

Medios semióticos de objetivación evidenciados en estudiantes de preescolar
respecto a la generalización de patrones numéricos

Presentado por

Fabio Andrés Medina López 20051145051

César David Botello Torres 20051145030

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en
Matemáticas
Bogotá D.C., Marzo de 2017

Medios semióticos de objetivación evidenciados en estudiantes de preescolar
respecto a la generalización de patrones numéricos

Presentado por

Fabio Andrés Medina López 20051145051

César David Botello Torres 20051145030

Director

Rodolfo Vergel Causado, Ph. D.

Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en
Matemáticas
Bogotá D.C., Marzo de 2017

Dedicado

*A mis padres quienes siempre me apoyaron en mis estudios durante el transcurso de todo este tiempo.
A mi esposa que ha sido el motor para seguir adelante,
junto con mis hijos, que me motivan cada mañana para mejorar en la vida.*

Fabio

*A mi familia la cual me apoyo para salir adelante,
a mi esposa e hijos que son fuente de inspiración.
A mi compañero que luchó a mi lado para que este trabajo,
se hiciera realidad con el apoyo de su familia
y sobre todo a Dios por los dones dados.*

César

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todas las personas que hicieron posible la realización de este trabajo, a todos los profesores que nos ayudaron a crecer tanto intelectualmente y como docentes, al profesor Francisco Javier Camelo, quien nos orientó al principio en el trabajo, sobre la teoría de la objetivación, al acogimiento, aportes y paciencia tenida por nuestro director de tesis el Doctor en educación Rodolfo Vergel Causado, a la profesora Liliana Gonzales Carrillo, por sus conocimientos, aportes y constantes sugerencias que fortalecieron aún más el estudio de los resultados arrojados en la investigación, a los niños y niñas del liceo comercial “Nuevo Alejandrino” al profesor Jaime Humberto Romero Cruz, quien fue nuestro evaluador y jurado, por dejar a partir de sus sugerencias una idea de seguir profundizando este trabajo

Índice de fotos e imágenes.....	6
Capítulo 1	7
Introducción	7
Contexto del estudio.	9
Capítulo 2	18
2.1. Sobre la teoría de la objetivación.	18
2.1 Sobre los medios semióticos de objetivación.....	21
2.2 Sobre la generalización de patrones.....	22
Capítulo 3	25
Descripción de la tarea propuesta. Herramienta de trabajo “LA GALLINA PONEDORA”	27
Capítulo 4	32
4.1 Primera sesión.	33
4.2 Segunda sesión.....	36
4.3 Tercera sesión.....	39
4.4 Cuarta sesión	44
4.5 Quinta sesión	47
4.6 Sexta sesión	51
Capítulo 5	56
Bibliografía.....	60

Índice de fotos e imágenes

<i>Figura 1. Escritura del símbolo numérico de forma errónea.</i>	25
<i>Figura 2. Medios semióticos de objetivación demostrados en el conteo.</i>	26
<i>Figura 3. Material tangible utilizado.</i>	27
<i>Figura 4. Gesto como medio semiótico de objetivación.</i>	28
<i>Figura 5. Demostración de la cantidad de huevos por día.</i>	30
<i>Figura 6. Organizaciones realizadas por los niños.</i>	30
<i>Figura 7. Participación de Susana.</i>	32
<i>Figura 8. Arreglos de los niños.</i>	33
<i>Figura 9. Ubicación de los huevos por día en la cubeta.</i>	35
<i>Figura 10. Acomodación de huevos por día.</i>	37
<i>Figura 11. Ubicación de huevos por día.</i>	38
<i>Figura 12. Cantidad de huevos colocados en seis semanas.</i>	38
<i>Figura 13. Conteo de la cantidad total de huevos.</i>	39
<i>Figura 14. Cartilla.</i>	40
<i>Figura 15. Solución de la actividad de la cartilla.</i>	40

Capítulo 1

Introducción y contexto del estudio

Introducción

El objetivo del presente estudio consiste en la identificación de las acciones semióticas que demuestran estudiantes de preescolar cuando abordan una tarea sobre generalización de patrones numéricos. Para tal fin se adaptó una tarea sobre generalización de patrones numéricos propuesta por Radford (2008a) cuya implementación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes del grado preescolar, centrando la atención en la observación de los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes en sus primeros años de escolaridad teniendo como marco principal los constructos teóricos de la teoría de la objetivación propuesta por Radford.

De forma análoga, se seguirá lo planteado por Radford (2004), observando tanto los medios semióticos de objetivación movilizados así como el uso de diferentes artefactos por parte de los niños para evidenciar la presencia de un conocimiento previo que fue adquirido a través del rose con su entorno socio-cultural en el cual se desenvuelven, como se explicará más adelante.

Se sugiere adaptar y modificar una tarea propuesta por Radford (2008a). La tarea adaptada lleva por título “**la gallina ponedora**” de la que se espera en un primer momento, el rastreo de algunas de las problemáticas que se presentan en grados superiores y que han sido reportadas por diferentes

investigadores en el campo de la educación matemática, debido a que la transición del pensamiento numérico al variacional no se realiza en un tiempo prudente. Esta parece ser una de las razones por la cual el niño encuentra dificultades para el reconocimiento de un significado más profundo de la variación presente en un fenómeno.

Para el segundo momento, se expone la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico a temprana edad a través de la generalización de patrones numéricos. Con lo cual se pretende examinar el razonamiento algebraico temprano que el niño demuestre sin necesidad de llegar a plantear expresiones sofisticadas frente a la generalización.

En el tercer momento se observaran las acciones que movilizan los niños al abordar la tarea propuesta, ya que estas nos muestran los artefactos socio-culturales que se presentan en su entorno, con los cuales Radford (2006) ha sustentado la teoría de la objetivación cultural.

En el cuarto y último momento, se recogen y analizan las producciones de los niños. Cada una de ellas se observó desde la Teoría de la Objetivación, en donde se esperaba reconocer los medios semióticos de objetivación a los que recurren los niños en su intención de empoderarse del objeto matemático. Finalizando se darán las conclusiones obtenidas sobre todos los momentos propuestos.

El trabajo se encuentra estructurado en tres partes; en la primera se presenta la introducción y el contexto del estudio. La segunda parte corresponde al marco teórico en donde se abordan los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta de trabajo. En la tercera parte se encuentran los aspectos metodológicos considerados para la selección, implementación y

posterior análisis de la tarea, y, por último se presentan las conclusiones emergentes tras la realización del trabajo.

Contexto del estudio.

Con base en experiencias de nuestras prácticas como profesores de matemáticas, hemos evidenciado algunas dificultades de los estudiantes a la hora de darle sentido a las operaciones con los números racionales, sin embargo, consideramos que en general tales operaciones son entendibles para ellos en el desarrollo de su sentido algorítmico. No obstante, en su vida escolar al aparecer las letras, las dificultades de operar de la misma manera como se realiza con los números se acentúan tratando de encontrar un carácter de cerradura con estas. De donde puede inferirse que no realizan una transición de lo numérico a lo algebraico.

Por tal motivo retomar los trabajos de Lasprilla (2012) y Villanueva (2012) nos permite ubicarnos en las primeras nociones que desarrollan los niños sobre los objetos matemáticos en sus primeros años de aprendizaje en la escuela, orientados a observar formas de razonamiento temprano, también mencionados como *Early-álgebra* en donde es evidente que se presentan problemáticas a la hora de identificar el sentido y el uso práctico de conceptos algebraicos.

La enseñanza del álgebra ha estado marcada por la utilización de métodos muy algorítmicos de resolución sistemática de ejercicios en donde se prioriza la consecución de una respuesta restando importancia al desarrollo de pensamiento algebraico, convirtiéndose en un acto repetitivo y de imitación la forma de solucionar ejercicios. Es evidente que el método utilizado por el docente influye para que esto suceda. Investigaciones adelantadas por el grupo Azarquiel (1993), dan cuenta de lo anterior, exponiendo claramente la prioridad del proceso algorítmico con respecto a la creación de situaciones que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por su parte, Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), plantean que al pasar de la aritmética al álgebra no se da una secuencia de aprendizaje sino que es un proceso diferente en el cual los niños deben enfrentarse a la aparición de expresiones compuestas por letras o símbolos, los cuales presentan determinados procesos de solución, siendo insuficiente el aprendizaje adquirido en sus primeros años.

Algunas de las investigaciones realizadas por diversos autores (Kaput, 2000; Button y Rojano, 2010; Molina, 2009; Sucas, 2011) plantean observar los razonamientos algebraicos que demuestran los niños en edades tempranas, es decir, en sus primeros años escolares. Anteriormente se pensaba que los niños no poseían un conocimiento matemático óptimo para la comprensión del sentido de la letra como variable, por tal razón debía ser adquirido en los años escolares de secundaria, en donde se cree que el alumno es capaz de realizar un proceso en el cual la letra toma sentido perdiendo su aspecto simbólico.

Como un aporte al desarrollo del pensamiento algebraico a edad temprana Molina (2009, citada en Villanueva, 2012) menciona que la transición de la aritmética al álgebra, no ha de pensarse en el álgebra comúnmente enseñada en los últimos años escolares sino más bien en la exploración de ideas algebraicas para niños. Estas ideas se pueden desarrollar como modos de pensar y actuar en objetos, relaciones, situaciones y estructuras matemáticas, como una introducción al álgebra desde los primeros años de escolaridad.

A partir de estas ideas nace Early-álgebra como una propuesta de cambio al currículo con la cual se busca no la implementación del álgebra como tal sino el reconocimiento de las capacidades de los niños para observar el aspecto variacional que se encuentra impreso en las matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas. (Vergel, 2010, citado en Villanueva, 2012).

