pues si $b=ar$ y $d=b \cdot s$, sera $d=ars=a(rs)=\dot{a}$

② Si a es divisor de b y de c, tambien lo sera de $b+c$ y de $b-c$ suponiendo $b \geq c$

Si $b=ar$
$c=a.s$

$b+c=ar+as=a(r+s)=\dot{a}$
$b-c=ar-as=a(r-s)=\dot{a}$

③ Si a es divisor de b y b lo es de c, entonces a sera divisor de c, pues si $b=ar$ y $c=bs$, sera $c=ars=a(rs)=\dot{a}$

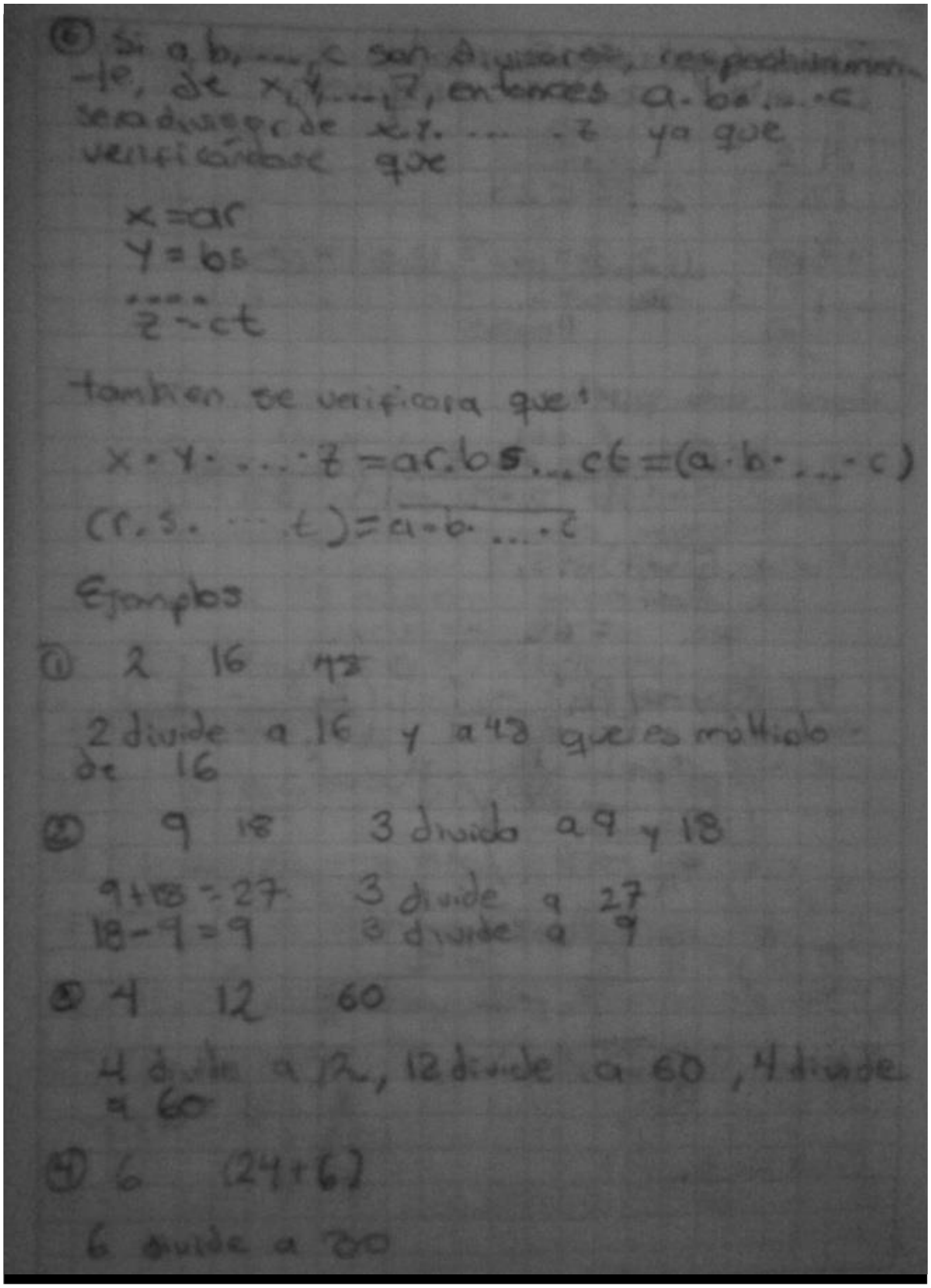
④ Si a divide a la suma $b+c$ de dos enteros y a uno de los sumandos, por ejemplo, al b entonces tambien dividira al otro c, En efecto, sera:

$b+c=ar$
$b=as$
$(b+c)-b=c=a(r-s)=\dot{a}$ $r \geq s$

⑤ Si a divide a la diferencia $b-c$ y a uno de ellos, por ejemplo, al b tambien dividira al otro c. Sera:

$b-c=ar$
$b=as$
$b-(b-c)=c=a(s-r)=\dot{a}$ $s \geq r$

*Figura 19.*Propiedades de divisibilidad
Fuente: Cuaderno E2


⑥ Si a, b, ..., c son divisores, respectivamente, de x, y, ..., z, entonces a·b·...·c será divisor de x·y· ... ·z ya que verificándose que

x = ar
y = bs
....
z = ct

también se verificará que:

x·y· ... ·z = ar·bs...ct = (a·b·...·c)
(r·s· ... ·t) = $\overline{a·b ... ·c}$

Ejemplos

① 2 16 48

2 divide a 16 y a 48 que es múltiplo de 16

② 9 18 3 divide a 9 y 18

9+18 = 27 3 divide a 27
18−9 = 9 3 divide a 9

③ 4 12 60

4 divide a 12, 12 divide a 60, 4 divide a 60

④ 6 (24+6)

6 divide a 30

Figura 20. Ejemplos de propiedades de divisibilidad
Fuente: Cuaderno E2

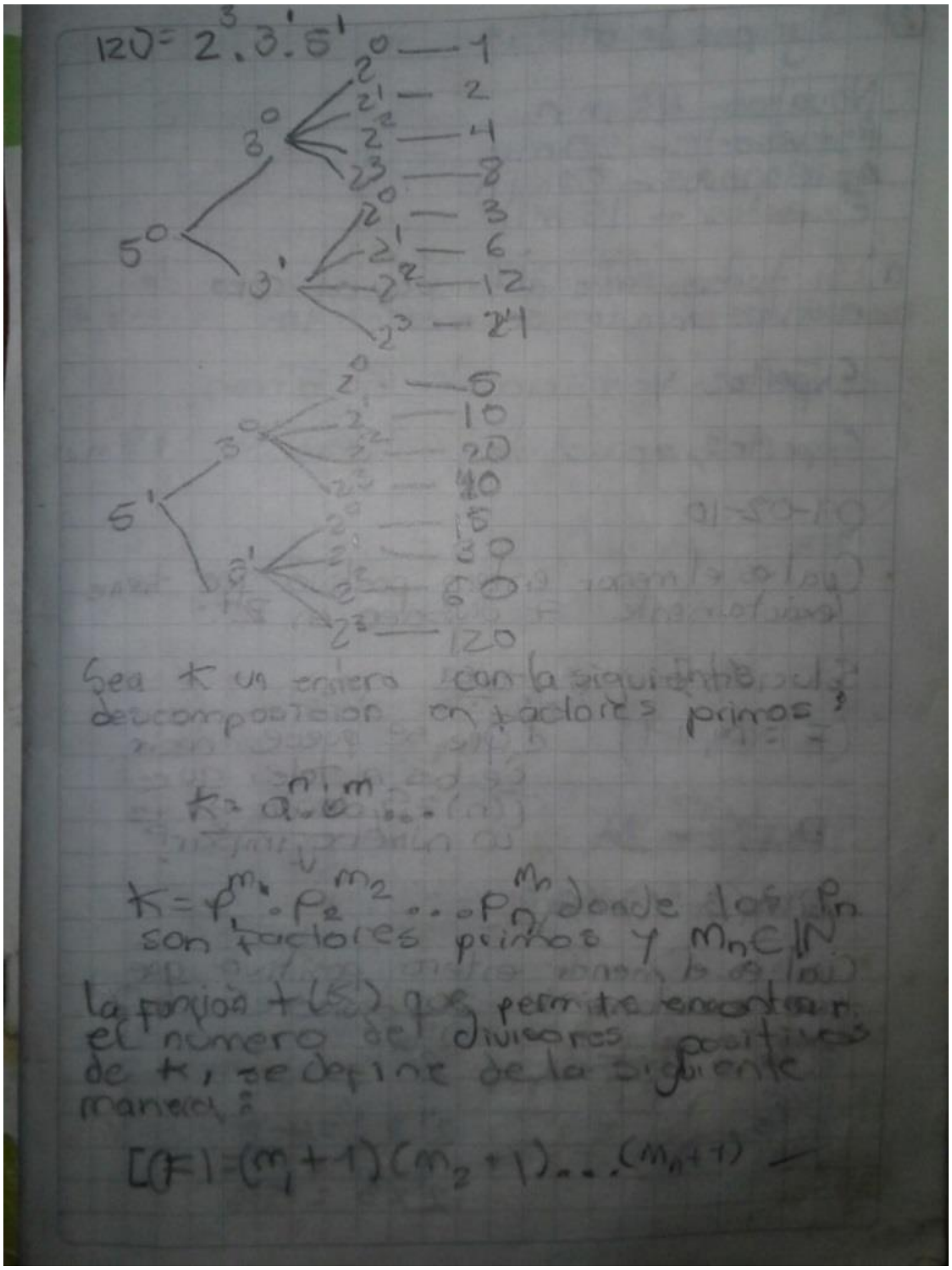
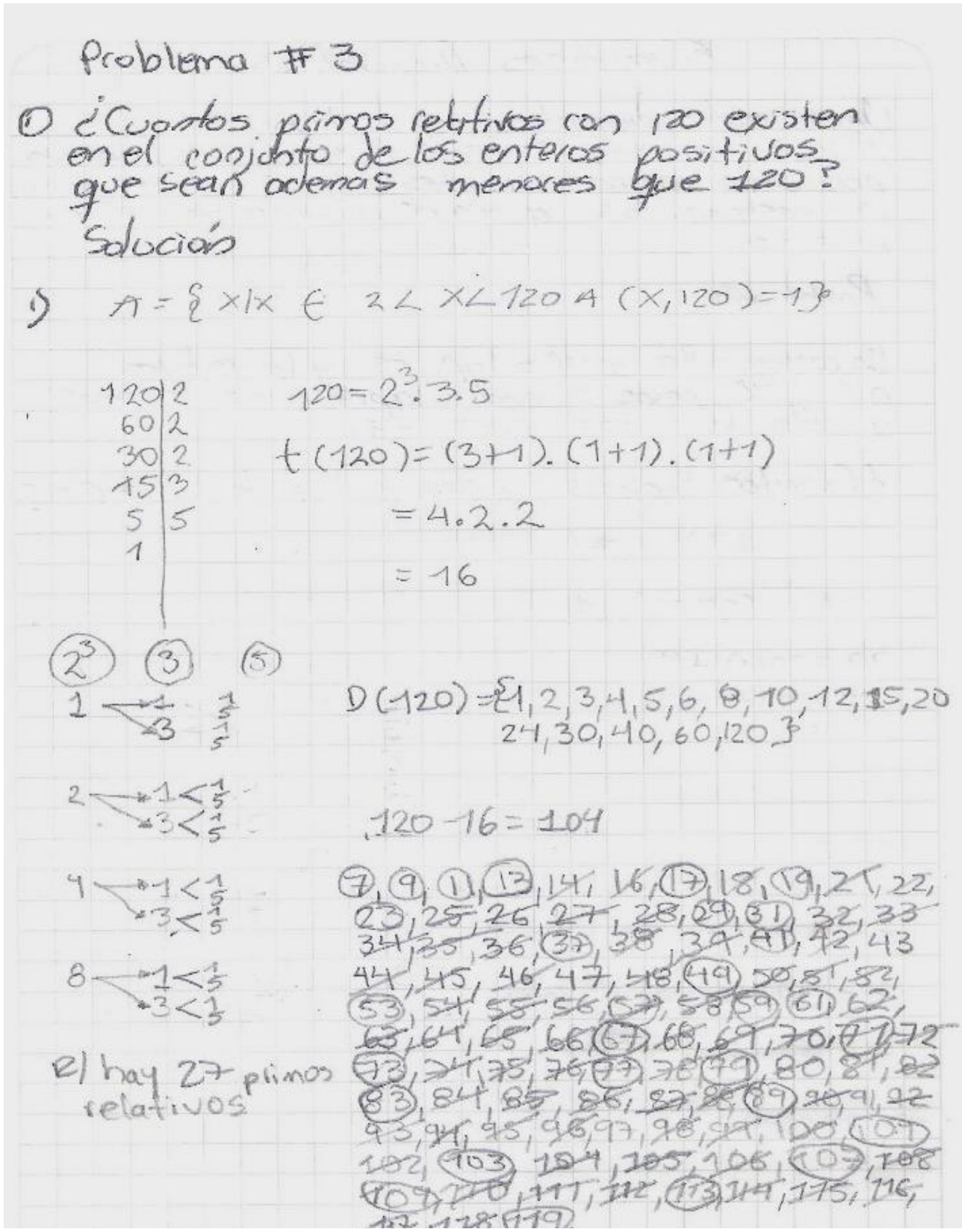


Figura 21. Diagrama y generalizacion para cálculo de divisores de un número entero
Fuente: Cuaderno E2



Problema #3

① ¿Cuantos primos relativos con 120 existen en el conjunto de los enteros positivos que sean ademas menores que 120?

Solución

1) $A = \{ x / x \in 2 < x < 120 \wedge (x, 120) = 1 \}$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 . 3 . 5$

$t(120) = (3+1).(1+1).(1+1)$

$= 4.2.2$

$= 16$

2^3 3 5

$D(120) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

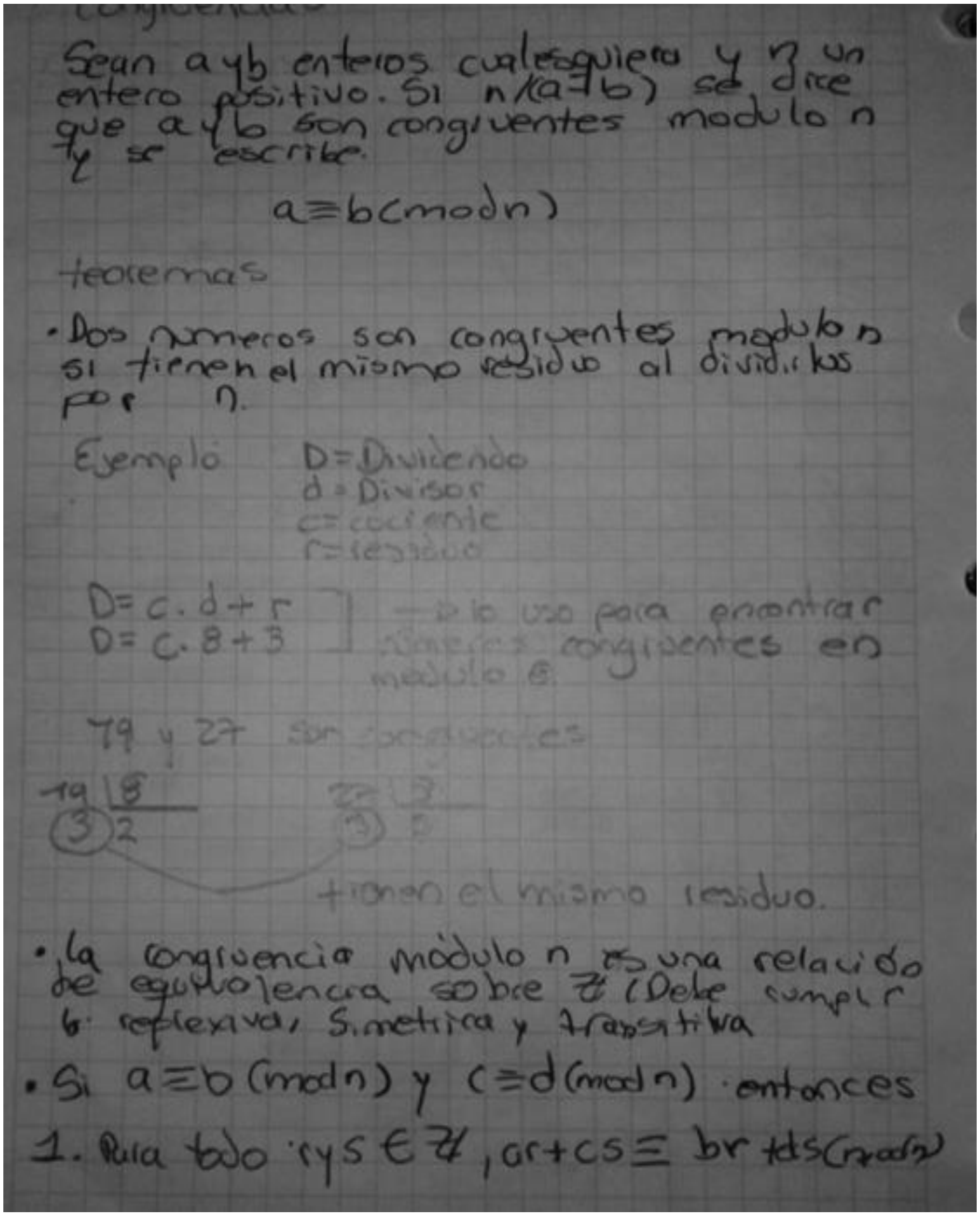
$120 - 16 = 104$

7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119

R/ hay 27 primos relativos

Figura 22. Problema sobre primos relativos a 120

Fuente: Cuaderno E2



Sean a y b enteros cualesquiera y n un entero positivo. Si n/(a−b) se dice que a y b son congruentes modulo n y se escribe.

$a \equiv b (mod\, n)$

teoremas

• Dos numeros son congruentes modulo n si tienen el mismo residuo al dividirlos por n.

