

Estudio descriptivo e interpretativo del uso del Pensamiento algebraico en el contexto del  
software de geometría dinámica.

Luz Adriana Gutiérrez Baquero

Jeisson Leonardo Rodríguez Castillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas

Facultad de ciencias y educación

Bogotá, septiembre de 2021

Estudio descriptivo e interpretativo del Pensamiento algebraico en el contexto del software de geometría dinámica.

Luz Adriana Gutiérrez Baquero

Jeisson Leonardo Rodríguez Castillo

**Director de tesis:** Dr. Martín Acosta Gempeler

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas

Facultad de ciencias y educación

Bogotá, septiembre de 2021

### **Agradecimientos**

*A nuestro director Martín Eduardo Acosta Gempeler, por su compromiso al haber trabajado a nuestro lado, por su paciencia, por compartir sus saberes con nosotros y apoyarnos constantemente en el desarrollo de esta investigación.*

*Al profesor Rodolfo Vergel Causado por su sabiduría y sus orientaciones que nos permitieron ponernos las gafas teóricas necesarias para el análisis de nuestra investigación.*

*A nuestros colegas de la licenciatura en matemáticas que participaron en el estudio de esta investigación, por su disponibilidad y tiempo en el desarrollo de los problemas.*

*A Dios por permitirnos estar aquí y cumplir una de nuestras metas*

### **Luz Adriana Gutiérrez Baquero**

*A mi familia, por brindarme su amor y apoyo incondicional para lograr cada uno de mis sueños como profesional*

*En especial a mi padre, por enseñarme que el éxito depende del esfuerzo y amor.  
En especial a mi madre, por sus consejos y motivación cada día*

*A mi amigo Leonardo Rodríguez, por compartir y lograr esta meta juntos. Gracias por la entrega, conocimientos y tiempo en esta investigación y sobre todo gracias por ser una maravillosa persona.*

*A mis amigxs, quienes me han apoyado y deseado los mayores logros en cada uno de mis proyectos.*

### **Jeisson Leonardo Rodríguez Castillo**

*A mi compañera de tesis y amiga Adriana, por acompañarme en esta meta que es parte de nuestra trayectoria profesional. Por su compromiso, entrega y tiempo, por ponerse la camiseta en la elaboración de este trabajo. Por permitirme conocerla y darme cuenta el potencial que tiene no solo como profe sino como una maravillosa persona.*

*A mi familia, por confiar en mí, por sus palabras de aliento cuando veía las cosas difíciles, por su apoyo cada mañana no solo en el desarrollo de este trabajo sino a lo largo de mi carrera.*

*A Jessi por su amor, por sus consejos, por apoyarme no solo en el desarrollo de este trabajo, sino a lo largo de mi carrera, por motivarme a pensar en grande y perseguir mis sueños.*

## Tabla de contenido

Introducción .....	11
Capítulo 1. La investigación .....	13
1. Antecedentes .....	13
2. Planteamiento del problema de investigación.....	16
2.1. contexto del problema. ....	16
2.2. pregunta de investigación.....	16
2.3. justificación del problema. ....	16
2.4. objetivos. ....	18
Capítulo II. Marco teórico.....	20
1. Pensamiento .....	20
2. Pensamiento algebraico .....	20
2.1 componentes del pensamiento algebraico. ....	21
2.2 formas de pensamiento algebraico. ....	21
3. Aprendizaje y Esquemas de acción y comunicación .....	22
4. DGPad-Colombia como medio semiótico.....	23
4.1 tipos de acciones posibles en DGPad-Colombia. ....	23
4.2 tipos de construcción en DGPad-Colombia.....	24
4.3 posibilidad de invarianza en el software.....	24
Capítulo 3. Desarrollo de la investigación: Metodología .....	27

1. Investigación cualitativa .....	27
2. Descripción de población.....	28
3. Diseño metodológico .....	28
3.1 pilotaje y diseño de los problemas.....	28
3.2 implementación de los problemas .....	33
3.3 recolección de la información y configuración de los datos. ....	35
Capítulo 4. Análisis.....	36
1. Indicadores observables .....	36
1.1 indicadores basados en la teoría. ....	37
1.2 indicadores emergentes luego de una revisión de las transcripciones.....	43
2. Análisis de los comportamientos de los sujetos .....	49
2.1 análisis primera familia de problemas. ....	49
2.2 análisis segunda familia de problemas. ....	137
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones .....	202
Referencias .....	210

## Índice de figuras

Figura 1. Diseño metodológico del estudio	28
Figura 2. Línea de trabajo	34
Figura 3 Relación entre los ángulos sujeto A	52
Figura 4 Expresión de un caso (triángulo isósceles) Sujeto A	52
Figura 5 Construcción triángulo isósceles sujeto A	52
Figura 6 Construcción del caso triángulo rectángulo sujeto D	54
Figura 7 Relación entre los ángulos sujeto G	55
Figura 8 Construcción de caso triángulo isósceles sujeto G	55
Figura 9 Hilvanado sujeto A	58
Figura 10 Hilvanado sujeto D	58
Figura 11 Hilvanado sujeto G	60
Figura 12 Relación de los ángulos escrita por el sujeto A en un widget	62
Figura 13 Concepción del ángulo variable como cantidad indeterminada para el sujeto A	64
Figura 14 Construcción ángulo como cantidad indeterminada para el sujeto D	65
Figura 15 Construcción ángulo variable como cantidad indeterminada para el sujeto A	67
Figura 16 Expresión de dependencia en la calculadora sujeto A	68
Figura 17 Uso del punto X como MSO	68
Figura 18 Trayectoria solución al problema sujeto A	69
Figura 19 Recorte sujeto D concepción dependencia de ángulos	70
Figura 20 Expresión en la calculadora de la relación de dependencia entre ángulos por el sujeto D	70
Figura 21 Construcción punto de intersección que mantiene las relaciones de dependencia en los objetos geométricos por el sujeto D	71
Figura 22 Trayectoria de los puntos solución del problema para el sujeto D	71
Figura 23 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G	72
Figura 24 Construcción punto de intersección que mantiene las relaciones de dependencia en los objetos geométricos por el sujeto G	73
Figura 25 Lugares donde no se intersectan las semirrectas de los ángulos para el sujeto G	74
Figura 26 Arrastre del punto libre por parte del sujeto G	75
Figura 27 Uso de la traza por el sujeto G para marcar la trayectoria de los puntos solución	75
Figura 28 Expresión en la calculadora equivalente al objeto variable realizada por el sujeto A	77
Figura 29 Relación de dependencia entre los ángulos por parte del sujeto A	77
Figura 30 Uso de la traza para el caso del ángulo $ACB=25^\circ$ del sujeto A	77
Figura 31 Instrucciones para un caso general de ángulo $ACB=k^\circ$ hecha por el sujeto A en un widget	78
Figura 32 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto D	79
Figura 33 Uso del punto libre para cambiar la medida del ángulo variable por parte del sujeto D	79
Figura 34 Uso de la traza para el caso del ángulo $ACB=25^\circ$ por parte del sujeto D	80
Figura 35 Descripción para un caso $ACB=k^\circ$ por parte del sujeto D	81

Figura 36 Construcción de un ángulo variable por parte del sujeto G _____	81
Figura 37 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G _	82
Figura 38 Uso de la traza para un ángulo $ACB=25^\circ$ por parte del sujeto G _____	82
Figura 39 Arrastre del punto B a la semirrecta del ángulo fijo con vértice en C por parte del sujeto B _____	86
Figura 40 Simétrico de un punto aproximado por parte del sujeto B _____	87
Figura 41 Hilvanado sugerido al sujeto B _____	88
Figura 42 Hilvanado realizado por el sujeto F _____	89
Figura 43 Uso del arco de circunferencia por parte del sujeto H _____	90
Figura 44 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto B _____	93
Figura 45 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto F _____	94
Figura 46 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto H _____	96
Figura 47 Construcción de un ángulo de medida $100^\circ$ con la herramienta ángulo fijo por parte del sujeto B _____	98
Figura 48 Construcción de un segundo ángulo de medida $23^\circ$ por parte del sujeto B _	98
Figura 49 Ángulos $CAB=1^\circ$ y $ABC=122^\circ$ realizados con la herramienta ángulo fijo por parte del sujeto B _____	100
Figura 50 Construcción de los ángulos de medida $63^\circ$ y $60^\circ$ por parte del sujeto F con la herramienta ángulo fijo _____	102
Figura 51 Construcción de los ángulos de medida $90^\circ$ y $33^\circ$ por parte del sujeto H con la herramienta ángulo fijo _____	104
Figura 52 Sugerencia del ángulo variable por parte de los entrevistadores al sujeto B _____	107
Figura 53 Construcción de un ángulo fijo teniendo en cuenta únicamente la medida del ángulo variable por parte del sujeto B _____	108
Figura 54 Construcción del punto de intersección de una construcción aproximada por parte del sujeto B _____	108
Figura 55 Sugerencia del ángulo variable por parte de los entrevistadores al sujeto F	109
Figura 56 Construcción aproximada haciendo uso de un ángulo variable y un ángulo fijo por parte del sujeto F _____	110
Figura 57 Construcción a partir de dos ángulos fijos por parte del sujeto F _____	111
Figura 58 Ángulo variable sugerido por los entrevistadores al sujeto H _____	111
Figura 59 Sugerencia de un ángulo fijo por parte del sujeto H _____	114
Figura 60 Construcción de un segundo ángulo fijo de medida $83^\circ$ por parte del sujeto H _____	114
Figura 61 Ángulo variable sugerido por los entrevistadores al sujeto H _____	115
Figura 62 Construcción de un ángulo fijo de medida $77^\circ$ por parte del sujeto H _____	116
Figura 63 Construcción aproximada del sujeto H _____	117
Figura 64 El sujeto B etiqueta los ángulos ABC y BAC _____	121
Figura 65 El sujeto B activa la traza del punto C _____	123
Figura 66 Movimiento del punto libre para mostrar la traza del punto C por parte del sujeto B _____	123
Figura 67 Etiqueta del ángulo variable por parte del sujeto F _____	124
Figura 68 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F	125
Figura 69 Intento de construcción de una recta por parte del sujeto F _____	126

Figura 70 Acomodación del punto libre sobre la semirrecta del ángulo fijo por parte del sujeto F	126
Figura 71 Construcción del punto de intersección por parte del sujeto F	127
Figura 72 Construcción del arco de tres puntos por parte del sujeto F	127
Figura 73 Expresión de dependencia en la calculadora por parte del sujeto H	128
Figura 74 Construcción de la solución por parte del sujeto H	128
Figura 75 Uso de la traza por parte del sujeto H	129
Figura 76 Activación de la traza para el caso del ángulo $ACB=25^\circ$ por parte del sujeto B	131
Figura 77 Descripción de las estrategias para el caso de un ángulo $ACB=k^\circ$ por parte del sujeto B	132
Figura 78 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F	133
Figura 79 Movimiento del punto libre por parte del sujeto F	133
Figura 80 Uso de la traza para el caso del ángulo $ACB=25^\circ$ por parte del sujeto F	134
Figura 81 Descripción de las estrategias para un caso $ACB=k^\circ$ por parte del sujeto F	134
Figura 82 Activación de la traza para el caso del ángulo $ACB=k^\circ$ por parte del sujeto H	136
Figura 83 Construcción de un primer caso exacto por parte del sujeto A	140
Figura 84 Construcción de dos circunferencias para la obtención de dos puntos por parte del sujeto A	141
Figura 85 Construcción de dos puntos solución por parte del sujeto G	142
Figura 86 Construcción de un segmento como una cantidad indeterminada por parte del sujeto A	144
Figura 87 Construcción de la expresión en la calculadora referente a la cantidad indeterminada por parte del sujeto A	145
Figura 88 Construcción de la circunferencia indeterminada por parte del sujeto A	145
Figura 89 Construcción de la relación de dependencia en la calculadora por parte del sujeto A	146
Figura 90 Construcción de las circunferencias por parte del sujeto A como solución del problema	146
Figura 91 Uso de la traza por parte del sujeto A	147
Figura 92 Observación de la traza por parte del sujeto A	148
Figura 93 Representación de todos los puntos B del problema por parte del sujeto A	148
Figura 94 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G	149
Figura 95 Construcción de las circunferencias que guardan la relación de dependencia por parte del sujeto G	150
Figura 96 Uso de la traza por parte del sujeto G	150
Figura 97 Representación en azul de todos los puntos B del problema por parte del sujeto G	151
Figura 98 Uso de un segmento como cantidad indeterminada por el sujeto A	153
Figura 99 Construcción de la circunferencia indeterminada por parte del sujeto A	154
Figura 100 Construcción de la relación de dependencia en la calculadora por parte del sujeto A para una razón $k=3$	154
Figura 101 Construcción de los puntos de intersección para una razón $k=3$ por el sujeto A	155



Figura 102 Uso de la traza para una razón $k=3$ por parte del sujeto A	155
Figura 103 Descripción de las estrategias usadas para una razón $k$ cualquiera por parte del sujeto A	156
Figura 104 Uso de la traza para una razón $k=3$ por parte del sujeto G	157
Figura 105 Construcción de la expresión $E1$ por parte del sujeto F	159
Figura 106 Construcción de la circunferencia fija por parte del sujeto F	160
Figura 107 Construcción del primer punto de intersección B de forma exacta por parte del sujeto F	160
Figura 108 Segundo caso de forma exacta encontrada por parte del sujeto F	161
Figura 109 Trabajo caso a caso sugerido por los entrevistadores al sujeto F	162
Figura 110 Medida de la segunda circunferencia que escribe el sujeto F en la calculadora	164
Figura 111 Construcción de los puntos de intersección B entre ambas circunferencias por parte del sujeto F	164
Figura 112 Comprobación de las medidas hecha por el sujeto F	165
Figura 113 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F	167
Figura 114 Construcción de los puntos de intersección entre ambos tipos de circunferencias por parte del sujeto F	168
Figura 115 Comprobación de las medidas hecha por el sujeto F	168
Figura 116 Uso de la traza por parte del sujeto F	170
Figura 117 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto H	171
Figura 118 Construcción de la circunferencia que guarda la relación de dependencia por parte del sujeto H	171
Figura 119 Construcción de ambas circunferencias	172
Figura 120 Arrastre del punto P1 para que pareciere estar sobre el segmento AC por parte del sujeto H	173
Figura 121 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto H	173
Figura 122 Construcción de las circunferencias que guardan la relación de dependencia por parte del sujeto H	174
Figura 123 Uso de la traza por parte del sujeto H	175
Figura 124 Comprobación de la medida por parte del sujeto H	175
Figura 125 Operación de una cantidad representada por el segmento escrita en la calculadora por parte del sujeto F	177
Figura 126 Creación de la circunferencia con radio $S1/5$ por parte del sujeto F	177
Figura 127 Comprobación de la operación por parte del sujeto F	177
Figura 128 Uso de segmentos con medida para verificar la operación por parte del sujeto F	178
Figura 129 Uso de la traza para una razón $k=4$ por parte del sujeto F	179
Figura 130 Uso de la traza para una razón $k=3$ por parte del sujeto H	181
Figura 131 Uso de la traza en el punto B y movimiento del punto C por parte del sujeto H	185
Figura 132 Comparación de ambos tipos de construcciones por parte del sujeto H	186
Figura 133 Comparación de ambos tipos de construcciones al arrastrar puntos por parte del sujeto H	186
Figura 134 Construcción de un primer caso de forma exacta por parte del sujeto B	189

<i>Figura 135 Búsqueda de otro punto B que cumpla la condición de forma aproximada por parte del sujeto B</i>	<i>191</i>
<i>Figura 136 Construcción de dos circunferencias para obtener dos puntos de intersección B por parte del sujeto B</i>	<i>192</i>
<i>Figura 137 Construcción aproximada realizada por el sujeto B</i>	<i>193</i>
<i>Figura 138 Uso de la traza para una razón <math>k=2</math> por parte del sujeto B</i>	<i>196</i>
<i>Figura 139 Uso de las etiquetas para marcar los puntos B por parte del sujeto B</i>	<i>196</i>
<i>Figura 140 Uso de la traza para una razón <math>k=3</math> por parte del sujeto B</i>	<i>199</i>
<i>Figura 141 Descripción de las estrategias usadas para una razón k por parte del sujeto B</i>	<i>200</i>

## Introducción

El Software de Geometría Dinámica (SGD) existe ya desde hace más de 20 años y ha ganado un lugar en las investigaciones, que reconocen su potencial para promover el aprendizaje en los estudiantes. La mayoría de dichas investigaciones estudian el rol del SGD en el aprendizaje de la geometría. Recientemente, algunos investigadores han comenzado a explorar el uso del SGD en otras áreas de las matemáticas como las funciones y la aritmética. No conocemos investigaciones que examinen el potencial del SGD para promover el aprendizaje del álgebra. Este es el interés de este estudio: la exploración de la relación entre el pensamiento algebraico y el uso del SGD en la resolución de problemas de geometría.

El SGD DGPAd-Colombia incluye no solo la posibilidad de construir objetos geométricos, sino también la de construir expresiones tanto numéricas como algebraicas, que dependen de o definen los objetos geométricos construidos. Por otra parte, la posibilidad de arrastre del SGD hace posible la observación de fenómenos de dependencia y variación, que están a la base del pensamiento algebraico. Además, el SGD también ofrece la posibilidad de trabajar con un sistema de coordenadas, que explicita una relación entre los objetos geométricos y sus representaciones numéricas, abriendo paso a la geometría analítica, que se basa en la formulación y resolución de ecuaciones como medio para resolver problemas geométricos.

Teniendo en cuenta estos elementos, nuestra investigación se propuso analizar las producciones de algunos estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, frente al abordaje de unos problemas de construcción; dando especial importancia a los aspectos que tienen que ver con la movilización del pensamiento algebraico en el software. Para este fin, se aplicaron unas entrevistas semiestructuradas a los estudiantes, donde primero se les mostraba el uso de ciertas herramientas del software y

posteriormente se les pedía solucionar problemas que implican el reconocimiento y la representación de las dependencias numéricas.

## Capítulo 1. La investigación

### 1. Antecedentes

El pensamiento algebraico no tiene una definición universal dado que existe gran diversidad de autores que lo definen de forma distinta dependiendo la teoría en educación matemática en la que se posicionan. Por ejemplo,

Encontramos investigaciones como la de Vergel, R. (2014) quien tiene como foco los procesos de generalización y simbolización presentes en actividades con patrones, como parte del estudio sobre la iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano.

Otra perspectiva es la presentada por Díaz Godino & Font, (2003), donde expone el razonamiento algebraico a partir de niveles de algebrización implementados en ejercicios, que implican representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades, a partir de un proceso progresivo y secuencial en el uso del lenguaje y simbolismo algebraico.

Concretamente dentro del campo de estudios que relacionan el pensamiento algebraico y el uso de la tecnología, encontramos algunas investigaciones que se describen a continuación.

Butto Zarzar (2011) en su investigación “Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de tecnologías digitales: Un estudio teórico-experimental en el nivel básico” tiene como objetivo estudiar la introducción temprana al pensamiento algebraico mediante el uso de tecnologías digitales en estudiantes de 5° y 6° de primaria de una escuela pública del Distrito Federal de México, estos sin tener previo conocimiento del álgebra. En este estudio se plantea la posibilidad de lograr una transición desde un pensamiento aritmético a uno algebraico a través de talleres de razonamiento proporcional y procesos de generalización mediados por la tecnología. Las actividades se trabajaron primero en papel y luego en los

programas LOGO y eXpresser, donde se construyeron figuras que representaban las secuencias expuestas en el papel. Estas dos formas de observar las situaciones, les permitían a los estudiantes construir y analizar los patrones de generalidad tanto en las secuencias figurativas como en las secuencias numéricas.

Rodríguez, (2011) en su investigación “Uso de Cabri para la enseñanza del álgebra lineal” tiene como objetivo indagar sobre el potencial del uso del programa de Cabri, en el fortalecimiento de competencias necesarias para desarrollar procesos de álgebra lineal en estudiantes entre 18 y 20 años de las facultades de Administración e Ingeniería de la Universidad de los Andes. En un primer momento identificaron las principales dificultades que presentaban los estudiantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el curso de álgebra lineal. Luego se propuso una clasificación a partir de las dificultades encontradas, y el tipo de error asociado a cada una, así como un listado de las competencias necesarias para el aprendizaje álgebra lineal. En el presente estudio, se muestra el potencial que tiene Cabri para la corrección de errores y superación de las dificultades observadas, ya que permite a los estudiantes visualizar como cambian los objetos según las propiedades del álgebra lineal, específicamente se menciona como la representación de vectores en Cabri permite a los estudiantes comprender conceptos como la suma asociativa o la multiplicación por escalar de los vectores.

Ávila, J (2018) en su investigación “Experimentando con el aprendizaje del álgebra usando tecnología” tiene como objetivo comparar la enseñanza tradicional con el uso de la tecnología digital en el planteamiento y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales de hasta 4 incógnitas, este estudio fue realizado con seis estudiantes de un curso para ingenieros de la

universidad de Sonora. Las observaciones se enfocan en diferenciar los abordajes de los sujetos en un contexto de papel y lápiz (enseñanza tradicional) a un contexto en el software de geometría dinámica Geogebra (tecnología digital), encontrando que los sujetos que usaban la computadora resolvían más ágilmente las situaciones, ya que las representaciones en el software facilitaban la interpretación de los problemas.

Serres, Y (2011) en su investigación “Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza” tiene como propósito analizar qué se entiende por álgebra escolar y el pensamiento algebraico, su aprendizaje, su relación con el lenguaje a través de procesos de generalización y simbolización de variables, haciendo uso de las calculadoras gráficas en situaciones de patrones y su modelación en funciones. En este estudio se menciona el papel de las representaciones gráficas para la comprobación de cálculos complejos y conjeturas puestas en el papel, a través de la retroalimentación inmediata que permite la calculadora.

Esta revisión de literatura sobre el uso de la tecnología y el desarrollo de procesos algebraicos es una muestra de los avances en este campo que presentan las investigaciones en educación matemática. Se observa que, por ejemplo, varias de estas investigaciones se han ocupado de estudiar el papel de la tecnología: en la creación de entornos virtuales, como recolector de resultados, como adaptación de ejercicios del papel a plataformas virtuales y simulaciones para trabajar situaciones de variación.

Es necesario señalar que, aunque estos usos de la tecnología representan un avance en la investigación en educación matemática, se ha estudiado muy poco sobre los procesos de pensamiento algebraico movilizados a través de la tecnología, procesos observables a través del comportamiento. En efecto, es necesario indagar con mucho más cuidado elementos, como pensamiento, pensamiento algebraico, esquemas de acción y comunicación, SGD, entre otros,

elementos que son objeto de estudio en nuestro marco teórico.

## **2. Planteamiento del problema de investigación**

En esta sección, se presenta el contexto, la pregunta, la justificación y los objetivos del problema de investigación.

### **2.1.contexto del problema.**

En el semillero de investigación EDUTECMA se han planteado preguntas sobre la posibilidad de usar el software de geometría para enseñar temas que no son directamente geométricos, como las funciones, la aritmética y el álgebra. En este proceso se ha contemplado estudiar la posibilidad de resolver problemas de construcción que involucren relaciones de dependencia numérica entre objetos haciendo uso del SDG, utilizando estrategias identificadas como algebraicas. Es por ello que hemos asumido como problema de investigación la movilización del pensamiento algebraico en el SGD a través de la pregunta:

### **2.2.pregunta de investigación.**

¿Qué esquemas de acción-comunicación relacionados con el uso de objetos variables, en el contexto del software de geometría dinámica, movilizan estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de último semestre cuando abordan situaciones que implican el reconocimiento y la representación de las dependencias numéricas?

### **2.3.justificación del problema.**

Dentro del campo de investigación relacionado con el uso del software de geometría dinámica en la educación, hemos visto sus potencialidades en la enseñanza en aspectos como la geometría, el cálculo, incluso su aplicación en el diseño de actividades para la enseñanza del conteo; y a pesar de ser un espectro amplio en el campo de la didáctica de las matemáticas, señalamos la necesidad de ver sus potencialidades asociadas a la movilización y



desarrollo del pensamiento algebraico, ya que en una revisión de la literatura, no hemos visto investigaciones que tengan como objeto de estudio la relación entre estos dos aspectos.

