

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE  
CALDAS.  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS  
EN MATEMÁTICAS.**

---



**CARACTERIZACIÓN DE LAS DIFICULTADES EN EL PROCESO  
DE MODELACIÓN DE FUNCIONES EN UNA MUESTRA DE  
ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA  
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

---

**Jefferson Jair Prieto Márquez**

**Jhon Alejandro Bareño Romero**

*Director de Monografía:*

**Edwin Carranza.**

2016

## Contenido

INTRODUCCIÓN .....	3
JUSTIFICACIÓN .....	5
OBJETIVOS.....	7
Objetivo General. ....	7
Objetivos Específicos.....	7
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	8
METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS.....	9
Metodología Cualitativa .....	9
Participantes .....	10
Instrumento.....	12
MARCO TEÓRICO .....	17
Currículo de Matemáticas .....	18
Contenidos Curriculares LEBEM. ....	18
OBSTACULOS EN LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN .....	22
ENFOQUE ALGEBRÁICO .....	22
ENFOQUE DE LA FUNCIÓN COMO REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA .....	24
DIFICULTADES EN EL TRATAMIENTO DE REPRESENTACIONES .....	25
DIFICULTADES EN LA SELECCIÓN DE REPRESENTACIONES .....	27
MODELACIÓN .....	27
EL CONCETO DE MODELO MATEMÁTICO .....	27
LA IMPORTANCIA DE LA MODELACION EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES.....	29
ANÁLISIS DE RESULTADOS. ....	31
ANÁLISIS POR ESTUDIANTES.....	55
ANÁLISIS COMPARATIVO .....	70
ANÁLISIS SYLLABUS .....	73
CONCLUSIONES .....	78
TABLA DE ILUSTRACIONES. ....	80
BIBLIOGRAFÍA .....	82

## INTRODUCCIÓN

La modelación de funciones constituye uno de los grandes retos a los que se enfrenta un estudiante de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas. Es por eso que al convertirse en uno de los grandes procesos de pensamiento matemático en el estudiante, surgen las dificultades antes, durante y después de someterse a un proceso de modelación de funciones.

El presente trabajo de grado consiste en la caracterización de las dificultades en el proceso de modelación de funciones en una muestra de estudiantes en la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas. El objetivo de caracterizar las dificultades radica en que la gran mayoría de las investigaciones que están enfocadas al análisis de errores en el aprendizaje de las matemáticas, lo hacen después de haberse cometido el error, es por eso que el objetivo general de este trabajo, es el reconocimiento de las dificultades que existen cuando los estudiantes para profesores de matemáticas realizan procesos de modelación de funciones, siendo más específicos, se clasificaran y analizaran los tipos de dificultades relacionadas a estos procesos.

De esta manera se buscará demostrar y evidenciar las dificultades que se presentan en una muestra de estudiantes. Para ello es necesario contar con una metodología de trabajo en la que se justifique las acciones tomadas a lo largo de la investigación. En este trabajo se encontrará una metodología cualitativa la cual busca describir las dificultades que se presentan en algunos estudiantes de la licenciatura. Es de importancia indicar que para poder caracterizar las dificultades, se consideró necesario la elaboración de un instrumento que permita hacer los análisis correspondientes a los estudiantes que escogerán de manera aleatoria, este instrumento será una prueba la cual contiene preguntas con una intención específica en cada una de ellas.

Teniendo en cuenta que el instrumento nos arrojará los resultados de la investigación, es necesario poseer un marco teórico en que se puedan sustentar el análisis, las clasificaciones y los resultados obtenidos, además de que gracias al contraste entre los resultados y la teoría se podrán hacer las conclusiones que mostrarán los resultados obtenidos en el trabajo. A

medida que se recorra el marco teórico podremos encontrar como primera parte, los tres diferentes tipos de obstáculos que se pueden presentar en los estudiantes (**epistemológicos, ontológicos y didácticos**) una vez definidos los obstáculos es pertinente aclarar que solo se tomarán los obstáculos epistemológicos y didácticos, ya que nuestra investigación está enfocada a las adquisiciones que ha tenido el estudiante a lo largo de la licenciatura. La forma como se preparan los estudiantes en la licenciatura es de gran importancia en la investigación, puesto que se busca si hay errores en el currículo, para ello se muestra como desde lo curricular la licenciatura plantea la formación de sus estudiantes. Terminada la parte curricular se entra directamente a las dificultades relacionadas con los obstáculos epistemológicos, por lo que se ahondan los errores desde los diferentes enfoques que intervienen en el proceso de modelación de funciones, además también se toman los errores que se pueden presentar en la adquisición del concepto de función, las representaciones semióticas, el tratamiento de representaciones, la selección de representaciones, la importancia de la modelación en las funciones, el concepto de modelo y la modelación.

Ya teniendo una gran claridad conceptual sobre los distintos errores y dificultades que se pueden presentar en el proceso de modelación de funciones, se procederá al análisis del instrumento desde unas categorías en las que se analizarán los procesos de aprendizaje y los procesos de pensamiento matemático, en ambos procesos se encuentran categorías que refieren a errores, los cuales indicarán que dificultades presentan los estudiantes en cada una de las preguntas que se encuentran en el instrumento. Como parte del análisis, se consideró pertinente hacer un análisis de los syllabus de los cursos de la licenciatura que están relacionados con los procesos de modelación de funciones, analizando sus objetivos y contrastándolos con los resultados obtenidos en el análisis a los estudiantes por medio del instrumento, para finalmente terminar concluyendo de acuerdo a la teoría, lo que se esperaba y lo que se obtuvo.

## JUSTIFICACIÓN

**“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”**

Nikolái Lobachevsky.

En este nuevo siglo son cada vez más las teorías que apuntan hacia una nueva forma de enseñar la matemática y con ellas vienen los errores usuales que los estudiantes pueden incurrir cada vez que se enfrentan a nuevos aprendizajes. Este tipo de estudios e investigaciones vienen tomando mucha importancia sobre todo porque permiten a las teorías ser mejoradas y pulidas para que se presenten cada vez menos errores y mejor efectividad de las mismas.

La enseñanza de la matemática en el aula por otra parte, se aleja bastante de estas nuevas teorías, a pesar de que ellas proveen herramientas suficientes, para los profesores no son fuente fundamental, como se quisiera, de los procesos de enseñanza en el ambiente escolar. La búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza se ve marginada y los propósitos y/o objetivos centrados en los Lineamientos y Estándares básicos de competencia propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, de usar estrategias motivacionales y de interés estudiantil para el desarrollo significativo de procesos de pensamiento matemático se ven restringidos a solo el uso de desarrollo de Algoritmos. Así pues, la esperanza está puesta en la nueva generación de estudiantes para profesores que conocen y han hecho uso de distintas teorías, reconocen sus aciertos y debilidades y que deberían ser capaces de implementarlas de manera apropiada en espacios escolares.

Por lo anterior, el presente documento pretende interesarse e ir más allá de los errores que puedan arrojar un grupo de estudiantes de la licenciatura al enfrentarse a la resolución de un problema de modelación de funciones, sino en tratar de interpretar las dificultades que presentan dichos estudiantes para que frecuentemente proporcionen respuestas erróneas en la generación de un modelo matemático de alguna situación brindada. De esta manera estaremos contribuyendo a lo menos dos aspectos significativos de los procesos de modelación, el primero; a que el estudiante para profesor pueda identificar dificultades y obstáculos, ya sea de complejidad, procesos de pensamiento y procesos de enseñanza que están provocando manifestaciones erróneas en su modelación de funciones. El segundo es que al apoderarse y superar sus dificultades podrá realizar más efectivamente sus actividades como docente, mejorando el conocimiento de sus estudiantes, sabiendo a que debe apuntarle si no quiere que sus estudiantes presenten estas dificultades y de esta forma contribuir de una forma más potente a la comprensión de los fenómenos que suceden en la vida cotidiana y que pueden ser objeto de modelación y a la disminución significativa de los errores de sus estudiantes.

## **OBJETIVOS**

### **Objetivo General.**

Reconocer las dificultades que tienen algunos estudiantes para profesores de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM) en sus procesos de modelación de funciones.

### **Objetivos Específicos**

Analizar los tipos de dificultades que presentan los estudiantes para profesores de la LEBEM en sus procesos de modelación de funciones.

Clasificar las dificultades de algunos estudiantes para profesores de la LEBEM en sus procesos de modelación de funciones.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

A lo largo del proyecto de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas se pueden encontrar cursos encaminados al trabajo de las funciones. El trabajo propuesto por los cursos en el trabajo de las funciones está pensado bajo la metodología de la resolución de problemas, el estudiante asume un compromiso de responsabilidad y autonomía en el desarrollo de las situaciones problema propuestas por el maestro con el ánimo de llegar al concepto por medio de la construcción del conocimiento.

Bajo la experiencia como estudiantes del proyecto podemos dar cuenta de las intenciones de dichos cursos, como del trabajo que el estudiante propone en el transcurso del espacio académico. Sin embargo, también podemos dar cuenta de las muchas dificultades que se presentan en el estudiante al momento de abordar las situaciones problema que permitan modelar una función como solución al problema. Cuando los estudiantes se enfrentan a un proceso de modelación, se pueden presentar numerosas posibilidades en cuanto a los caminos que el estudiante supone como vías para construir un modelo. Así como hay estudiantes que ponen a prueba sus conocimientos para poder encontrar un modelo matemático, existen estudiantes que poseen dificultades para construir la expresión de una función a través de una situación, es en este punto donde empezamos a cuestionarnos sobre el porqué suceden dichas dificultades, cómo describir los problemas que ocurren en el momento de proponer un modelo, decidimos enfocarnos en un “antes” de la situación ya que la mayoría de profesores e incluso gran variedad de autores se enfocan en lo que ocurre después de la situación, cuando ya se cometieron los errores o cuándo el estudiante se siente incapaz de poder realizar el modelo debido a que nunca se trabajaron o se tuvieron en cuenta las dificultades que en este trabajo nos hemos propuesto a caracterizarlas.



## **METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS**

Reconociendo la importancia de los resultados que puede arrojar esta investigación para posteriores estudios acerca de cómo potenciar la modelación de situaciones matemáticas dentro de la licenciatura, se hace indispensable adoptar la metodología cualitativa como herramienta fundamental de análisis de resultados. Además de lo anterior se expondrá en esta sección de documento el instrumento de análisis y el proceso de selección de los participantes.

### **Metodología Cualitativa**

En múltiples oportunidades hemos mencionado que el interés de esta investigación no es el de calificar o poner un rango de puntuación a los estudiantes de nuestra licenciatura, sino que lo importante es evidenciar las dificultades que tienen algunos estudiantes de la LEBEM al afrontar situaciones problema y modelarlas. Por tal motivo una metodología cuantitativa iría en contra de nuestros objetivos.

Realizando un acercamiento a este tipo de metodología adoptada observamos por parte de (Planchart Márquez, 2002) que “se dirige más a detectar cómo piensa y responde el estudiante ante un problema dado; qué conexiones mentales hace, a qué imágenes mentales acude, a qué sistemas de representación semióticas está familiarizado; por estas razones se adecua mejor la metodología cualitativa “muy relacionada con las aspiraciones de nuestro estudio, dado que como lo manifiesta Buendía, Colás y Hernández (1997) citados por (Planchart Márquez, 2002):

Cuando hablamos de investigación cualitativa no nos estamos refiriendo a una forma específica de recogida de datos, ni a un determinado tipo de datos, textuales o palabras sino a determinados enfoques o formas de producción o generación de conocimientos científicos que a su vez se fundamenta en concepciones epistemológicas más profundas. (p.55).

Así pues, las formas de producción, los patrones de desarrollo y las evidencias semióticas que sean plasmadas en cada una de las pruebas aplicadas, serán los insumos suficientes para fundamentar nuestra investigación y arrojar resultados acerca de las dificultades que los estudiantes manifiestan. Por lo anterior tuvimos en cuenta los parámetros usados por Merriam S. (1998) citada por (Planchart Márquez, 2002) quien señala que el uso de la metodología cualitativa debe ser el resultado de transitar por los siguientes ítems:

1. Entender el fenómeno de interés desde las perspectivas de los participantes y no del investigador.
2. El investigador es el instrumento primario para la colección de datos y análisis.
3. La investigación cualitativa se refiere al estudio de casos.
4. Se enfoca en los procesos, significados y entendimiento; el producto del estudio cualitativo se enriquece descriptivamente.
5. El investigador consume una cantidad de tiempo sustancial, en el medio natural, muchas veces en intenso contacto con los participantes. (pág. 6)

El paso por algunos de los ítems mostrados puede verse más en profundidad en el análisis de resultados.

## **Participantes**

Para analizar las dificultades que presentan algunos estudiantes para profesores de la LEBEM se realizó la aplicación de un instrumento, que será reconocido como prueba diagnóstica de modelación, y fue realizado por quince estudiantes. Dichos estudiantes fueron parte de una selección aleatoria que se ejecutó en cada semestre empezando por el cuarto ya que corresponde al inicio de la actividad de modelación en la licenciatura. Es importante aclarar que dicha selección se efectuó bajo la pauta conceptual de que *“esta es condición para obtener muestras representativas. Sin embargo, una muestra aleatoria no necesariamente es una muestra representativa.”* (Canales, 2006) . Argumento del que somos conscientes, sobre todo al momento de hablar de la imprecisión de los resultados que arrojamamos en esta investigación. No obstante, también es sabido que para el caso del muestreo aleatorio simple, este permite que el grupo seleccionado por semestre posea características similares con respecto al de sus compañeros de carrera y/o semestre, por ser elegidos bajo la misma probabilidad que el grupo total teniendo en cuenta lo anterior puede sintetizarse con los planteamientos hechos por (Canales, 2006)

### **El muestreo aleatorio simple**

Se trata de un procedimiento de selección elemental fundado en el puro azar. En sí mismo no es una estrategia o un diseño muestral. Sin embargo es la base en la que se sustentan todos los diseños muestrales. Se caracteriza porque los elementos están listados y la selección se realiza mediante un procediendo aleatorio según el número de casos previamente definido. Procedimiento en que la

unidad de muestreo consta de un elemento que es la unidad de análisis. Auto ponderando porque todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos. (pág.143)

En consecuencia de lo anterior, el muestreo que se realizó fue tomar las listas de las asignaturas que contenían estudiantes de cuarto semestre en adelante y se eligió a 2 de cada uno, guardando la condición de que todos tuvieran la misma oportunidad de participar. Como existieron casos en la que los estudiantes seleccionados no se presentaban a la cita acordada para la aplicación del instrumento, se optó por elegir otro de igual semestre o de alguno superior o inferior.

Finalmente la representación por semestre se dio de la siguiente manera:

- Cuarto y quinto semestre : 3 Estudiantes
- Sexto semestre: 4 Estudiantes
- Séptimo semestre : 2 Estudiantes
- Decimo Semestre en adelante: 6 Estudiantes

Con base en sus respuestas se hizo una clasificación de las diversas dificultades obtenidas en:

- Las que refieren a la complejidad del Objeto matemático
- Las que refieren a los procesos de Pensamiento
- Las que refieren a los procesos desarrollados en la enseñanza.

\*Estudiadas más a fondo en las categorías de análisis.

Examinado lo anterior se corroborará con los syllabus suministrados por los docentes de algunas materias en las que los procesos de modelación se encuentran presentes de manera preeminente, realizando una triangulación entre lo teórico propuesto en este documento, el instrumento y los syllabus.

Finalmente se realizaron algunas conclusiones de interés común para el potenciamiento o desarrollo, según sea el caso, de actividades en las que la modelación de funciones sirva como sustento para la interpretación de los fenómenos del mundo real.

## Instrumento

Las preguntas planteadas en el instrumento tuvieron diversas adaptaciones tanto de investigaciones referentes a la modelación como de libros de pre cálculo.

Las primeras tres preguntas corresponden a la Investigación realizada por Hitt (1996) citado por (Planchart Márquez, 2002) en la cual planteó 14 cuestionarios diseñados y aplicados a profesores de matemáticas. A su vez (Planchart Márquez, 2002) uso algunos de estos cuestionamientos en la Universidad Interamericana de Puerto Rico, durante el segundo semestre del años 2000.

Para el caso de la primera pregunta, se tomaron valores distintos a los originales, creando así una gráfica semejante pero que contará con más variantes al momento de observarse y generar un juicio acerca de ella. Sin embargo, la intención de Hitt (ídem) y (Planchart Márquez, 2002) se mantuvo en lo que respecta a que *“interesa conocer a que conocimientos recurren y qué imágenes mentales participan, para justificar si las gráficas representan funciones o no”*

En la segunda pregunta se realizó un cambio para el valor de la constante y se creó una gráfica semejante. Al igual que con la primera pregunta se mantuvo la intención de Hitt y (Planchart Márquez, 2002) de que *“Evalúa funciones en un contexto algebraico y en el gráfico. Pueden leer la gráfica y hallar el valor de la función, también hacer operaciones aritméticas que le permitieran evaluar las formulas algebraicas.”*

La tercera pregunta fue modificada en términos de remover algunos valores con las que contaba la representación tabular inicial. Aunque en el documento (Planchart Márquez, 2002) no hace explícita la intención de esta pregunta, asumimos que es la de escribir la expresión algebraica que representa los pares ordenados, por lo tanto, conservamos dicha intención.

La cuarta surgió de una situación planteada en el libro (Stewart, Redlin , & Watson, 2012) , *denotada como función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia*, (pág. 157-158). A la que se le hicieron adaptaciones de redacción para asemejarla a un contexto próximo de los estudiantes de la Licenciatura, además se le agregaron preguntas enfocadas a identificar las dificultades previstas por esta investigación.

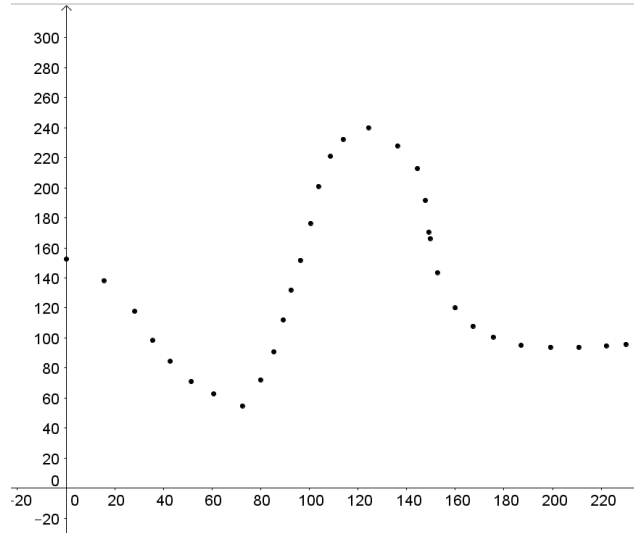
La quinta tiene origen en una pregunta extraída de un ejercicio de modelación propuesto en el libro (Stewart, Redlin , & Watson, 2012), denotado como, “Ejemplo 6; maximizar ingresos por venta de boletas”. Para el caso de esta situación, lo que hicimos fue modificarla completamente, la situación en sí y la forma estructural con la que cuenta. Se realizó una tabla, una expresión algebraica y una gráfica propia.

La sexta pregunta corresponde a una experiencia personal de modelación, en la que se vio involucrado uno de los investigadores del presente documento durante la asignatura Movimiento I.

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS**  
**FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN**  
**PRUEBA DIAGNOSTICO DE MODELACION EN ESTUDIANTES DE LEBEM**

Responda las siguientes preguntas de acuerdo a sus conocimientos, si no sabe o no está seguro no responda.

1. ¿La siguiente imagen es función?

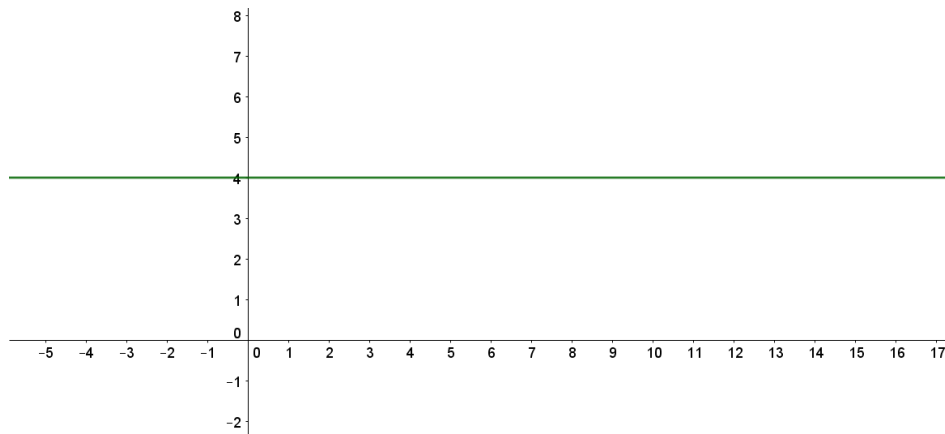


*Ilustración 1-Representación gráfica de función, primera pregunta.*

Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_

Justifique:

2. Si  $g(x) = 4$



*Ilustración 2-Representación gráfica de función constante, segunda pregunta.*

Entonces  $g(10) =$

Justifique:

3. Escriba la expresión algebraica que representa los siguientes pares ordenados:

0	1	2		4	5	...	x
2	5	8	11	14		...	