Desde los años ochenta se empieza a cambiar esta concepción y en la actualidad se ve como el currículo nacional colombiano y los currículos internacionales han desarrollado un pensamiento llamado variacional el cual se dirige al estudio de la variación, las regularidades y la identificación de patrones. Sugiriendo actividades que permitan analizar de qué manera “[...] cambia, aumenta o disminuye, la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números y letras [...]”. (MEN, 2006, p.67).

Desde la mirada de la Teoría de la Objetivación podemos encontrar las expresiones que utilizan los niños para la comprensión de la generalización de una secuencia de objetos en la cual estas expresiones son el reflejo de la comprensión temprana de razonamientos algebraicos, lo que se busca es

captar acciones físicas que realizan los niños al dotar de sentido un conocimiento el cual descubren y comprenden.

Por lo anterior podemos concluir que implementar el álgebra a temprana edad es una forma de ayudar a disminuir las posibles dificultades con las que los niños se topen en sus años escolares futuros. Permitiendo que desde la primaria el estudiante trabaje con ideas matemáticas en el aula en procura del desarrollo paulatino del pensamiento algebraico, para su aprendizaje, de tal forma que pueda provocar mejores y mayores comprensiones de las estructuras algebraicas durante sus estudios básicos. No debemos perder de vista que todo esto se analizará desde la Teoría de la Objetivación propuesta por Radford (2004).

Autores como Azarquiel (1993), Mason (1988), Filloy (1999), Bednarz, Kieran y Lee (1996) han realizado investigaciones sobre el proceso del pensamiento algebraico en edad temprana. Planteando que la estereotipada idea que el álgebra se enseña luego de aprender la aritmética elemental no es del todo cierta.

Así mismo, Santos (2009) menciona que para la escuela tradicional un niño no tiene el suficiente nivel de abstracción frente a la comprensión del álgebra, influyendo la metodología y manera como se enseña, postergando el estudio hasta el nivel medio. La enseñanza de los conceptos algebraicos no debería ser carga del maestro, tampoco del estudiante. Pero sí implica un desarrollo de pensamiento crítico y analítico por parte de los educadores eliminando la mecanización y la memorización.

Villanueva (2012), considera dentro del currículo nacional la importancia de centrarse en el desarrollo e implementación del pensamiento variacional en

edad temprana como un medio para fomentar el pensamiento matemático, partiendo de adaptaciones de tareas encaminadas a la generalización, justificación de argumentos, reconocimiento de la variación y formalización, aunque en los estándares aparece el pensamiento variacional, éste parece no ser abordado en el trabajo de aula a edades tempranas.

De otro lado, Butto (2004) encuentra muy importante el paso de la aritmética al álgebra en las matemáticas escolares, ya que para él, el obstáculo que se le presenta a los adolescentes corresponde a la falta de significado construido sobre el contenido matemático usando siempre contenidos numéricos sin observar que desde el campo geométrico también se pueden realizar las mismas construcciones mejorando la comprensión de los significados.

Durante nuestras prácticas se evidenció lo expuesto por Butto ya que muchas de las dificultades provienen de un lado, de los vacíos conceptuales y de otro, una incorrecta interpretación de los conceptos durante la educación primaria. Dichas dificultades, contribuyen a reforzar la inseguridad en el estudiante, toda vez que en ciertas ocasiones siendo sus razonamientos, procedimientos y respuesta correctos, al momento de realizar una sustentación de los mismos suele confundirse y no logra expresar a otros lo realizado en toda su dimensión, quizás por falencias en sus conocimientos previos. Es así que de acuerdo a lo reportado por investigadores en el campo parece oportuno llegar al pensamiento algebraico desde las edades tempranas (5 – 7) años, ya que así se aprovecha los significados presentes desde el comienzo de la enseñanza.

Según Mason (2007), cuando un niño entra a la escuela por primera vez ya ha mostrado muchas capacidades para comprender el mundo y la pregunta para los maestros es saber si en realidad el estudiante fue expuesto a situaciones donde sus capacidades fueron ignoradas o al contrario, se potenciaron desde su imaginación, acciones, palabras, dibujos o símbolos. Ya que los niños a una temprana edad suelen expresarse por medio de un lenguaje que toman desde las experiencias de su entorno “cultura social”, el cual permite la detección y aplicación de los patrones que suelen hacer en algunos aspectos, identificados para Gattegno (1987) como la esencia de la generalización.

Según Lasprilla (2012), a causa de la gestión desarrollada por el docente en el aula se presentan las dificultades en torno al trabajo del álgebra escolar, debido a que algunos profesores enfatizan el trabajo algebraico como netamente algorítmico sin reparar en las acciones semióticas movilizadas por los estudiantes las cuales podrían dar indicios acerca del significado de los objetos matemáticos, en donde aparecen los medios semióticos de objetivación como parte fundamental del desarrollo del conocimiento del niño en la demostración de la comprensión del objeto del cual se está apropiando por medio de gestos, movimientos, señales etc.

De acuerdo con lo anterior emerge la necesidad de inquirir acerca del tipo de generalización que pueden llegar a realizar estudiantes de preescolar, pues es claro que ellos hacen uso de diferentes tipos de representaciones semióticas, como gestos, movimientos corporales, uso de objetos tomados de su entorno cultural, que les permite abordar el objeto matemático al cual se enfrentan. Sin embargo, vale la pena preguntarse entonces si ¿En

realidad las respuestas dadas por los estudiantes se acercan a algún tipo de generalización? Por tal motivo nos surge la siguiente pregunta:

¿Qué medios semióticos activan los niños de preescolar al enfrentarse a la generalización de patrones numéricos?

En los antecedentes aparecen algunos referentes base para abordar la problemática. El tema del álgebra a temprana edad aunque no es nuevo, sí parece ser evadido en muchos momentos, no porque sea complejo, al contrario, la manera como un niño resuelve un obstáculo en el caso de la generalización, es tan sencilla que en algunas ocasiones nosotros como profesores no nos fijamos de las estrategias que suelen diseñar los estudiantes.

Los trabajos de Lasprilla (2012) y Villanueva (2012), tratan sobre la incorporación del álgebra a temprana edad (Early – álgebra), coincidiendo con las ideas de Molina (2006), quien resalta que el uso y desarrollo del pensamiento relacional sobre los significados del signo igual, a partir del potencial que presentan las sentencias numéricas para un trabajo de tipo aritmético en los estudiantes de primaria es posible.

Vygotsky y sus colaboradores, observan los conceptos sobre teorización de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, estos se presentan de dos formas; la naturaleza histórica del saber desde la escuela y la forma de cómo el saber es retomado por los estudiantes en los procesos sociales al darle un significado. Se puede pensar que los procesos sociales influyen en la concepción de los objetos matemáticos que poseen los niños.

Uno de los principales referentes de Lasprilla (2012) es Radford (2006) quien plantea la Teoría de la Objetivación, la cual indaga sobre el aspecto socio cultural fundamentado en el estudio de la interacción social y el despliegue de signos y del uso de artefactos por parte de los niños en su entorno, al enfrentarse a una situación matemática.

Radford (2004) quien al momento de hablar de los artefactos y la semiótica en la Teoría de la Objetivación, menciona que el concepto de mediación semiótica va más allá de la vista instrumental ya que los movimientos corporales o gestos movilizados por los estudiantes suele ser signos o artefactos que se convierten en la medición semiótica, adjudicándole a los signos el rol de las representaciones del pensamiento.

Radford (2004) menciona que,

La idea de objetivación está íntimamente relacionada con la naturaleza de los objetos conceptuales (es decir, con la ontología) y con la relación epistémica entre sujeto y objeto: dada la idealidad de dichos objetos, la única manera de hacer referencia a éstos es a través de signos. Es esta característica de los objetos conceptuales la cual Duval (1995), ha llamado la paradoja del conocimiento y se refiere a los objetos matemáticos. (p. 13)

Uno de los conceptos que también se trabaja en la tesis de Lasprilla (2012) son los procesos de objetivación, refiriéndose a toda acción que realicen los niños a partir de sus movimientos corporales, gestos, miradas, escritos como mecanismos de lenguaje matemático frente a un aprendizaje en los niños. Como hace referencia Vergel (2012, p. 9)

Además, Lasprilla (2012) señala las diferentes maneras en que los estudiantes evidencian sus procesos de objetivación; los cuales son procesos creativos que desarrolla el estudiante para llegar a dominar las formas matemáticas. Estos pueden ser expresados por medio de gestos, palabras, movimientos, la manera en que miran, entre otros y que en su mayor parte, los docentes prestan atención a unos pocos. Sus ideas concuerdan con algunos autores como el Grupo Azarquiel (1993), Espinosa (2002) Mason, Burton y Stayce (1988), Sucas, Camacho, Palarea y Hernández (1989), Kieran (1994), respecto a tener en cuenta el lenguaje simbólico, el rítmico, corporal y demás de los estudiantes, ya que estos brindan gran información concerniente a sus procesos de objetivación.

Siguiendo a Vergel (2014b), existen formulaciones que expresan generalización, como lo son acciones, gestos, ritmos, miradas, palabras, etc. Las cuales se expresan y desarrollan en un espacio tiempo determinado, complementando algunos de los procesos de objetivación nombrados anteriormente.

Lasprilla (2012) describe que al observar los procesos de objetivación individuales y los colectivos, se nota un cambio en estos, ya que los estudiantes al tratar de hacerse comprender y agregar ideas de otros estudiantes, utilizan más artefactos semióticos de los que comúnmente expresan, al realizar el abordaje de una problemática individualmente.

Capítulo 2

Marco teórico

En el marco teórico se plantea estudiar al menos tres aspectos: i) la Teoría de la Objetivación propuesta por Radford (2008a) y; ii) los medios semióticos de objetivación que trata sobre el significado dado a una tarea propuesta iii) la generalización de patrones numéricos, su importancia y análisis en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

2.1. Sobre la teoría de la objetivación.

Según Radford (2004), para hablar de la objetivación es necesario plantear el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico. En donde se trata de acercar la relación entre la cognición humana y la influencia de los aspectos socioculturales en está.