Algunas de las razones que podemos dar para esta ausencia son los pocos años que se lleva investigando sobre este último, ya que como afirma Radford (2011) citado por Vergel (2016),

Conocemos muy poco sobre el pensamiento algebraico y, en particular, sabemos menos sobre el pensamiento algebraico en niños y jóvenes. La investigación en álgebra temprana comenzó hace apenas algunos años. El pensamiento algebraico es todavía muy general en su caracterización y requiere mucha más investigación. (p.30)

Aunque Radford afirma de lo poco que se ha estudiado en álgebra temprana, también hace énfasis en los pocos años en que se ha investigado en el campo del pensamiento algebraico. Es por ello, que consideramos importante investigar sobre la movilización del pensamiento algebraico haciendo uso del software de geometría dinámica, en un intento de rastrear formas de acción y de pensamiento que son puestos en juego por los sujetos a la hora de abordar actividades de resolución de problemas, en las que se pone en juego la presencia de objetos variables, indeterminados y situaciones implícitas de dependencia.

Por ejemplo, para la solución del siguiente problema: “dados dos puntos A y B construir todos los puntos C tales que el ángulo ACB mida  $57^\circ$ ”, es posible concebir la siguiente solución: construir un ángulo ABP variable (utilizando un punto P que puede moverse a cualquier posición del plano) y construir un ángulo BAQ de medida fija, que depende de la medida del ángulo ABP, definiendo esa dependencia por medio de la *expresión* algebraica  $180-57-\angle ABP$  (que puede escribirse en la calculadora del SGD); la intersección de la semirrecta BP y la semirrecta AQ (que definen respectivamente los dos ángulos) será uno de los puntos C pedidos. Debido a que el ángulo ABP puede tomar diferentes medidas (al

arrastrar P a diferentes posiciones), el punto de intersección construido también ocupará diferentes posiciones y puede considerarse como un punto variable que representa todos los puntos pedidos en el problema.

Para ejecutar esta estrategia de solución, el sujeto debe movilizar su pensamiento algebraico, al trabajar con objetos indeterminados como objetos conocidos (el ángulo ABP y el ángulo BAQ), designarlos semióticamente, y operar con ellos. En experiencias con este y otros problemas similares, hemos observado que algunos sujetos movilizan de manera espontánea el pensamiento algebraico, concibiendo la posibilidad de utilizar las herramientas del software de la manera descrita, mientras que otros sujetos parecen tener dificultades para tratar los objetos como objetos variables, y quedan fijos en la consideración de casos aislados (posiciones específicas de los puntos, o valores específicos para los ángulos).

Esta propuesta busca aportar elementos al estudio de aspectos relacionados con el pensamiento algebraico que podrían ser movilizados en el sujeto, a través de su interacción con el software de geometría dinámica, logrando establecer relaciones entre cómo se usan los objetos geométricos para pensar algebraicamente; y posteriormente contribuir al desarrollo de actividades de enseñanza con el software de geometría dinámica que movilicen o desarrollen el pensamiento algebraico.

## **2.4.objetivos.**

En esta sección, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos de nuestra investigación.

### ***2.4.1 objetivo general.***

Identificar y caracterizar los esquemas de acción-comunicación relacionados con el uso de objetos variables, en el contexto del software de geometría dinámica, que movilizan

estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de último semestre cuando abordan situaciones que implican el reconocimiento y la representación de las dependencias numéricas.

#### ***2.4.2 objetivos específicos.***

Identificar elementos asociados al desarrollo de pensamiento algebraico en el abordaje de situaciones en el contexto del software de geometría dinámica.

Describir la forma en que los estudiantes de licenciatura en matemáticas comunican sus producciones al enfrentar situaciones asociadas al uso de objetos variables en el contexto del software de geometría dinámica.

Clasificar los sujetos en grupos a partir de los esquemas de acción y comunicación movilizados en la resolución de los problemas.

## **Capítulo II. Marco teórico**

En este capítulo se describen y desarrollan los elementos teóricos que dan sustento a la propuesta de investigación. En este sentido, en un primer numeral se presenta el concepto de pensamiento desde la perspectiva de Radford; a partir de esta se define en un segundo numeral el concepto de pensamiento algebraico donde se destacan las formas de pensamiento de esta tipología y sus componentes.

En un tercer numeral se define el concepto de esquema desde la teoría de Vergnaud, haciendo énfasis en los tipos de esquemas de acción y de comunicación. Por último, en un cuarto numeral se desarrollan algunos elementos teóricos asociados a la potencialidad del software de DGPAd-Colombia que desempeñan un papel fundamental en la manifestación y movilización del pensamiento algebraico de los sujetos.

### **1. Pensamiento**

Pensamiento según Radford (2006) citado por Vergel y Rojas (2018) es:

«una forma de reflexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo a través de la percepción, gestos, movimientos, etc., el lenguaje, los signos, etc.»; entendida la reflexión como «un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta y la modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios» (p. 45).

El pensamiento es por ende producto de una práctica reflexiva activa que está en constante cambio de acuerdo a la interacción existente entre sujeto y realidad.

### **2. Pensamiento algebraico**

Radford (2010) citado por Vergel (2015) define este tipo de pensamiento como un conjunto de procesos de acción y de reflexión matemática, mediados por el cuerpo, que se

han constituido histórica y culturalmente.

## 2.1 componentes del pensamiento algebraico.

El pensamiento algebraico está constituido por tres componentes:

- a) **El sentido de indeterminancia** (objetos básicos como incógnitas, variables y parámetro (Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico)) como aquello opuesto a la determinancia numérica.
- b) **La analiticidad**, como forma de trabajar los objetos indeterminados, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- c) **La designación simbólica** de sus objetos, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

## 2.2 formas de pensamiento algebraico.

Esta propuesta está constituida por tres formas de pensamiento que se relacionan con los componentes analíticos, que se caracterizan por los medios semióticos de objetivación<sup>1</sup> movilizados por los sujetos en los razonamientos usados para solucionar un problema. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes:

**Pensamiento algebraico factual:** Los medios semióticos de objetivación movilizados son las actividades de percepción, palabras, gestos, ritmo, y gestos. En esta forma de pensamiento la indeterminancia queda implícita, ya que solo se expresa en acciones concretas.

**Pensamiento algebraico contextual:** Los medios semióticos de objetivación se vuelven objeto de discurso a través de frases “clave”. En esta forma de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve parte importante del procedimiento. El sujeto establece una descripción

---

<sup>1</sup>Los medios semióticos de objetivación son entendidos como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidente sus intenciones, y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades. Radford (2003, 2010) citado por Mojica (2013).

general como una formulación algebraica.

**Pensamiento algebraico simbólico:** Los medios semióticos de objetivación son representados por símbolos alfanuméricos del álgebra. En esta forma de pensamiento se designan los objetos del discurso.

### 3. Aprendizaje y Esquemas de acción y comunicación

Al no ser posible observar aspectos relacionados con el pensamiento, nos remitimos a la definición de esquema dada por Vergnaud (1990) citado por Moreira (2002) como la organización invariante de comportamiento, que se caracteriza por el encadenamiento de diversas acciones que se repiten en el abordaje de una gama de situaciones. Un esquema puede ser modificado a partir de dos procesos distintos:

- *Asimilación* entendida como el proceso mediante el cual un sujeto se enfrenta a una situación nueva utilizando un esquema que domina previamente y este funciona, por lo tanto, se deduce que el sujeto está asimilando la nueva situación a su esquema ampliando el campo de su aplicación.
- *Acomodación* entendida como el proceso mediante el cual, un sujeto se enfrenta a una nueva situación utilizando un esquema que domina previamente y este no funciona, por lo que el sujeto se ve obligado a modificar su esquema para que funcione, lo está adaptando a la situación; resultado de este proceso crea un nuevo esquema.

Los esquemas como estructuras de comportamiento observables, nos permiten hacer inferencias sobre la presencia o ausencia de aspectos del pensamiento algebraico en el abordaje de las situaciones. Para efectos de esta investigación hablaremos de dos tipos de esquemas en particular:

**Esquemas de acción:** Es el encadenamiento de comportamientos y acciones en el software que se repiten de manera secuencial para una gama de situaciones.

**Esquemas de comunicación:** Es el encadenamiento de formas de comunicación ya sean mediante el lenguaje natural o de forma simbólica que se repiten de una misma forma para una gama de situaciones.

#### **4. DGPad-Colombia como medio semiótico**

##### **4.1 tipos de acciones posibles en DGPad-Colombia.**

DGPad-Colombia como todos los softwares de geometría dinámica, permite dos tipos de acciones descritas por Acosta (2010) citado por Calderón (2016) que son:

**Construir:** Consiste en hacer uso de distintas herramientas en DGPad-Colombia para dibujar objetos en la pantalla con relaciones entre ellos. El resultado es la creación de un dibujo estático que corresponde a la construcción de elementos geométricos.

**Arrastrar:** Consiste en agarrar los objetos construidos y desplazarlos en la pantalla. En el desplazamiento “se conservan intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como las propiedades geométricas implícitas” p. 24)

Adicional a estas, en el desarrollo de nuestra investigación identificamos otras dos acciones que posibilita el software:

**Escribir expresiones numéricas:** Consiste en hacer uso de la calculadora para establecer expresiones con símbolos alfanuméricos. En dichas expresiones se pueden expresar medidas y operaciones.

**Definir objetos geométricos a partir de su valor (medida):** Consiste en hacer uso de la calculadora para definir el tamaño de un objeto geométrico a través de su medida. El resultado es

la creación de un objeto geométrico fijo con una medida ya sea numérica o representando una relación de dependencia entre cantidades.

**Uso de la traza:** Consiste en activar la traza a puntos de intersección que mantienen relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción. Estos puntos se mueven indirectamente al arrastrar directamente el punto libre de la construcción, y su trayectoria representa un conjunto de puntos que pueden corresponder a la solución de un problema.

#### **4.2 tipos de construcción en DGPad-Colombia.**

Estas acciones posibilitan la aparición de dos tipos de construcción que son descritas por Acosta y Cardozo (2021)

**Construcción exacta:** “una construcción se considera exacta cuando cumple con unas propiedades que se mantienen al arrastrar los objetos que la componen... Esa verificación experimental contribuye también a la convicción sobre la eficacia de los procedimientos y sobre la validez de las afirmaciones.” (p.258)

**Construcción inexacta o aproximada:** Una construcción se considera inexacta o aproximada cuando las propiedades se pierden al arrastrar los objetos que componen la figura. Esta verificación permite observar la ineficacia de los procedimientos e invalidez de las afirmaciones.

#### **4.3 posibilidad de invarianza en el software.**

El trabajo con DGPad-Colombia permite identificar cuando un objeto es variable y cuando es un objeto fijo. Esto es un aspecto clave a la hora de construir, ya que permite establecer relaciones entre objetos que varían de manera directa cuando yo arrastro, y objetos que dependen de estos a partir de una *expresión* en la calculadora.



En el desarrollo de la investigación, el software representa una riqueza en el uso de recursos semióticos, ya que cada representación simbólica de los objetos tiene su tratamiento en la calculadora, esto abre posibilidades al trabajar con las cantidades, ya que hay objetos que permiten establecer dependencias mientras que otros son partícipes de estas mediante expresiones alfanuméricas.

#### ***4.3.1 objeto variable y fijo.***

Existen dos tipos de objetos que se pueden construir:

a) **Objeto variable:** Se construye a partir de un elemento y un punto libre, su medida se puede modificar con el arrastre del punto libre. (por ejemplo, para la construcción de un ángulo variable es necesario dos puntos A y B donde uno de estos es el vértice, y un punto libre P1. La medida puede ser modificada por el arrastre del punto libre P1).

b) **Objeto fijo:** Se construye a partir de un elemento y una medida fija, su medida se puede modificar con el uso de la calculadora. (por ejemplo, para la construcción de un ángulo fijo es necesario dos puntos A y B donde uno de estos es el vértice, y una medida dada, producto de esto se crea una semirrecta que representa la colección de todos los puntos que comparten una misma abertura. El arrastre de cualquiera de los objetos no modifica la medida ya que esto sólo es posible con el uso de la calculadora).

#### ***4.3.2 un objeto variable que representa una infinidad de objetos fijos del mismo tipo.***

Un objeto variable que se puede variar voluntariamente mediante el arrastre de un punto libre, permite representar mediante el movimiento una infinidad de objetos fijos del mismo tipo (por ejemplo, un ángulo variable puede representar infinidad de ángulos fijos con medidas dadas al arrastrar el punto libre)

### ***4.3.3 representar objetos geométricos semióticamente en la calculadora.***

En el tablero del software se visualizan los objetos geométricos, pero estos pueden ser representados simbólicamente en la calculadora de dos formas: 1) haciendo uso directamente de la etiqueta del objeto geométrico (ejemplo, A1 como etiqueta del objeto geométrico), 2) expresiones equivalentes a la etiqueta del objeto geométrico (ejemplo,  $E1=A1$  donde A1 es el objeto geométrico)

Una diferencia en el uso de la calculadora de los objetos variables y fijos es que en estos últimos se puede cambiar su medida mientras que en los otros no.

### ***4.3.4 relación de dependencia en la calculadora, que se mantiene y se representa en el dibujo mediante el uso de la traza y el arrastre de un punto libre.***

Una relación de dependencia entre el objeto variable y el objeto fijo se establece a partir de una *expresión* alfanumérica en la calculadora. Para expresar esa dependencia se selecciona el objeto fijo y se modifica su medida por una operación en la que está presente simbólicamente el objeto variable. Como resultado de este proceso se obtienen puntos de intersección que mantienen la propiedad de dependencia entre ambos objetos, estos puntos se mueven indirectamente al arrastrar el punto libre, y se activa su traza, mostrando todos los puntos solución del problema (por ejemplo, teniendo un ángulo fijo A2 construido a partir de los puntos A y B, al cambiar su medida a  $A2=180-57-A1$ , siendo A1 un ángulo variable construido a partir de los puntos A, B y el punto libre P1, se obtiene un punto de intersección C entre ambos ángulos que mantiene la condición de que el ángulo  $ACB = 57^\circ$  al arrastrar el punto libre).

### **Capítulo 3. Desarrollo de la investigación: Metodología**

En este capítulo se presenta el desarrollo de nuestro estudio teniendo en cuenta la pregunta y énfasis de la investigación. Este capítulo está dividido en 3 apartados: El primer apartado llamado “Investigación cualitativa” describe el tipo, el método de la investigación, y la técnica de recolección de información; un segundo apartado llamado “Descripción de la población” describe los sujetos de estudio, y un tercer apartado llamado “Diseño metodológico” menciona la planeación y puesta en marcha de los problemas diseñados para la investigación. Este último apartado está compuesto de tres partes: 1) Pilotaje y diseño de los problemas, 2) Implementación de los problemas, y 3) Recolección de la información y configuración de los datos.

#### **1. Investigación cualitativa**

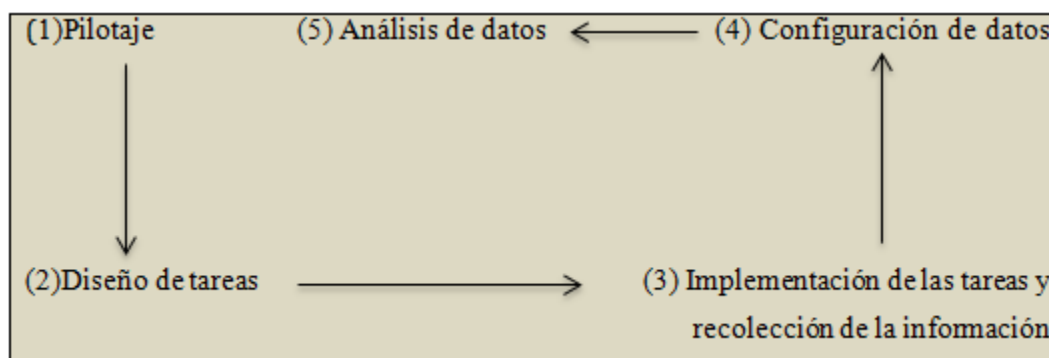
La presente investigación está enmarcada en el enfoque de investigación cualitativa presentado por Ñaupas, et al. (2013), de tipo descriptivo e interpretativo. Este enfoque nos permite describir en detalle los comportamientos que presentan los objetos de estudio (los sujetos), e interpretar dichas acciones bajo un marco de referencia que orienta el trabajo de investigación. El método de investigación presente en este trabajo es el estudio de caso, ya que como menciona Simons (2011) permite generar una comprensión exhaustiva de un tema determinado para generar conocimientos alrededor de una práctica. Los datos son recogidos mediante entrevistas semiestructuradas ya que, en estas según Ñaupas, et al (2013), el entrevistador tiene libertad de formular preguntas abiertas que han sido planeadas con antelación, pero pueden variar de acuerdo a las respuestas obtenidas en el transcurso de la entrevista, siempre respondiendo a las necesidades de la investigación.

## 2. Descripción de población

El desarrollo de las entrevistas lo llevamos a cabo entre el mes de noviembre de 2020 y el mes de mayo de 2021, con seis estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital de sexto semestre o superior. Los problemas propuestos se desarrollaron en el marco de la emergencia sanitaria global a raíz de la circulación del virus “SARS-Cov-2” (Covid-19), por lo que su implementación se llevó a cabo de forma sincrónica virtual mediante la plataforma de videollamada “Meet” de Google, y usando el Software de Geometría Dinámica DGPAd-Colombia. Las sesiones fueron grabadas con consentimiento de los voluntarios, los problemas se desarrollaron de forma individual, y cada problema se desarrolló en una sesión aparte de forma secuencial.

## 3. Diseño metodológico

Para el desarrollo de nuestra investigación tenemos presente el diseño metodológico que propone Mojica (2014) adaptado del diseño utilizado en Radford (2010b) en una investigación longitudinal. (véase figura 1)



*Figura 1. Diseño metodológico del estudio*

A partir de este diseño, se plantean las fases del estudio

### 3.1 pilotaje y diseño de los problemas.

Se escogieron, adaptaron e implementaron dos familias de problemas que implican el

reconocimiento y representación de dependencias numéricas. Estas familias ofrecen un rico abanico de posibilidades de movilizar en los sujetos acciones relacionadas con aspectos del pensamiento algebraico, ya que en su resolución está presente el uso de elementos como: objetos variables y fijos, expresiones numéricas y algebraicas, entre otros.

Las familias de problemas tienen diferentes propósitos en el momento de aplicación. La primera familia de problemas se propone para observar si los sujetos pueden movilizar o no de forma espontánea los esquemas de acción y comunicación que corresponden al pensamiento algebraico en el SGD; en caso de que el sujeto no los movilice de forma espontánea, los entrevistadores proporcionan ayudas e instrucciones para movilizar dichos esquemas. La segunda familia de problemas se implementa para confirmar si los sujetos que no movilizaron espontáneamente los esquemas en el primer problema, son capaces de movilizarlos de manera autónoma y si el esquema una vez movilizado permanece activo, o si, por el contrario, necesitan ayuda nuevamente de los entrevistadores.

A continuación, se describen los problemas de cada familia, y además se especifican las herramientas y conocimientos necesarios para llevar a cabo la estrategia ganadora, compuesta por esquemas de acción y comunicación propios del pensamiento algebraico.

1. Primera familia de problemas: **Dados los puntos A y B construir todos los puntos C tales que el ángulo  $ACB=k^\circ$  (los k que se proponen) Se trabajaron tres problemas de esta familia: cuando el ángulo  $ACB=57^\circ$ , cuando el ángulo  $ACB=25^\circ$  y finalmente se solicitó expresar la solución para un caso general de  $k^\circ$ .**

- Herramientas del software que consideramos necesarias para la solución del problema: Ángulo (construido a partir de tres puntos), ángulo fijo (construido a partir de

dos puntos y generando una semirrecta con origen en el vértice del ángulo y con una medida dada), calculadora, traza.

- Conocimientos necesarios para la solución del problema: La suma de los ángulos internos de un triángulo es de  $180^\circ$

### **Estrategia que utiliza el pensamiento algebraico**

El sujeto construye un ángulo variable  $A1$  (utilizando un punto libre), un ángulo fijo  $A2$ , un punto  $C$  que resulta de la intersección de los ángulos  $A1$  y  $A2$ , y representa simbólicamente en la calculadora la relación de dependencia entre  $A2$  y  $A1$  por medio de la expresión  $A2=180-k^\circ-A1$ . La obtención de todos los puntos solución del problema se da al activar la traza del punto  $C$  y al variar el ángulo  $A1$  (moviendo el punto libre).

2. Segunda familia de problemas: **Dados los puntos A y C construir todos los puntos B tales que la distancia  $AB=kBC$  ( $k$  es la razón dada que se propone) Se trabajaron tres problemas de esta familia: cuando  $k=2$ (doble), un segundo caso para cuando  $k=3$ (triple), y un tercer caso donde se le pide al sujeto una descripción general para cuando  $k$  puede tomar cualquier razón.**

- Herramientas del software que consideramos necesarias para la solución del problema: Circunferencia centro punto (constituida por un punto centro y un segundo punto sobre la circunferencia que es libre y permite cambiar su tamaño), circunferencia centro radio (constituido por un punto centro y una circunferencia que tiene un radio definido), calculadora, traza.

- Conocimientos necesarios para la solución del problema: La circunferencia es el conjunto de todos los puntos que equidistan a un punto llamado centro.

### **Estrategia que utiliza el pensamiento algebraico**

El sujeto construye una circunferencia variable  $c_1$  (circunferencia centro punto), una circunferencia  $c_2$  (centro radio), dos puntos B y B<sub>0</sub> que resultan de la intersección de las circunferencias  $c_1$  y  $c_2$ , y representa simbólicamente en la calculadora la relación de dependencia entre  $c_2$  y  $c_1$  por medio de la *expresión*  $c_2=kc_1$ . La obtención de todos los puntos solución del problema se da al activar la traza de los puntos B y B<sub>0</sub> y al variar la circunferencia  $c_1$  (moviendo el punto libre).

### **Ayuda por parte de los entrevistadores**

Las intervenciones de los entrevistadores son planificadas a priori y responden a las dificultades y/o ausencias que presentan los sujetos en el planteamiento de sus estrategias. Es por ello que las preguntas abiertas son susceptibles de cambio durante el transcurso de las entrevistas.

A continuación, se presentan las intervenciones de los entrevistadores que pueden ayudar a superar las posibles dificultades presentadas por los sujetos.

<b>Ausencia y/o dificultad del sujeto</b>	<b>Intervención de los entrevistadores</b>
- No concibe más de uno o dos casos.	Se propone el uso de una estrategia de experimentación que llamamos

	<p>“hilvanado”, la cual consiste en la creación de muchos puntos que cumplan una condición de forma aproximada.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- No tiene una estrategia de solución</li> <li>- No establece relaciones de dependencia a través de una expresión numérica de forma verbal o mediante el uso del software</li> </ul>	<p>Se nombra la propiedad (“La suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°”) y se proponen preguntas sobre las relaciones entre cantidades.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- No tiene en cuenta los objetos geométricos en las expresiones que establece en la calculadora</li> </ul>	<p>Se nombra el uso de etiquetas y su uso en expresiones</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- No trabaja con objetos variables</li> <li>- Trabaja casos con objetos fijos caso a caso.</li> </ul>	<p>Primero se centra la atención de los sujetos en la multiplicidad de casos individuales. Luego se plantea la posibilidad de organizar todos esos casos en una sola construcción, con lo cual se pretende que los sujetos después de organizar los casos de forma aislada logren organizarlos en una</p>



	sola construcción y puedan resolver el problema.
--	--

### 3.2 implementación de los problemas

La implementación de los problemas se realizó con 6 sujetos que en las producciones tienen por nombre sujeto A, B, D, F, G y H, para cada uno de estos sujetos se aplicaron dos familias de problemas de manera individual, cada familia de problemas se implementó en una sesión diferente. Las reuniones se agendaron de acuerdo a la disponibilidad de tiempo de los sujetos, cada una de las sesiones fue grabada y los videos se guardaron en las cuentas de usuarios y entrevistadores. Las grabaciones permitieron recolectar los abordajes de los sujetos mediante audios e imágenes.

En la implementación se observó que algunos sujetos requerían una mayor participación por parte de los entrevistadores, esto tuvo dos efectos en el abordaje de los problemas: 1) Los distintos comportamientos de los sujetos permitió separarlos en dos grupos; 2) Las intervenciones de los entrevistadores tuvieron un papel distinto para cada grupo de sujetos.