*Ilustración 3-Pares ordenados, tercera pregunta.*

4. El costo de una llamada telefónica de larga distancia desde Bogotá, Colombia, a Norte América, es de \$ 215 pesos por el primer minuto y \$ 58 pesos por cada minuto adicional (o fracción de un minuto). Responda:
- ¿Cuánto costaría la llamada a Norte América si esta tiene una duración de 3'59" (tres minutos con 59 segundos)?
  - ¿Qué información cree que necesita para modelar la situación anterior?
  - Trace la gráfica del costo de la llamada telefónica como función del tiempo
5. Un equipo de fútbol de la capital juega en un estadio de capacidad de 38.000 espectadores. Con el precio de la boleta a \$20 dólares, el promedio de asistencia a los partidos recientes es de 9500 personas. Un estudio de mercadeo indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000 personas:

A continuación brindamos información que puede servir para solucionar el problema:

### Tabla de datos

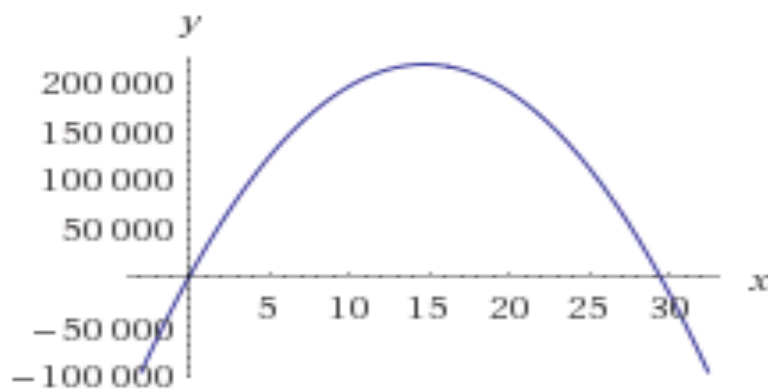
SI X =PRECIO DE LA BOLETA		
CANTIDAD QUE BAJA LA BOLETA	AUMENTO EN ASISTENCIA	ASISTENCIA
0	0	9500
1	1000	10,500
2	2000	11,500
3	3000	12,500
,	,	,
,	,	,
,	,	,
20-x	1000(20-x)	9500+1,000(20-x)

*Ilustración 4- Representación en tabla de datos, quinta pregunta.*

### Expresión algebraica de la función

$$R(x) = 29500x - 1000x^2$$

### Grafica de la Función



*Ilustración 5-Representación gráfica de la función quinta pregunta.*

- Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos. JUSTIFIQUE
- ¿Qué precio de la boleta es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos? JUSTIFIQUE

6. Se tiene un alambre de longitud  $L$  y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Halle la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima. Determine la función que permite modelar la situación.



## MARCO TEÓRICO

Dado que el objeto de investigación se refiere a los obstáculos epistemológicos y dificultades del pensamiento matemático en la modelación de funciones, es necesario hacer uso de distintos conceptos los cuales nos funcionarán como apoyo para hacer un análisis y clasificación de errores cometidos en una muestra de estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, en el planteamiento de funciones partiendo de una situación problema.

Si bien es cierto que los obstáculos surgen al momento de relacionarnos con una actividad matemática y que estos pueden ser diversos tipos tal como los define (Socas, 1997):

- De origen Ontogénico o psicogenéticos: Debido a las características del desarrollo del niño
- De origen didáctico: Resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza
- De Origen Epistemológico: Están relacionadas con el propio concepto.

En esta investigación solo se tendrá en cuenta los obstáculos de carácter didáctico y epistemológico los cuales la mayoría de las veces constituyen el origen de los errores procedimentales de los estudiantes.

¿Cuáles son las características de un obstáculo didáctico? Desde el punto de vista de Tall citado por (Socas, 1997) una de ellas tiene que ver con la secuencia de un tema, esta se ve cuando se saltan nociones y/o conceptos matemáticos en el proceso de aprendizaje de las funciones. Otra característica es que el estudiante no interiorizó los conceptos previos necesarios para la construcción de una nueva noción. La unión o la manifestación de una de estas situaciones representarían entonces un obstáculo didáctico. Hersovic citado por (Socas, 1997) sitúa estas características como obstáculos cognitivos y señala que *el estudiante se*

*enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en sus estructuras cognitivas ya existentes, lo que ocasiona que no pueda enfrentarse adecuadamente a la nueva información...*

Existen también algunas categorías en donde se hace énfasis en las dificultades que pueda tener un estudiante al enfrentarse con el planteamiento de una función dada una situación, estas dificultades corresponden tanto al alumno como al profesor y su proceso de enseñanza. Para (Socas, 1997) las dificultades que podríamos encontrar inmersas en las respuestas de los estudiantes de LEBEM para la modelación de funciones pueden clasificarse en; la complejidad del objeto matemático y sus procesos de pensamiento matemático, esto en lo que refiere a la disciplina y la noción como tal; también acusa que los orígenes las dificultades pueden referir a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, para el caso en específico de esta investigación, a la relación de enseñanza-aprendizaje de las funciones y la actividad matemática que se realice para su razonamiento mediante la modelación. Dadas estas dos perspectivas haremos énfasis a continuación en todo lo que involucra con el currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

### **Currículo de Matemáticas**

Debido a que el sujeto de investigación está inmerso bajo dos currículos, el primero el que tiene que ver con sus hallazgos y aprendizajes que ha venido adquiriendo en su paso por la LEBEM y en los aspectos propios que fueron inculcados bajo en Ministerio de Educación Nacional, reconocido como estudiante regido tanto por los lineamientos generales de educación como por los estándares básicos de competencias en matemáticas. Evaluaremos cómo funcionan estos currículos y daremos cuenta de si estos fueron originarios y promotores de los obstáculos y dificultades descritas por Socas.

### **Contenidos Curriculares LEBEM.**

La licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas plantea la siguiente estructura como base fundamental en la formación de sus estudiantes:

(LEBEM, 2000) Se estructura a partir de Núcleos problémicos, que desde la organización administrativa se han denominado Ejes de formación. Estos son: el eje de Problemas y pensamiento matemático avanzado, el eje de Didáctica, el eje de Práctica docente y el eje de

Contextos profesionales, que responden a unas necesidades de formación integral de los docentes de matemáticas para la educación básica y media.

Queremos resaltar que bajo nuestra experiencia en la Licenciatura encontramos asignaturas propuestas en el plan de estudios y en diferentes ejes de formación que nos permitieron, hacer acercamientos a los procesos de modelación de funciones, y dichos procedimientos se fueron afinando con la experimentación y el desarrollo de clases más avanzadas y que requerían cada vez mejores modelos para los fenómenos cotidianos.

**Eje de Problemas y pensamiento matemático avanzado:** Taller de ciencias, problemas del algebra y Movimiento I, II Y III.

**Eje de Didáctica:** Didáctica de la Variación, Didáctica del Algebra, Transición Aritmética al Algebra

Como se puede evidenciar los aspectos correspondientes a la modelación de problemas se ataca desde diferentes frentes Temáticos y en asignaturas dentro de la LEBEM, lo anterior nos permite entonces pensar que este desarrollo debía haberse saneado antes, es decir, en la forma en la que aprendimos conceptos elementales.

¿El problema se encuentra en los Lineamientos?

### **Contenidos Curriculares en Los Lineamientos**

Los lineamientos Curriculares para el área de matemáticas propuestos por (MEN, 1998) proponen el que hacer matemático bajo tres aspectos para organizar el currículo:

1. **Procesos generales:** Los cuales tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y el planteamiento de problemas; la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
2. **Conocimientos básicos:** Son procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros, los sistemas son aquellos propuestos desde la

renovación curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistema de datos, sistemas algebraicos y analíticos.

3. **El contexto:** Tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprenden, en el que se concreta el acto educativo, debe tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (pág. 18).

Claramente en los lineamientos se evidencia un interés porque los estudiantes realicen acciones que involucren la modelación como mecanismo de razonamiento y aprendizaje de nociones matemáticas, además que las relacionen con aspectos de su vida cotidiana. El sustento de los tres aspectos descritos anteriormente responde a que, y en concordancia con nuestras propias creencias, los procesos de modelación se encuentran detrás de cualquier actividad que realizamos a diario.

Es importante tener la referencia de que se entiende por Modelación para el MEN, el cual hace una diferenciación entre el objeto en cuestión y la matematización. Él (MEN, 1998) recoge las ideas de modelación de Treffers y Goffree para describirla como *“una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas”*

De igual forma sustenta el uso de esta misma como un proceso general caracterizada en sucesos propios del este Siglo, de la siguiente manera:

La tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta. Cuando hablamos de la actividad matemática en la escuela destacamos que el alumno aprende matemáticas “haciendo matemáticas”, lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, lo que implica que desde el principio se integren al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación. (pág. 76).

Incluso el Ministerio de Educación Nacional plantea un esquema de “elementos básicos de la construcción de modelos” (pág.76):



*Ilustración 6- Elementos básicos en la construcción de modelos.*

Es de resaltar que estos no son los únicos aspectos en los que se tienen en cuenta la modelación, dentro los Lineamientos, sino que también se relaciona cualquier pensamiento con la expresión de un modelo del mismo es más lo encarrilan como una actividad matemática que de hecho debe realizarse en cualquier proceso de aprendizaje. Dicho esto, existe también una descripción de la modelación para el caso de las funciones y con esto un sustento mucho mayor a varios intereses propuestos en este documento y son del carácter de que:

El estudio de las funciones en la educación básica secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio, como se propuso en la Renovación Curricular. Es importante que los alumnos se sensibilicen ante los patrones que se encuentran a diario en diversas situaciones, a describirlos y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones. Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos. (MEN, 1998)(pág. 80)

¿El problema entonces está en los lineamientos mal aplicados?

Teniendo en cuenta que el problema no radica en el currículo, cómo se evidenció anteriormente, deducimos que no se le está dando la importancia necesaria a la aplicación de los lineamientos propuestos por el MEN. La dificultad se presenta cuándo el estudiante es incapaz de reconocer que se está enfrentando a un proceso de pensamiento matemático el

cual no afronta habitualmente, ya que para realizar el modelo de una situación y lograr describirlo mediante una expresión que represente el comportamiento de lo que está ocurriendo, es necesario conocer e interpretar, entre otras nociones, el concepto de función, los distintos tipos de representación, los enfoques que se le dan al uso de la letra para predecir comportamientos anteriormente identificados y posteriormente la generación de un modelo de la situación que se les presente.

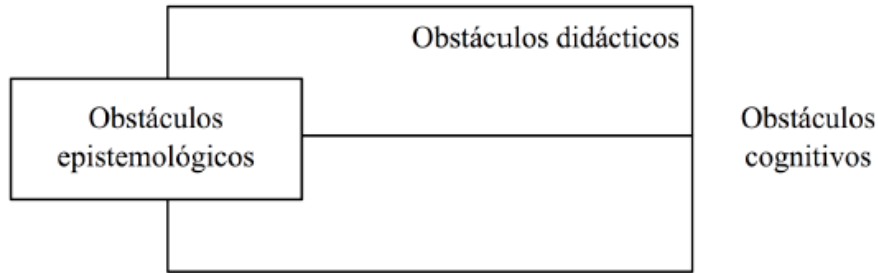
## **OBSTACULOS EN LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN**

Como se puede hablar de modelar funciones sin tener en cuenta lo que significa e implica el concepto de función, de no hacerlo, podríamos decir que estamos proponiendo unos resultados incompletos, en el caso más grave, no tener en cuenta las dificultades algebraicas que conectan tanto el concepto de función como la modelación de la misma. Es por eso que varios investigadores insisten en que la concatenación entre estos enfoques resulta de vital importancia en el objetivo de construcción del conocimiento de modelación de funciones.

## **ENFOQUE ALGEBRÁICO**

Es necesario realizar una clasificación de las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes tanto en lo procedimental y conceptual con referencia a lo algebraico, lo anterior basados en (Socas, 1997) citado por (Ruano, 2008), en donde se examinan los orígenes de los errores de los estudiantes al producir expresiones haciendo uso de símbolos (letras) para describir o predecir el comportamiento de una situación. Para el caso de esta investigación solo se tendrán en cuenta dos orígenes del error, como lo son el *obstáculo* y la *ausencia de sentido*.

Un obstáculo según Bachelard, 1938 y Brousseau, 1983 citado por (Ruano, 2008) puede considerarse como “un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas “. Además los obstáculos pueden dividirse en varios tipos para ilustrar esto, se hace necesaria la utilización del siguiente esquema:



*Ilustración 7-Organización de obstáculos en el sistema didáctico.*

Los *obstáculos epistemológicos* del que su precursor fue el filósofo francés Gastón Bachelard tienen que ver con los constructos de aprendizaje a los cuales se enfrenta el estudiante y su resistencia por la inclusión de un nuevo conocimiento que rompe con las concepciones existentes en el alumno. Para el caso de los *obstáculos didácticos* se presentan como una ayuda y a su vez una herramienta para contrarrestar problemas de origen a los usuales errores que se presentan como lo es la identificación y la adquisición de un pensamiento algebraico que le permitiera reconocer las diferentes interpretaciones que pueden tomar en una situación cualquiera la letra. Para Küchemann 1980 citado por (Ramos Rodriquez, Flores, & da Ponte, 2015) el uso de los símbolos puede referir a:

- letra evaluada, a la letra se le asigna un valor numérico;
- letra no utilizada, la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- letra como objeto, se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- letra como incógnita específica, representando un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
- letra como número generalizado, por lo que representa o es capaz de asumir distintos valores;
- letra como relación entre cantidades, en cuyo caso representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Cuándo se usa la palabra modelar, el estudiante pone en juego todos sus conocimientos previos, además tiene que aprender a utilizar la situación a su favor es decir, extraer de ella

el mayor número de información que pueda ser necesaria para modelar situaciones matemáticas, Para Kieran 1998 citado en (Castellanos & Obando, 2009) está claro que la generalización, formación de patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas al igual que el análisis de situaciones con la ayuda de símbolos, constituyen una de las áreas que mayor predomina en los estudios sobre errores en matemáticas escolares.

Para considerar los errores que se catalogan como de *ausencia de sentido*, es necesario resaltar que dichos errores son en realidad obstáculos cognitivos en el desarrollo del pensamiento matemático, tal como lo señala (Castellanos S & Obando B, 2009) ...“*los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación*”. Por tanto, el error va tener múltiples procedencias, pero siempre, se considerara como un esquema cognitivo adecuado.

Siguiendo la línea de los errores en el desarrollo del pensamiento matemático, las dificultades aparecen en algún punto del desarrollo, por lo tanto es necesario formar un esquema en dónde se distingan los errores. (Castellanos S & Obando B, 2009) Señalan tres posibles errores:

- Errores del álgebra tienen origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
- Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.
- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo “=” en Álgebra y la sustitución formal.

Recopilando lo anterior se puede observar que corresponde a las dificultades que se les presentan al modelar funciones y enfrentarse a situaciones simbólicas (algebraicas)

### **ENFOQUE DE LA FUNCIÓN COMO REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA**

Es habitual en los profesores de matemáticas enseñar el concepto de función como una noción que transita entre lo tabular y lo gráfico olvidándose de las distintas representaciones

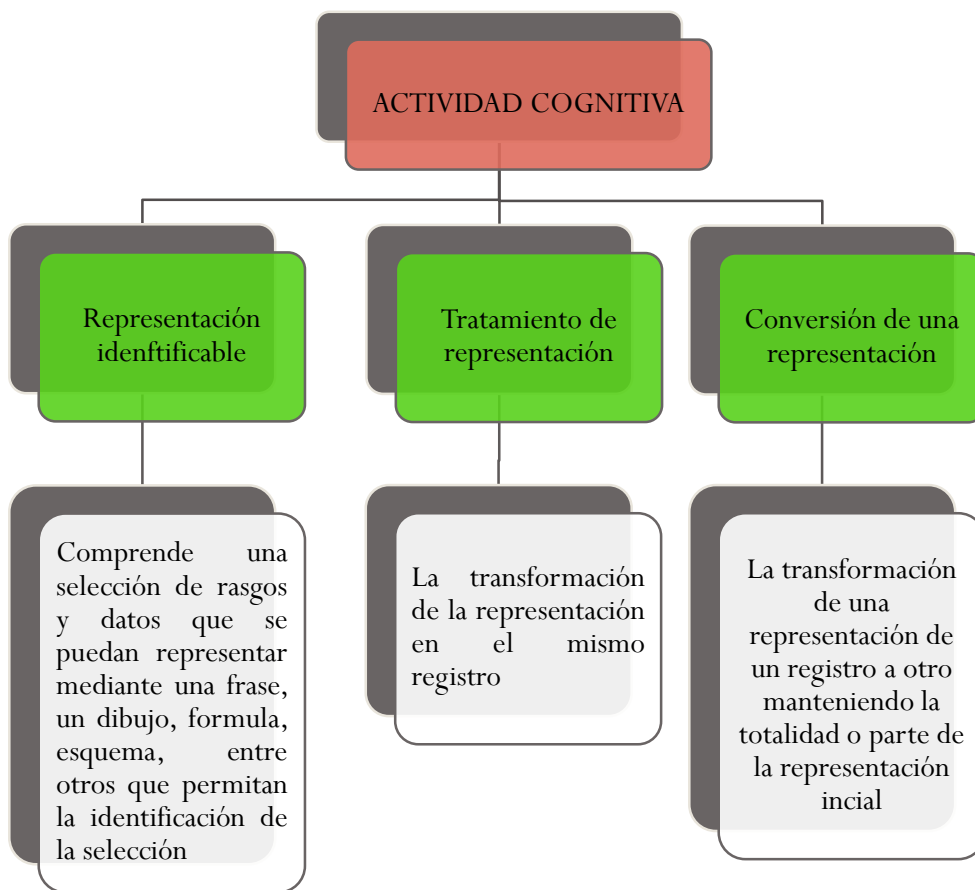


con las que cuenta esta temática y que de igual forma pueden ser alternativas de desarrollo conceptual.

## **DIFICULTADES EN EL TRATAMIENTO DE REPRESENTACIONES**

Al analizar distintos textos e investigaciones acerca de la enseñanza del concepto de función, se ve reflejado que esta solo aparece incluida dentro de los libros de pre-cálculo, cálculo diferencial e integral. La tendencia es a proponer esquemas en los que se enseña a pasar de lo tabular a lo gráfico y en el mejor de los casos de lo algebraico a lo gráfico, en su mayoría, no se tienen en cuenta las ventajas que proporcionan las demás representaciones durante el proceso de la conceptualización de funciones. La dificultad se presenta cuando se omite enseñar las distintas representaciones que tiene la función, sus propiedades, reglas y la significación de cada una de ellas, lo que permite que sean transformadas como también trasladadas de una hacia otra, es decir, si ignoramos enseñarle a los estudiantes a trasladarse desde una representación gráfica a una algebraica, el estudiante asumirá que no existen relaciones recíprocas entre las distintas representaciones y como consecuencia no logrará generar alternativas de solución a problemas que las contengan.

Varios investigadores a través del tiempo han intentado dar solución a esta dificultad e intentar que los profesores reconozcan la importancia de la transformación entre las representaciones. Duval (1993, 1998, 1999) citado por (Planchart Márquez, 2002) realizó una recopilación de dichas investigaciones nacidas como respuesta a la construcción del conocimiento, basado en los sistemas de representación, y profundizó en el estudio de las representaciones circunscribiéndolas en el campo de la semiótica como *“aquellas que tienen características particulares y permiten sostener la conceptualización en la matemática y, no solamente están sujetas a la comunicación, sino lo importante en la actividad cognitiva del pensamiento”*. En relación con lo anterior se puede observar que un registro semiótico de representación puede brindar muchas más actividades cognitivas que si se usara las representaciones habituales. El siguiente cuadro corresponde las actividades cognitivas a las cuales un registro semiótico de representación está condicionado según (Planchart Márquez, 2002)



*Ilustración 8-Actividades cognitivas a las cuales un registro semiótico de representación está condicionado.*

Es evidente la importancia de tener claro tanto lo que significa un registro semiótico de representación, la transformación entre registros y el manejo de cada uno de ellos, en correspondencia con la complejidad con la que cuenta el concepto de función y las dificultades didácticas que abarca la restricción u omisión de algunos de estos factores. Tal y como lo afirma Hitt (1996) citado por (Planchart Márquez, 2002) “*Un determinado*

*conocimiento es estable en un individuo, si el individuo puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones”.*

## **DIFICULTADES EN LA SELECCIÓN DE REPRESENTACIONES**

Además de las dificultades ya documentadas, Duval (1993) citado por (Planchart Márquez, 2002) va más allá, describe algunas otras a las que se enfrenta el estudiante si elige una representación equívoca. Es de resaltar que la elección de uno u otro registro semiótico de representación, está directamente relacionado con la dificultad tanto del desconocimiento del mismo como del tratamiento o el manejo que se tenga.