Ejemplo D=Dividendo
d=Divisor
c=cociente
r=residuo

D=c.d+r
D=c.8+3
→ lo uso para encontrar números congruentes en modulo 8.

79 y 27 son congruentes

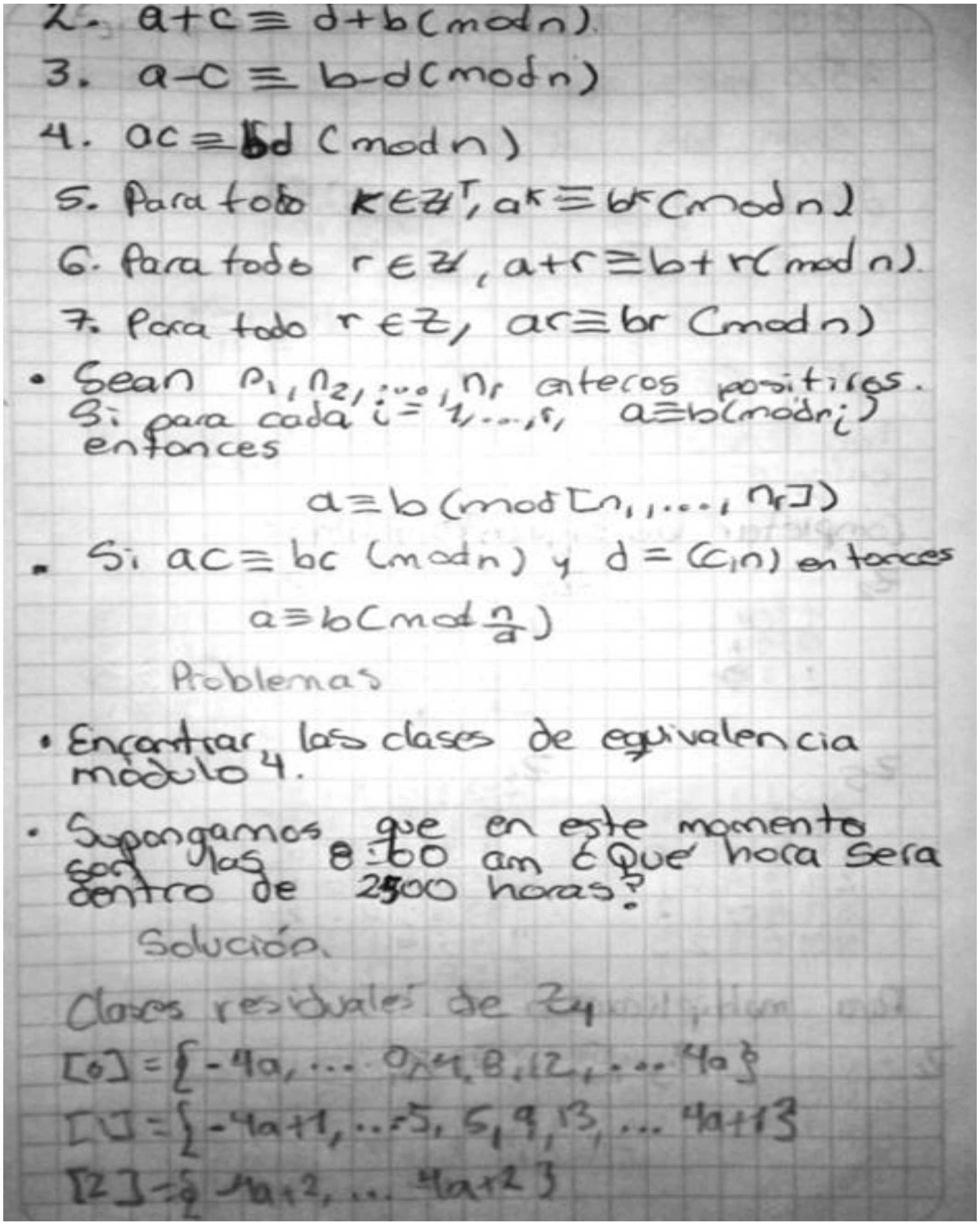
tienen el mismo residuo.

• la congruencia módulo n es una relación de equivalencia sobre Z (Debe cumplir la reflexiva, Simetrica y transitiva

• Si $a \equiv b (mod\, n)$ y $c \equiv d (mod\, n)$ entonces

1. Para todo r y s $\in \mathbb{Z}$, $ar+cs \equiv br+ds (mod\, n)$

Figura 23. Definicion y ejemplo de congruencias
Fuente: Cuaderno E2



2. $a+c \equiv d+b \pmod{n}$.
3. $a-c \equiv b-d \pmod{n}$
4. $ac \equiv bd \pmod{n}$
5. Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, $a^k \equiv b^k \pmod{n}$
6. Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $a+r \equiv b+r \pmod{n}$.
7. Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $ar \equiv br \pmod{n}$

- Sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros positivos. Si para cada $i = 1, \ldots, r$, $a \equiv b \pmod{n_i}$ entonces

$$a \equiv b \pmod{[n_1, \ldots, n_r]}$$

- Si $ac \equiv bc \pmod{n}$ y $d = (c, n)$ entonces

$$a \equiv b \pmod{\tfrac{n}{d}}$$

Problemas

- Encontrar las clases de equivalencia módulo 4.
- Supongamos que en este momento son las 8:00 am ¿Qué hora será dentro de 2500 horas?

Solución

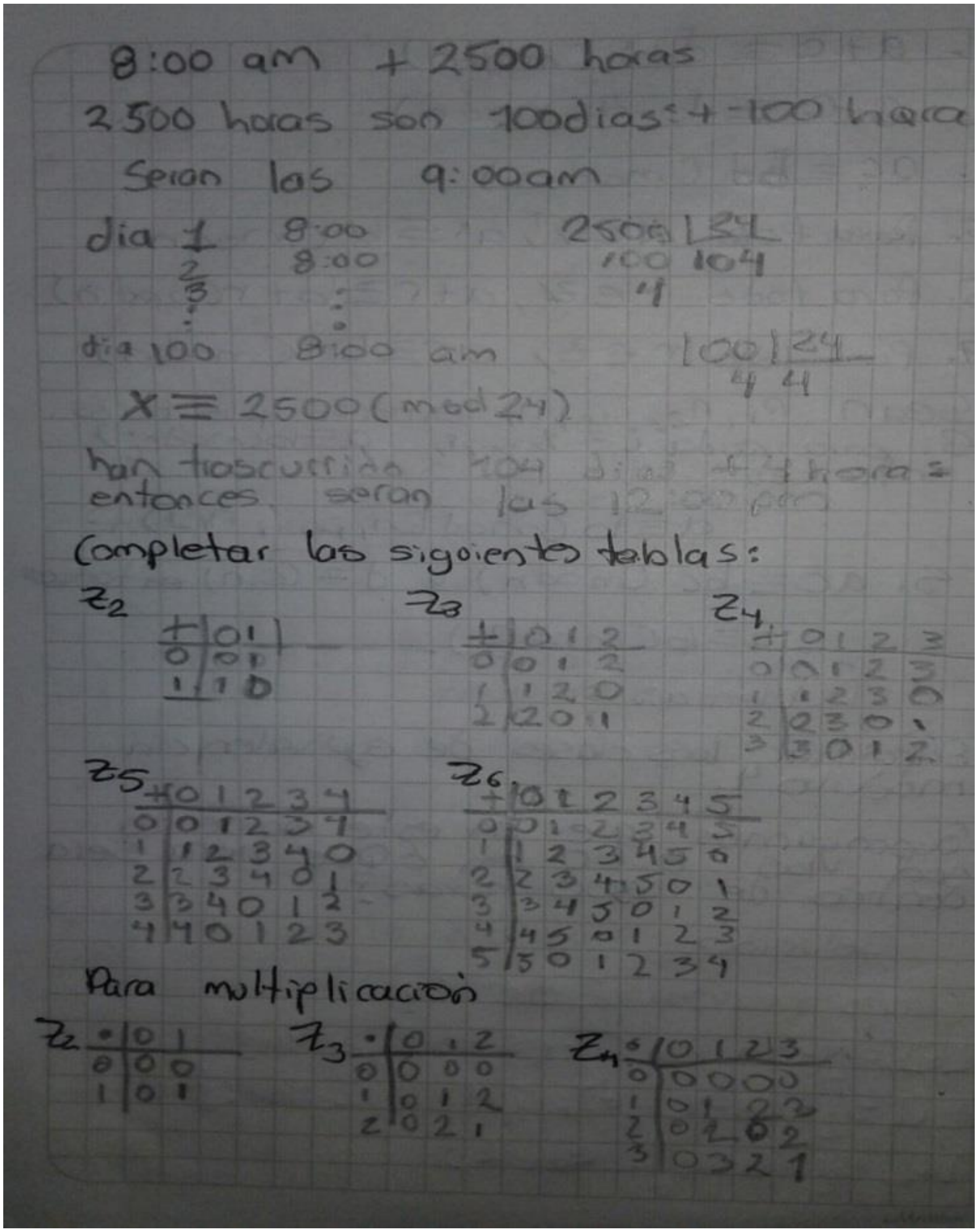
Clases residuales de $\mathbb{Z}_4$

$[0] = \{-4a, \ldots 0, 4, 8, 12, \ldots 4a\}$

$[1] = \{-4a+1, \ldots -3, 5, 9, 13, \ldots 4a+1\}$

$[2] = \{-4a+2, \ldots 4a+2\}$

Figura 24. Propiedades de congruencias y clases residuales
Fuente: Cuaderno E2


8:00 am + 2500 horas
2500 horas son 100dias + 100 hora
Serian las 9:00am
dia 1 8:00 2500 | 24
2 8:00 100 104
3 4
dia 100 8:00 am 100 | 24
4 4
$X \equiv 2500 \pmod{24}$
han trascurrido 104 dias 4 horas
entonces seran las 12:00 pm
Completar las siguientes tablas:

Z_2

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Z_3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Z_4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Z_5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Z_6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Para multiplicación

Z_2

·	0	1
0	0	0
1	0	1

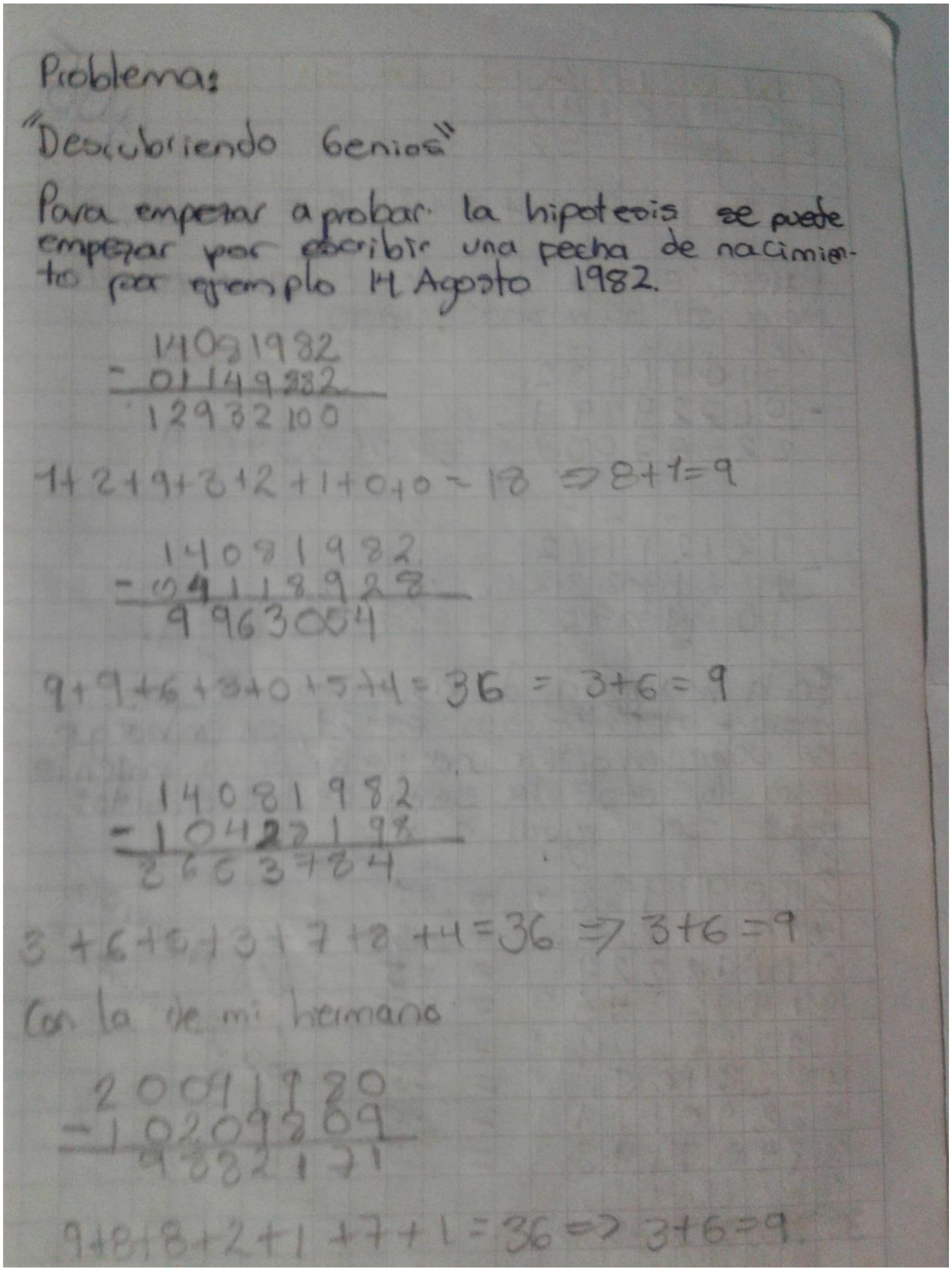
Z_3

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Z_4

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Figura 25. Tablas para realizar aritmética modular de Z_n
Fuente: Cuaderno E2



Problema:

"Descubriendo Genios"

Para empezar a probar la hipotesis se puede empezar por escribir una fecha de nacimiento por ejemplo 14 Agosto 1982.

14081982
-01149882
12932100

1+2+9+3+2+1+0+0=18 => 8+1=9

14081982
-04118928
9963054

9+9+6+3+0+5+4=36 = 3+6=9

14081982
-10428198
3663784

3+6+6+3+7+8+4=36 => 3+6=9

Con la de mi hermano

20091980
-10209809
9882171

9+8+8+2+1+7+1=36 => 3+6=9.