La implementación de los problemas se realizó en dos momentos: 1) los sujetos comparten pantalla en la videollamada y por medio de instrucciones de los entrevistadores se realiza una familiarización en el uso de las herramientas del software de geometría dinámica necesarias para la solución del problema; 2) luego se le solicita al sujeto escribir en un widget el enunciado del problema, se le da un espacio para resolver la situación, en caso de que el sujeto no tenga control sobre la situación, se le sugiere preguntas acerca de sus maneras de acción (véase ayuda por parte de los entrevistadores). Las intervenciones para ambas categorías de sujetos fueron desarrolladas bajo una línea de trabajo presentada en el siguiente diagrama de flujo. (véase figura 2)

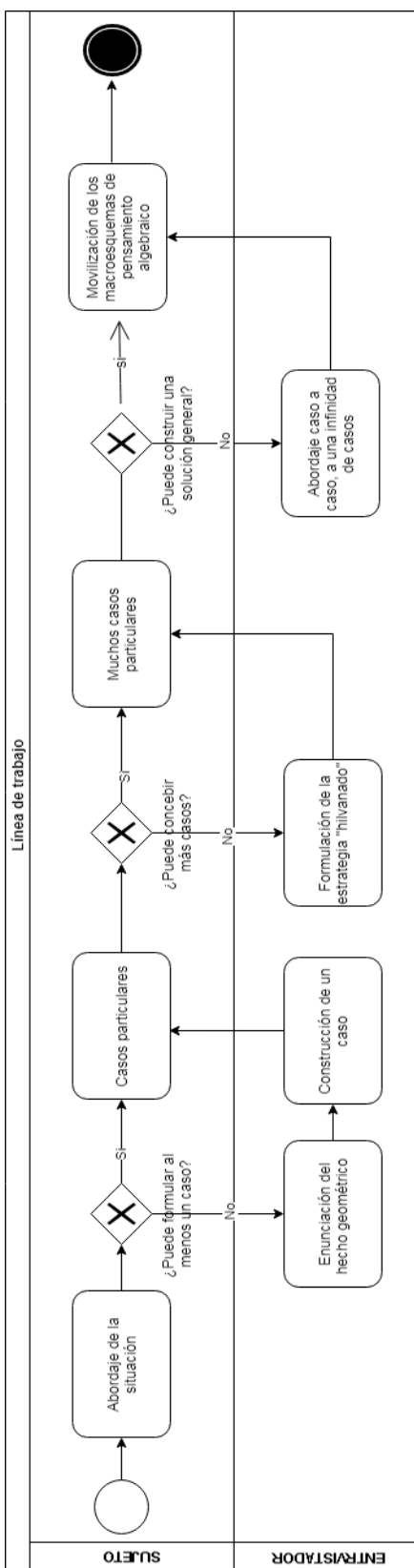


Figura 2. Línea de trabajo

### **3.3 recolección de la información y configuración de los datos.**

El registro de los datos se hizo a partir de transcripciones correspondientes a las 12 sesiones, destacando aspectos observables como las acciones y expresiones del sujeto (registradas tanto en descripciones escritas como en recortes de imágenes tomadas de la grabación). La información se encuentra sistematizada en tablas de manera que las intervenciones y participaciones numeradas. las iniciales E1 y E2 corresponden a intervenciones de los entrevistadores 1 y 2 respectivamente; por su parte las iniciales SA, SB, SD, SF, SG y SH corresponden a participaciones de los sujetos voluntarios de la investigación. En cada línea se escribió entre paréntesis (...) lo que hacen los sujetos, entre corchetes [...] lo que dicen los sujetos, símbolo numeral ## para palabras inentendibles de las grabaciones, y entre símbolos ++...++ las observaciones de los entrevistadores luego del proceso de revisar las transcripciones.

## Capítulo 4. Análisis

En el siguiente capítulo está compuesto por dos apartados, en un primer apartado se presentan los indicadores que permiten la clasificación de los sujetos, y en un segundo apartado se describe el análisis realizado a las producciones de los sujetos.

### 1. Indicadores observables

Como mencionamos en el capítulo de antecedentes, se ha estudiado muy poco sobre los procesos de pensamiento algebraico movilizados a través de la tecnología. A pesar de que nuestra ruta de partida es la conceptualización teórica que presentan Radford y Vergel, es insuficiente porque no se contempla el uso del software de geometría dinámica, elemento que cambia la forma de observar los comportamientos de los sujetos participantes de los experimentos.

Ante este conflicto, surge la necesidad de establecer unos indicadores de comportamiento que puedan ser observables y comunes entre los sujetos con el fin de poder discriminarlos en grupos. Estos indicadores se crean contemplando dos tipos: los que denominamos como “Indicadores basados en la teoría” e “indicadores emergentes luego de una revisión de las transcripciones”. Ambos tipos de indicadores se ubican en dos contextos que aunque son complementarios, requieren ser analizados de distinta forma, estos son: un contexto general, caracterizado por las formas de acción y comunicación de los sujetos que no impliquen necesariamente el uso del software de geometría dinámica, por lo que se focaliza la observación en aspectos como el uso del lenguaje natural y el uso de dibujos; y un contexto particular, específicamente focalizado en las formas de acción y comunicación presentes en el uso del software por parte de los sujetos, en este contexto se dedica especial atención al uso de las herramientas de DGPAd-Colombia para la elaboración de estrategias y

las descripciones que hace el sujeto de los resultados conseguidos; estos aspectos son observables en acciones dentro del software como construir, arrastrar, escribir expresiones numéricas, definir objetos geométricos a partir de su medida y hacer uso de la traza; y el uso del lenguaje natural para describir los procesos realizados.

A continuación, se describen en detalle los dos tipos de indicadores observables.

### **1.1 indicadores basados en la teoría.**

Este tipo de indicadores están constituidos por dos caras. Una cara teórica basada en los componentes de pensamiento algebraico presentados por Radford (2010) citado por Vergel (2015), y una cara observable basada en los comportamientos previstos de los sujetos. Como resultado se establecen doce indicadores, seis situados en el contexto general, y los seis restantes situados en el contexto específico del software.

A continuación, se describen en detalle los indicadores de este apartado.

<b>INDICADORES BASADOS EN LA TEORÍA</b>
<p data-bbox="203 1186 1377 1297"><b>MACROESQUEMAS DE ACCIÓN Y COMUNICACIÓN EN EL CONTEXTO GENERAL</b></p> <p data-bbox="203 1333 1377 1738"><b>Macroesquema “presencia de pensamiento algebraico”:</b> Los comportamientos se caracterizan por presentar aspectos de los componentes de pensamiento algebraico en una actividad matemática, donde el sujeto puede movilizar de forma espontánea los esquemas de acción y comunicación necesarios para resolver los distintos problemas de forma adecuada (recursos a los que acuden los sujetos para expresar la generalidad). Estos aspectos se recogen en los siguientes indicadores:</p>

**1. Presencia de la indeterminancia:** Las expresiones verbales o escritas del sujeto implican el reconocimiento de una cantidad o medida en la situación problema que no está determinada; es decir, puede tomar valores diferentes.

Ejemplos de esquemas de comunicación que indican la presencia de la indeterminancia, son aquellas frases en las que se usan palabras clave como: “siempre”, “cualesquiera números” “infinitas posibilidades” “todos”. Estas palabras se convierten en medios semióticos de objetivación, porque permiten a los sujetos referirse al carácter indeterminado de la generalidad.

**2. Presencia de la analiticidad:** Las expresiones verbales o escritas del sujeto implican una operación sobre dos cantidades, una cantidad indeterminada y una segunda que depende de esta, donde las medidas son tratadas no como meras medidas sino como constituyentes de algo más general.

Un ejemplo de esquemas de comunicación que indican la presencia de la analiticidad se presenta a continuación:

En la primera familia de problemas, una expresión verbal y escrita de los sujetos como: “...yo puedo decir que Alpha es igual 123 menos beta (el sujeto escribe la expresión  $\alpha = 123 - \beta$  en una nota), con tener a Beta tengo a Alpha...” implica una operación entre dos cantidades una indeterminada y una que depende de la indeterminada. Por su parte la expresión en una nota  $\alpha = 123 - \beta$  se convierte en medio semiótico para el sujeto ya que le permite referirse al carácter analítico de objetos indeterminados.

**3. Presencia de la designación simbólica de objetos indeterminados, con el fin de realizar operaciones con ellos:** El uso de símbolos alfanuméricos para representar una relación analítica entre cantidades indeterminadas implica la presencia de pensamiento

algebraico. Los nombres de dichas cantidades adquieren un rol de medio semiótico, ya que le permiten referirse a cantidades indeterminadas y operar con ellas.

Las algunas expresiones simbólicas de este tipo son, por ejemplo:

$$\alpha + \beta = 123; \alpha = 123 - \beta$$

donde beta representa una cantidad indeterminada y alfa representa una cantidad dependiente de la indeterminada a partir de una operación analítica, siendo estas a su vez medios semióticos de objetivación.

**Macrosquema “ausencia de pensamiento Algebraico”:** No es posible afirmar una ausencia total de pensamiento algebraico en los comportamientos de los sujetos, pues todos terminaron movilizando en algún grado los esquemas de acción y comunicación propios de este pensamiento. Sin embargo, es posible distinguir entre aquellos sujetos que movilizan esos esquemas de manera autónoma, y los sujetos que sólo movilizan los esquemas con ayuda de los entrevistadores. Consideramos que en estos sujetos es posible observar comportamientos que implican la ausencia del pensamiento algebraico de la siguiente manera:

1. **Ausencia de indeterminancia y analiticidad:** El sujeto opera las cantidades u objetos como casos específicos, no como variables. Aunque puede constatar la existencia de casos diferentes, los trabaja caso a caso y no llega a concebirlas como un conjunto de casos que comparten una misma relación de dependencia, y que, por ende, una de las cantidades puede tomar infinitos valores, es decir, adquiere sentido de indeterminancia.

La forma de identificar este indicador es por la ausencia de medios semióticos que indiquen indeterminancia expresada en palabras clave. Los esquemas de acción y comunicación contemplan únicamente el trabajo con cantidades determinadas. Un ejemplo de esto se puede observar en el abordaje de la primera familia de problemas, cuando algunos sujetos nombran pares de ángulos como parte de soluciones particulares.

## **2. Designación simbólica que no es propia de un pensamiento algebraico:**

Al no estar presentes los caracteres de indeterminancia y analiticidad en las expresiones simbólicas de los sujetos, no es posible hablar de una designación simbólica propia de un pensamiento algebraico.

## **MACROESQUEMAS DE ACCIÓN Y COMUNICACIÓN EN EL CONTEXTO DEL SOFTWARE**

Cuando el sujeto logra trasladar los esquemas de pensamiento algebraico al software es porque asimiló las herramientas y a través de estas puede movilizar los esquemas de acción y comunicación para resolver el problema; es decir, las herramientas del software pasan a ser medios semióticos movilizadores por los sujetos. Los macroesquemas de este tipo se describen a continuación.

### **Macroesquema “presencia de pensamiento algebraico en DGPAd-Colombia”:**

Pensamiento algebraico en el contexto del SGD es la posibilidad de establecer una relación de dependencia entre dos objetos (uno variable y otro que depende de ese variable) por medio de una *expresión* numérica representada simbólicamente en la calculadora. La obtención de los puntos solución de cada uno de los problemas se da mediante el uso de la traza.



Estos aspectos se recogen en los siguientes indicadores:

**1. Presencia de la indeterminancia en el contexto del software:** El sujeto asocia un objeto variable a una cantidad indeterminada y designa ese objeto por medio de su etiqueta, comprendiendo que esa etiqueta representa el conjunto de medidas que puede tomar el objeto.

Un ejemplo de esquemas de acción y comunicación que indican la presencia de la indeterminancia en el software es mediante el uso de expresiones como:

- De forma simbólica, expresiones en la calculadora tales como  $E1=A1$  donde  $A1$  es un ángulo variable. En este caso  $E1$  adquiere rol de medio semiótico ya que el sujeto lo usa para referirse al carácter indeterminado del objeto variable.

**2. Presencia de la analiticidad en el contexto del software:** la analiticidad en términos del carácter operatorio de cantidades indeterminadas, se visualiza en esquemas de acción a través del software, en dos momentos estrechamente relacionados.

- a. Hace uso de la calculadora para representar la relación de dependencia a través de una *expresión* numérica. Esta *expresión* numérica tiene las siguientes características. (como ejemplo se muestra expresiones usadas para la primera familia de problemas):

- i. El objeto variable está representado por su etiqueta o una *expresión* equivalente a la cantidad indeterminada que representa el objeto variable (por ejemplo,  $E1=A1$  siendo  $A1$  el ángulo variable)

- ii. En la *expresión* numérica están representados los dos objetos necesarios para la solución del problema: El objeto variable y el objeto que depende del objeto variable ( $A2$  Y  $A1$  siendo  $A2$  el ángulo fijo que depende del ángulo variable)

iii. la *expresión* en la calculadora representa una operación sobre el objeto variable, cuyo resultado será el objeto dependiente  $A_2 = 180 - k^\circ - A_1$  donde  $k^\circ$  es un ángulo dado

b. El sujeto varía voluntariamente el objeto variable mediante el arrastre directo del punto libre para apreciar las soluciones del problema a través de la traza, observando que todos los puntos solución del problema quedan representados en la trayectoria dejada por las posiciones que toma la intersección entre ambos objetos a través del movimiento (objeto variable y objeto que depende del objeto variable).

**3. Presencia de la designación simbólica en el contexto del software:** Las expresiones numéricas utilizadas en la calculadora representan el trabajo de los objetos de forma analítica a través de una relación de dependencia en la que interviene una cantidad indeterminada.

- De forma simbólica designaciones tales como: ( $A_2 = 180 - k^\circ - A_1$  donde  $A_2$  es un ángulo fijo,  $A_1$  es un ángulo variable y  $k^\circ$  es un ángulo dado)

### **Macroesquema “Debilidad de Pensamiento algebraico en DGPAd-Colombia”:**

Dificultades que presentan los sujetos para movilizar esquemas que muestren la presencia de pensamiento algebraico en el contexto del SGD, referido a la dificultad de trabajar con objetos variables, y no observar una solución general, porque no es clara la relación de dependencia entre el objeto variable (cantidad indeterminada) y el objeto que depende de esa variación, quedándose en soluciones fijas.

**1. Ausencia de la indeterminancia y analiticidad en el contexto del software:** Los esquemas de acción del sujeto se basan en utilizar la calculadora para operar

cantidades fijas y encontrar algunas soluciones del problema. Trabaja sobre cantidades determinadas, por lo que no hay una solución general, sino una colección de soluciones particulares.

- En este apartado se observan dos tipos de comportamientos.

1) Los sujetos trabajan casos particulares a partir de objetos con medidas fijas, por lo que las expresiones en la calculadora no contemplan cantidades indeterminadas (por ejemplo, en la primera familia de problemas, los sujetos establecen expresiones como  $A_2 = 180 - k - 70$  donde 70 es la medida del ángulo fijo  $A_1$ )

2) Cuando los entrevistadores le sugieren al sujeto el uso del objeto variable, este opera con su medida por lo que al arrastrar se desarma la construcción (Por ejemplo, en la primera familia de problemas, luego de haberle sugerido el ángulo variable  $A_1$  de medida (provisional)  $70^\circ$ , el sujeto construye el ángulo fijo  $A_2$  y en la calculadora establece la expresión “ $A_2 = 123 - 70$ ”. Al arrastrar los distintos objetos de la construcción, la condición de que el ángulo  $A_3$  sea igual a  $57^\circ$  dejará de cumplirse)

## **2. Ausencia de la designación simbólica en el contexto del software:**

Al no estar presentes los caracteres de indeterminancia y analiticidad en las expresiones simbólicas de los sujetos en el software, no es posible hablar de una designación simbólica propia de un pensamiento algebraico.

### **1.2 indicadores emergentes luego de una revisión de las transcripciones**

Luego de revisar las producciones de los sujetos registradas en las transcripciones, identificamos comportamientos que tenían un papel importante en el desarrollo de las familias de problemas, pero estos no habían sido previstos en la creación de los indicadores. Estos nuevos

comportamientos que pueden categorizarse tienen como foco el manejo de los objetos variables, los movimientos que pueden hacer los sujetos en el contexto del software, y el trabajo con las cantidades variables. Para interpretar estas acciones nos basamos en la propuesta teórica presentada por Rossana Falcade, de la cual destacamos conceptos como Movimiento directo e indirecto en el software y su relación con la covariación presente en expresiones alfanuméricas, y las concepciones sobre la trayectoria (global y puntual) vista en el campo de la geometría.

### **Movimiento directo e indirecto en el software y su relación con la covariación presente en expresiones alfanuméricas**

La acción de arrastrar implica que el movimiento sea una de las principales características del software de geometría dinámica. Al respecto, Falcade (2007) menciona que al hacer uso del mouse se pueden arrastrar diferentes objetos en la pantalla, generando dos posibles tipos de movimientos: el movimiento directo y el movimiento indirecto.

- **Movimiento directo:** Este tipo de movimiento implica que al posicionar el mouse sobre un objeto y se arrastre, la posición de este objeto varíe en la pantalla; por ejemplo, al arrastrar un punto se consigue cambiar la posición de éste en toda la pantalla. Si el punto está sobre un elemento geométrico (un punto sobre una circunferencia o un segmento) la variación de este se restringe; por ejemplo, si un punto está sobre una circunferencia, el movimiento se restringe a la línea que forma la circunferencia, no se puede arrastrar más allá de ese dominio.
- **Movimiento indirecto:** Este tipo de movimiento ocurre cuando se realiza una construcción, en este caso basta con arrastrar los puntos básicos de la construcción, para mover el objeto que conserva las propiedades geométricas definidas. Por ejemplo, en la primera familia de problemas, el punto C no puede moverse directamente porque es producto de la construcción, por ello se mueve directamente el punto libre, permitiendo un movimiento indirecto del punto C

que conserva las relaciones de dependencia establecidas en la calculadora.

En lo que respecta a la relación de este tipo de movimientos que permite el software, con la covariación presente en expresiones alfanuméricas, Falcade (2004) señala: Los puntos que permiten moverse directamente corresponden a las variables independientes, mientras que los puntos que sólo se pueden mover indirectamente corresponden a las variables dependientes. En efecto, en la resolución de las familias de problemas, el punto libre representa la variación voluntaria de una cantidad indeterminada (por ejemplo, P1), mientras que los puntos de intersección representan la relación de dependencia que resulta ser la medida de un objeto fijo dependiente (por ejemplo, la relación de dependencia expresada en la medida de A2). Es por ello que resulta importante que los sujetos al abordar los problemas, identifiquen estos tipos de movimientos con el fin de ir construyendo la idea de variable dependiente e independiente permitiendo obtener los puntos solución mediante el uso de la traza.

### **Concepciones de la trayectoria.**

El uso de la traza representa los puntos solución de los problemas mediante una trayectoria. Al respecto, Falcade, et al. (2005) señala que existen dos concepciones a la hora de pensar en una trayectoria: 1) Concepción puntual: Como una secuencia de posiciones que toma un punto en movimiento; y 2) Concepción global: Como un objeto percibido globalmente.

Estas concepciones se pueden observar en el siguiente ejemplo: Cuando vemos una circunferencia podemos referirnos a esta como un solo objeto, lo que implica una forma de pensar la trayectoria desde un punto de vista global (un solo objeto); en cambio, cuando nos referimos a la circunferencia como el conjunto de puntos que están a igual distancia de un punto llamado centro, implica una forma de pensar la trayectoria desde un punto de vista puntual (un conjunto de puntos). En el desarrollo de las familias de problemas, la traza tiene ambas

concepciones de trayectoria, una concepción puntual cuando por medio del movimiento directo del punto libre se genera un movimiento indirecto del punto de intersección, que al activar la traza nos va generando todos los puntos de solución; y por otro lado la traza como dibujo, implica referirse a los puntos solución como un lugar geométrico (arco de circunferencia, por ejemplo). Ambos tipos de trayectoria son importantes y para efectos de esta investigación es necesario que estén presentes en ese orden en las soluciones de los sujetos, porque la traza es la representación gráfica de la dependencia numérica entre los objetos geométricos.

A continuación, se describen en detalle los indicadores de este apartado.

### **INDICADORES EMERGENTES LUEGO DE UNA REVISIÓN DE LAS TRANSCRIPCIONES (usar palabras de la teoría en la tabla)**

Cuando los sujetos abordan las distintas familias de problemas, es inevitable que se enfrenten a variaciones en el uso de objetos dinámicos en el contexto del software. La forma en que trabajan estas variaciones es importante para que puedan o no resolver los problemas.

A partir de la revisión de las transcripciones se encontraron comportamientos que diferencian a ambos tipos de sujetos, unos sujetos identifican únicamente lo que llamamos como “una variación pertinente” mientras que el otro grupo de sujetos identifican “variaciones que no son pertinentes”. Estos aspectos se recogen en los siguientes indicadores:

#### **MACROESQUEMAS DE VARIACIÓN PERTINENTE EN EL CONTEXTO DEL SOFTWARE**

**Necesidad de un punto libre que es parte del objeto variable**

El punto libre en la construcción de objetos variables permite cambiar a voluntad el tamaño del objeto mediante el arrastre. Los sujetos de pensamiento algebraico, al construir el objeto variable, tienen la necesidad de nombrar al punto como un objeto nuevo no presente en el enunciado del problema, esto lo hacen mediante etiquetas como “X”, “P1”, “P”.

### **Variación que tiene que ver con la dependencia numérica**

Para los sujetos de pensamiento algebraico no todas las variaciones tienen igual importancia, la variación presente en los problemas está unida a una dependencia. Algunas características de este indicador tienen que ver con:

- El sujeto trabaja con los objetos dados en el enunciado del problema como si estos fueran únicos, por lo que no se contempla variar sus posiciones para la búsqueda de puntos solución del problema.
- El único objeto que se permite mover directamente es el punto libre, ya que permite ver las distintas posiciones que toman los puntos de intersección que cumplen la relación de dependencia (entre objeto variable y objeto que depende del objeto variable)

### **MACROESQUEMAS DE VARIACIÓN QUE NO ES PERTINENTE EN EL CONTEXTO DEL SOFTWARE**

#### **Omisión del punto libre del objeto variable**

El punto libre en la construcción de objetos variables no es algo importante para los sujetos de pensamiento algebraico, esto se debe a que es asociado a concepciones erradas como: 1) No es un objeto posible ya que no se menciona en el enunciado y por tanto no se considera como parte del problema; 2) es confundido con los posibles puntos de intersección que cumplen la relación de dependencia; 3) no se observa como un punto parte

de una colección infinita que cumple una misma propiedad y que al ser libre le permite modificar la medida que poseen esos infinitos puntos (por ejemplo, en una circunferencia centro-punto, la distancia del centro a los infinitos puntos que están sobre la circunferencia puede cambiarse mediante el arrastre directo del punto libre). Algunos esquemas de acción y comunicación vinculados con este indicador son:

- El sujeto oculta el punto libre de la construcción
- El sujeto trata de mover el punto libre de forma aproximada a lo que se piensa puede ser un punto de intersección que cumple la relación de dependencia
- El sujeto borra el objeto variable y prefiere trabajar con objetos fijos al no saber usar el punto libre

#### **Variación que tiene que ver con un cambio de posición**

Para los sujetos de pensamiento no algebraico todas las variaciones tienen igual importancia, por lo que no es claro qué objetos arrastrar directamente y qué objetos no.

Algunos esquemas de acción y comunicación vinculados con este indicador son:

- Para el sujeto es lícito mover cualquier objeto de la construcción: El sujeto mueve los objetos presentes en el problema ignorando que, por ejemplo, un punto A en una posición específica es diferente a otro punto A con una posición diferente, a pesar de que su nombre sea el mismo, son puntos distintos en el plano por poseer coordenadas distintas. Los objetos dados en el problema no deben cambiar porque se estarían cambiando las condiciones del problema.



## 2. Análisis de los comportamientos de los sujetos

Hay similitudes en las acciones que están presentes en las producciones de los sujetos, esto permite clasificar a los sujetos en dos grupos, cada uno de ellos con esquemas comunes de acción y comunicación, estos son “Sujetos de pensamiento algebraico”, y “Sujetos de no pensamiento algebraico”. A continuación, se presenta el análisis de cada grupo de sujetos para el abordaje de cada familia de problemas.

