UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD POR MEDIO DEL JUEGO GUAYABITA

Cristian Martínez Peña

Jorge Jhonattan Castellanos

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad Ciencias y Educación

Bogotá D.C

2017

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

POR MEDIO DEL JUEGO GUAYABITA

CRISTIAN CAMILO MARTÍNEZ PEÑA (20131145018)

JORGE JHONATTAN CASTELLANOS SOSA (20112145018)

Trabajo de grado para optar el Título de Licenciatura en educación Básica con énfasis en Matemáticas

Director

EDWIN A. CARRANZA VARGAS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS

FACULTAD CIENCIAS Y EDUCACION PROYECTO CURRICULAR LEBEM

BOGOTÁ D.C 2017

Nota de aceptación

Evaluador

BOGOTÁ D.C 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco antemano a nuestro director, Edwin Carranza Vargas por guiarnos y apoyarnos condicionalmente para la elaboración del respectivo trabajo, a la vez a mi compañero Jhonattan Castellanos que puso a prueba sus conocimientos y habilidades en la implementación del trabajo propuesto, logrando así los objetivos y expectativas planeadas. A los directivos del Colegio Liceo Nacional Antonia Santos, por permitirnos implementar el trabajo en sus espacios académicos, por lo tanto agradezco a la profesora Sandra Cepeda por brindarnos sus consejos y experiencias en relación a la implementación de actividades en el aula de clase. A los estudiantes de grado 603 J.M por su colaboración y dedicación al aprendizaje, y no menos importante a mí mamá la cual ha estado pendiente de mi proceso académico hasta el momento.

Cristian Camilo Martínez Peña

Agradezco al Dios primeramente por habernos permitido tener esta grata experiencia con los alumnos del curso 603 del colegio Liceo Nacional Antonia Santos, de igual manera a la profesora Sandra Cepeda (Profesora de Matemáticas del curso) por brindarnos su apoyo y dejarnos la libertad para poder implementar nuestras actividades. Agradecemos a los profesores Edwin Carranza Vargas y Jhon Bello Chávez por las revisiones hechas a nuestro trabajo, ya que sin ellas no pudiéramos haber logrado nuestro objetivo. Por ultimo agradezco a mi compañero Cristian Martínez por sus ideas que hicieron trascender nuestro trabajo.

Jorge Jhonattan Castellanos Sosa

DEDICATORIAS

Este trabajo va dedicado a aquellas personas que estuvieron a mi lado y confiaron en mí, en especial a mí mamá la cual me ha apoyado condicionalmente en mi proceso académico, en mis sueños y en mi vida.

Cristian Camilo Martínez Peña

El presente trabajo está dedicado principalmente a Dios, ya que sin él no hubiera sido posible todo lo logrado, por las experiencias que se obtuvieron, los frutos que quedaron y por el conocimiento formado. Gracias a todos lo que hicieron posible este trabajo.

Jorge Jhonattan Castellanos Sosa

Tabla de contenido

Introducción

El siguiente trabajo se realiza a partir de una inquietud, sobre el uso de los juegos de azar para la enseñanza de la probabilidad. Lo que conlleva a proponer una secuencia didáctica para fomentar el aprendizaje de la probabilidad por medio del juego guayabita para estudiantes de grado sexto. Por lo tanto en este trabajo se presentará una justificación en donde se planteen argumentos respecto al desarrollo del presente trabajo en términos de su importancia para la comunidad de enseñanza de las matemáticas. Posteriormente se plantea el objetivo general, a través del cual se orienta el trabajo desarrollado, teniendo en cuenta además los objetivos específicos. Luego de ello está la pregunta orientadora, la cual refiere cómo a partir del juego de azar de la Guayabita (en su forma tradicional de jugabilidad y sus diferentes maneras de juego) se puede enseñar la probabilidad llegando a expresiones de razón Laplaciana a estudiantes de grado sexto. Por tal motivo el presente trabajo cuenta con un marco matemático correspondiente al objeto de estudio que se llevara a cabo, en este caso en relación con el mundo de la probabilidad. A la vez cuenta con un marco metodológico, el cual está estructurado en relación a la teoría de situaciones fundamentales para la ejecución de la secuencia y el aprendizaje de la probabilidad por medio de los juegos de azar. A partir de lo anterior se dará a conocer la secuencia didáctica que se les propondrá a los estudiantes para la enseñanza de la probabilidad con base a los juegos de azar, no obstante se mostrará un análisis detallado de la experimentación que ha de tener los estudiantes con la secuencia. Por último se realizara una reflexión individual en donde se presentarán las posturas de los integrantes del presente trabajo, respecto al desarrollo, sentimientos y experiencia vivida en la elaboración de este, dando como prioridad si se han de alcanzar o no los objetivos planteados y el nivel de trabajo logrado respecto a la pregunta orientadora planteada.

Justificación

Los juegos de azar a través de la historia han llamado el interés del hombre por comprender su funcionamiento tan incierto a simple vista, para entender y saber cuándo es conveniente seguir apostando o retirarse según las posibilidades que haya hasta ese punto del juego. No obstante este tipo de entendimiento se refuerza mientras más se juega y allí se comienza a ver las regularidades que ocurren en el juego. Este trabajo muestra este análisis de las regularidades que surgen del entendimiento del juego "GUAYABITA", juego que se examinará con la finalidad de encontrar patrones probabilísticos que se hacen explícitos en su desarrollo, utilizando a su vez la probabilidad Laplaciana para hacer su caracterización y su formalización. Para Batanero (2005) el punto de partida de la teoría de la probabilidad surge al resolver algunos problemas ligados a juegos de azar.

Es por lo anterior que el objetivo del trabajo es implementar una secuencia didáctica en relación al juego guayabita para la enseñanza de la probabilidad entendida como "formas posibles sobre formas totales de ocurrencia", llegando así a la probabilidad Laplaciana.

Objetivos

Objetivo General

Implementar una secuencia didáctica en relación al juego guayabita para la enseñanza de la probabilidad entendida como “formas posibles sobre formas totales de ocurrencia”, llegando así a la probabilidad Laplaciana.

Objetivos Específicos

- Proponer actividades que generen connotaciones implícitas y explicitas de conteo por medio del lenguaje verbal y simbólico.
- Trabajar situaciones que involucren diferentes métodos de conteo que contribuyan a la probabilidad Laplaciana.

Pregunta Orientadora

¿Cómo a partir de los juegos de azar se puede enseñar la probabilidad llegando a expresiones de razón Laplaciana?

Ruta de Aprendizaje

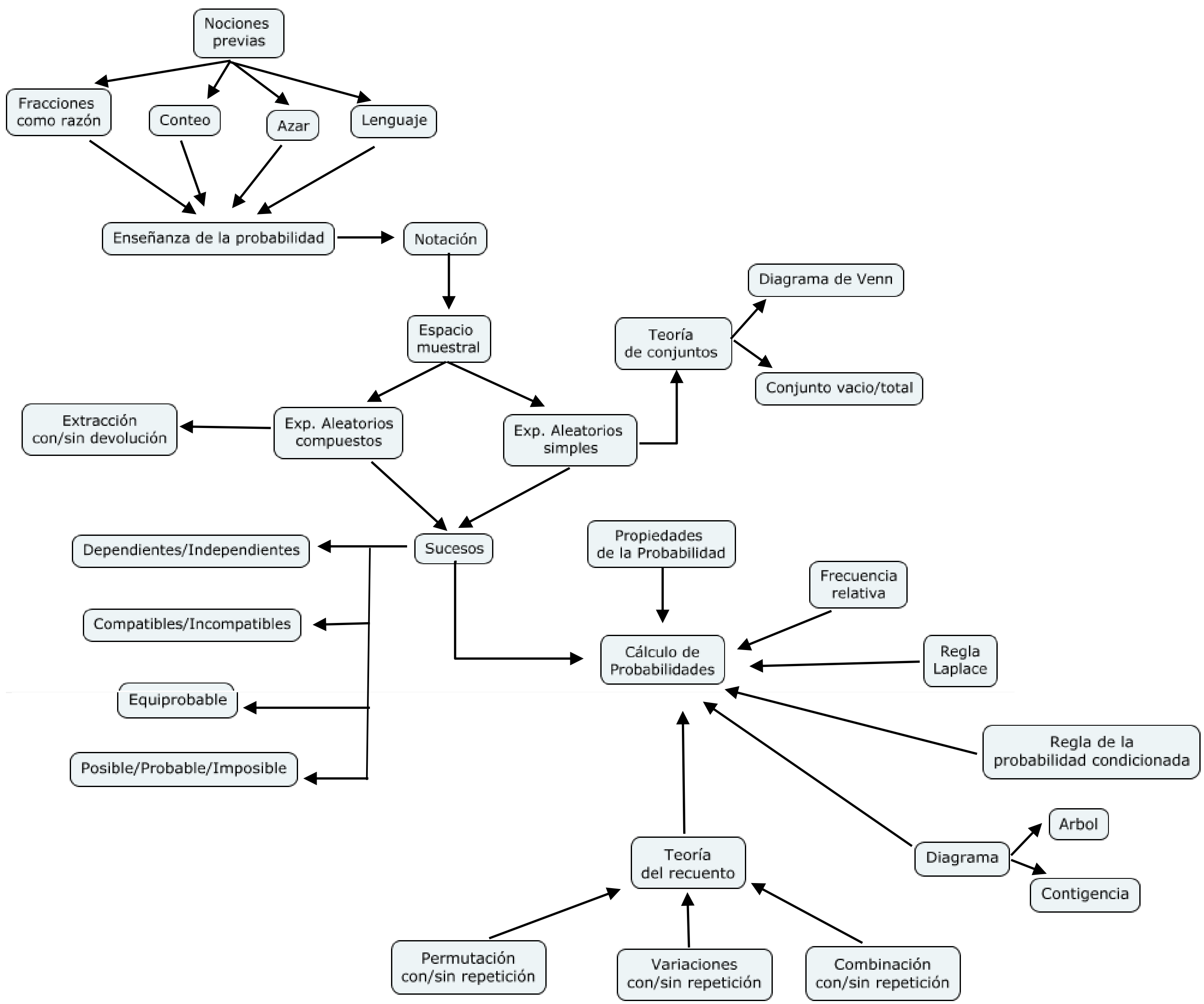


Ilustración 1. Ruta de aprendizaje en relación a los conceptos probabilísticos.

Marco Teórico

Marco Metodológico

Para la elaboración de la secuencia didáctica se implementará la metodología general de aprendizaje propuesta por Tobón, Pimienta, García (2010), metodología que está compuesta por:

Identificación de la secuencia didáctica

Hace referencia a los aspectos formales para la elaboración de la secuencia didáctica, es decir el grado de escolaridad, la asignatura a trabajar, el objeto matemático a enseñar, la duración, etc. Lo anterior se diseña a partir del currículo establecido para el nivel educativo y el área.

Problema significativo del contexto

Un aspecto fundamental de la secuencia didáctica es que está destinada a formar y evaluar procesos y competencias del estudiante, por tal motivo la secuencia requiere de problemas significativos que involucren el contexto del estudiante, en otras palabras, un problema real con sentido, que podría darse en un contexto familiar, educativo, social y político del estudiante.

Por otro lado, para determinar el problema a trabajar, se propone que sea elaborado por el docente como por el estudiante, dentro de cuatro niveles de participación en la formulación del problema que son:

- *"Nivel inicial-receptivo:* El docente formula el problema en la secuencia didáctica y así se aborda con los estudiantes. Lo que hacen éstos es comprender el problema.
- *Nivel básico*: El docente formula el problema en la secuencia didáctica y los estudiantes pueden hacer alguna mejora o adaptación en su planteamiento.
- *Nivel autónomo*: El docente plantea en forma general un problema en la secuencia didáctica y los estudiantes lo concretan a partir del análisis, indagación, etcétera.

- *Nivel estratégico:* El docente formula un problema muy general, o un área problema global, y los estudiantes identifican el o los problemas concretos que se abordarán en el proceso de formación y evaluación. Éste es el máximo nivel de participación" Tobón, Pimienta, García (2010 pág. 66)

Actividades concatenadas

Teniendo claro las situaciones problema, los procesos y contenidos a formar en los estudiantes, se da paso a establecer las actividades de aprendizaje y evaluación. Para lo anterior se busca que las actividades estén articuladas entre sí y que sean independientes entre ellas, esto con el fin de que contribuyan a la resolución de problemas. Es por ello que en la secuencia didáctica se trabajan cuatro aspectos en relación a las actividades que son:

1. Organización de las actividades, para ello se propone:

- Entrada o inicio.
- Desarrollo.
- Terminación, salida, cierre o conclusiones.

2. Planeación de las actividades que se realizaran con apoyo del profesor a cargo del curso. Donde es necesario que dichas actividades deben de orientar al desarrollo de las competencias y procesos de los estudiantes, en este caso de grado sexto.
3. Identificar las actividades que los estudiantes deben de realizar en su tiempo autónomo con el fin de buscar la complementariedad y continuidad sobre el tema a trabajar (probabilidad).
4. Por último, se establece el tiempo o duración del desarrollo de cada actividad dentro del aula, teniendo en cuenta el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Marco Didáctico

Una pregunta muy grande que surge a cerca de la enseñanza de cualquier tema matemático en la escuela es, ¿por qué se incluye este en el currículo obligatorio?, pregunta que es fácil responder si se tiene en cuenta que todo debe servir para poder ser aplicado a la vida cotidiana de cualquier sujeto, no obstante va mucho más allá de esto. A continuación se muestran cinco razones que expone Godino (1991) en las que se resuelve dicha pregunta:

- *"Para ser parte de la educación general deseable para los futuros adultos ciudadanos.*
- *Que sea útil para la vida posterior tanto para el trabajo como para el tiempo libre.*
- *Ayude al desarrollo personal.*
- *Ayude a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior.*
- *Constituya la base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados." (Pg. 11)*

Básicamente todo gira en torno a la construcción del desarrollo personal intelectual que pueda servir en el futuro del estudiante, por tanto temas como el aprender a leer, escribir, geometría, sumar, restar, multiplicar, dividir (aritmética), son temas muy útiles en cualquier trabajo simple por ser las bases que nos permiten avanzar hasta cierto punto "singular" en la vida de cualquier persona. Sin embargo después de dicha barrera "singular" existe una serie de eslabones más que sirven para comprender mejor el entorno que nos rodea, el cual va más allá de una simple aritmética u operatividad algorítmica, hablamos de la **probabilidad.**

Esta concepción parece estar muy relacionada con cada uno de nosotros, una muestra de ello aparece cuando hablamos con un amigo nuestro al mencionar que por ejemplo, después de haber mirado por la ventana y haber visto el cielo nublado, decir -*"es muy probable que llueva hoy",* o cuando necesitamos coger transporte y todos los buses han pasado llenos, diremos que "*es muy posible que los otros buses vengan llenos"* es una forma implícita en la que se establece relaciones del azar con el lenguaje natural de cada persona, además de que estas frases se relacionan con una deducción que determinó el hecho de ser *probable* o *posible*, por lo que la acción de observar por la ventana y ver el cielo nublado indica que, como ya se ha visto muchas veces que después de que el cielo se nubla llueve, entonces es muy probable de que suceda lo mismo, así con el bus, la deducción está en que si se está en hora pico y todos los buses pasan llenos, es muy posible que los demás pasen así, por lo que esto es un claro ejemplo de la utilización de un lenguaje probabilístico con el lenguaje cotidiano. Bressan (2008) menciona 68 sinónimos correspondientes a este primer lenguaje probabilístico:

Acaecer	*De ninguna manera*	*Improbable*	*Por fortuna*
Accidental	*De rebote*	*Incidental*	*Por suerte*
A ciegas	*Descartable*	*Incierto*	*Por ventura*
Aceptable	*Desechable*	*Inconcebible*	*Posible*
Albur	*Desusado*	*Indeterminado*	*Presumible*
Aleatorio	*Difícil*	*Inesperado*	*Probabilidad*
Aparente	*Duda*	*Inopinado*	*Probable*
Azar	*Empardar*	*Insólito*	*Raro*
Casual	*Equiprobable*	*Inusual*	*Razonable*
Casualidad	*Esperado*	*Inverosímil*	*Seguro*
Certeza	*Eventual*	*Inviable*	*Siempre Posible*
Chance	*Factible*	*Nunca*	*Similar*
Ciertamente	*Fortuito*	*Ocasional*	*Sin intención*
Común	*Frecuente*	*Paridad*	*Sin plan*
Contingente	*Impensado*	*Plausible*	*Sin querer*
Creíble	*Imposible*	*Podría ocurrir*	*Verosímil*
De chiripa	*Imprevisible*	*Por chiripa*	*Viable*

Figura 1. Tomada de Bressan (2008) Probabilidad y Estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes (Pg.41)

Sin embargo no todos son igual de recurrentes, entre los que más destacamos su utilización en este lenguaje son lo probable, seguro, posible, improbable, imposible. Estas palabras son subjetivas en torno a la probabilidad del suceso, ya que según la probabilidad de este se le asigna un adjetivo correspondiente, es decir algo muy *probable* de suceder seria determinado como algo *seguro*, o con *certeza* de suceder, y algo que tiene poca probabilidad de ocurrencia seria asociado a un suceso *imposible*, o *improbable*, algo que *nunca* sucederá. De esta manera sabemos que todos no estamos completamente apartados de una noción de azar y de probabilidad, por lo cual es un camino correcto el utilizar este lenguaje para iniciar con una enseñanza de la probabilidad.

Por lo anterior ya se sabría por dónde comenzar la enseñanza de la probabilidad, pero la siguiente pregunta sería ¿cómo enseñarlo?, de esta manera es conveniente pensar en un recurso adecuado con el que alumno pueda aprender de una manera divertida y que involucre relación con sus pares, de este modo surge el juego como un actuante y motivante crucial en el aprendizaje de conceptos matemáticos, así Fernández y Rodríguez (1997) mencionan que el juego:

"…es una de las formas más frecuentes utilizadas por el niño para manifestarse: es una actividad próxima, más espontanea del escolar, y por ende más adecuada para ser empleada en el desarrollo intelectual" (pg. 11);

De esta forma se parte de una actividad próxima que potencializa un fácil aprendizaje del concepto, y que contribuye a su desarrollo intelectual.

Después de ya tener claro el dónde y el cómo, es hora de tener en cuenta la percepción e intuición del alumno, conceptos que juegan un papel muy importante en lo que entiende éste, por lo cual Vigotsky (1995) menciona que:

"(…) la percepción, por ejemplo, estaba conectada siempre de un modo idéntico con la atención, la memoria con la percepción, el pensamiento con la memoria. Como constantes, estas relaciones podían ser, y eran, descompuestas en factores, e ignoradas en el estudio de las funciones separadas." (Pg. 10)

Por lo que es importante no tomar estas funciones principales por separado (atención, memoria, pensamiento) ya que según Vigotsky no se tendrá una correcta percepción, así es conveniente la utilización de herramientas que ayuden a la memoria, como lo es la "hoja de conteo" (que se expondrá mas adelante), también a la atención gracias al mismo juego, y por último el desarrollo del pensamiento, que surge y se potencializa con la interacción de las dos anteriores, de este modo se tendrá una percepción más eficiente.

Ligado a lo anterior en torno al análisis de las implementaciones, en relación a los razonamientos probabilísticos y las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en cuanto a sus intuiciones, el trabajo de Batanero (2001) que presenta en su libro "Didáctica De La Estadística", muestra las dificultades y errores más frecuentes que" presentan los estudiantes en relación a la probabilidad y la estadística. De esta manera es pertinente enfatizar en los errores y dificultades que estos presentan en la probabilidad. Con relación a lo anterior, Batanero menciona las Investigaciones sobre desarrollo cognitivo realizadas por Piaget y Fischbein; esta investigación ha de referirse a los conocimientos previos que poseen los estudiantes, sabiendo que estos no solo aprenden en las instituciones escolares, sino que a la vez han de aprender de experiencias de su entorno, ya sean sociales o familiares, que se irán modificando a través del tiempo. Pero en el caso de la probabilidad hay temas o casos abstractos no tan ligados a las experiencias directas de los niños, por lo tanto es de gran importancia estudiar el razonamiento de los estudiantes en relación a los sucesos aleatorios o probabilísticos. En este caso Piaget citado por (Batanero,

2001) afirma y postula tres etapas en relación a la edad del sujeto, "*sabiendo que el aprendizaje es un proceso lento que en el camino ha de encontrarse con conflictos que se deben de superar" (pg.56)*. En el caso del razonamiento probabilístico las etapas son:

Preoperatoria: Esta fase se considera necesaria para el aprendizaje de las primeras nociones del concepto, lo cual lleva a la necesidad de manipular objetos reales para su correspondiente entendimiento, pero a la vez el estudiante se basa en las experiencias empíricas de su vida cotidiana para así comprender el concepto.

Operaciones abstractas: Se caracteriza por las manipulaciones simbólicas en relación al fenómeno, sacando así hipótesis y conclusiones, comprendiendo así el significado del objeto matemático en particular.

Ligado a las etapas anteriores surgen una serie de conceptos los cuales Heitele en su libro *"El proceso de Educación"* (1960) citado por (Batanero 2001) indica que ayudan a sentar el concepto de probabilidad y estadística. Estos conceptos se deben tener en cuenta en la enseñanza escolar porque son los que construyen dichas bases conceptuales:

1. *"El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.*
2. *Cualquier tema puede ser enseñado efectivamente en alguna forma correcta a cualquier niño en cualquier estado de desarrollo, lo que implica que las ideas fundamentales son una guía necesaria desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad.*
3. *La ideas fundamentales son aquellas ideas y conceptos que se usarán en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una "espiral curricular".*

4. *La transición a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido preparado en una representación conveniente en etapas cognitivas anteriores." (Pg. 18)*

La evolución de las concepciones probabilísticas es gracias a las ideas fundamentales que *"(…) proporcionan al niño modelos explicativos eficientes en cada etapa de su desarrollo, que difieren en los distintos niveles cognitivos, no de una forma estructural, sino sólo de una forma lingüística y en su nivel de profundización. Por ejemplo, si un niño, al lanzar dos dados concede más probabilidad al 7, porque hay más sumas con éste valor, tiene un modelo apropiado, que puede evolucionar al más complejo de aplicación de la regla de Laplace, e incluso al de variable aleatoria y moda de su distribución de probabilidad." (Batanero, 2001, Pg. 19)*

Estas concepciones fundamentales hacen que el alumno tenga unas bases conceptuales más fuertes porque estas son reforzadas desde el inicio, de esta forma la construcción del concepto fundamental de probabilidad estará mejor establecido porque sus bases estarán bien asentadas, es parecido a lo mencionado por Vigotsky (1995) cuando dice que lo que aprende el estudiante debe acomodarlo sobre sus conocimientos previos para que el conocimiento se valla construyendo sobre unas bases sólidas, así cuando el alumno se tope con un conocimiento que le es extraño, este lo pueda asimilar y aprender de manera más fácil si ha tenido unas bases fuertes en el pasado las cuales se relacionan con el nuevo conocimiento a aprender.

No obstante cuando no se logra este objetivo de manera adecuada se llega a lo que menciona Batanero (2010) como una "intuición errónea" la cual es una manera en la que el alumno crea un modelo de solución del problema en el que la explicación de este le complace, pero por esto no le permite una continuación a un estadio más complejo, en palabras textuales una "intuición errónea" va a favor de:

"(…) un modelo de explicación que le satisface, pero no permite continuación a un estadio más elaborado." (Pg. 19)

De esta forma la intuición juega un papel importante, Batanero (2010) las define como "*Modelos intuitivos explicatorios"*, lo cuales tienen dos funciones:

- *"En una edad temprana ayudan al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente.*
- *Preparan el conocimiento analítico posterior." (Pg. 19)*

Así se va construyendo el conocimiento mediante la interpretación de las acomodaciones conceptuales para establecer el aprendizaje del concepto como tal, como ya se mencionó anteriormente. También las primeras acciones referentes a un suceso aleatorio con respecto a los alumnos son acerca de "*asignar números a los sucesos aleatorios, de forma que estos números reflejen nuestro grado de creencia en su verificación (…) Podemos comparar sucesos muy dispares, en base a su mayor o menor probabilidad."* (Pg. 19), por lo que los procesos de intuición juegan un papel importante en el análisis, la resolución y solución de la situación aleatoria.