- La primer dificultad se desenvuelve en lo que él llama “economía de tratamiento”, que corresponde a comprender que muchas situaciones están encaminadas a reproducir la expresión algebraica.
- La segunda dificultad consiste en entender que un registro de representación nace como consecuencia de complementar los aspectos cognitivos del estudiante y que el uso de uno u otro está sujeto a las propiedades con que este cuenta.
- La dificultad de comprender si la representación es suficiente para el contenido conceptual necesitado.

## **MODELACIÓN**

El ultimo enfoque en el que centra esta investigación es el de conocer si los alumno de la licenciatura son capaces de producir expresiones que representen diversos fenómenos de la cotidianidad o de las ciencias, por lo tanto, es de vital importancia que se cuente con un modelo que sirva como mecanismo condensador de datos y/o características de dichas propias de las funciones a las que se enfrentan.

## **EL CONCEPTO DE MODELO MATEMÁTICO**

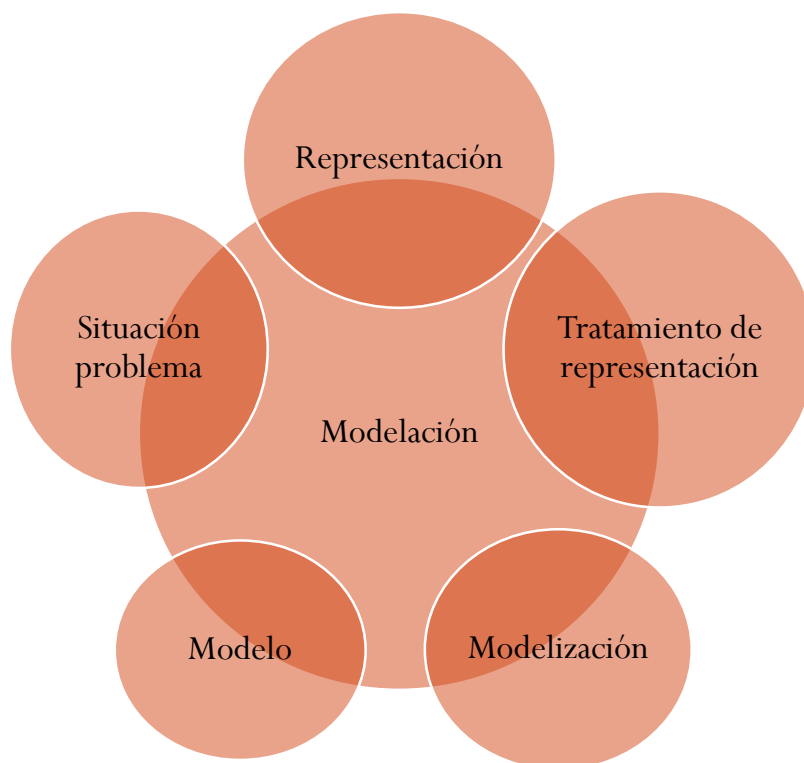
Para hacer referencia a algunos de los significados encontrados de modelo matemático se hará uso del planteado por Biembengut, M., Hein, N., (2004, pág 106) citado por (Villa, 2007) *“Un modelo matemático de un fenómeno situación problema, es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión y el de* Giordano F., Weir M., Fox W. , 1997, definiéndolo como *“una construcción*

*matemática dirigida a construir un sistema o un fenómenos particular del mundo real. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.”*

La característica más importante entre estos dos conceptos es que aunque usualmente cuando se habla de modelo se asocia con las representaciones algebraicas, los planteamientos demuestran lo contrario, al proponer las distintas representaciones semióticas como construcciones matemáticas que describen dichos fenómenos del mundo real.

También existe una marcada creencia de que los términos modelo, modelización, modelación y matematización son congruentes, sin embargo, cada uno de ellos determina una práctica distinta en términos matemáticos. En este orden de ideas la modelización matemática corresponde según (Villa, 2007) “*Al proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real*”, por su parte la modelación según Blomhoj y Hojgaard, (2003) citado por (Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, 2007) “*... es una parte constitutiva de la practica matemática, concretamente, la practica matemática escolar. Así, se intenta promover y favorecer el estudio de situaciones fenomenológicas donde el énfasis es puesto en la variación de las variables, a fin de dotar de significados la función*”. Por último la matematización según (Lesh, 1997) corresponde a hacer uso tanto del modelo como de la modelización del mismo. Para el desarrollo de esta investigación, se podría pensar que no es necesario realizar una distinción entre estos cuatro conceptos, no obstante, puede catalogarse como una dificultad que el estudiante no conozca el margen de distancia que hay entre estas nociones y además que no sepa en qué momento transitó por cada uno de ellas.

Seria redundante, conceptual y procedimentalmente hablando, describir las dificultades de modelación, debido a que estas tienen sus orígenes en las de tratamiento de las representaciones semióticas y en las de tipo algebraico, por tanto, a lo que si podemos hacer énfasis es en cómo los obstáculos y dificultades ya presentadas producen un impacto tan significativo en la modelación. La estructura anteriormente planteada puede ser explicada mediante el siguiente gráfico:



*Ilustración 9-La actividad de modelación y sus alcances.*

Como es sabida, la modelación, es una herramienta de desarrollo orientada al estudio de las situaciones del mundo real, por tanto, es una actividad que estimula distintas capacidades en los estudiantes para dotar de significado a la función matemática, es por eso que todo el proceso que muestra la gráfica en su parte exterior la tiene como único fin. De igual forma los ítems de situación problema, representación (lenguaje natural u otro tipo de registro semiótico), tratamiento de representación, modelización y modelo, corresponden a un ciclo que proponemos para realizar un proceso de modelación óptimo.

### **LA IMPORTANCIA DE LA MODELACION EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES**

Finalmente vamos a describir algunos aspectos didácticos que contienen relaciones biunívocas entre el aprendizaje de funciones y la modelación. Cualquiera que sea la dificultad que presente el estudiante en el estudio de las funciones lo conducirá al error en el proceso de modelación.

- **La noción de predicción:** Es la dificultad para determinar el valor de una variable con el paso del tiempo cuando un fenómeno pasa de un estado a otro.

- **Estudio de la variación, ¿cómo cambia lo que cambia?:** Corresponde a la dificultad de poner especial atención a la variación de los valores de las magnitudes o variables de la situación problema o en el fenómeno, para así poder describir variaciones tales como, directa, inversa, periódica, constante, creciente, entre otras. Lo anterior da paso a la caracterización de los distintos tipos de funciones.
- **Análisis e interpretación local-global, cualitativa- cuantitativa de graficas de funciones:** Tiene que ver con la dificultad de tener un buen tratamiento de las representaciones gráficas su interpretación y el estudio de la misma.
- **La construcción de graficas:** Corresponde a la dificultad para establecer relaciones entre las operaciones algebraicas y su representación gráfica, ya que, como ya lo habíamos señalado en el apartado de representaciones semióticas, provee de significados geométricos a las operaciones con funciones y conocer el comportamiento tendencial de sus gráficas. (Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, 2007) (Pág.555).

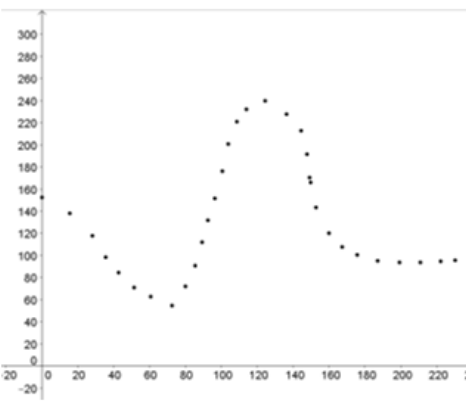
## ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Categorías de análisis	
PROCESOS DE APRENDIZAJE (PA)	
<b>Error Algebraico</b>	<b>EA</b>
Tiene dificultad al producir expresiones haciendo uso de símbolos (letras) para describir o predecir el comportamiento de una situación.	
EA <sub>1</sub>	Obstáculo Revela un conocimiento adquirido, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas
EA <sub>2</sub>	Ausencia de sentido  Problemas con las diferencias interpretaciones de la letra.
PROCESO DE PENSAMIENTO MATEMATICO (PM)	
Error en el Tratamiento de representaciones	ETR
Tiene dificultad en transitar entre distintos tipos de representaciones y/o no puede identificar relaciones entre estas.	
ETR <sub>1</sub>	Concepto de Función Problemas con las reglas de correspondencia semiótica.
ETR <sub>2</sub>	Representaciones semióticas Problemas de interpretación con los diferentes registros semióticos de representación
Error de Expresión	EE
Tiene dificultad en expresar situaciones dado un contexto, las cuales conducen a la construcción de funciones en formas simbólicas y gráficas.	
EE <sub>1</sub>	Lectura Presenta dificultades para entender lo que le muestra el enunciado o lo interpreta de manera incorrecta.
EE <sub>1</sub>	Relación Toma información innecesaria para dar solución a la situación planteada o

	regularmente no sabe que varía o que depende en cada caso.
--	--

*Ilustración 10-Categorías de análisis de la investigación.*

Lo que se hará con cada una de las preguntas es realizar una descripción de ésta en cuanto a examinar cuál era su objetivo y las posibles dificultades a las que se iban a enfrentar los estudiantes (en adelante denotados como (E #)), luego se presentará cómo los estudiantes respondieron y finalmente analizaremos casos particulares. Es importante aclarar que en ninguna de las pruebas hubo manifestaciones de imposibilidad de contestar las preguntas por errores del instrumento.

Pregunta 1	
<p>1. ¿La siguiente imagen es función?</p>  <p>Sí ___ No ___</p> <p>Justifique:</p>	<p><b>Intención:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar dificultades PM en el ámbito ETR</li> <li>• Aplicar la definición de función a la situación.</li> <li>• Determinar cuándo una representación gráfica es una función.</li> <li>• Evidenciar choques entre representaciones discretas y continuas</li> </ul>

*Ilustración 11-Pregunta uno e intención.*

### Algunas respuestas:

E2: “No, sería una función si hay una continuidad (o se unen los puntos)

E3: “No, desde la perspectiva en la que se puede observar la gráfica creo que hay valores a los que les corresponde dos valores en el eje  $x$  e  $y$ .

E1: “No, la imagen no es función es la representación de una función, porque se cumple que para cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio”

E 4: “No, porque únicamente se ven puntos, pareciera el gráfico de una sucesión.

E11: “Si, se evidencia una relación biyectiva entre la relación que representa el eje  $X$  y el eje  $Y$ ”



E 6: “No, es un conjunto de puntos independientes, o valores de  $x$  únicos que tienen imagen, pero no existe una función que los relacione todos”.

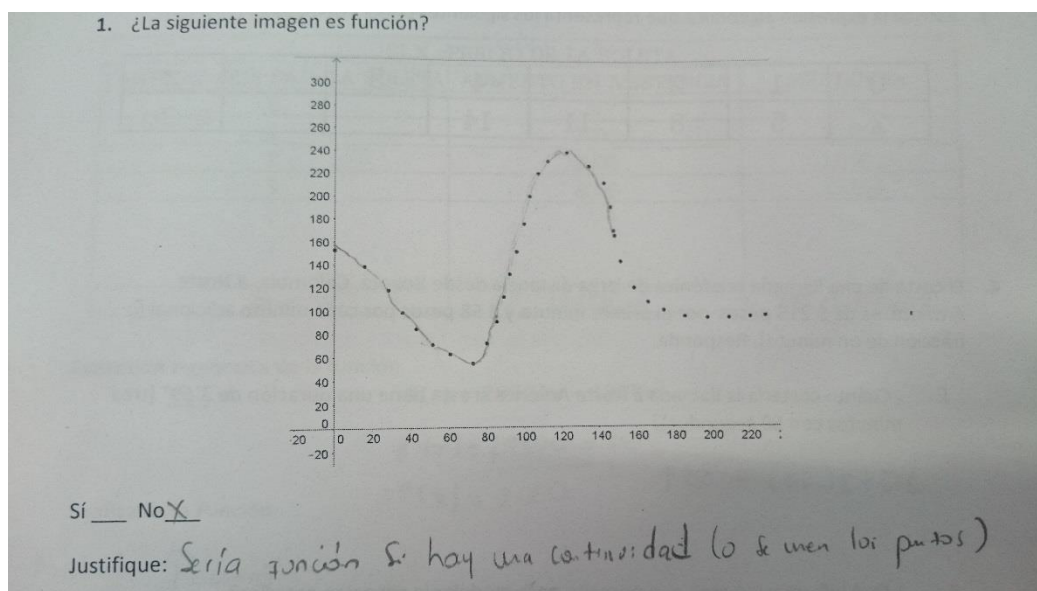
E13: “Si, porque son un conjunto de puntos los cuales para cada coordenada en el eje  $x$ , donde hay puntos se asigna uno y solo un valor en el eje  $y$ .”

En el problema inicial fallaron 8 estudiantes (53,3%) y acertaron 7 estudiantes (46,7%).

Teniendo en cuenta los datos anteriores decidimos hacer un análisis general de acuerdo con las categorías planteadas asociadas al **proceso de pensamiento matemático** en los errores en el tratamiento de representaciones (ETR)

La mayoría de los estudiantes que respondieron acertadamente apelaron a la definición de función en cuanto a que de que a cada elemento de las abscisas le corresponde uno de las ordenadas. Sin embargo, los estudiantes que fallaron la pregunta también recurrían a dicha correspondencia pero no lograron interpretar la gráfica. Por lo tanto podemos deducir que los 8 estudiantes que no acertaron, en su mayoría se encuentran en el  $ETR_2$ . Por otro lado pero entre estos estudiantes se presentaron casos específicos que no solo se encuentran en el  $ETR_2$  sino que también incurren con el  $ETR_1$ .

### Caso 1 (Dificultad PM- $ETR_1$ , $ETR_2$ )



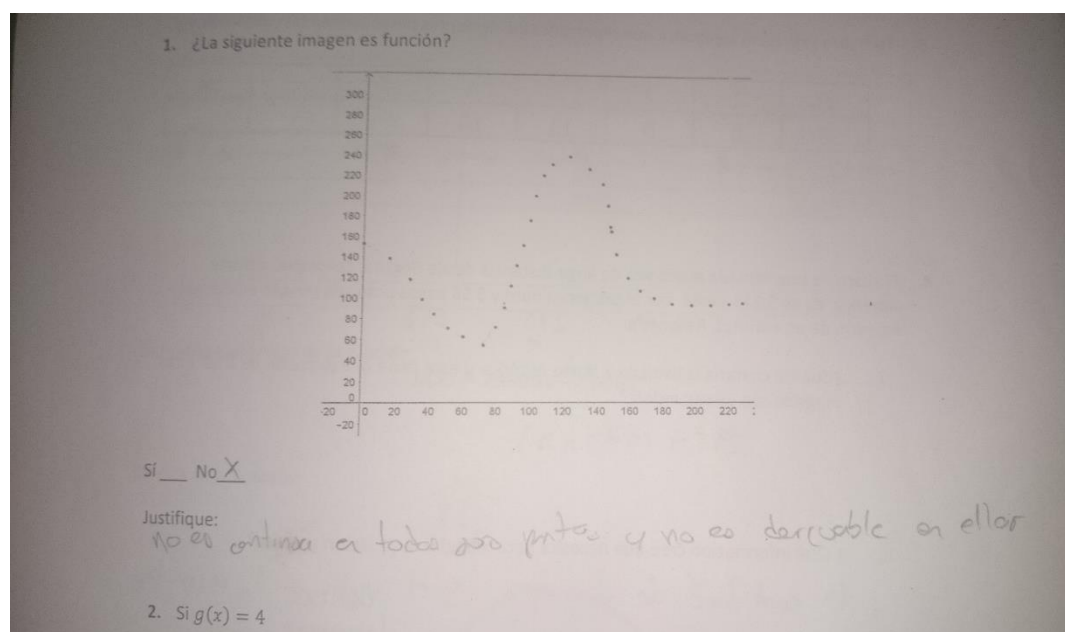
*Ilustración 12-Dificultad de la necesidad de hacer continua la función E2.*

E2 realizó un trazo sobre cada uno de los puntos presentados en la imagen de función y afirma que sería una función si existiera una continuidad, lo anterior nos permite afirmar que la estudiante tiene la necesidad de recurrir a esta línea para dilucidar una función y que en particular tiene problemas con el concepto de función y con el registro semiótico que pueda llegar a aparecer cuando se enfrente con una representación que no conoce o que no entiende.

Para Hitt citado por (Planchart Márquez, 2002) este error es bastante común, tanto así que en sus trabajos realizados en 1998 sostienen que existe una tendencia a unir los puntos y que en general hay una persistencia de esquemas e imágenes mentales:

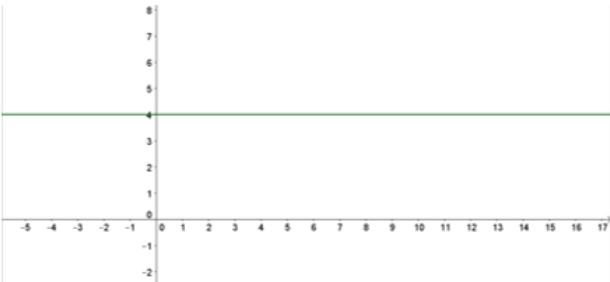
La construcción del conocimiento que implica desempeños erróneos, crea desde el punto de vista que estamos tratando, esquemas y conexiones permanentes que se contraponen a la construcción adecuada de cierto concepto. Pero nuestra opinión es que esos esquemas no desaparecen, aún y cuando se construya un esquema alternativo. Ya que en algunos casos, esos esquemas puedan resurgir de manera que un individuo pueda repetir ese error que prevalecía en el pasado, en el momento en que se le presenta una actividad más compleja.

## Caso 2 (Dificultad PM- $ETR_1$ , $ETR_2$ )



*Ilustración 13- Dificultad de continuidad de la función E7 (punteo).*

E7 también realiza una marcación punteada para la unión de los puntos en la gráfica presentada, evocando un posible caso en el que sí podría considerarla como función y además afirma que no es continua en todos sus puntos y que no es derivable en ellos. Nuevamente este estudiante no recurre a la definición general o a la prueba geométrica, por el contrario piensa en un esquema continuo al unir los puntos, reafirmando los planteamientos de Hitt cuando expresa que es este tipo de casos son un problema generalizado. Además recurre al argumento de que no es derivable generalizando las funciones en cuanto a que si una función es derivable en un punto  $x = a$ , entonces es continua para  $x = a$ , sin embargo, el recíproco es falso, ya que hay funciones que son continuas en un punto y aun así no son derivables.

Pregunta 2	
<p>2. Si <math>g(x) = 4</math></p>  <p>Entonces <math>g(10) =</math></p> <p>Justifique:</p>	<p><b>Intención:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar dificultades PM en el ámbito ETR</li> <li>• Aplicar la definición de función a la situación.</li> <li>• Determinar cuándo una representación gráfica es una función.</li> <li>• Evidenciar dificultades con las funciones constantes.</li> </ul>

*Ilustración 14-Pregunta dos e intención.*

### Algunas respuestas:

E10: “4, porque es una constante”

E15: “4, es una recta constante, todas las imágenes van a ser igual a 4”.