Figura 26. Problema "descubriendo genios"
Fuente: Cuaderno E2

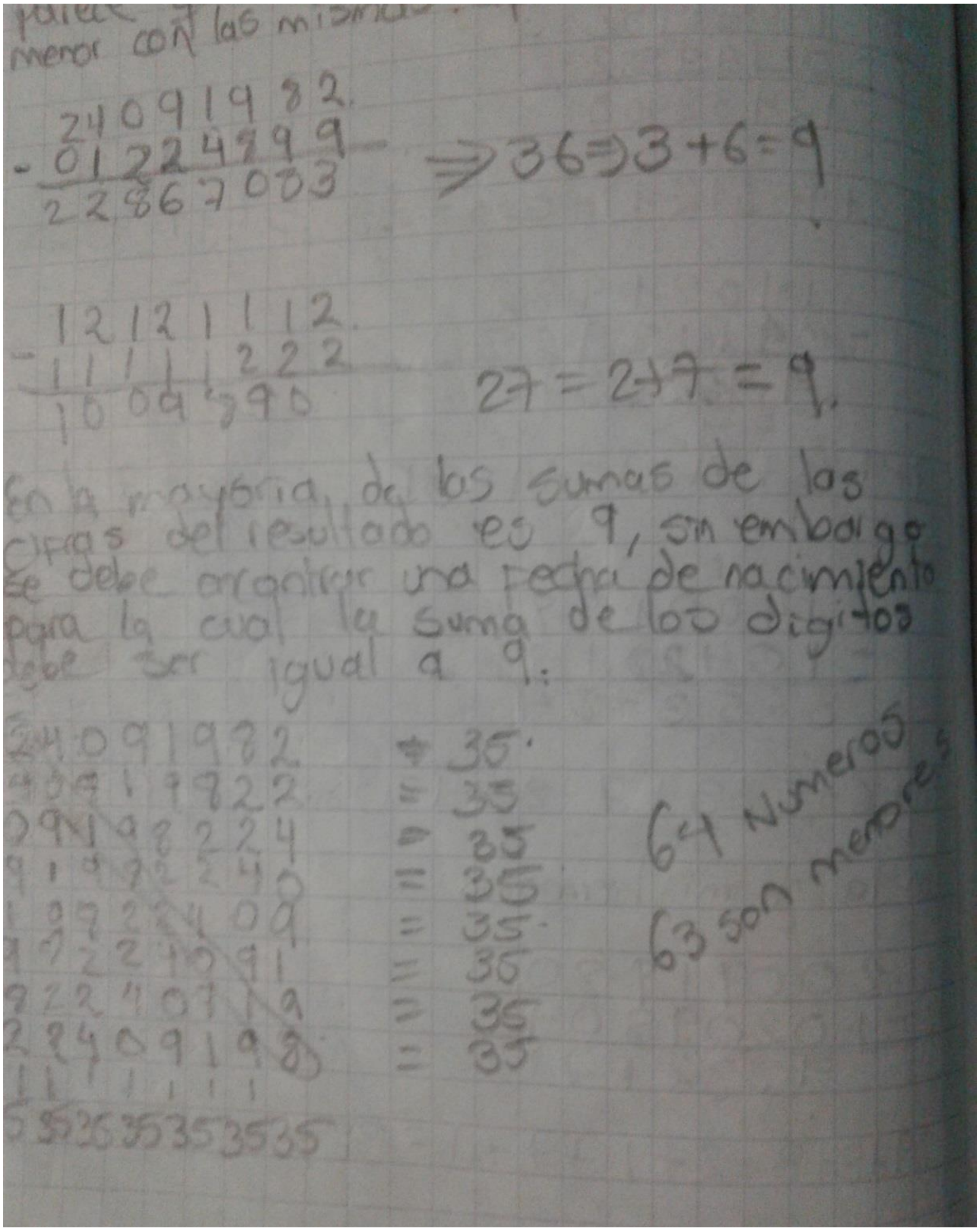
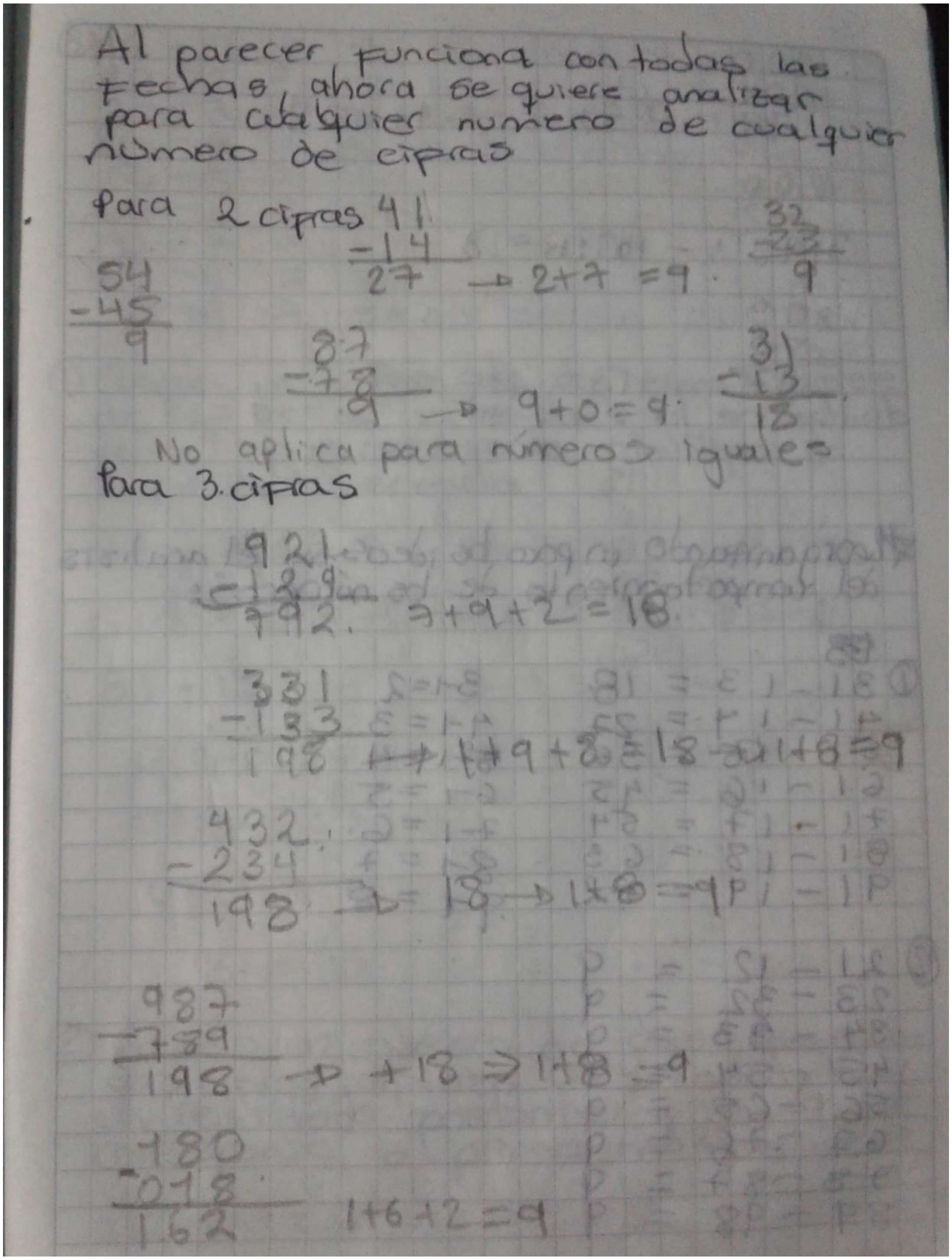


Figura 27.Análisis de regularidades parte I
Fuente: Cuaderno E2


Al parecer funciona con todas las Fechas, ahora se quiere analizar para cualquier numero de cualquier número de cipras

Para 2 cipras

41 − 14 = 27 → 2+7 = 9

32 − 23 = 9

54 − 45 = 9

87 − 78 = 9 → 9+0 = 9

31 − 13 = 18

No aplica para números iguales

Para 3 cipras

921 − 129 = 792. 7+9+2 = 18

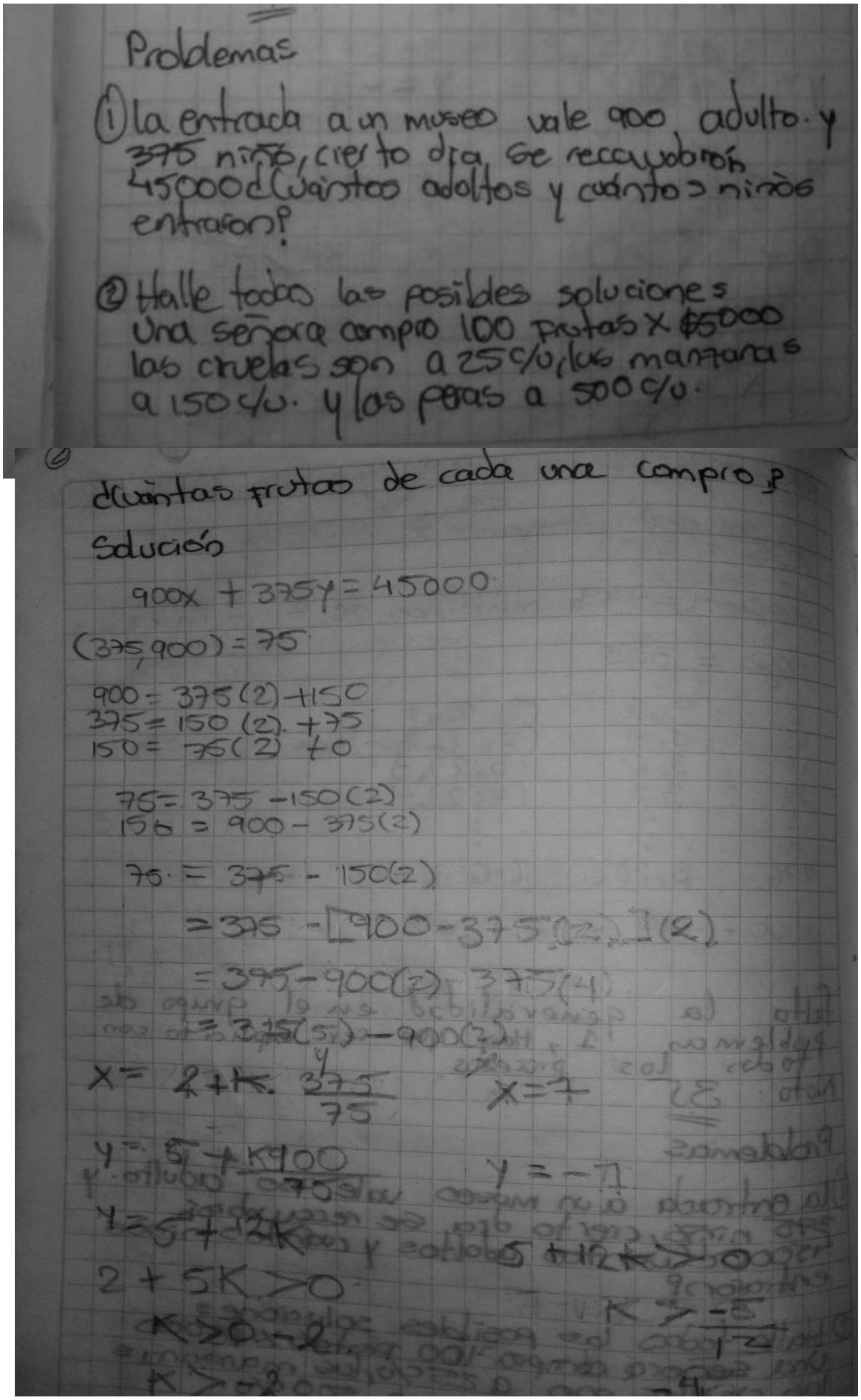
331 − 133 = 198 → 1+9+8 = 18 → 1+8 = 9

432 − 234 = 198 → 18 → 1+8 = 9

987 − 789 = 198 → 18 ⇒ 1+8 = 9

180 − 018 = 162 1+6+2 = 9

Figura 28. Análisis de regularidades parte II
Fuente: Cuaderno E2



Problemas

① la entrada a un museo vale 900 adulto. y 375 niño, cierto día se recaudaron 45000 ¿Cuántos adultos y cuántos niños entraron?

② Halle todas las posibles soluciones
Una señora compro 100 frutas x $5000
las ciruelas son a 25 c/u, las manzanas a 150 c/u. y las peras a 500 c/u.

¿cuántas frutas de cada una compro?

Solución

$900x + 375y = 45000$

$(375, 900) = 75$

$900 = 375(2) + 150$
$375 = 150(2) + 75$
$150 = 75(2) + 0$

$75 = 375 - 150(2)$
$150 = 900 - 375(2)$

$75 = 375 - 150(2)$
$= 375 - [900 - 375(2)](2)$
$= 375 - 900(2) + 375(4)$
$= 375(5) - 900(2)$

$x = 2 + k \frac{375}{75}$ $\quad x = 7$

$y = 5 + k \frac{900}{375}$ $\quad y = -7$

$y = 5 + 12k$

$2 + 5k > 0$ $\quad 5 + 12k > 0$

$k > 0 - 2$ $\quad k > \frac{-5}{12}$

$k > -2$

*Figura 29.*Planteamiento y resolución de problemas
Fuente: Cuaderno E2

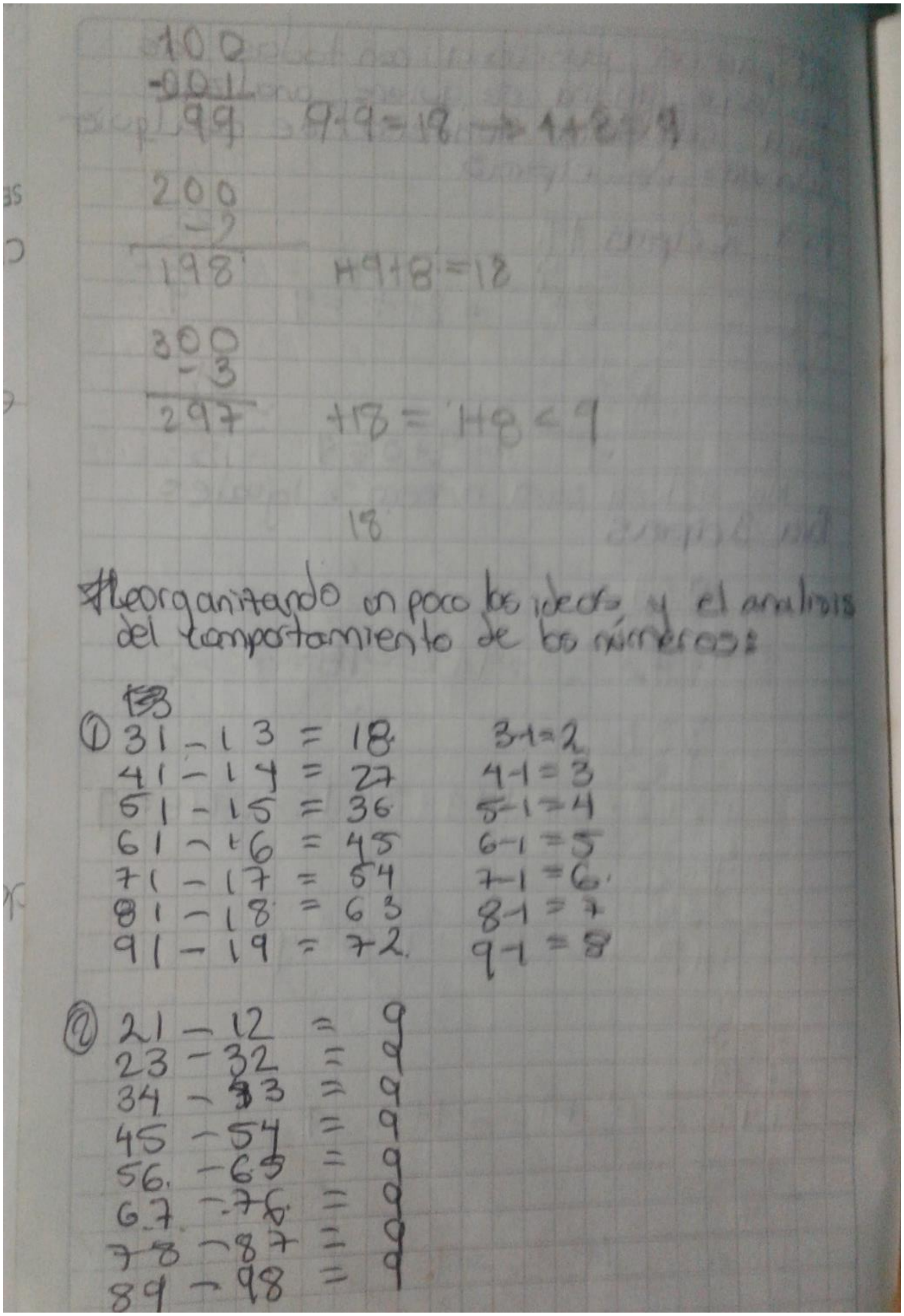


Figura 30. Análisis de regularidades parte III
Fuente: Cuaderno E2

4.3. Estudio de caso N°3

Tabla 7. Resultados RAT caso N°3 (E3)

Relación Sesiones y RAT			
Sesiones	**Recursos**	**Acciones**	**Temáticas**
S1	Texto impreso TNP (p.145) Cuaderno Internet	Consulta Toma de apuntes Copia textual	Ecuaciones diofánticas Teorema de Bezout
S2	Texto impreso TNP cuaderno	Consulta Toma de apuntes Procesos de resolución	Congruencias lineales
S3	Cuaderno personal Cuaderno compañero	Consulta de cuaderno Toma apuntes	Congruencias lineales
S4	Texto impreso TNP Cuaderno	Consulta Copia textual	Teorema del residuo
S5	Cuaderno	Problemas de aplicación	Teorema del residuo

Fuente: datos obtenidos de la observación.

4.3.1 Interpretación de resultados

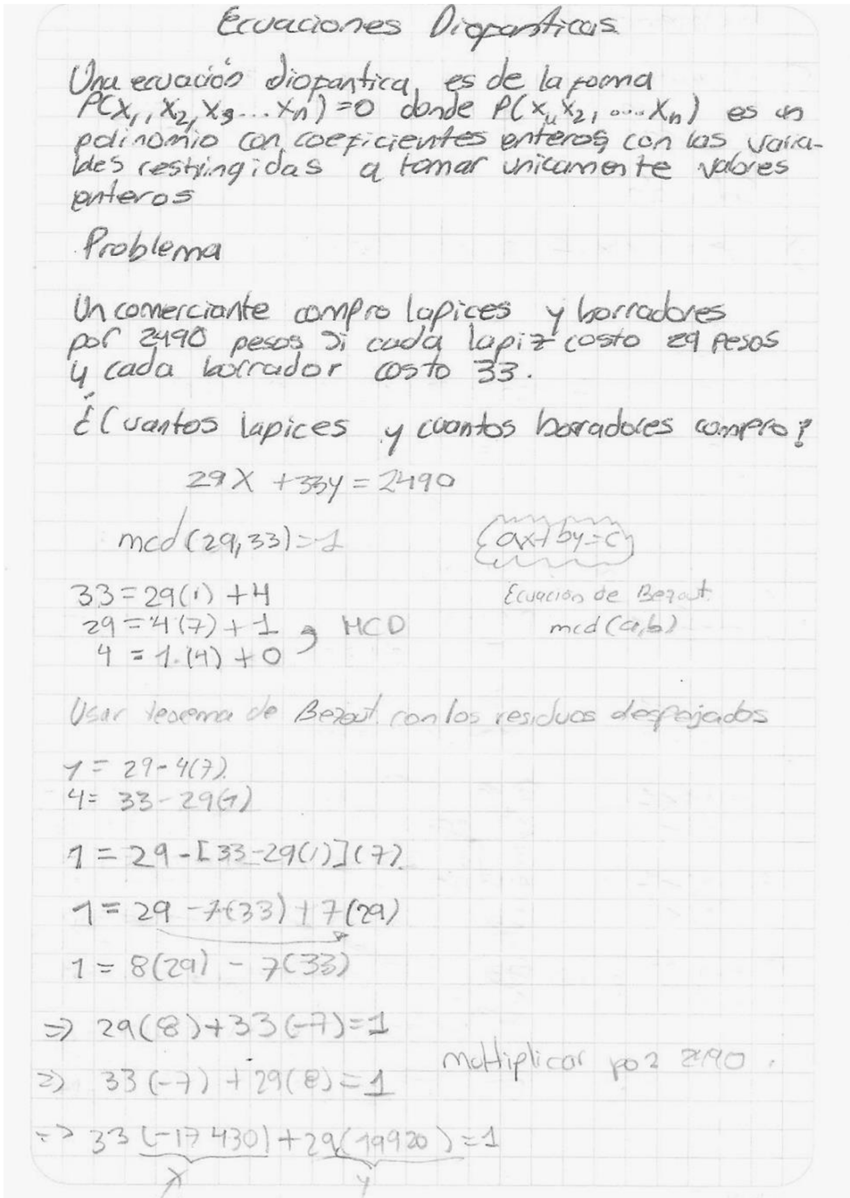
De acuerdo con la tabla 6 se puede observar que la estudiante usó el internet en dos sesiones donde consultó la información en el texto e internet, en el 20% de las sesiones totales se vio usando el cuaderno propio y el de otro compañero, en esa ocasión se vio revisando varias veces ese cuaderno y haciendo copia textual de unas definiciones y buscando analogías para resolver un problema sobre congruencias lineales. Finalmente, el 100% de las sesiones analizadas solo hizo consulta textual y toma de apuntes de diferentes fuentes de información como libros y el cuaderno del amigo que hizo el curso el año anterior (según lo afirmó la estudiante). Las temáticas vistas en estas sesiones de estudio conformaron la aplicación de la divisibilidad en algunos problemas matemáticos y que permitieron retomar los temas vistos en las primeras clases. En este punto ya se empiezan a usar varias generalizaciones y por tanto ya se debe tener dominio de los procedimientos que allí se requieren también como la habilidad de memorizar dichas generalidades para un posterior examen. Este caso excluye el proceso de resolución porque solo se evidenció definiciones textuales y ejemplos de resolución, pero no el problema propuesto en clase que debía ser el eje de construcción del OM.