Por otro lado Fischbein como se cita en (Godino 1996) propone que los estudiantes han de tener nociones parciales sobre los conceptos probabilísticos. Basándose así en las intuiciones, que se consideran un proceso cognitivo que interviene en las acciones prácticas o mentales, además porque estas surgen cuando necesitamos elegir decisiones cotidianas, ahí se habla de estimaciones intuitivas de posibilidades. Fischbein propone dos intuiciones las cuales son las primarias y las secundarias:

Intuiciones primarias:

"(…) son las adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o la apreciación de que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir." (Pg. 37)

Por tanto estas intuiciones se adquieren directamente por las prácticas de los estudiantes sin darles alguna instrucción, un ejemplo de esto como menciona Fischbein es la identificación de la equiprobabilidad.

Intuiciones secundarias:

"(…) consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela. Como ejemplo puede servir la idea de que un móvil conserva su estado de movimiento o de reposo mientras no intervenga una fuerza exterior." (Pg. 37).

Por lo cual estas intuiciones se adquieren a partir de una instrucción, formadas principalmente en las instituciones educativas, transformándose en si en un sentimiento, en una creencia. Hay que tener en la cuenta que el aprendizaje de la probabilidad es un proceso en que los estudiantes deben de manipular inicialmente objetos que le permitan ir construyendo el concepto, detallando a la vez las ocurrencias que suceden en aquellos fenómenos en la vida real. Para esto Batanero (2001) propone cinco fases que son:

Intuición del azar

Para la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, hay que verificar que los estudiantes tengan nociones básicas del azar, es decir que diferencien y reconozcan los sucesos de aleatoriedad. Para Piaget e Inhelder citados en (Batanero 2001) *"la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños concebirían el azar como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado. En consecuencia, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios."*(Pg. 58). Esto lleva a pensar a Piaget de que en el niño no hay una intuición innata en relación al azar, pero esto es rechazado por Fischbein como se citó en (Batanero 2001) "*la intuición primaria del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años"* causa de que en la fase preoperatoria mencionada anteriormente, los niños interactúan con objetos de la vida real basándose en respuestas empíricas para comprender el concepto y uno de ellos es el del azar.

La estimación de la frecuencia relativa

En esta segunda fase el estudiante con conocimiento del concepto de azar, puede apreciar los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia en un experimento aleatorio. Lo que para Batanero (2001) *"el niño adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios"* (Pg.60.). Esta estimación se puede analizar mejor en los procesos que hacen la población de adolecentes a comparación de los niños, ya que mientras los niños se encuentran en una fase *preoperatoria* los adolescentes por se encuentran en una fase mayor *periodo de las operaciones formales* en la cual una predicción tiene un resultado práctico analizando las frecuencias relativas mediante operaciones formales y así predecir lo que puede suceder en el fenómeno aleatorio.

La estimación de posibilidades y noción de probabilidad

Bien se sabe que los niños en un principio *periodo preoperatorio* han de tener dificultad en reconocer el concepto de probabilidad por falta de bases básicas como lo es la habilidad de distinguir lo que es el azar y lo deducible, el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios. Y que para que dichas bases se vallan formando el sujeto ha de experimentar con objetos reales y sucesos que lo lleven a forjar dicho concepto en su proceso aprendizaje. Por lo cual los estudiantes han de implementar unas series de estrategias para así solucionar situaciones probabilísticas, Cañizares citado por (Batanero 2001) hace énfasis en las mismas proponiendo el siguiente cuadro:

A) Comparación del número de casos posibles: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas.	*Es propia del período pre operacional. Los niños sólo tienen en cuenta el número de casos posibles de ambas cajas, sin comparar las proporciones de bolas blancas y negras.*
B) Comparación del número de casos favorables: Consiste en elegir la caja que contenga más bolas del color favorable.	*De los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Corresponde, al final del nivel pre operacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y sus partes.*

D) Estrategias aditivas: Se tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, pero comparan los datos por medio de alguna operación aditiva.	*Es característicos del período de operaciones concretas.*
E) Estrategia de correspondencia: Se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción y se aplica a la otra fracción.	*A falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones son comparables en forma inmediata. Aparece durante el periodo de operaciones concretas, se desarrolla en el periodo de operaciones formales, para ir transformándose en una estrategia puramente multiplicativa.*
F) Estrategias multiplicativas: Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Consiste en la aplicación de la regla de Laplace.	*Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. Es propia del periodo de operaciones formales.*
G) Otros tipos.	*Hacer referencia a la suerte o elegir el color favorito.*

(Pg. 62).

De esta forma se parte de lo empírico a lo formal en la escuela, proceso que ciertamente es cíclico ya que lo que se ha formalizado gracias al análisis y al profesor se vuelve a poner en práctica, no obstante de nuevo surgen conceptos y cosas que no se logran acomodar hasta hacer una reestructuración adecuada del concepto por parte del maestro, de esta forma para convertir una información en una intuición no es suficiente la explicación teórica del fenómeno por parte del maestro, sino que el alumno debe utilizarla en sus propias acciones y predicciones a lo largo de su desarrollo intelectual con el medio. Pero para que lo anterior suceda es pertinente generar estas acciones y predicciones a una temprana edad, ya que para Sáenz citado por (Fuentes, Ignacio y Aranzabal 2006) *"el sistema educativo tradicionalmente entrena el pensamiento causal, introduciendo desde los primeros años de escolarización una visión determinista del mundo (física newtoniana, variables funcionalmente ligadas por una relación determinista...) en forma de leyes de «obligado cumplimiento»"* (Pg. 247) lo que genera a la vez una enseñanza tardía de la probabilidad.

Por otro lado y de acuerdo con las "intuiciones primarias" Godino (1996) indica que en esta etapa el niño es incapaz de hacer estimaciones correctas las posibilidades a favor y en contra de un suceso aleatorio, por lo que este no posee:

- *"La habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible sobre la base de procedimientos operacionales;*
- *El concepto de proporción o, en términos más generales, la comparación por razón;*
- *Los procedimientos combinatorios por medio de los cuales es posible realizar un inventario de todos los resultados posibles en una situación dada." (Pg. 40)*

Lo que implica que el estudiante presente problemas o dificultados como lo es el *sesgo a la equiprobabilidad* nombrado por Batanero (2001) y por Fuentes, Ignacio y Aranzabal (2006) cuya dificultad refiere a que los estudiantes identifican que es un suceso aleatorio y por lo tanto afirman que todo puede ser probable, *"creencia por parte de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquéllos en que no es aplicable el principio de la indiferencia"* (Fuentes, Ignacio y Aranzabal. 2006. Pg. 247) .

Sin embargo estas características no son obstáculo para que se presenten juicios probabilísticos y estimaciones por parte de los alumnos, además, si se quiere llegar a una forma Laplaciana de expresar la probabilidad se debe reforzar el ámbito de proporción y razón, y de esta manera introducir la forma entendida como *"(…) la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles*" (Godino, 1996, Pg. 21). Además el efecto de una instrucción adecuada después del trabajo con las intuiciones primarias ayuda a mejorar el raciocinio y las repuestas de los alumnos en torno a la comparación de posibilidades en algún suceso aleatorio, todo este trabajo de generalización, acomodación y contextualización es propio de las intuiciones secundarias. De este modo a través de la realización de esquemas operacionales que ayudan a la interpretación de las situaciones, el niño va adquiriendo la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, por lo que después de haber trabajado sobre las intuiciones primarias es más fácil trabajar operaciones combinatorias que en cierto sentido son propias de análisis y lógica.

Con respecto al "Periodo de las operaciones Concretas" Godino (1996) habla sobre el desarrollo psicológico de la intuición probabilística del niño en torno respecto a las operaciones combinatorias en niños entre los 10 y 11 años: Durante este periodo:

“(…) los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, y llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error.

Los experimentos de Fischbein han demostrado que al final de este periodo (10-11 años) los niños pueden, con la ayuda de instrucción, asimilar los procedimientos enumerativos usados en la construcción de diagramas de árbol.” (Pg. 43)

No obstante después de que el alumno llega al *“periodo de las operaciones formales”* Godino (1996), este adquiere la capacidad de usar maneras mecánicas para realizar inventarios o *“procedimientos sistemáticos para realizar inventarios” (Pg.45)* de todas las permutaciones, combinaciones y variaciones de un conjunto dado de elementos ya que se ha realizado un proceso de “intuiciones secundarias” por lo que la formalización de las operaciones combinatorias ya son propias del estudiante, es por ello que utiliza maneras mecánicas para la solución de un problema combinatorio.

En cuanto a los errores pertenecientes a los estudiantes hay de tipo sistemático, que son los que surgen de la aplicación errónea de la fórmula o de una interpretación sistemática errónea de un problema con un problema parecido ya trabajado por su similitud en el análisis, también existen los de tipo psicológico que surgen de concepciones erróneas establecidas y por ende procedimientos descaminados por dicha interpretación equivoca. Khaneman, Slovic y Tversky (1982) citados por Godino (1996) explican que existen dos tipos de errores comunes entre los estudiantes acerca de la probabilidad, estas son la “representatividad” y la “disponibilidad”. Además indican que la persistencia de estos errores es muy común en personas que entran al ámbito universitario ya que en la enseñanza escolar de la probabilidad se tiene en cuenta una mirada desde Kolmogorov (conjuntos, espacios muestrales, variables aleatorias) la que no ayuda a superar este tipo de errores.

La estrategia errónea de la “representatividad” surge de las siguientes actitudes:

- *“Insensibilidad a las probabilidades a priori y no consideración de las proporciones de los sucesos compuestos en la población.*
- *Desconocimiento de los efectos del tamaño de la muestra sobre la precisión de las estimaciones.*
- *Confianza, sin fundamento, en una predicción basada en informaciones no validas (supersticiones, etc.).*
- *Errores de azar, tales como la <<falacia del jugador>>, según la cual, en pruebas repetidas independientes, la aparición de una racha a favor de un resultado aumenta la probabilidad del contrario.”* (Godino, 1996. Pg. 48)

Ejemplo de este error seria elegir la opción b en el siguiente problema, ya que no establece la relación de proporción entre la probabilidad y la población:

-La probabilidad de que nazca una mujer es de 1/2 ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable que aparezca en una serie de seis nacimientos?: (H: hombre, M: mujer)

a) MHHMHM

b) MHMMMM

Los errores de tipo “disponibilidad” consisten *“(…) en la tendencia a hacer predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose en la mayor o menor facilidad con la cual es posible recordar o construir ejemplos de ese suceso (…)”* (Pg. 48), lo que *“crea un sesgo sistemático en* *las estimaciones probabilísticas, porque la gente tiende a pensar que los resultados que pueden recordarse fácilmente son más probables" (Pg. 47)*

Una muestra de este error ocurre en el siguiente ejemplo (Godino, 1996, Pg. 49):

-Considere los siguientes cuadros:

a)

x x x x x x x x

x x x x x x x x

x x x x x x x x

b)

x x

x x

x x

x x

x x

x x

x x

x x

x x

¿En cuál de los cuadros hay más formas posibles para pasar de la primera fila a la última?

a) En ***a)*** b) en ***b)*** c) el mismo número

Acá el mayor número de respuestas que se obtienen corresponde a a) debido a que al parecer es más fácil encontrar caminos en el cuadro para pasar a la última fila, cuando en realidad en ambos casos hay el mismo número ($8^3 = 2^9$).

Otra concepción clave en la cual se tienen errores es acerca de la identificación del espacio muestral, este es complicado en torno a la forma de encontrar todas las posibles maneras en las que un experimento aleatorio puede resultar, sin embargo hay herramientas que contribuyen a la identificación de este como lo es el juego, por ende la significancia del juego es dotar *"de sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral."* (Batanero, 2001, pg.20), de esta forma el juego ayuda a la identificación de las posibilidades del experimento, limitando su conjunto y sus elementos. Así tenemos una herramienta que nos ayuda a disminuir errores de espacios muéstrales.

Sin embargo una cosa es la identificación de los elementos del espacio muestral, y otra cosa es el comportamiento de estos elementos, así llega la concepción de simetría ligada a una distribución normal que se presenta en varios comportamientos probabilísticos, por ejemplo que en el lanzamiento de dos dados es más regular el número 7 que los demás, pero el 6 tiene las mismas posibilidades de salir que el 8, por lo que es una cuestión de análisis combinatorio, en este Batanero (2001) menciona *"(…) que un dado u otro dispositivo generador de resultados aleatorios cumpla las condiciones de simetría no es un hecho que pueda deducirse de la teoría matemática, sino de la experiencia."(pg.22),* por lo que el juego, de nuevo sirve como el instrumento que por medio de la experiencia muestra un comportamiento de simetría a favor del entendimiento de la distribución normal dentro del espacio muestral.

Marco Matemático

Ha de saberse que el origen de la probabilidad está sumamente ligado a los juegos de azar, los cuales llevaron al estudio de poder predecir el resultado de cada suceso, es decir buscar un patrón o regularidad. Para ello se han hecho diversos intentos de formalizarlo, dando lugar a otras tantas definiciones, la más relevante es la axiomática que propone Kolmogorov en 1933 que es:

Método clásico (Formula de Laplace):

Dado un experimento aleatorio con un espacio **Ω** *finito de n de resultados posibles (sucesos), todos ellos equiprobables de un suceso* **A***, que contiene m (cantidad de casos favorables) se designa mediante* **P(A)***, que es la razón entre la cantidad de casos favorables para la ocurrencia de* **A** *y la de casos posibles. Esto se obtiene mediante la fórmula.*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

A partir de esta definición ha de tener en cuenta las siguientes observaciones que son:

Observación 1. De la definición dada se obtiene que cada suceso elemental tiene probabilidad 1/n. Se dice en este caso que los sucesos son equiprobables o en otras palabras que tienen la misma probabilidad.

Observación 2. Para cualquier suceso **A** se debe de cumplir que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Observación 3. Para llamar suceso *seguro* al espacio de sucesos elementales **Ω**, se debe cumplir que:

$$P(\Omega) = 1$$

Observación 4. Para que el suceso sea imposible se debe cumplir que $P(\emptyset) = 0$ ya que el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto del espacio muestral Ω sin elementos, se obtiene que su probabilidad es nula.

Teniendo en la cuenta que los sucesos son subconjuntos de resultados elementales del experimento aleatorio del espacio muestral (Ω) se puede encontrar en ellos los siguientes términos:

Suceso complementario a un suceso A: Es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica A. Se acostumbra a denotar con el símbolo $\bar{A}$.

Sucesos incompatibles: Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

A = {a, b}, B = {d, e}

O en otras palabras Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$$A \cap B = \emptyset$$

Probabilidad frecuencial o empírica

Sin embargo, también existe otra forma de poder saber la probabilidad de ciertos sucesos, diferente a la forma Laplaciana y es por medio de la probabilidad frecuencial o empírica, de este modo se necesita saber ciertos conceptos estadísticos básicos para su definición:

Conceptos Básicos (Gorgas, Cardiel, Zamorano, 2011)

<u>POBLACIÓN:</u> Es una colección finita o infinita de elementos con características comunes. Ejemplo: las personas, libros de una biblioteca, etc. Algunas poblaciones son finitas y pueden

conocerse; otras pueden ser infinitas y abstractas: Ej. el conjunto de hoteles, establecimientos comerciales de una ciudad o el conjunto de todas las piezas fabricadas por una máquina.

VARIABLE: Toda característica que puede tomar diferentes valores (Ej. número de hijos, precio de la habitación) Las variables se suelen denotar por letras mayúsculas: X, Y,... Estas se caracterizan en:

- **Cualitativas o Categóricas:** aquellas que no son medibles, es decir, aquellas cuyas observaciones no tienen carácter numérico. Expresan cualidades o categorías. Ej. estado civil, sexo o profesión. (A las variables cualitativas también se les llama atributos).
- **Cuantitativas:** aquellas que son medibles, es decir sus observaciones tienen carácter numérico. Estas se dividen a su vez en: •Discretas; que toman valores enteros en un conjunto numerable. Ej. Número de habitaciones de un hotel, número de hijos de una familia, número de obreros de una fábrica. Y •Continuas; la cuales toman valores en un conjunto no numerable (los números reales o un intervalo). Ej. peso, estatura.

MUESTRA: Es un subconjunto de la población. Se denota por **(N)**.

DATO: cada valor observado de la variable. Si representamos por X a la variable, representaremos por X_i cada dato diferente observado en la muestra, el subíndice “i” indica el lugar que ocupa si se ordenan de menor a mayor.

MEDICIÓN: La asignación o magnitud que se aplica a las categorías o clases de acuerdo a ciertas reglas o símbolos. Una medición se puede definir como la manera de obtener símbolos para representar propiedades de personas, objetos, eventos o estados cuyos símbolos tienen la misma relación relevante entre si igual a las entidades que representan.

Escalas de medición de las variables

Escala de Medición Nominal: Consiste en clasificar a los elementos, personas, animales, etc, asignándoles símbolos o nombres. Los datos que se obtienen para una variable cualitativa se miden en una escala nominal y simplemente se clasifican en distintas categorías que no implican orden.

Propiedades:

- No intervienen mediciones, ni escala, en vez de esto solo hay cuentas o conteos.
- No existe un orden específico para esta categoría.
- No presentan el cero.
- No se basa en diferencia cuantitativa.

Escala de Medición Ordinal: Establece una relación de orden entre los elementos (personas, animales, objetos, etc.), en atención a una característica, sin que reflejen distancia entre ellos. La diferencia entre dos números ordinales no tiene significado cuantitativo, sólo expresan que una situación es mejor que otra.

Propiedades:

- Las observaciones o elementos se les ordena en rangos o categorías diferentes.
- Las categorías son mayores o menores que otras categorías, es decir, que existe una clasificación de mayor a menor (jerarquía).

- Las categorías son mutuamente excluyentes y exhaustivas.
- No presentan el cero.

Distribuciones de frecuencias

La distribución de frecuencias es una disposición tabular de datos estadísticos, ordenados ascendente o descendentemente, de acuerdo a la frecuencia de cada dato. Estas son:

- Frecuencia Absoluta (n_i): Definida como el número de veces que aparece repetido el valor en cuestión de la variable estadística en el conjunto de las observaciones realizadas. Si N es el número de observaciones (o tamaño de la muestra), las frecuencias absolutas cumplen las propiedades:

$$0 \leq n_i \leq N \;\; ; \;\; \sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

- Frecuencia Absoluta Acumulada (N_i): Suma de las frecuencias absolutas de los valores inferiores o igual a X_i, o número de medidas por debajo, o igual, que X_i. Evidentemente la frecuencia absoluta acumulada de un valor se puede calcular a partir de la correspondiente al anterior como:

$$N_i = N_{i-1} + n_i \;\; ; \;\; y \;\; N_1 = n_1$$

Además la frecuencia absoluta acumulada del ´ultimo valor será $N_k = N$

- Frecuencia Relativa (f_i): Cociente entre la frecuencia absoluta y el número de observaciones realizadas N. Es decir

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Cumpliéndose las propiedades

$$0 \leq f_i \leq 1 \ ; \quad \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{N} = 1$$

- Frecuencia Relativa acumulada (F_i): Cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número de observaciones. Coincide además con la suma de las frecuencias relativas de los valores inferiores o iguales a X_i

$$F_i = \frac{N_i}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{i} n_j}{N} = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{N} = \sum_{j=1}^{i} f_i$$

La última frecuencia relativa acumulada es 1; $F_k = 1$

Representación común de la distribución de las frecuencias

Para ello se utiliza una tabla que presenta de manera ordenada los distintos valores de una variable y sus correspondientes frecuencias. Su forma más habitual es la siguiente:

Variable (X_i)	n_i	N_i	f_i	F_i
X_1	n_1	n_1	${n_1}/{n}$	f_1
X_2	n_2	$n_1 + n_2$	${n_2}/{n}$	$f_1 + f_2$
…	…	…	…	…
X_n	n_n	$n_1 + n_2 + \cdots + n_n$	${n_n}/{n}$	$f_1 + f_2 + \cdots + f_n$
Total	$\sum n_i = n$		$\sum f_i = 1$	

Distribución normal

Por otro lado se encuentra la distribución normal la cual para Gorgas, Cardiel y Zamorano (2011) es la más importante de las distribuciones continuas los cuales afirman que "(…) *se debe a que describe con gran aproximación la distribución de las variables asociadas con muchos fenómenos de la naturaleza. En particular, las medidas de magnitudes físicas suelen distribuirse según una distribución normal"* (p. 90). La función de distribución normal, útil para el cálculo de probabilidades, vendrá dada por:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

La distribución normal se representa gráficamente por la campana de Gáuss, simétrica centrada en μ y con anchura proporcional en σ (Figura 1). Donde el punto máximo de la función de densidad ocurre que $x = \mu$ y por lo tanto allí se encuentran la media, la moda y la mediana.

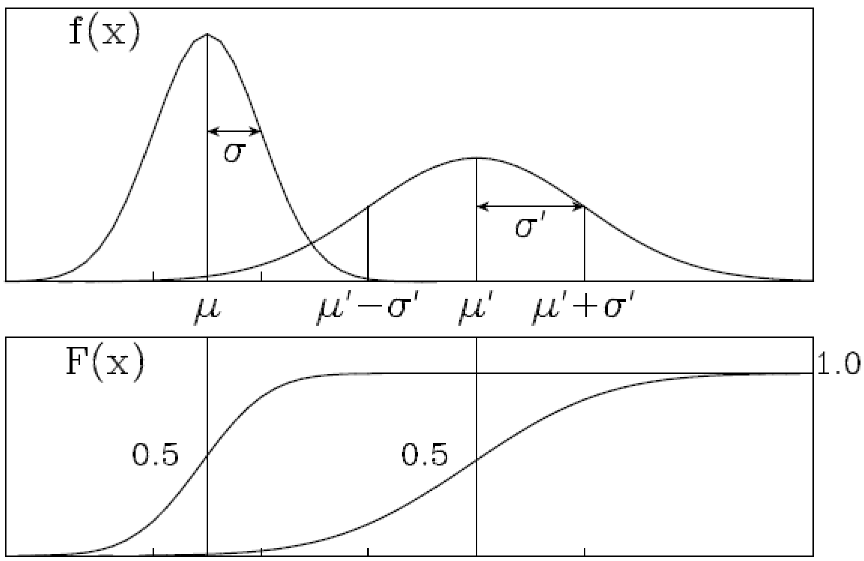


Figura 2. f (x), corresponde a la función de densidad, y F(x) para la distribución normal. En donde se muestran las representaciones de μ y de σ.

Distribución normal tipificada

Para encontrar todos los posibles valores que toma μ y σ se implementa la **distribución normal tipificada** la cual se determina por Z a partir de una transformación lineal de la variable original X de la forma:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La frecuencia relativa y la concepción clásica

De esta forma, cuando se quiere observar la probabilidad frecuencial del suceso $\boldsymbol{X_i}$ simplemente se observa su frecuencia relativa ($\boldsymbol{f_i}$). El principal elemento en este enfoque es que el concepto de probabilidad debe ser "objetivo" y sujeto a demostración práctica a través de la experimentación (Godino ,1996)

$P(\boldsymbol{X_i}) = \boldsymbol{f_i}$

Para Gorgas, Cardiel y Zamorano (2011), la forma más directa de saber la posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio es repetir dicho experimento muchas veces. De esta forma, supongamos que se repita **n** veces el experimento y llamemos n_A, o frecuencia absoluta de A, al número de veces en que ocurre el suceso A. Se puede definir entonces la **probabilidad P(A) del suceso A** como:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Frecuencia\ absoluta\ del\ suceso\ A}{\#\ de\ veces\ que\ se\ repite\ el\ experimento}$$

Es decir, *P(A)* es el límite cuando ***n*** tiende a infinito de la frecuencia relativa del suceso *A*. Puede observarse que si el suceso ocurre siempre $n_A = n$ y $P(A) = 1$, y, al contrario, si el suceso no ocurre nunca, su probabilidad $P(A) = 0$. De esta forma, la probabilidad de un suceso estará comprendida entre 0 y 1 ($0 \leq P(A) \leq 1$), y el suceso será tanto más probable cuanto más se acerque a 1 su probabilidad.