La teoría de la objetivación propuesta por Radford (2006) se inspira en investigaciones socioculturales realizadas por Vygotsky (1986), Vygotsky y Luria (1994), Leontiev (1993) entre otros. Dichas investigaciones sugieren una manera de teorizar los aprendizajes de los procesos matemáticos realizados por los alumnos, relacionando el saber formado en la escuela y la manera como este es abordado por ellos durante el proceso de la transformación del significado.

En la Teoría de la Objetivación, se plantean algunos fundamentos que tienen sus pilares en la naturaleza ontológica y epistemológica del conocimiento. Radford (2004), señala que la primera etapa de la cognición humana trata sobre la naturaleza misma de la cognición. El individuo se posiciona en el

acto del conocimiento ya que la semiótica cultural parte de un reposicionamiento del mismo individuo, el cual puede pensar y actuar en el marco de su propia cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la práctica social. La naturaleza ontológica, según Radford (2008a) nos brinda en la objetivación aproximaciones a los objetos matemáticos que no se ven como objetos independientes de las acciones humanas ni de la cultura, cuyo objetivo se presenta como el descubrimiento de los procesos realizados frente a los objetos matemáticos, sabiendo que hay restricciones que no dejan interpretarlos del todo. Esta teoría señala que dichas interpretaciones pueden tomar distintos caminos formando diferentes teorías. Radford (2006), menciona que los objetos matemáticos son patrones fijos que se observan durante su actividad reflexiva, estos patrones se incrustan constantemente en la práctica social mediatizada por artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.).

Para Radford (2004), la segunda etapa de la cognición humana tiene que ver con la semiótica cultural donde se plantea el problema de la reflexión acerca de práctica social. Es aquí donde la dimensión semiótica adquiere gran importancia ya que “signos y artefactos” son mediatizadores de las actividades humanas y su vez se constituyen en elementos clave de los procesos de reflexión. Así, la actividad cognitiva se considera como actividad social llena de interacciones reflexivas y prácticas sociales históricamente constituidas. Las producciones realizadas por el sujeto están permeadas por la cultura social en la que se mueve, en su entorno lleno de significados. Radford (2006), respecto al fundamento epistemológico en la Teoría de la Objetivación se señala que es la encargada de caracterizar las diversas maneras en que los objetos matemáticos son reconocidos por los individuos, ya que el conocimiento matemático no es producto de una simple

construcción o reconstrucción, resultado de las adaptaciones realizadas por el alumno frente a una situación problema. Para la objetivación, la teleología¹ del saber es más profunda que los medios viables de la educación de las acciones, dicho en otras palabras, reconoce que tanto las hipótesis como los criterios de optimación en una estrategia están enmarcados como herencia cultural de acción y reflexión. Para Radford (2006), la teleología del saber matemático no queda escasa ya que las mismas situaciones son las encargadas de dar origen a una concepción no necesariamente explícita, de plantear y dar soluciones a dicha situación. Según la Teoría de la Objetivación el aprendizaje es una adquisición en forma de reflexión guiada por la epistemología cultural formada.

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado *objetivación*, el cual presta el nombre a la teoría. “La objetivación es [...] ese proceso social de toma de conciencia progresiva [...] de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (Radford, 2006, p. 116). El problema central de la Teoría de la Objetivación es dar cuenta de la manera en la que el individuo alcanza el saber cultural (Radford, 2002). Para ello, la teoría ha distinguido fuentes básicas de producción de significados: el uso de artefactos y la interacción social (Radford, 2006). Esto significa que, en la vía hacia el conocimiento, la relación sujeto-objeto está mediatisada no sólo por los artefactos, sino también por la presencia del Otro. “La relación “Yo-Tú” (Buber 1958), o en términos más generales la relación de alteridad “Yo-Otro”

¹El término *teleología* proviene de los términos griegos Telos “fin, propósito, meta” y Logos “razón o explicación” traducida significa, explicación que se sirve de propósitos o fines.

(Lévinas 2006), viene a desempeñar un papel epistemológico junto con la relación sujeto-objeto (Radford, 2008b)”. (Miranda, Radford y Guzman, 2007, p.9).

2.1 Sobre los medios semióticos de objetivación.

Los artefactos en la teoría de la objetivación son portadores de una inteligencia histórica, de donde se desprenden desarrollos conceptuales los cuales generan una actividad de aprendizaje, donde se observan que no actúan de manera aislada; generando un esfuerzo que realizan los alumnos por organizar sus acciones y sus intenciones; todos los medios a través de los cuales el alumno alcanza esa forma relativa de conciencia del objeto conceptual la teoría los llama *medios semióticos de objetivación* (Miranda, Radford y Guzmán, 2007).

Todos los procesos que realizan los estudiantes para dotar de sentido una tarea propuesta y apropiarse del objeto matemático, pueden ser físicos, verbales, sensibles, etc. que generen conocimiento se describen como medios semióticos de objetivación. Como menciona Radford (2003),

Los procesos de producción de conocimiento se incluyen en sistemas de actividad que involucran otros medios físicos y sensuales de objetivación que el escrito (como las herramientas y el leguaje) y que dan, también, una forma tangible y corpórea al conocimiento (p. 41)

Uno de los medios semióticos de objetivación al cual recurren los estudiantes es el gesto. Este, fluye a través del cuerpo, muestra la intencionalidad de sus acciones y parecen demostrar la objetivación del saber puesto en juego. Otro medio semiótico de objetivación observado con

frecuencia en los estudiantes se corresponde a los fragmentos discursivos utilizados como medio demostrativo de las relaciones matemáticas observadas en torno a un objeto matemático. Siguiendo a Vergel (2014b) podemos decir que “La importancia del estudio del gesto reside en reconocer que por medio de él es posible materializar intenciones, además de ser un elemento integrante, no periférico, en las maneras de pensar de los estudiantes” (p. 72).

Radford (2005, citado por Vergel 2014b) “puntualiza que el gesto no es suficiente para dar cuenta de la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Este investigador propone que el análisis del proceso de aprendizaje debe tomar en cuenta la relación del gesto con otros sistemas semióticos”. Por lo tanto se pueden encontrar una variedad de recursos semióticos a los cuales recurren los alumnos que evidencian acercamientos conceptuales al objeto matemático.

2.2 Sobre la generalización de patrones.

Los procesos de generalización han sido estudiados por diversos autores en los que encontramos a Radford (2008a), Azarquiel (1993), Mason, Burton y Stayce (1988), García (1998) y Pretexto (1999), quienes han coincidido en la necesidad de tomar situaciones de generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico. Para algunos de ellos la generalización no es exclusiva del pensamiento matemático, debido a que los casos de generalización presentan variadas situaciones no solamente desde lo algebraico. En suma, la generalización algebraica de patrones va más afondo de lo que en general se puede ver.

Para Radford (2008a) la generalización algebraica de patrones está basada en cómo el alumno se percata de un patrón o secuencia en común, que más tarde se puede llegar a generalizar, en donde se tienen que seguir unas reglas para construir expresiones en los elementos de una secuencia que está fuera del campo perceptivo.

Para Radford (2006), al establecer un campo particular dentro de una situación reflexiva, él individuo es capaz de verlo sin ser fácilmente perceptible al inicio, pero al reinterpretar las acciones semióticas, se origina el pensamiento y a su vez lo abarca, por ejemplo en una secuencia de figuras, números, colores, etc. Se puede llegar a generalizar, partiendo de la realidad histórica-cultural, como medio de refracción, para llegar a modificarlas según la interpretación subjetiva además del direccionamiento.

De esta manera el alumno puede seguir esos procesos frente a la adquisición de conocimientos progresivos sobre el problema, en otras palabras no significa que esté construyendo o reconstruyendo el conocimiento, más bien está dando un sentido mucho más significativo para él, que gradualmente va notando en los objetos conceptuales que encuentra en su cultura.

Para el grupo Azarquiel (1993), es fundamental el concepto de la variable para el aprendizaje del álgebra y para adquirirlo es indispensable dos procesos los cuales son: la generalización y la simbolización: La generalización permite al alumno pasar de un conjunto de situaciones concretas a un aspecto común a todas ellas. La simbolización: permite al

alumno expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

Según Mason (1999), la generalización se da en dos tipos de contextos, a nivel matemático y a nivel social. Sin embargo, en cada uno de ellos se distinguen tres aspectos por los cuales un alumno suele pasar al momento de plantear generalizaciones en situaciones problemas, estos son el ver, el decir y el registrar. Para *el ver* se hace referencia al momento en que los alumnos son capaces de entablar algo en común durante la observación de las primeras posiciones, en el caso de un patrón numérico o geométrico. Para *el decir* los alumnos al momento de observar y hacerlo explícito pueden hacerlo de manera gestual, verbal o escrita, para este caso se les dificulta realizar este proceso ya que para ellos la tarea se les hace bastante fuerte porque tienen que buscar las palabras y simbologías adecuadas para expresar sus conclusiones. Finalmente para *el registrar* lo observado y expresado el alumno tiene una gran variedad de formas, pueden ser; dibujos, escritos, símbolos, cuadros, tablas entre otras. Es de considerarse que los tres aspectos mencionados es una manera clara de poder ver los procesos por los cuales se realiza la generalización por medio de un patrón o regularidad.

Capítulo 3

Metodología

A continuación se presenta el enfoque metodológico en cual se fundamentó la investigación. El diseño metodológico adoptado se dividirá en: i) identificación y adaptación de la tarea revisión documental; ii) la manera cómo se recolectó la información y, iii) el análisis de los resultados obtenidos en la investigación de acuerdo a las categorías propuestas por Radford.