4.3.1.1 *Análisis descriptivo de las evidencias caso N°3*

En la tabla 7 se hace una descripción de la evidencia del estudio de este caso (para ver la evidencia remitirse al índice).

Tabla 8. Descripción de evidencias cuaderno E3

N° de figura	***Análisis descriptivo***
31	***Definición de ecuaciones diofánticas y planteamiento de un problema. Copia textual de la definición y el problema con su solución. Aplicación algoritmo Euclides y planteamiento de ecuación diofántica.***
32	***Resolución de problema con generalización de soluciones positivas en la ecuación diofantica.***
33	***Aplicación de las generalidades de las soluciones positivas para resolver una ecuación diofantica. Las expresiones generales se modifican con la introducción de la variable K y aplicando las propiedades de las igualdades y los procedimientos rutinarios para despejar ecuaciones***
34	***Copia textual sobre el sistema de congruencias lineales con sus respectivas generalizaciones. Se presenta un ejemplo de resolución.***
35	***Ejercicios sobre sistemas de congruencias lineales. Se plantean el sistema de ecuaciones y las divisiones respectivas para identificar los residuos. Se describe cada paso de resolución en el ejemplo y aplicando en los ejercicios***
36	***Evidencia sobre un proceso de resolución de un sistema de congruencias***
37	***Estrategia numérica para encontrar inversos multiplicativos en Zn de números grandes (para reemplazar la tabla de aritmética modular)***
38	***Definición y uso del teorema chino del residuo, como técnica para resolver la criptografía, expresiones generales y ejemplo de cómo se resuelve.***
39-41	***Esquema de solución de congruencias con el teorema chino del resto.***



Ecuaciones Diopanticas

Una ecuación diopantica, es de la forma $P(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = 0$ donde $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es un polinomio con coeficientes enteros con las variables restingidas a tomar unicamente valores enteros

Problema

Un comerciante compro lapices y borradores por 2490 pesos si cada lapiz costo 29 pesos y cada borrador costo 33.

¿Cuantos lapices y cuantos borradores compro?

$29x + 33y = 2490$

$mcd(29, 33) = 1$ $\quad \{ax + by = c\}$

Ecuacion de Bezout $mcd(a, b)$

$33 = 29(1) + 4$

$29 = 4(7) + 1 \rightarrow$ HCD

$4 = 1 \cdot (4) + 0$

Usar teorema de Bezout con los residuos despejados

$1 = 29 - 4(7)$

$4 = 33 - 29(1)$

$1 = 29 - [33 - 29(1)](7)$

$1 = 29 - 7(33) + 7(29)$

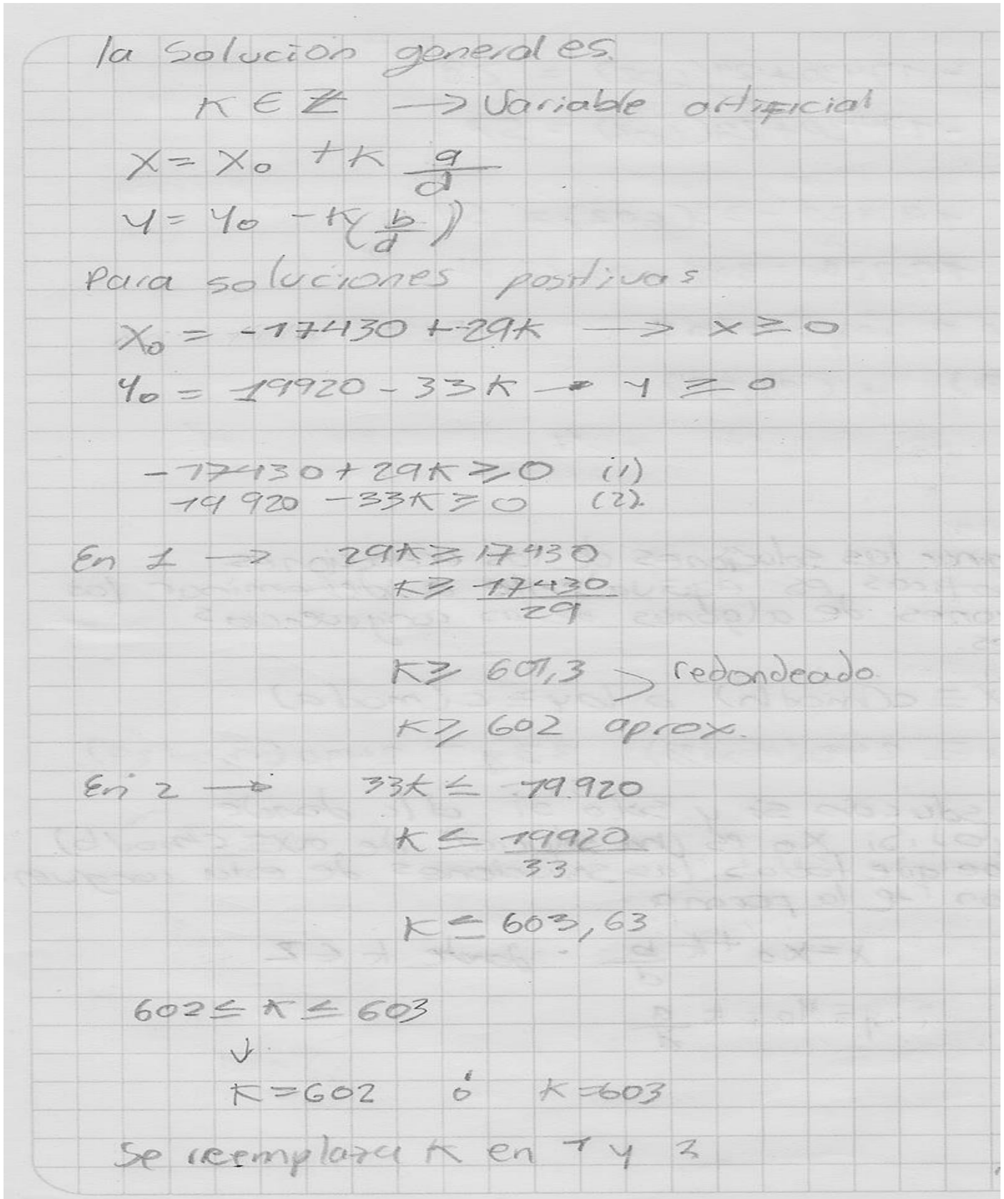
$1 = 8(29) - 7(33)$

$\Rightarrow 29(8) + 33(-7) = 1$

$\Rightarrow 33(-7) + 29(8) = 1$ multiplicar po 2490.

$\Rightarrow 33\underbrace{(-17430)}_{x} + 29\underbrace{(19920)}_{y} = 1$

Figura 31. Definición de ecuaciones diofánticas
Fuente: Cuaderno E3



la Solución general es.

$k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Variable artificial

$x = x_0 + k\frac{a}{d}$

$y = y_0 - k\left(\frac{b}{d}\right)$

Para soluciones positivas

$x_0 = -17430 + 29k \rightarrow x \geq 0$

$y_0 = 19920 - 33k \rightarrow y \geq 0$

$-17430 + 29k \geq 0$ (1)

$19920 - 33k \geq 0$ (2)

En 1 $\rightarrow$ $29k \geq 17430$

$k \geq \frac{17430}{29}$

$k \geq 601,3 \rightarrow$ redondeado

$k \geq 602$ aprox.

En 2 $\rightarrow$ $33k \leq 19920$

$k \leq \frac{19920}{33}$

$k \leq 603,63$

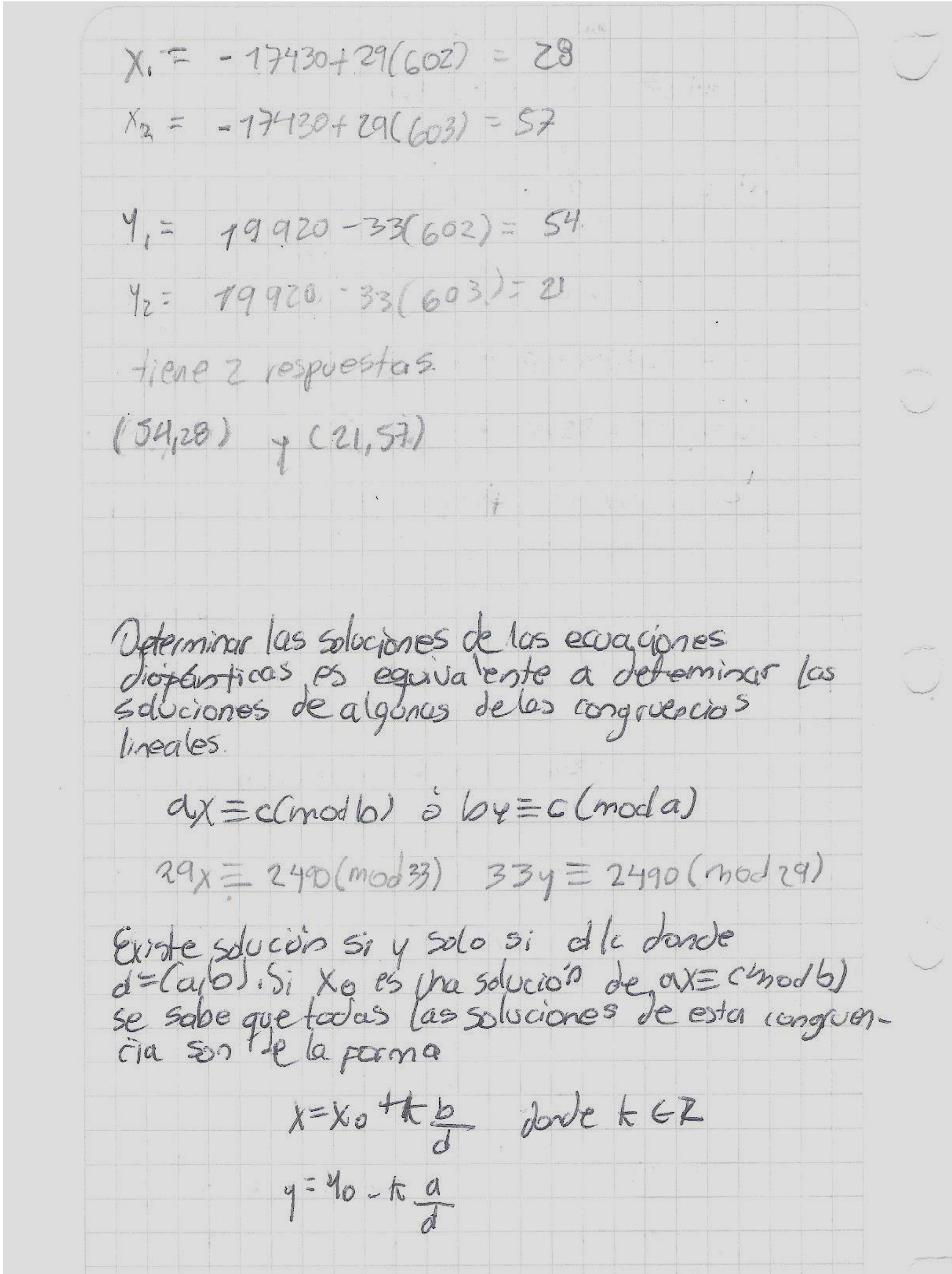
$602 \leq k \leq 603$

$\downarrow$

$k = 602$ ó $k = 603$

Se reemplaza k en 1 y 2

Figura 32.Soluciones positivas de la ecuación diofantica
Fuente: Cuaderno E3



$x_1 = -17430 + 29(602) = 28$

$x_2 = -17430 + 29(603) = 57$

$y_1 = 19920 - 33(602) = 54$

$y_2 = 19920 - 33(603) = 21$

tiene 2 respuestas.

$(54,28)$ y $(21,57)$

Determinar las soluciones de las ecuaciones diofánticas es equivalente a determinar las soluciones de algunas de las congruencias lineales.

$$ax \equiv c \pmod{b} \text{ ó } by \equiv c \pmod{a}$$

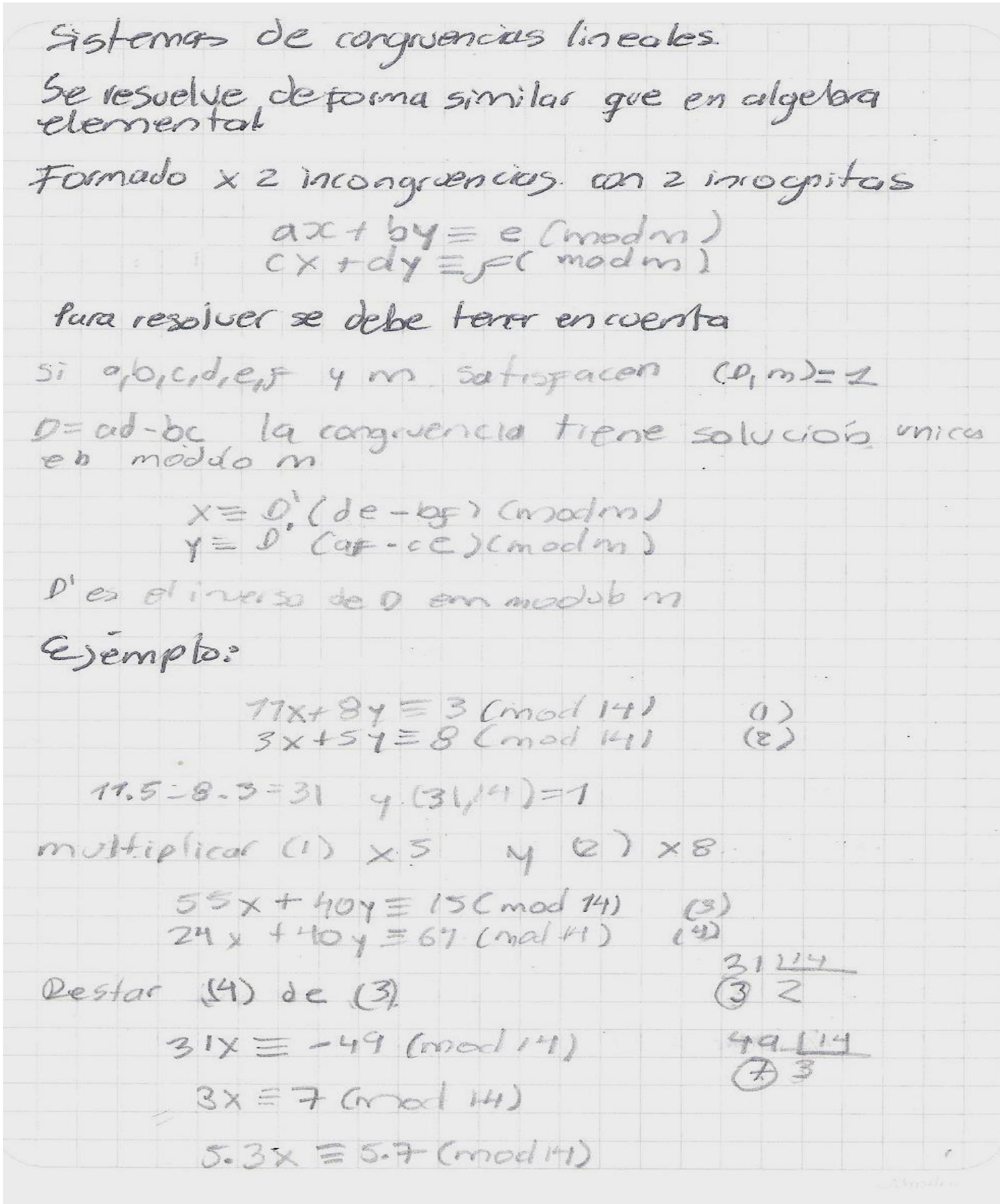
$$29x \equiv 2490 \pmod{33} \quad 33y \equiv 2490 \pmod{29}$$

Existe solución si y solo si $d|c$ donde $d=(a,b)$. Si x_0 es una solución de $ax \equiv c \pmod{b}$ se sabe que todas las soluciones de esta congruencia son de la forma

$$x = x_0 + k\frac{b}{d} \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - k\frac{a}{d}$$

Figura 33.Resolucion de ecuaciones diofánticas por congruencias
Fuente: Cuaderno E3



Sistemas de congruencias lineales.