Definición axiomática de la probabilidad

Si **Ω** es un **espacio muestral** con **n** elementos, entonces la probabilidad de un evento A es el cociente $\frac{m}{n}$, donde *m* es el número de elementos de A

Esto se denota: $P(A) = \frac{m}{n}$

Axiomas de Probabilidad (Morales, 2012)

Sea **Ω** un espacio muestral y sean A y B dos eventos cualesquiera de este:

- Axioma 1: P(**Ω**) = 1
- Axioma 2: P(A) ≥ 0 ; $\forall A \subseteq$ **Ω**
- Axioma 3: P(A $\cup B$) = P(A) + P(B) ; si A ∩ B = ∅

  En general, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_i)$ con $A_i \cap A_j = \forall\ i \neq j$

De estos axiomas es posible determinar algunas propiedades y consecuencias:

Teorema 1:

a) $P(\emptyset) = 0$

   Demostracion:

   Ω = Ω ∪ ∅

   P (Ω) = P Ω ∪ ∅**)**

   P (Ω) = P (Ω) + P (∅**)** **Pues Ω** ∩ ∅ = ∅

   1 = 1 + 0

   0 = P (∅**)**

b) P(A^c) = A ∪ A^c

   Demostración

   P (Ω) = P (A ∪ A^c**)**

   P (Ω) = P (A) + P (A^c**)** **Pues** A ∩ A^c = ∅

   1 = **P (**A) + P (A^c**)**

   1 - P (A) = P (A^c**)**

c) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

Demostración

$B = A \cup (B - A)$

$P(B) = P[A \cup (B - A)]$

$P(B) = P(A) + P(B - A)$ Pues $A \cap (B - A) = \emptyset$

Luego, $P(A) \leq P(B)$

Corolario

$0 \leq P(A) \leq 1$

Demostración

$\emptyset \leq A \leq \boldsymbol{\Omega}$

$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\boldsymbol{\Omega})$

$0 \leq P(A) \leq 1$

Teorema 2:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración

$A \cup B = A \cup (B - A)$

$P(A \cup B) = P[A \cup (B - A)]$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ Pues $A \cap (B - A) = \emptyset$

$P(A \cup B) - P(A) = P(B - A)$ (1)

Por otro lado

$B = (A \cap B) \cup (B - A)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$ Pues $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$

$P(B) - P(A \cap B) = P(B - A)$ (2)

De (1) y (2)

$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Demostración

$A \cup B = (A - B) \cup B$

$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B)$ Pues $(A - B) \cap B = \emptyset$

$P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$

Corolario

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Demostración

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$

$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C]$

$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$

$= P(A) + P(B) – P(A \cap B) + P(C) – P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) – P(A \cap B) + P(C) – [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) – P(A \cap B) – P(A \cap C) – P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Teorema 3

Sea **Ω** un espacio muestral y A un evento de **Ω, A ⊆ Ω,** entonces

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k)$

$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ Donde A_i son eventos cuya unión es A

Demostración

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k$

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k)$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) \cup P(A_3) \cup \ldots \cup P(A_k)$ Pues $A_i \cap A_j = \emptyset$

$P(A) \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

Estrategias de Conteo

En los problemas de probabilidad ha de existir casos en que los sucesos elementales son igualmente probables, es decir son aquellos que tienen como resultado varios de los elementos del espacio muestral, teniendo en la cuenta que la probabilidad de un suceso elemental es $1/n$, donde n es el número de puntos del espacio muestral. Estos fenómenos se conocen como sucesos compuestos los cuales se pueden calcular a partir de las propiedades de la probabilidad, pero el problema recae en calcular a n.

Para la solución de este problema se cuenta con herramientas u estrategias muy útiles como lo es la **regla de la multiplicación** la cual para Gorgas, Cardiel y Zamorano (2011) establecen que: "(…) una operación puede realizarse de n_1 formas y, por cada una de éstas, una segunda operación puede llevarse acabo de n_2 formas, entonces las dos operaciones pueden realizarse juntas en $n_1 n_2$ formas (número de puntos del espacio muestral)" (p.59). Pero para calcular n de forma general ha de utilizar el **análisis combinatorio** el cual se divide en tres expresiones que son, variaciones, permutaciones y combinaciones, en seguida se mostrará las definiciones de cada una:

Definición 1: Dado un conjunto de m elementos, se llaman **variaciones** de m elementos tomados de n en n (con $n \leq m$) a todos los subconjuntos de n elementos que se pueden formar del conjunto original, con la condición de que dos subconjuntos se consideran distintos cuando difieren en algún elemento o en el orden de colocación de ellos. El número de variaciones se representa por Vm, n y se calcula por

$$V_{m,n} = m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1).$$

Usando la definición de factorial: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ se puede escribir la expresión anterior como

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Definición 1.1: Las **permutaciones** de n elementos son el caso particular de las variaciones de m elementos tomados de n en n en que m es igual a n. Es decir, representan las diferentes formas de ordenar n elementos. Su número se representa por P_n y se calcula por

$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

Para que esto sea consistente con la definición (1) de las variaciones, se toma por convenio que 0! = 1.

Definición 1.2: Dado un conjunto de m elementos, se llaman **combinaciones de m elementos tomados de** n en n a todos los subconjuntos de n elementos que se pueden formar del conjunto original, con la condición de que dos subconjuntos se consideran distintos cuando difieren en algún elemento.

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times \ldots \times n}$$

Esta expresión también se puede escribir como

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$$

Secuencia de Actividades

Prueba Diagnóstico

Nombre: ____________________________________ Curso: _________ Fecha: ___________

1) Entre los siguientes acontecimientos, ¿cuáles dependen del azar y cuáles no? (Escriba **Si** o **No**):

● Ganaré la lotería. **( )**

● Amanecerá mañana. **( )**

● Al soltar una piedra caerá al suelo. **( )**

●Saldrá sello al caer la moneda. **( )**

● Mañana será un nuevo día. **( )**

● Ganaré apostando en el hipódromo. **( )**

● Pasará de nuevo un gato negro frente a mi ventana. **( )**

2) Beto el pastelero debe hacer un pastel de cumpleaños para 30 personas. Para este debe utilizar 10 huevos a parte de los demás ingredientes. Entonces:

- ¿Cuántos huevos necesita para hacer un pastel para 40 personas? ¿Por qué?
- ¿Con 6 huevos podría hacer un pastel para cuantas personas? ¿Por qué?

3) En un juego de televisión de “EL PRECIO ES CORRECTO” hay un concursante que debe sacar una canica de 10 que hay en una caja negra. En esta caja hay 3 canicas **Rojas**, 5 **Verdes** y 2 **Azules**. Escribe la probabilidad que corresponda:

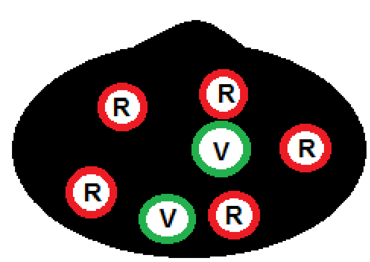
Canicas **Verdes** DE

Canicas **Azules** DE

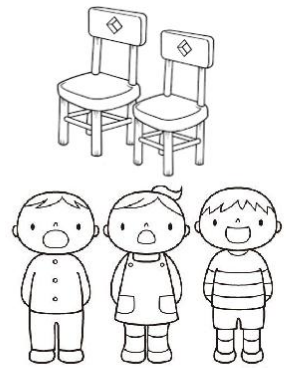
Canicas **Rojas** DE

4) Imagina una bolsa negra que contiene 7 bolas las cuales no se pueden distinguir las unas de las otras mediante el tacto. 5 de esas bolas son rojas y 2 son verdes. Sin mirar sacas una bola y resulta que es roja. La metes de nuevo en la bolsa y procedes a extraer otra;

Argumenta las siguientes preguntas:



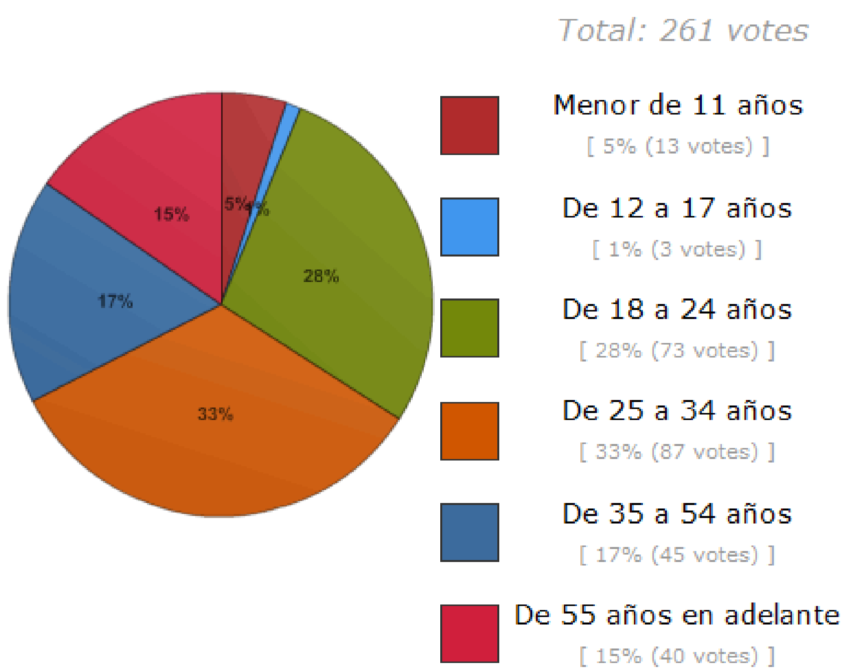
- ¿Piensas que ahora es más fácil o más difícil sacar una bola roja? ¿Por qué?
- Imagina que después de haber sacado la bola roja **NO** la introduces de nuevo en la bolsa. ¿Y ahora? ¿Es más fácil o más difícil sacar la bola verde que una roja? ¿Por qué?



5) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 3 niños en 2 sillas?

Explica tu respuesta.

6) La siguiente gráfica muestra la edad de un grupo personas que entró al Museo del Oro de Bogotá en un domingo cualquiera:



Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué probabilidad hay de que cualquier persona tú puedas saludar un domingo dentro del museo sea menor de edad? ¿Por qué?
- ¿Qué probabilidad de encontrar un mayor de 35 años hay? ¿justifica tú respuesta?
- ¿La probabilidad de hallar una persona entre 25 y 54 años es la misma que cualquier otra persona que yo pueda encontrar dentro del museo? ¿Por qué?

“La Carrera”

Justificación.

Es importante que los estudiantes puedan ir relacionándose con juegos en los que se pueda ver el uso y la conformación de la probabilidad, además en donde puedan hallar frecuencias y puedan ver en manifiesto estas probabilidades. A continuación se muestra la situación del juego *“la carrera”* y su modo de juego, además cabe indicar que este tiene una finalidad de ejercitar la recolección, organización, visualización y análisis de datos de los estudiantes para con el juego.

Propósitos

- Generar empatía entre el estudiante y el juego.
- Recolectar, organizar, visualizar y analizar datos pertenecientes a lo que ocurre en el juego.
- Poder identificar probabilidades y regularidades por medio de frecuencias de datos obtenidos en el juego.

Descripción:

Materiales:

- Tablero de juego
- 10 fichas (5 para cada jugador)
- Dos dados
- Hoja de Conteo (se muestra más adelante)

El juego se desarrollará en parejas con el siguiente tablero:

2						■
3						M
4						E
5						T
6						A
7						■
8						M
9						E
10						T
11						A
12						■

Reglas del juego

1. Cada jugador debe elegir 5 casillas cualquiera de las que están numeradas del 2 al 12 para poner sus fichas.

2. Por turno, lanzan los dados cada uno de los contrincantes. Si la suma de los dados es uno de los números escogidos por el lanzador, éste avanza una casilla hacia delante.

3. Si la suma de los dados es un número del adversario, las fichas quedan como están.

4. Gana el jugador que consiga llevar todas sus fichas hasta la meta.

<u>1ra parte</u>: Se hará que los estudiantes jueguen 2 partidas, mientras deben contar el número de la obtención de cada resultado con los dados en el formato de siguiente ("hoja de conteo"):

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
1												
2												
Total												

Por lo cual, si en la primera partida salió 5 veces el nuero 7, entonces debo colocar un 5 debajo del número 7 en la fila de la primera partida. Paralelamente los estudiantes deben ir analizando las siguientes preguntas que se deben responder al finalizar las 10 partidas:

- ¿Qué números para poner las fichas elegiría con preferencia?
- ¿Qué números no escogería con frecuencia para poner las fichas?
- Si tuviera que escoger entre el 3 y el 11, ¿cuál tomaría?
- Si tuviera que escoger entre el 5 y el 9, ¿cuál tomaría?
- ¿Qué números prefieres: “grandes” o “pequeños”?
- ¿Da igual los números que se escojan?
- ¿Todo es cuestión de suerte?

Hipótesis (1ra Parte)

Primero que todo, un ejemplo de los resultados que un grupo puede tener podría ser de la siguiente manera (teniendo en cuenta que ya se ha realizado un orden y sistematización de los datos obtenidos):

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X	2	10	8	10	11	4	6	3	2	1
2	X	3	5	5	11	1	6	2	5	1	2
3	0	1	6	5	2	5	3	X	11	2	1
4	2	2	1	3	3	11	10	5	5	X	2
5	2	2	5	X	10	8	11	3	6	3	3
6	1	3	X	5	11	5	4	8	5	3	1
7	1	2	11	9	6	8	6	6	X	0	2
8	1	X	3	7	4	11	5	6	3	0	2
9	1	X	7	8	10	6	11	6	1	5	1
10	2	2	2	5	3	11	X	5	3	1	0

Por tanto con esto los estudiantes analizarían que hay más posibilidades de que los dados caigan en un número central, pero mucho más para el número 7 ya que hay más formas posibles de formar el número con los dados, esto se puede ver cuando sumen los resultados que obtuvieron por número en la tabla anterior, luego se tendrá que analizar por qué sucede esto, por lo que sería una de las preguntas que direccionarían la actividad, **¿Por qué es más posible que caiga el número 7?;** no obstante se quiere lograr que los estudiantes puedan ver todas las formas en las que pueden resultar los números en los dados, y por ende poder comparar los resultados del juego y finalmente comprobar porque el número más recurrente es el 7.

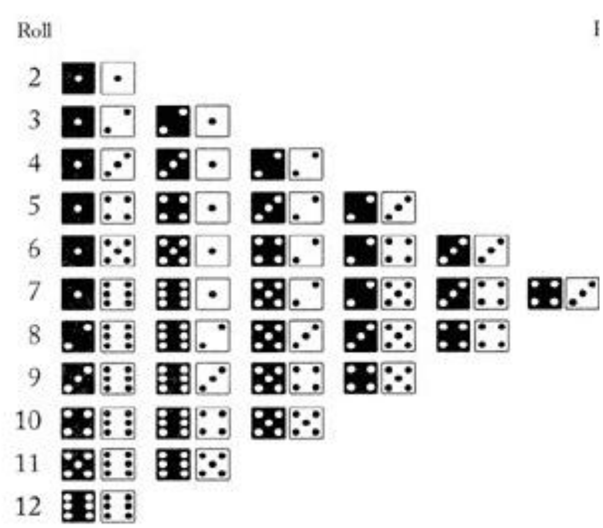


Figura 3. Espacio muestral explicando por qué el número más ocurrente en aparecer al tirar los dados es el 7.

<u>2da parte:</u> En esta se quiere que los estudiantes puedan trabajar la noción probabilística a partir de los datos obtenidos en el juego y lo que se logró estudiar de este, por lo que se les hacen las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son todas las formas posibles de que salga algún número con dos dados según lo analizado?
- ¿Cuantas formas de obtener un 5 y un 9 puedo tener?
- ¿Qué razón representaría el número de formas de obtener un 3 respecto a todas las formas posibles?
- ¿Qué razón representaría el número de formas de obtener el 7 respecto a todas las formas posibles?
- ¿Qué razón de las que se puede obtener por cada número con respecto a las totales es más grande?
- Si la razón de obtener un 11 es la misma de obtener un 3, entonces. ¿Habría las mismas posibilidades de obtener esos dos números en cualquier lanzamiento?

De esta manera se empezara a asociar la noción de probabilidad mediante una razón, por lo que la solución de las preguntas por parte de cada grupo se debe institucionalizar de tal modo que los estudiantes comprendan la forma como se conforma esta razón y el nombre de “probabilidad” que se le asocia al resultado de la división de los números de dicha razón.

Metodología

Como ya se había mencionado, todo el desarrollo de la actividad será por parejas, de este modo las conjeturas pueden reforzarse por el pensamiento de dos individuos por medio de la manipulación con el juego. Sin embargo las preguntas que se realizaron son clave para la dirección de la actividad, pero existe las también el caso en el que el profesor plantee preguntas que ayuden a centrar las ideas de los grupos, preguntas pertenecientes a la situación (juego) utilizado.

Recursos

- Tablero del juego con fichas y dados
- Hoja de Recuento

“Reconociendo el juego Guayabita”

Justificación

La siguiente actividad “Reconociendo el juego” es de suma importancia, ya que es esta la que permite crear los primeros lazos entre el estudiante y el profesor. A la vez Rodríguez y Fernández (1997) afirman que el juego es una de las formas más frecuentes empleadas por el niño para manifestarse, es la actividad más espontanea del escolar y por tanto la más adecuada para el desarrollo intelectual.

Por otro lado, el objeto matemático a trabajar está relacionado a la probabilidad en relación con el espacio muestra que conlleva a experimentos aleatorios compuestos y simples, estos a la vez llevan a sucesos dependiente e independientes, compatibles e incompatibles, a lo equiprobable, a lo posible, imposible y probable. Pero también los sucesos conllevan al cálculo de probabilidades donde está inmerso la regla Laplace.

Objetivos:

General

- Implementar el juego “guayabita” con la finalidad de que los estudiantes de grado sexto se familiaricen con el recurso, enriqueciendo su proceso de enseñanza en relación a conceptos probabilísticos.

Específicos

- Introducir al estudiante a situaciones probabilísticas a través del recurso “guayabita” con el fin de poder abordar estos objetos de una forma distinta a la tradicional.

- Proponer en el aula un material manipulativo que le permita a los estudiantes de grado sexto adquirir implícitamente nociones probabilísticas.
- Darle la posibilidad al estudiante, de emplear diferentes métodos de resolución, para contestar el fenómeno probabilístico.

Descripción del Juego "Guayabita"

El juego requiere de un dado y de chaquiras que se nombran "el case", a la vez debe de estar integrado máximo de cuatro estudiantes, que deben seguir las siguientes reglas:

- Todos los participantes acuerdan un valor mínimo de chaquiras, que se va denominar "El case".
- Para poder participar en una partida, cada uno de los participantes debe realizar un aporte a la mesa con el valor mínimo acordado.
- Una vez que cada jugador haya realizado el aporte del "case" a la mesa, la partida estará lista para iniciar.

Ahora para conocer el participante que dará apertura al juego, cada uno realiza un lanzamiento del dado y el que obtenga el mayor número, será el iniciador del juego. El siguiente participante que continúa es el que se ubique a mano derecha y así sucesivamente.

Dinámica

- Cada jugador tiene derecho a dos lanzamientos del dado con la siguiente excepción: si el participante obtiene un 1 o un 6 en el primer lanzamiento, no tiene derecho a un segundo lanzamiento y deberá realizar un aporte a la mesa del valor del "case" si le sale el 1 o recoge el valor del "case" si le sale el 6.

- Si el participante en el primer lanzamiento del dado obtuvo un número diferente a 1 o 6, tiene el derecho a realizar una apuesta no mayor al valor que hay en la mesa, antes de realizar el segundo lanzamiento. El objetivo es obtener en el segundo lanzamiento un número mayor que en el primero para así obtener lo que apostó, ahora si obtiene un número igual o menor que el primer lanzamiento, el participante deberá de colocar en la mesa el valor que apostó.

Primer Lanzamiento	
	Deberá aportar al "case"
	Deberá recoger el "case"

Primer Lanzamiento	
	Tiene el derecho a realizar una apuesta antes de realizar el segundo lanzamiento

El juego finaliza cuando ya no existan más chaquiras en la mesa para apostar. Si se decide iniciar una nueva partida cada jugador deberá aportar nuevamente el "case".

Situación

Juega con tus compañeros apostando las chaquiras que creas pertinente y da respuesta a cada una de las preguntas.

- ¿Qué sucede al jugar con tus compañeros?
- ¿El resultado del segunda lanzamiento depende del resultado del primer lanzamiento? ¿Por qué?
- ¿Cada número tiene la misma probabilidad de salir en cada lanzamiento? ¿Por qué?
- ¿Cómo pude explicar los sucesos que están pasando al jugar?
- ¿Quién ha de-tener la mayor posibilidad de perder y ganar en cada lanzamiento? ¿Por qué?
- ¿Qué es lo más conveniente para ganar el juego? ¿Por qué?

“Guayabita con dos Dados”

Después de haber trabajado el juego de “la guayabita” y “La Carrera” se trabajará la mezcla de estas dos, es decir la “Guayabita con dos Dados”. Esta actividad de nuevo consta de un duelo entre los estudiantes que en la actividad anterior jugaron guayabita. Antes de mostrar las reglas del juego se tendrán las mismas indicaciones iniciales (pre-juego) para este:

- Todos los participantes acuerdan un valor mínimo de chaquiras, que se va denominar “El case”.
- Para poder participar en una partida, cada uno de los participantes debe realizar un aporte a la mesa con el valor mínimo acordado.
- Una vez que cada jugador haya realizado el aporte del “case” a la mesa, la partida estará lista para iniciar.

Primera Parte

Reglas:

- Si cae 2 o 3 el jugador debe poner el valor del “case” en la mesa.
- Si cae 11 o 12 el jugador deberá coger el valor del “case” que había puesto en la mesa.
- Si cae un numero comprendido entre 4 y 10 el jugador decide si quiere apostar una parte del “pozo” o todo el “pozo”, si decide no apostar le corresponde lanzar a próximo jugador, si este decide apostar debe sacar en el segundo lanzamiento un número **MAYOR** al que sacó en el momento que apostó. Si sale un número menor o igual el jugador debe colocar el valor al que aposto al pozo.

- El juego finaliza cuando ya no existan más chaquiras en la mesa para apostar. Si se decide iniciar una nueva partida cada jugador deberá aportar nuevamente el “case”.