El modelo de investigación se realiza teniendo en cuenta un enfoque de investigación de tipo cualitativo, ya que por este medio se puede hacer un rastreo minucioso de las expresiones físicas de los estudiantes, tales como los gestos en su rostro, señales con sus manos y lo que utiliza adicionalmente en su entorno como herramientas de apoyo, para explicar lo que percibe a partir de la actividad propuesta.

La tarea consistió en una adaptación sobre generalización de patrones numéricos la cual fue aplicada por Radford (2008a), que buscaba observar la implementación de los medios semióticos de objetivación que demuestran los estudiantes de preescolar al ponerles una situación problema que conlleve a aproximaciones de la generalización y simbolización planteado por Filloy (1999), Mason (2007) y Radford (2004),

Para la consecución de evidencias respecto a los procesos de objetivación de los estudiantes, se recurrió al uso de herramientas tecnológicas como cámaras fotográficas y de video, con el propósito de captar los movimientos corporales “manos y brazos”, los gestos, los escritos y dibujos; Por otra parte los diálogos, serán utilizados como medios de indagación en cuanto a los

conocimientos creados y/o demostrados por los estudiantes, frente al desarrollo de las tareas propuestas.

Con lo cual se buscó observar con detenimiento y de acuerdo a los elementos teóricos, las acciones que realizan los alumnos al enfrentarse a la tarea, además también se buscó estar pendiente para observar el uso de cualquier artefacto por parte de los estudiantes.

Para el análisis se tuvo presente los registros escritos de los estudiantes, los cuales resultaron fundamentales para el reconocimiento del símbolo numérico (grafo) con la cantidad observada. Por medio de colorear se tiene un acercamiento al concepto de generalización.

Por último, el análisis de cada uno de los registros recolectados, estuvieron basados en la categorización de los medios semióticos de objetivación propuesta por Radford (2010b), rastreándolos durante el desarrollo de la tarea con el fin de generar conclusiones al respecto.

Para observar los medios semióticos de objetivación que movilizan los niños de preescolar durante el desarrollo de una tarea de generalización de patrones numéricos, se tuvo en cuenta en la escogencia de esta; las actividades realizadas por Radford (2006), Radford (2008a) y retomadas por Villanueva (2012).

Al revisar las tareas sugeridas en Villanueva (2012, P. 29), consideramos la segunda situación “*la gallina ponedora*” la cual corresponde a una adaptación de una tarea referida por Radford (2008a) a patrones numéricos, empleada en una investigación sobre desarrollo del pensamiento algebraico y la generalización de patrones.

Teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes de preescolar y sus edades, se decidió modificar la tarea mencionada en el párrafo anterior proponiendo el contexto de una granja, de manera que los niños tuvieran la oportunidad de observar los animales en forma gráfica con el fin de involucrarlos más con la tarea, haciéndola más tangible y lúdica llevándoles el material ya construido que consistía en las gallinas ponedoras y sus huevos, no tan sistematizada según lo planteado en Villanueva (2012).

Descripción de la tarea propuesta. Herramienta de trabajo “LA GALLINA PONEDORA”

A continuación se presentará la herramienta de trabajo especificando la secuencia de intervención de aula con los estudiantes de preescolar. Se proponen seis sesiones de clase con una intensidad de dos horas cada sesión, desarrolladas de la siguiente manera: i) Actividad de reconocimiento a partir de la idea principal de la tesis de Villanueva (2012), en la cual se reconocerán las nociones de conteo en los niños, ii) actividad de inicio proponiendo la gallina ponedora, de la manera concreta-tangible para una mejor comprensión de los niños, ya que según Van Hiele (1957), el trabajo que realizan los niños de temprana edad, es más aprovechable cuando se manipula con material didáctico que se pueda tocar y manipular iii) pregunta orientadora ¿cuántos huevos coloca la gallina de Doña Magola por día?, con este cuestionamiento se esperaba que los niños puedan dar inicio al trabajo de objetivación, propuesto por Radford (2008a, citado por Lasprilla 2012), iv) secuencia del problema propuesto para buscar los patrones numéricos, v) socializaciones sobre el trabajo retomando la secuencia del problema, vi) aplicación de las secuencias trabajadas con el material didáctico, pasando la

misma dinámica a una cartilla, repitiendo el proceso sobre significado de forma escrita y simbólica.

Al iniciar la primera sesión se le entregó a los niños una cartilla sobre los diferentes animales que se encuentran en una granja. Cada uno de los animales, tenía su respectiva cría, la vaca con su ternero, la oveja con sus corderos, la cerda con sus lechones, la perra con sus cachorros, la gata con sus gatitos, la coneja con sus gazapos, la gallina con sus pollitos, entre otros. Aquí se solicitó a los niños colorear e identificar cuántas crías pueden tener cada animal, con el propósito de observar el conteo realizado por los niños, sin embargo, al final de la sesión de clase se potenció el caso particular de la gallina poneda.

El objetivo propuesto para la tarea consistió en que los niños observaran la cantidad de crías que puede tener cada uno de los animales, para mayor claridad se realizó un escrito mínimo el cual se leyó para informar cuales animales aparecían y el nombre de sus crías, de esta manera se espera identificar aspectos importantes del conteo que manejan los niños.

Para la segunda sesión se trabajó con los niños el caso específico de la gallina poneda y la cantidad de huevos que puede poner por día. Lo primero que se realizó fue el relato de un cuento con el cual los niños empezarían a trabajar, partiendo de la situación problema según el relato que va de la siguiente manera.

LA GRANJA DE DOÑA MAGOLA

En una granja afuera de la ciudad vivía una señora muy buena llamada Doña Magola. Ella cuidaba de forma muy dedicada a todos los animales que se encontraban allí, entre estos tenía patos, vacas, cerdos, gallinas, perros y un sinfín de crías a las cuales quería mucho. La señora Magola tuvo que salir de su granja repentinamente hacia la ciudad, así que dejó encargados a sus criados más fieles y juiciosos, recomendándoles todas las labores de la granja y el cuidado de sus animales, en especial a sus cuatro gallinas favoritas: Maruja, Rosita, Guillermina y Teresa. Ellas colocaban una cantidad de huevos por día, de manera que había que recogerlos y contarlos observando cuántos habían colocado. Ayudaremos a Doña Magola en su labor mientras ella vuelve de la ciudad.

Para la situación se presentó una gallina en forma de piñata la cual tiene dentro de ella huevos que fueron representados con pimpones blancos, material que fue utilizado para que los niños tuvieran la oportunidad de manipularlos de manera tangible, además, se emplearon cubetas de huevos reales las cuales facilitaron a los niños la organización de los pimpones al realizar agrupaciones de los huevos correspondientes en cada uno de los días. Al inicio se planteó el problema de la gallina ponedora, con diferentes cantidades de huevos por día y luego se involucró a los niños a participar como recolectores de huevos según la cantidad que se les indique, ya que la señora Magola se ausentará por un tiempo y ellos quedarán a cargo de la recolección.

Para esta parte de la actividad los niños se organizaron en grupos de 3 a 4 integrantes formando 9 grupos en total, esto se realizó con el propósito de poder trabajar con un total de 360 huevos repartiéndolos en los 6 primeros días. Se reparte una cantidad impar consecutiva de huevos por día, esperando que antes de culminar la sesión se realicen los 3 primeros días.

La tercera sesión consistió en retomar la actividad de la sesión anterior y se realizó la pregunta orientadora, con la cual niños buscarán la forma de

encontrar cuántos huevos pone la gallina en el cuarto día, para ello utilizarán la información obtenida en los tres primeros días de recolección. Se tuvieron nuevamente los huevos, las cubetas y las gallinas; los niños tomaron la cantidad de huevos que creían convenientes colocar en la cubeta para el cuarto día. Al finalizar la sesión se observó que los niños pudieran encontrar el dato exacto de huevos del cuarto día, además se esperaba que tuvieran una idea intuitiva acerca del número de huevos en el quinto día.

Este momento es uno de los más importantes de la tarea propuesta, ya que los niños se enfrentarán solos a un posible reconocimiento del patrón secuencial a partir de la observación de la cantidad de huevos que van apareciendo, evidenciando las estrategias y diálogos que se generan como medio para expresar las posibles respuestas de los niños, frente a la tarea del día.

Para la cuarta sesión, se realizó una socialización de lo obtenido en las sesiones anteriores. Luego se continuó con el quinto día y la cantidad de huevos que se deben colocar, en donde se espera que utilicen las experiencias previas y nuevas herramientas para dar la solución a la cantidad de huevos que puso la gallina. Si los niños muestran un avance significativo se podrá continuar con el siguiente paso el cual es la cantidad de huevos para el sexto y último día, culminando así la actividad que comenzó con el cuarto día.

En la quinta sesión no se logró terminar la solución del sexto día por lo tanto se tomó un tiempo para concluir con esta y encontrar la cantidad de huevos; una vez termino cada grupo narro al profesor como se logró saber cuántos huevos poner en cada día y cómo lograron descubrir esto. Escuchando las

narraciones de los niños se evidencio una aproximación a la generalización de la secuencia; se finaliza la sesión y el trabajo con el material tangible.

Para el sexto día los niños volvieron a repetir el proceso de la secuencia numérica, pero esta vez desde el primer día en que la gallina pone el primer huevo hasta la cantidad que logra poner durante diez días consecutivos. Para ello se continuó con la segunda parte de la cartilla, donde los niños tenían que colorear la cantidad de huevos que se les pedía según el día, finalizando con la sesión del día sexto.

Finalmente, en la sesión del día séptimo y el día octavo nos dedicamos a realizar las respectivas entrevistas partiendo de preguntas que profundizaran las ideas y formas de pensar de los niños sobre de la tarea; como lograron dotar significado la situación esto se vio en los diálogos preguntas que se les realizaron.