Se resuelve de forma similar que en algebra elemental

Formado x 2 incongruencias con 2 incognitas

$$ax + by \equiv e \pmod{m}$$
$$cx + dy \equiv f \pmod{m}$$

Para resolver se debe tener en cuenta

si a,b,c,d,e,f y m satisfacen $(D, m) = 1$

$D = ad - bc$ la congruencia tiene solución unica en moddo m

$$x \equiv D'(de - bf) \pmod{m}$$
$$y \equiv D'(af - ce) \pmod{m}$$

D' es el inverso de D en modulo m

Ejemplo:

$$11x + 8y \equiv 3 \pmod{14} \quad (1)$$
$$3x + 5y \equiv 8 \pmod{14} \quad (2)$$

$11.5 - 8.3 = 31$ y $(31, 14) = 1$

multiplicar (1) x 5 y (2) x 8

$$55x + 40y \equiv 15 \pmod{14} \quad (3)$$
$$24x + 40y \equiv 64 \pmod{14} \quad (4)$$

$31 \div 14$: 2, residuo 3

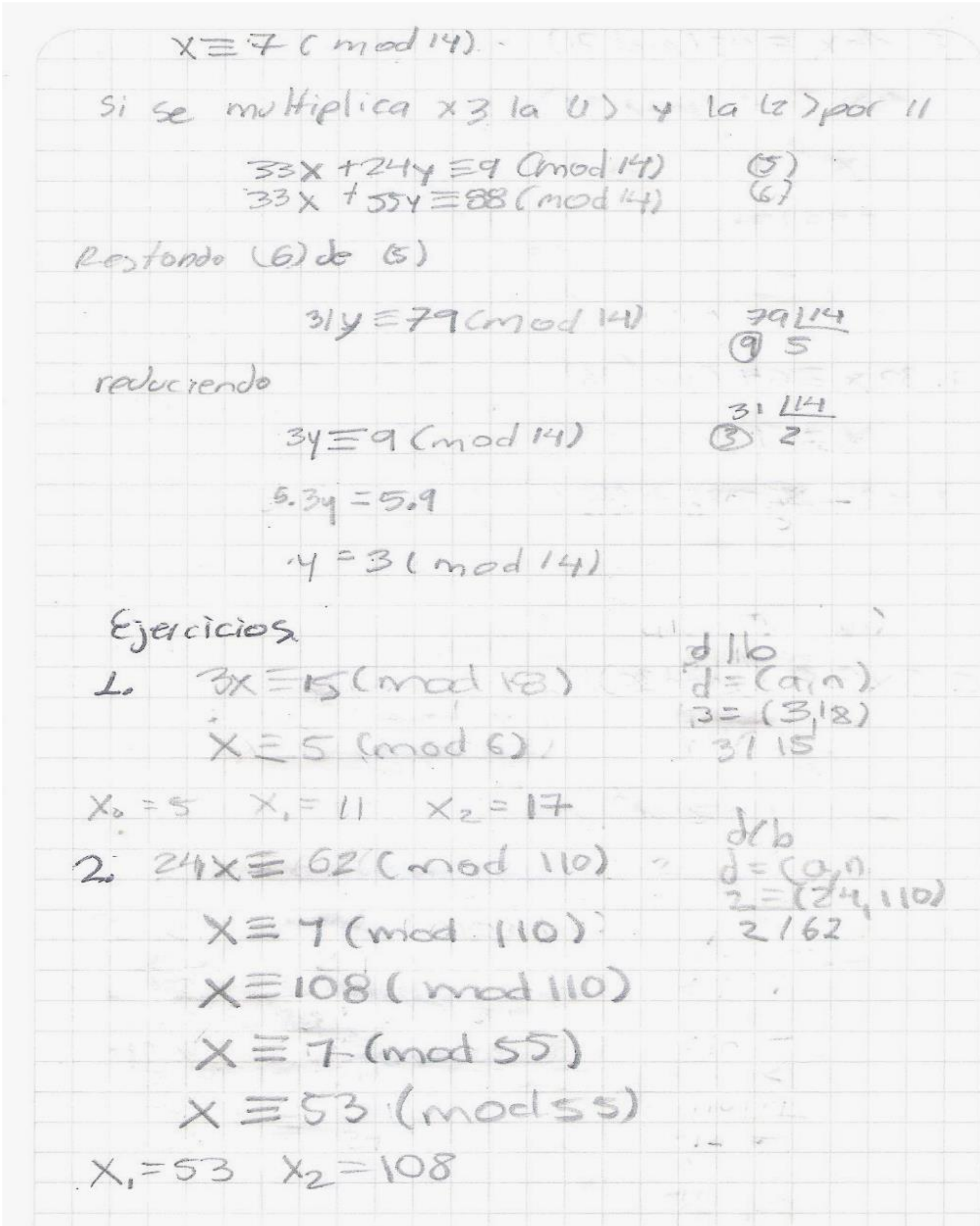
Restar (4) de (3)

$$31x \equiv -49 \pmod{14}$$

$49 \div 14$: 3, residuo 7

$$3x \equiv 7 \pmod{14}$$
$$5 \cdot 3x \equiv 5 \cdot 7 \pmod{14}$$

*Figura 34.*Congruencias lineales
Fuente: Cuaderno E3



$x \equiv 7 \pmod{14}$.

Si se multiplica x3 la (1) y la (2) por 11

$33x + 24y \equiv 9 \pmod{14}$ (5)

$33x + 55y \equiv 88 \pmod{14}$ (6)

Restando (6) de (5)

$31y \equiv 79 \pmod{14}$ $\quad 79 \,\underline{|14}$ $\quad 9 \quad 5$

reduciendo

$3y \equiv 9 \pmod{14}$ $\quad 31 \,\underline{|14}$ $\quad 3 \quad 2$

$5.3y = 5.9$

$y = 3 \pmod{14}$

Ejercicios

1. $3x \equiv 15 \pmod{18}$ $\quad d \mid b$; $d = (a,n)$; $3 = (3,18)$; $3 \mid 15$

$x \equiv 5 \pmod{6}$

$x_0 = 5 \quad x_1 = 11 \quad x_2 = 17$

2. $24x \equiv 62 \pmod{110}$ $\quad d \mid b$; $d = (a,n)$; $2 = (24,110)$; $2 \mid 62$

$x \equiv 7 \pmod{110}$

$x \equiv 108 \pmod{110}$

$x \equiv 7 \pmod{55}$

$x \equiv 53 \pmod{55}$

$x_1 = 53 \quad x_2 = 108$

Figura 35. Ejercicios con congruencias

Fuente: Cuaderno E3

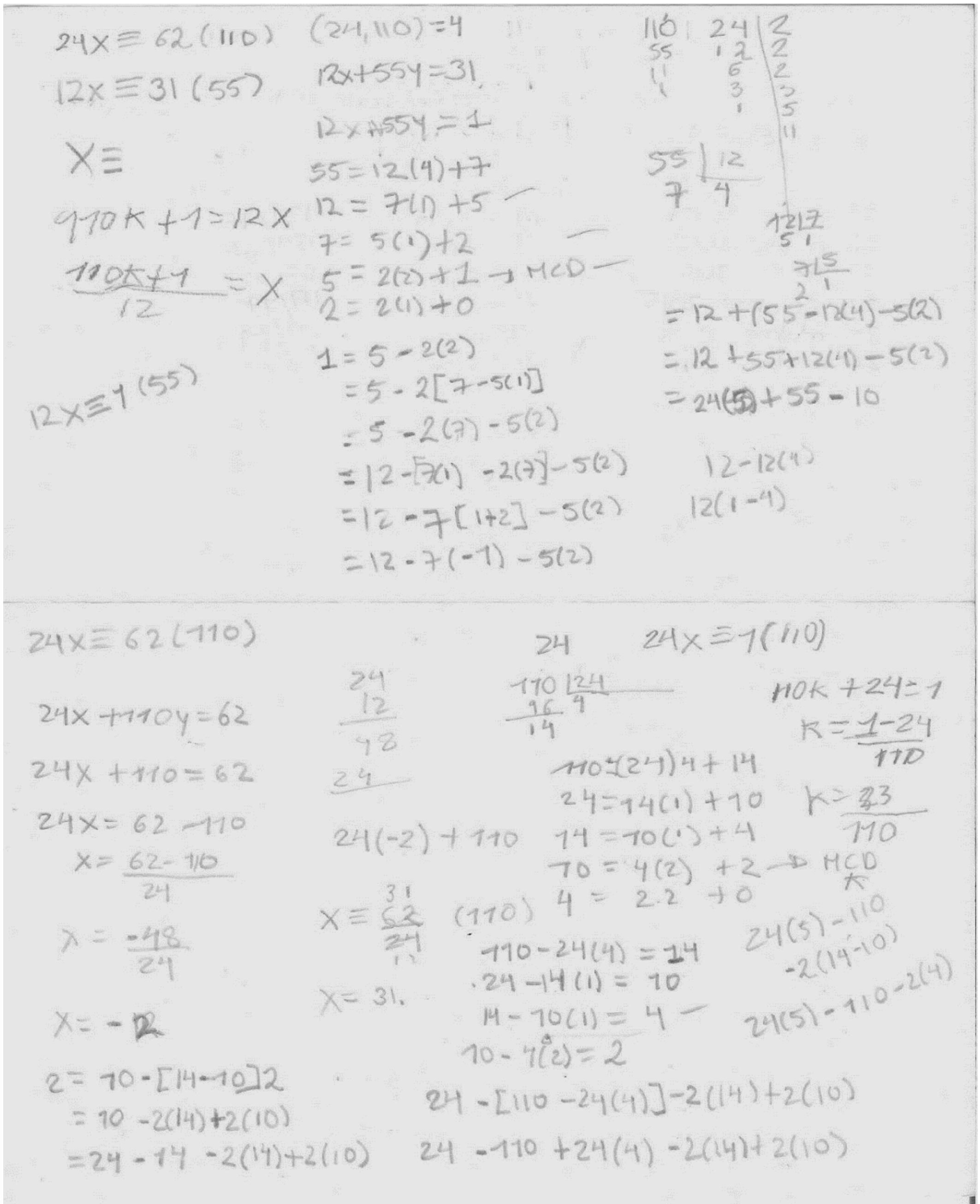


Figura 36. Evidencia de la solución de congruencias
Fuente: Cuaderno E3

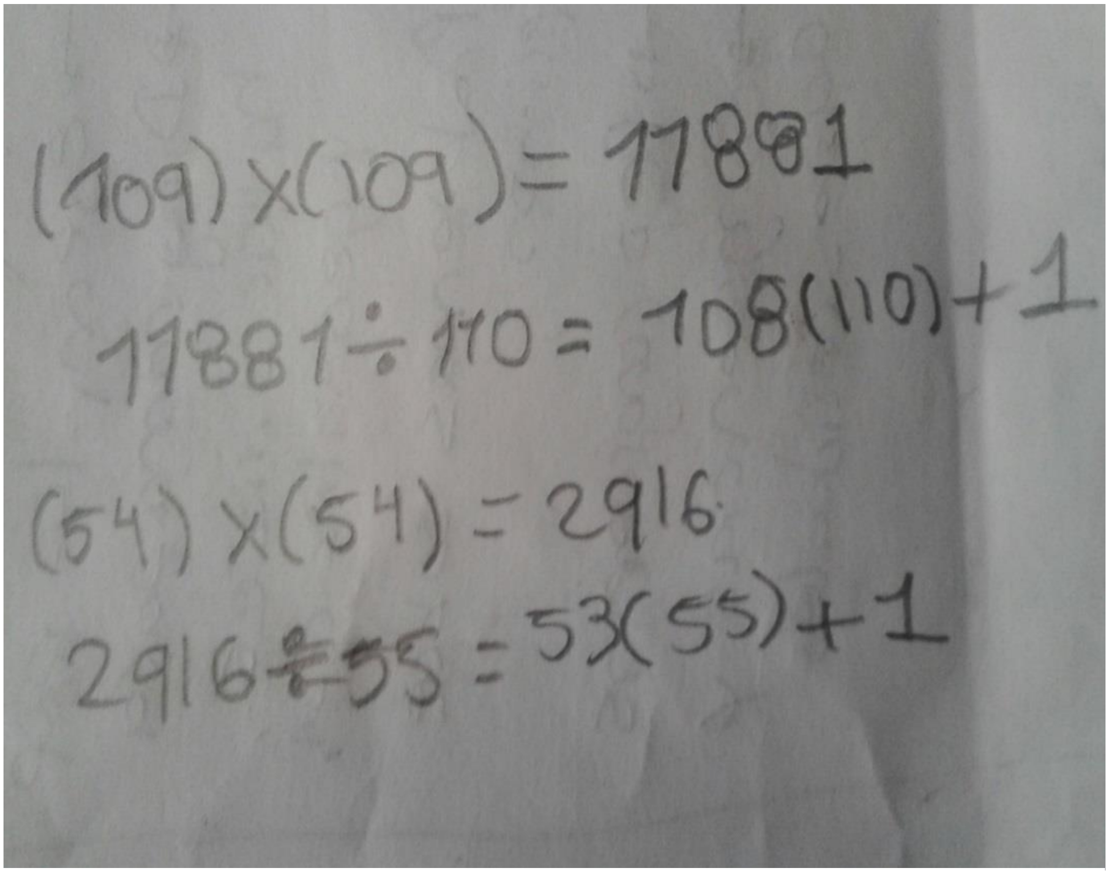
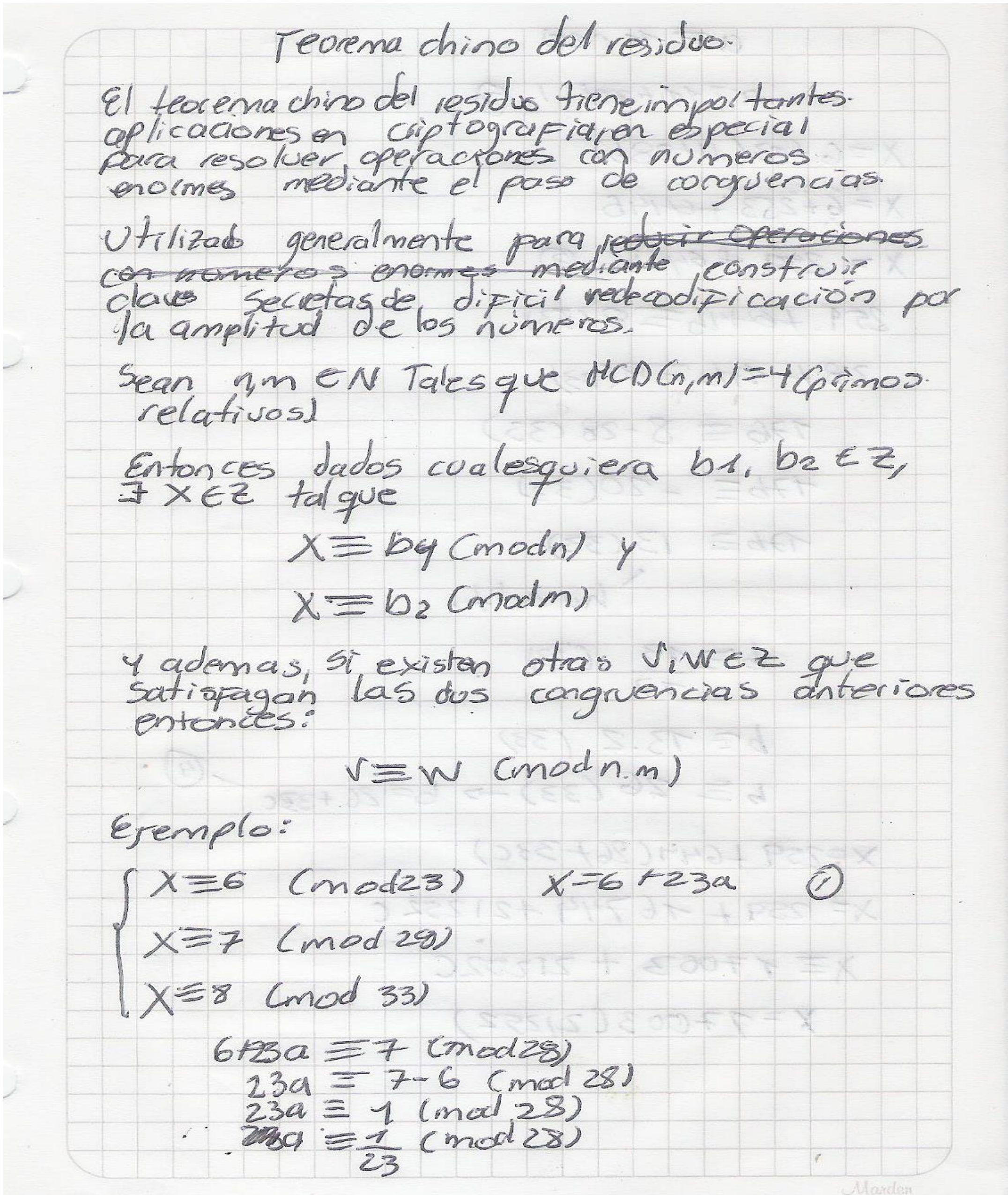


Figura 37.Estrategia para encontrar inversos en z_n
Fuente: Cuaderno E3



Teorema chino del residuo.

El teorema chino del residuo tiene importantes aplicaciones en criptografía, en especial para resolver operaciones con números enormes mediante el paso de congruencias.

Utilizado generalmente para ~~reducir operaciones con numeros enormes~~ mediante construir claves secretas de dificil redecodificación por la amplitud de los números.