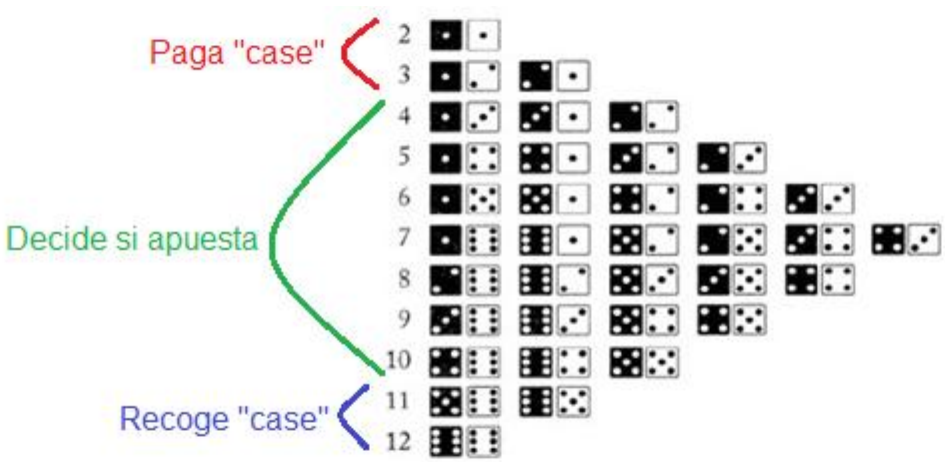


Figura 4. Explicación de la modificación del juego con el espacio muestral.

Lo principal de esta actividad es examinar la manera que los estudiantes analizan la condicionalidad dada por el apostar, por medio de las posibilidades de los dados para cada pareja de números, por lo cual sería más fácil apostar si me sale un número menor a 7 ya que tendría más formas de que me salga un número mayor. Para esta finalidad se hacen las siguientes preguntas:

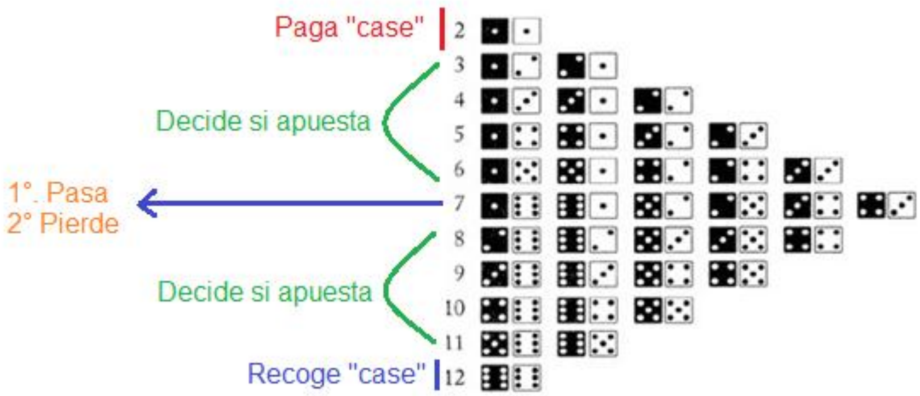
1. ¿Con que números es más fácil ganar si se apuesta? ¿Por qué?
2. ¿Es más probable ganar si decido apostar con un número **menor** a 7? ¿Por qué?
3. ¿Es más probable ganar si decido apostar con un número **mayor** a 7? ¿Por qué?
4. ¿Tendría la misma probabilidad de ganar con un 8 que con un 6? ¿Por qué?
5. ¿Es conveniente apostar todo el pozo cuando obtengo un 5 en el primer lanzamiento?

6. La probabilidad de que en el primer lanzamiento tenga que colocar “case” es la misma de tener que poner “case” ¿Por qué?

Segunda Parte

Después de que los estudiantes respondan estas preguntas se hará un cambio de reglas del juego en el cual se pueda analizar de forma distinta. Los mismos criterios iniciales pre-juego del “case” se mantienen. Las reglas serán las siguientes:

- Si cae 2 el jugador debe poner el valor del “case” en la mesa.
- Si cae 12 el jugador deberá coger el valor del “case” que había puesto en la mesa.
- Si cae un 7 en el primer lanzamiento le corresponde al siguiente jugador.
- Si cae un 7 en el segundo lanzamiento (después de apostar) el jugador debe colocar el valor apostado en el “pozo”.
- Si cae un número entre 3 y 6 el jugador decide si quiere apostar por una porción del pozo o todo el pozo. Si quiere ganar la apuesta este debe sacar un número **MENOR** al obtenido en el primer lanzamiento.
- Si cae un número entre 8 y 11 el jugador decide si quiere apostar por una porción del pozo o todo el pozo. Si quiere ganar la apuesta este debe sacar un número **MAYOR** al obtenido en el primer lanzamiento.



Ya que se ha modificado, tanto el comportamiento de los jugadores como del juego, se obtendrá unas respuestas distintas a las preguntas planteadas anteriormente:

1. ¿Con que números es más fácil ganar si se apuesta? ¿Por qué?
2. ¿Es más probable ganar si decido apostar con un número **menor** a 7? ¿Por qué?
3. ¿Es más probable ganar si decido apostar con un número **mayor** a 7? ¿Por qué?
4. ¿Es conveniente apostar todo el pozo cuando obtengo un 5 en el primer lanzamiento? ¿Por qué?
5. ¿Tendría la misma probabilidad de ganar con un 8 que con un 6? ¿Por qué?
6. La probabilidad de que en el primer lanzamiento tenga que colocar “case” es la misma de tener que poner “case” ¿Por qué?

De esta manera compararemos los dos resultados obtenidos a estas preguntas por las dos formas de juego realizados para determinar:

1. ¿En qué juego es más fácil ganar al apostar? ¿Por qué?
2. ¿Las probabilidades de que caiga cada par de números es la misma en cada juego? ¿Por qué?

3. ¿Dónde es más probable ganar con un 4? ¿Por qué?
4. ¿La probabilidad de ganar con un 6 y un 8 es la misma en ambos juegos? ¿Por qué?
5. ¿En qué juego es mejor apostar todo el pozo habiendo obtenido un 8 en el primer lanzamiento? ¿Por qué?
6. ¿Qué estrategia es mejor, siempre apostar una parte del pozo, o todo el pozo siempre?, ¿en qué casos no? Explica tu respuesta.

Análisis De lo Obtenido

Protocolo Diagnóstico

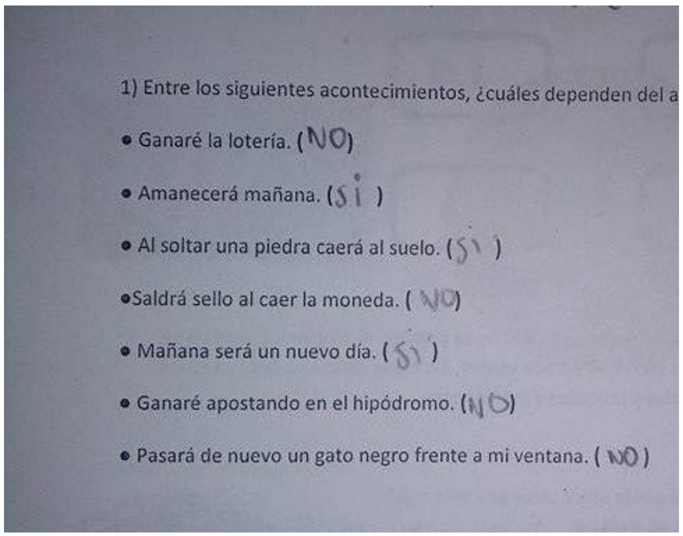
Figura 5. Implementación de la metodología propuesta, fase: Diagnóstico.

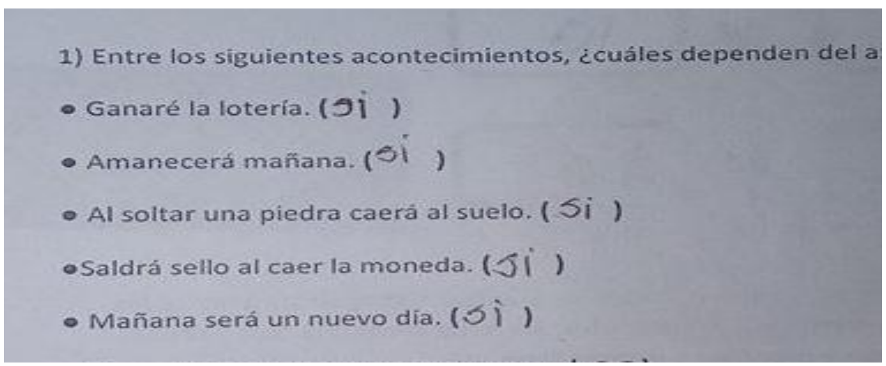
Descripción:

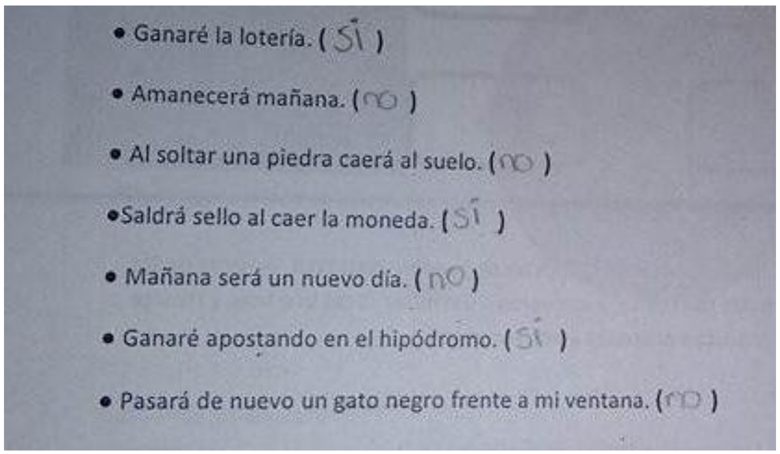
La actividad diagnóstico del grado sexto, tenía como objetivo identificar los conceptos previos que tienen los estudiantes en relación a la probabilidad. Es por lo anterior que se propuso seis puntos, los cuales tenían un objetivo específico cada uno. El primero estaba relacionado con el azar, proponiendo a los estudiantes que marcaran con un sí o un no los acontecimientos dados que dependían de este. El segundo punto trabajaba la proporcionalidad, para esto se propuso un problema en relación a la cantidad de material que se necesitaba para hacer un pastel, el tercero y el cuarto iban en relación a la probabilidad tomando el clásico problema de las balotas de diferente color en una urna o bolsa identificando cual tiene la mayor probabilidad de salir, la diferencia entre estos dos puntos es que el cuarto trabajaba la probabilidad con y sin devolución. El quinto punto trabajaba la razón, para ello los estudiantes tenían que mirar de cuantas maneras se podían sentar tres niños en dos sillas y por último el sexto punto se ocupaba de la probabilidad en relación con un gráfico estadístico, en este caso un gráfico de torta. Teniendo esto claro se dio paso a la debida presentación y explicación de lo que se iba a hacer en la hora de clase, aclarándole a los estudiantes que el trabajo era individual.

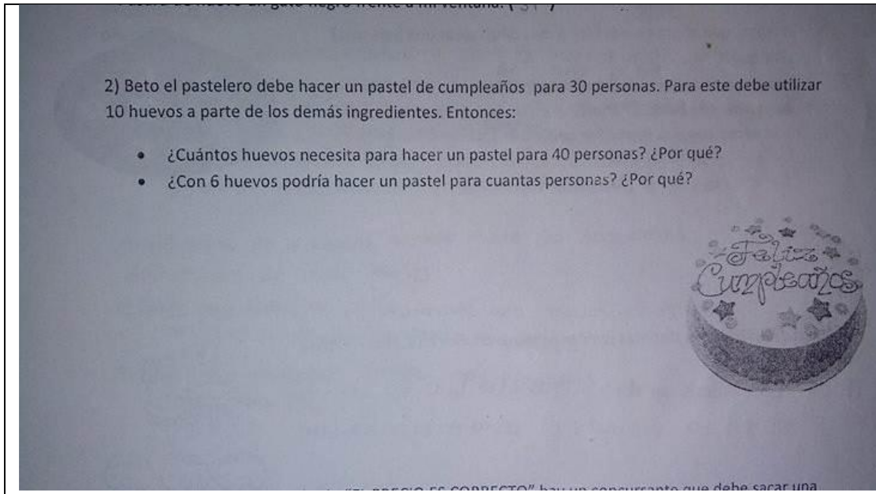
Análisis

Para este análisis se estudió cada punto de la prueba diagnóstica teniendo en cuenta el objetivo de cada uno de estos, lo cual se obtuvo que:

Evidencia	Triangulación
 1) Entre los siguientes acontecimientos, ¿cuáles dependen del a • Ganaré la lotería. (NO) • Amanecerá mañana. (Si) • Al soltar una piedra caerá al suelo. (Si) •Saldrá sello al caer la moneda. (NO) • Mañana será un nuevo día. (Si) • Ganaré apostando en el hipódromo. (NO) • Pasará de nuevo un gato negro frente a mi ventana. (NO) *Figura 6. Respuestas de los estudiantes afirmando que sucesos dependen del azar y cuáles no.*	Como se puede observar en la **figura 6** los estudiantes no tienen la noción del azar, ya que afirma de manera incorrecta las situaciones que sí corresponden a este como el de ganar la lotería, pero a la vez afirma que sí es azar situaciones que no lo son, como el de amanecer al otro día, esto sucede según Sáenz citado por Fuentes, Ignacio y Aranzabal (2006) porque los estudiantes no pueden apreciar el carácter aleatorio de las variables que intervienen en el fenómeno del azar y esto sucede porque el sistema educativo introduce desde los primeros años de

	escolarización a los estudiantes una visión determinista del mundo o un pensamiento casual de este. Pero esto a la vez es causa de la enseña atrasada de la probabilidad. Al evaluar las pruebas se pudo encontrar que un 5% de los estudiantes presentan este problema.
 1) Entre los siguientes acontecimientos, ¿cuáles dependen del a • Ganaré la lotería. (Si) • Amanecerá mañana. (Si) • Al soltar una piedra caerá al suelo. (Si) •Saldrá sello al caer la moneda. (Si) • Mañana será un nuevo día. (Si) *Figura 7. Respuesta de un 5% de los estudiantes afirmando que todos los sucesos expuestos dependen del azar.*	En la siguiente evidencia (**Figura 7)** se pudo notar que a los estudiantes se les dificulta identificar que nociones son de azar y por lo tanto afirman que todas dependen de este fenómeno, esto según Fuentes, Ignacio y Aranzabal (2006) sucede porque los estudiantes presentan el sesgo de equiprobabilidad, es decir, refiere a que todo es posible ya que es un suceso aleatorio y requiere del azar. En este caso los

	estudiantes consideran que todos los sucesos son de azar. Se analizó que un 5% de los estudiantes presentan un sesgo a la equiprobabilidad.
 *Figura 8. Respuesta de un 90% de los estudiantes reconociendo que sucesos sí y no dependen del azar.*	Por otro lado se puede afirmar que un 90% de los estudiantes identifican los fenómenos que corresponden al azar como se puede apreciar en la (**Figura 8)**, esto según Piaget e Inhelder (citado por Batanero 2001) sucede porque los niños comprenden la idea de causa, es decir que conciben el azar como una serie de combinaciones produciendo resultados inesperados, por lo tanto si los estudiantes no comprenden la anterior idea de causa no podrá identificar lo que son los fenómenos aleatorios.

 2) Beto el pastelero debe hacer un pastel de cumpleaños para 30 personas. Para este debe utilizar 10 huevos a parte de los demás ingredientes. Entonces: • ¿Cuántos huevos necesita para hacer un pastel para 40 personas? ¿Por qué? • ¿Con 6 huevos podría hacer un pastel para cuantas personas? ¿Por qué? *Figura 9. Ninguna respuesta de un 90% en relación al problema expuesto.*	El siguiente punto propuesto en la evidencia (**Figura 9**), fue el que presentó mayor dificultada para los estudiantes, tal así que se encuentran un 90% de la población, dejando al punto sin ninguna respuesta alguna. Esto sucede según Piaget e Inhelder (como cito en Batanero, 2001) es porque los estudiantes se encuentran en periodo pre-operatorio cuya razón es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, por tal razón los estudiantes no pueden dar respuesta alguna al problema.
	A la vez un 10% de los estudiantes daban respuesta

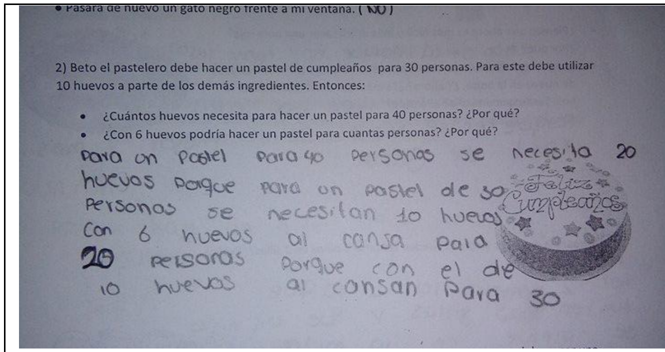
<table>
<tr>
<td>


Figura 10. Respuesta de un estudiante afirmando que: “Para un pastel para 40 personas se necesita 20 huevos porque para un pastel de 30 personas se necesitan 10 huevos con 6 huevos al cansa para 20 personas porque con el de 10 huevos al cansan para 30”
</td>
<td>empíricas al problema, esto se puede ver en la evidencia (Figura 10), donde dice que para un pastel de 40 personas se necesitan 20 ya que para 30 son 10, dándole prioridad al aumento de personas, es decir como aumentaron 10 personas por lo tanto aumenta la misma cantidad de huevos, es decir 10. Esto sucede causa de que los estudiantes se encuentran en una fase preparatoria en la cual han de necesitar de la manipulación de objetos, Batanero (2001) afirma que esto favorece para que los estudiantes adquieran cierto concepto apoyándose de sus propias experiencias empíricas.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>En este punto (Figura 11) del diagnóstico no se presentó problema alguno, ya que los estudiantes no</td>
</tr>
</table>

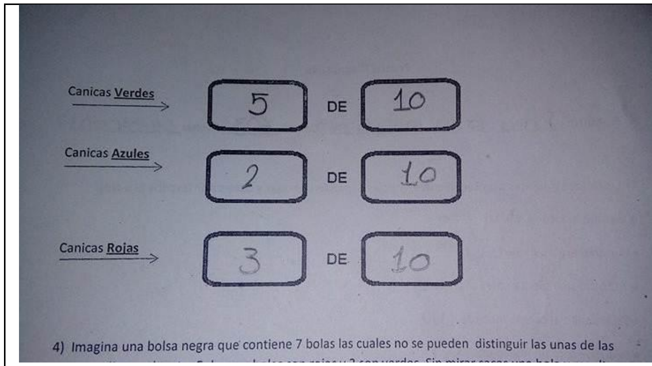
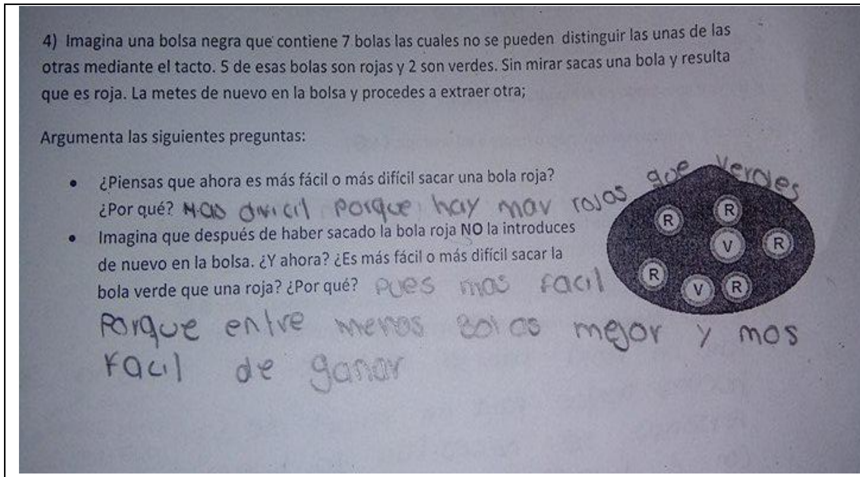
<table>
<tr>
<td>


Figura 11. Respuesta de todos los estudiantes afirmando cuantas canicas había de cada color de 10 en total.
</td>
<td>tuvieron ninguna dificultad en decir que se encontraban 5 canicas verdes de 10 en la bolsa, 2 canicas azules de 10 y 3 canicas rojas de 10. Por lo anterior en este punto el 100% de los estudiantes se encuentran resolviendo problemas básicos de probabilidad sin que ellos sepan que es. Batanero (2001) afirma que esto sucede porque los niños pueden resolver problemas que implican las comparaciones de probabilidad de un suceso, ya que estos se encuentran en el periodo de las operaciones.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>En este punto un 40% de los estudiantes se les dificulta identificar la mayor y menor probabilidad de extraer un objeto con y sin devolución, teniendo aun así los datos principales, en este caso es la cantidad</td>
</tr>
</table>



4) Imagina una bolsa negra que contiene 7 bolas las cuales no se pueden distinguir las unas de las otras mediante el tacto. 5 de esas bolas son rojas y 2 son verdes. Sin mirar sacas una bola y resulta que es roja. La metes de nuevo en la bolsa y procedes a extraer otra;

Argumenta las siguientes preguntas:

- ¿Piensas que ahora es más fácil o más difícil sacar una bola roja? ¿Por qué? Mas dificil porque hay mav rojas que verdes
- Imagina que después de haber sacado la bola roja NO la introduces de nuevo en la bolsa. ¿Y ahora? ¿Es más fácil o más difícil sacar la bola verde que una roja? ¿Por qué? Pues mas facil Porque entre menos bolas mejor y mos facil de ganar

R R V R R V R

Figura 12. Respuesta en relación al problema 4 afirmando que:
1)"Mas difícil porque hay mas rojas que verdes"
2)"Pues mas fácil porque entre meno bolas" mejor y mas fácil de ganar"

de bolas rojas y verdes. En la evidencia se puede observar que el/la estudiante afirma que es más difícil sacar una bola roja sabiendo aun así que hay más bolas rojas que verdes, esto según Cañizares citado por (Batanero 2001) sucede porque es común en el periodo o fase preoperatorio en la cual el estudiante no tiene la capacidad de establecer relación entre el todo y sus partes. Dando como respuesta que en sí es más fácil obtener una bola roja. Por otro lado en el segundo punto se le pregunta al estudiante que si es más fácil o más difícil sacar una bola verde que una roja sacando aun así una roja, lo cual responde que es más fácil porque entre menos bolas mejor, esto sucede según Cañizares citado en (Batanero 2001) es porque los niños sólo tienen en cuenta el número de casos posibles. En este caso de

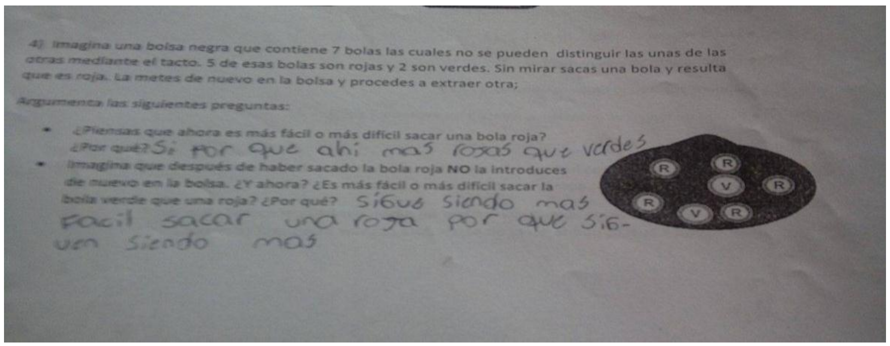
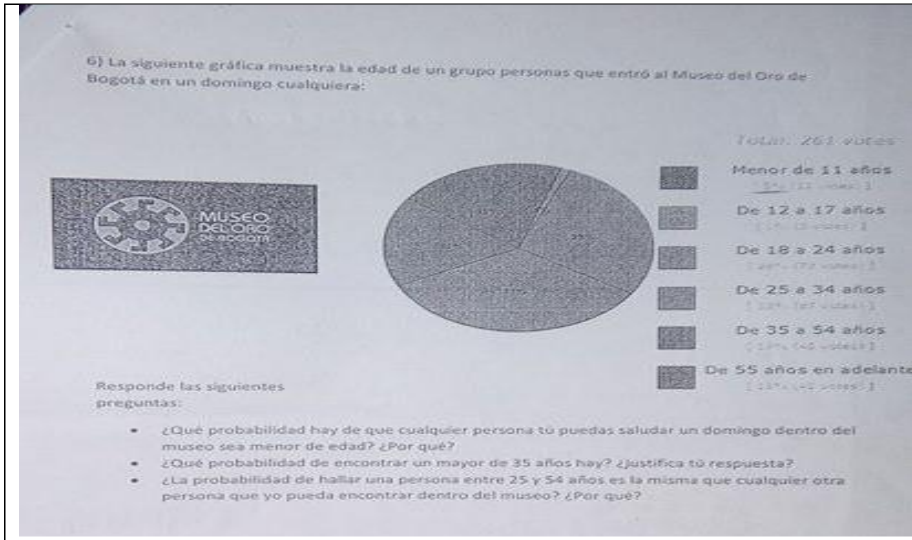
<table>
<tr><td></td><td>las bolas rojas y verdes como se puede evidenciar la Figura 12.</td></tr>
<tr><td>
4) Imagina una bolsa negra que contiene 7 bolas las cuales no se pueden distinguir las unas de las otras mediante el tacto. 5 de esas bolas son rojas y 2 son verdes. Sin mirar sacas una bola y resulta que es roja. La metes de nuevo en la bolsa y procedes a extraer otra;
Argumenta las siguientes preguntas:
• ¿Piensas que ahora es más fácil o más difícil sacar una bola roja? ¿Por qué? Si por que ahi mas rojas que verdes
• Imagina que después de haber sacado la bola roja NO la introduces de nuevo en la bolsa. ¿Y ahora? ¿Es más fácil o más difícil sacar la bola verde que una roja? ¿Por qué? Sigue siendo mas facil sacar una roja por que siguen siendo mas

Figura 13. Repuesta del problema 4 afirmando que:
1) “Si por que ahí mas rojas que verdes”
2) “Sigue siendo mas fácil sacar una roja por que siguen siendo mas”</td><td>Pero a la vez un 60% de los estudiantes identifican que bola tiene la mayor probabilidad de salir de la bolsa, esto teniendo en cuenta la cantidad que les corresponde a las rojas y a las verdes, (Figura 13). Esto sucede según Cañizares citado en (Batanero 2001) por que los estudiantes utilizan estrategias aditivas, teniendo en cuenta los casos, los desfavorables y los posibles.</td></tr>
<tr><td></td><td>Por último, se observar en la evidencia (Figura 14) que los estudiantes no realizan el punto indicado, esto</td></tr>
</table>



6) La siguiente gráfica muestra la edad de un grupo personas que entró al Museo del Oro de Bogotá en un domingo cualquiera:

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué probabilidad hay de que cualquier persona tú puedas saludar un domingo dentro del museo sea menor de edad? ¿Por qué?
- ¿Qué probabilidad de encontrar un mayor de 35 años hay? ¿Justifica tú respuesta?
- ¿La probabilidad de hallar una persona entre 25 y 54 años es la misma que cualquier otra persona que yo pueda encontrar dentro del museo? ¿Por qué?