Capítulo 4

Análisis

A partir de lo realizado en la tarea propuesta a los niños de preescolar, se presenta a continuación: i) la narración de situaciones puntuales ocurridas, ii) evidencias por medio de cuestionamientos o preguntas que se realizaron en las sesiones e imágenes sobre sus expresiones, movimientos o artefactos utilizados y iii) análisis de cada uno de ellos.

Cumpliendo con el artículo 218 de la ley 599 de protección infantil los niños que aparecen en las imágenes, videos o grabaciones fueron previamente autorizados por sus padres o acudientes, además los nombres de los niños fueron cambiados en los relatos o imágenes que se presenten. Dado que no todos los niños fueron autorizados, el salón se dividió en dos partes, agrupando en una de ellas los autorizados y en la otra los que no. Por tal razón las narraciones serán replicas o afirmaciones ya que algunos casos de los no grabados también fueron importantes.

Los niños fueron organizados en mesas de trabajo conformadas por cuatro estudiantes, con el fin de aprovechar dos momentos, la subjetividad cuando el grupo se enfrentara a la distribución de los huevos por día con la organización y colaboración de todos y la objetividad del individuo en el momento de realizar lo propuesto por las cartillas de trabajo Radford (2006).

En particular, la tarea fue llevada a cabo en tres momentos diferentes. El primero de ellos, trató sobre algunos animales y sus crías en el cual se observaría la capacidad de conteo que tienen los niños. El segundo momento estuvo relacionado con el trabajo concreto – tangible al recolectar

los huevos que colocan algunas gallinas de la granja y por último en tercer momento se dio la apropiación de la cantidad de huevos por día a través del coloreado en las cartillas.

4.1 Primera sesión.

Se realiza la presentación formal por parte del profesor Fabio quien orientó las sesiones de clase como docente, organizando el salón de tal manera que fuese pertinente para la grabación en términos de la iluminación y por los permisos otorgados. Luego informa a los estudiantes el objeto de nuestra presencia, dicha intervención se realizó brevemente y a continuación se dieron indicaciones para la realización de la tarea propuesta. Se narra un cuento para contextualizar a los niños en el trabajo a realizar (La granja de Doña Magola), al mismo tiempo se entregó la cartilla “herramienta de investigación” la cual fue diseñada por los investigadores como un recurso de aproximación a la tarea ya que los niños en este grado aún no saben leer. A continuación, se repite varias veces la misma pregunta ¿Cuántos hijos tienen? (refiriéndose a los dibujos de los animales que aparecen en las hojas), esta actividad se realizó con la finalidad, de llevar a cabo el objeto de la actividad ejecutada por parte del docente, como mediación entre la situación problema a través de la formulación de preguntas partiendo de eco (Villanueva, 2012).

El primer momento consistió en observar si los niños por medio de la cartilla, poseen conocimientos de los símbolos numéricos, el conteo y la relación de lo ordinal con lo cardinal frente a diferentes elementos. Para facilitar esta labor, se trabajó con la cantidad de hijos que pueden tener los animales de la granja.

Durante esta etapa, se advierte que el ambiente socio cultural que rodea al niño permite que pueda desarrollar habilidades más tempranas. Por ejemplo, si los padres se mueven en un medio económico (negocio, tienda, etc.) el niño tiene mayor disposición al reconocimiento de los símbolos numéricos y la forma correcta de nombrarlos, como plantea Radford (2006) “El pensamiento es una *re-flexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida históricamente y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos y propios” (p. 108).

Así mismo, Radford (2004) plantea que “La semiótica cultural parte de un reposicionamiento del individuo visto como individuo que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la *praxis social*.” (p. 1). Es así que teniendo en cuenta el contexto socio cultural en que se encuentran los niños del grado preescolar en donde padres, abuelos y familiares cercanos tienen proximidad con las áreas rurales, fincas, granjas o hasta en su mismo hogar, para ellos no son desconocidos los animales presentados en la cartilla, algunos niños pueden hasta convivir con algunas de estas especies y tener contacto más cercano por su tradición familiar y cultural.

Luego de narrar el cuento (La granja de Doña Magola) se les indica a los niños colocar la cantidad de hijos que se ven en las ilustraciones según el tipo de animal que se encuentra allí. Dado que eran varias especies de animales con diferentes cantidades de crías el tiempo se ocupó contando y coloreando la portada y los animales.

La primera variable² que presentaron algunos niños fue la forma de escribir los números los cuales fueron realizados al revés (ver figura 1)

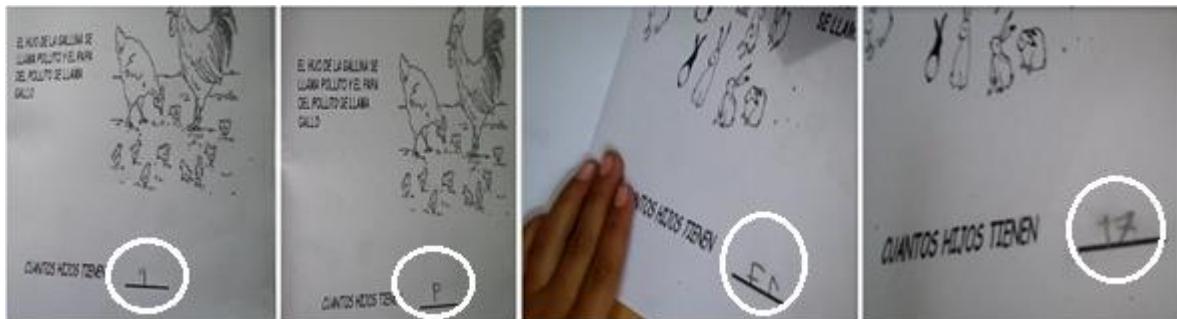


Figura 1: Escritura del símbolo numérico de forma errónea.

Como se ve en lugar de escribir el número 9 se realiza una p queriendo representar el número cardinal.

La segunda variable observada estuvo relacionada con el conteo de cantidades que no se representan con números dígitos, ya que este resultó mucho más complejo para los niños al no reconocer la cantidad que se observa en el dibujo debido a que suelen repetir, volver a contar o saltarse números. Se rescatan los medios semióticos de objetivación que demuestran los niños al apropiarse del conteo demostrando de forma gestual la cantidad de conejos que se encuentran dibujados. El señalamiento con el dedo o con el lápiz representa artefactos que mediatizan y materializan el pensamiento para dar la respuesta a lo solicitado durante este momento en la tarea.

² Llamaremos variables a las dificultades que presentan los niños y que no se tenían contempladas al momento de trabajar las simbolizaciones numéricas y la forma de llevar el conteo al inicio de la actividad.



Figura 2: Medios semióticos de objetivación movilizados en el conteo.

La tercera variable manifestada fue que los niños se les dificultó contar cuando las crías cuando no se encuentran en filas o en columnas, sino esparcidas por toda la hoja (de derecha a izquierda, de arriba abajo, etc.) se cae en el error de omitir parte de ellas o volverlas a contar.

4.2 Segunda sesión.

Se comienza el trabajo del día recordando lo realizado en la sesión pasada y se retoma de nuevo el cuento narrado (La granja de Doña Magola), realizando preguntas sobre lo escuchado y también sobre lo observado en la cartilla. Algunas de ellas fueron ¿Qué animales se encontraban en la granja? ¿Cuál es el último animal que se ve en la granja? ¿Cómo se llaman los hijos de este animal? A continuación se dio paso a la segunda parte del cuento en donde se orientó sobre la forma de trabajo que se realizaría con el material tangible. El material en cuestión estuvo representado por cuatro gallinas armadas con forma de piñata y huevos representados en pimpones blancos. Por lo tanto los niños fueron organizados en el salón en grupos de cuatro integrantes cada uno, esto es consecuencia de la cantidad de material que se llevaba, de los permisos otorgados por los padres, de la comodidad para la grabación, interacción y diálogos que se presentan frente al trabajo que se

quiere realizar. Siguiendo a Radford (2006) “La ingeniería didáctica (Artigue, 1988) no se limita al diseño de los problemas matemáticos si no incluye una gestión del salón de clases operacional con los principios comunitarios” (p. 118).

En el primer momento se pretende dejar claro que el número de huevos que ponen las gallinas depende del día en el cual se encuentre, esto se trata de repetir varias veces para que los niños establezcan la diferencia de los días y los huevos. A manera de ejemplo, se toman los tres primeros días para que los niños observen que no todos los días se colocan la misma cantidad de huevos.



Figura 3: Material tangible utilizado y organización en pequeños grupos.

Al iniciar con la actividad nos damos cuenta que los niños se mostraron motivados por los materiales proporcionados para el desarrollo de la tarea. Considerando las edades de los niños se hizo necesario llamar su atención, de forma que se involucraran con la actividad de tal manera que el compromiso ético se manifestara. Pues como señala Radford y Roth (2010a), “el compromiso no sólo corresponde al interés del estudiante por querer realizar la actividad sino la sincronización de esfuerzos y acciones con el fin de cumplir un objetivo”.

Se dieron las instrucciones para nombrar un delegado quien recolectará los huevos y a la indicación del maestro al grupo, su delegado debía pasar al lugar donde se encontraba el material para la recolección. También se indicó que la cantidad de huevos varía según el día de la recolección, que los niños que integraban los grupos debían ser siempre los mismos, etc.

Para dar inicio a la recolección del huevo del primer día, los niños se organizan y desde el grupo envían a su delegado, después de que todos los grupos tomaron el huevo se realiza por parte del profesor las preguntas:

Profesor: ¿Cuántos huevos tienen cada grupo?

Niños: Uno (muy pocos alumnos responden).

Profesor: Voy a volver a preguntar ¿Cuántos huevos tiene cada grupo?

Niños: Uno (respondiendo un mayor número de alumnos).



Figura 4: Gesto como medio semiótico de objetivación.