E9: “4, teniendo en cuenta la gráfica puedo decir que es una función lineal, y que para cualquier valor que tome  $x$  va a ser igual”

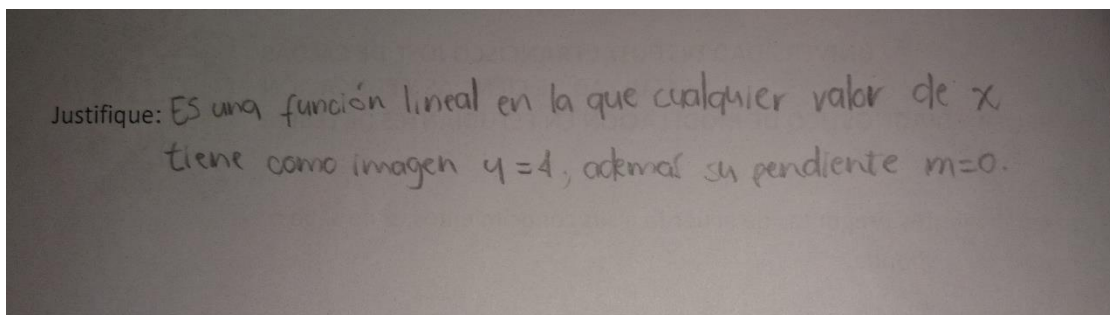
E3: “4, pues se sabe que la función  $g(x) = 4$ , por lo tanto es constante, luego, a cada valor de  $x$  solo le corresponde un valor en  $y$  que va a ser 4, así mismo  $g(10) = 4$ .”

En esta segunda pregunta los 15 estudiantes respondieron acertadamente y recurrieron regularmente a los conceptos de función constante para argumentar sus respuestas o a identificar en la gráfica que la ordenada siempre iba a ser misma. En conclusión se puede afirmar que la muestra de estudiantes que presentaron la prueba tiene un alto grado de entendimiento con lo que refiere a las funciones constantes y su simbología.

Para esta pregunta existieron dificultades de tipo PM- ETR<sub>1</sub> en las respuestas de tres estudiantes, los cuales aunque hicieron una buena interpretación de la representación propuesta entregaron argumentos que no correspondían a las reglas semióticas para dicha función.

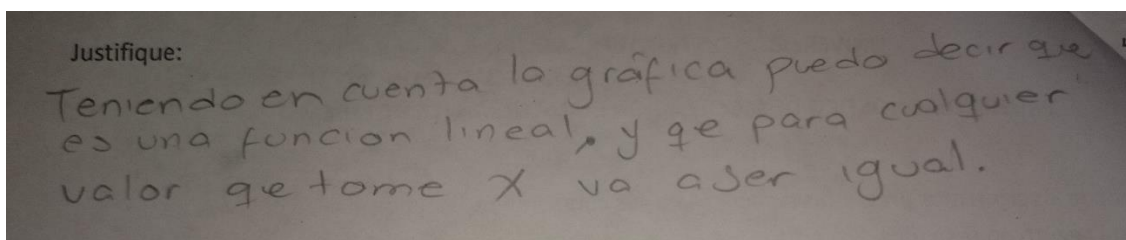
### Caso 3 (Dificultad PM- ETR<sub>1</sub>)

E6



*Ilustración 15-Error conceptual entre función lineal y función constante E6.*

E9

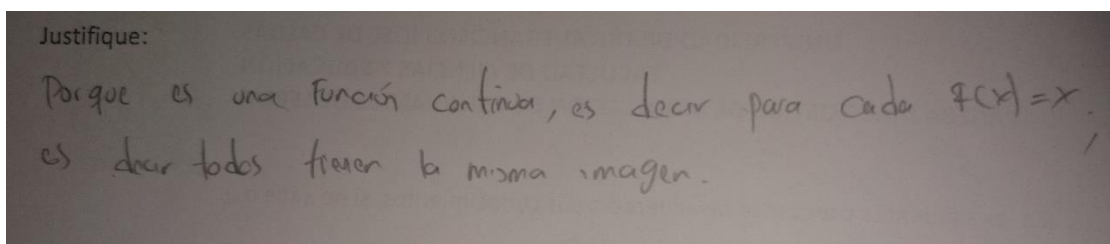


*Ilustración 16-Error conceptual entre función lineal y función constante E9.*

En ambos casos los estudiantes cometieron errores con los conceptos de función lineal y función constante, debido a que confundieron sus significados, para el tema de constante en palabras de Euler 1784 “una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor” la función constante del mismo modo toma el mismo valor para cualquier valor de la variable independiente. En cambio una función lineal está compuesta por una pendiente (constante) y una variable independiente que le permiten variar en sus imágenes, lo que no pasa en las funciones constantes.

#### **Caso 4 (Dificultad PM- ETR<sub>1</sub>)**

E5



*Ilustración 17-Error conceptual entre función continua y función constante E5.*

Lo que podemos observar es que este estudiante asignó un nombre distinto a la función constante, debido a que el resultado y el significado se corresponden, sin embargo, nos hace

pensar que el alumno puede tener una tendencia a confundir estos dos conceptos y que a cada función que vea similar a la presentada le asigne el nombre de continua en vez de constante faltando a las reglas de correspondencia semiótica de las funciones.

Pregunta 3							
3. Escriba la expresión algebraica que representa los siguientes pares ordenados:				<b>Intención:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Visualizar dificultades PA y PM en el ámbito ETR y EA.</li><li>• Realizar una expresión para describir un comportamiento.</li><li>• Interpretación de tabla de datos</li></ul>			
0	1	2		4	5	...	x
2	5	8	11	14		...	

*Ilustración 18-Pregunta tres e intención.*

### Respuestas:

E1	$3x + 2$
E2	$2 + 3n$
E 3	$3n - 1$
E 4	$"x + 2(x + 1)"$
E5	$3x + 2$
E 6	$3x + 2$
E 7	$"x + (2x)"$
E8	$3n + 2$
E 9	$"x + n * 2"$
E 10	$"n + 3"$
E11	NR
E12	$"x3 + 2"$
E13	$3x + 2$
E14	$3x + 2$
E15	$(x + 2)2$

*Ilustración 19-Tabla de respuestas tercera pregunta.*

### Resultados

En esta pregunta fallaron 8 estudiantes (53,3%) y acertaron 7 estudiantes (46,7%).

### ¿Cómo respondieron los estudiantes?

De los estudiantes que lograron producir una expresión algebraica que representaba los pares ordenados, dos de ellos la dedujeron a través de completar la tabla de datos y establecer las

regularidades. Tres estudiantes escribieron la expresión, pero no el procedimiento. Dos estudiantes (6 y 14) calcularon la pendiente y luego hicieron uso de la función  $y = mx + b$  para originar la expresión prevista.

Para el caso de los estudiantes que llegaron a una expresión algebraica correcta con respecto a la situación podemos afirmar que; cinco de ellos realizaron deducciones y aproximaciones encaminadas a la expresión, sin embargo, las relaciones que propusieron muchas veces no les dieron resultado y propusieron expresiones que no correspondían a la expresión que pedía el problema, esto sumado a que no tuvieron una verificación dentro de la misma tabla de datos. Los errores anteriormente descritos son categorizados como obstáculos ( $EA_1$ ) de los procesos de aprendizaje, en cuanto a los procesos de pensamiento también se presentó la categoría  $ETR_2$  ya que no se hizo buen uso del registro semiótico de la representación tabular dada (estudio de caso 5). Dos estudiantes propusieron una expresión que cuenta con errores de tipo ausencia de sentido ( $EA_2$ ) y además de  $ETR_2$  (explorado a fondo en el estudio de caso 6). Solo un estudiante afirmó “entiendo la razón de cambio, pero no logra generalizar”, lo cual nos lleva a pensar que a pesar de que lleno la tabla de datos y encontrar algunas regularidades tiene dificultades para la producción de expresiones, es decir, errores catalogados como obstáculo ( $EA_1$ ).

### Caso 5 (Dificultades PM Y PA - $EA_1$ , $ETR_2$ )

E10

3. Escriba la expresión algebraica que representa los siguientes pares ordenados:

x	0	1	2	3	4	5	...	x
y	2	5	8	11	14	17	...	n+3

Handwritten notes below the table:

$n \rightarrow$  anterior. si restamos  $y - x$  se puede observar que la diferencia es de 2  
 diferencia es 3  $\rightarrow y$   
 $17 - 5 = 12$   
 $14 - 4 = 10$   
 $11 - 3 = 8$

Ilustración 20-Dificultad para generar una expresión algebraica E10

E9

3. Escriba la expresión algebraica que representa los siguientes pares ordenados:

0	1	2	3	4	5	...	x
2	5	8	11	14	17	...	$x+n \cdot 2$

*Handwritten notes around the table include:  $n = x+1$ ,  $1 \cdot x + 2$ ,  $2 \cdot x + 4$ ,  $3 \cdot x + 6$ ,  $4 \cdot x + 8$ ,  $5 \cdot x + 10$ ,  $6 \cdot x + 12$ ,  $7 \cdot x + 14$ ,  $2x + (x+1) \cdot 2$ ,  $1 + 1 + (1 \cdot 2)$ ,  $1 - 1 - 2$ ,  $2 - 1 - 5$ ,  $3 - 2 - 8$ ,  $4 - 3 - 11$ ,  $0 + 1 \cdot 2$ ,  $1 + 2 \cdot 2$ ,  $0 + 2 \cdot 2$ ,  $1 + 4$ ,  $2$ ,  $5$ ,  $2 + 3 \cdot 2$ ,  $2 + 6$ ,  $n^2 + 1 + 1$ ,  $n^2 + 1$ ,  $n^2 - 1$ .*

*Ilustración 21-Dificultad para generar una expresión algebraica E9*

Los anteriores estudiantes representan una muestra de los otros tres que fallaron con las mismas dificultades ya que todos producen varias deducciones a partir de la tabla, sin embargo, no logran configurarlas en la expresión pedida. Los múltiples abordajes descritos nos impulsan a decir que durante su proceso de resolución se encontraban con expresiones que se salían de su control (obstáculos) lo cual los conducía a tomar otro camino en el que pudieran trabajar, para Bachelard, 1938 y Brousseau, 1983 citado por (Ruano, 2008) estos obstáculos pueden considerarse como “un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas”.

Por otro lado las expresiones que fueron puestas como solución, consideradas como las que se colocaban en el espacio en blanco debajo de la x, no fueron sometidas a la prueba para ver si funcionaba, por lo que se está realizando un mal uso de los registros semióticos de representación para la verificación del procedimiento.

### Caso 6 (Dificultades PM Y PA - EA<sub>2</sub> , ETR<sub>2</sub>)

E 8

3. Escriba la expresión algebraica que representa los siguientes pares ordenados:

0	1	2	3	4	5	...	x
2	5	8	11	14	17	...	$3n+2$

*Ilustración 22- Error de expresión algebraica por variable incorrecta E8.*

Curiosamente este estudiante al igual que el otro que incurrió en dicha dificultad, limitó su respuesta a poner la expresión y no desarrollar un procedimiento. En relación con lo anterior se piensa que se producen las dificultades que planteamos, la primera corresponde a que la variable que utilizan no corresponde a la que se pone en la representación tabular del problema y se cataloga como de ausencia de sentido porque el estudiante interpreta la letra



como número generalizado, pero no corresponde a la letra en la que se desarrolla el problema. La segunda dificultad se presenta porque no hace uso de los registros semióticos presentados para darse cuenta que está produciendo una expresión incorrecta.

<b>Pregunta 4</b>	
<p><b>4.</b> El costo de una llamada telefónica de larga distancia desde Bogotá, Colombia, a Norte América, es de \$ 215 pesos por el primer minuto y \$ 58 pesos por cada minuto adicional (o fracción de un minuto). Responda:</p> <p>i. ¿Cuánto costaría la llamada a Norte América si esta tiene una duración de 3'59" (tres minutos con 59 segundos)?</p> <p>ii. ¿Qué información cree que necesita para modelar la situación anterior?</p> <p>iii. Trace la gráfica del costo de la llamada telefónica como función del tiempo</p>	
<p><b>Intención:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar las dificultades PM Y PA configuradas como EE y ETR</li> <li>• Observar los errores de interpretación de enunciados.</li> <li>• Identificar las problemáticas para la expresión de relaciones entre los registros de representación y la construcción de funciones a trozos.</li> <li>• Indagar acerca de qué tipo de información toman los estudiantes para expresar la situación.</li> </ul>	

*Ilustración 23- Pregunta cuatro e intención.*

#### Respuestas al primer interrogante:

E1	"215 + 58(297 − 1)"	
E2	"215 + 3(58)"	
E 3	\$215 x 3´ + \$58 "primera solución" "\$215 + (215 x 2 + 58) + (215 x 3 + 58 x2) + (215 x 3 + 58 x2) + 58 "	
E 4		
	x	f(x)
	0-1	215
	1-2	58
	2-3	58
	3-4	58
	58 x 3 = 174 215 + 174 = 389	



E5	"215 + 273 + 273 + 273"	
E 6	$f(3,59) = 58(3,59) + 215)$	
E 7	"215 + (273 x 3)"	
E8	"215 + 58 (5)"	
E 9	$x$	$f(x)$
	1	215
	2	58
	3	58
	4	58
	$= 389 \rightarrow 3'59"$	
E 10	"388,0294"	
E11	1	215
	3	$58 \times 3$ $= 174 + 215$ $= 289$
E12	$x$	$f(x)$
	1	215
	2	488
	3	761
	3,59	1034
E13	"215 + 58( $x - 1$ )"	
E14	$4 \times 215 = 860$	
E15	$58 (3) = 341$	

*Ilustración 24-Tabla de respuestas primer interrogante de la cuarta pregunta.*

## Resultados

En esta pregunta fallaron 12 estudiantes (80 %) y acertaron 3 estudiantes (20%).

### ¿Cómo respondieron los estudiantes?

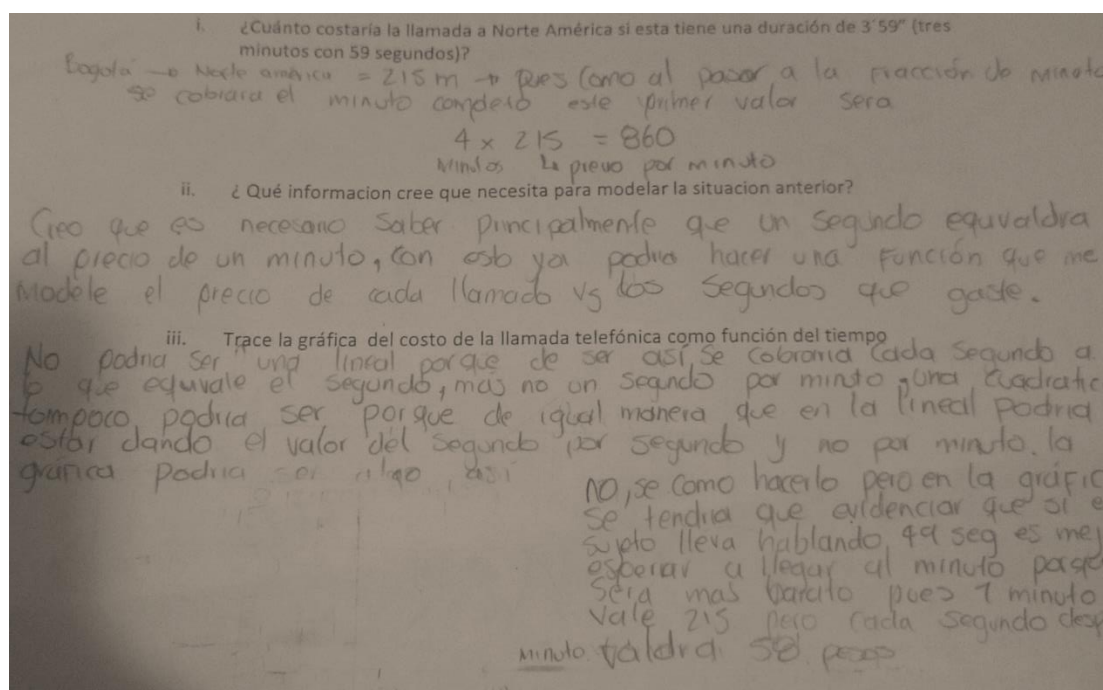
Los tres estudiantes que aprobaron la cuarta pregunta produjeron en general buenos resultados en las tres componentes del problema, es decir, dieron una respuesta correcta tanto al primer ítem como a su correspondiente representación gráfica. Todos ellos recurrieron a usar registros “tabulares” o de correspondencia minuto - valor para darse cuenta que se trataba de una función a trozos. Podemos entrever que estos estudiantes tienen un mejor dominio de este tipo de funciones y que por lo tanto son capaces tanto de generar expresiones que den solución a una problemática, como de producir una representación de la misma.

De aquellos estudiantes que tuvieron dificultades en brindar una respuesta acertada dentro de sus planteamientos, se encuentra un único estudiante el cual, a pesar de que realizó una buena interpretación de los datos suministrados y llegó a concluir que aquellos 3'59" correspondían a \$389 pesos, presentó una representación contraria a lo esperado. Por lo anterior, incurre en dificultades de PM catalogadas como de ETR al plasmar un registro de representación continuo y no a trozos como el que era necesario para dar solución al último ítem.

Los once estudiantes restantes que fallaron la prueba por consiguiente se deben a estudiantes que realizaban una mala interpretación de los datos que se les suministraban en cuanto a que los confundían, los usaban mal o los obviaban y que como consecuencia de ello obtenían distintas respuestas y representaciones que no correspondían a la pedida por el interrogante, en muchos casos funciones continuas. Dichas dificultades son de tipo PM Y PA, las cuales son evidenciadas mediante errores descritos como EE Y ETR.

### Caso 7 (Dificultades PM Y PA -EE, ETR)

E14



*Ilustración 25-Dificultad para proponer una representación gráfica E14.*

Entre la gran cantidad de estudiantes que fallaron al dar solución al planteamiento cuatro, se encuentra el caso de E14, el cual se distinguió porque no presentó ninguna grafica que representara el último ítem. E14 comete errores de expresión de ambos tipos, tanto de EE<sub>1</sub> como de EE<sub>2</sub> ya que presenta dificultad para tener en cuenta la información que le proporciona el enunciado, quedándose únicamente con el valor del primer minuto, lo que desencadena en una error de relaciones entre lo que está variando y lo que permanece

constante. Es claro también que la dificultad para realizar una representación ETR se produce en la imposibilidad de realizar una gráfica que evidenciará lo que estaba sucediendo en la situación. Debido a la especificidad con que argumenta, podemos deducir que presenta vacíos de aprendizaje en cuanto a las funciones a trozos en sus distintos registros de representación semiótico.

### Caso 8 (Dificultades PM Y PA - EE, ETR<sub>2</sub>)

E3

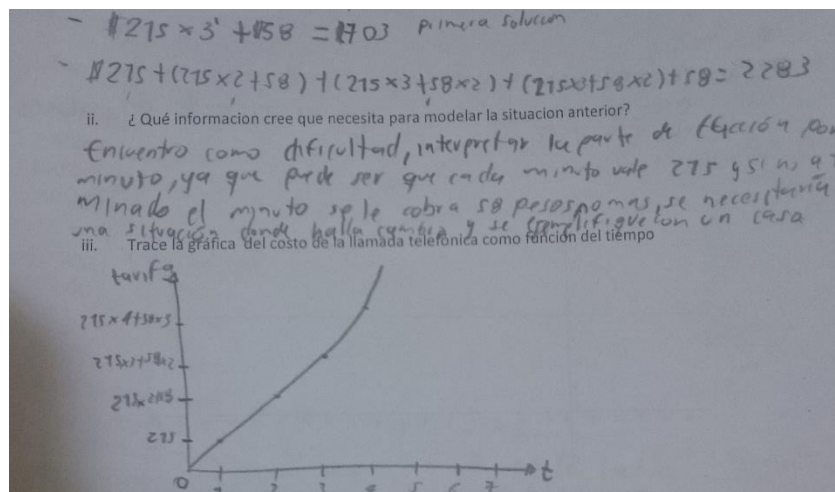


Ilustración 26-Error de representación gráfica de la función a trozos como una función continua E3.