Sean $n, m \in N$ Tales que $MCD(n,m)=1$ (primos relativos)

Entonces dados cualesquiera $b_1, b_2 \in Z$, $\exists\, x \in Z$ tal que

$$x \equiv b_1 \pmod{n} \text{ y}$$

$$x \equiv b_2 \pmod{m}$$

y ademas, si existen otros $v, w \in Z$ que satisfagan las dos congruencias anteriores entonces:

$$v \equiv w \pmod{n.m}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{23} & x = 6 + 23a \quad (1) \\ x \equiv 7 \pmod{28} & \\ x \equiv 8 \pmod{33} & \end{cases}$$

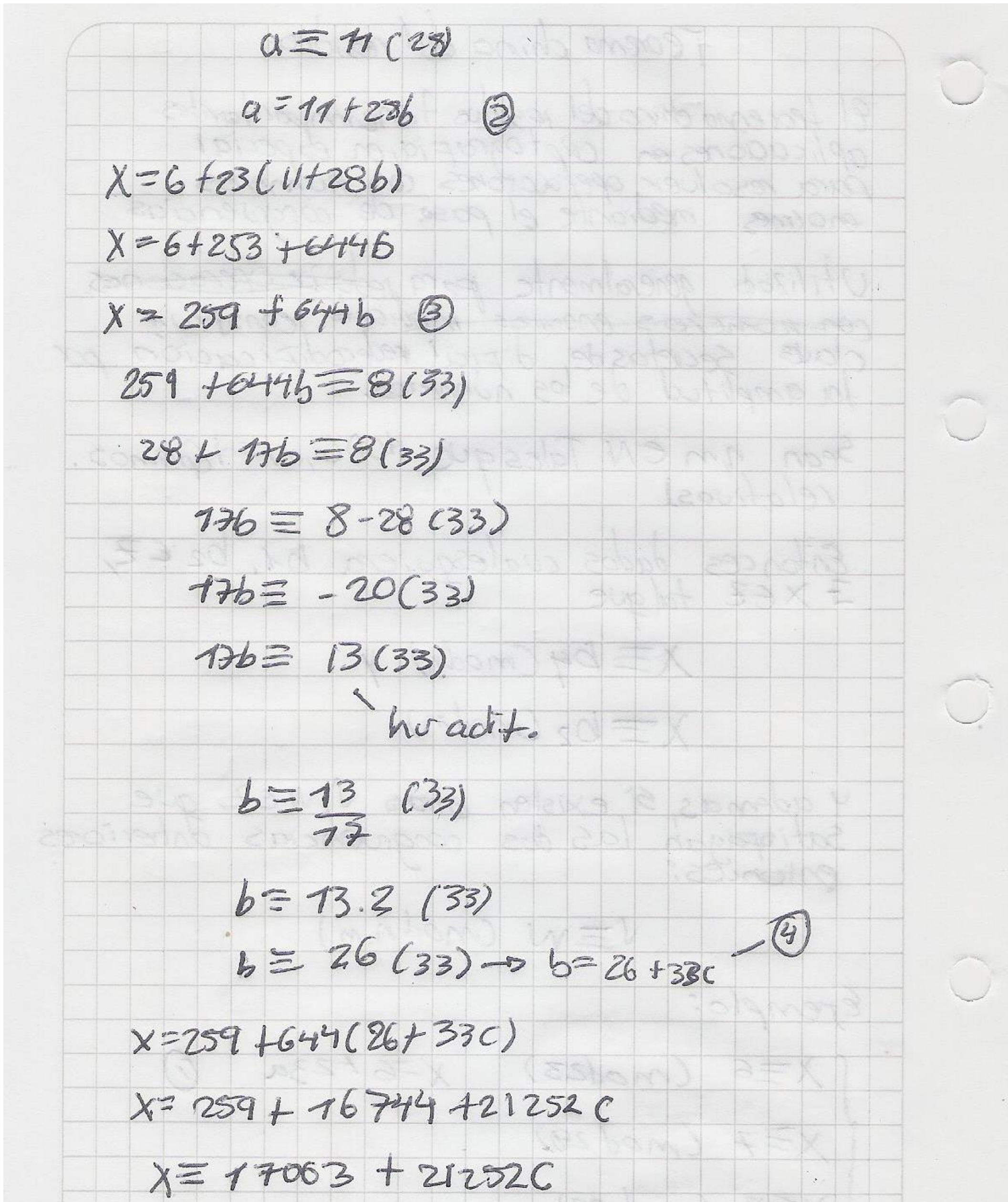
$$6 + 23a \equiv 7 \pmod{28}$$

$$23a \equiv 7 - 6 \pmod{28}$$

$$23a \equiv 1 \pmod{28}$$

$$\cancel{23}a \equiv \frac{1}{23} \pmod{28}$$

Figura 38. Teorema Chino del residuo
Fuente: Cuaderno E3



$a \equiv 11\ (28)$

$a = 11 + 28b$ (2)

$x = 6 + 23(11 + 28b)$

$x = 6 + 253 + 644b$

$x = 259 + 644b$ (3)

$259 + 644b \equiv 8\ (33)$

$28 + 17b \equiv 8\ (33)$

$17b \equiv 8 - 28\ (33)$

$17b \equiv -20\ (33)$

$17b \equiv 13\ (33)$

no adit.

$b \equiv \frac{13}{17}\ (33)$

$b \equiv 13 \cdot 2\ (33)$

$b \equiv 26\ (33) \rightarrow b = 26 + 33c$ (4)

$x = 259 + 644(26 + 33c)$

$x = 259 + 16744 + 21252c$

$x \equiv 17003 + 21252c$

$x \equiv 17003\ (21252)$

Figura 39. Esquema de solución Teorema Chino del resto
Fuente: Cuaderno E3

$x \equiv 6\ (23) \qquad 17003 - 16997 = 6$

$x \equiv 7\ (28) \qquad 17003 - 16996 = 7$

$x \equiv 8\ (33) \qquad 17003 - 16995 = 8$

otro metodo del teorema chino

$x \equiv 6\ (7) \Rightarrow 6 + 7a$

$x \equiv 2\ (6)$

$x \equiv 1\ (5)$

$a_1 = 6 \qquad m_1 = 7 \qquad M_1 = 30$

$a_2 = 2 \qquad m_2 = 6 \qquad M_2 = 35$

$a_3 = 1 \qquad m_3 = 5 \qquad M_3 = 42$

$M_n X \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m_n)$

$30x \equiv 1\ (7) \qquad 2x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7) \rightarrow$

$35x \equiv 1\ (6) \qquad 5x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6) \rightarrow$

$42x \equiv 1\ (5) \qquad 2x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5) \rightarrow$

$\downarrow$

$\rightarrow 2 \cdot 4x \equiv 1 \cdot 4\ (7) \qquad b_1 = 4$

$x \equiv 4\ (7)$

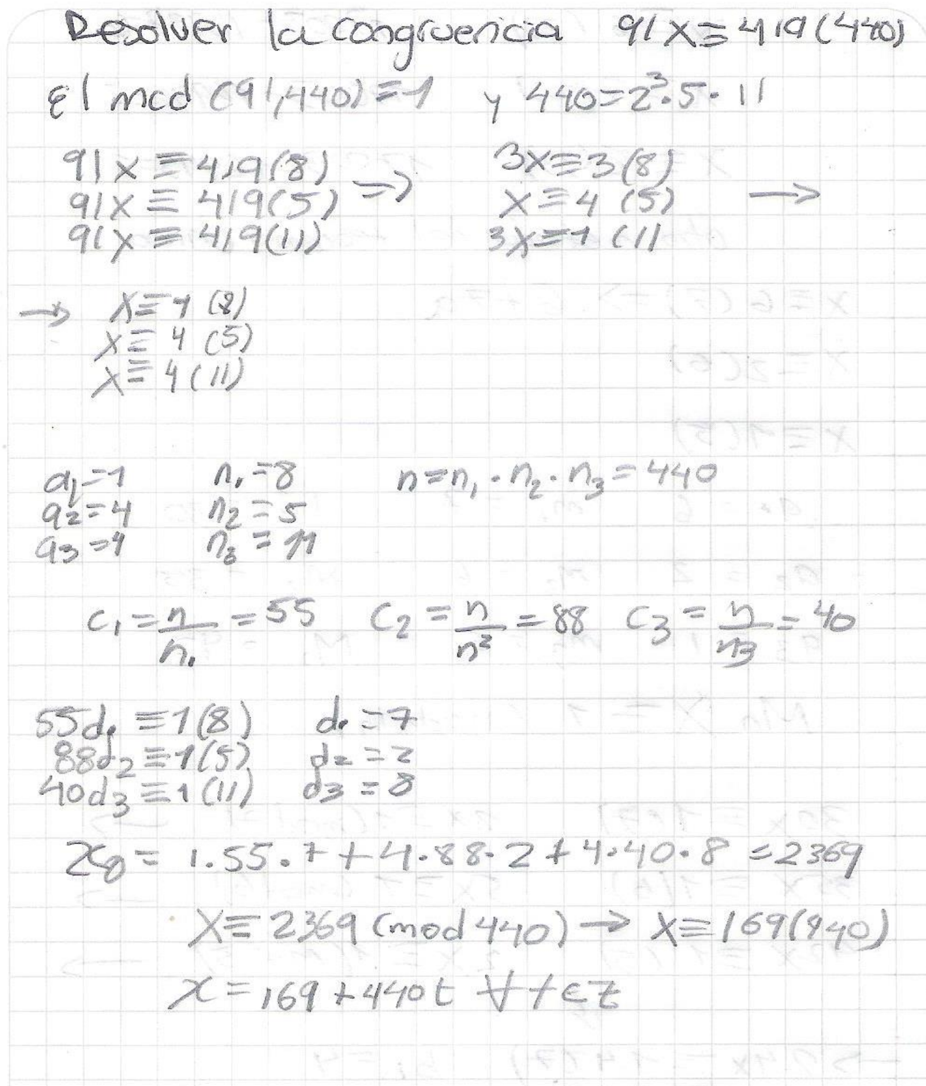
$\rightarrow 5 \cdot 5x \equiv 1 \cdot 5\ (\mathrm{mod}\ 6) \qquad b_2 = 5$

$x \equiv 5\ (6)$

$\rightarrow 3 \cdot 2x \equiv 1 \cdot 3\ (5) \qquad b_3 = 3$

$x \equiv 3\ (5)$

Figura 40. Planteamiento de ecuaciones de congruencias lineales
Fuente: Cuaderno E3



Resolver la congruencia $91x \equiv 419(440)$

el mcd $(91,440)=1$ y $440=2^3\cdot5\cdot11$

$91x\equiv419(8)$, $91x\equiv419(5)$, $91x\equiv419(11)$ $\Rightarrow$ $3x\equiv3(8)$, $x\equiv4(5)$, $3x\equiv1(11)$ $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ $x\equiv1(8)$, $x\equiv4(5)$, $x\equiv4(11)$

$a_1=1$ $\quad n_1=8$ $\quad n=n_1\cdot n_2\cdot n_3=440$

$a_2=4$ $\quad n_2=5$

$a_3=4$ $\quad n_3=11$

$c_1=\frac{n}{n_1}=55$ $\quad c_2=\frac{n}{n^2}=88$ $\quad c_3=\frac{n}{n_3}=40$

$55d_1\equiv1(8)$ $\quad d_1=7$

$88d_2\equiv1(5)$ $\quad d_2=2$

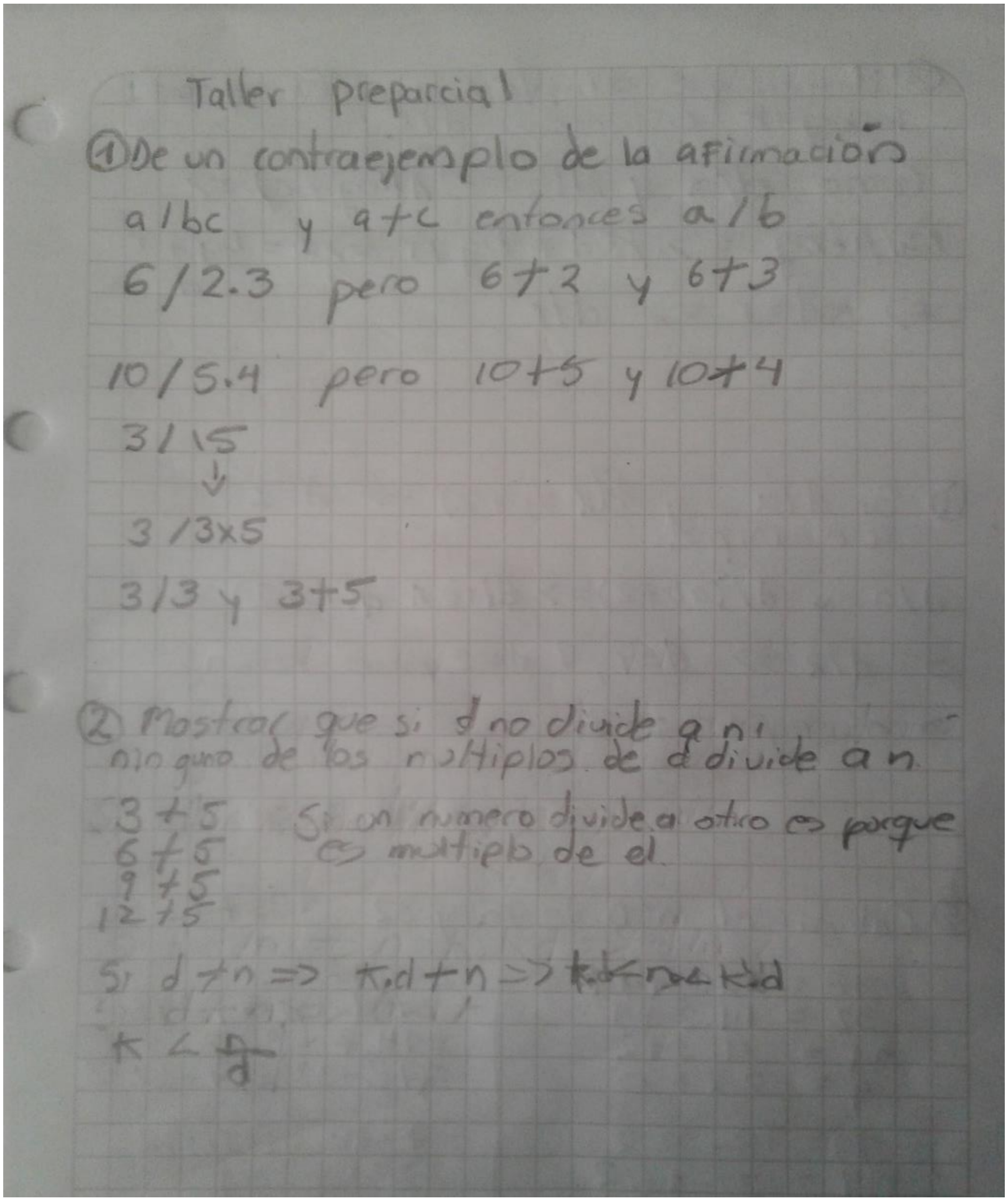
$40d_3\equiv1(11)$ $\quad d_3=8$

$x_0=1\cdot55\cdot7+4\cdot88\cdot2+4\cdot40\cdot8=2369$

$x\equiv2369\ (\mathrm{mod}\ 440)\rightarrow x\equiv169(440)$

$x=169+440t\ \ \forall t\in\mathbb{Z}$

Figura 41. Ejercicio de aplicación del Teorema Chino del resto
Fuente: Cuaderno E3



Taller preparcial

① De un contraejemplo de la afirmación

a / bc y $a \nmid c$ entonces a / b

$6 / 2.3$ pero $6 \nmid 2$ y $6 \nmid 3$

$10 / 5.4$ pero $10 \nmid 5$ y $10 \nmid 4$

$3 / 15$

$\downarrow$

$3 / 3 \times 5$

$3 / 3$ y $3 \nmid 5$

② Mostrar que si d no divide a n, ninguno de los multiplos de d divide a n

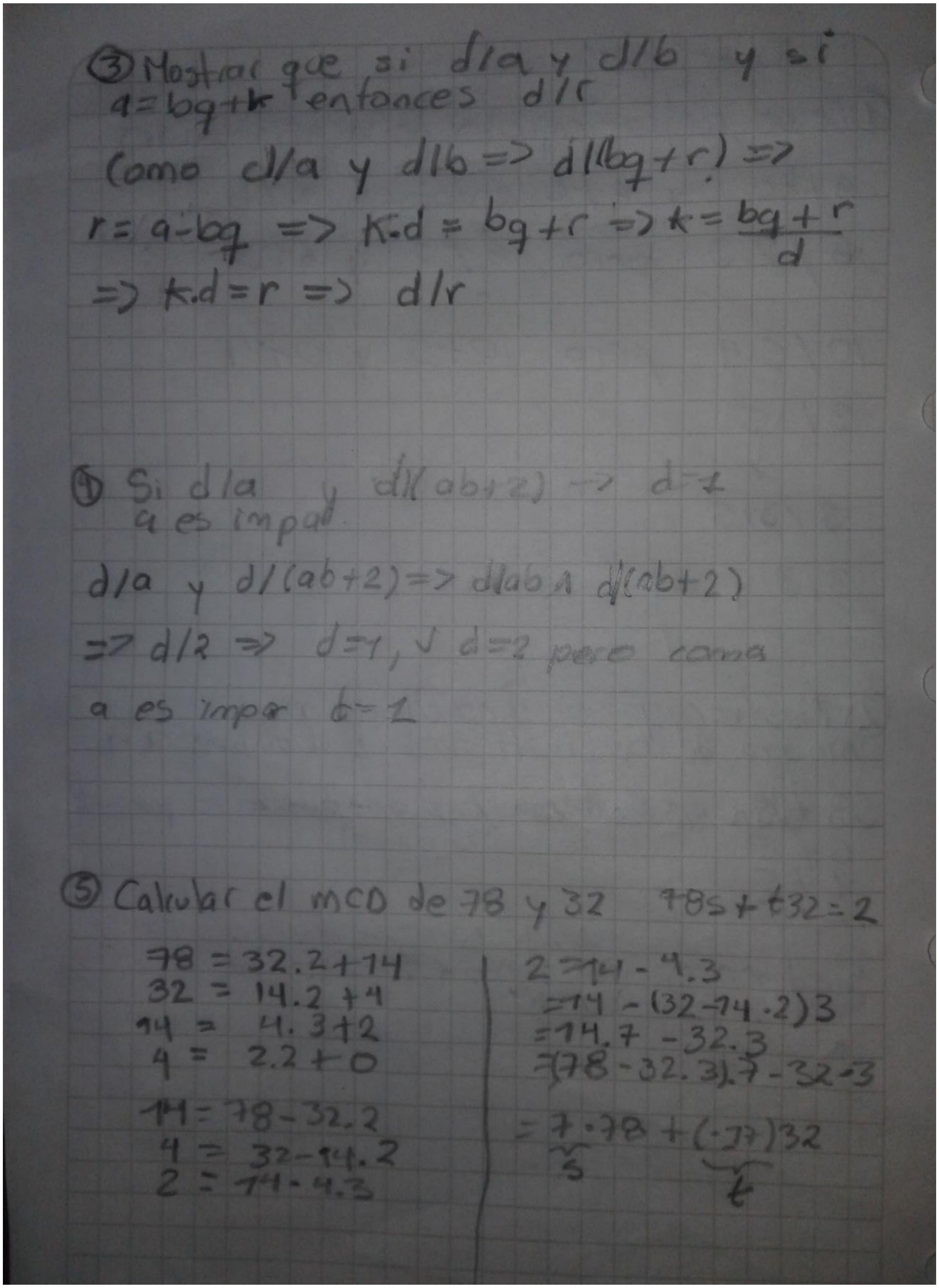
$3 \nmid 5$
$6 \nmid 5$
$9 \nmid 5$
$12 \nmid 5$