Figura 14.Sexto problema de la prueba diagnóstico en relación a la probabilidad, en el cual el 100% de los estudiantes no dieron respuesta a las preguntas expuestas.

sucedió con el 100% de los estudiantes. Esto según Piaget como se cita en (Batanero 2001) sucede porque los estudiantes están en el periodo preoperatorio lo que implica que es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios.

CONCLUSIÓN

En el proceso de analizar la prueba diagnóstico se evidenció que los estudiantes pueden desarrollar problemas básicos de probabilidad sin que ellos sepan el concepto (Punto 3), gracias a las operaciones básicas pertenecientes al periodo pre-operatorio, en las que se manifiesta las estrategias aditivas. No obstante, este periodo de los estudiantes también manifiesta una errónea identificación del azar ya que sus conocimientos previos y experiencias empíricas probabilísticas son limitadas y no han sido enfocadas al entendimiento de la incertidumbre, lo que muestra el punto 1, 4 y 5.

También se identificó que los estudiantes carecen del concepto de proporcionalidad (Punto 2) lo cual lleva a generar dificultades para el entendimiento y el estudio de los fenómenos aleatorios, y la estructuración de una probabilidad, además como no hay desarrollo comparativo, no hubo posibilidad de que estos construyeran una probabilidad acorde a un suceso aleatorio presentado, como lo es en el último punto de la actividad, lo que en general, acerca de este tipo de errores Batanero (2001) menciona que en este periodo o fase pre-operatoria el estudiante no tiene la capacidad de establecer relación entre el todo y sus partes, solo tienen en cuenta el número de casos posibles.

De este modo se intuirá que habrá dificultades en la actividad de la "Carrera" en torno a la ubicación de las fichas en los números adecuados para ganar el juego, ya que no tendrían en cuenta las proporciones de los números de los dados, de esta forma también habrá errores en la estimación de qué número tiene mayor posibilidad de salir a causa de las forma en que este puede surgir, además de posibles errores de comparación para saber que numero será más fácil de obtener.

Protocolo “La Carrera”

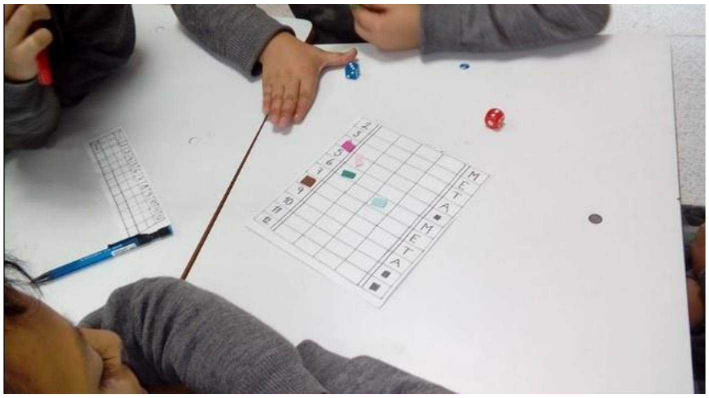


Figura 15. Implementación del juego "la carrera"

Descripción:

La actividad se aplicó en dos sesiones de una hora cada una, las cuales no fueron muy distantes (miércoles y viernes) lo que facilitó que en la segunda sesión los alumnos recordaran lo que jugaron y realizaron, de este modo hubo estrecha relación con lo que contestaron en las dos rondas de preguntas.

La actividad se realizó en grupos de cuatro, de acuerdo a ello se tenían fichas de foami de diferentes colores que sirvieran para diferenciar cada jugador, y no fichas de solo dos colores como se estableció inicialmente, por lo cual este es uno de tantos factores que se agradecen de la implementación diagnóstica.

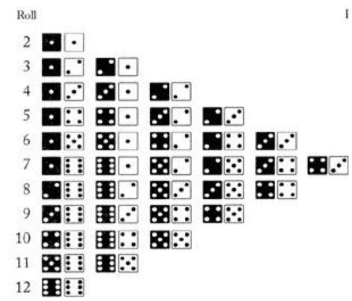
De este modo se incluye una modificación de la primera regla y la inclusión de una quinta que surge del desarrollo del juego y lo que se logró establecer con los estudiantes:

1. Cada jugador debe elegir una y solo una casilla que guste del 2 al 12 para poder jugar.

5. Si sale un par cuya suma no sea igual al número del lanzador, este puede volver a lanzar. (No obstante este debe ser contado en la “hoja de conteo”)

Inicialmente se dio 30 minutos en la primera sesión para que los estudiantes se pudieran relacionar con el juego. Cinco de los ocho grupos ya habían terminado las dos rondas después de este tiempo por lo que comenzamos a dar la primera ronda de preguntas que debían ser realizadas en una hoja para entregar, estas más adelante se mostraran en el análisis.

Con la culminación de esta primera ronda de preguntas termina la primera sesión.



La segunda sesión inicia de nuevo con una pequeña ronda del juego para que los alumnos recordaran rápidamente las reglas y la forma de este. Al cabo de 15 minutos se realizó la socialización con los alumnos en la que se pudo detallar las formas en que las sumas correspondientes a los números del tablero surgían, esto se pudo entender y explicar simplemente con la gráfica que se presentó en la hipótesis de la actividad. De esta manera ellos se dieron cuenta de qué es lo que ocurría detrás del juego.

Posteriormente los alumnos contestaron la segunda ronda de preguntas en los 30 minutos restantes.

Análisis

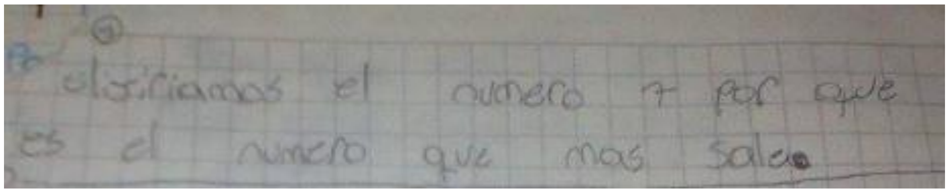
<table>
<tr><th>Evidencia</th><th>Triangulación</th></tr>
<tr><td>


Figura 16. Respuesta de los estudiantes en relación a los números que estos elegirían con mayor frecuencia:
"elejiriamos el numero 7 por que es el numero que mas sale"

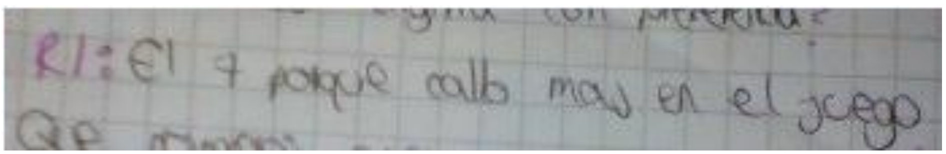


Figura 17. Respuesta de los estudiantes en relación a los números que estos elegirían con mayor frecuencia:
"El 7 porque callo mas en el juego"

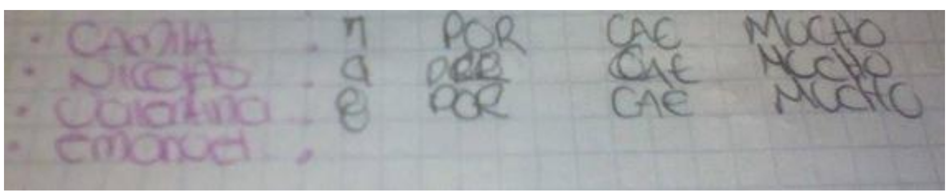
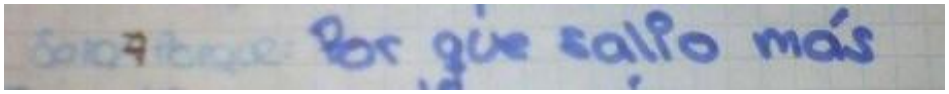


Figura 18. Respuesta de los estudiantes en relación a los números que estos elegirían con mayor frecuencia:
</td><td>
En las figuras 16, 17, 18 y 19 se puede observar varias respuestas de los estudiantes en las que se refieren a los números que estos elegirían con mayor frecuencia. Podemos observar que estos han encontrado una regularidad en los números entre posiciones centrales por lo que es muy posible que la "hoja de conteo" les haya ayudado para esta finalidad. Sin embargo es algo de lo que se dieron cuenta jugando mediante su ensayo y error. Esto se relaciona mucho con lo que menciona Godino (1996) en torno al desarrollo psicológico de la intuición probabilística del niño ligado al "Periodo de las operaciones Concretas" con respecto a las operaciones combinatorias en niños entre los 10 y 11
</td></tr>
</table>

"CAMILA: 7 POR CAE MUCHO *NICOLAS: 9 POR CAE MUCHO* *VALENTINA: 8 POR CAE MUCHO"*  *Figura 19. Respuesta de los estudiantes en relación a los números que estos elegirían con mayor frecuencia:* *"Sara 7 Porque: Por que salio mas"*	años; Durante este periodo los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, por lo que llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error. De este modo el juego (por el ensayo y error) y la "hoja de conteo" (por los inventarios) contribuyeron como herramientas indispensables para el propósito de la comprensión combinatoria trabajada con los dados en un 90% de los alumnos.
	A continuación se puede observar en la **figura 20** las "hojas de conteo" relativas a los recuentos realizados por los estudiantes. Unido con el análisis anterior se toma de nuevo a Godino (1996) para referenciar que la

utilización de "inventarios" ayudó a la identificación de que si los números que más caen están en la posición central, entonces los que menos caerán estarán en los extremos, lo cual se puede asociar a *"procedimientos sistemáticos para realizar inventarios"*, lo que llevó al 91% los alumnos poder identificar explícitamente estos números que poco caen, lo que se puede ver en sus respuestas (**figura 21, 22, 23 y 24**).

Figura 20. Tablas de conteo, para identificar el número que tiene más posibilidad de salir en el juego.

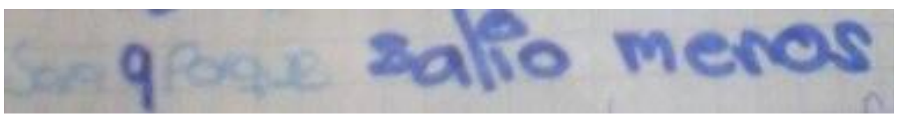


Figura 21. Identificación de los números menos frecuentes de salir: "Sara 9 Porque: salió menos"

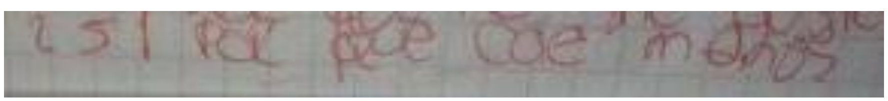


Figura 22. Identificación de los números menos frecuentes de salir: "2, 5, 1 POR QUE CAE MENOS"

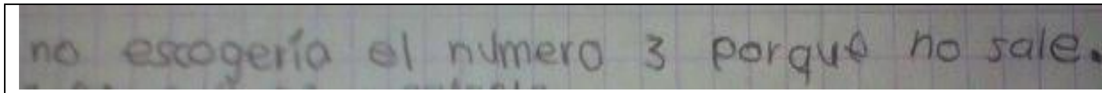
<table>
<tr>
<td>


Figura 23.Identificación de los números menos frecuentes de salir: “no escogería el numero 3 porque no sale.”

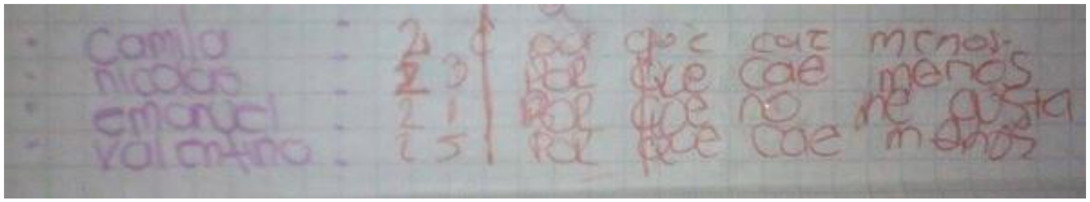


Figura 24. Identificación de los números menos frecuentes de salir:
“ Camila: 2 por que cae menos
nicolás: 2, 3 por que cae menos
emanuel: 2, 1 por que no me gusta
valentina: 2, 5 por que cae menos”
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Con respecto a la tercera y cuarta pregunta hubo errores en el 30% de las soluciones de los estudiantes al momento de mencionar un porqué cuando debían elegir un número en específico que les pareciera iba a caer más, (3ra pregunta) entre el 3 y el 11, y entre el 5 y el 8 (4ta pregunta). Por lo que al analizar los anteriores puntos se llegó a pensar que pocos</td>
</tr>
</table>

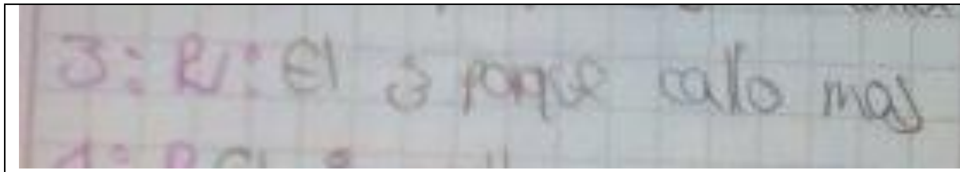


Figura 25. Respuesta que menciona un grupo respecto al número que más cae entre el 11 y 3: "3: R/: El 3 porque callo mas"

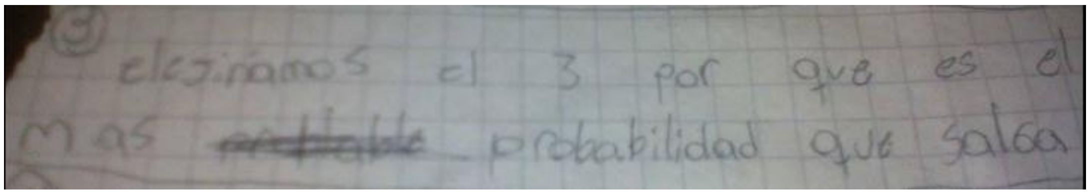


Figura 26. Respuesta que menciona un grupo respecto al número que más cae entre el 11 y 3: "elejiriamos el 3 por que es el mas probabilidad que salga"

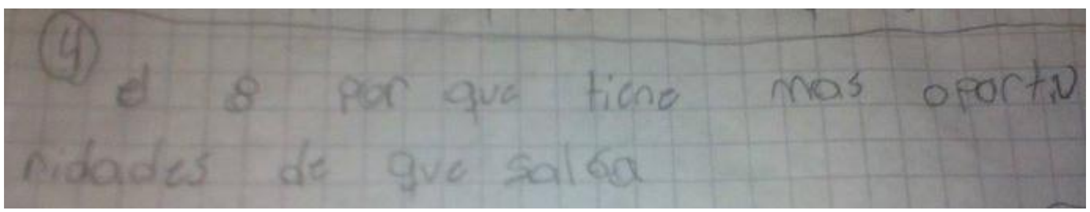
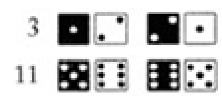


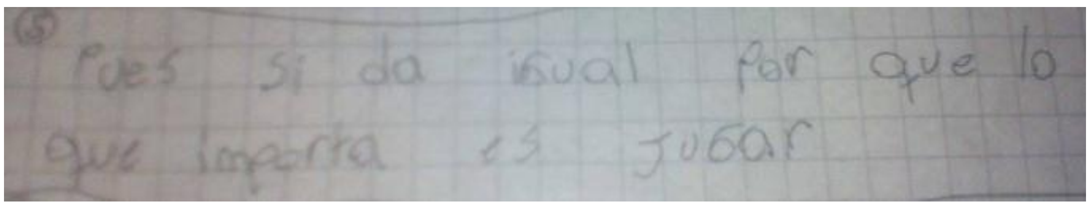
Figura 27. Respuesta que menciona un grupo respecto al número que más cae entre el 11 y 3: " el 8 por que tiene mas oportunidades de que salga"

estudiantes tendrían escasos errores, sin embargo se encontraron varias cosas diferentes en la respuesta, asociado más hacia el leguaje de estos, y no a la manera en cómo se estructuraba el juego (sus permutaciones) ya que este análisis se hizo posterior a esta primera ronda de preguntas. Por lo cual (en la 3ra pregunta) los grupos solo eligieron uno de los números, y no ambos ya que aún no sabían explícitamente que tienen la misma posibilidad de salir;



En la **figura 25** se puede observar la respuesta que menciona un grupo respecto al número que más cae entre el 11 y 3 es el 3 porque simplemente salió más veces, lo cual se puede asociar al análisis que estos

	obtienen por medio del juego y del conteo asociado a lo que Godino (1996) menciona como ensayo y error antes mencionado. Pero en la **figura 26** podemos ver que la respuesta fue más allá de mencionar de que el número callera más, sino que se incluye un lenguaje más familiar, diciendo que ”elegiríamos el 3 porque es el más *probable* de que este salga” , y si observamos la **figura 27** es la respuesta que este mismo grupo dio a la cuarta pregunta, diciendo que elegirían el 8 porque este tiene más *oportunidades* de que salga, por lo cual esto se asocia al lenguaje inicial y a los sinónimos de aleatoriedad que tienen los estudiantes con respecto al azar y la probabilidad que es algo que menciona Bressan (2008) con sus 68 sinónimos acerca de la probabilidad, los cuales son caracterizados por el estudiante con base a si el evento es imposible, poco

	posible, posible y muy probable, respectivamente.
 *Figura 28. Respuesta de un grupo en relación a la pregunta; ¿da igual los números que se escojan?, ¿por qué?: "Pues si da igual por que lo que importa es jugar"*	Con respecto a la pregunta 5; ¿da igual los números que se escojan?, ¿por qué?, podemos observar en la **figura 28** lo que respondió un grupo. Ellos están de acuerdo en que no importa las casillas que se elijan sino que lo importante es jugar. Por lo cual ellos tocan un punto importante en la utilización del juego y es que se este pueda servir de desarrollo intelectual del estudiante, más allá de lo mecánico que éste resulta ser, lo cual se logra de manera implícita e individual,

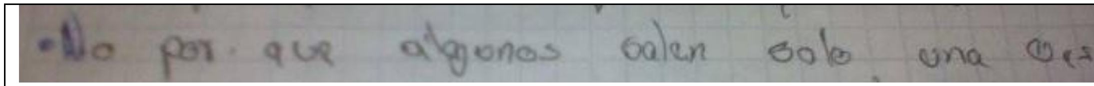


Figura 29. Respuesta de un grupo en relación a la pregunta; ¿da igual los números que se escojan?, ¿por qué?:
"No por que algunos salen solo una vez"

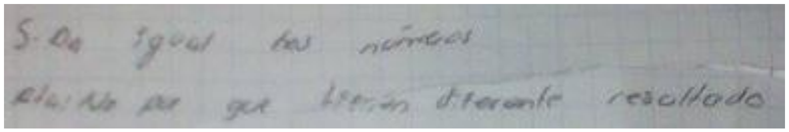
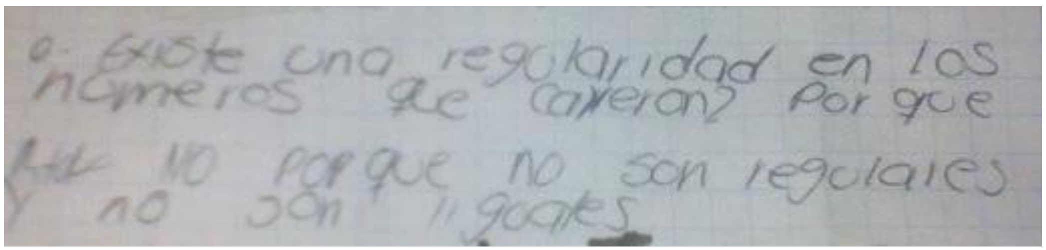


Figura 30. Respuesta de un grupo en relación a la pregunta; ¿da igual los números que se escojan?, ¿por qué?:
"Rta: No por que tienen diferente resultado"

corregido por la intervención grupal, por lo menos en el 95% de los alumnos; de esta forma se logra establecer el funcionamiento y la comprensión del juego. Fernández y Rodríguez (1997) mencionan que el juego es una de las formas más frecuentes utilizadas por el niño para manifestarse: es una actividad próxima, más espontanea del escolar, y por ende más adecuada para ser empleada en el desarrollo intelectual. Por tanto la libre manifestación hizo que este grupo tuviera respuestas más próximas a lo requerido por el juego, como en lo anterior recuadro cuando mencionaron la palabra probabilidad, sin haberse mencionado esta antes.