E1

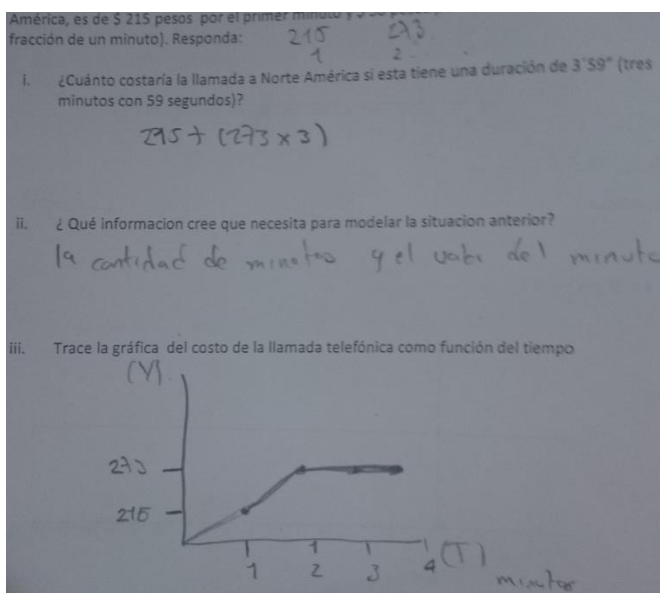
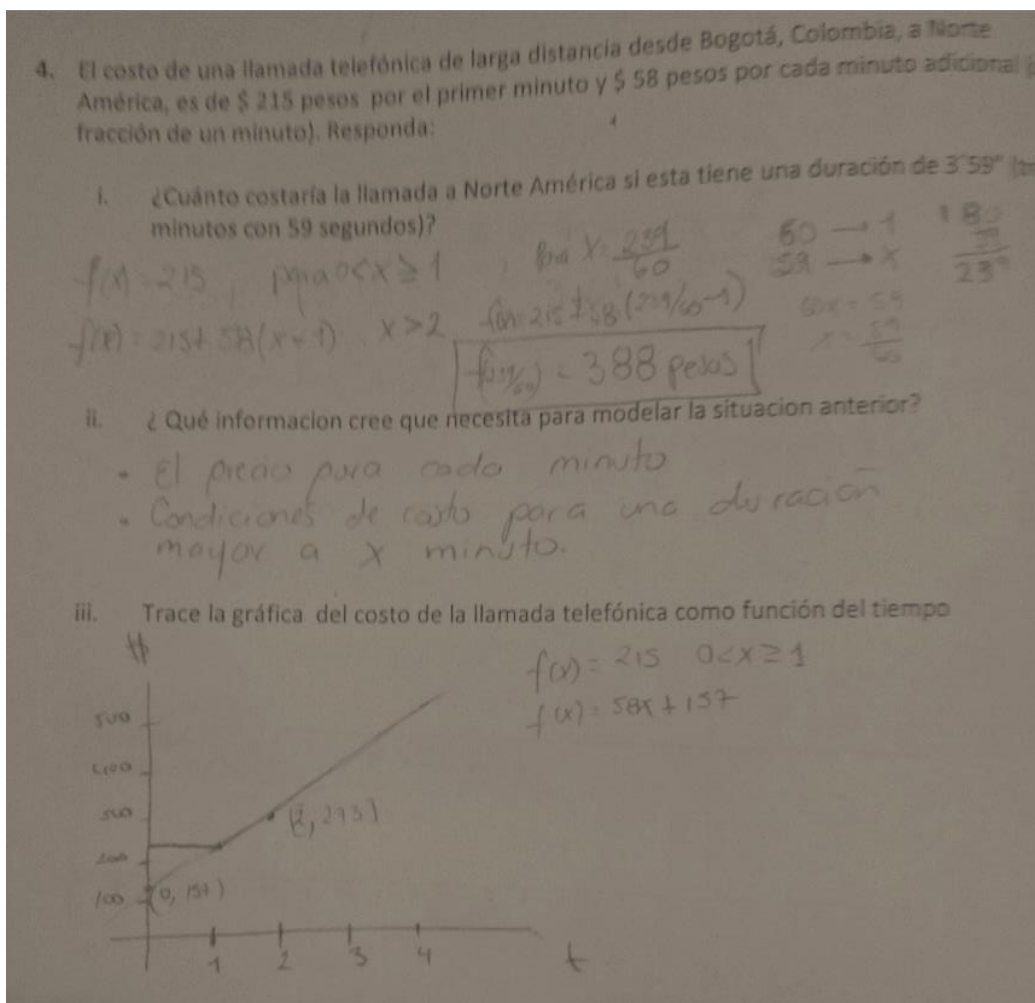


Ilustración 27-Error de representación gráfica de la función a trozos como una función continua E1



*Ilustración 28-Error de representación gráfica de la función a trozos como una función lineal E13.*

Estos son tan solo algunos ejemplos de estudiantes que intentaron “linealizar” o volver continua la función cuando de graficarla se trataba. Para (Badia, Cano, & Feliu, 2012) es muy común que a los estudiantes se les dificulte relacionarse con las funciones a trozos ya que “los estudiantes llegan a creer que una función debe tener la misma fórmula (regla de correspondencia) en todo su dominio”. Los diez estudiantes restantes básicamente tuvieron la generalidad de aplicar sus planteamientos erróneos del primer ítem a la gráfica de la función, obteniendo el mismo resultado incorrecto. Basados en los resultados obtenidos podemos concluir que básicamente detrás de una dificultad para expresar situaciones está la mala lectura realizada de dicho enunciado, como único resultado se encuentra luego con una toma de información innecesaria o de relaciones incorrectas y finalmente con una expresión sea gráfica o algebraica errónea, produciéndose así las dificultades anteriormente descritas para este caso.

## Pregunta 5

5. Un equipo de futbol de la capital juega en un estadio de capacidad de 38.000 espectadores. Con el precio de la boleta a \$20 dólares, el promedio de asistencia a los partidos recientes es de 9500 personas. Un estudio de mercadeo indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000 personas:

A continuación brindamos información que puede servir para solucionar el problema:

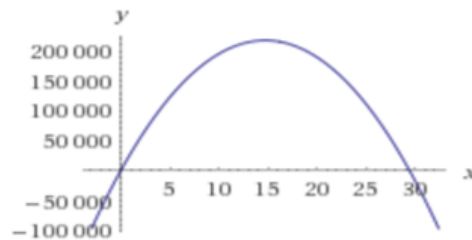
**Tabla de datos**

SI X =PRECIO DE LA BOLETA		
CANTIDAD QUE BAJA LA BOLETA	AUMENTO EN ASISTENCIA	ASISTENCIA
0	0	9500
1	1000	10,500
2	2000	11,500
3	3000	12,500
•	•	•
•	•	•
•	•	•
20-x	1000(20-x)	9500+1,000(20-x)

**Expresión algebraica de la función**

$$R(x) = 29500x - 1000x^2$$

**Grafica de la Función**



- Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos. JUSTIFIQUE
- ¿Qué precio de la boleta están alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos? JUSTIFIQUE

**Intención:**

- Visualizar las dificultades PM Y PA configuradas como, ETR Y EA
- Observar que tipo de representación semiótica prefieren los estudiantes para dar solución a la situación

*Ilustración 29- Quinta pregunta e intención.*

**Respuestas al primer interrogante:**

E1	“El máximo valor del boleto debe ser 15 porque para valores superiores, los ingresos disminuyen”
E2	“Diría que 15, puesto que es el mayor valor que tomará la función”
E 3	“Haciendo una interpretación de la gráfica junto con la tabla se puede inferir que el máximo de personas cuando la boleto vale \$15 entonces la cantidad de personas que asisten son 14.500 P”
E 4	NR
E5	Por medio de la gráfica se puede determinar el punto máximo, dado que el ingreso, más o menos es 15, por lo tanto. $R(x) = 29500(15) - 1000(15)^2$
E 6	14,5
E 7	NR
E8	“x=14,75. Porque aplique la fórmula del vértice.”
E 9	“Si disminuyo el valor de la boleto a tal punto que valga 1 dólar la asistencia será de 285000 personas”
E 10	Máxima=28500
E11	“Es la parte máxima de la curva de la función que dice ser 15 en x este es el lugar donde más se recauda dinero, es decir cuando van más personas al estadio”
E12	“El vértice de una función indica el valor máximo para este caso el de ingreso como el vértice es la imagen $f(15)$ podemos realizar los cálculos correspondientes. Como el valor de ingreso máximo se da cuando la boleto vale 15 dólares, esto implica que han asistido 5000 espectadores más, es decir, 14500 o sea el ingreso es de 217.500 dólares”
E13	“14.75” $R'(x) = -2000x + 29500 \rightarrow 0$ $= -2000x + 295000$ $-295000 = -2000x$ $x = \frac{29500}{2000}$ $\rightarrow x = 14.75$
E14	“Pues el precio máximo que lleva al ingreso por venta de boletas será el vértice de la parábola. Las coordenadas serán(15,

	200.000), al mirar la gráfica se observa que después de esta coordenada la parábola descenderá”
E15	Derivar $r(x)$ , $r'(x) = 29500 - 2(100)x$ $r'(x) = 29500 - 2000x$

*Ilustración 30-Tabla de respuestas al primer interrogante de la quinta pregunta.*

### Respuestas al segundo interrogante:

E1	“Ninguna de las representaciones de la función me permitió hallar esa información”
E2	“30, puesto que la asistencia de personas ... según la formula”
E 3	“Realizando una suposición, el precio excedería el de 20 dólares y realizando una interpretación inversa de la función se hallaría que valor es tan alto para que no se genere ingresos”
E 4	NR
E5	$R(x) = 29500(30) - 1000(30)^2$ Por la gráfica también cuando $x = 0$
E 6	29,5
E 7	NR
E8	“ $x=29.5$ ”
E 9	“Si el valor de la boleta es 29,5 dólares no asistirá ningún espectador”
E 10	2200.000 que es el costo superior del costo con respecto a la gráfica”
E11	“La parte donde la gráfica corta en x en el mayor valor de estos 2 cortes es decir, casi 30 por lo que deja evidenciar la gráfica”
E12	“29,5 dólares. En el análisis de la gráfica se puede ver que hay dos cortes en x, uno indica que no hay ingresos cuando la boleta es gratis y otro que indica que no hay ingresos porque la gente no asiste porque la boleta es muy costosa”
E13	NR
E14	“El precio más alto de la boleta será 20001 dólares pues la gráfica de la parábola me muestra el máximo asequible si la parábola no va hasta 20001. Es porque nadie pagaría ese precio”
E15	“Es cuando aumenta hasta 30”

*Ilustración 31-Tabla de respuestas al segundo interrogante de la quinta pregunta.*

## **Resultados**

En esta pregunta fallaron 3 estudiantes (20 %) tuvieron un rendimiento aceptable 8 estudiantes (53%) y acertaron 4 estudiantes (27%).

### **¿Cómo respondieron los estudiantes?**

De los cuatro estudiantes que acertaron los dos componentes con los que contaba la situación, dos de ellos prefirieron hacer uso de la representación gráfica de la función (E11 Y E12), los dos restantes (E8 y E6) eligieron la representación algebraica (uso de fórmulas).

Por otra parte se decidió catalogar a aquellos estudiantes que fallaron en una de las componentes de la pregunta o que dedujeron respuestas a través de la estimación, como de rendimiento aceptable, entre estos se encuentran (E14, E13) quienes fallaron en la primera componente, sin embargo, el primero prefirió hacer uso de la gráfica para realizar sus dos respuestas, diferente de lo hecho por el siguiente estudiante en cuestión quien empleó la expresión algebraica como mecanismo de solución a la situación. De similar forma se comportaron (E15 y E9) los cuales fallaron en algunas de las componentes. La variación que se produjo en estas respuestas fue que E15 usó dos representaciones (gráfica y algebraica) siendo para él más productiva la algebraica para acertar la segunda componente. Por otro lado E9 corrió con análoga suerte al hacer uso de la expresión para brindar sus respuestas.

Los estudiantes que se presentarán a continuación tuvieron el mínimo nivel de interpretación de las representaciones mostradas, debido a que realizaron estimaciones extraídas de las gráficas o que realizaron cálculos innecesarios o incorrectos para dar solución a la situación. E5 y E1 coincidieron en uso dos tipos de representación distintas, la gráfica y algebraica, no obstante, sus respuestas no fueron del todo validadas, es decir, representaban aproximaciones, en ambos casos por parte de E5 y en solo la primer componente para E1. Por su parte E2 fue el único estudiante dentro de esta clasificación aceptable el cual al preferir la representación gráfica propuso dos respuestas con estimaciones bastante cercanas a la solución.

Es de resaltar que el único estudiante que hizo uso de la representación de datos tabular fue E3 quien además basó sus argumentos también en la representación gráfica aunque sus respuestas se redujeron a una solución media de la primera componente y un fallo a la segunda.

De aquellos estudiantes que fallaron la quinta situación es de resaltar que dos de ellos no dieron respuesta a la misma E4 y E7, el tercer estudiante (E10) prefirió el uso de la representación algebraica, pero, falló en ambas respuestas.

Tal y como se ha venido mostrando hay una fuerte preferencia en dos sentidos como lo son las representaciones gráficas y las algebraicas. En cuanto a la elección del uso de métodos



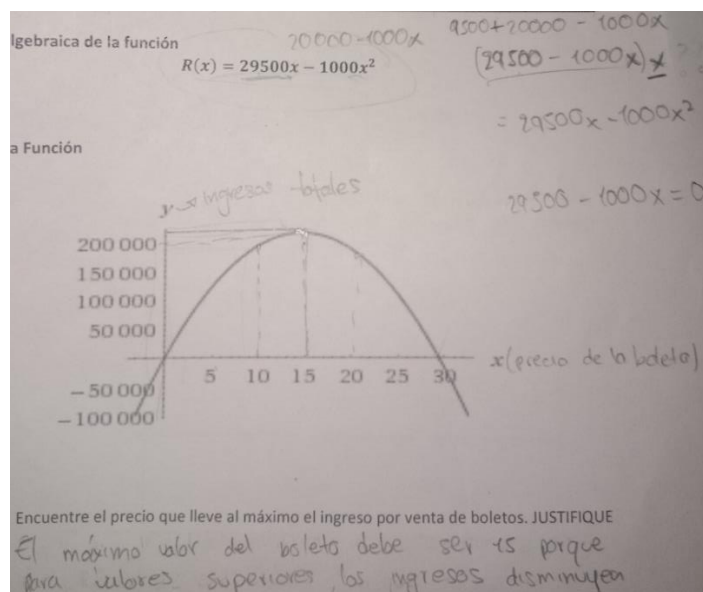
algebraicos Vinner (1998) citado por (Planchart Márquez, 2002) mediante estudios experimentales pudo determinar que esto se corresponde a que:

La prueba algebraica es más aceptada dentro de la matemática que la prueba visual; la preparación para un examen final es a menudo producto de la enseñanza memorizada y que, los estudiantes prefieren la memorización de fórmulas y técnicas algebraicas, pues es una receta efectiva para tener éxito en los exámenes.

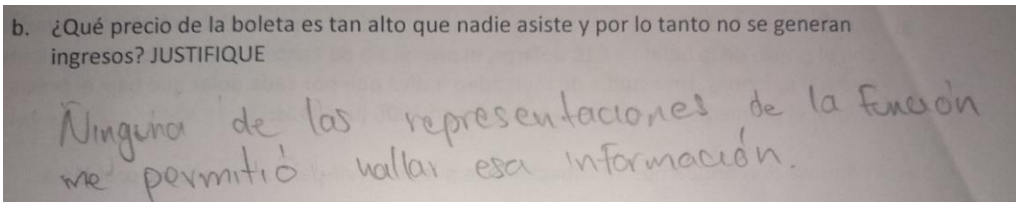
En ese mismo sentido y basados en el eje didáctico con el que cuenta la LEBEM y en general la concatenación entre las distintas asignaturas en las que se realiza modelación de funciones podemos afirmar que el uso de las representación gráfica se debe a que existe una familiaridad muy arraigada entre los estudiantes entre la visualización de la imagen y la validación de su procesos algebraicos. Lo anterior es catalogado como efectos importantes entre de lo que recomienda Vinner (ídem) como “el acercamiento visual en pruebas y resolución de problemas de los cursos de cálculo”

### Caso 9 (Dificultades PM Y PA -EA<sub>1</sub> – EA<sub>2</sub>, ETR<sub>2</sub>)

E1

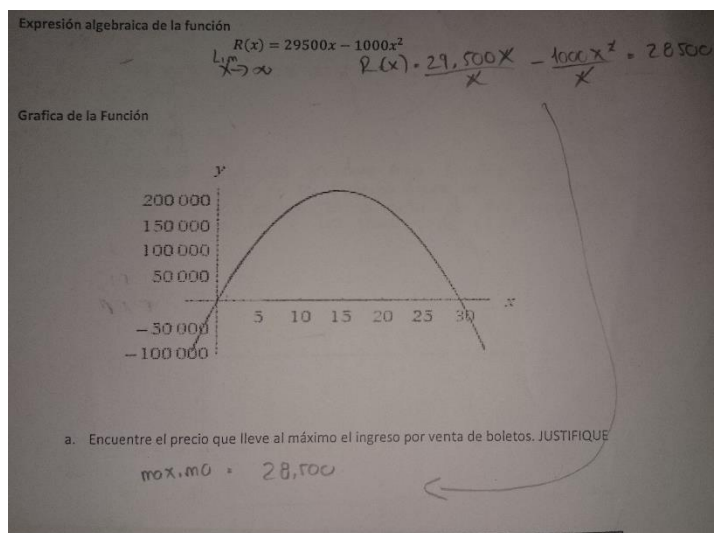


*Ilustración 32-Uso de la representación grafica de la función en el primer interrogante E1.*

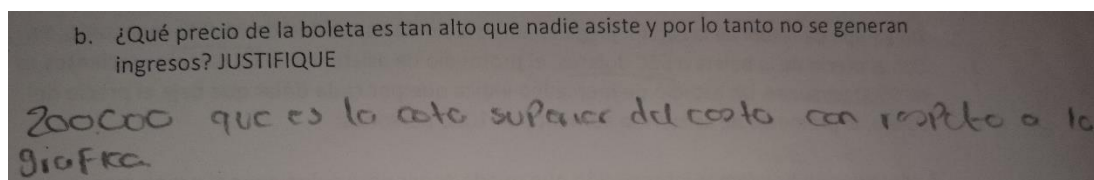


*Ilustración 33-Dificultad en el tratamiento de las diferentes representaciones semióticas de la función E1.*

E10



*Ilustración 34-Dificultad en el tratamiento de la representación algebraica en el primer interrogante E10.*



*Ilustración 35-Dificultad en el tratamiento de la representación algebraica en el segundo interrogante E10*

Estos estudiantes son tomados como representantes de aquellos participantes que tuvieron un rendimiento aceptable y E10 quien fallo ambas respuestas, pero a nuestro juicio posee las mismas dificultades de los citados anteriormente quienes prefirieron tanto la representación gráfica como algebraica para solucionar el problema. Estos estudiantes presentan dos tipos de dificultades.

1. **ETR<sub>2</sub>**: Se caracterizan a los estudiantes que usaron un registro semiótico sea grafico o algebraico pero que esto no les permitió dar respuesta a cualquiera de las componentes o una aproximación a la respuesta de cualquiera de ellas. Se describe este error como la incapacidad de poder interpretar las gráfica o la expresión dada en distintos contextos

2. **EA<sub>1</sub> – EA<sub>2</sub>**: Se caracterizan a los estudiantes que usaron dos registros semióticos y que mediante el uso de ellos llegaron a respuestas incorrectas o parcialmente correctas (aproximaciones). Se describe este error en estudiantes que presentan obstáculos a realizar operaciones de diversa índole usando letras algebraicas, además ausencia de sentido entre lo que ocurre en la expresión y sus resultados finales a sus cálculos.

Tal como fue descrito anteriormente los estudiantes de rendimiento aceptable solían preferir una de las representaciones debido a la inhabilidad de tratamiento con las otras, sin embargo, lo ideal es que se tuviera clara la relación entre los distintos registros semióticos de representación para validar sus propias conclusiones. En relación con esto Duval citado por (Planchart Márquez, 2002) señala que:

Los errores de los alumnos, por lo general, se pueden interpretar como la falta de coordinación de los sistemas de representación. En los estudios sobre el concepto de función se han mostrado las dificultades para su aprendizaje.

<b>Pregunta 6</b>	
<p><b>6.</b> Se tiene un alambre de longitud <math>L</math> y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Halle la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima. Determine la función que permite modelar la situación.</p>	<p><b>Intención:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar las dificultades PM Y PA configuradas como, EE Y EA</li> <li>• Identificar las dificultades para la expresión algebraica de una función</li> <li>• Observar los errores de interpretación de enunciados.</li> <li>• Evidenciar la dificultad al producir expresiones haciendo uso de símbolos (letras) para describir la situación dada.</li> </ul>

*Ilustración 36- Sexta pregunta e intención.*

## Resultados

En esta pregunta fallaron 10 estudiantes (67%) tuvieron un rendimiento aceptable 5 estudiantes (33%) y no acertó ninguno. (0%).

### ¿Cómo respondieron los estudiantes?

Debido a que ningún estudiante logro producir una función que permitiera modelar la situación se tomó la decisión de caracterizar a los estudiantes que generaron planteamientos admisibles, abordajes lógicos, expresiones particulares y soluciones próximas a la solución

como aquellos de rendimiento aceptable. Los 5 estudiantes que tuvieron dicho nivel E13, E7, E 8, E2 Y E11 todos produjeron expresiones particulares. (Se analizará más precisamente en el caso 10)

Los 10 estudiantes que fallaron la situación están divididos en:

1 estudiante que no respondió.

6 a los que se les dificulta generar la función que modele dicha situación.