### 2.1 análisis primera familia de problemas.

Primera familia de problemas “Dados los puntos A y B construir todos los puntos C tales que el ángulo ACB es igual  $k^\circ$ ”. Se trabajaron tres problemas de esta familia: cuando el ángulo ACB= $57^\circ$ , cuando el ángulo ACB= $25^\circ$  y finalmente se solicitó expresar la solución para un caso general de  $k^\circ$ .

#### 2.1.1 categoría sujetos pensamiento algebraico.

En el proceso de solución del problema, identificamos tres fases que describimos a continuación.

- Fase 1: construcción de un caso particular

Esta fase se caracteriza por que los sujetos:

- 1) piensan en un triángulo y es indeterminado
- 2) piensan en las relaciones de los ángulos de ese triángulo
- 3) recuerdan la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ”
- 4) consideran un caso particular en el que se puede aplicar la propiedad para

calcular

- Fase 2: Pasar de pensar en algunos casos a infinitos casos con ayuda del hilvanado

- Fase 3: Movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de pensamiento algebraico

1) Presencia de la indeterminancia y presencia de la indeterminancia en el software

2) Presencia de la analiticidad y presencia de la analiticidad en el software

3) Presencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

- **Otros problemas de la misma familia 2 y 3**

*fase 1: construcción de un caso particular.*

En esta fase los sujetos que pertenecen a esta categoría son los llamados “A”, “D” y “G”. Estos recuerdan que de la suma de ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$  ya que se preguntan por las relaciones entre los ángulos de un triángulo, esto sugiere que tienen la capacidad de pensar en objetos que aún no han construido (en este caso los ángulos de un triángulo indeterminado) y concebir relaciones entre esos objetos.

Un esquema de comunicación común en estos sujetos es la mención de la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ”. Aspecto que les permite usar esta relación para construir soluciones particulares (triángulo isósceles o triángulo rectángulo), a través del uso de esquemas de acción como construir, arrastrar y medir. Un esquema de acción presente en los sujetos es la mención de la relación  $180-57$  en una *expresión* en la calculadora, ya que dicho comportamiento se repite en las siguientes fases a la hora de construir la solución del problema,

adicionalmente la *expresión* se considera un medio semiótico porque para los sujetos deja de ser una operación y adquiere significado como la suma de los ángulos restantes.

La razón de que estos esquemas sean necesarios únicamente para el abordaje de la primera familia de problemas y no se puedan utilizar para las demás, implica que no correspondan a los macroesquemas

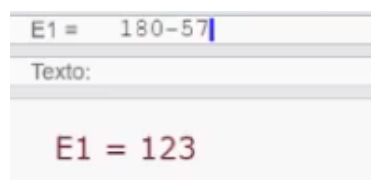
expuestos de pensamiento algebraico, aun así, consideramos que es un dato interesante presente en los tres sujetos clasificados como de pensamiento algebraico y ausente en los otros sujetos. Por otra parte, como presentaremos más adelante, los sujetos utilizan la propiedad “la suma de los ángulos internos es  $180^\circ$ ” para establecer relaciones entre los ángulos CAB y ABC de un triángulo ABC indeterminado.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas realizadas a los sujetos de esta categoría, en los que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y de comunicación que corresponden a la identificación de la propiedad de los ángulos “su suma es  $180^\circ$  en un triángulo” y su utilización para establecer relaciones entre ellos; y en color rosado oscuro los medios semióticos que representan la suma de los ángulos ABC y BAC.

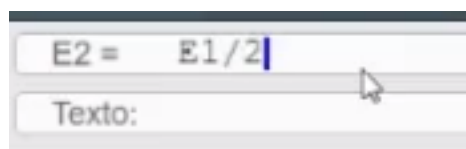
#### SUJETO A

**#66 SA:** [entonces para construir ese ángulo y que sea igual a  $57^\circ$ , tal vez me podría valer como por los ángulos de un..., pues porque todo triángulo la suma de sus ángulos internos, la suma es  $180^\circ$ , entonces estaba pensando que tal vez yo puedo hacer un triángulo isósceles cuyo dos de sus ángulos midan lo mismo obviamente, pero entonces que la suma de ellos dos más lo que falte, que debería ser  $57$  dé  $180$ , ¿si me hago entender o lo realizo?]

**#69 SA:** [entonces yo estaba pensando que podía decir que 180-57 da 123 ¿sí?] (selecciona en su pantalla la herramienta de calculadora, Crea la expresión  $E1=180-57$  obteniendo en el tablero  $E1=123$ . Luego crea una segunda expresión  $E1/2$ ) (véase figuras 3 y 4)

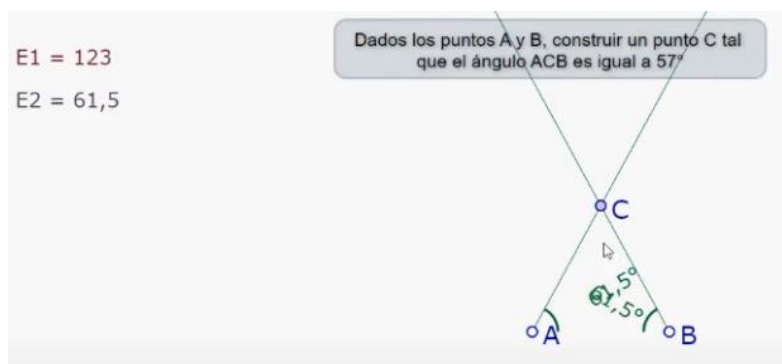


*Figura 3 Relación entre los ángulos sujeto A*



*Figura 4 Expresión de un caso (triángulo isósceles) Sujeto A*

**# 72 SA:** (El sujeto construye dos ángulos fijos CAB y ABC de medida E2) (véase figura 5)



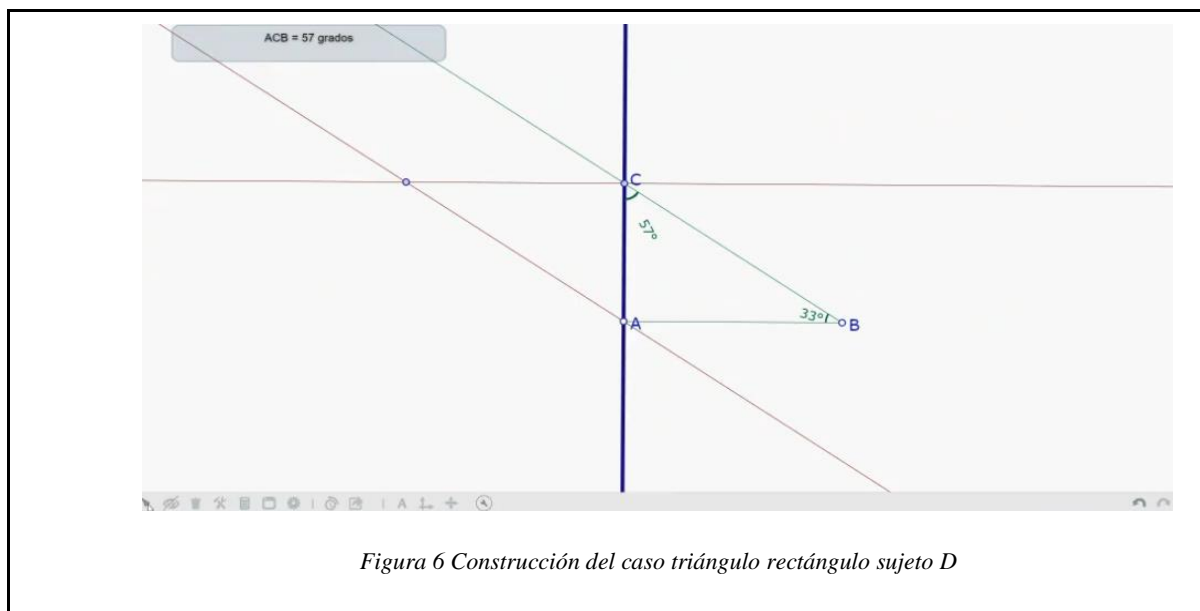
*Figura 5 Construcción triángulo isósceles sujeto A*

## SUJETO D

**#126 SD:** [Ah, es que se supone la suma interna de los ángulos de un triángulo en geometría plana euclídea tiene que sumar 180 grados, esta recta de acá es una recta perpendicular a AB] (el sujeto se refiere a la recta r3 y la señala mientras habla), [o sea, esta recta de aquí la voy a cambiar un momentico el color, bueno le puedo cambiar, no, la opacidad]

**#128 SD:** [Esa, la que está como en, voy a ponerla en azul, la recta AC es perpendicular a AB ¿cierto?, bueno, entonces todo es una recta ¿no?, entonces construí una recta perpendicular al segmento AB entonces con eso se garantiza un ángulo recto] (el sujeto va señalando las partes de la construcción mientras va hablando), [ahora como necesito construir un ángulo, bueno, encontrar un punto sobre la recta perpendicular que cree de tal manera que se genere un ángulo de 57 grados con A, C y B] (el sujeto al recorrer estos puntos señala el posible ángulo formado ACB), [entonces lo que hago es darle de amplitud al ángulo AB 33 grados, porque 33 más 57 pues me da 90, que es un ángulo recto] (el sujeto habla de que el ángulo CBA y ACB le daría 90 grados en su suma, ya que sabiendo que el ángulo BAC es de 90 grados, el ángulo CBA tendría que ser de 33 grados tal que  $CBA(33^\circ) + BAC(90^\circ) + ACB(57^\circ) = 180^\circ$  pues ahí tengo los dos ángulos rectos, 180 grados.) (véase figura 6)

**#129 SD:**



*Figura 6 Construcción del caso triángulo rectángulo sujeto D*

## SUJETO G

#45 SG [el punto es que tendría es que me tendrían que conformar un triángulo, los puntos ACB] (el sujeto señala los puntos como si estuviera dibujando un triángulo) [y ###, entonces como tal si ya tenemos el de  $57^\circ$ , sabemos que los dos tienen que dar, la suma de los tres ángulos me debería dar 180 y los otros dos me debería dar  $180-57$ ] (el sujeto hace referencia a los ángulos CBA y CAB)

#47 SG (el sujeto construye ángulo fijo que pasa por A de vértice en B y amplitud  $57^\circ$ )

#49 SG (el sujeto oculta los elementos de la construcción excepto segmento AB y ángulo fijo, luego activa calculadora en A1 y modifica su medida  $A1 = (180 - 57) / 2$ , obteniendo en la pantalla ángulo de amplitud 61.5, luego crea punto (P1 punto sin etiqueta) sobre la semirrecta y construye ángulo variable que pasa por A vértice en P1 y B, luego elimina ángulo variable) (véase figura 7)

$$A1 = (180 - 57) / 2$$

Figura 7 Relación entre los ángulos sujeto G

**#50 SG:** (el sujeto crea ángulo fijo que pasa por B de vértice en A y amplitud  $63^\circ$ , luego hace uso de la calculadora y modifica su medida  $A5=61.5$ , marca punto de intersección entre ambas semirrectas de A1 y A5) (véase figura 8)

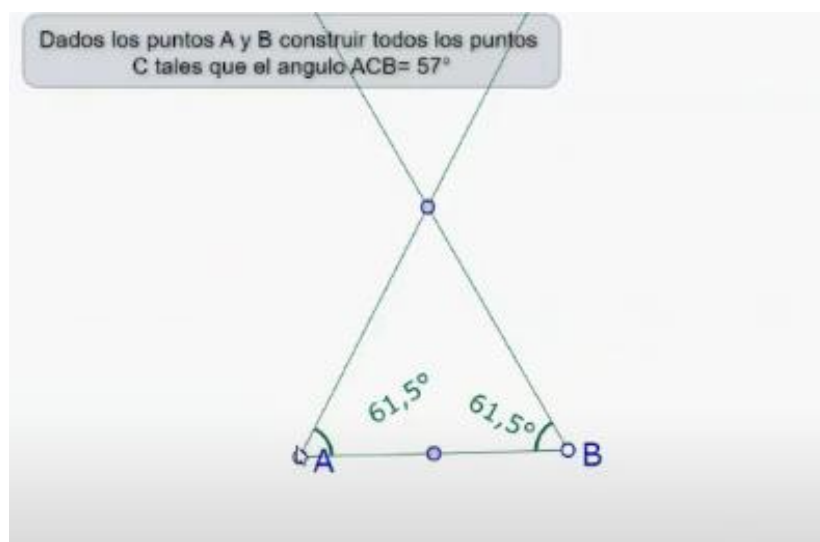


Figura 8 Construcción de caso triángulo isósceles sujeto G

*fase 2: pasar de pensar en algunos casos a infinitos casos con ayuda del hilvanado.*

Los sujetos en la anterior fase presentaron comportamientos que indican que la construcción de puntos C son producto de construcciones fijas al concebir relaciones entre ángulos, pero a pesar de que las relaciones son pensadas en forma general, los casos presentados por los sujetos no siguen esta línea por lo que se puede observar un “bloqueo” en la búsqueda de una solución general. Es aquí donde el hilvanado aparece como una operación experimental que le permite al sujeto pasar de pensar en uno o dos casos a pensar en muchos casos. Es una

herramienta visual de experimentación con el software que confronta al sujeto con la existencia de múltiples soluciones.

Por otra parte, como presentaremos más adelante, luego de la intervención de los entrevistadores para que consideraran la existencia de muchos otros casos, los sujetos utilizan la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, para establecer relaciones generales entre los ángulos CAB y ABC.

El hilvanado fue propuesto por los entrevistadores para los sujetos A y D. Este proceso permitió que los sujetos pasaran de la concepción de casos de forma limitada discontinua a la concepción de casos de forma ilimitada continua. Aunque esta estrategia de experimentación común no corresponde a ninguno de los indicadores expuestos de pensamiento algebraico, consideramos que es un dato interesante importante ya que permite plantear la hipótesis de que el hilvanado puede ser un puente entre un razonamiento no indeterminado a un razonamiento indeterminado, en el contexto del software aplicado a este tipo de problemas.

Para el caso del sujeto G, el hilvanado fue su primer acercamiento a la solución del problema, y fue usado para visualizar qué forma tiene la solución de los puntos (Esto se puede apreciar cuando el sujeto menciona que los puntos forman un arco de circunferencia).

Debido a que el sujeto no pensó en un primer momento en la relación de los ángulos, se trabajó este aspecto como se pudo observar en la descripción del sujeto en la fase 1. Luego de esto el sujeto pudo pasar a la fase 3 de solución.

El papel del hilvanado pensado para este problema no es la observación de la figura que forman los puntos, sino la constatación de la existencia de una infinidad de soluciones, que pueden considerarse como un solo objeto variable. La obtención de ese objeto variable requiere



identificar una relación numérica de los ángulos de la base unida a la concepción de infinitos casos.

Frases como -sí, ahora que lo veo sí-, -un triángulo cualquiera sí da incluso infinitos-, - inicialmente trabajé con un hilvanado para ver cómo más o menos es la propiedad que se cumple para llegar a todos los puntos que son de  $57^\circ$ -, indican el efecto que tiene la experimentación del hilvanado en el razonamiento de los sujetos.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas realizadas a los sujetos de esta categoría, en los que resaltamos en color azul las expresiones de los sujetos propias de un razonamiento que surge como producto de la experimentación con el hilvanado.

#### SUJETO A

**#88 E2:** Vamos a plantear lo mismo, vas a colocar el punto A, el punto B, vas a colocar nuevamente ángulo con el punto y vas a comenzar a mover el punto, sólo desde punto A, punto B y vamos a comenzar a mirar si encuentras esos puntos C que cumplan esa condición. (se plantea el uso de hilvanado)

**#91 SA:** [ya] (El sujeto crea el ángulo con el punto libre) [entonces tengo que moverlo hasta que me de 57 ¿sí?]

**#92 E1:** Si

**#93 SA:** [pues por acá me está dando 57] (El sujeto mueve el punto encontrando un ángulo de  $57^\circ$ )

**#94 SA:** [ listo, uno de  $57^\circ$ ]

**#95 E2:** listo, creemos otro ángulo y encontremos otro

**#98 SA:** [listo] (El sujeto crea un ángulo con el nuevo punto creado y mueve el punto encontrando un ángulo de  $57^\circ$ ) (*véase figura 9*)

**#99 E2:** ¿crees que hay más puntos?

**#100 SA:** [-sí, ahora que lo veo sí]

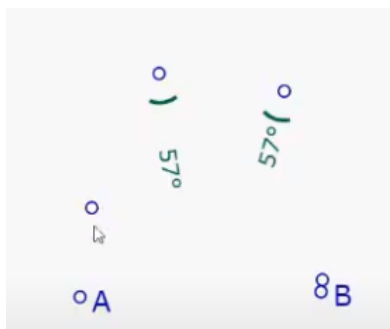


Figura 9 Hilvanado sujeto A

#### SUJETO D

**#142 E1:** Si quiere cree un punto cualquiera ahí donde está

**#143 SD:** .... (el sujeto construye un punto P3 y mide el ángulo AP3B con la herramienta ángulo, luego lo mueve buscando encontrar otro punto C de forma aproximada, que cumpla la condición  $ACB=57^\circ$ , y con la misma estrategia construye el punto P4) (véase figura 10)

**#144 SD:**

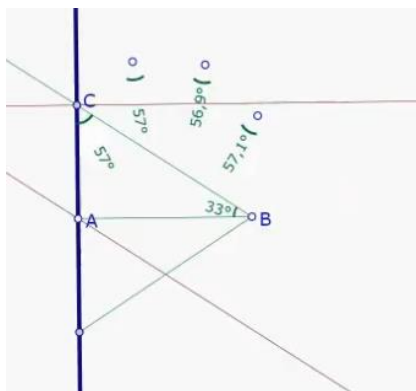


Figura 10 Hilvanado sujeto D

**#148 E2:** Por ejemplo, ahí ya te disté cuenta que existe más de dos casos que habías nombrado ¿cierto?

**#149 SD:** [Eh, si, digamos para un triángulo rectángulo, me acabo de dar cuenta de que existen 4 puntos] (el sujeto mueve el mouse por donde cree pueden estar los otros dos puntos adicionales para triángulos rectángulos)

**#150 E2:** Listo

**#151 SD:** [Solamente un triángulo rectángulo, un triángulo cualquiera si da incluso infinitos...]

#### SUJETO G

**#29 SG:** (el sujeto crea punto A y B, crea segmento AB y punto medio de AB, luego crea varios puntos alrededor del segmento AB y tomando como vértice a cada uno de estos puntos crea distintos ángulos variables y los arrastra para obtener ángulos aproximados de  $57^\circ$ ) (Uso del hilvanado por parte del sujeto) (*véase figura 11*)

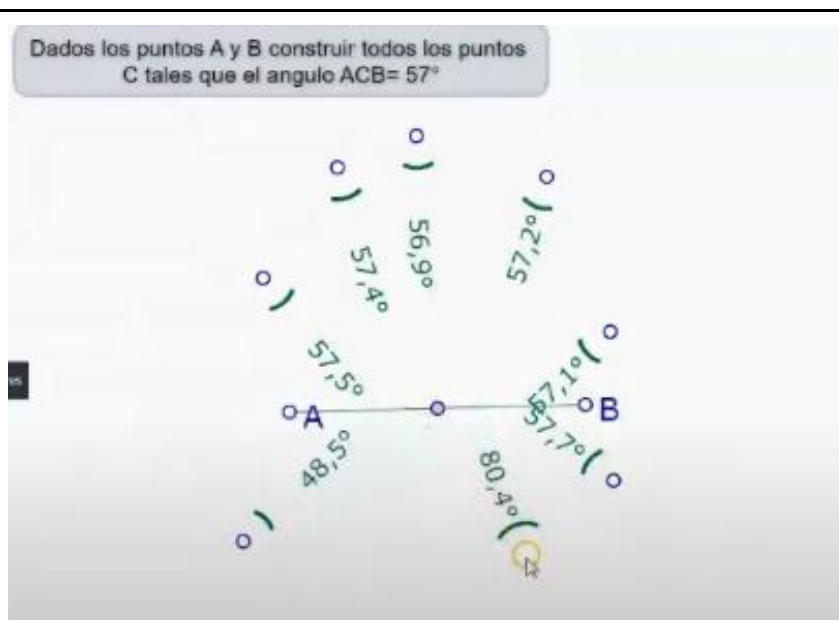


Figura 11 Hilvanado sujeto G

**#34 E2:** Hasta el momento ¿qué has pensado?

**#35 SG:** [inicialmente trabajé con un hilvanado para ver cómo más o menos es **la propiedad que se cumple para llegar a todos los puntos que son de 57° y ahí encontré que el arco mayor que se formaría** sería el de 57° y el de abajo sería el complemento si hiciera como un círculo, pero no he podido definirlo, el arco que cumple que cualquiera de los puntos que se fijen por aquí]

*fase 3: movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema.*

En esta fase los sujetos logran pensar en los infinitos casos como “una sola cosa que varía”, y logran expresar esas relaciones variables en la generalidad y resuelven el problema. Los comportamientos y expresiones de los sujetos corresponden a la movilización de los macroesquemas de pensamiento algebraico.

En los esquemas de comunicación como “este ángulo y este ángulo siempre me van a dar 123” donde el sujeto establece la condición de los ángulos CAB y BAC, las palabras clave “siempre”, “todos”, “infinitos” son usadas por los sujetos como medios semióticos de objetivación para representar el carácter indeterminado de las medidas que poseen los objetos. Otras formas de esquemas de comunicación son expresiones escritas mediante la herramienta widget.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de comunicación que presenta el sujeto, y en color rosado oscuro las palabras clave como medios semióticos que corresponden a la identificación de la cantidad indeterminada.

#### SUJETO A

**#109 SA:** [para encontrar todos los puntos, pues yo utilizando la misma lógica que acá] (El sujeto abre la pestaña donde realizó el abordaje basado en triángulo isósceles ) [y yo lo que haría es cómo crear estos ángulos](El sujeto señala los ángulos A1 y A2 :) [y variarlos siempre y cuando la suma entre este] (El sujeto señala el ángulo A1) [y este] (El sujeto señala el ángulo A2) [sea  $123^\circ$  ¿sí?, y entonces sin importar que la intersección entre ellos] (el sujeto señala punto de intersección entre la semirrecta con origen en A, y la semirrecta con origen en B) [que sería el punto C siempre va medir  $57^\circ$  y así podría encontrar todos los puntos. ¿si me hice entender?]

**#110 E2:** Lo construyes por favor

**#111 SA:** [pero no sé cómo poner estos ángulos] (El sujeto señala los ángulos A1 y A2) [mida 123 así siempre]

**#112 E2:** Nombraste la palabra que varíen

**#113 SA:** [si, que la suma entre esos dos ángulos, o sea que el ángulo A y ángulo B

varíen siempre y cuando la suma del ángulo CAB y ABC, esos dos ángulos den  $123^\circ$  ¿sí?]

**#116 SA:** [no sé si pueda establecer como una condición que el ángulo A más el ángulo B siempre tiene que ser  $123^\circ$  ¿si se puede hacer eso?]

(El sujeto crea un widget con la condición que estableció) (véase figura 12)

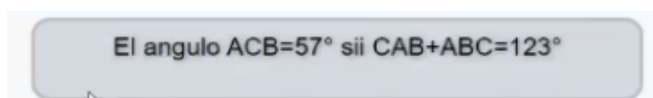


Figura 12 Relación de los ángulos escrita por el sujeto A en un widget

**#135 E2:** Cuando hablas de variación ¿qué noción de variación tienes?

**#136 SA:** [Cuando digo variación me refiero como a cambio ¿sí? cuando digo que la suma de estos dos ángulos va ser igual a  $123^\circ$  es porque tanto este ángulo] (El sujeto señala el ángulo CAB) [como este ángulo] (El sujeto señala el ángulo ABC) [van a estar en cambio, van a cambiar ¿sí?, van a ser cualesquiera números siempre y cuando se respete que la suma de estos dos] (El sujeto señala los ángulos A1 y A2) [sea igual a  $123^\circ$ , a eso me refería].