Ahora podemos ver en la **figura 29 y 30** dos respuestas aparentemente distintas, pero que tienen la

	misma comprensión y análisis en el desarrollo del juego. La primera dice que no da lo mismo los números que se elijan ya que algunos solo salen una vez, por lo que pudieron identificar que no todas las casillas son equiprobables. Con respecto a la segunda mencionan que no da igual elegir cualquier casilla ya que todos los números tienen diferente resultado, lo cual indica que pudieron identificar la inequiprobabilidad de las casillas. Esto está estrechamente relacionado con lo que menciona Fischbein (1975), citado por Godino (1996) que habla acerca de las Intuiciones Primarias del alumno las cuales son las adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, o la apreciación de que al lanzar un dado todas las caras tienen la

	misma probabilidad de salir. Por lo cual acá identificaron que sucedía lo contrario a la equiprobabilidad, como lo fue con el 85% de los alumnos.
 *Figura 31. Respuesta de un grupo en torno a la pregunta 6: ¿Existe una regularidad en los números que cayeron? por qué: “ Rta: No porque no son regulares y no son iguales”*	En torno a la sexta pregunta se encontró que como anteriormente no se encontró una equiprobabilidad en los números a elegir, entonces no habría una regularidad en los resultados de los dados (**Figura 31**), incluso habiendo ellos llenado la “tabla de conteo” no manifestaron ni escribieron que los resultados de los dados se concentrarían en los números centrales (ocurrió en un 25% de alumnos), no obstante la **figura 32** muestra un contraejemplo de esto indicando que habría una regularidad en el número 7, pero no en los demás números (Cerca de un 65 % de alumnos). Esto

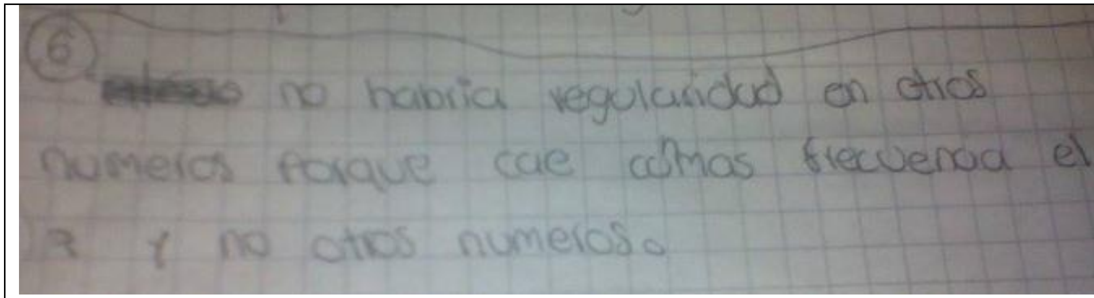


Figura 32. Respuesta de un grupo en torno a la pregunta 6: ¿Existe una regularidad en los números que cayeron? por qué: "no habría regularidad en otros numeros porque cae con mas frecuencia el 7 y no otros números."

está relacionado con lo mencionado de las *Intuiciones Primarias* (Fischbein, 1975) y lo que aprenden los alumnos mediante la experiencia. No obstante en las *Intuiciones Secundarias* (Fischbein, 1975) que vienen después de la socialización se logra establecer formalizaciones.

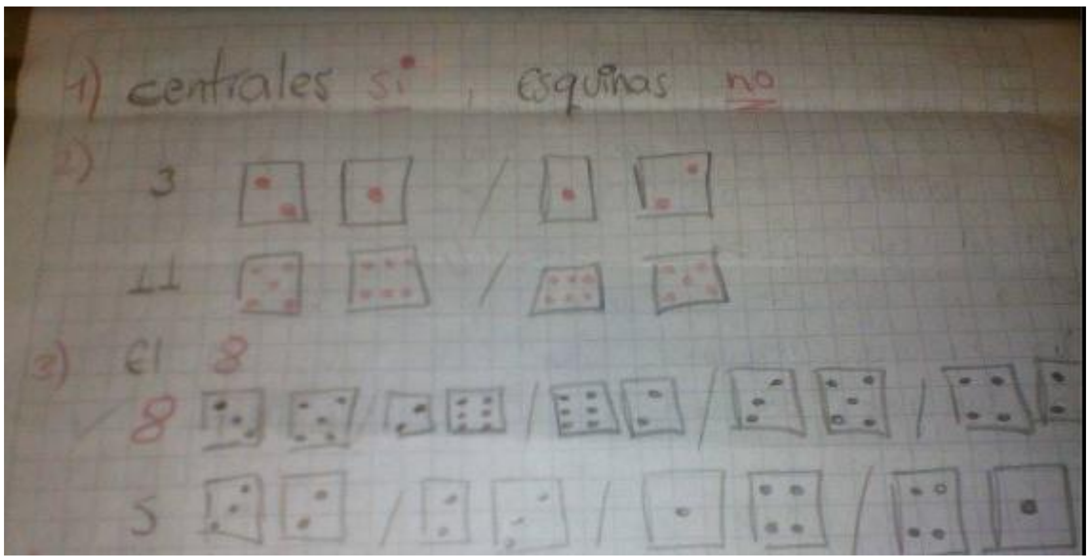


Figura 33. Representación gráfica de un grupo de estudiantes, explicando las similitudes de los lanzamientos con los dados.

Después de la socialización las respuestas del 90% de todos los grupos fueron muy similares porque estos ya tenían en cuenta qué era lo que sucedía detrás del juego (sus permutaciones), por tanto en la **figura 33** se muestra la hoja de respuestas de un grupo al azar. En esta podemos observar que se realizó dibujos para explicar por qué el 3 y el 11 tienen la misma forma de salir, o que el 8 saldrá más que el 5, por lo que la utilización de gráficos fue muy útil en la socialización.

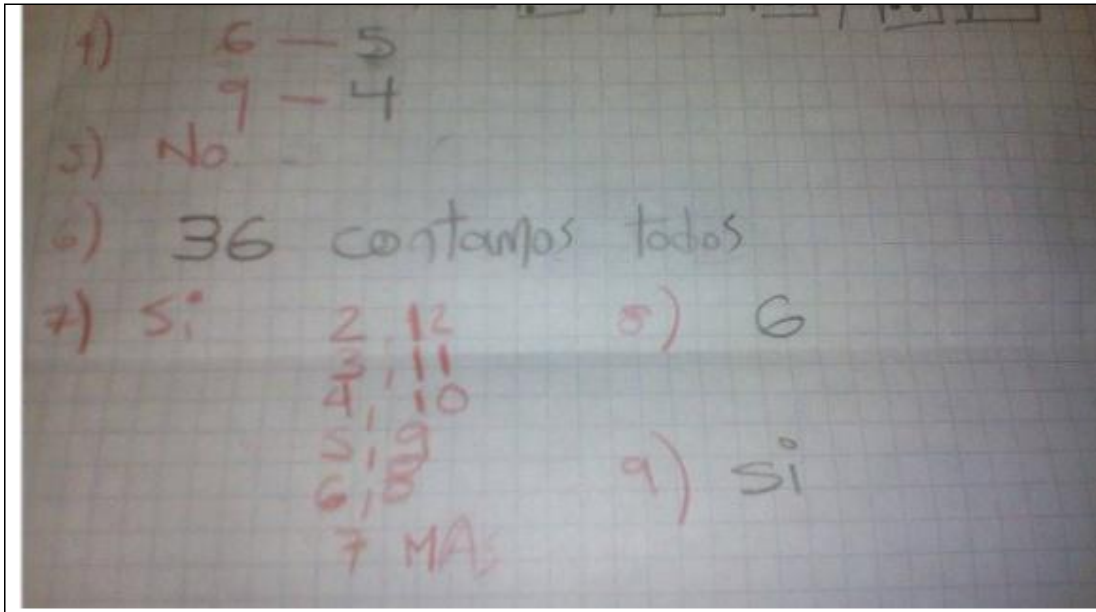


Figura 34. Respuesta de un grupo de estudiantes, identificando las parejas de números que tienen la misma probabilidad de salir al tirar los dados.

De igual manera se pudo determinar que **no** da igual cuál de los números se elija para jugar ya que es más frecuente que se gane con los del centro, diferente a las repuestas obtenidas antes de la socialización que mencionaba también que **no** da igual los que se elijan pero era porque todos tenían diferente forma de salir. También se pudo identificar implícitamente el espacio muestral dado por las 36 formas de obtener cualquier resultado con los dados, por lo que todo esto que se logró obtener después de la socialización es perteneciente a las *Intuiciones Secundarias* ya mencionadas por Fischbein (1975) las cuales consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela. Por lo que los alumnos adquirieron intuiciones propias

	mejoradas después de la socialización, la cual tenía implícitamente su carácter científico que está detrás del desarrollo del juego, y que mejoró las percepciones en los estudiantes, como cuando se observa en la **figura 34** que determinan de forma correcta que la probabilidad de salir 8 es la misma de salir 6 sin aun tener una noción formal de probabilidad.

Conclusión

Lo realizado por los estudiantes en esta actividad está ligado al Periodo de las operaciones concretas (Godino, 1996) a causa de la realización de inventarios (gracias a la hoja de conteo) con procedimientos rudimentarios (operaciones aditivas) mediante ensayo y error (el juego, que además sirvió como herramienta que ayudó a la comprensión de la concepción de aleatoriedad), algo muy ligado a la fase pre-operatoria ya citada por Batanero (2001). Esto ayudó a la identificación de las posibilidades de cada par de números que se obtiene con los dados, y a saber que los números de las posiciones centrales son más recurrentes, no obstante el problema de la comparación que se identificó en la actividad anterior se volvió a manifestar al tratar de responder las preguntas 3 y 4 a cerca de qué número cae con más frecuencia, de esta forma se halló un análisis del juego muy limitado y un reforzamiento en la utilización del lenguaje “azaristico” y el uso de palabras como “posible” o “probable” . Por tanto sí hubo problemas de la ubicación de las fichas para que se ganara con más fiabilidad.

De esta forma la experiencia con el juego contribuyó a que los alumnos identificaran concepciones de equiprobabilidad que existía con un solo dado, pero que no se presentaba con dos, todo esto es perteneciente a las intuiciones primarias citadas por Godino (1996) que son pertenecientes al periodo de las operaciones concretas. No obstante después de que se socializó la manera en que surgían los resultados de los dados se dió paso a un acercamiento a las Intuiciones Secundarias que son más formales y estructuradas que las que surgen por la intuición común, esto fue la clave para la identificación de lo que ocurría en el juego y las posibilidades de cada par de números.

Sin embargo aún hay problemas de comparación de los sucesos que ocurren en el juego, además de que no hay aún un análisis profundo de los resultados que se obtienen por parte de la experiencia en el juego, simplemente hay limitaciones pertenecientes a las experiencias de los alumnos, pero ese acercamiento a las intuiciones secundarias contribuye a que hay formas de entender un suceso aleatorio, de esta manera es muy posible que en la siguiente actividad (“La Guayabita; Reconociendo el juego”) haya problemas de comparación de posibilidades y de análisis que hagan parte de intuiciones secundarias, y por ende puede haber dificultades en los sucesos condicionados que se intervienen, sin embargo con respecto a la equiprobabilidad se reforzara este ámbito por la utilización de un solo dado.

Protocolo “reconociendo el juego guayabita”

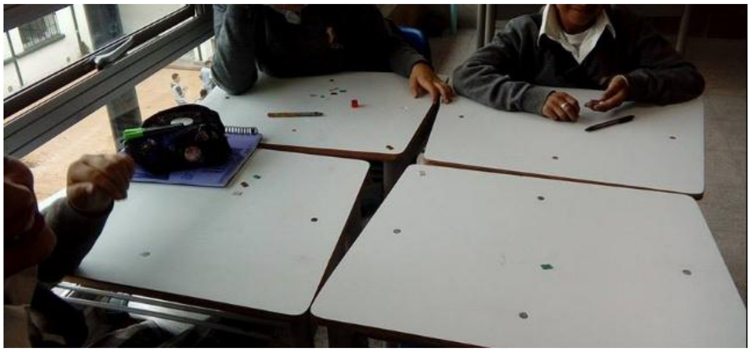


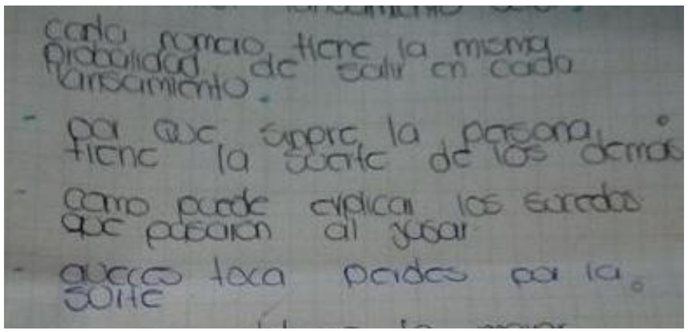
Figura 35. Implementación de la actividad "reconociendo el juego guayabita"

Descripción:

Para el desarrollo de la siguiente actividad, la cual se desarrolló en una sesión y media, se organizó el salón en grupos de a 4 estudiantes para así dar las instrucciones necesarias y dar paso a que jueguen los estudiantes, repartiendo el material correspondiente que era un dado por grupo con las respectivas chaquiras a apostar. La sesión terminó dejando jugar a los grupos y explicándoles que la próxima se realizará un análisis en relación a lo que se hizo.

La siguiente sesión se realizó una retroalimentación de lo que se hizo en la anterior clase, de allí se dio paso a las preguntas que se desarrollaron de una manera individual, para esto los estudiantes se demoraron media sesión en responder. Luego de ello se realizó una respectiva socialización en relación al juego y a las preguntas realizadas, así se culminó la sesión de la actividad “reconociendo el juego”.

Análisis

Evidencia	Triangulación
 *Figura 36. Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a si cada número tiene la misma posibilidad de salir en cada lanzamiento:* *"- por que siempre la persona tiene la surte de los demas.* *- Aveces toca perder por la suerte."*	En la actividad "reconociendo el juego" se evidenció (**Figura 36)** que un 30% de los estudiantes contestaban las respuestas solo basándose en el azar y en el que tuviera más suerte, sin estudiar el espacio muestral en relación a las probabilidades de los números, lo cual no pueden identificar así el número al que le tienen que apostar para así tener la mayor probabilidad de ganar. Esto según Batanero (2001) sucede porque los niños ya tienen la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa.
	Por otro lado un 45% de la población de estudiantes en el aula, justifican con experiencias empíricas las posibilidades de los

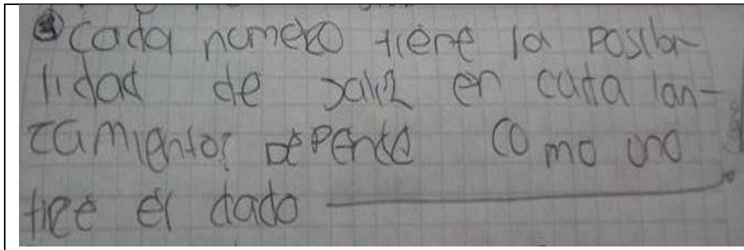
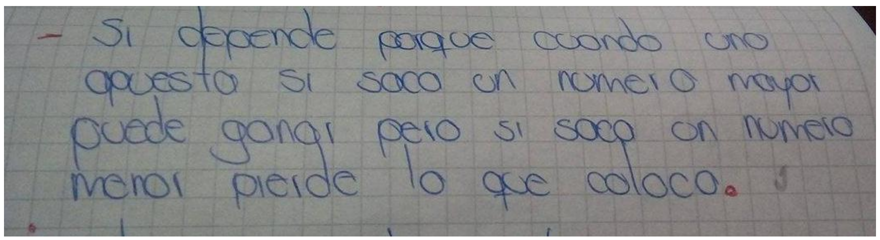
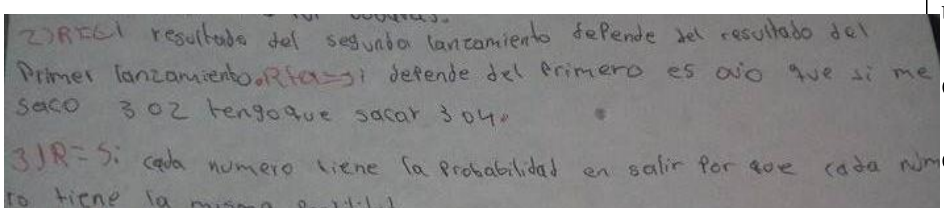
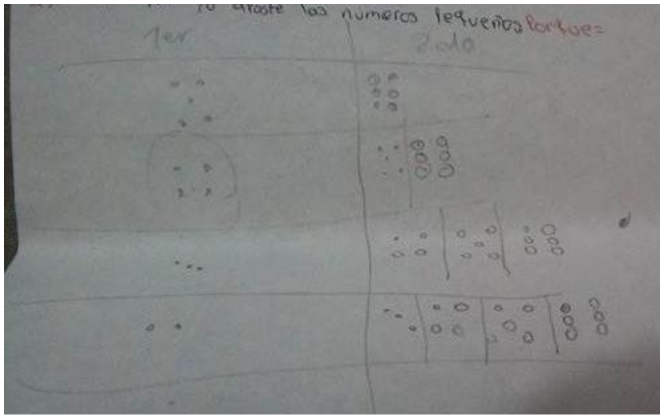
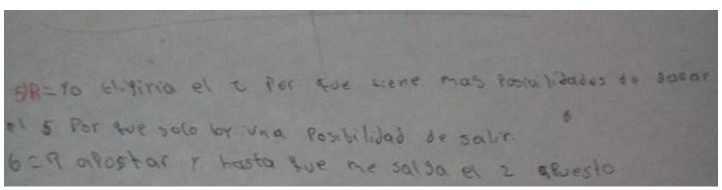
 *Figura 37. Respuesta empírica por parte de un grupo de estudiantes, justificando si los números tiene la misma posibilidad de salir.* *“Cada numero tiene la posibilidad de salir en cada lanzamiento depende como uno tire el dado”.*	resultados de los lanzamientos. En el caso de la evidencia (**Figura 37)** se observa que el/la estudiante dice que es dependiendo cómo uno lance o tire el dado, esto según Batanero (2001) sucede porque los estudiantes se encuentran en el periodo pre-operatorio, fase en la cual los estudiantes tienen la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto.
 *Figura 38. Respuesta de un grupo de estudiantes, justificando el por qué el segundo lanzamiento depende del primero.* *“Si depende porque cuando uno apuesta si saco un numero mayor puede ganar pero si saca un numero menor pierde lo que coloco”.* 	A la vez se identificó que un 95% de los estudiantes pueden identificar que el apostar y el segundo lanzamiento depende o es condicionado por el primer lanzamiento, ya que el segundo lanzamiento debe de ser mayor al primero para así poder ganar. Por lo tanto para Batanero (2001) es porque los estudiantes identifican cual es el suceso que hay que poner como condición en una probabilidad condicional. En este caso como se puede observar en las evidencias (**Figura 38, Figura 39)** identificaron y colocaron el segundo lanzamiento como el suceso condicionado

Figura 39. Respuesta de un grupo de estudiantes, justificando el por qué el segundo lanzamiento depende del primero. *"Si depende del primero es ovio que saco 3 o 2 tengo que sacar 3 o 4".*	por el primer lanzamiento.
 *Figura 40. Identificación del espacio muestral por parte de los estudiantes, para identificar las probabilidades de cada número.*  *Figura 41. Respuesta de un estudiante del por qué tiene mayor posibilidad de ganar con el número 2: "Yo eligiria el 2 porque tiene mas posibilidad de sacar el 5 por que solo hay una posibilidad de salir".*	Lo anterior conllevó a que un 60% de los estudiantes pudieran identificar el espació muestral como se puede evidenciar en la **Figura 40**, estudiando a la vez las probabilidades de ganar al apostar con los números del 2 al 5 identificando así cuál es el digito que tiene mayor probabilidad de ganar tirando la segunda vez, y así poderle apostar. Por lo que para Batanero (2001) los estudiantes identifican el espacio muestral finito dando una interpretación probabilística al suceso. Por lo tanto los estudiantes tienen la capacidad de observar los elementos del espacio muestral. Lo que lleva a que los estudiantes identifiquen el número con el que tienen mayor posibilidad de ganar, esto se puede observar en la evidencia (**Figura 41**) la cual afirma que al número que elige es el 2 ya que tiene más posibilidad de sacar uno mayor

	en sí.

Conclusión

En esta actividad se evidenció que la comprensión del azar es totalmente clara para los alumnos ya que la han ajustado en los sucesos aleatorios de “la carrera” y con la “guayabita”, no obstante no se ha reforzado totalmente la noción de que la suerte no es la determinante en el juego, sino que el juego se puede comprender de tal forma que la suerte pueda mejorar con dicho entendimiento, aun serian intuiciones primarias pertenecientes al periodo preoperatorio, presentes solo en un 25% de los alumnos.

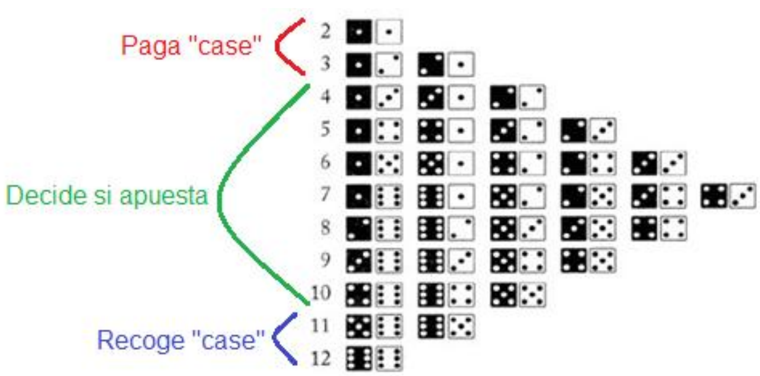
Sin embargo respecto al otro 75% de los alumnos se ha logrado un avance a otro tipo de estadio según Batanero (2001) perteneciente a las Operaciones Abstractas en las que hay mayor comprensión y mejores hipótesis pertenecientes al suceso aleatorio, por lo que el entendimiento de los suceso condicionados (al apostar), la equiprobabilidad (gracias a la utilización de un solo dado), la mejora de la comparación probabilística para saber de qué manera es más fácil ganar en el juego son resultados de este estadio, que además no se hubiera podido resaltar si los alumnos no hubieran pasado por las intuiciones primarias. No obstante hay otro concepto que fue muy importante en el desarrollo de las anteriores actividades, y es el espacio muestral, que ya se había mostrado como todos los posibles resultados del experimento aleatorio, por lo que la guayabita reforzó esta noción ligada también al estadio de las operaciones abstractas, en la siguiente actividad se espera que el entendimiento de este concepto pase a ser parte de las intuiciones secundarias, como también los sucesos condicionados.