### **Respuestas de los 6 estudiantes:**

*E5: “Se me dificulta, pues no sé cómo definir la función para poderla derivar y sacar los máximos y mínimos.”*

*E3: “Encuentro dificultad en las áreas de los triángulos, ya que podrían ser iguales las áreas, pero ese razonamiento no es válido.”*

*E6: “No sé, porque no tengo claro las herramientas geométricas necesarias para aplicarlas a un problema de razones.”*

*E12: “Se me dificulta sacar una expresión que modele la variación de las longitudes de los trozos de segmento.”*

*E1: “No sé cómo abordar el problema.”*

*E9: “No entiendo la situación”.*

Como puede verse reflejado en las afirmaciones de los estudiantes hay dificultades de  $EE_1$ , debido a que presentan dificultades para razonar a partir del enunciado, como consecuencia de ello recaen en errores de tipo  $EE_2$  ya que no producen relaciones, es decir, no saben que varía o que depende en la situación. Finalmente podemos afirmar que la inhabilidad para producir la función que modelará la situación planteada se debe a que existen vacíos algebraicos los cuales producen errores catalogados como  $EA$  que tienen como característica la imposibilidad de originar expresiones haciendo uso de símbolos (letras) para describir o predecir el comportamiento de una situación.

De los 3 estudiantes restantes que fallaron la prueba, uno de ellos E10, tomo un abordaje demasiado alejado de se tenía considerado para dar solución a la situación, el otro participante E15, limitó su respuesta a describir los pasos que se pudiera realizar para llegar a modelar el problema. El último de ellos, E14 basó sus argumentos deductivos a través de la representación gráfica de una parábola que abre hacia arriba y vértice en (0,0).

### **Respuestas de los 3 estudiantes:**

*E10: “Se tiene una longitud de  $L$ , para ello se va a tomar  $L = 6$ .”*

*Se divide en dos  $6 \div 2 = 3$ .*

*$3 \rightarrow$  A partir de Euclides se puede realizar dos circunferencias que coincidan en su centro.*

*El radio de la circunferencia debe ser igual a la mitad de la longitud de uno de los segmentos. Y a partir del radio de la circunferencia se halla el arco."*

*E15: " $\frac{L}{2} \rightarrow$  perímetro triángulo equilátero.*

*Crear la función y derivarla, para poder determinar los máximos y mínimos."*

*E14: "Tengo el alambre de longitud  $L$ , esto lo podría modelar con una función cuadrática donde las coordenadas me determinan la longitud que debo tomar para que la suma de los triángulos sea la mínima.*

*Teniendo esta idea en mente cacharreándole un poco más podría determinar la función, pero la idea que es parábola es clara.*

*Esto se puede justificar, pues  $L$  es un valor cualquiera que lo puedo dividir en partes de cualquier longitud."*

Esencialmente lo que podemos determinar, dejando a un lado por un momento los diferentes abordajes propuestos, es que en todos los casos hay una resistencia a producir la función que modelará la situación, en cambio, existen explicaciones de cómo podrían llegar a ella, hecho que se distingue como una dificultades de tipo  $EA$ , ya que hay una imposibilidad por generar una expresión que prediga el comportamiento de la situación, debido a que hay obstáculos que le impiden evidenciar que lo que sabe puede aplicarse también en la situación dada  $EA_1$ , además de los problemas con la interpretación y asignación de letras que puede involucrar el problema hacen que haya ausencia de sentido  $EA_2$ .

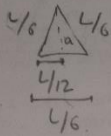
Ahora sí pensando más en los abordajes propuestos, vemos que claramente hay bastantes problemas en la interpretación de la situación, en el reconocimiento de la información que les puede ser útil para generar la función pedida y que como complemento no se pudieron hallar las suficientes conexiones algebraicas para producir una expresión podemos afirmar que hay dificultades de tipo  $EE_1 - EE_2$ .

#### **Caso 10 (Dificultades PM Y PA - $EE_1$ , $EE_2$ )**

E2

$\text{Alambre} = L$   
 $\text{Triángulo 1} = \frac{L}{2} \text{ de alambre}$        $\text{Triángulo 2} = \frac{L}{2} \text{ de alambre}$

$\downarrow$



$\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \left(\frac{L}{12}\right)^2 + a^2$   
 $\frac{L^2}{36} - \frac{L^2}{144} = a^2$   
 $\frac{144L^2 - 36L^2}{5184} = a^2$   
 $\frac{108L^2}{5184} = a^2$   
 $\frac{L^2}{48} = a^2$

$A = \frac{\frac{L}{6} \cdot \frac{L}{48}}{2}$   
 $A = \frac{L^3}{576}$

$A' = \frac{L^3}{576}$

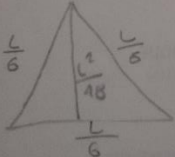
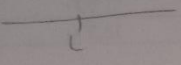



Ilustración 37-Actividad de modelación E2.

E13

6. Se tiene un alambre de longitud  $L$  y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Halle la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima. Determine la función que permite modelar la situación.





$A = \frac{b \cdot h}{2}$        $h = \sqrt{\left(\frac{L}{6}\right)^2 - \left(\frac{L}{12}\right)^2}$   
 $A = \frac{L}{6} \cdot \frac{L}{12}$   
 $A = \frac{L^2}{72}$

$A = \frac{L}{6} \left( \frac{L\sqrt{35}}{12} \right)$   
 $A = \frac{L^2\sqrt{35}}{144}$

$f(L) = \frac{L^2\sqrt{35}}{144} \Rightarrow$  (hallando  $f(L)$  e igualando a 0 podemos saber en qué valor de  $L$  el área es mínima)

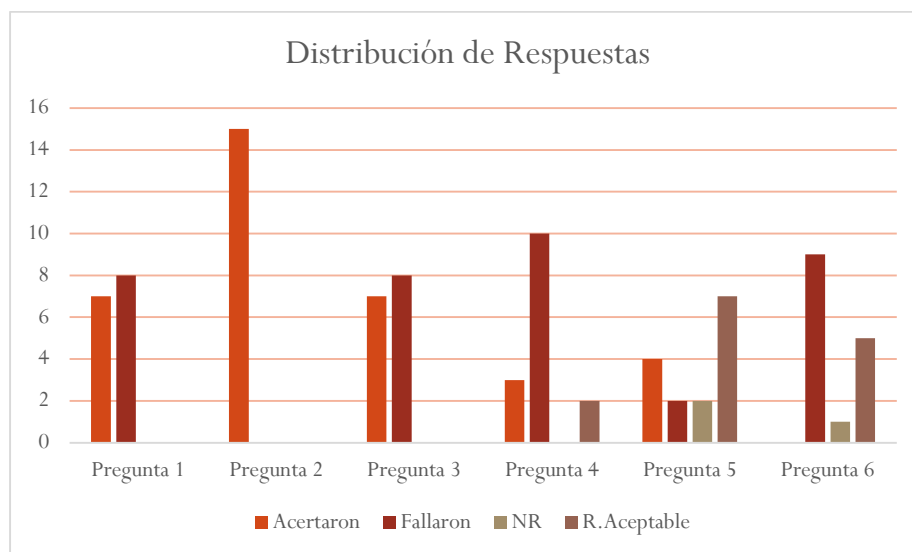
Ilustración 38-Actividad de modelación E13.

Los anteriores abordajes son bastantes similares a los producidos por los restantes estudiantes que tuvieron un rendimiento aceptable. Lo que se pretende hacer notar es que sus planteamientos son acordes a lo que se caracteriza como modelar una situación ya que en concordancia con (Planchart Márquez, 2002) en cuanto a la modelación esta debe estar muy ligada al uso de representaciones y que además debe comprender signos o figuras con las cuales sea posible predecir e interpretar los conceptos matemáticos. Así pues, consideramos que los estudiantes anteriormente descritos como de nivel aceptable, hicieron un ejercicio racional que puede dar origen a desarrollar de manera correcta el problema, sin embargo, también podemos determinar que tienen errores de  $EE_1$  dado que presentan dificultades para interpretar el problema generando respuestas incorrectas, dentro de lo que pedía la situación, en todos los casos. Como complemento a los errores descritos anteriormente se encuentran los de tipo  $EE_2$  ya que tomaron alguna información y obviaron otra igualmente importante que les hubiera permitido distinguir las relaciones entre triángulos, el alambre y la división del mismo. Por otro lado no vemos evidencias suficientes que nos permitan afirmar que presentan errores de tipo  $EA$ .

### **ANÁLISIS POR ESTUDIANTES**

Lo que se realizará a continuación será caracterizar las dificultades que tuvieron los estudiantes y compararlas con las de sus compañeros. Además de relacionar dichas dificultades con el grado de conocimientos que presuntamente debían tener. Cabe resaltar que este análisis no se hace con el ánimo de señalar a ninguno de los estudiantes a los que se les aplicó esta prueba, sino que interesa determinar cuál es el estado de modelación de funciones con el que cuenta la muestra.

Para empezar queremos dilucidar la ilustración 39 ya que con ésta estamos determinando el grado de dificultad que tuvo la prueba con base en las respuestas de los estudiantes:



*Ilustración 39-Distribución de Respuestas*

Se puede observar que las preguntas en donde más hubo dificultad fueron en las preguntas 4 y 6 donde los estudiantes evidenciaron errores algebraicos y de expresiones que predijeran el comportamiento de las situaciones.

En general todos los estudiantes tienen dificultades procesos de pensamiento matemático PM, es decir, regularmente tiene errores con transitar entre distintos tipos de representaciones y/o no puede identificar relaciones entre estas (ETR) y al expresar situaciones dado un contexto, las cuales conducen a la construcción de funciones en formas simbólicas y gráficas (EE).

También tienen dificultades característicos de Procesos de enseñanza, cometiendo errores al describir o predecir el comportamiento de una situación algebraicamente hablando (EA).

Por lo tanto y para que sea más fácil para el lector en comprender el análisis hecho a los estudiantes se pondrán las siglas anteriores, las cuales se han utilizado durante este documento, junto con la cantidad de errores que presentaron en cada caso.

E1	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en sexto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.
Resultados	Acertó en dos preguntas (2 y 3), tuvo un rendimiento aceptable en una (5) y falló en tres (1, 4, 6).  <u>Dificultades PM</u> Ninguna de ETR <sub>1</sub>



	<p>Tres de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math>  Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Dos de <math>EA_1</math>  Dos de <math>EA_2</math></p>
Juicio	<p>El estudiante comprende el concepto de función, sin embargo, tiene gran dificultad en relacionarlo con sus distintas representaciones. Regularmente tiene obstáculos que le hacen abandonar sus abordajes, esto recae en gran medida a la imposibilidad de trabajar con ellos debido a la ausencia de cursos como Movimiento I y didáctica de la variación en donde puede examinar más hondamente el tratamiento de las expresiones dadas. Sus dificultades se basan en la complejidad del objeto matemático más que en los procesos de enseñanza que tuvo. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.</p>
<b>E2</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra en quinto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.</p>
Resultados	<p>Acertó en una pregunta (2), tuvo un rendimiento aceptable en tres (4, 5,6) y fallo en dos (1,3).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Dos de <math>ETR_1</math>  Tres de <math>ETR_2</math>  Una de <math>EE_1</math>  Una de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Ninguna de <math>EA_1</math>  Una de <math>EA_2</math></p>

Juicio	El estudiante tiene problemas con el concepto de función y por lo tanto el tratamiento con las representaciones es bastante limitado, reduciéndolas regularmente a las de tipo continuo, sus dificultades son entendibles debido a que no ha pasado por cursos como Movimiento I y didáctica de la variación en donde el trato con los distintos tipos de funciones es más común. Regularmente tiene obstáculos aritméticos que no le dan resultado en otros contextos como el algebraico, lo cual produce el hacer uso de otro tipo de representación semiótica que si conoce, como las gráficas, para hacer una interpretación de esta y dar solución a una situación. Sus dificultades se basan en la complejidad del objeto matemático más que en los procesos de enseñanza que tuvo. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.
<b>E3</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en sexto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.
Resultados	<p>Acertó en una pregunta (2) y fallo en cinco (1 ,3 ,4 ,5 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Ninguna de ETR<sub>1</sub>  Cuatro de ETR<sub>2</sub>  Dos de EE<sub>1</sub>  Dos de EE<sub>2</sub></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Tres de EA<sub>1</sub>  Dos de EA<sub>2</sub></p>
Juicio	El estudiante conoce el concepto de función. Posee grandes dificultades para reconocer lo que le pide una situación y como resultado para generar una expresión que describa su comportamiento. Toma varios abordajes al solucionar un problema pero también demuestra muchas dificultades para darse cuenta si lo que hace es lo correcto o no. La imposibilidad de tratar con dichas expresiones puede producirse porque tiene cursos que se enfocan con más

	<p>especificidad a las funciones y con el esto su familiaridad con estas pueda ser más elevada. Sus dificultades son tanto de complejidad del objeto matemático, como de procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.</p>
<b>E4</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra cursando ultimas materias de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.</p>
Resultados	<p>Acertó en tres preguntas (2, 3,4), no respondió dos (5 y 6) y fallo en una (1).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Una de <math>ETR_1</math>  Una de <math>ETR_2</math>  No registra(NR) de <math>EE_1</math>  NR de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>NR de <math>EA_1</math>  NR de <math>EA_2</math></p>
Juicio	<p>Nota: El estudiante abandono la prueba cuando pretendía empezar con el punto 5 por motivos personales.</p> <p>El estudiante domina el concepto de función en distintas representaciones a pesar del fallo en la primera pregunta. Tiene demostraciones de dominio al reconocer la información que necesita para dar solución a una situación y transita entre representaciones fácilmente. Sus hallazgos suelen ser definitivos y no tiene grandes dificultades al expresar el comportamiento de una función.</p> <p>Se presume que puede tener un comportamiento aceptable al modelar funciones.</p>
<b>E5</b>	

Perfil del Estudiante	Se encuentra en decimo semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.
Resultados	<p>Acertó en dos preguntas (2,3) tuvo un rendimiento aceptable en una (5) y fallo en tres (1, 4 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Una de <math>ETR_1</math>  Tres de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math>  Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Dos de <math>EA_1</math>  Dos de <math>EA_2</math></p>
Juicio	El estudiante tiene algunas confusiones con los tipos de funciones que se le plantean. Tiene dificultades para entender tanto la situación dada como las representaciones semióticas que puede utilizar. Sospecha que algunos métodos que ha utilizado le permiten dar solución a las situaciones pero regularmente tiene obstáculos que la llevan a dar respuestas incorrectas. Sus dificultades son tanto de complejidad del objeto matemático, como de procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.
<b>E6</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en séptimo semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra, didáctica de la variación y movimiento I.
Resultados	<p>Acertó en tres preguntas (2,3 y 5) y fallo en tres (1 ,4 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Dos de <math>ETR_1</math>  Dos de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math></p>

	<p>Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Una de <math>EA_1</math> Una de <math>EA_2</math></p>
Juicio	<p>Tiene nociones de función, pero posee problemas para sentenciar a que tipo pueden corresponder. Acude a su memoria en la mayoría de las veces para rememorar la fórmula adecuada para cada situación, esto puede indicar algún rango de dominio acerca de las expresiones, pero no asegura que este razonando entre lo que cambia y lo que se mantiene constante. Sus habilidades se ven reducidas cuando el problema necesita que el haga reconozca la información que se le presenta. Tiene un bajo índice de dificultades son tanto de complejidad del objeto matemático como de procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento aceptable para modelar funciones.</p>
<b>E7</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra en decimo semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.</p>
Resultados	<p>Acertó en una pregunta (2), tuvo un rendimiento aceptable en una (6), no respondió una (5) y fallo en tres (1, 3 y 4).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Una de <math>ETR_1</math> Tres de <math>ETR_2</math> Dos de <math>EE_1</math> Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Una de <math>EA_1</math> Ninguna de <math>EA_2</math></p>

Juicio	El estudiante tiene algunas nociones para demostrar la veracidad de ser función. En general tiene dificultades para predecir el comportamiento de una situación, aun cuando tiene todo tipo de representaciones, por tanto, el uso de las mismas no es el correcto. También tiene dificultades con la comprensión de los enunciados propuestos y por consiguiente para generar expresiones que los modelen. No presenta ningún indicio de que tenga errores algebraicos, sin embargo, esto no determina que no los posea. Tiene más dificultades de complejidad del objeto matemático que de procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.
<b>E8</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra cursando ultimas materias de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al algebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.
Resultados	<p>Acertó en dos preguntas (2 y 5) tuvo un rendimiento aceptable en una (6) y fallo en tres (1 ,3 y 4)</p> <p><u>Dificultades PM</u>  Ninguna de ETR<sub>1</sub>  Tres de ETR<sub>2</sub>  Dos de EE<sub>1</sub>  Dos de EE<sub>2</sub></p> <p><u>Dificultades PA</u>  Ninguna de EA<sub>1</sub>  Uno de EA<sub>2</sub></p>
Juicio	Sus concepciones sobre función son acertadas. Tiene dificultades tanto para expresar un modelo como para representarlo, lo anterior debido a comúnmente interpreta de forma incorrecta el enunciado, en tal caso sus producciones entre registros semióticos se ven poderosamente afectadas. Aunque posee los errores descritos los niveles de dificultad tanto de la complejidad del objeto matemático y de procesos

	de enseñanza son bajos. Tiene un rendimiento aceptable para modelar funciones.
<b>E9</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en sexto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.
Resultados	<p>Acertó en tres preguntas (1,2 y 4), tuvo un rendimiento aceptable en una (5) y fallo en dos (3 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Uno de <math>ETR_1</math>  Dos de <math>ETR_2</math>  Uno de <math>EE_1</math>  Uno de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Tres de <math>EA_1</math>  Dos de <math>EA_2</math></p>
Juicio	Tiene algunos vacíos con respecto al concepto de función. Su principal debilidad es no poder describir el comportamiento de una situación presentada, haciendo uso de las distintas representaciones que se le brindan, sin embargo, tiene mucho mejor desempeño en reconocer la información necesaria a través de los enunciados que tiene la situación. Sus errores algebraicos son bastante recurrentes, aunque tiene un buen tratamiento de letra y sus distintas interpretaciones. Tiene dificultades de complejidad del objeto matemático y de procesos de enseñanza bastante notorios, pero, es deducible debido a la cantidad de cursos por lo que debe transitar y en donde pueda tener una mayor familiaridad con la modelación de funciones. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.
<b>E10</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en quinto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.

Resultados	<p>Acertó en dos preguntas (1 y 2) y fallo en cuatro (3, 4, 5 y 6)</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Una de ETR<sub>1</sub>          Dos de ETR<sub>2</sub>          Dos de EE<sub>1</sub>          Dos de EE<sub>2</sub></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Tres de EA<sub>1</sub>          Dos de EA<sub>2</sub></p>
Juicio	<p>Conoce el concepto de función, no obstante, no tiene una familiaridad con las relaciones que existe entre ellas y sus diferentes registros semióticos. Tiene dificultades para realizar expresiones que predigan el comportamiento tanto de un patrón como de una situación de la que puede hacer uso de cualquier representación con la que pueda llegar a la solución. Con regularidad no identifica la información que necesita ni de los enunciados y tampoco de las representaciones de la función. Sus dificultades son tanto de complejidad del objeto matemático como de procesos de enseñanza en un nivel alto. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.</p>
<b>E11</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra cursando ultimas materias de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.</p>
Resultados	<p>Acertó en tres preguntas (1, 2 y 4), tuvo un rendimiento aceptable en dos (5 y 6) y fallo en una (6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Ninguna de ETR<sub>1</sub>          Una de ETR<sub>2</sub>          Una de EE<sub>1</sub>          Una de EE<sub>2</sub></p> <p><u>Dificultades PA</u></p>



	<p>Dos de EA<sub>1</sub> Una de EA<sub>2</sub></p>
Juicio	<p>Conoce el concepto de función y los tipos de ella a los que se le dan en la prueba. Su principal debilidad es la generar expresiones algebraicas que anuncien el comportamiento dada una situación. Tiene un aceptable uso de las representaciones que se le dieron. No evidencia un rasgo significativo de tener errores algebraicos, sino más bien una imposibilidad en producirlos de manera cómoda. Indudablemente posee más dificultades con los procesos de enseñanza que con los de complejidad del objeto matemático. Tiene un rendimiento aceptable para modelar funciones.</p>
<b>E12</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra en séptimo semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra, didáctica de la variación y movimiento I.</p>
Resultados	<p>Acertó en cuatro preguntas (1, 2, 3 y 5) y falló en dos (4 y 6). <u>Dificultades PM</u> Ninguna de ETR<sub>1</sub> Una de ETR<sub>2</sub> Dos de EE<sub>1</sub> Dos de EE<sub>2</sub>  <u>Dificultades PA</u>  Una de EA<sub>1</sub> Una de EA<sub>2</sub></p>
Juicio	<p>Su dominio del concepto de función es bueno en general. Su principal arma para realizar un modelo de una situación son las representaciones tabular y grafica de las mismas, debido a que regularmente identifica la información que le brindan. No evidencia errores algebraicos, no obstante, la imposibilidad de usar el registro algebraico dado en la situación 5 y la no resolución de la pregunta 6, dan indicios de sus vacíos procedimentales en ese ámbito. Tiene varios errores de</p>

	expresión al no hacer una buena interpretación de lo que le pide la situación. Pudo demostrar más dificultades en los procesos de complejidad del objeto matemático que con los procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.
<b>E13</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en sexto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica y didáctica del álgebra.
Resultados	<p>Acertó en tres pregunta (1,2 y3) Y tuvo un rendimiento aceptable en las demás (4 ,5 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u></p> <p>Ninguna de <math>ETR_1</math>  Dos de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math>  Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u></p> <p>Ninguna de <math>EA_1</math>  Ninguna de <math>EA_2</math></p>
Juicio	La función a trozos se le dificulta de representar, pero en general cumple con la correspondencia entre registros semióticos en cada situación. Posee gran habilidad para interpretar las distintas componentes de una función tales como lo que varía o lo que se mantiene constante. Sus errores algebraicos son casi nulos, sin embargo, pudo haber tenido un mejor desempeño si los pudiera complementar con el uso de otro tipo de representaciones como la grafico o lo tabular. Tienen bajos índices de dificultad tanto de complejidad de los objetos matemáticos como de procesos de enseñanza. Tiene un buen rendimiento para modelar funciones.
<b>E14</b>	
Perfil del Estudiante	Se encuentra en cuarto semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra.