**#138 SA:** [variación yo lo definiría con lo que he concebido como una cosa que puede tomar cualquier valor, bueno siempre lo tomo como algo que siempre va tomar cualquier valor numérico]

## SUJETO D

**#150 SD:** [Solamente un triángulo rectángulo, un triángulo cualquiera si da incluso infinitos]

**#198 SD:** [Si claro, acá en este caso este ángulo, si esto es 57.1 tiene más números allá sino solamente ceros, solamente 57,1, entonces este ángulo de acá tendría que ser 32,9]

y este de acá es lo que le faltaría, ah no, este ángulo de acá es más chiquito] (el sujeto se refiere al ángulo ABP7) [que pena, si o sea, este ángulo más este ángulo y este ángulo de acá tienen que sumar los tres SIEMPRE 180 grados] (la palabra siempre la dice más fuerte que las demás palabras que pronuncia, y los ángulos que se refiere el sujeto son AP7B, ABP7 y BAP7)

Estas formas de indeterminancia expresadas en el lenguaje verbal son puestas en funcionamiento en el software cuando los sujetos utilizan expresiones en la calculadora como  $E1 = A1$ ,  $Be = A1$  para referirse al ángulo variable como una sola cosa que varía. Las expresiones en la calculadora  $E1 = A1$  y  $Be = A1$  se convierten en medios semióticos de objetivación que les sirven a los sujetos para referirse a la cantidad indeterminada.

El esquema de acción corresponde a la construcción de un ángulo variable y su representación en la calculadora mediante la *expresión*  $E1 = A1$  refleja el carácter indeterminado de la medida del ángulo.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción que presentan los sujetos, y en color rosado oscuro los medios semióticos que corresponden a la identificación de la cantidad indeterminada en el software.

#### SUJETO A

**#201 SA:** [Sí, listo] (el sujeto crea una nueva pestaña de DGPad-Colombia,)  
 [Duplicar] (crea punto A, punto B, Punto C, ángulo ABC con herramienta ángulo, en la  
 calculadora escribe la expresión  $E1=A1$ ) (véase figura 13)

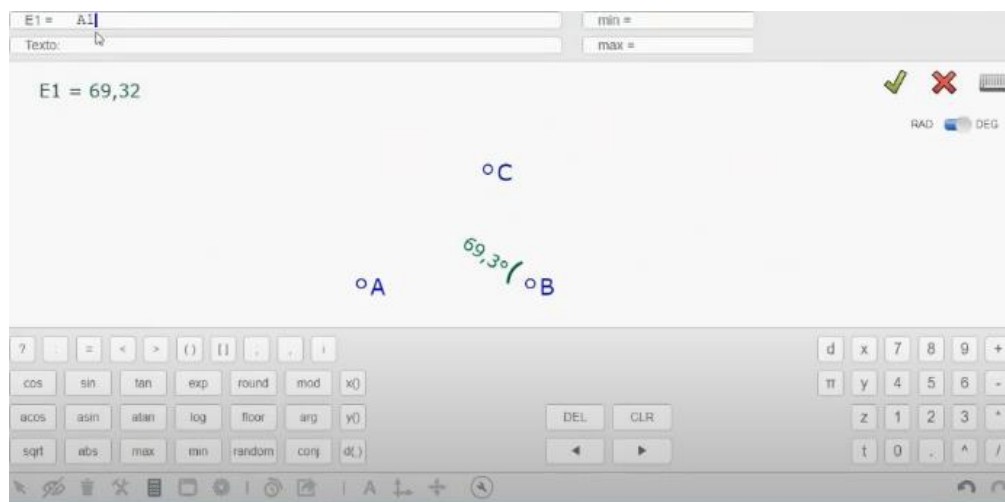


Figura 13 Concepción del ángulo variable como cantidad indeterminada para el sujeto A

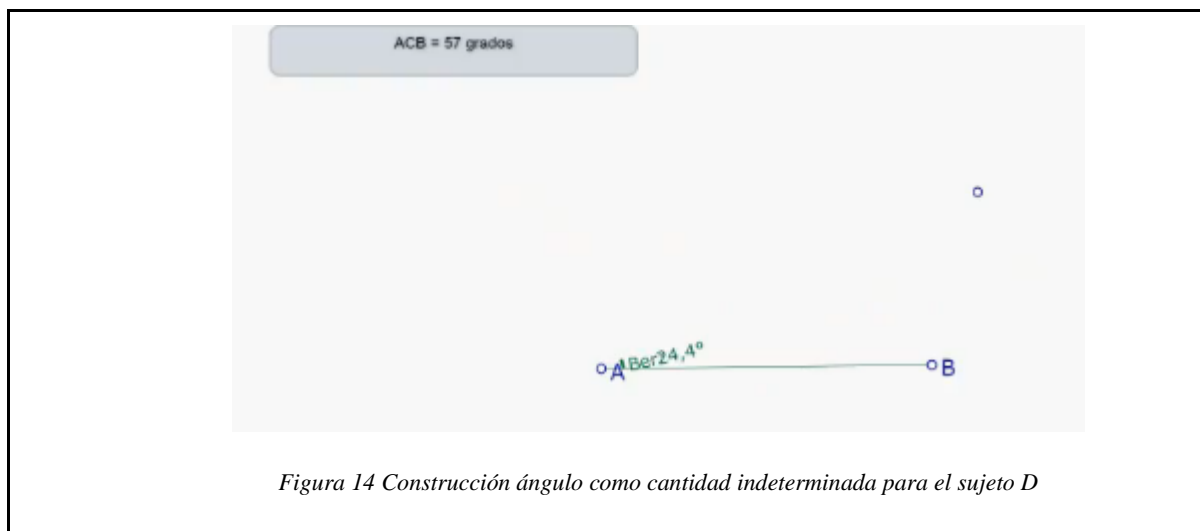
## SUJETO D

**#245 E1:** quiero ver cómo creas el ángulo beta

**#246 SD:** [aquí tan y tan] (el sujeto crea el ángulo pasa por el punto B, de vértice en A y amplitud  $17,4^\circ$ ) [ese es beta]

**#249 SD:** (El sujeto cambia la etiqueta de A1 por Be) (véase figura 14)





*Figura 14 Construcción ángulo como cantidad indeterminada para el sujeto D*

En un segundo momento observamos que luego que los sujetos conciben indeterminancia, pueden expresar luego analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado. Es importante precisar que en el caso del sujeto G, los macroesquemas de pensamiento algebraico se presentan de forma consecutiva y espontánea en poco tiempo haciendo uso del software, por ello se presentan los comportamientos de este sujeto en este apartado.

Los comportamientos de los sujetos corresponden a los previstos en la estrategia ganadora. Acciones como: crear un ángulo variable ABX, Be y ABP1 y lo varían mediante el arrastre del punto libre, la creación de un ángulo fijo cuya medida representa una relación de dependencia expresada numéricamente en la calculadora, el arrastre directo del punto P1 como forma de arrastre indirecto del punto C obteniendo una trayectoria puntual mediante la traza; todos son esquemas de acción correspondientes a los macro esquemas propios de pensamiento algebraico en el software.

Los puntos libres P1 y X son medios semióticos porque le permiten al sujeto referirse al carácter indeterminado de las medidas que poseen los ángulos. Las expresiones numéricas como

$A_2=123-E_1$ ;  $A_2=123-B_e$ ;  $A_2=(180-(57+E_1))$  siendo  $E_1$  y  $B_e$  expresiones equivalentes a  $A_1$ , son medios semióticos para el sujeto porque le permiten referirse al carácter de designación simbólica propia de un pensamiento algebraico.

Los puntos solución son resultado de la trayectoria puntual que forma un dibujo mediante el uso de la traza a partir del movimiento indirecto del punto C, conservando la propiedad analítica.

Las expresiones verbales como “el ángulo A va a variar condicionado por el ángulo B,” y al referirse a los puntos solución con frases como “serían todos estos punticos del movimiento que yo haga acá” representan esquemas de comunicación por parte del sujeto en un intento de justificar la estrategia ganadora. Las palabras clave emergentes como “variar condicionado, variar conforme este varía; mantener como una proporción”, y los símbolos en el recorte como  $\alpha + \beta = 123$ ;  $\alpha = 123 - \beta$  constituyen medios semióticos para el sujeto ya que le permiten referirse a la relación de dependencia entre los ángulos.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación que presentan los sujetos, y en color rosado oscuro los medios semióticos que corresponden a la identificación del carácter operatorio de los objetos indeterminados.

#### SUJETO A

**#143 E1:** perfecto, usted habla de una variación de 0 a 123, ¿habla del ángulo ABC o del ángulo CAB de 0 a 123 o ambos?

**#144 SA:** [ambos, ambos pueden tomar esos valores, si ambos pueden tomar un valor entre 0 y 123 siempre y cuando se respete esa condición] (El sujeto señala en el widget la condición  $CAB+ABC=123^\circ$ ) [digamos si el ángulo CAB toma un valor entre 0 y

123 el otro ángulo debe tomar el valor de 123 menos lo que mida el valor del ángulo que tome] (el SA se refiere al ángulo ABC ) [¿sí?]

**#145 SA:** [entonces ahí ya sólo estaría variando un ángulo] (El sujeto señala en el widget el ángulo CAB), [porque yo ya estoy diciendo que el otro ángulo] (El sujeto señala en el widget el ángulo ABC) [siempre va a ser 123 menos esto que yo tome acá] (El sujeto señala en el widget el ángulo CAB) ¿no?]

**#210 SA** [Sí #...#] (el sujeto vuelve a la construcción del ángulo ABC con la herramienta ángulo, y cambia el nombre de C por X, obteniendo el ángulo ABX, luego crea con la herramienta ángulo fijo el ángulo BA, con vértice en el punto A, y cambia la expresión del ángulo tal que  $A3=123-E1$ , luego crea la semirrecta BX con origen en el punto B, y ubica el punto de intersección C entre las semirrectas BX y la semirrecta con origen en A, obteniendo así el punto C. Para comprobar mide el ángulo ACB con la herramienta ángulo, y corrobora que este mide 57 grados), [yo lo planteo así, que variarlos, ¿Si se fijan?] (el sujeto mueve el punto X, mostrando a los entrevistadores que el ángulo ACB permanece constante a pesar de que el punto C tome distintas posiciones) (véase figuras 15,16 y 17)

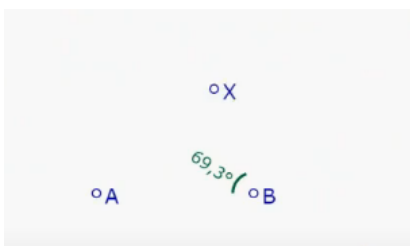


Figura 15 Construcción ángulo variable como cantidad indeterminada para el sujeto A

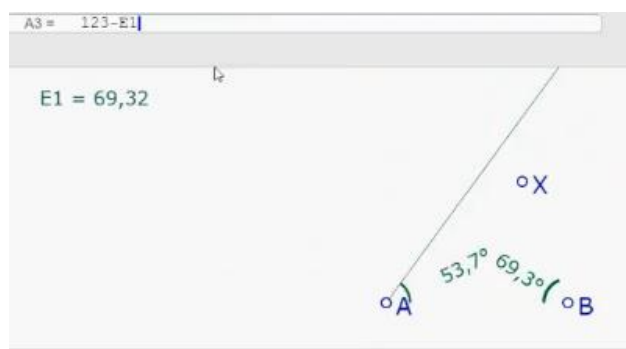


Figura 16 Expresión de dependencia en la calculadora sujeto A

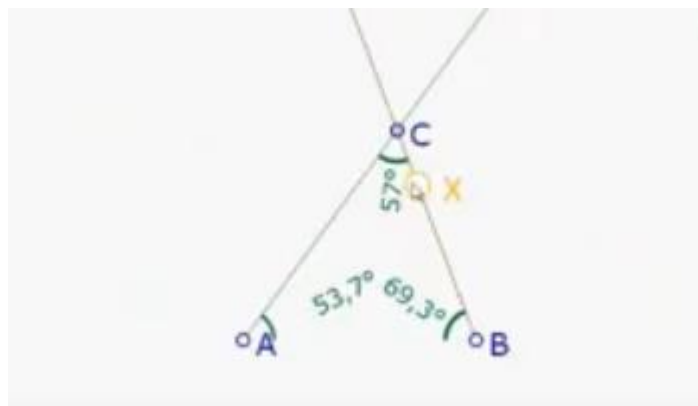


Figura 17 Uso del punto X como MSO

**#213 SA:** [Entonces pues, pues ya estaría variando el punto, ush pero esto aquí ya, porque estaría variando la amplitud del ángulo ABC, pero pues ya los otros, bueno, el ángulo C siempre va a ser 57, el ángulo A va a variar condicionado por el ángulo B, por la condición que les había dicho, que es 123 menos lo que mida este ángulo]

**#214 E1:** listo, eh eh, ¿hay alguna forma de ver todos los puntos que se marcan, con el movimiento? Para ver los puntos C

**#215 SA:** [Pues sería como un lugar geométrico, ¿no?, pero, esto tiene para guardar un recorrido]

**#217 SA:** (el sujeto activa la traza del punto C a través de propiedades) [Activar la traza, exacto], (el sujeto mueve el punto X para dejar la traza del punto C) [entonces si

varía, es como un ¿arco?, creo que es esa figura, es un arco de circunferencia, y ahí estarían todos los puntos] (véase figura 18)

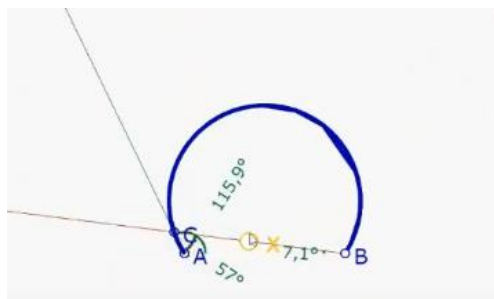


Figura 18 Trayectoria solución al problema sujeto A

#### SUJETO D

**#219 SD:** [sé que yo puedo poner un punto por acá] (el sujeto dibuja un punto en la parte superior del recorte del segmento AB) [este es el ángulo que debe medir  $57^\circ$ ] (el sujeto dibuja el ángulo A punto dibujado B) [este de acá va medir no sé Alpha] (el sujeto dibuja el ángulo punto dibujado B A) [y este tiene que ser beta] (el sujeto dibuja el ángulo punto dibujado A B) [y yo sé que Alpha más beta tiene que medir si o si 123] (el sujeto escribe su ecuación en el recorte) [bueno sí ¿cómo lo hago?] (el sujeto susurra esta pregunta)

**#220 E2:** ¿cuánto tendría que medir por ejemplo beta?

**#221 SD:** [eso es lo que estaba pensando digamos yo puedo crear que Alpha es igual 123 menos beta] (el sujeto escribe esta expresión en el recorte) [acá tendría un ángulo] (el sujeto señala la expresión  $\alpha = 123 - \beta$ ) [y beta es beta, con tener a beta tengo a Alpha, pero no sé si digamos en el DGPad-Colombia pueda crear una variable que puede tomar varios valores]

#222 SD: (véase figura 19)

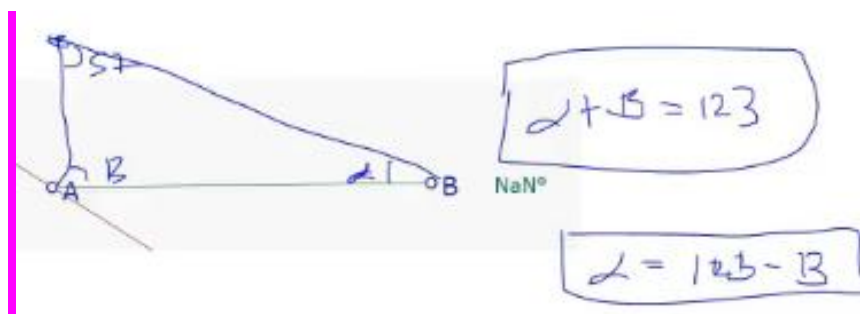


Figura 19 Recorte sujeto D concepción dependencia de ángulos

#255 SD: [ya tienes beta, sabes que el ángulo que cumple la condición en C es de  $57^\circ$ , ¿cómo creas Alpha?]

# 258 SD: ... [no sé si lo lee así] (el sujeto crea ángulo fijo que pasa por A de vértice en B y amplitud 132, luego el sujeto hace uso de la herramienta y modifica la medida mediante la expresión  $A6 = 123 - \text{beta}$ ) [ah sí, ahí ya se mueven los dos] (el sujeto mueve el punto P1 y hace referencia a los ángulos de vértice en A y en B) [entonces supongo yo, no, debería cumplirse que este ángulo ya es de  $57^\circ$  listo, ahí debería dar] (el sujeto mide el ángulo ACB (el punto C se crea al medir el ángulo, no tiene etiqueta para verificar lo dicho) (véase figuras 20 y 21)

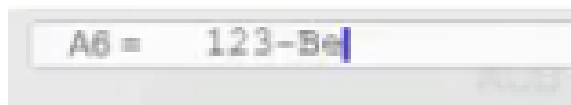


Figura 20 Expresión en la calculadora de la relación de dependencia entre ángulos por el sujeto D

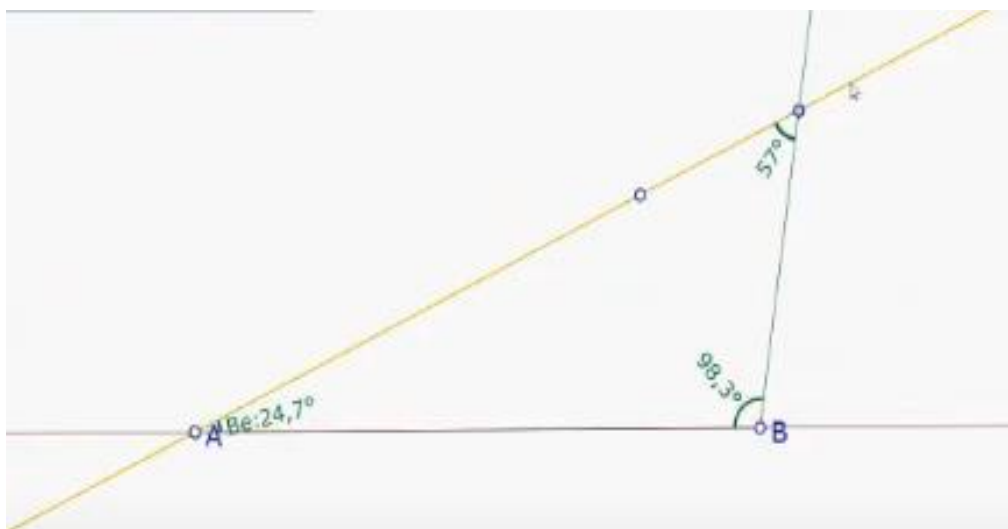


Figura 21 Construcción punto de intersección que mantiene las relaciones de dependencia en los objetos geométricos por el sujeto D

#260 SD: [... Puedo generar un rastro o algo así]

#261 E1: si, le da click en el punto y activa las herramientas con el engranaje y ahí dice activar la traza

Nota: El sujeto activa la traza del punto C y mueve el punto PI para generar el rastro

#267 SD: (véase figura 22)



Figura 22 Trayectoria de los puntos solución del problema para el sujeto D

#272 E1: le decía que usted cuál determina que son todos los puntos C que cumplen la condición de  $ACB=57^\circ$

**#273 SD:** [espere lo pienso cómo lo diría, no sé si sea válido decir que son todos los puntos C tales que, espero, voy a colocar C acá] (el sujeto coloca etiqueta al punto C\_0 a la intersección entre la semirrecta del ángulo fijo y la recta en A que pasa por P1) [tales que  $CAB + ABC = 123^\circ$ , una definición muy por encima.]

## SUJETO G

*Nota: Se le propone al sujeto trabajar a partir de un ángulo variable, el sujeto opera en un primer momento con su medida, pero instantáneamente se da cuenta que la construcción no se mantiene al arrastrar por lo que cambia la medida por su etiqueta. Este proceso se da de forma autónoma por parte del sujeto.*

**#106 SG:** (el Sujeto marca punto de intersección ("C" punto sin etiqueta) entre ambas semirrectas y luego activa nuevamente la calculadora y cambia la expresión  $A2 = (180 - (57 + 49))$  a  $A2 = (180 - (57 + A1))$  (véase figura 23)

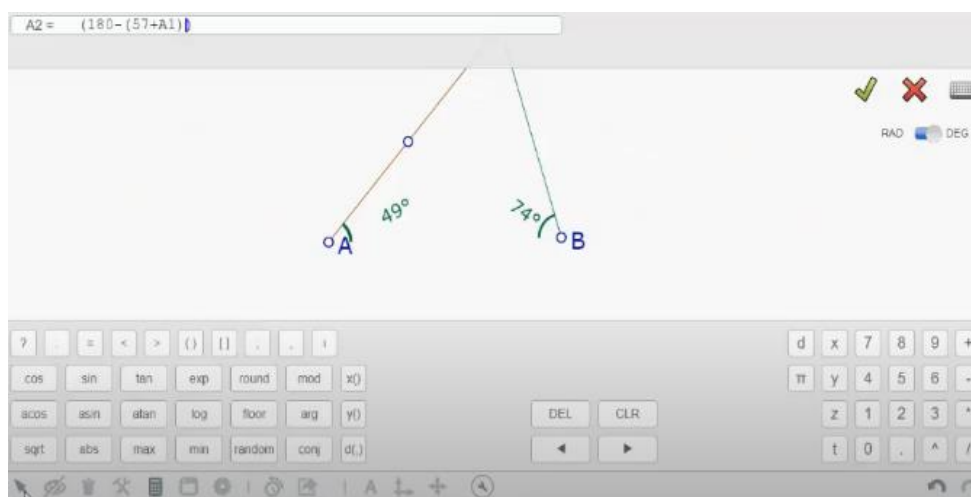


Figura 23 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G

**#107 SG:** (el Sujeto susurra “fijo es el de 57°” luego verifica y mide el ángulo ACB



luego crea segmento AB) (véase figura 24)

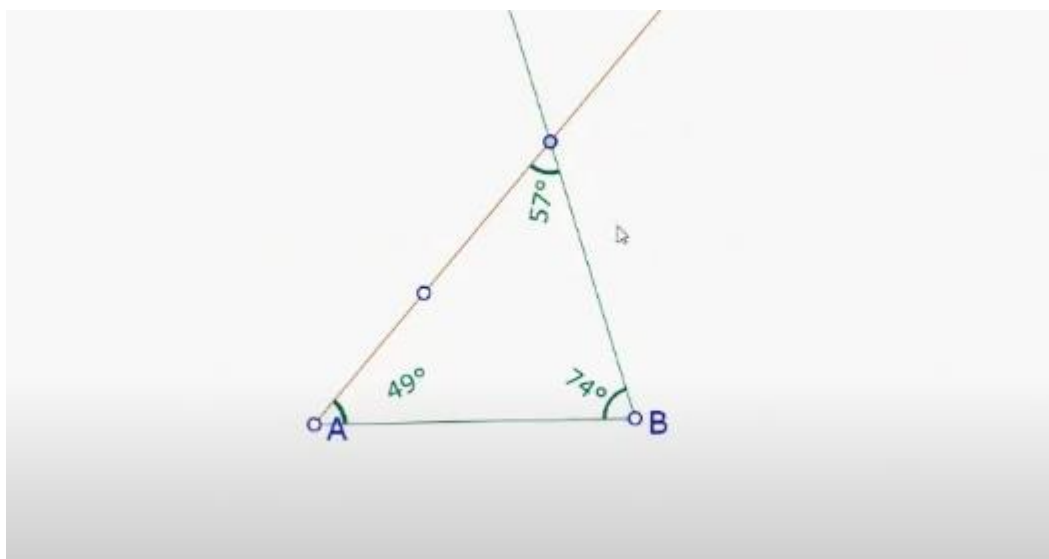


Figura 24 Construcción punto de intersección que mantiene las relaciones de dependencia en los objetos geométricos por el sujeto G

**#108 E1:** ¿y la construcción se mantiene al arrastrar?

*NOTA:* Como el sujeto G no alcanzó a guardar la expresión del ángulo A2, no se le mantuvo al arrastrar, por lo que lo vuelve a hacer nuevamente y para esta segunda ocasión crea la expresión  $E1=A1$  para referirse al ángulo variable.