Se observa que los niños al responder la pregunta que el profesor plantea realizan varios gestos como levantar su brazo colocando el dedo arriba, subir el tono de la voz, levantarse del puesto, etc. Como se evidencia en un momento de la actividad los niños con el levantamiento de los dedos indican una relación de cantidades tanto de carácter individual como de carácter grupal.

Otros de los gestos más claros para entender la situación es cuando levantan el brazo, ya que esto da a entender que si comprenden la pregunta y que están en capacidad de participar y tratar de responderla, en este medio semiótico se observó en los niños que no bastaba con levantar la mano, poniéndose de pie frente al puesto para llegar a exponer sus ideas o pensamientos, se observa que algunos se colocan rígidos y en puntas queriendo sobresalir por altura entre los demás. “En particular, el gesto, como un medio semiótico de objetivación, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en los procesos de conceptualización” (Vergel, 2014b, p. 72). Siguiendo con la secuencia de los días, se les dice a los niños que la gallina puso para el segundo día tres huevos, así que el grupo envía a los niños que no han participado (decisión que ellos mismos toman). Cuando llega el tercer día los niños encuentran que la gallina puso cinco huevos.

La sesión finaliza con el tercer día ya que los niños se tomaron su tiempo para discutir las formas de solucionar los problemas que se les presentaron al momento de tomar los cinco huevos.

4.3 Tercera sesión

Al momento de dar inicio a esta sesión se realiza un resumen de la clase pasada, preguntándoles a los niños:

Profesor: ¿Qué hicimos en la clase pasada?

Una niña: “Después de las cartillas siguió las gallinas”

Profesor: ¿Cuál fue el trabajo con las gallinas?

Niños: “Se pusieron huevos en el nido”

Sin embargo, la mayoría de los niños no se acuerdan de la actividad realizada, la razón es que llegó el fin de semana y han pasado dos días de la realización de la sesión anterior.

Luego se les hace el recuento de la cantidad de huevos que pusieron las gallinas día por día, primero se le pregunta cuántos huevos pusieron el día uno, (inmediatamente los niños responden uno, se les entrega a cada grupo el huevo que puso la gallina el primer día). Lo mismo se realiza para el segundo y tercer día de recolección, repitiendo el proceso de la clase anterior rápidamente para recordar y retomar la recolección de huevos desde el día cuarto.

Tras la repetición de los días y la cantidad de huevos se puede evidenciar que hay un reconocimiento en las cantidades por día, así por ejemplo:

Profesor: ¿Cómo se cuántos huevos cogí el primer día?

Niño: Toma uno solo de los huevos y lo levanta hacia el profesor.(Esta forma de respuesta aunque no es oral muestra claramente la comprensión del niño).

Profesor: ¿El segundo día cuántos cogí?

Niña y niño: Entre los dos levantan tres huevos y observan al profesor como en señal de respuesta.

Profesor: ¿Cómo hago para saber, viendo la cubeta la cantidad de huevos?

Niños: Muestran el día dejando la cantidad de huevos en una sola línea de la cubeta.



Figura 5: Demostración de la cantidad de huevos por día.

Los niños fueron ubicando los huevos en cubetas de cartón dando los primeros indicios de organización. Por la forma de la cubeta los niños colocan cada huevo de forma lineal, aunque es sorprendente como no todos los grupos reflejan este aspecto, ya que se han generado modos alternativos de organización como formas figurales simétricas y con una organización numérica bien demarcada (en la figura 6 se observan algunas de estas disposiciones espaciales).

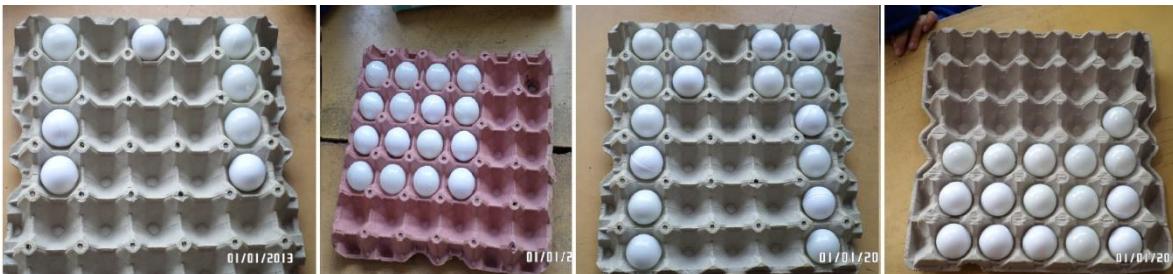


Figura 6: Organizaciones realizadas por los niños.

Al momento de dar inicio con la cantidad de huevos que puso la gallina el día cuarto, se realiza como ayuda la escritura en el tablero de la relación huevos tomados por día. De este modo, se utilizó el recurso tabular para aproximar la compresión de la secuencia numérica Radford (2008b) la denomina secuencia numérica; para observar si es claro lo que se escribió en el tablero, el profesor realiza las siguientes preguntas:



Figura 7: Representación tabular.

Profesor: ¿Qué día vamos a evaluar ahora? (para hacer más clara la pregunta señala el espacio en donde debe continuar la secuencia de días).

Niños: Cuatro (muy pocos responden correctamente).

Profesor: El día cuatro ¿Cuántos huevos creen que puso la gallina?

Niños: Cuatro, nueve, seis, cinco, siete. (Susana contesta enfáticamente, después de decir seis, levanta su mano con dos dedos arriba para señalar que es siete).

Profesor: ¿Por qué crees que ponen siete?

Susana: Voltea su rostro y no responde nada.

Niños: Seis, nueve, siete (vuelve a mirar al profesor mueve su cabeza en señal de que no están contestando bien y enfatiza en que la cantidad es siete).

Profesor: ¿Cuál crees que sea la razón de que sean siete?

Susana: Mira al profesor, mira al puesto, no contesta nada. (Actitud de reflexión).

Profesor: ¿Crees que estás mal o estás bien con la respuesta?

Susana: Sí siete. (Afirma con contundencia).

Profesor: Estás bien con la respuesta ¿Por qué son siete entonces?

Susana: Porque el día tres puso cinco y el día cuatro va a poner siete.

Profesor: O sea que ¿Cuántos huevos subió por día?

Susana: No contesta nada, piensa, cuenta con los dedos.

Profesor: ¿Alguno del grupo le puede ayudar?

Niños: 17 (Dando a entender el total de huevos)

Susana: No entiendo (Se refiere a la pregunta realizada por el profesor).



Figura 8: Participación de Susana.

La primera respuesta que da Susana es seis pero el cambio es inmediato subiendo la voz para corregir y decir que es siete, al mismo tiempo que se expresa verbalmente levanta su brazo derecho y dos dedos de la mano, lo cual interpretamos que reconoce un aumento de dos, todo esto lo hace saltando de su silla.

Vergel (2014b, p. 10) enuncia que las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos, están compuestas de acciones tales como gestos, ritmos, miradas, palabras, por lo cual se podría hablar de fórmulas corporeizadas Radford (2003), Radford (2010a) fórmulas expresadas a través de acciones desplegadas en el espacio y el tiempo.

Para que Susana enfatice en la respuesta dada, se observa que puede haber un reconocimiento primario de la generalización numérica que se está trabajando. Se genera una contracción semiótica al darse una reducción de

recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos o palabras Radford (2008b).

En Susana se observa un reconocimiento básico de un carácter general en la secuencia que el profesor escribió en el tablero, ya que enfatiza en sus respuestas. En el campo de la generalización algebraica se advierte la toma de conciencia de una propiedad común de modo que es posible determinar un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares Vergel (2015).

Hasta el momento no se ha señalado como deben ir ubicados los huevos en las cubetas, lo que se ha hecho es gracias a la organización tabular escrita en el tablero. Los niños organizan los huevos como deseen, el profesor pregunta por las filas que se encuentran y la cantidad de huevos que colocaron en cada una, esto se realiza con el fin de ir reconociendo los días como filas en las cubetas.

4.4 Cuarta sesión

Al iniciar la actividad se retoma el trabajo realizado en la tercera sesión con los niños, asignándoles las cantidades de huevos recolectadas hasta el día cuarto. Los niños empiezan a ubicar las cantidades en las cubetas intentando dar un orden a los huevos, dejándolos que realicen aproximaciones sobre los arreglos que resultan.



Figura 9: Arreglos de los niños.

Luego de observar que los niños no encuentran relación entre la cantidad de huevos puestos por día y como se pueden organizar en las cubetas, se retomó la actividad escribiendo de nuevo la tabla *días-huevos* en el tablero. Se necesitaba construir la secuencia en la cubeta de tal manera que los niños observaran claramente cómo se organizaban los huevos por día, para ello el profesor nombra a cada fila de la cubeta como un día en el que aparece cierta cantidad de huevos.

Profesor: El primer día ¿Cuántos huevos colocó la gallina? (señalando con el dedo el espacio del día uno).

Niños: Uno (en coro).

Profesor: Coloquemoslo; el segundo día ¿Cuántos huevos colocó la gallina? (señalando el espacio o fila del día dos).

Niños: Tres (en coro).

Profesor: Debajo donde les señalé el día dos y el día cuatro.

Niños: Siete.

Profesor: El día uno ¿Cuántos huevos se ven?

Niños: Uno (observando la cubeta)

Profesor: El día dos ¿Cuántos huevos se ven?

Niños: Tres (observando la cubeta)

Profesor: El día... (Se repite el proceso con cada uno de los días).

Los niños ubican en la primera franja superior horizontal de la cubeta el primer huevo relacionando la franja con el primer día, luego ellos toman la segunda franja horizontal y ubican 3 huevos relacionando esta cantidad con el segundo día, posteriormente en la tercera franja ubicaron 5 huevos correspondientes para el tercer día, la siguiente franja se relaciona con el cuarto día ubicando 7 huevos.