Protocolo “Guayabita con dos dados”

Figura 42. Implementación de la actividad "Guayabita con dos dados"

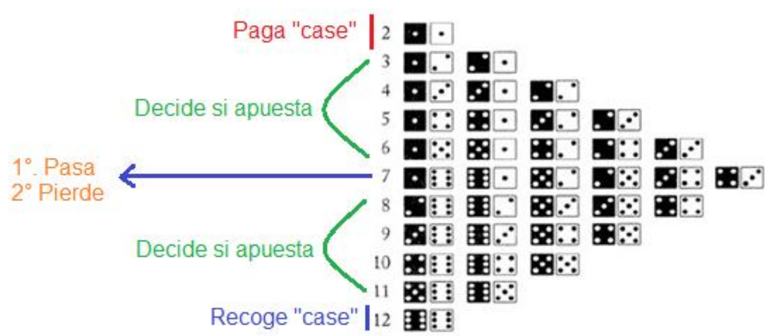
Descripción:

La actividad se logró implementar en dos sesiones de una hora cada una. Se organizó a los niños en grupos de 4 y se hizo una socialización para que los alumnos recordaran el modo en que surgían los resultados de las sumas cuando se lanzaban dos dados, por lo que se realizó el esquema en el tablero de las 36 posibilidades del espacio muestral del juego junto con las reglas correspondientes a la primera parte de la actividad:



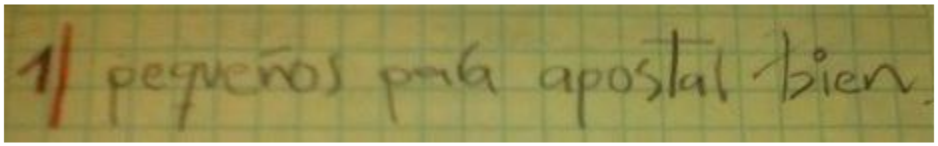
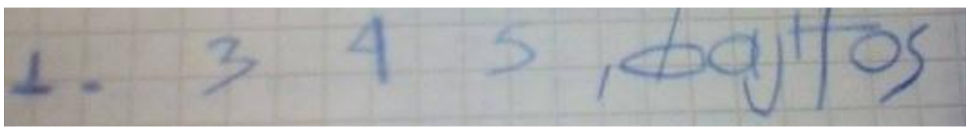
Después de ello se entregó el respectivo material que eran los dos dados y las chaquiras con las cuales ellos debían apostar. Luego dimos un espacio de 25 minutos en donde pudieron jugar y entender la dinámica de las reglas y así en los 30 minutos restantes ellos respondieron las preguntas correspondientes a la primera parte. Con esto concluye la sesión del día lunes.

En la segunda sesión que se realizó dos días después se hizo la misma organización de los grupos, y de nuevo antes de entregar el material se explicaron las reglas de la segunda parte del juego; se indicaba que seguiría el mismo sistema de juego con dos dados, solo que cambiarían las reglas que inmediatamente colocamos en el tablero junto con su esquema correspondiente:



Al terminar la explicación de las reglas dimos 25 minutos de juego libre y otros 30 minutos de solución de las últimas preguntas correspondientes al juego y las últimas preguntas referentes al contraste de los dos modos de juego con dos dados. Así concluye la sesión del día miércoles.

Análisis

Evidencia	Triangulación
 *Figura 43. Respuesta de un grupo de estudiantes afirmando con qué números es más pertinente apostar; "pequeños para apostar bien"*  *Figura 44.Respuesta de un grupo de estudiantes afirmando con qué números es más pertinente apostar; "3, 4, 5, bajitos"* **Figuras 43 y 44**	En la actividad de "La Carrera" los estudiantes habían visto el espacio muestral asociado al juego en donde aprendieron la forma en que surgían los posibles resultados, no obstante en el inicio de esta sesión se volvió a recordar, por lo que la primera parte de la actividad no tuvo muchos inconvenientes en torno a las primeras preguntas, además porque la dinámica de las reglas fue muy sencilla y está asociada a la guayabita con un dado pero con un margen mayor para apostar. Ligado a esto se muestra en la **figura 43 y 44** respuestas de dos grupos los cuales en que es más fácil ganar si

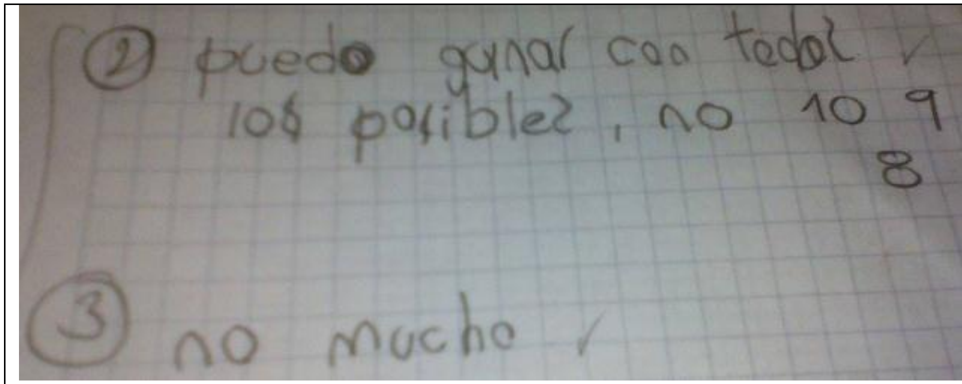
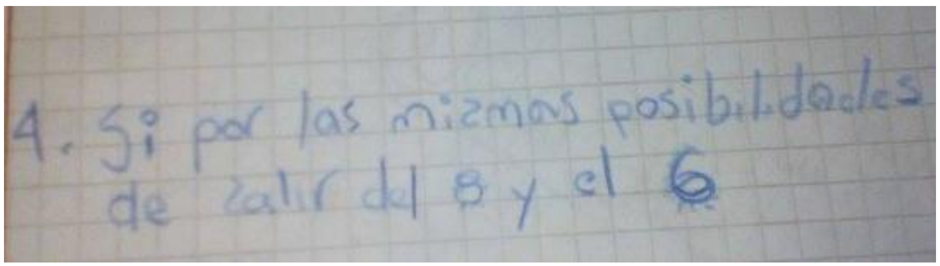


Figura 45.Respuesta de grupos de estudiantes respecto a la segunda y la tercera pregunta acerca de que si apostarían con un número mayor o menor a 7:
" 2) puedo ganar con todos los posibles, no 10, 9, 9
3) No mucho"

se apuesta con números pequeños, además con respecto a la segunda y la tercera pregunta acerca de que si apostarían con un número mayor o menor a 7 en la **figura 45** se muestra que entendieron que no importa mucho si el 7 es más concurrido, ya que solo se tomara en cuenta si sale un número pequeño (entre 4 y 10) con el cual se pueda apostar. Acá podemos ver que los alumnos (90%) van en contra de la "intuición errónea" que define Batanero (2001) en relación con el entendimiento probabilístico del estudiante, por lo que este modo de pensar va en contra de usar un modelo de explicación que le satisface, pero no permite continuación a un estadio más elaborado. Se trata de una "intuición errónea, que es contrario a lo que ya se explicaba a cerca de la percepción de los

	estudiantes a favor de la apuesta en el juego.
 *Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a los números que tienen la misma posibilidad de salir: "Si por las mismas posibilidades de salir del 8 y el 6"*	En la **Figura 46** se observa que un grupo de estudiantes perteneciente al 20%, contestó que el 8 y el 6 tienen las misma posibilidad de ganar, ciertamente es una respuesta errónea si se observa desde una posición de apostador ya que hay más posibilidades de ganar con un número menor como ya hemos visto. Ahora si se observa desde una perspectiva del juego de la "carrera" habría una misma posibilidad de que salgan ambos números, por tanto el grupo no tuvo en cuenta la apuesta y sí las posibilidades de que salga cada número, por lo

	que la noción de simetría aún está marcada en varios estudiantes, simetría que se determina respecto al número 7 que tiene más posibilidades, así se distribuye para ambos lados; de este modo el 6 y el 8 tienen la misma posibilidad, así estaríamos de acuerdo con Batanero (2001) reforzando el hecho de que un dado u otro dispositivo generador de resultados aleatorios cumpla las condiciones de simetría no es un hecho que pueda deducirse de la teoría matemática, sino de la experiencia.
	Ya habiendo obtenido el espacio muestral fue fácil determinar las equivalencias de cada par de sumas como ya se ha visto, por lo cual el 90% de los

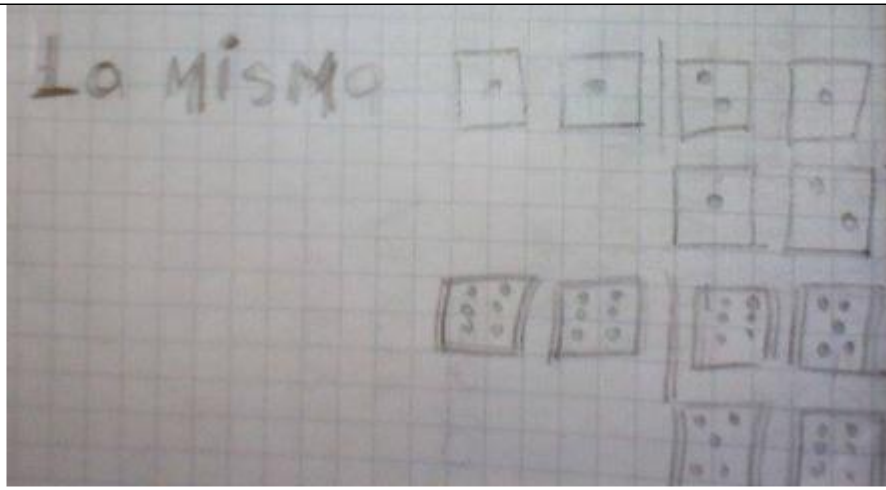
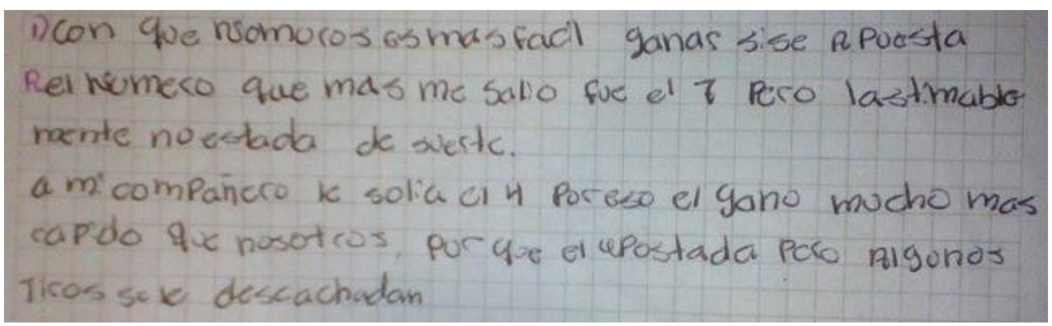


Figura 46. Espacio muestral, del suceso y de la identificación de la probabilidad de coger "case" como de colocar "case".

alumnos identificaron de forma correcta que la probabilidad de coger “case” es la misma de poner “case” en el primer lanzamiento (**Figura 47**), por lo que el juego, siendo el experimento aleatorio, que según Batanero (2001) fue el que dotó de sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral. De esta forma el espacio muestral fue clave para la identificación de regularidades en el transcurso del juego.



Ya entrando segunda parte de la actividad cabe resaltar que reglas eran un poco distintas, lo cual entregó varios tipos de respuestas a la misma pregunta. Se sabe por las reglas que el número 7 es

Figura 47. Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a la pregunta de con qué números es más fácil ganar si se apuesta sin "conocimiento analítico posterior": "El número que más me salió fue el 7 pero <lastimablemente> no estaba de suerte.
A mi compañero le salía el 4 por eso ganó mucho más rápido que nosotros, porque el apostaba pero alguniticos se descachaban"

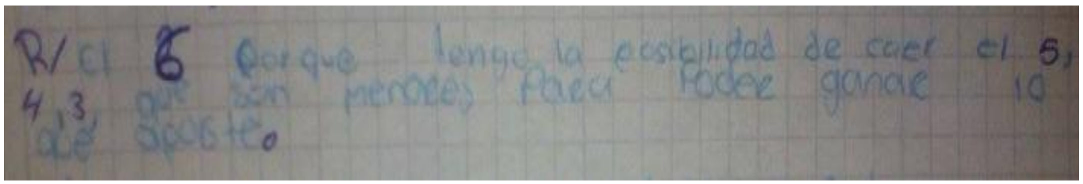


Figura 48. . Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a la pregunta de con qué números es más fácil ganar si se apuesta con "conocimiento analítico posterior": "El 6 porque tengo la posibilidad de caer el 5, 4, 3 que son menores para poder ganar 10 que aposté"

el que nadie quiere que salga, por lo que entorno a la pregunta 1 (En la **figura 48**) se evidenció que los alumnos identificaron bien esta parte, no obstante el grupo menciona que el 4 tiene mayores posibilidades de ganar, cosa que se asocia más al juego de "la carrera" que a éste, ya que para ganar habiendo obtenido un 4 es muy poco probable porque debe salir un número menor a este para poderlo hacer, por tanto el 20% alumnos aun estarían en la transición de la primera a la segunda función de los *modelos intuitivos explicatorios* según Batanero (2001) en donde el primero ayuda al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente, cosa de la cual ya venían con los

	juegos precedidos a la guayabita con dos dados, así esto prepara al alumno para un *“(…)conocimiento analítico posterior”* el cual es menos informal y más fuerte ya se construye con los visto en las anteriores clases, el grupo de la figura anterior muestra falla en este conocimiento analístico posterior. En contraste, en la **Figura 49** si se muestra un grupo) que logró hacer este paso al “*conocimiento analítico posterior”* porque saben que si sacan un número cercano a 7 se tendrá una mayor posibilidad de ganar, esto muestra un avance significativo en los procesos de análisis que toman los estudiantes a favor de lo probabilidad y su intuición, presente en el 80% restante.
	Con respecto a la segunda y tercera pregunta en

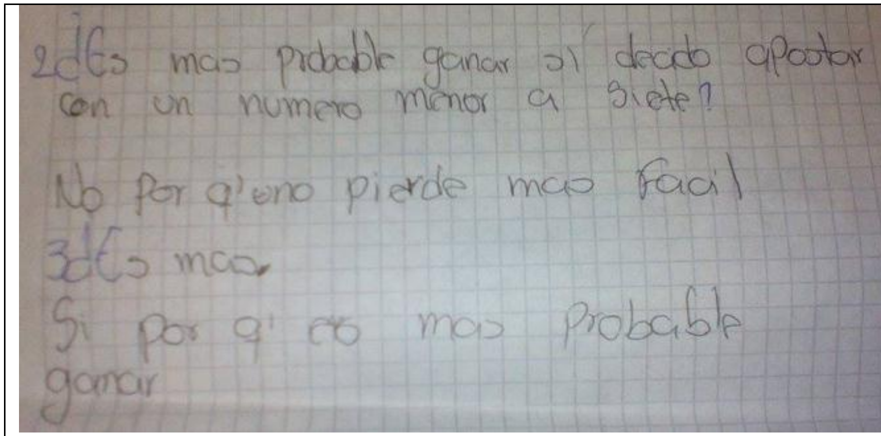


Figura 49. Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a si es más posible ganar si se decide apostar con un número menor a siete:

"2) No por q' uno pierde más facil
3) Si por q' es más probable ganar"

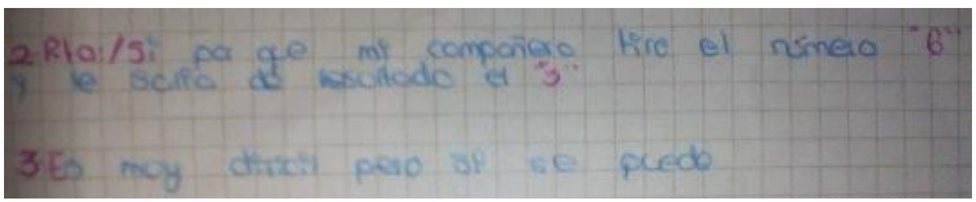


Figura 50. Respuesta de un grupo de estudiantes en relación a si es más posible ganar si se decide apostar con un número menor a siete:
"2) Si por que mi compañero tiro el número "6" y le salía de resultado el "3"
3) Es muy difícil pero si se puede"

torno a si existe mayor probabilidad de ganar con números menores y mayores a 7 hubo una contradicción en lo que contestaron dos grupos. En la **figura 50** se observa que el primer grupo indica (respecto a la 2da pregunta) que no apostarían con números menores a 7 porque se pierde más fácil, pero (3ra pregunta) es más probable ganar con números más altos, en cambio en la **figura 51** se muestra un ejemplo de un integrante que ganó con el 6 porque después le salió el 3, en cambio mencionan que es más difícil ganar con números mayores a 7. En cierto sentido se observa que ambos grupos tienen falencias en torno a la apuesta, ya que no determinan el esquema en donde se muestra que hay igual forma de ganar con números tanto menores como mayores al 7

	(esquema que estaba en el tablero), además de que esto se puede analizar gracias al espacio muestral asociado, por lo que esto está muy ligado con lo que menciona Batanero (2001) acerca de las primeras ideas y acciones que hacen los estudiantes sobre un suceso aleatorio. La primera idea fundamental es asignar números a los sucesos aleatorios, de forma que estos números reflejen nuestro grado de creencia en su verificación, podemos comparar sucesos muy dispares, en base a su mayor o menor probabilidad, por lo que el 20% del grupo aún tiene asignaciones numéricas erróneas asociadas a los resultados del juego, este es un error persistente en esta parte, en contraste con la primera ronda de preguntas en la que sí se logra identificar la simetría con respecto al número

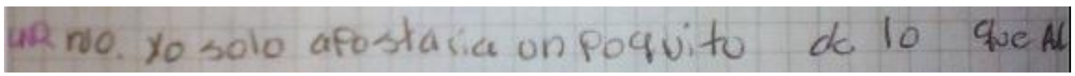
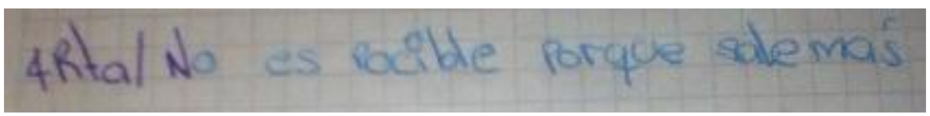
	7, y por ende una correcta asociación numérica de las posibilidades.
 *Figura 51. Identificación por parte de los estudiante en apostar con un número en específico: "4R: No. Yo solo apostaría un poquito de lo que hay"*  *Figura 52. Grupo de estudiantes afirmando del por qué no apostarían por el número 5: "4Rta/ No es posible porque sale más"*	La experiencia desarrolla una optimización en la forma de jugar por lo que mientras más se juega más se tiene en cuenta factores como el "apostar" y "cuanto debo apostar" según el número haya salido, de esta forma los alumnos siguen ligados a una *Intuición primaria* que como ya mencionamos en la actividad de "La Carrera" Godino (1996) la define como las adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales,

Figura 53. Grupo de estudiantes afirmando del por qué no apostarían por el número 5: "4. no por q' el 5 es mas dificil de ganar"

por lo que en la **figura 52** se identifica que los estudiantes lograban determinar que no siempre se debe apostar todo al pozo sino una pequeña parte de este, y más cuando ya ha caído el 5 porque habría menos formas de sacar un número menor a este, también las **figuras 53 y 54** muestra dos soluciones que concuerdan en que no apostarían por este número (5) ya que es más difícil, en la primera dicen que no apostarían porque hay números suque salen más, por lo que no sería conveniente apostar con este número, en la segunda mencionan explícitamente la dificultad de ganar con el 5 . Esta intuición presente en el 15% de los estudiantes se ha venido reforzando con lo realizado, pero sigue persistiendo ya que sin esta no se lograría pasar al segundo nivel en el que se

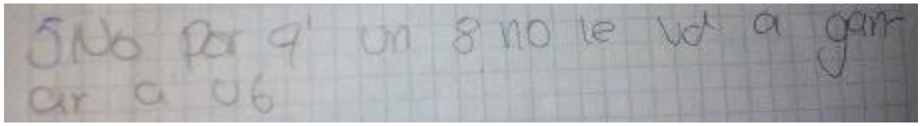
<table>
<tr><td></td><td>formalizan dichas intuiciones.</td></tr>
<tr><td>


Figura 54. Respuesta de un grupo de estudiantes respondiendo, si un 8 tiene la misma probabilidad de ganar que un 6: " 5) No por q' un 8 no le va a ganar a un 6."

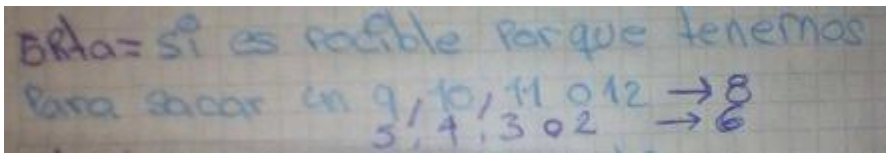


Figura 55. Respuesta de un grupo de estudiantes afirmando del por qué un 8 si tiene la misma probabilidad que un 6 de ganar:
"5 Rta = Si es pocible porque tenemos para sacar un
9, 10, 11 o 12 para el 8
5, 4, 3, 2 para el 6"

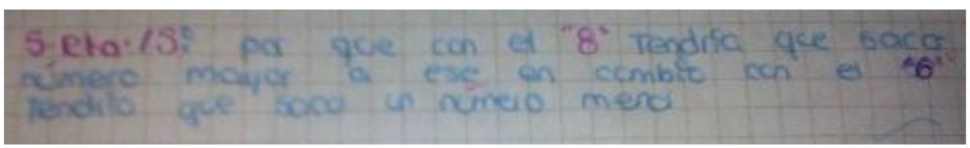


Figura 56. A favor de la percepción secundaria del por qué un 8 si tiene la misma probabilidad que un 6 de ganar:
"5. Rta:/ Si porque con el "8" tendría que sacar un número mayor a ese, en cambio con el "6" tendría que sacar uno menor"
</td><td>
Las últimas dos preguntas se relacionan en que los dos sucesos que se ponen en manifiesto tienen la misma probabilidad; es decir el 8 y el 6 tienen la misma probabilidad de ganar, además que existe la misma posibilidad de que en el primer lanzamiento se tenga que poner o colocar "case" ya que ambos tienen igual forma de salir:

Con respecto a las soluciones de los alumnos se evidenció que en algunas ocasiones estos no relacionan correctamente el apostar con las posibilidades de aparición de cada suma (espacio
</td></tr>
</table>

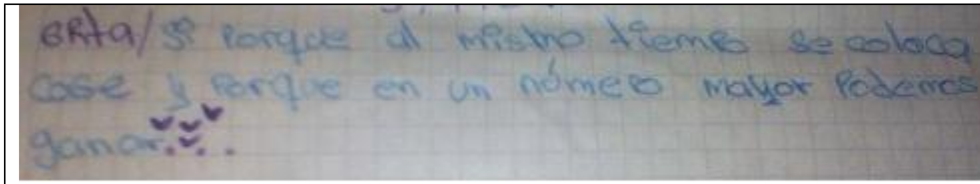


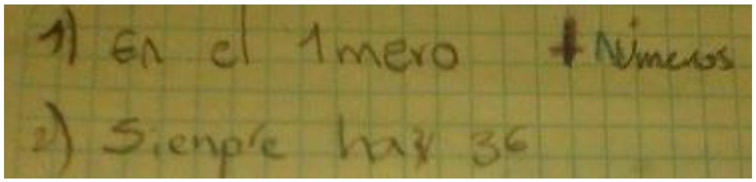
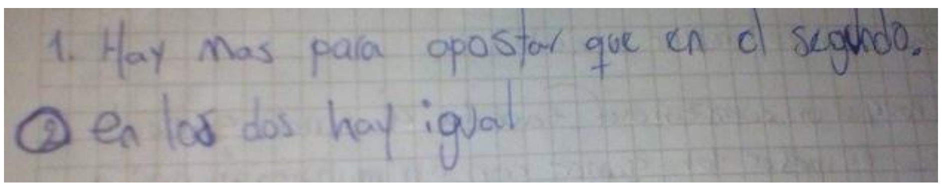
Figura 57. Análisis por parte de los estudiantes en relación a la probabilidad de ganar una apuesta inmediatamente: "6.Rta/ si porque al mismo tiempo se coloca "case" y porque en un número mayor podemos ganar"