**#116 SG:** [Pues básicamente si este ángulo que fue el dado varía] (el sujeto señala al ángulo variable A1) [pues yo puse que tenía que variar este] (el sujeto señala el ángulo fijo sobre B) [conforme a este cambio] (el sujeto mueve el punto P1) [tienen que mantener como una proporción] digámoslo así, el punto es que se tiene que cumplir que este ángulo por ejemplo] (el sujeto señala el ángulo fijo A2 sobre B) [que era el de 180 menos la suma del 57 más este angulito] (el sujeto señala al ángulo variable A1) [se tiene que mantener aunque este ángulo está variando] (el sujeto señala al ángulo variable A1), [este] (el sujeto señala el ángulo fijo A2 sobre B) [también va variar conforme este varía] (el sujeto señala

al ángulo variable  $A1$ ) [y este va cambiar] (el sujeto señala el ángulo fijo  $A2$  sobre  $B$ ) [básicamente va ser 180 menos el valor de este] (el sujeto señala al ángulo variable  $A1$ ) [y se va tener fijo el 57 que fue una como de las restricciones que se hizo.]

# 118 SG: [Con esas restricciones hice que el ángulo de 57 fuera fijo]

#119 E1: y en esa construcción ¿cuáles serían todos los puntos  $C$ ?

#120 SG: [Todos los puntos  $C$ , pues mira, pues como dije antes, si hacemos que el puntito  $C$  se mueva hasta ahí no se va a cumplir] (El sujeto se refiere a que el punto  $P1$  del ángulo variable quede por debajo del segmento  $AB$ , no va a encontrarse un punto  $C$  que cumpla la condición, al menos con la construcción hecha por el sujeto) (véase figura 25)

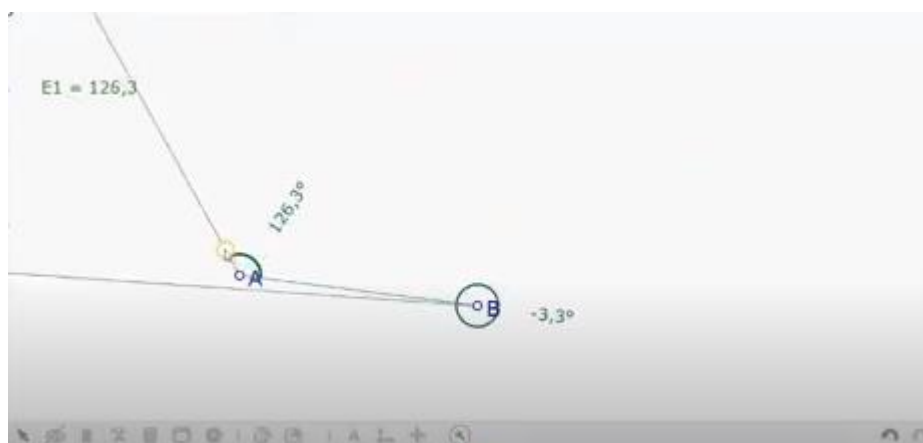


Figura 25 Lugares donde no se intersectan las semirrectas de los ángulos para el sujeto G

#121 SG: [Pero básicamente es todos los, digamos de 0.001 que ahí si cumpliría hasta 179.9, serían todos estos punticos del movimiento que yo haga acá ] (el Sujeto mueve el punto  $P1$  mostrando todas las posiciones que puede tomar el punto  $C$ ), [que a su vez sería como un arco, ¿por qué un arco?, porque si digamos, si yo aumento la amplitud de este, más de 180, ahí ya no se me cumple] (véase figura 26)

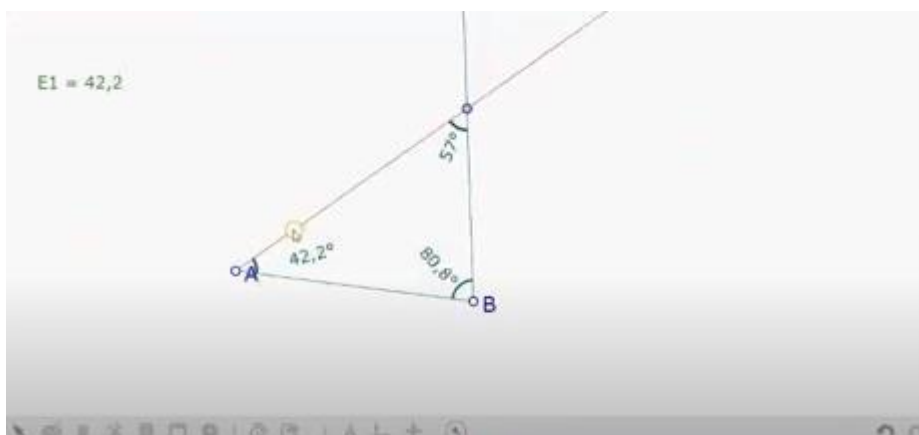


Figura 26 Arrastre del punto libre por parte del sujeto G

**#124 E1:** Está bien, igual a ese punto que tienes ahí marcado C le puedes dar una opción, si quieres dale click a ese punto C, le das en el engrane para las propiedades, y le pones activar la traza

**#127 SG:** (El sujeto mueve el punto P1 mostrando la traza del punto C) [umm]  
(véase figura 27)

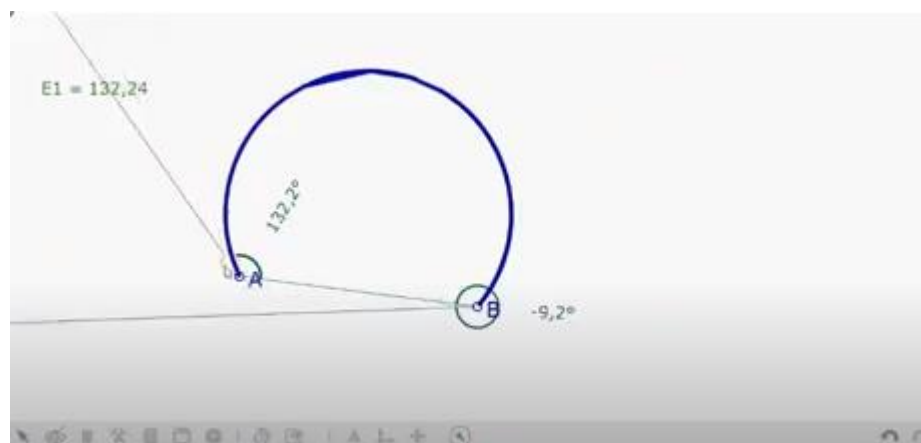


Figura 27 Uso de la traza por el sujeto G para marcar la trayectoria de los puntos solución

otros problemas de la misma familia 2 y 3.

El abordaje del problema de esta familia para un ángulo  $ACB=25^\circ$  por parte de los sujetos A, D y G se caracteriza por no recurrir a la reconstrucción del proceso anterior para el ángulo  $ACB=57$ , en cambio recurren a los macroesquemas de acción y comunicación que tienen activos para solucionar el problema. En efecto, las expresiones usadas en la calculadora se modifican a  $A2=155-E1$ ,  $ABP1= E1$ ;  $A2=155-Be$ ;  $E1=A1$ ,  $A2=(180-(25+E1))$ ; luego estos ubican el punto de intersección C, activan la traza del mismo y arrastran el punto variable. Estos macroesquemas son usados también para el problema de un ángulo de  $k^\circ$  mediante una descripción en un widget (cuadro de texto usado en DGPAd-Colombia).

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación, y en color rosado oscuro los medios semióticos que presentan los sujetos.

#### SUJETO A

**#223 SA:** [Okay, entonces, A, B] (el Sujeto A construye un punto A, un punto B, un punto X, un ángulo ABX con la herramienta ángulo, establece la expresión  $E1=A1$ , crea el ángulo A2, con vértice en A, con la herramienta ángulo fijo, y con la calculadora cambia su expresión) [eh 180 menos 25 eso es 55, si eso es 155 menos E1], (el SA cambia la expresión  $A2=155-E1$ , luego traza el punto de intersección C entre la semirrecta BX, y la semirrecta con origen en el punto A, y con la herramienta ángulo, construye el ángulo ACB para verificar su medida) [25, entonces, propiedades, traza,] (el SA activa la traza del punto C a través de propiedades y mueve el punto X para dejar la traza del punto C) [serían estos, y siempre va a medir  $25^\circ$ , todos estos puntos] (véase figuras 28,29 y 30)

$$E1 = A1$$

Figura 28 Expresión en la calculadora equivalente al objeto variable realizada por el sujeto A

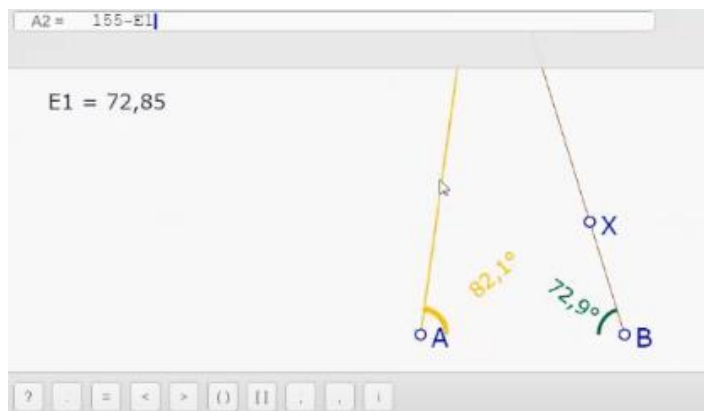


Figura 29 Relación de dependencia entre los ángulos por parte del sujeto A

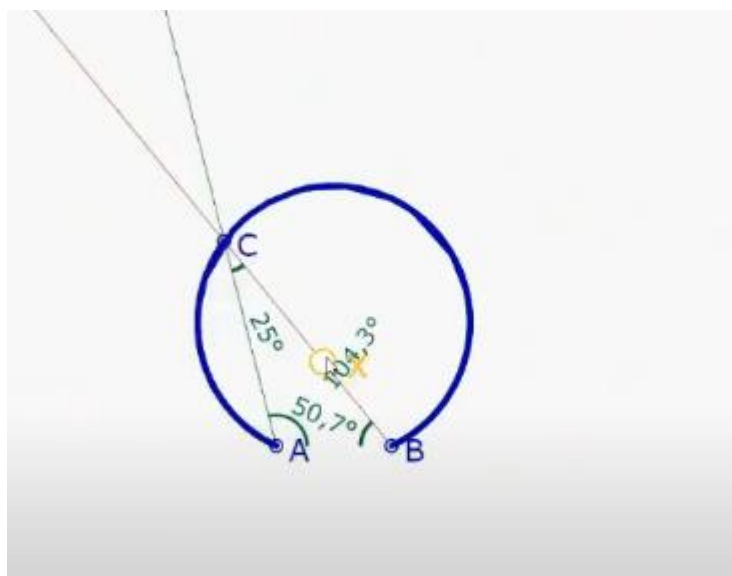


Figura 30 Uso de la traza para el caso del ángulo  $ACB=25^\circ$  del sujeto A

*Nota:* Los entrevistadores le piden al sujeto que relate el procedimiento para un ángulo de valor  $k^\circ$

**#241 SA:** [sí,](el SA se devuelve a una de sus construcciones hechas en DGPad-Colombia para recapitular) [entonces este ángulo] (el SA señala la *expresión* del ángulo

A3, cuyo vértice es A, cuya expresión es  $A3=123-E1$ , vuelve al widget y sigue escribiendo “El ángulo  $CAB=180^\circ-k^\circ-x^\circ$ . Y la intersección entre estas dos semirrectas formará el punto C que cumpla la condición que  $ACB=k^\circ$ ) [yo digo que es así] (véase figura 31)

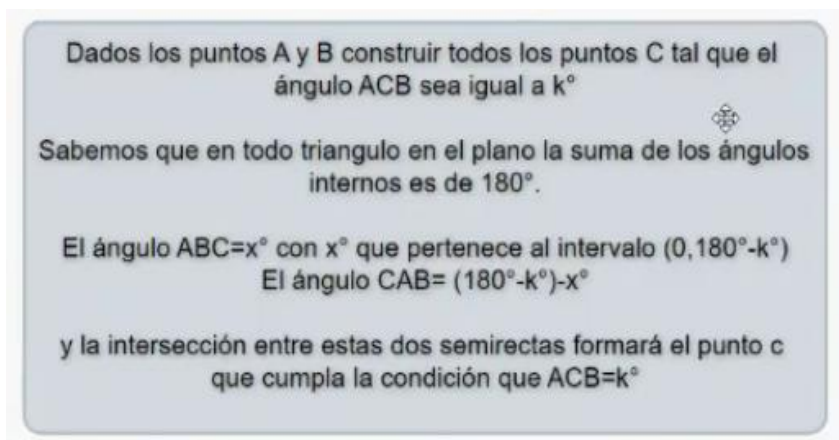


Figura 31 Instrucciones para un caso general de ángulo  $ACB=k^\circ$  hecha por el sujeto A en un widget

#### SUJETO D

**#281 SD:** (el Sujeto crea elementos en la construcción simultáneamente que los va nombrando) (el Sujeto crea el punto A y B, luego crea el ángulo variable ABP1 y lo etiqueta como Be)

**#284 SD:** (... el sujeto crea ángulo fijo que pasa por B, vértice en A y amplitud  $50^\circ$  luego hace uso de la calculadora para modificar la amplitud  $A1=155-Be$ ) (véase imagen 32)

**#285 SD:** (el sujeto crea el segmento AB luego crea recta en B que pasa por el punto P1 (punto sin etiqueta) y crea punto de intersección C (punto sin etiqueta) entre la recta y la semirrecta, el sujeto mide el ángulo ACB para verificar que el ángulo  $ACB=25^\circ$ ) (véase imagen 33)

**#286 SD:**

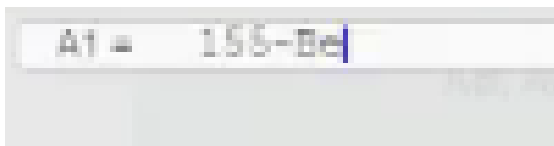


Figura 32 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto D

**#291 E1:** ¿y cuáles serían todos los puntos?

**#293 SD:**

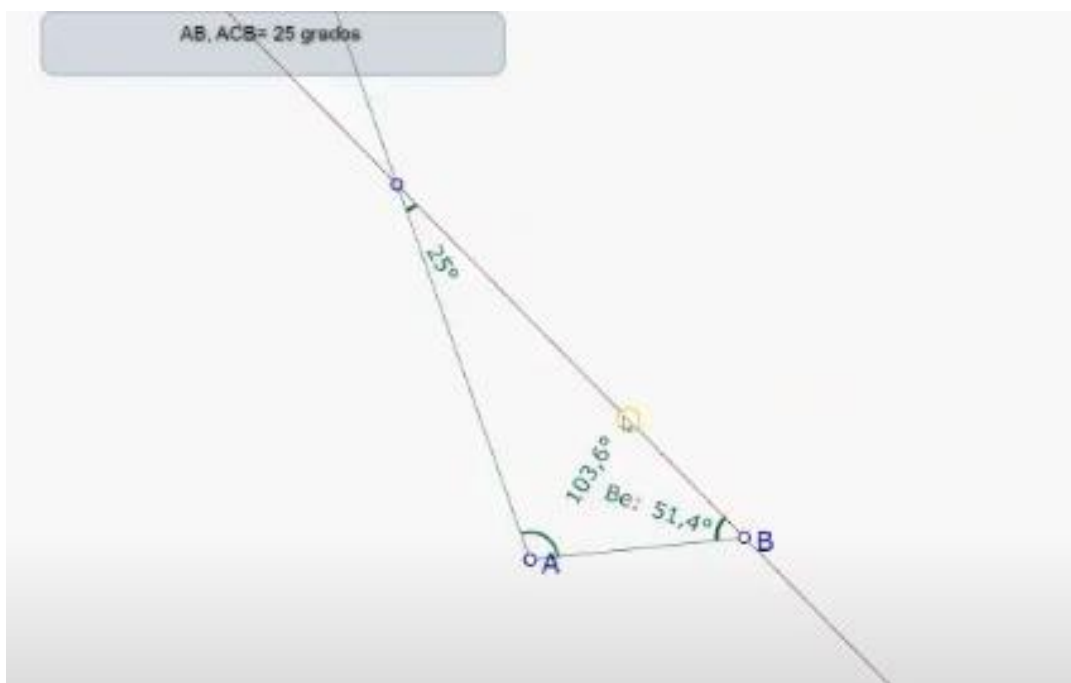


Figura 33 Uso del punto libre para cambiar la medida del ángulo variable por parte del sujeto D

**#294 SD:** (El sujeto hace uso de la traza para mostrar los puntos solución) (véase figura 34)





Dados los puntos A y B, construir todos los puntos C tal que el ángulo  $ACB = K$

1) Dados los puntos A y B, construir todos los puntos C tal que el ángulo  $ACB = K$

2) Llamaremos  $ACB = k$   
 $ABC = \text{beta}$   
 $CBA = \text{alpha}$

1) construir A y B  
 2) Construir un ángulo ABC cualquiera, que llamaremos beta "este ángulo es variable"  
 "teniendo en cuenta que la suma interna de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados tendra que  $180 = \text{beta} + \text{alpha} + K$ "  
 3) Dado que K es constante, despeje alpha en terminos de beta " $\text{Alpha} = 180 - k - \text{beta}$ "  
 4) construya un ángulo fijo, cuyo valor sea Alpha, este valor esta indicado en el paso 3  
 "al hacer esto se creara una recta"  
 5) trace una recta al punto "B" este punto se genero en el paso 2 al construir beta  
 La intersección de la recta que se genero en el paso 4 y 5 generará el punto C, donde el ángulo  $ACB = K$

Nota: si la suma de alpha y beta son negativos, el ángulo K tomara otro valor, en este caso será

Figura 35 Descripción para un caso  $ACB = k^\circ$  por parte del sujeto D

## SUJETO G

**#153 SG:** (el Sujeto construye el ángulo  $ABP_1$  con la herramienta ángulo) (véase figura 36)

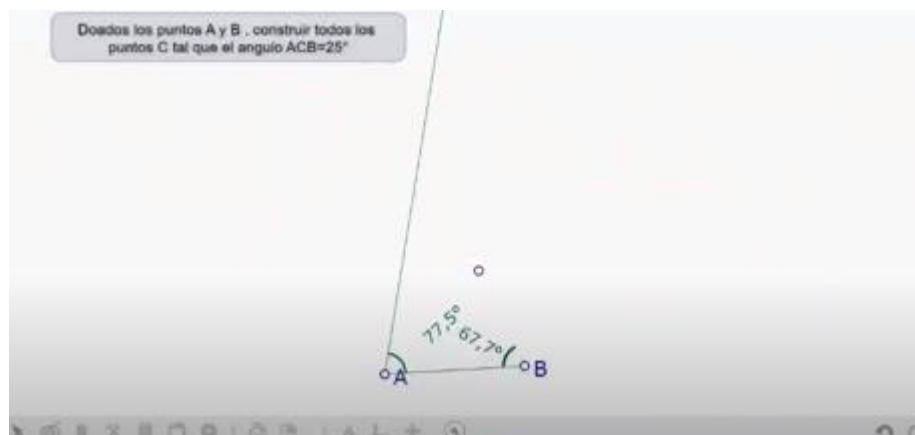


Figura 36 Construcción de un ángulo variable por parte del sujeto G

**#155 SG:** (El Sujeto establece la expresión  $E1 = A1 \dots$ )

**#159 SG:** (el Sujeto establece  $A2=(180-(25+E1))$ ) (véase figura 37)

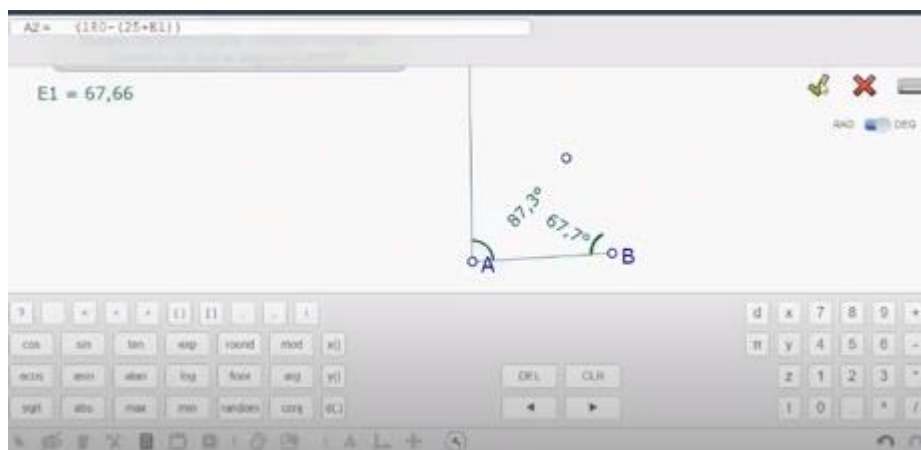


Figura 37 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G

**#160 SG:** (El Sujeto construye la semirrecta de origen B que pasa por P1, ubica punto de intersección C entre ambas semirrectas, mide el ángulo ACB obteniendo 25 grados), ya (activa la traza al punto C y mueve P1 para demarcar todos los puntos C que cumplen la condición  $ACB=25^\circ$ ) (véase figura 38)

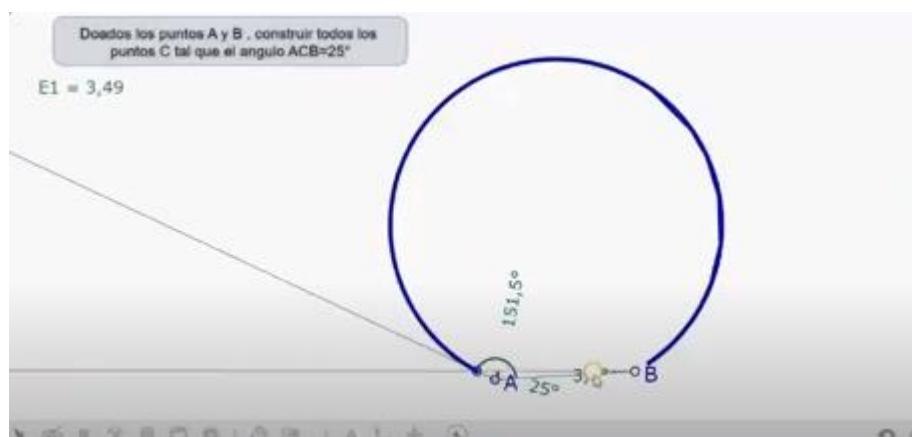


Figura 38 Uso de la traza para un ángulo  $ACB=25^\circ$  por parte del sujeto G

**#161 SG:** [Se cumple la condición]

### ***2.1.2 categoría: sujetos pensamiento no algebraico.***

En el proceso de solución del problema, identificamos cuatro fases que describimos a continuación.

- **Fase 1: Pensar en algunos casos con ayuda del hilvanado**

El sujeto no tiene control de la situación, interactúa con las herramientas creando construcciones aproximadas

- **Fase 2: Mención de la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ” por parte de los entrevistadores para la construcción de un caso particular**

Esta fase se caracteriza por

- 1) Guiar al sujeto para que piense en un triángulo y en las relaciones de los ángulos de ese triángulo
- 2) La mención de la propiedad por parte de los entrevistadores
- 3) Considerar un caso particular en el que se puede aplicar la propiedad

- **Fase 3: Transición del pensamiento no algebraico al pensamiento algebraico (en el contexto del software)**

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de ausencia de pensamiento algebraico

- 1) Ausencia de la indeterminancia y analiticidad
- 2) Ausencia de la indeterminancia y la analiticidad en el software
- 3) Ausencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

- **Fase 4: Movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema**

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de pensamiento algebraico

- 1) Presencia de la indeterminancia y presencia de la indeterminancia en el software
- 2) Presencia de la analiticidad y presencia de la analiticidad en el software
- 3) Presencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

- **Otros problemas de la misma familia 2 Y 3**

*fase 1: pensar en algunos casos con ayuda del hilvanado.*

Algunas de las primeras estrategias que abordan los sujetos son erróneas porque no tienen en cuenta la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, y por ende la necesidad de trabajar relaciones entre los ángulos. Es por ello que su primer abordaje se basa en experimentar con las herramientas, por ejemplo, el sujeto B presenta esquemas propios de una variación no pertinente en el software, esto se puede observar en acciones como construir un ángulo fijo con vértice en C y luego arrastrar los puntos A o B para que queden sobre la semirrecta que forma el ángulo.