Resultados	<p>Acertó en tres preguntas (1,2 y 3) tuvo un rendimiento aceptable en una (5) y fallo en dos (4 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u>  Uno de <math>ETR_1</math>  Dos de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math>  Dos de <math>EE_2</math></p> <p><u>Dificultades PA</u>    Dos de <math>EA_1</math>  Dos de <math>EA_2</math></p>
Juicio	<p>En general conoce el concepto de función. Debido a la ausencia de tantos cursos donde la modelación está inmerso posee dificultades de todo tipo, incluso en la imposibilidad de proponer una gráfica que ilustre su solución a la pregunta 4. Sus acciones procedimentales son todavía muy elementales si de modelar una situación se trata, por eso se presume que tiene aún vacíos algebraicos que irá llenado en el transcurso de la licenciatura. No entiende los enunciados parcialmente. Sus dificultades son tanto de complejidad del objeto matemático como de procesos de enseñanza. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.</p>
<b>E15</b>	
Perfil del Estudiante	<p>Se encuentra en decimo semestre de la licenciatura, por lo tanto ha transcurrido por asignaturas como transición aritmética al álgebra, problemas del álgebra geométrica, didáctica del álgebra, didáctica de la variación, taller de ciencias y movimiento I, II, III.</p>
Resultados	<p>Acertó en dos preguntas (1 y 2), tuvo un rendimiento aceptable en una (5) y fallo en tres (3 ,4 y 6).</p> <p><u>Dificultades PM</u>  Ninguna de <math>ETR_1</math>  Tres de <math>ETR_2</math>  Dos de <math>EE_1</math>  Dos de <math>EE_2</math></p>

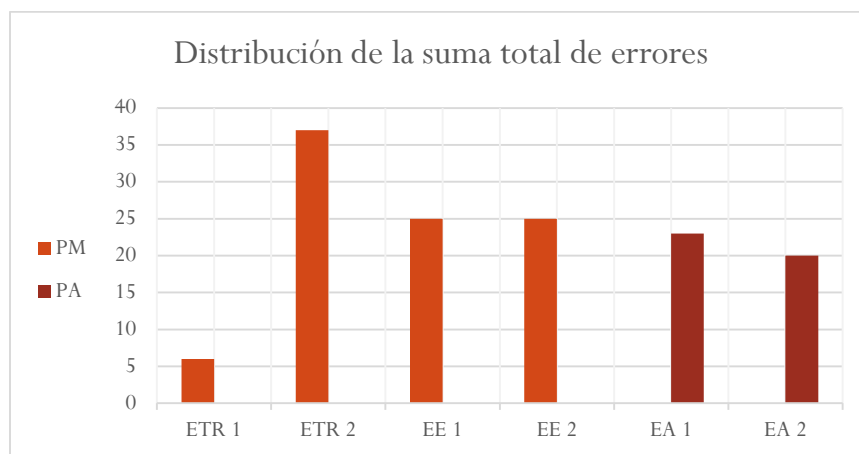
	<u>Dificultades PA</u>  Dos de EA <sub>1</sub> Dos de EA <sub>2</sub>
Juicio	El concepto de función no le es ajeno conceptualmente hablando. Los principales causantes de sus dificultades en los procesos de pensamiento son el mal tratamiento que hace de los distintos registros semióticos y que con regularidad no entiende que le piden los enunciados y por consiguiente extrae información incorrecta. Lo anterior desencadena en una gran cantidad de obstáculos, que provocan errores algebraicos. Tiene un rendimiento bajo para modelar funciones.

A continuación se presentará un cuadro con las dificultades y errores en los que cada estudiante incurrió en cada pregunta:

E	Pregunta 1						Pregunta 2						Pregunta 3						Pregunta 4						Pregunta 5						Pregunta 6								
	EE		ETR		EA		EE		ETR		EA		EE		ETR		EA		EE		ETR		EA		EE		ETR		EA		EE		ETR		EA				
	R	1	2	1	2	1	2	R	1	2	1	2	1	2	R	1	2	1	2	1	2	R	1	2	1	2	1	2	R	1	2	1	2	1	2				
E 1	F				x		A						A						F	x	x		x		AC				x	x	x	F	x	x			x	x	
E 2	F			x	x		A						F			x		x	AC			x	x		AC			x			AC	x	x						
E 3	F				x		A						F			x	x		F	x	x		x		F			x	x	x	F	x	x			x	x		
E 4	F			x	x		A						A						A						NR						NR								
E 5	F				x		A			x			A						F	x	x		x		AC				x	x	x	F	x	x			x	x	
E 6	F				x		A			x			A						F	x	x	x	x		A						F	x	x			x	x		
E 7	F			x	x		A						F			x	x		F	x	x		x		NR						AC	x	x						
E 8	F				x		A						F			x		x	F	x	x		x		A						AC	x	x						
E 9	A						A			x			F			x	x		A						AC				x	x	x	F	x	x			x	x	
E 10	A						A						F			x	x		F	x	x		x		F			x	x	x	F	x	x			x	x		
E 11	A						A						F			x	x		A						AC				x	x	AC	x	x						
E 12	A						A						A						F	x	x		x		A				x	x	F	x	x			x	x		
E 13	A						A						A						AC	x	x		x		AC			x			AC	x	x						
E 14	A						A						A						F	x	x	x	x		AC				x	x	x	F	x	x			x	x	
E 15	A						A						F			x	x		F	x	x		x		AC				x	x	x	F	x	x			x	x	
							PM						PM						PM						PM						PM						PM		PA

*Ilustración 40-Dificultades de cada estudiante con relación a las categorías de análisis.*

Como podemos ver en todos los estudiantes existen las distintas dificultades que en este documento se han venido enunciando al momento de modelar funciones, por tanto, basados en esta información, vamos a presentar el siguiente grafico que mostrará la suma de la cantidad de errores cometidos en cada pregunta por parte de los 15 estudiantes de la muestra:



*Ilustración 41-Suma total de errores cometidos.*

Para un mejor entendimiento de lo que se quiere exponer mediante la gráfica anterior, podemos decir que en particular si se quiere profundizar en las dificultades de pensamiento matemático, en treinta y siete oportunidades durante el estudio de las diferentes pruebas los estudiantes cometieron errores en el tratamiento de las representaciones (ETR<sub>2</sub>) que como ya sabemos constituye problemas de interpretación con los diferentes registros semióticos de representación. De igual manera se realizó la suma total de errores en los que todos los estudiantes presentaron dificultades.

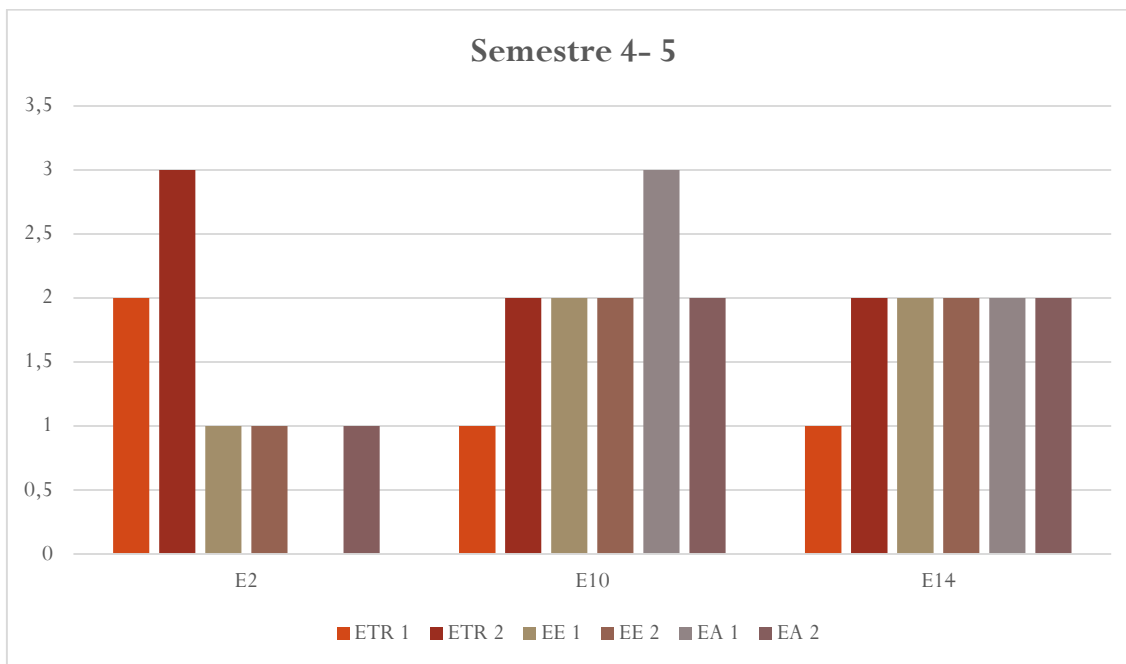
Es evidente que los errores en el tratamiento de representaciones, poseen los más altos niveles de dificultad dentro de los estudiantes en sus procesos de pensamiento matemático. Lo anterior quiere decir que los estudiantes no están acostumbrados a transitar por las distintas representaciones, o que regularmente eligen una de ellas para dar solución a los problemas que se les presentan, lo anterior debido a que “en la enseñanza, las representaciones utilizadas para que el estudiante aprenda un determinado concepto matemático se reducen en la mayoría de los casos a una o dos representaciones. En el caso de las funciones la representación algebraica se integra a la gráfica *vía* la tabla es decir, a los estudiantes se le propone establecer una conexión unívoca (en una sola dirección) entre estos registros de representación (del sistema algebraico al sistema gráfico). Las prácticas frecuentes son: la traslación de un sistema algebraico a un sistema tabular o en otro caso, pasar de una tabla a una gráfica, o la alternativa de cambiar una expresión algebraica a una gráfica.” (Planchart Márquez, 2002). También ante la imposibilidad de interpretar los demás registros semióticos prefieren continuar con los que ya conocen, sin importar si son preponderantes y decisivos en su camino hacia la solución.

No es menos relevante las cifras que arrojan los otros errores, especialmente los errores de expresión y los errores algebraicos, los cuales mantienen un equilibrio entre si y además una cercanía en cuanto a las cantidades con respecto a la suma total de los demás errores. En nuestro juicio resaltamos que este comportamiento puede ser una “cadena de errores”, es decir, sin importar el tipo de registro semiótico que use regularmente, este debe cumplir con

una validación en otro tipo de representación y va a tener una relación utilitaria entre sí. Tal sea el caso de que generemos una expresión algebraica de una situación, y supongamos que obtuvimos la información necesaria para realizarla, generalmente el resultado de la pregunta va a ser acertado. Recíprocamente, si obtuvimos una información innecesaria, porque no entendimos el enunciado del problema y proponemos una expresión que no describe su comportamiento, el resultado estará mal. Cada información abstraída, tiene una relación y cada relación su representación.

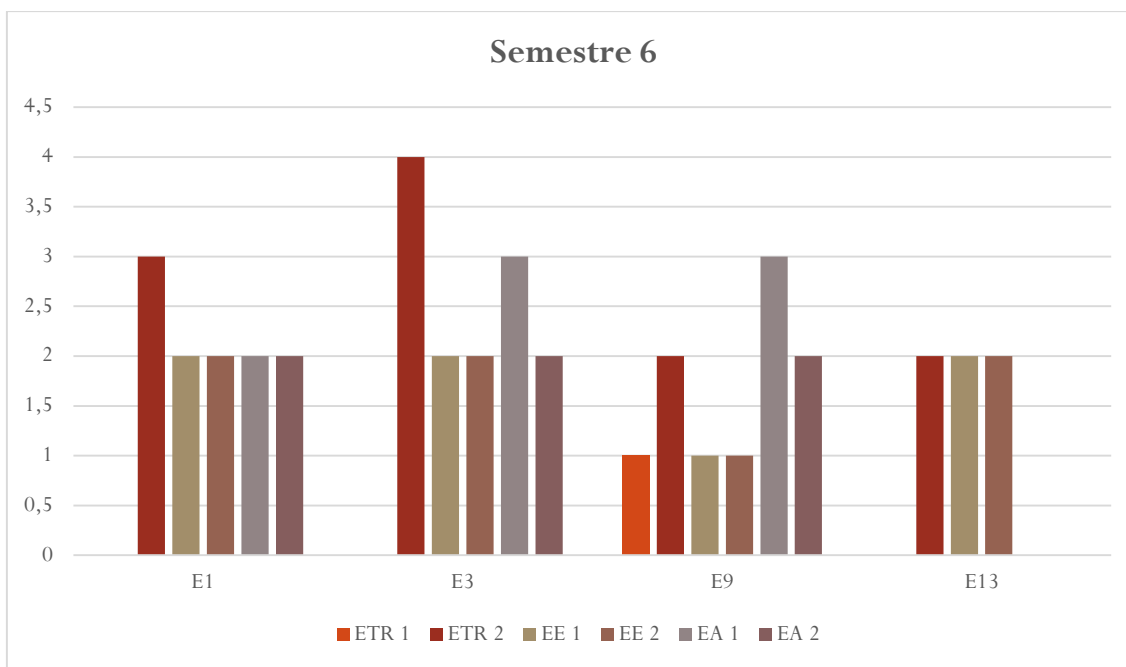
Sería injusto poner al mismo nivel a estudiantes de diferentes semestres, por lo cual haremos un último análisis basado en las dificultades entre estudiantes de similares semestres.

## ANÁLISIS COMPARATIVO



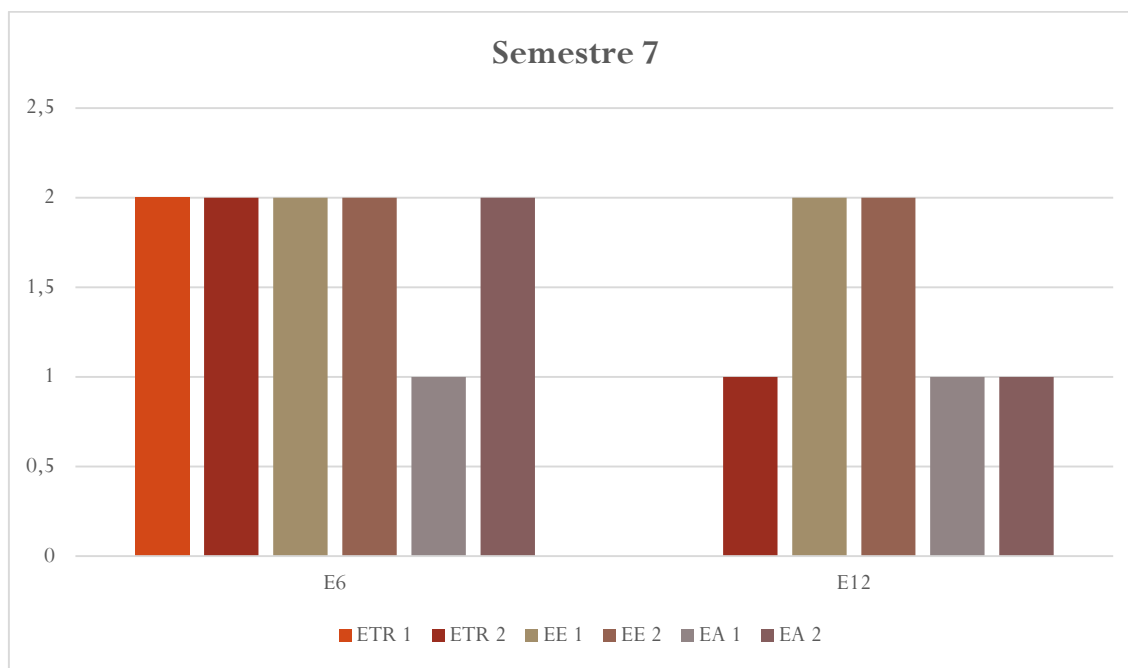
*Ilustración 42- Errores por estudiante de cuarto y quinto semestre.*

Debido a la ausencia en varias asignaturas en donde puedan realizar una mejor familiarización con los conceptos de función, su análisis y el tránsito entre los tipos de representaciones, la cantidad de dificultades es bastante alta, cometiendo errores con frecuencia **ETR<sub>2</sub>** y manteniendo un equilibrio negativo con las de errores algebraicos y los de generación de expresiones.



*Ilustración 43-Errores por estudiante de sexto semestre.*

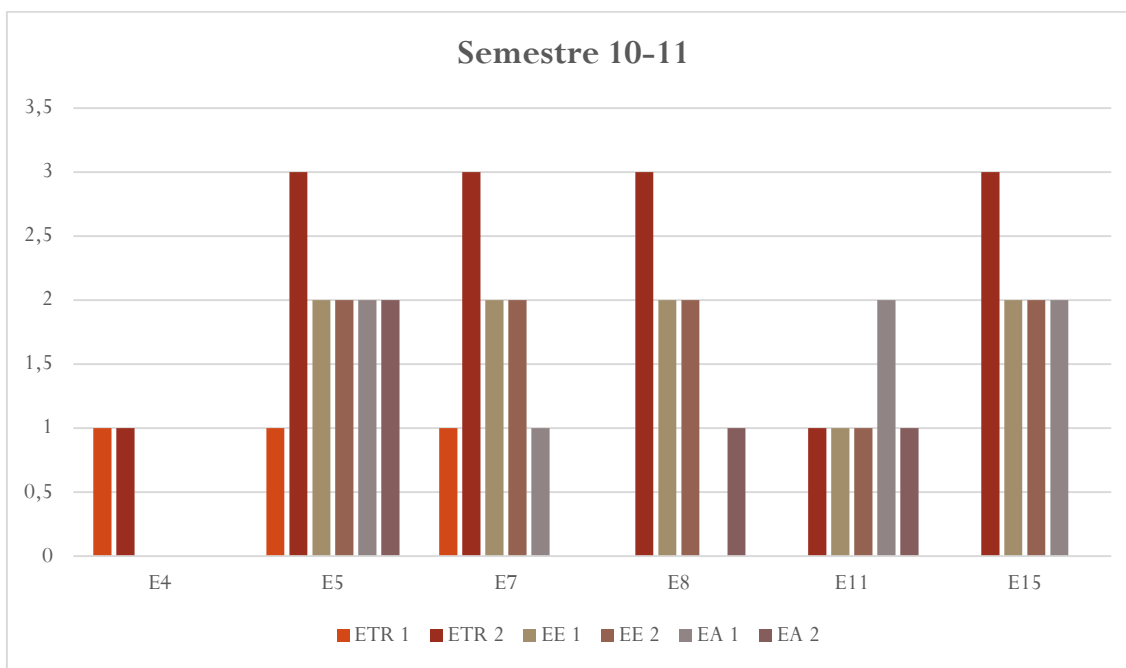
En teoría deberían tener una mayor experiencia en la modelación de funciones, sin embargo, tienen una baja interpretación de los distintos registros semióticos presentados, así como un equilibrio negativo en las dificultades de tipo algebraico y de expresión. Tienen una conceptualización bien desarrollada acerca del concepto de función. Es de resaltar que en este semestre se encuentra el estudiante que menores dificultades presenta al afrontar la prueba dada (E13).