Si un numero divide a otro es porque es multiplo de el

Si $d \nmid n \Rightarrow k.d \nmid n \Rightarrow$ ~~k.d<~~ $n < k.d$

$k < \frac{n}{d}$

Figura 42. Taller parte I: demostración y contraejemplos
Fuente: Cuaderno E3


③ Mostrar que si d/a y d/b y si $a=bq+r$ entonces d/r

Como d/a y $d/b \Rightarrow d/(bq+r) \Rightarrow$

$r=a-bq \Rightarrow k.d = bq+r \Rightarrow k=\frac{bq+r}{d}$

$\Rightarrow k.d=r \Rightarrow d/r$

④ Si d/a y $d/(ab+2) \to d=1$
a es impar

d/a y $d/(ab+2) \Rightarrow d/ab \wedge d/(ab+2)$

$\Rightarrow d/2 \Rightarrow d=1, \vee\ d=2$ pero como

a es impar $d=1$

⑤ Calcular el MCD de 78 y 32 $78s+t32=2$

$78 = 32.2+14$
$32 = 14.2+4$
$14 = 4.3+2$
$4 = 2.2+0$

$14 = 78-32.2$
$4 = 32-14.2$
$2 = 14-4.3$

$2 = 14-4.3$
$= 14-(32-14.2)3$
$= 14.7-32.3$
$= (78-32.2).7-32.3$

$= \underbrace{7}_{s}.78+\underbrace{(-17)}_{t}32$

Figura 43. Taller parte II: solución grafica para ecuación lineal
Fuente: Cuaderno E3

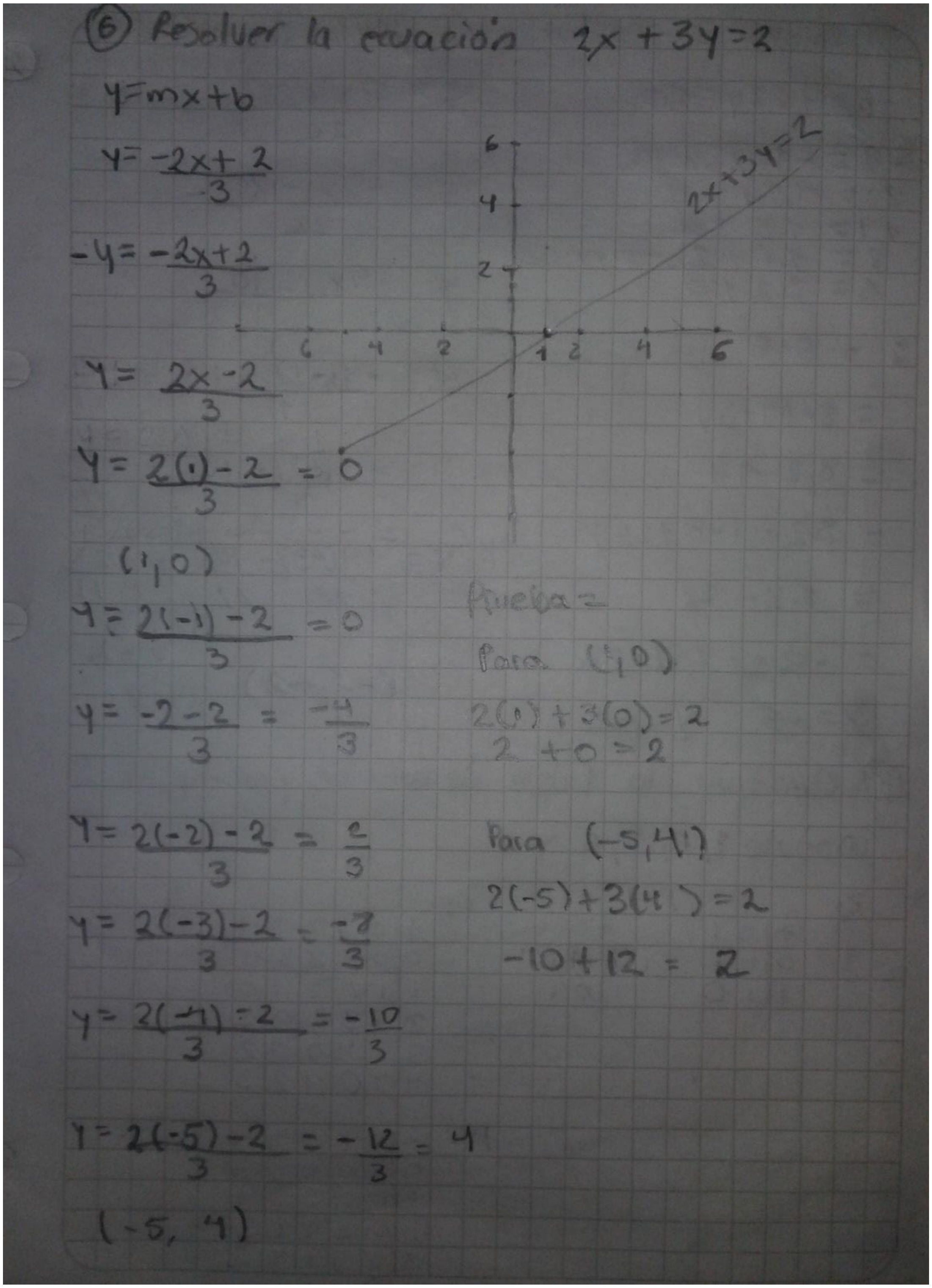


Figura 44. Taller parte III
Fuente: Cuaderno E3

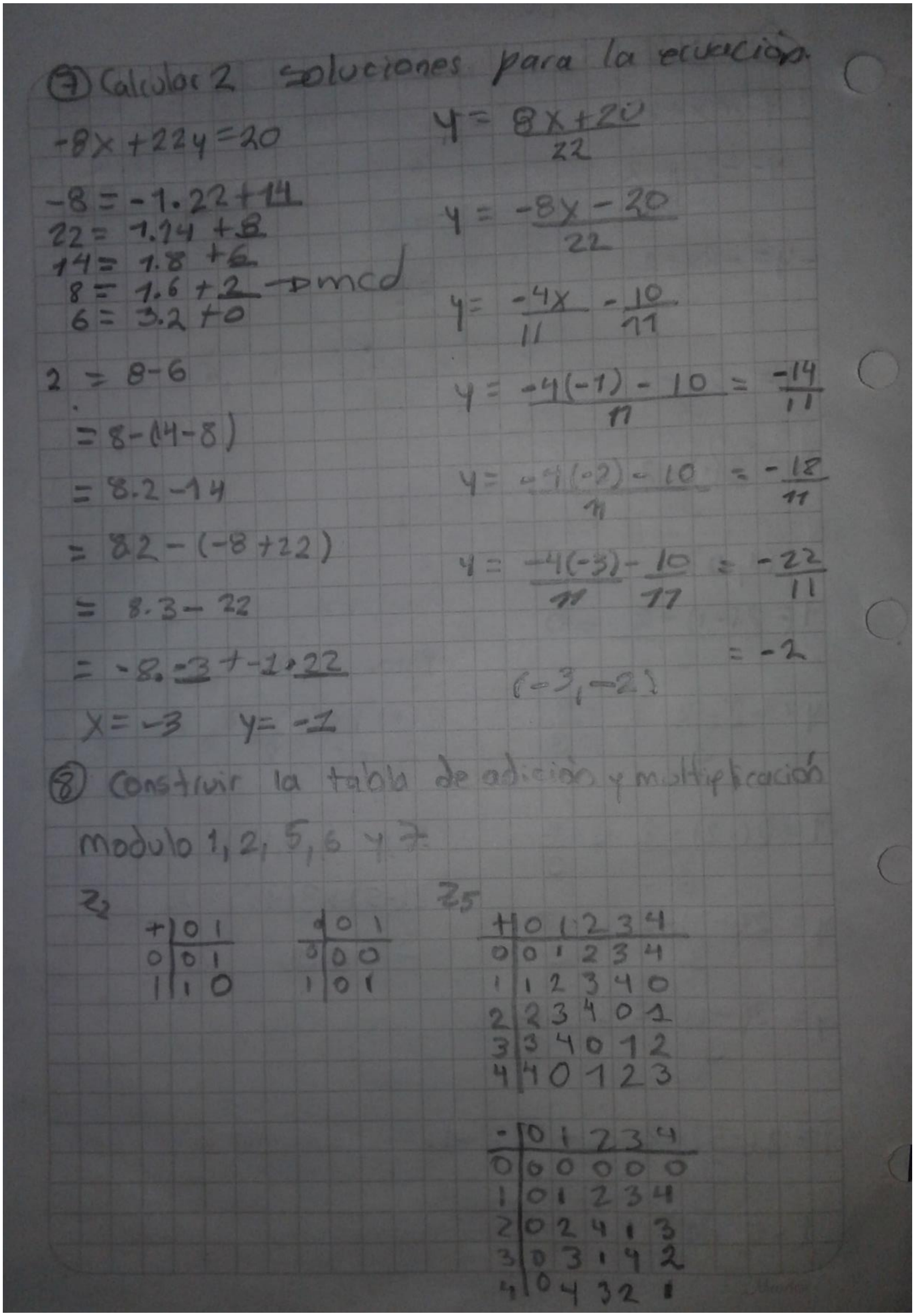
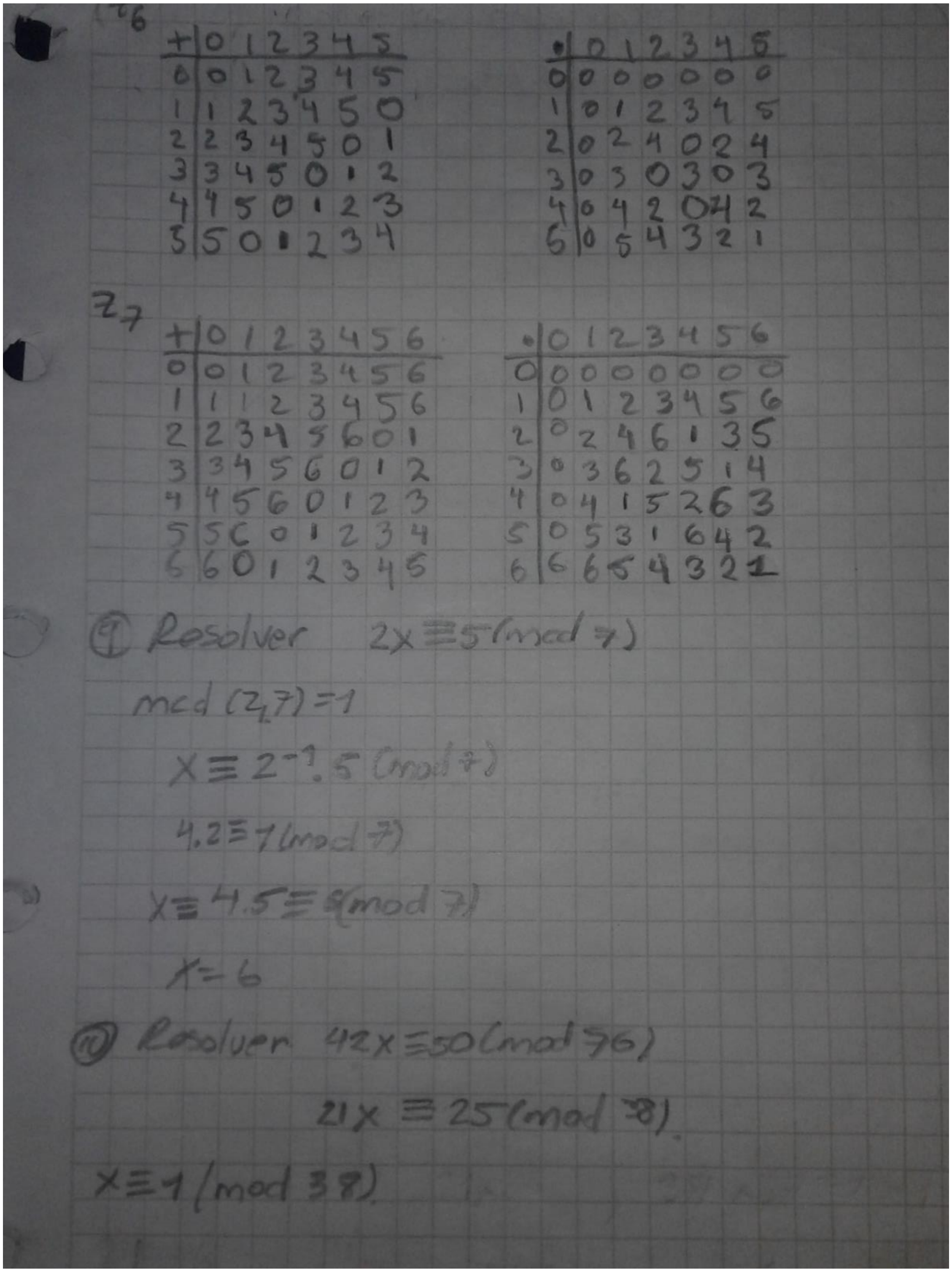


Figura 45. Taller parte III: solución de ecuaciones y tablas aritméticas.
Fuente: Cuaderno E3



$\mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	6	6	5	4	3	2	1

9. Resolver $2x \equiv 5 \pmod 7$

$mcd(2,7) = 1$

$x \equiv 2^{-1} \cdot 5 \pmod 7$

$4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 7$

$x \equiv 4 \cdot 5 \equiv 6 \pmod 7$

$x = 6$

10. Resolver $42x \equiv 50 \pmod{76}$

$21x \equiv 25 \pmod{38}$

$x \equiv 1 \pmod{38}$

Figura 46. Taller parte IV: solución congruencias
Fuente: Cuaderno E3

4.4. Caracterización de los estudiantes

Los casos estudiados corresponden al perfil de EPP con capacidad para regularse tanto en el desarrollo de sus esquemas de conocimiento, así como de reflexionar sobre sus prácticas educativas tanto en el contexto institucional – en los colegios distritales que se disponen para las prácticas-como en el laboral que le permitan mejorar la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por otro lado, en el aspecto laboral los participantes no tienen contratos y afirmaron tener la disponibilidad de tiempo completo para asistir a las clases y estudiar de forma individual. Independientemente de las metodologías que se usen en la LEBEM, los estudiantes deben empezar a usar el "pensamiento" alrededor de la enseñanza y los contenidos matemáticos, en donde lo primordial es pensar siempre en los OM que se desean construir en las aulas sin desprenderse del todo de las teorías ya construidas en el campo disciplinar.

En ese orden de ideas en el contexto universitario los hábitos y TE deben estar establecidas desde semestres anteriores, tener autonomía y pensamiento reflexivo sobre su propio desempeño académico y las habilidades que requieren para su formación. El uso controlado e inteligente de recursos facilita o media la construcción del conocimiento de los OM, pero por sí solos no significan nada sin el pensamiento humano porque lo que se va es a construir un conocimiento. Los tres casos estudiados son muy diferentes respecto al uso y aprovechamiento de los recursos porque, aunque no se pudo predecir sobre sus conductas a lo largo del periodo académico si se puede determinar cuáles son los problemas de cada uno en el momento de estudiar fuera del aula.

Para el primer caso el 60% de las sesiones usó textos en varios formatos, el uso de recursos como los VT representó el 20% del tiempo total de las sesiones. Esto indica que no trabajo en su propio razonamiento sobre los problemas y tampoco construyó sus propias generalizaciones. Siempre se vio concentrado en las sesiones de consulta y de proceso de resolución además que solo el 10% de las 5 sesiones se dedicó a escribir solo en el cuaderno sin usar ningún recurso.

Para las demostraciones usó varios ejemplos concretos para comprender la proposición y también los contraejemplos. Esto indica que él es un estudiante recursivo, pero no creativo pues, aunque sus registros sean consistentes y presente en algunas ocasiones las características de la RP no se lograron evidenciar sus generalizaciones, pero busca imitar los tratamientos en las representaciones que presentan otras personas. Como conclusión este caso es el del estudiante que aprende por repetición y no usa sus propios razonamientos ni construye sus representaciones.

En el caso 2 la estudiante usó textos constantemente cuando identificó el concepto matemático que sería estudiado; sin embargo, aunque se apoyó en estos recursos, no logró generalizar sobre el/los problemas(s) aunque en algunas ocasiones probó con varios casos y escribió sus pensamientos sobre los resultados. En el caso del problema de calcular la cantidad de divisores de un número usó un esquema parecido al primer caso, pero a diferencia que si aparece escrito textualmente la función Tao que es la generalización. Para resolver ejercicios de aplicación entonces se evidenció el dominio de símbolos y el uso de propiedades de la suma y multiplicación de números enteros, es decir aplica la generalidad encontrada en el texto TNP. La técnica usada fue la de imitación y reflexión pues, aunque repite los tratamientos hechos por otros trata de entender por qué y cuál es el orden.

El caso del tercer estudiante indica que no es un estudiante regulado de su aprendizaje, es decir de acuerdo con los resultados de la observación general en todas las sesiones no hubo un trabajo directo con algún tipo de problema, lo que no se podría inferir las técnicas que usa porque solo realizó la transcripción de textos y del cuaderno de otro compañero. Aunque en la última sesión presentó algunos ejemplos y ejercicios no induce que la estudiante cree sus propias técnicas para trabajar con los recursos, solo usó el Teorema Chino del Residuo para resolver problemas que se solucionan con este método; sin embargo, se ve un dominio de los símbolos y el planteamiento de las ecuaciones, pero por repetición. No hay formación, transformación ni conversión de representaciones puesto que no se observó en los registros un problema de los que se plantearon en clase solamente definiciones y la información de registros presentes en los textos como por ejemplo: las tablas de aritmética modular, las definiciones de congruencia y el Teorema Chino del Resto.