En el caso específico del sujeto H, a pesar de que la formulación de su estrategia parece ser acertada (la construcción de un arco de circunferencia), la construcción del arco es incorrecta. Estas acciones reflejan que el sujeto conocía que los puntos de este problema formaban un arco, y a pesar de que este aspecto posiblemente se encontraba en su repertorio de esquemas, no logra recordarlo totalmente. Como el objetivo de este problema es trabajar la relación de dependencia

de los ángulos ABC y BAC más allá de saber la forma de los puntos solución, se focalizó el trabajo con la propiedad de los ángulos y sus relaciones.

Ante estos comportamientos y la dificultad que presentan los sujetos en la formulación de estrategias, el recurso de hilvanado es propuesto para:

- 1) Buscar que el sujeto construya soluciones aproximadas del problema a partir de un ejercicio de experimentación.
- 2) Mostrar al sujeto la posibilidad de encontrar varias soluciones aproximadas del problema.

El hilvanado es propuesto al sujeto B, mientras que el sujeto F lo usa de forma espontánea como primera estrategia de abordaje. En el caso del sujeto H no se propuso el uso de hilvanado ya que la primera intervención se enfocó en el trabajo con los ángulos haciendo uso de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas realizadas a los sujetos de esta categoría, en los que resaltamos en color rosa claro aspectos que se relacionan con esquemas de acción y comunicación presentados por los sujetos, en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores que guían a los sujetos a la concepción de casos, y en color azul las expresiones de los sujetos propias de un razonamiento que surge como producto de la experimentación con el hilvanado.

#### SUJETO B

*Nota: El sujeto construye un ángulo fijo de A que pasa por el punto C y arrastra el punto B sobre la semirrecta de forma aproximada (véase figura 39)*

**#66 SB:**

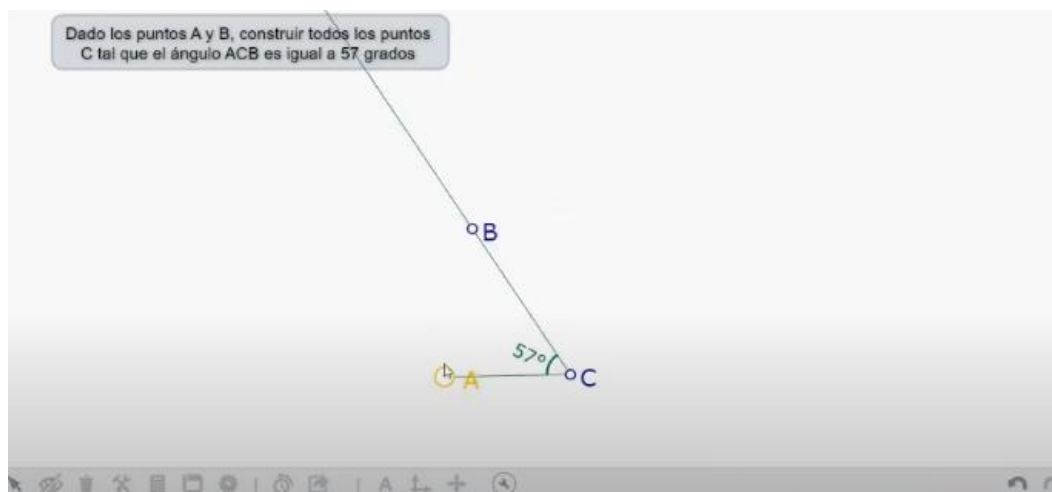


Figura 39 Arrastre del punto B a la semirrecta del ángulo fijo con vértice en C por parte del sujeto B

**#67 SB:** [estoy construyendo un punto C] (el Sujeto señala la construcción realizada), [porque acá podría salir otro punto C que también cumple la condición] (el Sujeto se refiere al simétrico del punto C con respecto a la recta AB)

**#68 E2:** ¿cuál sería ese otro punto C que cumple esa condición, teniendo ese punto A y ese punto B como únicos?

**#71 SB:** [ya dame un segundo lo hago] (el Sujeto construye una circunferencia con centro en B y radio BC, luego traza circunferencia con centro en A y radio CA, marca punto de intersección entre las dos circunferencias y mide el ángulo A2), [ahh no, se salió, no me da] (el Sujeto señala la medida del ángulo A2 que mide  $56,8^\circ$ , luego borra las circunferencias realizadas), [sería este, estos son dos puntos que cumplen la condición del ejercicio] (el Sujeto construye una circunferencia con centro en B y radio BC, luego traza circunferencia con centro en A y radio CA, marca punto de intersección entre las dos circunferencias y crea ángulo fijo que pasa por A, de vértice punto de intersección y amplitud de  $57^\circ$ ) (se observa que el Sujeto manipula durante un tiempo las herramientas

buscando estrategias para construir un punto simétrico de C, pero sus métodos no son exactos) (véase figura 40)

**#72 SB:**

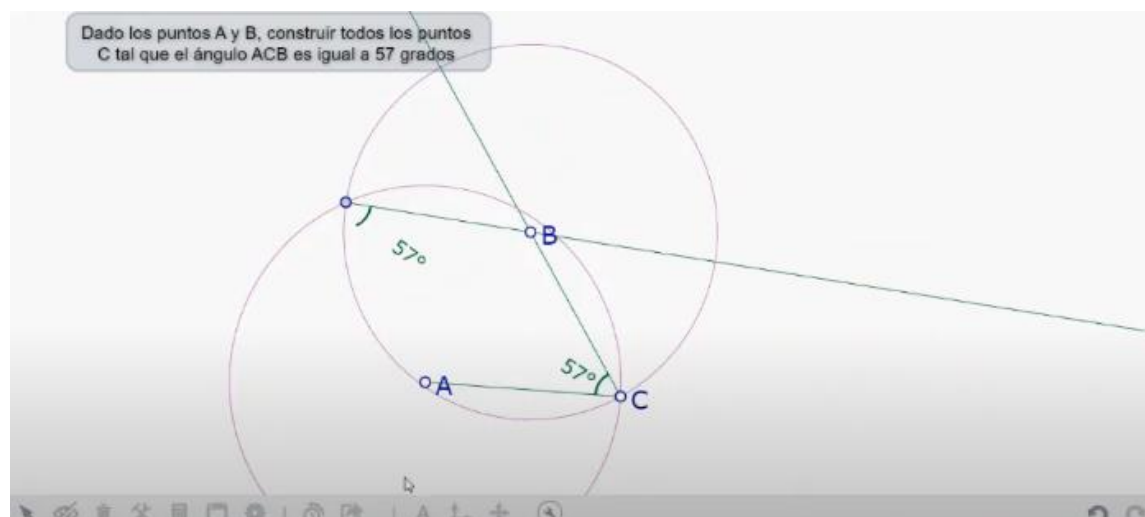


Figura 40 Simétrico de un punto aproximado por parte del sujeto B

**#77 E2:** listo, vamos hacer lo siguiente vas a dejar esa construcción, vas a duplicar una pestaña de DGPAd-Colombia, vas a crear nuevamente el punto A el punto B

**#80 E2:** ahora con la herramienta ángulo, vas a crear el ángulo de  $57^\circ$

**#81 E2:** listo, **vuelve** y crea otro punto con esa misma herramienta que te de  $57^\circ$

**#85 E2:** listo, crea otro punto

**#88 SB:** [por acá hay otro] (El Sujeto mueve el nuevo punto encontrando otro ángulo de  $57^\circ$ )

**#91 SB:** (El sujeto sigue las instrucciones de los entrevistadores) (véase figura 41)

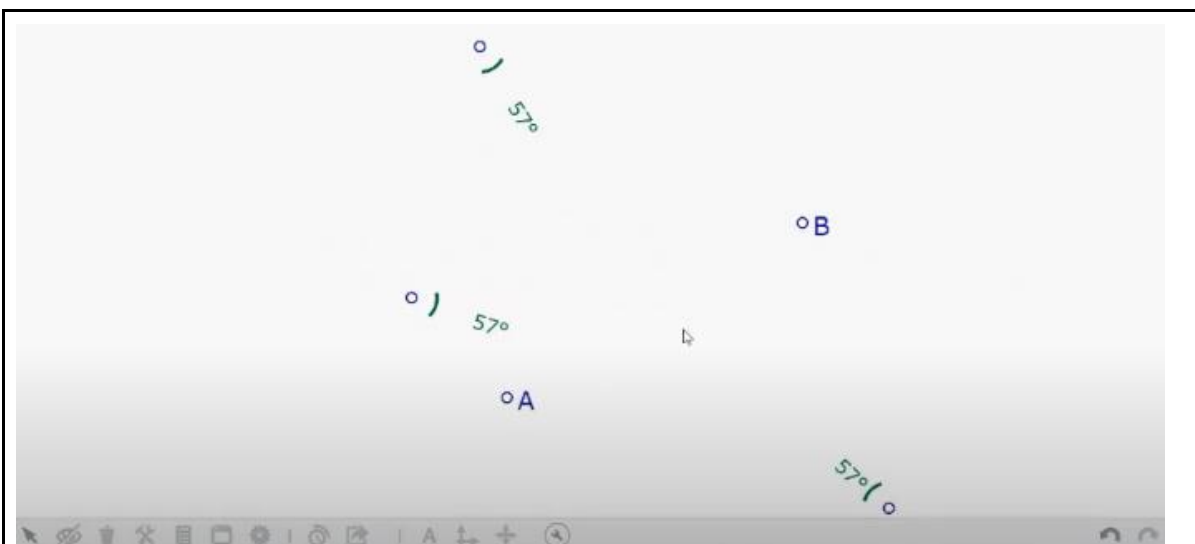


Figura 41 Hilvanado sugerido al sujeto B

**#92 E2:** luego de hacer esta construcción, ¿existen otros puntos C, a parte de los que ya construyó que cumplan la condición?

**#93 SB:** [si claro] (el sujeto construye más puntos de manera aproximada)

## SUJETO F

**#50 SF:** [Bueno, pues yo estaba pensando mientras me lo estabas dictando, iba pensando cómo resolverla y yo estaba pensando en hacer un hilvanado, que consiste en ubicar el segmento y comenzar a colocar diferentes puntos para mirar cuáles cumplían con la condición y buscar el lugar geométrico que cumple eso]

**#51 E2:** Listo, entonces comienza a plantear esa estrategia, haciendo uso de las herramientas

**#52 SF:** [Okay] (El sujeto construye un punto A y un punto B, luego el segmento AB, luego ubica un punto P1 cualquiera, mide el ángulo AP1B con la herramienta ángulo y mueve el punto P1 de tal forma que el ángulo AP1B mide aproximadamente 57 grados,



luego construye un punto P2 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P3 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P4 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P5 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P6 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P7 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P8 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P9 y hace lo mismo que con el punto P1, crea un punto P10 y hace lo mismo que con el punto P1) (véase figura 42)

**#53: SF:**

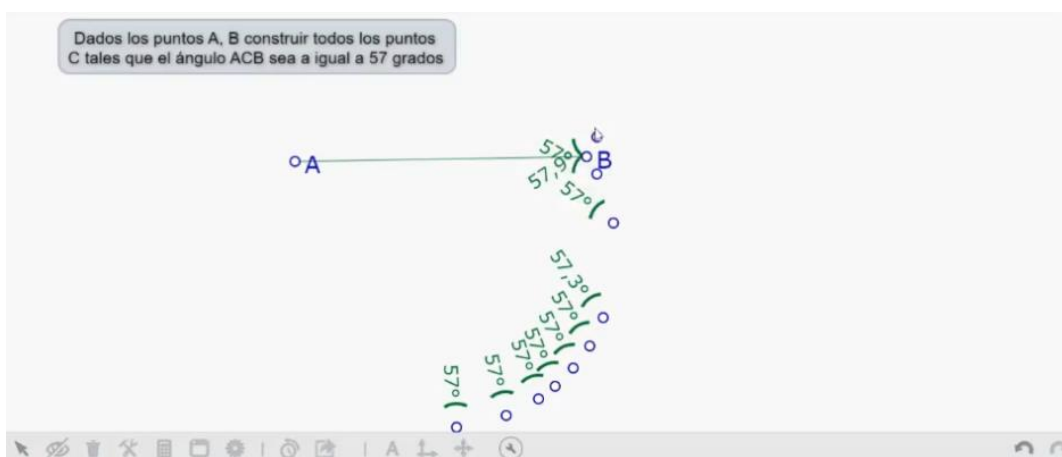


Figura 42 Hilvanado realizado por el sujeto F

SUJETO H

**#71 SH:** [Tengo A y B] (el Sujeto construye los puntos A y B) [y tengo que buscar todos los C que den 57, listo, lo primero que yo haría sería usar el ángulo, la herramienta de ángulo y ubicarlo para que me dé 57, cuando eso me dé 57 creo que puedo encontrarlos a todos, pero es que de ahí a que me dé 57]

**#73 SH:** (El Sujeto construye un punto P2 sobre el arco de circunferencia)  
[entonces tenemos A, creamos otra vez el ángulo, me da 57.4, ahí me está diciendo que no,

que es falso lo que estaba intentando, entonces no me sirve crear esa] (el sujeto mueve P2 sobre el arco de circunferencia y observa que los valores que toma el ángulo AP2B no varían, pero sin querer mueve P1 y la construcción se desacomoda un poco teniendo que los ángulos AP1B y AP2B ambos miden 57.4 grados) [ay pero qué pasó, algo hice mal, porque igual el que tenía en 57 ahora lo tengo en 57.4] (lo que sucedió es que se movió levemente la construcción, luego borra P2) (véase figura 43)

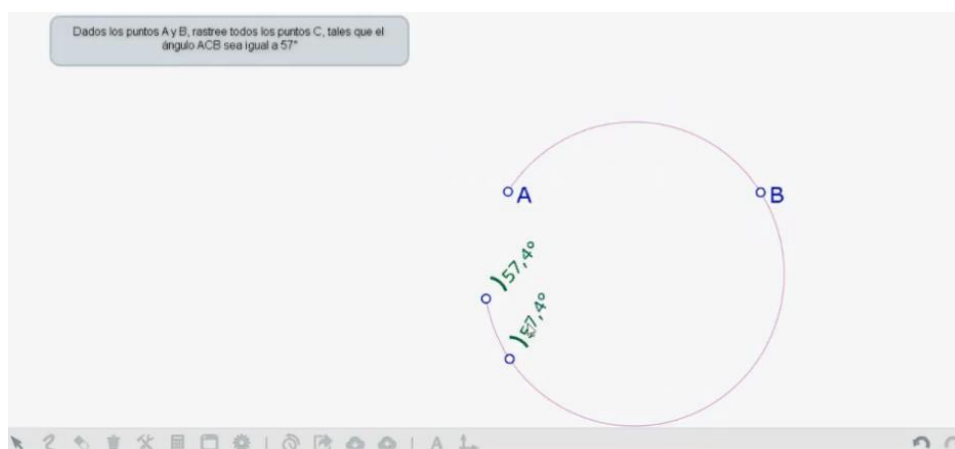


Figura 43 Uso del arco de circunferencia por parte del sujeto H

*fase 2 “mención de la propiedad por parte de los entrevistadores para la construcción de un caso exacto”.*

El elemento común en estos sujetos es la mención de la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ” por parte de los entrevistadores, para que estos planteen relaciones entre los ángulos de un triángulo y realicen estrategias que les permitan usar esta relación para construir soluciones particulares.

La mención de la propiedad que hacen los entrevistadores a los sujetos B, F y H permite que éstos conciban relaciones entre los ángulos del triángulo, y posteriormente puedan movilizar con ayuda esquemas de comunicación como: -pues debe ser  $A+B=180-57-$ , -deberían ser de 61.

5.-, -tienen que medir  $123^\circ$ -, y esquemas de acción como: la construcción de un triángulo isósceles. Estos esquemas son propios de los macroesquemas de ausencia de indeterminancia.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas realizadas a los sujetos de esta categoría, en los que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores y de color rosa claro los esquemas de acción y comunicación de los sujetos que corresponden a la utilización de la propiedad de la suma de los ángulos para establecer relaciones entre ellos.

#### SUJETO B

*Nota: Luego de varias estrategias erróneas por parte del sujeto, los entrevistadores intervienen para mencionarle la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo, con el objetivo de que este logre concebir relaciones entre ellos.*

**#152 E2:** ¿Cómo debe ser los otros ángulos si ya tiene el ángulo de  $57^\circ$ ? y tiene que la suma de los ángulos internos es igual a  $180^\circ$

**#153 SB:** [pues debe ser  $A+B=180-57$ ]

**#154 E2:** Listo, ¿Cómo trabaja eso desde lo que ya tiene ahí?

**#156 SB:** (el Sujeto crea la expresión  $E1=A+B=180-57$ ) [qué condición, 123, umm]

*Nota: Luego de hablar con el sujeto después de varias intervenciones, el sujeto aún no menciona un caso haciendo referencia a los ángulos, en base a la propiedad (la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ), por ello en la intervención 211 se le pregunta al sujeto sobre algunos tipos de triángulos con el objetivo de que pudiese mencionar un caso pensando desde lo numérico (reflexionando sobre los ángulos ABC y BAC)*

**#211 SB:** [Umm, el obtusángulo, el isósceles perdón]

**#212 E2:** Listo, ¿cómo son esos triángulos?

**#215 SB:** [Por eso el isósceles es ese, el que tiene dos lados iguales y los lados que subtienden a los lados iguales serán semejantes entre ellos]

**#216 E2:** Listo, por ejemplo, con ese triángulo, ¿le sirve para hacer esa construcción?

**#217 SB:** [...jeje, no sé, de pronto]

**#218 E2:** Ya sabe que dos de sus ángulos deben de ser congruentes ¿cierto?, entonces si usted ya tiene un ángulo que es de 57 grados. ¿Qué podría hacer para garantizar otro ángulo?

**#233 E2:** listo, entonces con el ángulo de 57, ¿cómo es el de A?, y ¿cómo es el de B?

**#235 E1:** Como ¿Qué dimensiones deberían tener esos ángulos que usted vio que serían iguales?

**#236 SB:** [¿Las dimensiones de ellos? Pues la idea es que sean congruentes]

**#237 E1:** Si, y para que sean congruentes, que la suma sea de 180 y ambos sean iguales, y que el ángulo de 57 se mantenga ¿Qué características deberían tener los ángulos de la base?

**#239 E2:** Antes dijo que ese ángulo, esos ángulos, la suma de los ángulos A y B, bueno los que contienen A y B iba a ser de 180-57 ¿verdad?

**#242 SB:** [si]

**#243 E2:** Si eso es 123 entonces ¿qué medida deberían tener A y B si dice que son semejantes?

**#245 SB:** [Pues en ese caso dividido, divido entre dos, los ángulos A y B. ¿sí?]

**#246 E2:** Si, ¿qué medida debería tener A y B para que se cumpliera el ángulo que

contiene A y B?

#247 SB: [eh, pues cada ángulo debería medir 123 sobre 2]

*Nota: El sujeto construye los ángulos fijos con vértice A y vértice B mediante las expresiones  $A1=123/2$  y  $A2=123/2$  (véase figura 44)*

#250 SB:

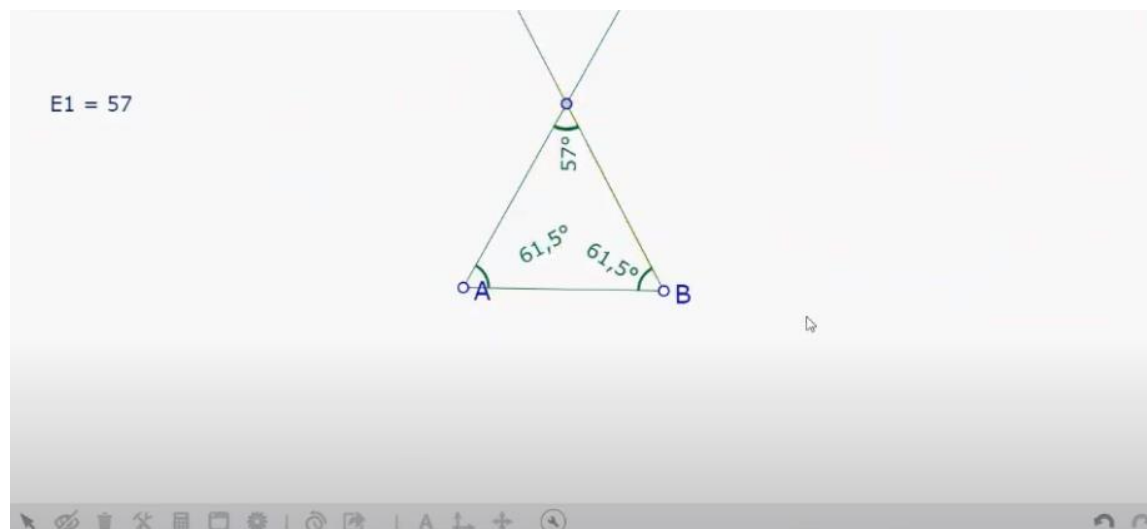


Figura 44 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto B

## SUJETO F

#61 E2: Listo, algo que te puede ser útil es recordar que la suma de los ángulos internos de un triángulo suma 180 ¿sí?

#62 SF: [si]

#63 E2: Entonces, por ejemplo, tú ya tienes el ángulo de vértice en C

#64 SF: [si]

#65 E2: ¿Cómo deberían ser los ángulos de vértice en A y de vértice en B?