Figura 10: Ubicación de los huevos por día en la cubeta.

Para la mayor comprensión de la estructura del modo en que se forma la secuencia, el profesor señala cada una de las filas de las cubetas de tal manera que estas se interpreten como días. Para Radford, (2012 citado en Villanueva 2012),

El uso amplio de los gestos explícitos, la ritmidad, el movimiento y los deícticos lingüísticos seguidos más tarde por los estudiantes, en los que se evidencia una manera novedosa de acoplar ojos y manos es la evidencia de un camino que abre nuevas posibilidades para un uso eficiente y evolucionado de las formas culturales de generalización matemática. (p. 79)

Una vez los estudiantes tienen clara la relación del día con la cantidad de huevos ubicados en la cubeta, se trabajó con el profesor uno a uno de los días dónde la gallina puso huevos.

Para el momento del cuarto día los niños enfrentan un nuevo reto, cómo las filas son de 5 casillas no saben dónde ubicar los otros dos huevos, algunos los ubican en la franja del quinto día, otros los ubican en las franjas del segundo o del primer día, pero luego se les guía diciéndoles que los huevos se ubican en la misma fila del día, encontrando estrategias como poner los huevos encima de los que ya están ubicados. Una vez solucionada la dificultad los estudiantes logran ubicar para el quinto día los 9 huevos como se muestra en la figura 10.

4.5 Quinta sesión

Como de costumbre la sesión se inicia resumiendo lo trabajado en la anterior sesión, con un recuento de la relación entre los días y los huevos a partir de la construcción una tabla numérica en el tablero para ubicar a los niños en el aumento de los huevos por día. Luego se propone buscar la cantidad de huevos para el sexto día.

Se observa que la gran mayoría de los niños recuerda la organización de los números sin tener las cubetas y los huevos en las manos, ya que le contestan al profesor cuando él pregunta por la cantidad de huevos en el primer día, segundo día, etc. Observamos que algunos ya reconocen el día sexto y dan la respuesta inmediatamente.

Para observar constatar la comprensión por parte de los niños se pasó por cada uno de los grupos dando la oportunidad a cada uno de ellos de realizar una acomodación de los huevos según el día indicado. Se pretende que la manipulación del material se realice por los estudiantes con algunas intervenciones por parte del profesor, con el fin de reconocer la secuencia en las cubetas de manera más fácil. El movimiento acompañado de acciones numéricas corresponde a una articulación de medios semióticos de objetivación que a la vez constituyen un medio de producción de significado Radford (2003).

Profesor: ¿Cuántos huevos puso la gallina el primer día?

Niños: Uno (coreando la respuesta tomando un huevo y poniéndolo en la cubeta)

Profesor: ¿Cuántos huevos puso la gallina el segundo día?

Niños: Tres (coreando y colocándolos en el orden correcto).

Los niños en general repiten la secuencia numérica comprendiendo cuantos huevos deben poner en cada una de las filas de la cubeta, no por esto se puede decir que comprenden el patrón, sin embargo, logran percibir cambios al llenar cada una de las filas con huevos; uno de los más evidentes es el aumento en cantidad mientras transcurren los días.



Figura 11: acomodación de huevos por día.

El proceso se repitió hasta que cada uno de los grupos completara el quinto día. El ingenio de los niños se hizo evidente en el cuarto día en donde se debía colocar una cantidad mayor de huevos a los espacios que tiene la cubeta en cada fila; se genera una expresión por uno de los niños “los huevos en gorrito” se refiere a colocar un huevo encima de los otros. En esta parte podemos observar el reconocimiento de la secuencia por parte de Milena, quien pregunta al profesor después de tener la fila de la cubeta llena:

Profesor: ¿Esos dos dónde van?

Milena: Señala la fila de abajo y mira al profesor.

Profesor: En el día quinto será que van.

Milena: Mueve su cabeza de derecha a izquierda en respuesta de que no y señala la fila del día cuarto.

Profesor: Eso ahí mismo ¿cómo los ponemos?

Milena: Piensa y mira al profesor, acá o acá (señala la fila uno en los espacios vacíos y luego la fila dos).

Profesor: Pero esto es para el día uno y esto para el día dos (señala las filas con un dedo) y estos huevos pertenecen al día cuatro.

Milena: Coloca en la fila cuatro los huevos encima.



Figura 12: ubicación de huevos por día.

Una vez se termina de hablar sobre la cantidad de huevos por día se les pone una nueva tarea que consistió en encontrar ¿Cuántos huevos pone la gallina el día sexto? y ¿Cuál es la cantidad total de huevos que puso la gallina? Después de recrear las organizaciones se empieza a buscar la cantidad de huevos para el sexto día a partir de los datos obtenidos por los anteriores cinco días. Se pregunta a los grupos sobre la cantidad de huevos correspondientes para el sexto día y después sobre la cantidad total de huevos existentes en la cubeta.

Por lo realizado al principio de la clase en el tablero los niños responden la pregunta rápidamente, se les entregan los once huevos y luego los ubican en la cubeta, tarea que resulta fácil porque ya tienen idea de cómo poner los huevos en la cubeta.



Figura 13: cantidad de huevos colocados en seis semanas.

Luego se les pregunta sobre el total de huevos que puso la gallina durante toda la semana, los niños empiezan a contar uno por uno los huevos haciendo uso de sus dedos, al comienzo empiezan a contar sin sentido dando valores que ellos estiman por la cantidad que ven.

Profesor: ¿Cuántos huevos hay en total?

Estudiantes: Uno dice 54 huevos, otro dice 80 huevos

Profesor: ¿Están seguros que son 54 u 80 huevos?

Estudiantes: Se quedan pensando y empiezan a contar los huevos correctamente

Cuando todos empiezan a contar (los valores disminuyen en un grupo les da 40 al comienzo), se les preguntó si estaban seguros de la totalidad de huevos, se quedan dudando de su conteo y nuevamente empiezan a contar. Como tenían los huevos un poco desordenados antes del conteo los organizan y finalmente les da 36 huevos. Al pasar por otros grupos ellos ya tenían la cantidad correcta.



Figura 14: conteo de la cantidad total de huevos.

4.6 Sexta sesión

Se inicia la sesión explicando a los niños que se volvería a retomar el trabajo que se venía haciendo con las guías de la primera sesión e inmediatamente se ubicó a los niños en la página con la que se iniciaría la tarea. En esta página aparecen cien huevos que se colorean según lo observado en las sesiones de clase, es decir, los huevos colocados por día en las cubetas, en la parte inferior izquierda de la hoja aparecen dos rectángulos de diferente tamaño, el más pequeño es para colocar el número del día y el más grande la cantidad de huevos que se colorearon ese día; en el transcurso del texto llamaremos a estos dos rectángulos casillas.

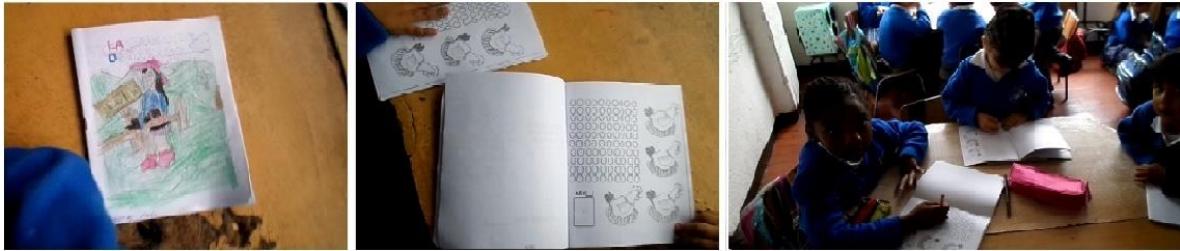


Figura 15: Cartilla.

Los rectángulos grandes y pequeños se colocaron para la comprensión de los niños, al no saber leer se identifica más fácil el tamaño en el cual debo colocar los días y en qué tamaño la cantidad de huevos.

Al comenzar con la primera hoja se les pidió a los niños que ubiquen en la casilla pequeña el primer día o el día número uno y para la casilla grande se les realiza la siguiente pregunta:

Profesor: ¿Cuántos huevos pusieron las gallinas el primer día?

Estudiantes: Uuunoo

Por la acción del eco los niños parecen tener presente la relación del día número uno con la cantidad de huevos. Luego ellos colocan el número uno en la casilla correspondiente e inmediatamente se les pide que pinten la cantidad de huevos que se pusieron en la casilla de los huevos. Los niños pintan únicamente un huevo luego se pasa a la segunda página la cual tiene el mismo contenido que la primera empezando nuevamente con las preguntas.

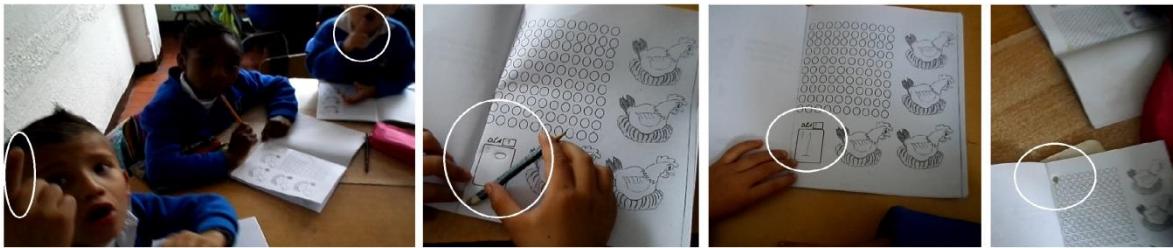


Figura 16: Solución de la cartilla.

Profesor: ¿Qué día colocamos ahora en el cuadro pequeño?