Teniendo en cuenta todas las observaciones y los registros no se evidenció la formación de representaciones a partir de la RP. En los registros prevaleció las representaciones de lenguaje alfanumérico, esto es un indicador de la falta de continuidad en la búsqueda de solución, aunque en dos casos se usaron procesos como búsqueda de regularidades, definiciones, demostraciones, ejemplos y contraejemplos; no se encontró una generalización. En los casos E1 y E2 se realizaron transformaciones y conversiones de las representaciones presentadas en los textos, los tratamientos que realizaron a estos registros fueron los mismos que se hicieron en el texto. El caso del E3 no usó la metodología RP y solo realizo transcripción de la información, luego se plantea la premisa que si el estudiante no usa TE no puede existir un PI.

4.5. Relación de tiempo vs sesión

En la tabla 9 se presentó una relación entre los lugares, tiempos y textos utilizados por cada estudiante. Esta información se dedujo de las fichas de observación que se realizaron para cada estudiante con el fin de especificar cuáles fueron los textos usados en todas las sesiones de estudio, así como el total de tiempo empleado por todas las 5 sesiones y poder concluir una relación de tiempo empleado por sesión para cada estudiante, así como determinar quien tuvo mayor dedicación al estudio. De acuerdo con esto se observa que el caso E2 dedico más tiempo y su promedio fue de 120 minutos por sesión, el caso E3 tuvo un promedio de 115 minutos por sesión y el caso E1 tuvo un promedio de 83 minutos por sesión. En el caso E3 que empleó el mayor tiempo se debió a que se tuvieron problemas con los conceptos y las demostraciones porque no se tenía dominio del tema y fue necesario la revisión de los apuntes anteriores para guiarse en los procedimientos además debido a las temáticas trabajadas y teniendo en cuenta las habilidades de la participante se hizo más extenso el trabajo. En el caso 1 como fueron los primeros días de inicios de clase en la asignatura PAIII las temáticas no fueron tan extensas y no necesitaban mucha información, en cambio en el caso E2 se tuvo un intermedio o transición entre la divisibilidad y las congruencias mientras que en el caso E3 se hizo un trabajo más complejo con las ecuaciones diofanticas y las congruencias; sin embargo, no es significativo porque la estudiante no uso sus propios razonamientos y se dedicó a la copia textual. Es claro que los procedimientos en casos de sistemas de congruencias con el Teorema Chino del Residuo son más extensos.

Tabla 9.Relación de tiempo y sesión

	E1	E2	E3
Lugar	Laboratorio Biblioteca	Biblioteca Estudio personal	Biblioteca Estudio personal
Tiempo total (minutos)	418 (6 h+ 48m)	602 (10h+2m)	578 (9h+38m)
Textos utilizados	Aritmética Baldor Teoría de números para principiantes	Teoría de números para principiantes Matemática discreta	Teoría de números para principiantes

Nota: Datos obtenidos de las fichas de observación

4.6. Reflexión didáctica

De acuerdo con los resultados se puede verificar que los participantes no crearon sus propias representaciones y solo imitaron el tratamiento que hicieron otras personas; sin embargo, en los procesos de resolución cada uno creo sus representaciones y su trabajo fue más representativo. Así mismo en los procesos de matematización no hubo evidencia sobre la construcción de la generalización, salvo el caso del E2 que en las últimas sesiones probó varios casos para encontrar una generalización. Solamente en el caso E1 se pudo observar el proceso de validación de varias proposiciones de divisibilidad, el estudiante del primer caso utilizó el lenguaje alfanumérico y los números ordinales para secuenciar las líneas de demostración. Lo anterior supone que a pesar de no registrar todos sus razonamientos en el proceso de resolución si se puede ver el esfuerzo por desarrollar su habilidad en las pruebas (demostraciones) haciendo uso de los ejemplos y contraejemplos, planteamiento y resolución de expresiones algebraicas.

Respecto a la pertinencia del uso de TE en la resolución de problemas se puede vislumbrar la importancia en la adquisición conceptual y los procedimientos. Como docente es muy importante tener en cuenta-en algunos casos- que los procesos cognitivos que se requieren para aprender a conocer los OM son diferentes entre los estudiantes; sin embargo, aunque es muy difícil saber que están pensando cuando se están enfrentando a un problema e identificar las dificultades de cada uno, si se puede apoyar los procesos mentales con actividades como: tutorías, organización de horarios, uso de audiovisuales, etc. Y todo aquello que les permita reflexionar sobre la importancia del uso de la matemática. Con el fin de que los estudiantes empiecen a pensar matemáticamente y que valoren sus propios procesos y razonamientos.

Conclusiones

El uso de técnicas mostró ser importante en el estudio de la teoría de números y específicamente en la divisibilidad ya que por los registros de los tres estudiantes se pudo ver cómo trabaja cada uno las representaciones alfanuméricas. En el syllabus del curso de PAIII se encuentra la bibliografía que se trabajará, entonces se hace más fácil el acceso a recursos, por ejemplo: libros digitales y/o videos para complementar la construcción del conocimiento, además el uso de otras estrategias como se demostró en la investigación de Narváez (2011). Esto indica que en la metodología RP no está del todo aislada del uso de TE cuando se refiere a la construcción del conocimiento, al contrario, pensar sobre un problema y usar varias representaciones y estrategias para llegar a su solución constituyen en conjunto "técnicas" que sirven de mediación entre el problema-solución. Entendiéndose estas técnicas como los tratamientos a las representaciones de las matemáticas (ya sean las creadas por los estudiantes o las construidas en la cultura) y en especial las que representan relaciones numéricas entre el conjunto de los números enteros.

Los textos usados por los estudiantes requirieron tratamientos de conversión respecto al uso de números como por ejemplo en la información que regularmente se presenta como lenguaje alfanumérico y las relaciones entre ellos, así los estudiantes usaron expresiones numéricas para entender las proposiciones. Las principales TE identificadas fueron las de repetición del tratamiento de representaciones y aplicarlas para solucionar un problema que requiera el uso del OM involucrado.

El PI es una constante en el estudio de los OM, pero como existen varios niveles de abstracción en matemáticas donde se requiere el uso de representaciones externas para representar los conceptos, entonces el aprendizaje por medio del método de RP es el más propicio para poner en juego el uso y tratamiento de las representaciones semióticas que refiere Duval (2004) y D'amore (2006). En este estudio se observó que no solo se deben crear las imágenes mentales de los OM sino también las relaciones lo que motiva más a los estudiantes a que representen con números eso que entienden del problema pues nunca estará aislado del OM que se quiere conocer.

Los registros de los cuadernos permitieron observar el tipo de tratamientos que hicieron los participantes durante las sesiones de estudio; es decir las conversiones y trasformaciones de las expresiones alfanuméricas que se encontraron en los textos y cuadernos personales. Así para la demostración de las propiedades de divisibilidad usaron ejemplos con números como una forma de comprender una relación numérica lo que indica la presencia de razonamiento deductivo (es decir de lo general a lo particular). Los ejercicios de aplicación consistieron en seguir un orden en las operaciones, es decir se usaron ejemplos de resolución como la guía para seguir el orden e identificar las variables. En los problemas trabajados sobre números primos solo se aplicó la generalización en un caso y se buscó regularidades, aunque nunca se llegó a la generalización desde la búsqueda de regularidades en las listas de los números primos menores a 120. Para los procedimientos rutinarios como el cálculo del MCD no se encontró una conversión de representaciones, solo se usó el Algoritmo de Euclides, para el cálculo de soluciones de las ecuaciones diofánticas el Algoritmo extendido de Euclides y se siguieron otros procedimientos similares para las congruencias y el Teorema Chino del Residuo. Las tablas para la aritmética modular sirvieron inicialmente para comprender la noción de modulo y clases residuales, de forma general se usó la generalización y la demostración.

El uso de internet fue la constante en los tres casos estudiados, esto no tuvo una influencia directa en los procesos de resolución ya que las fuentes de información solo apoyaron la comprensión de procedimientos y no la construcción de los conceptos, esto debido a que el aprendizaje es personal. Los video tutoriales no aportaron novedad en los conocimientos de los estudiantes pues las aplicaciones del Algoritmo de Euclides a varias situaciones ya se habían trabajado en las clases orientadas por el docente, lo que indica que la consulta de textos es solo informativa y en algunos casos la forma rápida de acceder al conocimiento.

Bibliografía

Arguelles, D. C., & Garcia, N. (2010). Metodos de estudio. En D. C. Arguelles, & G. N.N, *Estrategias para promover procesos de aprendizaje autonomo* (pág. 89). Bogota: Alfa-Omega.

Benavides, E. (2011). *Técnicas de estudio en la matemática orientadas a fortalecer el rendimiento académico en el noveno año de básica del COMIL N° 10 CALDERÓN de la ciudad de Quito (Tesis de maestria).* Obtenido de http://repositorio.uta.edu.ec/jspui/handle/123456789/13115

Bruning, R. (2001). Cognicion. En R. Bruning, *Psicologia cognitiva e instruccion* (págs. 83-124). Madrid: Alianza.

Castejon, J. L., Gilar, R., & Miñano , P. (2010). Teorias cognitivas del procesamiento de la informacion. En J. L. Castejon, R. Gilar, & P. Miñano, *Psicologia de la educacion* (págs. 93-106). Alicante: Club Universitario.

Congreso de la Republica de Colombia. (1998). *Ley 115. Ley general de Educacion.* Santafe de Bogotá: Union.

D'amore, B. (2001). En B. D'amore, *Dificultades del aprendizaje de las matematicas* (págs. 29-47). Madrid: Ministerio de Educacion,Cultura y Deporte.

D'amore, B. (2006). Objetos, significados,representaciones semioticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica*, 177-195.

Duval, R. (2004). *Seimosis y pensamiento humano: registros semioticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Universidad del Valle- grupo de Educacion Matematica.

Freudenthal, H., Puig, L., & Centro de Estudios Avanzados del I.P.N. (2001). En *Fenomenologia didactica de las estructuras matemáticas.* Mexico: Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del I.P.N, Departamento de Matematica Educativa.

Gagné, R. (1987). *Las condiciones del aprendizaje.* Mexico D.F: Interamericana.

Garavito, P. (2008). *Hábitos y técnicas de estudio relacionados con el rendimiento académico (tesis de maestria).* Obtenido de http://www.monografias.com/trabajos57/estudio-rendimiento-academico/estudio-rendimiento-academico.shtml

Garcia, D. (2011). Nacimiento y desarrollo de la epistemologia. En D. Garcia, *Fundamentos Epistemologicos de la investigacion y aspectos practicos* (págs. 65-82). Bogota: Universidad Libre de Colombia.

Hernandez, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Inicio del problema cualitativo. En C. Fernández-Collado, P. Baptista Lucio, & R. Hernandez Sampieri, *Metodologia de la investigacion* (págs. 523-557). Mexico D.F: Mc Graw Hill Interamericana.

Iriarte, A., & Sierra, I. (2011). *Estrategias Metacognitivas en la resolucion de problemas matematicos.* Monteria: Universidad de Sucre SUE (sistema de universidades del Caribe colombiano).

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las Matematicas.* Madrid: Morata.

Ministerio de Educacion Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matematicas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educacion Nacional. (2015). *Sistema para la Prevencion de Desercion en Instituciones de Educacion Superior (SPADIES).* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/sistemasdeinformacion/1735/articles-357549_recurso_3.pdf

Narvaez, D. M. (2011). Sobre la relacion entre estrategias utilizadas por estudiantes de matematicas en la resolucion de problemas asociados a la teoria de numeros y los procesos de matematizacion desarrolados en un ambiente de aprendizaje constructivista. En J. M. Vargas, A. Truscott de Mejia, & A. Mejia Delgadillo, *Educacion para el siglo XXI: aportes para el Centro de Investigacion y Formacion en Educacion (CIFE) 2007-2010* (págs. 139-182). Santa Fé de Bogotá: Uniandes.

Nuñez, J. C., Solano, P., Gonzales Pienda, J., & Rosario, P. (2006). El aprendizaje autorregulado como medio y meta de la educacion. *Papeles del Psicologo*, 139-146.

Ontaria, A. (1995). *Mapas conceptuales: una tecnica para aprender.* Madrid: Narcea.

Parra, C., & Sais, I. (1994). Aprender por medio de la resolucion de problemas . En R. Charnay, *Didactica de las matematicas Aportes y reflexiones* (págs. 51-64). Ecuador: Paidos.

Pozo, J. L. (2006). *Teorias cognitivas del aprendizaje* . Madrid: Morata.

Rubiano, G. (2004). *Teoria de numeros para principiantes.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Salas, M. (2000). *Tecnicas de estudio para secundaria y universidad.* Madrid: Alianza.

Universidad de los Andes. (2007). *Investigacion sobre desercion en las instituciones de Educacion superior en Colombia (informe para distribucion en la pagina electronica).* Bogotá: Ediciones Uniandes, Centro de Estudios Economicos.

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas. (2015). Factores Académicos. En *Bajo Rendimiento Academico en la Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas:caracterizticas generales,factores asociados y propuestas para su mitigacion.* (págs. 550-563). Bogotá: Universidad Dsitrital Francisco Jose de Caldas.

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas. (2015). *Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.* Obtenido de Licenciatura en educacion basica con enfasis en matematicas: http://licmatematicas.udistrital.edu.co:8080/documents/29497/11d2e7e1-d462-4315-b9cd-cc9ce2a321c8

ANEXOS

ANEXO 1.FICHA DE OBSERVACION

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de ciencias y educación

Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas

Ficha de observación

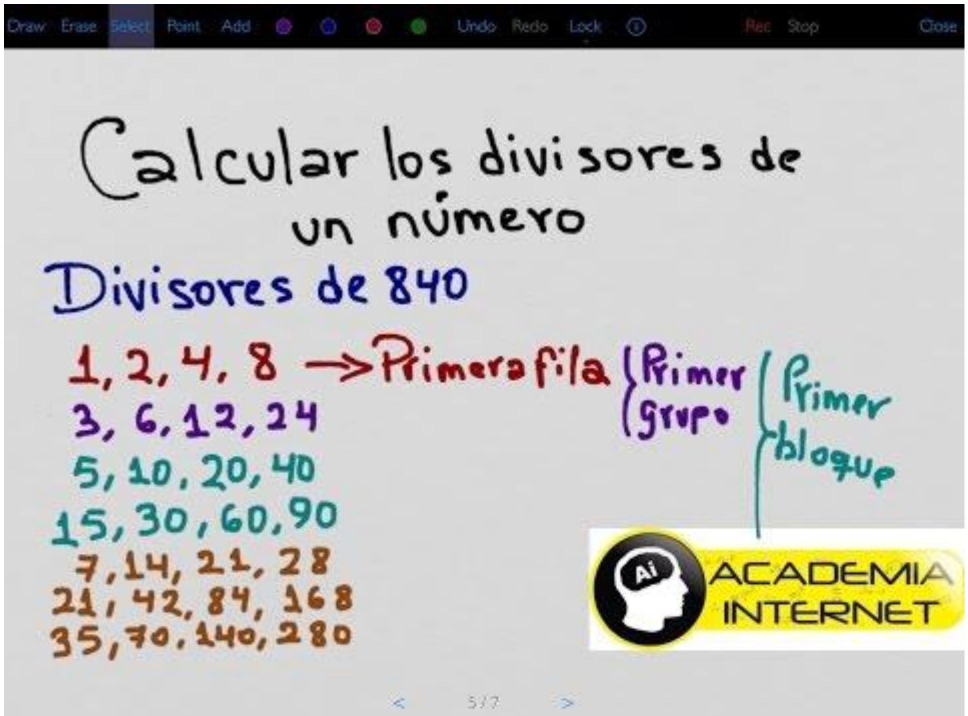
Caso N° __

Observadora: ______________________

Sesión	Técnicas	Temáticas	Tiempo (minutos)
1			
2			

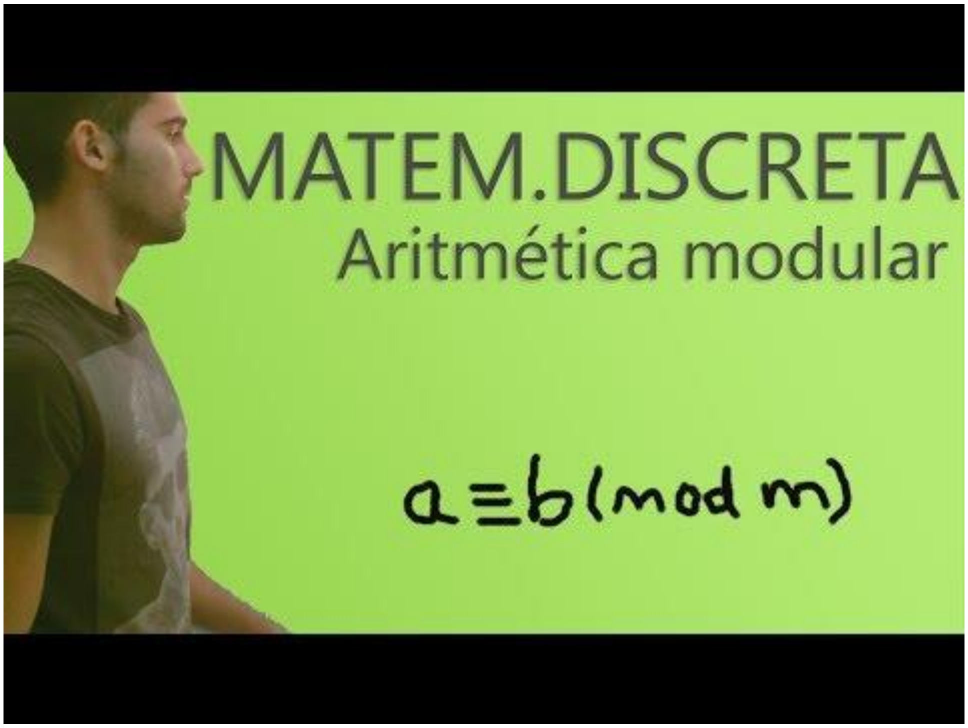
3			
4			
5			

ANEXO 2. VIDEO SOBRE CALCULO DE DIVISORES



https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=elY4JfYP42Q

ANEXO 3. VIDEO SOBRE ARITMETICA MODULAR



https://www.youtube.com/watch?v=8Sa3YyV-Rv8