Figura 58. Primeras formas de manifestación de la probabilidad Laplaciana entendida implícitamente como "(…) la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles" :"Siempre va a ver 1 de 36"

muestral) por lo que en la **figura 55** un grupo menciona (perteneciente al 10%) que el 8 y el 6 no tienen la misma probabilidad de ganar porque el 8 no le gana al 6, respuesta muy limitada si la comparamos con la de la **figura 56** en donde otro grupo (perteneciente al 90%) muestra porqué ambos números tienen igual probabilidad, de esta forma se ve un avance significativo en torno a las *Intuiciones Secundarias* (Godino, 1996) ya que estos estudiantes no solo se han quedado con sus percepciones iniciales sobre el juego, sino que han logrado hacer formalizaciones con lo que se ha socializado en clase en torno a poder establecer un subconjunto del espacio muestral que muestra las posibilidades de cada número, así este grupo logró adquisiciones que tienen todas las características

	de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela, así vemos también un análisis correcto en la **figura 57** a favor de la percepción secundaria. No obstante la percepción de los estudiantes no fue siempre cosa que se evidencia en la última pregunta ya que la **figura 58** se muestra que los estudiantes saben que siempre colocaran "case", y analizan si es probable que ganen en una apuesta inmediatamente, cosa distinta a lo que se preguntó porque no tomaron en cuenta la cuestión de que la probabilidad de que en el primer lanzamiento es la misma de colocar "case" que de ponerlo, por lo que fue una falencia que se puede asociar a la *interpretación* de la pregunta, Vigotsky (1995) menciona que la percepción, por ejemplo, estaba

	conectada siempre de un modo idéntico con la atención, la memoria con la percepción, el pensamiento con la memoria. Como constantes, estas relaciones podían ser, y eran, descompuestas en factores, e ignoradas en el estudio de las funciones separadas. Por lo que este grupo trabajo una función separada de percepción, apartada de la atención y la memoria, cosa que resulto en una consecuencia errónea, contrario a la **figura 59**, en lo que sabríamos que tanto el 2 como el 12 tienen 1 forma de 36 de salir. De esta manera tenemos algo muy importante en torno a las primeras formas de manifestación de la probabilidad Laplaciana entendida implícitamente como *“(...) la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles*” (Godino, 1996, Pg. 21)

	así hemos logrado evidenciar una notación muy similar a la de Laplace en un 25%.
 *Figura 59. Respuesta por la comparación de los dos juegos, identificando en cuál se gana más:* *“1) En el 1mero + números* *2) sienpre hay 36”*  *Figura 60. Respuesta por la comparación de los dos juegos, identificando en cuál se gana más:* *“1. Hay más para apostar que en el segundo.* *2. en los dos hay igual”*	Con respecto a las últimas preguntas en las que se comparan los dos juegos se evidenció que las *“intuiciones secundarias”* (Godino, 1996) se vieron reforzadas ya que en el 90% de estudiantes indicaron (**Figura 60 y 61**) que se ganaba más en el primer juego porque hay mayor rango de números, cosa que no sucedía en el segundo modo de juego. Por tanto se aprecia un avance significativo de disminución de errores de tipo “disponibilidad” los cuales Khaneman, Slovic y Tversky (1982) citados por Godino (1996) explican que consisten en la tendencia a hacer

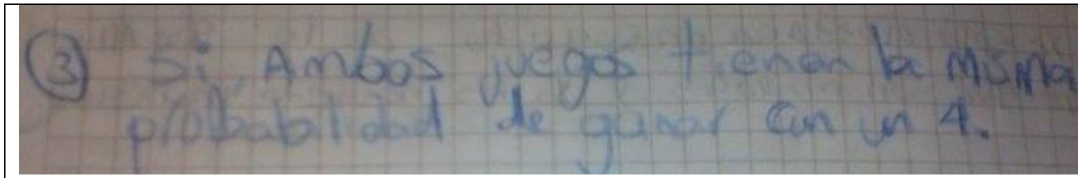


Figura 61. Respuesta con un error de "disponibilidad": "Si, ambos juegos tienen la misma probabilidad de ganar con un 4"

predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose en la mayor o menor facilidad con la cual es posible recordar o construir ejemplos de ese suceso, lo que crea un sesgo sistemático en las estimaciones probabilísticas, porque la gente tiende a pensar que los resultados que pueden recordarse fácilmente son más probables, de esta forma se logró avanzar en contra de esos errores probabilísticos que surgían, no obstante en la **figura 62** se muestra un error de *"disponibilidad"* ya que el grupo aún toma que hay más probabilidad de ganar cuando se tienen números más pequeños, cosa que se veía plasmada en las respuestas mencionadas más arriba.

Ya se había dicho la importancia del espacio

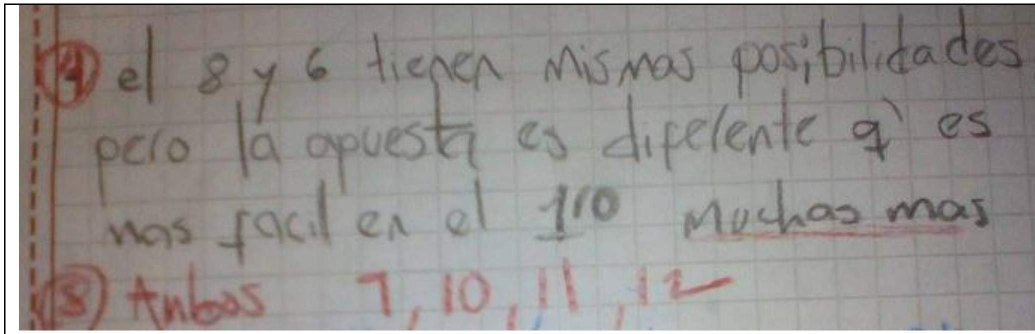


Figura 62. Identificación de los estudiantes por el modo de apostar: "4) el 8 y 6 tienen mismas posibilidades pero la apuesta es diferente q' es más fácil en el 1ro (primer modo de juego), muchas más (números para salir y ganar)
5) Ambos 9, 10, 11, 12"

muestral mencionado por Batanero (2001) en el cual el conteo del juego da sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral. De esta manera algunos subconjuntos del espacio muestral (de que salgan ciertos números) mostraron los números que más veces saldrían, además de su relación con la manera de apostar, así en la **figura 63** los alumnos identifican que aparte de que el 6 y el 8 tengan las mismas formas de salir lo que se tiene en cuenta es el modo de <u>apostar</u>, por tanto el subconjunto del espacio muestral en torno a la apuesta es más grande en el primer modo de juego, y más pequeño en el segundo, premisa lograda en el 90%, además de

<table>
<tr>
<td></td>
<td>que identifican que en ambos juegos el 8 tiene las mismas posibilidades de ganar. De esta forma se evidencia su avance y refuerzo en la concepción de espacio muestral.</td>
</tr>
<tr>
<td>

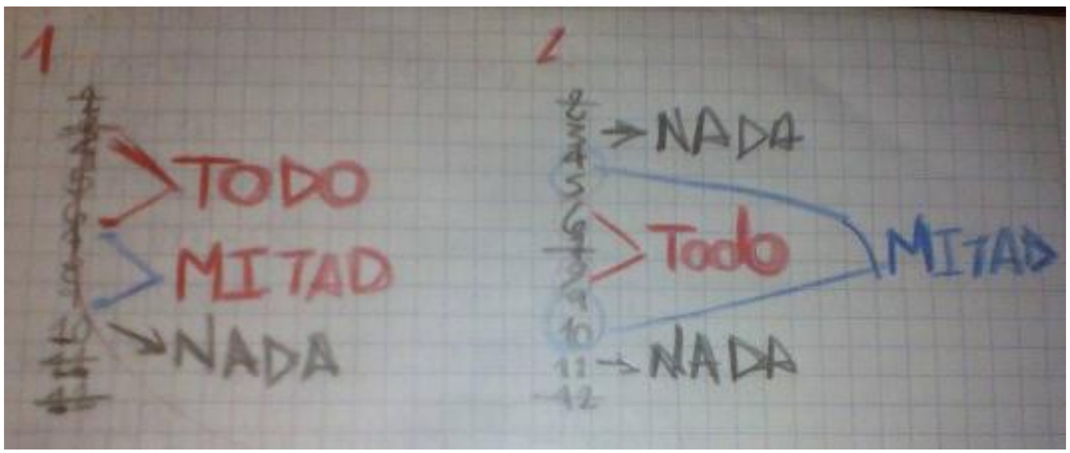


Figura 63. "Esquema de estrategias de apuestas según el primer lanzamiento, para ambos modos de juego de <Guayabita con dos Dados>"

</td>
<td>Por último, en todo el desarrollo de la actividad se logró ver cómo se superaron las dificultades que iban surgiendo en torno al modo de juego (las posibilidades de cada resultado) junto con la manera de apostar, todo esto gracias a poder identificar las "intuiciones erróneas" (Batanero, 2001) y siendo estas superadas por las ideas "fundamentales primarias" (Batanero, 2001, Pg. 18) que obtenían los alumnos en el juego. A favor</td>
</tr>
</table>

	de esto se muestra en la **figura 64** la forma en como un grupo identificó la forma de apostar según el resultado que les salía, de este modo recogemos lo que menciona Batanero (2001) acerca de la evolución de las concepciones probabilísticas gracias a las ideas fundamentales que proporcionan al niño modelos explicativos eficientes en cada etapa de su desarrollo, que difieren en los distintos niveles cognitivos, no de una forma estructural, sino sólo de una forma lingüística y en su nivel de profundización. Por ejemplo, si un niño, al lanzar dos dados concede más probabilidad al 7, porque hay más sumas con éste valor, tiene un modelo apropiado, que puede evolucionar al más complejo de aplicación de la regla de Laplace, e incluso al de variable aleatoria

	y moda de su distribución de probabilidad. Por lo que fue significativo el avance de los estudiantes a favor de la estructuración de su modelo probabilístico apropiado llegando a un alcance del 90%. Esto ayudo a su avance en las concepciones probabilísticas propias.

Conclusión

En esta actividad se logró incluir el espacio muestral a las intuiciones secundarias, además porque la actividad de "La Carrera" contribuyó en su mayoría a recordar las formas en que surgían los pares de números, y la de "Reconociendo el juego" por todas las caras del dado que definían el espacio muestral, así se logró avanzar en dicho concepto, además de la condicionalidad aleatoria al momento de las decisiones que debían tomar al apostar, esto, de nuevo gracias al espacio muestral intervenido y a los análisis ya realizados que les ayudaron a determinar que los números de las posiciones centrales eran los de mayor frecuencia.

Ligado a esto se logra la comprensión implícita de la simetría en la distribución normal del fenómeno aleatorio con los dos dados, por lo que si el 7 es el número que más cae, entonces el 6 y el 8 tienen la misma posibilidad de salir, así mismo fueron concepciones que no se manifestaron como intuiciones secundarios, sino como "Modelos intuitivos explicatorios" (Batanero, 2001), que abrieron paso a un conocimiento analítico posterior más elaborado, más complejo, pero que son pertenecientes las intuiciones primarias, no obstante las intuiciones erróneas a cerca de las malas comparaciones se hicieron participes en un 10% de todos los alumnos. Además estos "Modelos intuitivos explicatorios" ayudaron a una comprensión más clara de la manera de apostar, respondiendo al ¿Cuándo? y ¿Cuánto?.

Algo muy importante a cerca de la probabilidad por parte de los alumnos es sobre las primeras asignaciones numéricas a los sucesos aleatorios, de forma que estos números reflejen el grado de creencia en su verificación, así se lograba a una representación Laplaciana de las posibilidades de que saliera cualquier número, así mismo el número 7 en un lanzamiento ordinario tiene una probabilidad de 6/36 , de esta manera el espacio muestral y las intuiciones primarias y secundarias contribuyeron a los establecimientos de la probabilidad Laplaciana. Y así mismo se reforzó la comparación y la condicionalidad, al saber que el 6 y el 8 tienen la misma probabilidad de surgir (5/36). Estas conjeturas ya serian pertenecientes a las intuiciones secundarias, ya más elaboradas por los alumnos que es lo que se esperaba con la actividad.

Conclusiones

Las actividades propuestas en la secuencia didáctica contribuyeron a un aprendizaje significativo de la probabilidad en el grupo, favoreciendo el entendimiento de lo que sucede en un experimento aleatorio. Esto se logró gracias a una buena implementación de la metodología general de aprendizaje propuesta en el trabajo, teniendo en cuenta los tres principales aspectos que la componen expuestos por Tobón, Pimienta, García (2010), que son: *identificación de la secuencia didáctica*, la cual hace referencia a los aspectos formales para su respectiva elaboración, en pocas palabras estudia el objeto matemático a enseñar, la duración de la implementación y la población que se le va a implementar dicha secuencia. *Problemas significativos del contexto*, este aspecto refiere a que la secuencia requiere de situaciones problemas traídas del contexto del estudiante para poder evaluar los procesos y las competencias. Pero a la vez para que la metodología funcionara, se siguió a cabo los niveles de participación que están inmersos en los problemas significativos, en estos niveles se hizo lo siguiente:

- *"Nivel inicial-receptivo:* Los docentes formularon el problema en la secuencia didáctica y se abordó con los estudiantes.
- *Nivel básico*: En este nivel lo que se hizo fue formular un problema para la secuencia didáctica, pero a la vez se implementó a estudiantes de educación superior en el espacio de formación Didáctica de la probabilidad y la estadística de la universidad Distrital Francisco José de Caldas del proyecto curricular Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM) con la finalidad de poder hacer alguna mejora o adaptación en su planteamiento.
- *Nivel autónomo*: Se plantearon en forma general varios problemas en la secuencia didáctica en la que los estudiantes a partir del análisis y la indagación concretaron con la respuesta.

- *Nivel estratégico:* En este nivel se formuló un problema muy general en relación al juego, partiendo de la pregunta: ¿Con qué números tiene la mayor probabilidad de ganar el juego? A partir de esto los estudiantes empezaron a utilizar estrategias para encontrar dichos números, como por ejemplo encontrar el espacio muestral del suceso.

Otro aspecto que contribuyó en la metodología fue el de las *actividades concadenadas* el cual busca que las actividades estén articuladas entre sí y que sean independientes entre ellas, esto con el fin de que contribuyan a la resolución de problemas. Es por ello que a la vez se implementó en el abordaje los cuatro aspectos en relación a las actividades: Organización de las actividades, planeación de las actividades que se realizaran con apoyo del profesor a cargo del curso, identificación de las actividades que los estudiantes deben de realizar en su tiempo autónomo y por último, se establece el tiempo o duración del desarrollo de cada actividad dentro del aula, teniendo en cuenta el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Es por lo anterior que fue de gran pertinencia comenzar por el lenguaje informal que utilizaban los estudiantes en su diario vivir, ligado a una concepción de azar como ya se ha indicado en el trabajo. Gracias a esto, se permite acomodar los nuevos conocimientos que se generaban de la interacción con el juego, causando el análisis y la relación entre:

- El espacio muestral (Gracias al conteo generado en el experimento aleatorio);
- El lenguaje cualitativo de la probabilidad ligado a los sinónimos probabilísticos citados por Bressan (2008); lo “imposible”, lo “poco probable”, “posibilidad”… (unido al lenguaje informal de azar);
- Noción de la equiprobabilidad (Gracias a los resultados expuestos por el experimento aleatorio con los dados);

- Formas gráficas de solución (esquemas y dibujos que contribuyeron al entendimiento del espacio muestral, las posibilidades de cada número, identificación de la simetría de la distribución normal);
- Proporcionalidad (Que ayudó a armar probabilidades y a comparar los resultados probabilísticos obtenidos, y así lograr definir si estos resultados aleatorios eran imposibles, posibles o muy posibles)
- Simetría (unida con distribución normal);
- Representaciones de la probabilidad Laplaciana (casos posibles sobre casos totales);

Así, el siguiente esquema indica el porcentaje de comprensión y manejo de las anteriores concepciones en torno al aprendizaje de la probabilidad en todo el grupo de estudiantes:

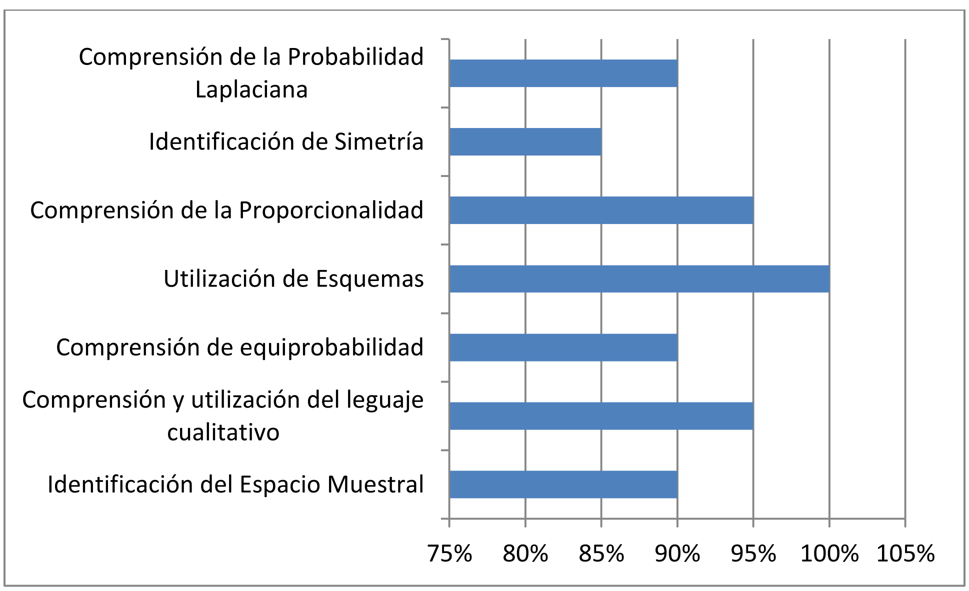


Ilustración 2. Porcentaje de estudiantes que aprendieron estrategias y conceptos relacionados con la probabilidad.

De esta manera se realizó a la vez un análisis, determinando que la secuencia didáctica a de contribuir a la adecuada enseñanza de los diferentes conceptos que hay inmersos en la probabilidad, cumpliendo de manera efectiva el objetivo general del trabajo, el cual tiene como finalidad llegar al entendimiento de la probabilidad Laplaciana. A la vez ha de cumplirse los objetivos específicos mediante la implementación de las actividades generando connotaciones implícitas y explicitas de conteo por medio del lenguaje verbal y simbólico. Cabe mencionar que el conteo fue una herramienta muy importante que ayudó a la comprensión del funcionamiento de las actividades de la secuencia gracias a los *inventarios* realizados, este contribuyó a identificar si era conveniente o no apostar, además de saber sobre qué números era más ventajoso hacerlo, por lo que el éste fue un elemento importante perteneciente a los "*Modelos intuitivos explicatorios"* mencionados por Batanero (2010) siendo una herramienta básica propia del estudiante, que ayuda a reforzar las concepciones probabilísticas vistas, condensando mejor sus "intuiciones secundarias".

Por otro lado hay que destacar que la secuencia didáctica sirvió para que los estudiantes al transcurso del desarrollo de las actividades, lograran superar las dificultades encontradas en cuanto a las "intuiciones primarias" propias de los estudiantes en torno a sus perspectivas erróneas que surgían de lo empírico con el juego y con lo que ya sabían de probabilidad (perteneciente a la informalidad). Un ejemplo claro de lo anterior es que los estudiantes pasaron de decir que, cuando se lanzaba los dos dados, era más probable que saliera el 8 que el 6, simplemente porque el 8 era mayor; de esta manera este tipo de hipótesis que tenían desde el juego de "La Carrera" se fueron acomodando y reforzando a medida que se hacia el análisis profundo de los juegos y así estas "intuiciones primarias" pasaron a ser "intuiciones secundarias" gracias a las socializaciones realizadas con el grupo de estudiantes, por lo que en la actividad de la "guayabita con dos dados" ya se notaba que el 80% de los estudiantes se encontraba en las intuiciones secundarias, y el 20% restante aún se quedó con "intuiciones primarias".

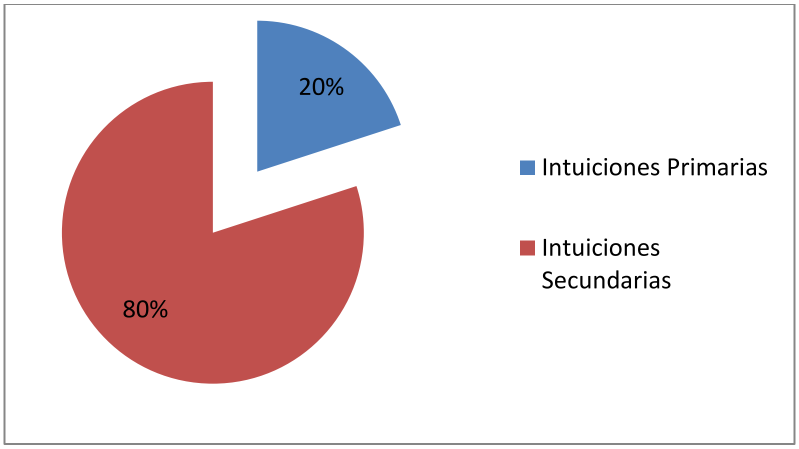


Ilustración 3. Porcentaje Final de los estudiantes pertenecientes a las Intuiciones definidas por Godino (1996)

Otra dificultad que perduró desde el principio fue en torno a la proporcionalidad, identificada desde la actividad diagnóstico, con el problema del pastel de cumpleaños. En este problema los estudiantes no eran capaces de hacer la relación de proporcionalidad para saber cuántos huevos necesitaban en un pastel para 40 personas. No obstante esta concepción se fue reforzando en las otras actividades con preguntas como: ¿Tendría la misma probabilidad de ganar con un 8 que con un 6? O ¿La probabilidad de que en el primer lanzamiento tenga que colocar "case" es la misma de tener que poner "case"? .Gracias al conteo de los alumnos, en la primera pregunta se tuvo relaciones como que las posibilidades de que salga el número 8 con dos dados son de 6 de 36, y con el numero 6 también seria 6 de 36, entonces $\frac{6}{36} = \frac{6}{36}$, de esta forma se ve proporcionalmente que se tienen las mismas posibilidades para ambos números, así también para la segunda pregunta $\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ (2do modo de juego de la guayabita con dos dados); de esta forma se hicieron relaciones de proporcionalidad que reforzaban la concepción y ayudaban a los estudiantes a pasar a las "intuiciones secundarias". También gracias a las comparaciones realizadas y la intervención de los maestros que formalizaban lo obtenido. Estas concepciones fueron muy importantes para los estudiantes ya que dieron paso al entendimiento de probabilidad Laplaciana.

Por lo tanto el siguiente trabajo sirve para que los docentes de matemáticas lo implementen en el aula de clase, identificando las dificultades y el proceso que han de tener los estudiantes en relación a sus primeros inicios de la enseñanza de la probabilidad, esto a medida que se van realizando las respectivas actividades las cuales son llamativas para los alumnos, ya que estas se basan en juegos cotidianos y entretenidos por la sociedad Colombiana. Es por esto que el presente trabajo no ha de quedar archivado y olvidado por la comunidad, ya que este es base fundamental para la exploración de nuevas investigaciones en relación a la enseñanza de la probabilidad a través de los juegos de una comunidad en específico.

Bibliografía

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Relime vol. 8, Núm. 3, 247-263.
- Sergio Tobón, J. P. (2010). SECUENCIAS DIDÁCTICAS: APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS. México: Pearson Educación.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*, Granada, España: Editorial Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias Universidad de Granada.
- Barragués F, José I y Guisasola A. (2006). *La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios*. Enseñanza de las ciencias *24*(2), 241-253.
- Bressan, A. (2008). *Probabilidad y Estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes*, Buenos Aires, Argentina: Editorial Novedades Educativas.
- Fernández, J., Rodríguez, M. (1997). *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*, Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Godino, J. (1996). *Azar y probabilidad*, Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Gorgas, J. Cardiel, N. Zamorano, J. (2011). Estadística Básica para Estudiantes de Ciencias, Madrid, España: Editorial n/a.
- Morales, A. (2012). *Estadística y Probabilidades*, Chile: Editorial n/a.
- Vygotsky, L. (1995). *PENSAMIENTO Y LENGUAJE: Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, sin ciudad ni país: Ediciones Fausto.