*Ilustración 44-Errores por estudiante de séptimo semestre*

En este semestre vieron ligeramente superada la dificultad con los errores de  $ETR_2$ , sin embargo, presentan dificultades de pensamiento matemático en cuanto a conseguir la información necesaria de los enunciados y la producción de expresiones que las representen. Lo anterior se remonta a sus dificultades en los procesos de aprendizaje de tipo EA.





*Ilustración 45-Errores por estudiante de últimos semestres*

Los estudiantes de últimos semestres de la Licenciatura poseen dificultades de todo tipo y se caracterizan por sus errores en el tránsito entre distintos registros semióticos, también poseen un equilibrio negativo entre la generación de expresiones y el uso algebraico que debe dársele a las mismas.

## ANÁLISIS SYLLABUS

DIDÁCTICA DE LA VARIACIÓN 2015-1	
<b>Objetivos</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer diferentes categorías en la idea de variación.</li> <li>• Reconocer aspectos epistemológicos, ontológicos, y teóricos que permiten diferenciar la idea de variación en la escuela básica y media.</li> <li>• Discutir la importancia del modelaje y la modelación en el desarrollo de propuestas que implique la idea de variación.</li> <li>• Discutir la importancia de la derivada en la construcción de la idea de variación.</li> <li>• Establecer aspectos y conceptos relevantes en la construcción de una ruta de aprendizaje que permita el desarrollo de la idea de variación en la escuela básica y media.</li> </ul>	

### **Estudiantes y dificultades**

**E4:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> (PM)  
**E5:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E6:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E7:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> (PM Y PA)  
**E8:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E9:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E11:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E12:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E15:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

De los 15 estudiantes de la muestra, 9 ya han visto el curso de Didáctica de la variación, los objetivos del curso desde el principio van encaminados al de comprender la idea de variación junto con los conceptos, nociones e interpretaciones que se le dan a la variación para luego terminar en la relación que se da entre la variación y la derivada, para ello es importante que los estudiantes tengan en cuenta los diferentes tipos de representaciones que pueden tener las situaciones que se van a trabajar, sin embargo, en los 9 estudiantes que ya han cursado didáctica de la variación todos presentan errores ETR<sub>2</sub> es decir que los objetivos encaminados al reconocimiento de categorías y aspectos epistemológicos ontológicos, y teóricos que permiten diferenciar la idea de variación no se lograron en dichos estudiantes ya que presentaron dificultades en la interpretación con los diferentes registros semióticos de representación. Para estudiar la importancia de la derivada en la construcción de la idea de variación es importante que los estudiantes tengan en cuenta los diferentes enfoques que se le pueden dar a la derivada, las dificultades de tipo PA fueron comunes en 8 estudiantes de los 9, es decir que estos 8 presentan dificultades para producir expresiones con el ánimo de describir o predecir el comportamiento de una situación, por lo tanto el tercer objetivo propuesto en el syllabus no se logra evidenciar en estos 8 estudiantes.

### **TALLER DE CIENCIAS 2016-1**

#### **Objetivos**

- Acercar al estudiante a una serie de experiencias de modelación matemática que le permitan comprender algunos esquemas de trabajo en diversos fenómenos, principalmente en física.
- Incentivar en el estudiante la curiosidad científica para que pueda ser un docente más culto y pueda encontrar ejemplos de modelos matemáticos en la naturaleza y sus fenómenos.

### **Estudiantes y dificultades**

**E4:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> (PM)  
**E5:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)  
**E7:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> (PM Y PA)  
**E8:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E11:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E15:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

De los 15 estudiantes, 6 estudiantes se espera que hayan cursado taller de ciencias, todos presentan errores de tipo PM en especial ETR<sub>2</sub> presentan dificultades en la interpretación de los diferentes registros semióticos de representación, lo cual conlleva a pensar que en el primer objetivo planteado para el curso se presentaron problemas por parte de los estudiantes para poder generar modelos sobre dichos fenómenos. Es decir que el curso de taller de ciencias presenta dificultades en cuanto al trabajo en el proceso de aprendizaje debido a que los estudiantes poseen dificultades tanto para generar expresiones que describan comportamientos como para interpretar y relacionar distintas representaciones.

## MATEMÁTICA DEL MOVIMIENTO I 2015-2

### Objetivos

- Introducir el concepto de función a partir de funciones problema que presentan aplicaciones físicas para desarrollar en el estudiante la capacidad de reflexionar acerca de los modelos funcionales asociados al movimiento.
- Proponer problemas cuyo contexto se relacione con el movimiento y en cuyo proceso de resolución, emerja la necesidad de profundizar sobre algunos aspectos propios de las funciones (polinómicas, trigonométricas, logarítmicas o exponenciales).
- Promover en los estudiantes el uso de la modelación matemática, del lenguaje matemático para comunicar ideas, la validación argumenta de hipótesis, la reflexión permanente de su hacer como resolutor y como constructor de conocimiento matemático.

### Objetivos Estudiantes

- Reflexionar sobre los elementos primarios del pensamiento variacional, particularmente sobre los modelos funcionales asociados al movimiento, identificando los elementos variables, parámetros, entre otras características.
- Interpretar la función y sus propiedades en diferentes contextos.
- Reconocer los elementos más característicos de las funciones, sus distintas representaciones y las propiedades de su operatoria.

### Estudiantes y dificultades

**E4:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> (PM)

**E5:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E6:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E7:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> (PM Y PA)

**E8:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E11:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E12:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E15:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

De los 15 estudiantes, 8 estudiantes ya han cursado matemática del movimiento I, de igual manera que en los anteriores syllabus se siguen presentando problemas de tipo PM más específicamente ETR<sub>2</sub> es decir que en los objetivos de los estudiantes, no se logró en su totalidad que estos interpretaran la función y sus propiedades en diferentes conceptos ya que como se ha podido evidenciar se siguen teniendo problemas para poder interpretar lo que se presenta en un problema. De igual manera no se hubieran logrado en su totalidad los objetivos encaminados al análisis de las funciones con el ánimo de que se identifiquen los elementos que están implícitos en dicho concepto ya que se espera que el estudiante al finalizar el curso reconozca no solo los elementos sino también las distintas representaciones, al presentarse errores de tipo PM implicaría que el estudiante no está todavía en la capacidad de extraer lo necesario para modelar funciones de manera correcta.

### **MATEMÁTICA DEL MOVIMIENTO II 2014-2**

#### **Objetivos**

- Brindar a los estudiantes elementos que les permitan una comprensión de conceptos y procedimientos propios del cálculo diferencial.
- Promover en los estudiantes el uso del lenguaje matemático adecuado para comunicar sus producciones o desarrollos sobre avances en la resolución de problemas.
- Identificar situaciones y preguntas de la cotidianidad en las cuales tiene aplicabilidad el concepto de la derivada.

#### **Estudiantes y dificultades**

**E4:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> (PM)

**E5:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E7 :** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> (PM Y PA)

**E8:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E11 :** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E15 :** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

De los 15 estudiantes, 6 ya han cursado matemática del movimiento II, este curso está encaminado a la comprensión del cálculo diferencial mediante la comprensión de sus elementos para que de esta manera el estudiante pueda aplicar el concepto de la derivada a algunas situaciones de su vida cotidiana, observando las dificultades de los 6 estudiantes encontramos que un objetivo no se cumple en su totalidad, ya que los estudiantes no lograron comprender los elementos, conceptos y procedimientos del cálculo diferencia, nos apoyamos en el hecho de que los 6 estudiantes presentan dificultades para el trámite de representaciones y para la descripción o predicción de comportamientos en una situación, esto genera que los estudiantes la igual que en el curso de didáctica de la variación no puedan distinguir la utilización de la derivada

como tampoco el poder diferenciar los distintos enfoques desde los cuáles puede ser vista la derivada.

### **MATEMÁTICA DEL MOVIMIENTO III 2014-2**

#### **Objetivos**

- Construir el concepto de integral a partir de la resolución de problemas del movimiento para contextualizarlo en situaciones específicas.
- Establecer estrategias específicas y generales para la resolución de problemas del movimiento relacionado con la integral, de modo que el concepto surja en medio de un contexto y no quede como un concepto abstracto del cálculo o un conjunto de técnicas de integración.
- Establecer representaciones, procesos, estrategias, técnicas y tecnologías útiles para la resolución de problemas del movimiento enlazados con los conceptos de razón de cambio y la integral.
- Emplear razonamiento inverso como mecanismo para determinar soluciones de problemas en los que interviene la integral y validar conjeturas sobre propiedades de este objeto matemático.

#### **Estudiantes y dificultades**

**E4:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> (PM)

**E5:** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E7 :** ETR<sub>1</sub> ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> (PM Y PA)

**E8:** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E11 :** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

**E15 :** ETR<sub>2</sub> EE<sub>1</sub> EE<sub>2</sub> EA<sub>1</sub> EA<sub>2</sub> (PM Y PA)

De los 15 estudiantes, 6 estudiantes ya han cursado matemática del movimiento III, si bien es cierto que Matemática del Movimiento III implica estudiar el concepto de integral y que para llegar a este punto ya es necesario tener cierta destreza en el manejo de funciones, cabe destacar que solo un objetivo del Syllabus presentaría dificultades y es el que esta direccionado a establecer representaciones, estrategias , técnicas y tecnologías para la resolución de problemas del movimiento enlazados con los conceptos de razón de cambio y la integral, ya que como se puede evidenciar, Problemas de tipo PM más específicamente en ETR generarían problemas para el estudiante en cuanto a la razón de cambio, ya que si el estudiante no puede lograr comprender las distintas representaciones que puede tener la razón de cambio no podrá lograr encontrar estrategias que le permitan construir el concepto de integral.

## CONCLUSIONES

1. Se puede observar que las preguntas en donde más hubo dificultad fue la cuarta y la sexta en donde los estudiantes evidenciaron errores algebraicos y de expresiones que predijeran el comportamiento de las situaciones. Esto se debe a que dichas preguntas solo contaban con una descripción en lengua natural. Por lo tanto, resaltamos la imposibilidad de los estudiantes de modelar situaciones sin el uso de algún tipo de representación semiótica diferente a la que describe la situación, es decir, es necesario para ellos tener acceso a por lo menos dos representaciones semióticas.
2. En general todos los estudiantes tienen dificultades que conducen a errores con transitar entre distintos tipos de representaciones y/o no puede identificar relaciones entre estas. Además, al expresar situaciones dado un contexto, las cuales conducen a la construcción de funciones en formas simbólicas y gráficas.
3. Cometan errores tanto conceptuales como procedimentales, al describir o predecir el comportamiento de una situación algebraicamente hablando.
4. La dificultad que más presentan los estudiantes es en el tratamiento de las representaciones ya que se comprobó que estos no están acostumbrados a transitar por las distintas representaciones, o regularmente eligen una de ellas para dar solución a los problemas que se les presentan, corroborando los planteamientos de (Planchart Márquez, 2002) cuando expresa que “en la enseñanza, las representaciones utilizadas para que el estudiante aprenda un determinado concepto matemático se reducen en la mayoría de los casos a una o dos representaciones. En el caso de las funciones la representación algebraica se integra a la gráfica *vía* la tabla es decir, a los estudiantes se le propone establecer una conexión unívoca (en una sola dirección) entre estos registros de representación (del sistema algebraico al sistema gráfico). Las prácticas frecuentes son: la traslación de un sistema algebraico a un sistema tabular o en otro caso, pasar de una tabla a una gráfica, o la alternativa de cambiar una expresión algebraica a una gráfica.”
5. La ruptura en el ciclo de modelación genera lo que llamamos una “cadena de errores”, en otras palabras, si se extrae una información innecesaria de la situación problema, como resultado se obtendrá una representación semiótica errada y por lo tanto, un modelo que no describe a la situación inicial.
6. No realizar una dependencia óptima entre, el aspecto algebraico de la función, la representación semiótica de la misma y los aspectos didácticos que la componen, es un factor determinante en la actividad de modelación y por consiguiente la imposibilidad para generar modelos matemáticos dados una situación fenomenológica o de la vida cotidiana.
7. Existen dificultades tanto conceptuales, como didácticas en el estudio de las funciones por parte de los estudiantes, sobre todo en la variación, en cómo cambia y que cambia en cada caso.

8. Aunque se pensaba que los estudiantes de últimos semestres iban a tener menos dificultades en sus procesos de modelación, lo que encontramos es que cuentan el mismo nivel que los demás componentes de la muestra, en otras palabras, mantienen el equilibrio entre errores algebraicos, de tratamiento de representaciones y de expresión.
9. Los syllabus de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, no pueden ser considerados como documentos en los que se apreció el desarrollo de un curso, son muy generales, por lo que es errado considerarlos como un indicativo del curso.
10. El error que tiene mayor incidencia en los cursos, es el de tratamiento de representaciones, se esperaba que a lo largo de la carrera este error se vaya suavizando sin embargo, en estudiantes de semestres altos se muestra una reincidencia en este tipo de error al momento de enfrentarse a situaciones con diferentes representaciones.

## **TABLA DE ILUSTRACIONES.**

ILUSTRACIÓN 1-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓN, PRIMERA PREGUNTA. ....	13
ILUSTRACIÓN 2-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓN CONSTANTE, SEGUNDA PREGUNTA. ....	13
ILUSTRACIÓN 3-PARES ORDENADOS, TERCERA PREGUNTA. ....	14
ILUSTRACIÓN 4- REPRESENTACIÓN EN TABLA DE DATOS, QUINTA PREGUNTA. ....	15
ILUSTRACIÓN 5-REPRESENTACION GRÁFICA DE LA FUNCIÓN QUINTA PREGUNTA. ....	15
ILUSTRACIÓN 6- ELEMENTOS BÁSICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS. ....	21
ILUSTRACIÓN 7-ORGANIZACIÓN DE OBSTÁCULOS EN EL SISTEMA DIDÁCTICO. ....	23
ILUSTRACIÓN 8-ACTIVIDADES COGNITIVAS A LAS CUALES UN REGISTRO SEMIÓTICO DE REPRESENTACIÓN ESTÁ CONDICIONADO. ....	26
ILUSTRACIÓN 9-LA ACTIVIDAD DE MODELACIÓN Y SUS ALCANCES. ....	29
ILUSTRACIÓN 10-CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN. ....	32
ILUSTRACIÓN 11-PREGUNTA UNO E INTENCIÓN. ....	32
ILUSTRACIÓN 12-DIFICULTAD DE LA NECESIDAD DE HACER CONTINÚA LA FUNCIÓN E2. ....	33
ILUSTRACIÓN 13- DIFICULTAD DE CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN E7 (PUNTEO). ....	34
ILUSTRACIÓN 14-PREGUNTA DOS E INTENCIÓN. ....	35
ILUSTRACIÓN 15-ERROR CONCEPTUAL ENTRE FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN CONSTANTE E6. ....	36
ILUSTRACIÓN 16-ERROR CONCEPTUAL ENTRE FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN CONSTANTE E9. ....	36
ILUSTRACIÓN 17-ERROR CONCEPTUAL ENTRE FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN CONSTANTE E5. ....	36
ILUSTRACIÓN 18-PREGUNTA TRES E INTENCIÓN. ....	37
ILUSTRACIÓN 19-TABLA DE RESPUESTAS TERCERA PREGUNTA. ....	37
ILUSTRACIÓN 20-DIFICULTAD PARA GENERAR UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA E10 ....	38
ILUSTRACIÓN 21-DIFICULTAD PARA GENERAR UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA E9. ....	39
ILUSTRACIÓN 22- ERROR DE EXPRESIÓN ALGEBRAICA POR VARIABLE INCORRECTA E8. ....	39
ILUSTRACIÓN 23- PREGUNTA CUATRO E INTENCIÓN. ....	40
ILUSTRACIÓN 24-TABLA DE RESPUESTAS PRIMER INTERROGANTE DE LA CUARTA PREGUNTA. ....	41
ILUSTRACIÓN 25-DIFICULTAD PARA PROPONER UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA E14. ....	42
ILUSTRACIÓN 26-ERROR DE REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LA FUNCIÓN A TROZOS COMO UNA FUNCIÓN CONTINÚA E3. ....	43
ILUSTRACIÓN 27-ERROR DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN A TROZOS COMO UNA FUNCIÓN CONTINÚA E1 ....	43
ILUSTRACIÓN 28-ERROR DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN A TROZOS COMO UNA FUNCIÓN LINEAL E13. ....	44
ILUSTRACIÓN 29- QUINTA PREGUNTA E INTENCIÓN. ....	45
ILUSTRACIÓN 30-TABLA DE RESPUESTAS AL PRIMER INTERROGANTE DE LA QUINTA PREGUNTA. ....	47
ILUSTRACIÓN 31-TABLA DE RESPUESTAS AL SEGUNDO INTERROGANTE DE LA QUINTA PREGUNTA. .....	47
ILUSTRACIÓN 32-USO DE LA REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LA FUNCIÓN EN EL PRIMER INTERROGANTE E1. ....	49
ILUSTRACIÓN 33-DIFICULTAD EN EL TRATAMIENTO DE LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA FUNCIÓN E1. ....	50
ILUSTRACIÓN 34-DIFICULTAD EN EL TRATAMIENTO DE LA REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA EN EL PRIMER INTERROGANTE E10. ....	50
ILUSTRACIÓN 35-DIFICULTAD EN EL TRATAMIENTO DE LA REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA EN EL SEGUNDO INTERROGANTE E10. ....	50
ILUSTRACIÓN 36- SEXTA PREGUNTA E INTENCIÓN. ....	51
ILUSTRACIÓN 37-ACTIVIDAD DE MODELACIÓN E2. ....	54



ILUSTRACIÓN 38-ACTIVIDAD DE MODELACIÓN E13.....	54
ILUSTRACIÓN 39-DISTRIBUCIÓN DE RESPUESTAS .....	56
ILUSTRACIÓN 40-DIFICULTADES DE CADA ESTUDIANTE CON RELACIÓN A LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS. ....	68
ILUSTRACIÓN 41-SUMA TOTAL DE ERRORES COMETIDOS.....	69
ILUSTRACIÓN 42- ERRORES POR ESTUDIANTE DE CUARTO Y QUINTO SEMESTRE.....	70
ILUSTRACIÓN 43-ERRORES POR ESTUDIANTE DE SEXTO SEMESTRE.....	71
ILUSTRACIÓN 44-ERRORES POR ESTUDIANTE DE SÉPTIMO SEMESTRE.....	72
ILUSTRACIÓN 45-ERRORES POR ESTUDIANTE DE ÚLTIMOS SEMESTRES .....	73

## BIBLIOGRAFÍA

- Badia, A., Cano, M., & Feliu, M. (2012). *Dificultades de aprendizaje de los contenidos curriculares*. Barcelona: Editoria UOC.
- Canales, M. C. (2006). *Metodologías de Investigación Social: Introducción a los oficios*. Santiago de Chile: LOM ediciones.
- Castellanos S, M., & Obando B, J. A. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación, el caos de la representación y el razonamiento algebraico*. San Juan de Pasto: Asocolme.
- Castellanos, M., & Obando, J. (29 de Diciembre de 2009). *Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Pasto, Colombia. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/710/1/errores.pdf>
- Küchemann. (1980). *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children*. . Chelsea College, University of London.: Unpublished doctoral dissertation.
- Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa. (2007). *interactuando con el concepto de función en situaciones de modelación*. Mexico : Comite latinoamericano de matemática educativa.
- LEBEM. (17 de 05 de 2000). *Licenciatura en Matematicas*. Recuperado el 14 de 09 de 2015, de Licenciatura en Matematicas: <http://licmatematicas.udistrital.edu.co:8080/contenidos-curriculares>
- Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "Real" de la fluidez en las representaciones. *Debates, Enseñanza de las Ciencias*, 377-391.
- MEN. (1998). *Los lineamientos Curriculares para el área de matemáticas* .
- Planchart Márquez, O. (2002). *La visualizacion y la Modelacion en la adquisicion del concepto de funcion*. Cuernavaca, Morelos: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
- Ramos Rodriquez, E. M., Flores, P., & da Ponte, J. P. (9 de Diciembre de 2015). *FUNES*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/5353/1/Ramos2014An%C3%A1lisisInvestigaciones.pdf>

- Ruano, R. M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra*. Dialnet.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Socas, & M. Socas. Tenerife.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición*. México, D.F.: Cengage Learning.
- Villa, J. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. Maracaibo-Venezuela: Tecno Lógicas.
- Villa-Ochoa, J. A. (2007). *Modelación matemática escolar, algunas reflexiones frente a su relación con la cultura*. Antioquía.