Estudiantes: Dooos

Profesor: Dos muy bien Coloque el número del día dentro del cuadro

Estudiantes: Escriben el número de inmediato

Profesor: ¿Cuántos huevos pusieron las gallinas el día dos?

Estudiantes: Treeees

Profesor: Llenen el espacio con el número tres

Estudiantes: De inmediato lo escriben

Profesor: Ahora colorean la cantidad de huevos que indica la casilla de los huevos

Los estudiantes se disponen a colorear. Luego de un rato se pasa a la tercera página que tiene el mismo contenido de la página uno. Nuevamente se les pregunta a los niños.

Profesor: ¿Qué día le corresponde a esta página?

Estudiantes: Treeees

Profesor: Coloche el número del día en la casilla que les corresponde.

Estudiantes: Los niños escriben en la casilla el número tres

Pero algunos empezaron a confundir la casilla pequeña con la grande colocando el número en la casilla incorrecta, se corrige el problema preguntándoles

Profesor: ¿Seguro que el día se coloca en esa casilla?

Estudiantes: Borran y colocan el número en donde era.

Profesor: ¿Cuántos huevos pusieron las gallinas el tercer día?

Estudiantes: Ciiinco

Profesor: Coloque el número de huevos en la casilla

Algunos estudiantes comprenden ya la dinámica y se adelantan a las instrucciones otros siguen esperando la instrucción por parte del docente.

Profesor: Coloreen ahora la cantidad de huevos que nos indica la casilla.

Los niños rápidamente reconocieron que el número de la casilla grande es la cantidad de huevos la cual se colorea.

Estudiantes: Al darse cuenta de la actividad los niños empiezan prácticamente a trabajar antes de la indicación coloreando antes de recibir la indicación.

Una vez que los niños comienzan a comprender las instrucciones para continuar con la tarea la cual comienza en el cuarto día, ellos solos realizaran los demás días. Para esta parte de la tarea, la guía fue diseñada con la intención de evaluar la secuencia numérica que los niños siguen para los diez primeros números impares a partir de los patrones secuenciales que pintan.

A medida que van trabajando, el profesor les dice sobre qué día deben estar, esto se hace con el fin de evitar que se atrasen algunos grupos o se adelanten otros.

Capítulo 5

Conclusiones

Las conclusiones desarrolladas en este trabajo presentan las acciones semióticas³ y medios semióticos⁴ de objetivación observados en cuanto al desarrollo que presentan los niños de preescolar al tratar de objetivar un saber matemático.

En este curso es vital la información recolectada en video grabaciones, ya que al no poseer escritos realizados por los alumnos, estas se convierten en la mayor fuente de información para la recolección, organización y análisis de la misma.

Las acciones semióticas desarrolladas por los niños nos muestran un claro acercamiento a los medios semióticos de objetivación planteados por Radford (2010a), los cuales no son tan claros o explícitos ya que por sus edades cronológicas no permiten expresar de forma escrita, simbólica, gráfica, etc. En donde se tiene que tener en cuenta el carácter relevante de los gestos, palabras, señas que se muestran para manifestar las comprensiones del tema.

Teniendo en cuenta el tipo de trabajo que se realizaría con niños de preescolar, se modificó una tarea desarrollada por Radford (2008a, citado en Villanueva 2012), incorporando los resultados de investigación como parte del análisis realizado por nosotros, que

³ Llamaremos acciones semióticas a todas las actividades que se realizan para dotar de sentido un ejercicio o tarea.

⁴ Llamaremos medios semióticos a todos los mecanismos que se utilizan como recursos perceptivos de expresión simbólica tales como, objetos del entorno, expresiones corporales o gestuales

permitiera a los niños desarrollar sus habilidades a través del material tangible dadas las características de sus edades.

Se observaron claramente los siguientes medios de objetivación: señalamiento, inscripción, conteo, categorías utilizadas por Villanueva (2012) que se constituyeron en parte fundamental para la comprensión de la actividad matemática de los estudiantes durante el abordaje de la tarea propuesta. De igual manera, se observó la acción semiótica de ritmicidad (Vergel, 2014b). Estos medios de objetivación también son encontrados en alumnos de mayor edad haciendo suponer que la idea de implementar el Early-álgebra en los primeros cursos de escolaridad no influye en la capacidad de preparación de los alumnos, es claro que algunos avanzaran más en un menor tiempo pero no quiere decir que los niños no puedan llegar a realizar estos avances.

Los medios semióticos utilizados por los niños permitieron también evidenciar, que ellos utilizaban sus dedos, o los huevos para llevar el conteo de la secuencia. En algunos estudiantes se notó un manejo inadecuado del conteo cuando realizaban agrupaciones, sin embargo, al final de la actividad no solo lograron mejorar sus procesos de conteo sino que también desarrollaron estrategias que agilizaron la organización de las agrupaciones para hallar fácilmente el siguiente número de la secuencia a partir de la correspondencia entre una determinada cantidad de huevos y los integrantes del grupo, dejándole al último niño los huevos restantes en este caso siempre impar para completar el siguiente número que buscaban.

Se logró capturar la atención de los niños al observar el material escrito y tangible que se les llevó, permitiendo en ciertas partes de la actividad el juego con los objetos y la participación de cada uno de los integrantes de los grupos, esto desencadenó mayor interés y compromiso con la actividad a realizar. Fue evidente que para los niños el interés por tocar, por ver, por jugar con los objetos llevados, contribuyó a una mejor comprensión del objeto matemático a estudiarse.

Al presentarles las tareas propuestas sobre la secuencia numérica a los niños, luego de un tiempo algunos de ellos lograron establecer con antelación qué número seguía, al preguntarles cómo lo hacían no podían encontrar la forma correcta de describir la razón del por qué lograban anticipar el número.

Por último observando el resultado obtenido tras la aplicación de la tarea y confrontándolo con la teoría y lo encontrado en los análisis, se pudo observar un avance en algunos grupos frente a la generalización de patrones numéricos, resultó básica la distinción del aumento al responder la pregunta de la cantidad que se encontraría al siguiente día, aunque por la edad en la que se encuentran los niños la forma de expresar una respuesta verbal no fue posible.

El desarrollo del trabajo con niños de pre-escolar nos permitió desarrollar habilidades creativas para procurar un ambiente lúdico y cercano a los estudiantes con el fin de hacer acercamientos al objeto matemático en cuestión. De igual manera consideramos que esta experiencia aportó a nuestro enriquecimiento intelectual como

docentes de matemáticas tras el primer acercamiento a los constructos teóricos de la teoría de la objetivación.

Bibliografía

- Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Bednarz, N. Kieran, C y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Montreal Canada, Kluwer Academic Publishers.
- Buber, M. (1958). Yo y tú: La práctica del diálogo vivo. Nueva York, Macmillan.
- Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22(3), 55-86.
- Duval, R. (1995). Sémiotic et pensé humaine. Mathinfo. Unistra. Suisse. Traducción española, Semiosis y pensamiento humano (1999). Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Espinosa, M. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, Granada, España.
- Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gattegno, C. (1987). *La ciencia de la educación parte 1: Consideraciones teóricas*. New York. Soluciones educativas.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife, España.

Godino J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012) Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, 26 (42B).

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and achievement in Mathematics and science.

Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. (V. Mesa, trad.). Bogotá: Una empresa Docente.

Lasprilla A. (2012). *Medios semióticos se objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales*. Trabajo de grado de especialización no publicado. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, Colombia.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Lévinas, E. (2006). Totalidad e infinito. Ensayo sobre la exterioridad, Francia, Livre de Peche.

Mason J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente*. Madrid: Labor.

Mason J. (1999). La Incitación Del Estudiante Hacia El Uso De Su Capacidad Natural Para Expresar Generalidad: Las Secuencias De Tunja. *Revista EMA* 4(3), 232-247.

Mason J. (2007). Cuadricula De La Variación Estructurada Para Explotación Y Desarrollo De Las Capacidades Matemáticas De Los Jóvenes Aprendices. *Educación Matemática*, Distrito Federal México, *Santillana* 19(1), 127-150.

Miranda, I. Radford, L. Guzmán, J. (2007). Interpretación de graficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN-. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Pretexto Grupo (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.

- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*.22(2), 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2004). Semiótica Cultural Y Cognición École Des Sciences De L' Éducation Université Laurentienne, Canadá Conferencia Plenaria Dada En La Décimo Octava Reunión Latinoamericana De Matemática Educativa Universidad Autónoma De Chiapas, Julio Del 2004.
- Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotics means of objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), proceedings of the 29th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, 1, 143-145.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*. Número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático, Editores invitados: I. Radford y B. D'Amore.
- Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.
- Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.),

Semiotics in Mathematics Education (pp.215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Elementary forms of algebraic thinking in Young students. In M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.). Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education. 4(1), 73-80.

Santos, BS. (2009). *Una Epistemología del Sur: La Reinención del Conocimiento y la Emancipación Social*. México: Siglo XXI editores.

Socas, M. Camacho, M, Palarea y Hernández. (1989). *Iniciación al álgebra*. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje: Madrid. Síntesis.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

Vergel, R. (2010). La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

Vergel, R. (2014a). El signo en Vygotsky y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios* 39, 65-76.

Vergel, R. (2014b). *Formas De Pensamiento Algebraico Temprano En Alumnos De Cuarto Y Quinto Grado De Educación Básica Primaria (9-10 Años)*. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2015a). El Proceso De Generalización. ¿Cómo Emerge El Pensamiento Algebraico? El Caso Del Pensamiento Algebraico Factual. *Uno Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 68, 9-17.

Vergel, R. (2015b). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano, *PNA*, 9(3), 193-215.

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language (Pensamiento y lenguaje)*. USA: The Massachusetts Institute of Technology.

Vygotsky, L. S. y Luria, A. (1994). *Tool and symbol in child development*. En René van der Veer y Jaan Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader*, Oxford: Blackwell Publishers, 99-174.