#66 SF: [Para que me dé 180 ¿sí?, espérame]

**#68 SF:** [Deberían ser de 61.5]

*Nota: El sujeto construye un caso de forma exacta a partir de dos ángulos fijos mediante las expresiones  $A1=61.5$  y  $A2=61.5$  (véase figura 45)*

**#78 SF:**

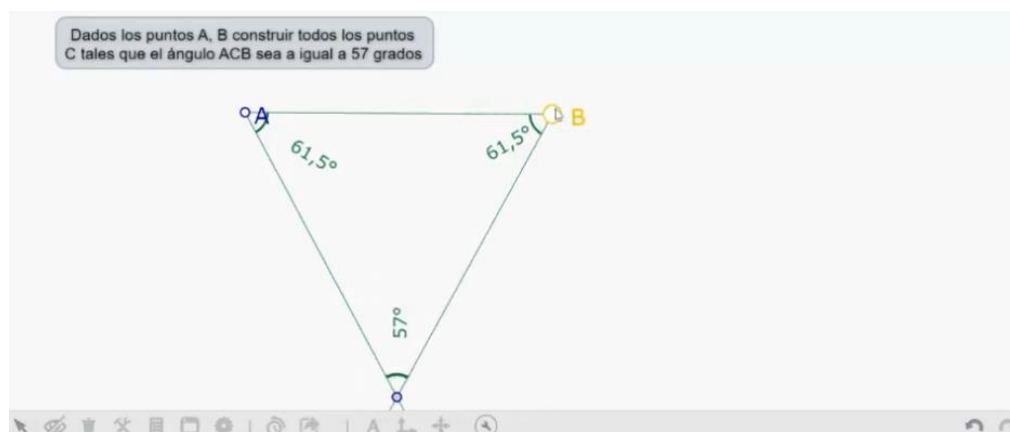


Figura 45 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto F

## SUJETO H

*Nota: Luego de varias intervenciones, los entrevistadores le sugieren la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ ”*

**#86 E2:** Listo, te íbamos a decir algo que te puede servir, y es que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180

**#90 E2:** Listo, aquí estoy, primero te decía que tú tienes un ángulo, que es el ángulo ACB ¿sí?

**#91 SH:** [ Si]

**#92 E2:** Y tienes tres puntos, en este caso A, B y C, entonces primero ¿qué figura crees que forman los puntos A, B y C?, coloca un punto en la pantalla

**#96 E** Listo, teniendo los tres puntos en el tablero, qué figura forman

**#97 SH:** [Un triángulo]

**#98 E2:** Listo, en un triángulo bueno tu ya tienes el ángulo ACB, ¿cierto?

**#99 SH:** [ Si, pero no cumple con las características que me están dando]

**#100 E2:** Exactamente, ese ángulo ya tiene una condición que es de  $57^\circ$  ¿cierto?

**#101 SH:** [ Si]

**#102 E2:** Listo, entonces ¿qué forma deberían tener los ángulos restantes?

**#107 SH:** [Todos los ángulos internos de un triángulo deben formar  $180^\circ$  ¿cierto?]

**#108 E2:** si

**#109 SH:** [ Y vamos a tener uno de 57]

**#112 E2:** Listo, entonces ¿qué medida deben tener esos ángulos?

**#113 SH:** [Pues es que entre esos dos ángulos tienen que medir  $123^\circ$  ¿sí?]

**#118 E2:** Y tú ya sabes construir ángulos con una medida dada ¿cierto?

**#121 SH:** [Pero es que solamente podría construir el de  $57^\circ$  porque sé cuánto tiene que medir ¿no?, pero los otros dos ángulos, la suma de los otros dos ángulos da  $123^\circ$ , lo cual quiere decir que como 123 no tiene mitad exacta, esos ángulos no deberían ser iguales, o se pueden hacer iguales así no tengan la medida exacta, porque digamos que, si se pueden hacer iguales, podríamos estar creando un isósceles]

*Nota: El sujeto construye dos ángulos fijos con vértice en A y vértice en B cada uno a partir de las expresiones  $A1=61.5$  y  $A2=61.5$  respectivamente (véase figura 46)*

**#125 SH:**

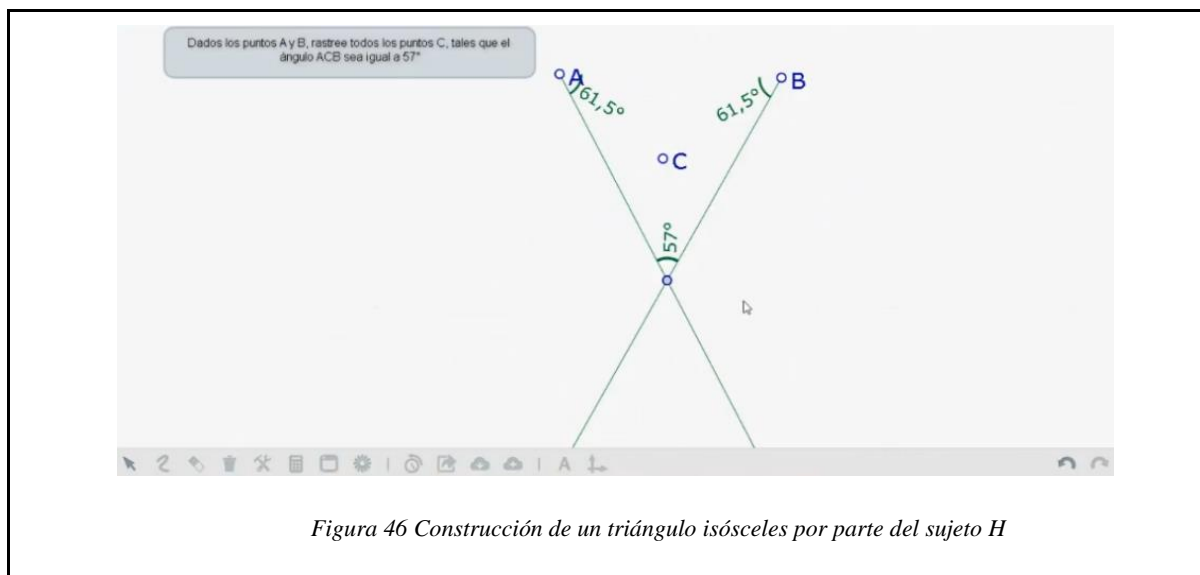


Figura 46 Construcción de un triángulo isósceles por parte del sujeto H

*fase 3. transición del pensamiento no algebraico al pensamiento algebraico.*

Luego que los sujetos expresan un caso de forma exacta, los entrevistadores trabajan con los sujetos en la construcción de muchos casos, caso a caso, dando especial importancia a las relaciones entre los ángulos. Este proceso va de la mano con la construcción de cada caso, hasta el punto que cada sujeto se ve enfrentado a una posibilidad de construcción que le cuesta creer; casos como: no pensaría en un ángulo que mida, por ejemplo, el ángulo de vértice A mida 1 y el otro 122] (el sujeto hace referencia al ángulo ABC) [uyy no se puede ¿o sí? ]...; “[Es que no estoy segura, dame un segundito porque si lo intento con un rectángulo, no estoy segura que si me pueda dar uno...]”, y una vez que puede construir ese caso “inimaginable” y observar que es posible, surgen esquemas de comunicación como ([si se puede, no lo puedo creer], [y sí nos da]).

A partir de esto, los sujetos ven que ya no es suficiente hablar de casos aislados, por lo que es necesario hablar de las relaciones entre los ángulos encontradas en los casos que pudieron construir; esto se observa en esquemas de comunicación como: [existen dos ángulos con infinitas posibilidades de dar el tercero con 57]; [Digamos que yo digo que el ángulo BAC tiene



1° ¿sí? y el ángulo ABC tiene 122°, poniendo esas dos y empezando a rotar que el que tiene 1° vaya subiendo hasta llegar a 122°, y el otro vaya bajando hasta llegar a 1°, todas esas son las posibilidades de que el ángulo ACB de 57]; cómo se puede observar, en este punto los sujetos ya no se refieren a medidas, han cambiado su discurso, como fruto de este proceso se empiezan a consolidar medios semióticos de objetivación en palabras claves como: -infinitas posibilidades, cualquier caso, todas, para representar el carácter indeterminado de las medidas que poseen los objetos.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores, en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación que presentan los sujetos, y en color rosado oscuro las palabras clave como medios semióticos que corresponden a la identificación de la cantidad indeterminada.

### **SUJETO B**

**#273 E1:** Con las herramientas que hemos visto en DGPad-Colombia, ¿Hay alguna forma de conseguir eso que usted está diciendo?

**#274 SB:** [si, pues sería por casos, digamos, por ejemplo, pues yo me imagino que debe existir alguna generalización, casi no conozco la herramienta] (el sujeto hace ángulo fijo de A a B con vértice en B, el cual mide 139°) [uy no, este se pasa, o bueno, digamos que este mida 100] (el sujeto cambia el valor del ángulo fijo  $A5=100$ ) (véase figura 47)

**# 276 SB:**

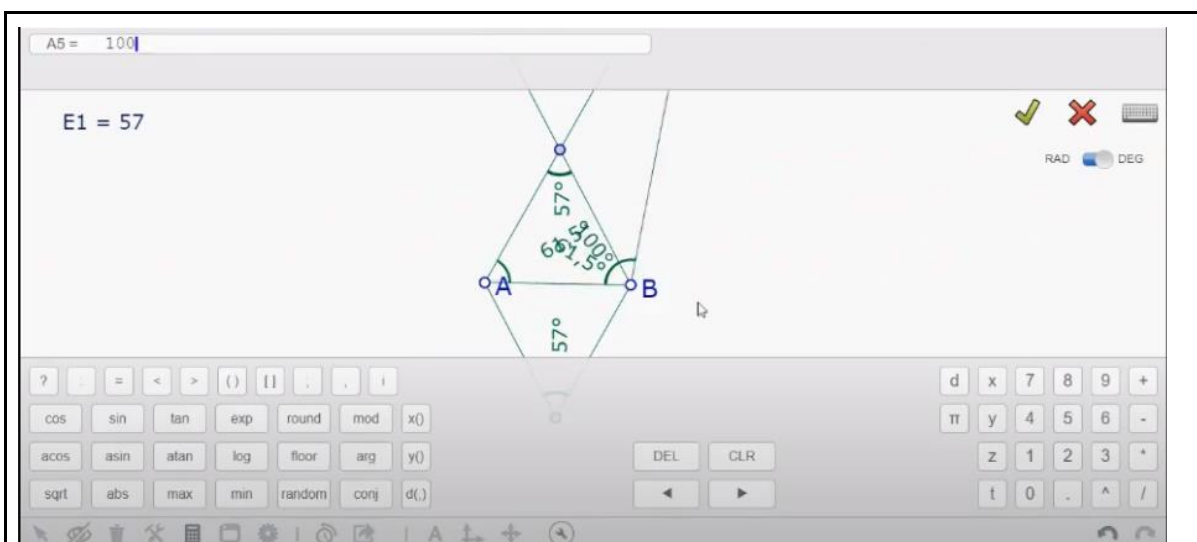


Figura 47 Construcción de un ángulo de medida  $100^\circ$  con la herramienta ángulo fijo por parte del sujeto B

**#278 SB:** [100] (el sujeto hace ángulo fijo de B a A con vértice en A, y cambia su medida en la calculadora  $A6=23^\circ$ ) [este por ahí 20, 23, y ahí tendría otro  $57^\circ$ ] (el sujeto traza punto de intersección P3 entre las semirrectas formadas por los ángulos A5 y A6, y mide el ángulo AP3B con la herramienta ángulo, comprobando que también da  $57^\circ$ ) [ahí está, ¿sí?] (véase figura 48)

**#279 SB:**

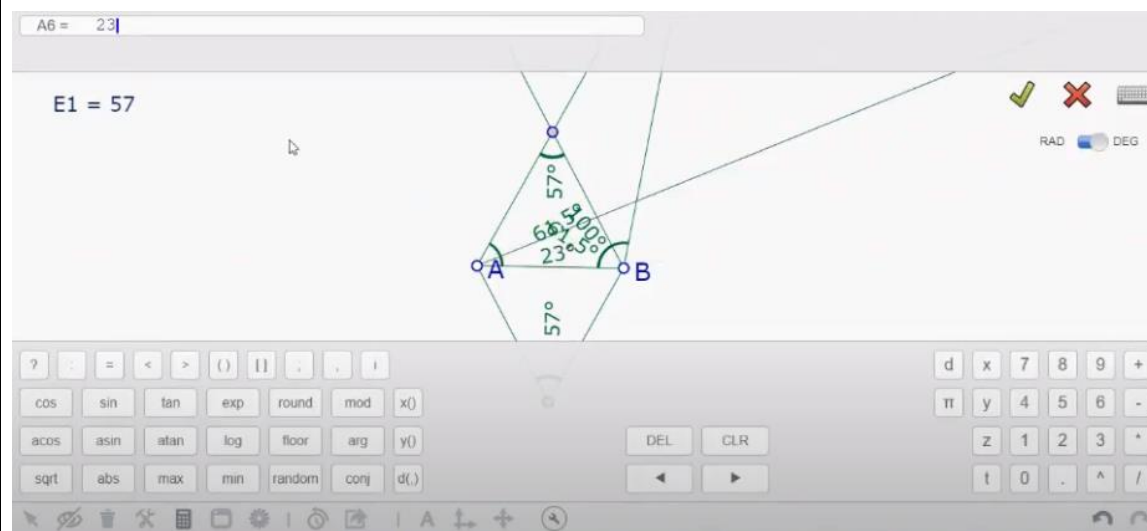


Figura 48 Construcción de un segundo ángulo de medida  $23^\circ$  por parte del sujeto B

**#285 SB:** [no pues nada, yo, el ángulo que tenemos de 57 ¿no?, entonces pues ya sabemos que la resta da 123 entonces en el primer caso del triángulo isósceles, pues lo que hicimos fue coger 123 y dividirlo entre 2 para construir ángulos con esa medida, que da pues 61.5. y la intersección de esas rectas que se construyen pues dan el ángulo de 57, pero el 123 se puede escribir de varias formas, lo que yo hago es simplemente dos triángulos, dos ángulos perdón, que en su suma de sus ángulos no necesariamente tienen que ser iguales, pero la suma de esos debe dar 123, entonces estoy construyendo un ángulo de  $100^\circ$  y otro de  $23^\circ$  y donde se juntan las rectas da el 57 y así pues pueden salir muchos casos, digamos un ángulo de 50 y otro de ¿53?, no perdón, 73, que en su totalidad da 123 y pues donde se intersecten esas rectas va a dar el ángulo de 57]

**#287 E1:** Lo que haría si encontraría son los puntos que usted quisiera, siempre y cuando usted estableciera una medida,

**#288 SB:** [sí, pero pues ya daría muchos casos, porque pues, por ejemplo, si se empiezan a usar enteros, o decimales]

## **SB2 ÁNGULOS**

*Nota: En la segunda sesión con el sujeto B se retoma lo visto en la sesión pasada y ante la situación aparecen apreciaciones similares a las vistas anteriormente.*

**#187 SB:** [pues si por ejemplo aquí en este caso los ángulos son de 61.5 ¿sí? ambos] (El sujeto señala la construcción) [entonces lo que se le quita a uno se le manda al otro, lo que se le resta a un ángulo se le suma al otro para que siga conservando esa suma de 123]

**#188 E1:** listo, ¿podría decir un ejemplo?

**#189 SB:** [por ejemplo quitarle el 1.5 a este ángulo] (El sujeto señala el ángulo de

vértice B) [al ángulo de vértice B y se le suma al ángulo de vértice A, para que quede el ángulo A quede de 63 y el de B de 60]

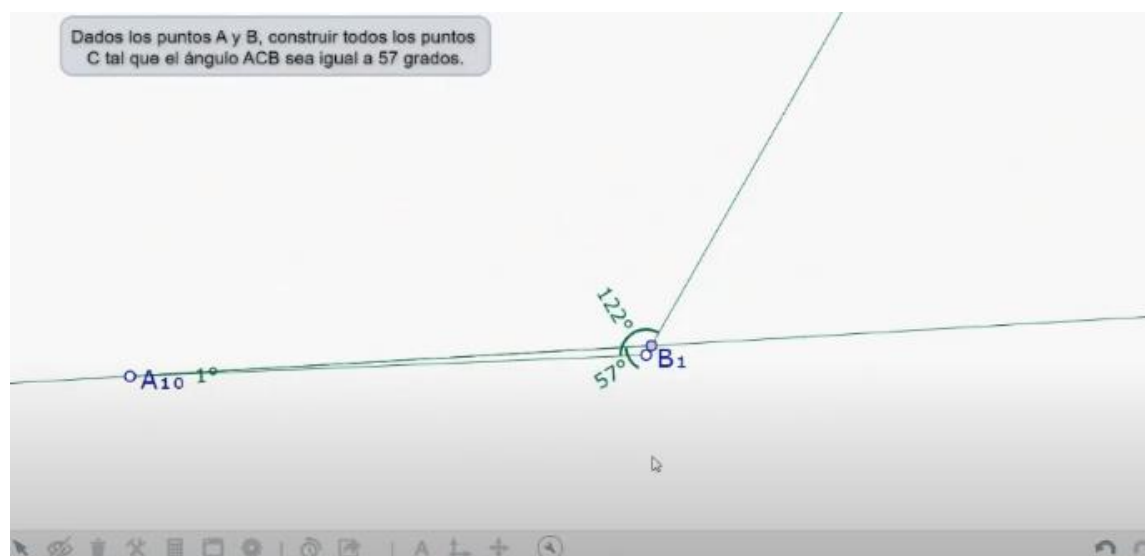
**#193 E1:** ¿qué otro caso podría mencionar aparte de ese 60, 63?

**#194 SB:** [ush, pues habría que establecer, espere, pues ese caso que les dije aplica para esas variaciones pequeñas, pero no sé hasta qué punto, habría que mirar hasta qué casos son válidos, porque no pensaría en un ángulo que mida, por ejemplo, el ángulo de vértice A mida 1 y el otro 120] (el sujeto hace referencia al ángulo ABC) [uyy no se puede ¿o sí?]

**#195 E1:** Inténtelo si quiere, a ver qué pasaría con esa hipótesis que está diciendo, que uno mida  $122^\circ$  y el otro mida  $1^\circ$  o ¿algo así dijo?

*Nota: El sujeto a partir de ángulos fijos construye el caso donde  $A10=1$  y  $A2=122$  tal que  $ACB=57^\circ$  (véase figura 49)*

**#213 SB:**



*Figura 49 Ángulos  $CAB=1^\circ$  y  $ABC=122^\circ$  realizados con la herramienta ángulo fijo por parte del sujeto B*

**#214 SB:** [si se puede, no lo puedo creer]

**#217 E1:** si quiere puede mencionar más casos, ¿cuántos podría haber?

**#218 SB:** [no pues viendo eso, se pueden uff, la gracia es que un ángulo no mida 0, porque el ángulo mmm sí, porque si el ángulo mide por ejemplo el de vértice A, tiene que no medir 0, es la única condición, no, espere, espere, no, porque si esa suma esos dos ángulos es 123 en cualquier caso, no importa si el ángulo de vértice A mide 0,001 el otro debe medir lo que le falta para completar el 123 y ese caso también es válido, en este ejemplo se dio, yo no creía pero sí. Entonces en cualquier caso se puede realizar la suma de esos ángulos, la intersección de esos segmentos complete el ángulo de 57, o sea tendría que ser que un ángulo exista por así decirlo, que uno exista y que el otro complete la suma de 123]

## SUJETO F

**# 86 E2:** Sí, digamos que tienes el ángulo de 57, ya sabes que es una condición que debe cumplir, y estamos mirando los ángulos de vértice en A y vértice en B, hiciste el caso para cuando cada uno de ellos mide 61.5, entonces por ejemplo ¿qué tuviste en cuenta para que cada uno midiera 61.5?

**#87 SF:** [Pues la propiedad que me diste de la suma, pero si tú lo quieres, si lo podemos hacer, pero pues el ángulo B ya no va a ser, ya no va a ser un triángulo isósceles sino va a ser un escaleno creo que se llama]

**#88 E2:** Okay, por ejemplo ¿podrías mostrar otro caso exacto donde esos ángulos tengan una medida distinta?

**#89 SF:** [Si, espérame, ya lo construyó]

**#100 SF:** (el sujeto construye segmento P1P2 (puntos sin etiqueta), luego crea ángulo fijo (A1) que pasa por P2 con vértice en P1 y amplitud  $63^\circ$ , luego crea ángulo fijo (A2) que pasa por P1 con vértice en P2 y amplitud  $60^\circ$ ) (El sujeto construye A1 y A2 pero no de cualquier medida, tantea que uno sea de  $63^\circ$  y el otro de  $60^\circ$  para que cumpla la condición de sumar  $123^\circ$  y así también se cumpla la condición inicial de  $ACB=57^\circ$ )

**#103 SF:** (el sujeto marca punto de intersección (P3) entre ambas semirrectas y verifica midiendo el ángulo P2P3P1 (el ángulo que corresponde a ACB)) (véase figura 50)

**#104 SF:**

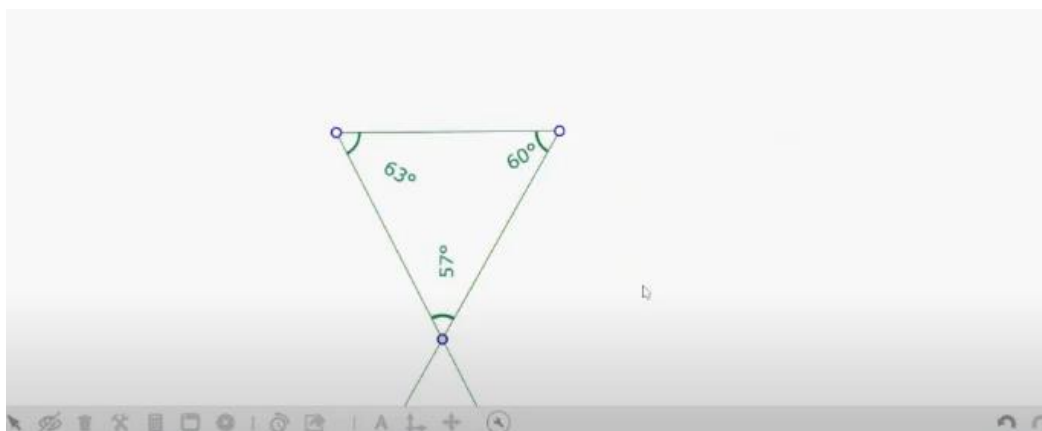


Figura 50 Construcción de los ángulos de medida  $63^\circ$  y  $60^\circ$  por parte del sujeto F con la herramienta ángulo fijo

**#105 SF:** [listo]

**#106 E2:** ¿qué tienen en común esos casos exactos?

**#107 SF:** [¿a parte del ángulo dado?]

**#108 E2:** si, a parte del ángulo dado

**#109 SF:** [a parte que sumados dan 180 y todos forman un triángulo]

**#110 E2:** ¿Qué pasa con esos ángulos de vértice en A y vértice en B?

**#111 SF:** [¿cómo así?]

**#112 E2:** si, dices que esa suma de 180, por ejemplo, qué tienes en cuenta para construir el ángulo de vértice en A y de vértice en B

**#113 SF:** [resto 180-57 y eso lo reparto entre los dos que me hacen falta]

## SUJETO H

**#144 E2:** Si ya dijiste que los ángulos por así decirlo "de la base" deben medir 123, ¿sólo dos ángulos que miden 61.5 cumplen esa condición?

**#145 SH:** [Creo que sí]

**#146 E2:** ¿Es decir que no existen otros dos ángulos que miden 123?

**#147 SH:** [Ah bueno, no, a ver, esto es en caso de que sea un triángulo isósceles ¿no?]

**#148 E2:** Okay y para un triángulo que no sea isósceles

**#149 SH:** [Es que no estoy segura, dame un segundito porque si lo intento con un rectángulo, no estoy segura que si me pueda dar uno, voy a intentarlo, vamos a dejar esto a un lado como una de las opciones] ,[vamos a crear otro punto] (el Sujeto construye el punto A\_10) [me dijiste que el ACB tenía que dar 57, o sea que si yo hago el A y el B] (el Sujeto construye el punto B\_1) [y pongo la condición de que ACB tiene que dar 57] (el Sujeto crea el ángulo fijo de A\_10 a B\_10 de medida 68°) [ACB]

**#150 E2:** Nómbrame

**#151 SH:** [¿Dime?]

**#152 E2:** Nómbrame otro ejemplo en el que dos ángulos midan 123°

**#153 SH:** [Lo que pasa es que si todos tienen que medir 180 ¿sí? pero yo digo que

uno de los ángulos mide 57, y que el otro ángulo mide 90 grados para ser ese un ejemplo con un triángulo rectángulo, el tercer ángulo me tendría que medir 33, entonces 90, que un ángulo mida 90 y que el otro ángulo mida 33 también es otro ejemplo en que se cumpliría.]

**#154 E2:** Listo, construye ese caso

**#155 SH:** (El Sujeto cambia la medida del ángulo  $A_4=90$  ( $A_4$  siendo el ángulo fijo de  $A_{10}$  a  $B_1$ ) [digamos que esto mide 90 y que el ángulo  $BAC$  va a medir 33] (el Sujeto construye un ángulo  $A_5$  fijo de  $B_1$  a  $A_{10}$  de medida  $33^\circ$ ) [en ese caso también el punto de intersección nos tendría que dar el ángulo de  $57^\circ$ ] (el sujeto construye un punto  $P_1$  intersección de las semirrectas de los ángulos  $A_4$  y  $A_5$  y luego mide el ángulo  $A_6$  que pasa por los puntos  $A_{10}$ ,  $P_1$ , y  $B_1$ , el cual mide  $57^\circ$ ) [y sí nos da] (véase figura 51)

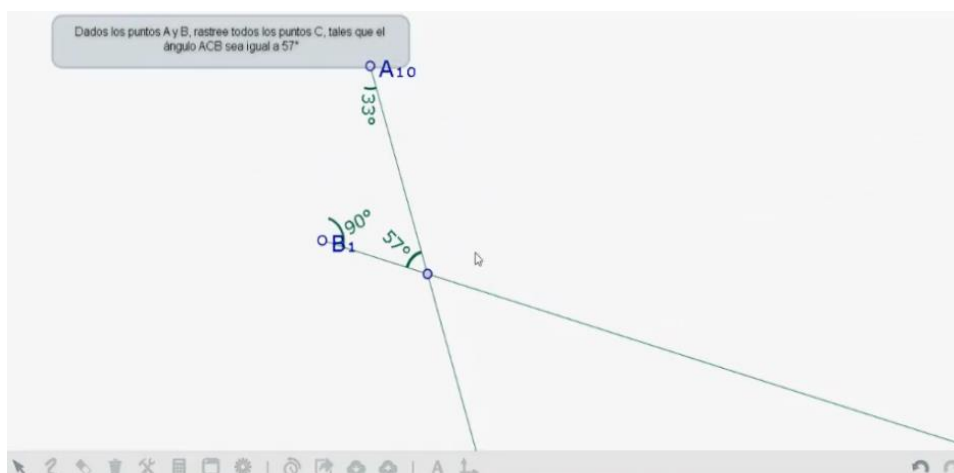


Figura 51 Construcción de los ángulos de medida  $90^\circ$  y  $33^\circ$  por parte del sujeto H con la herramienta ángulo fijo

**#156 SH:** [Pero, si eso es así hay infinitas posibilidades ¿no?, 180, 57-###, o sea, existen dos ángulos con infinitas posibilidades de dar el tercero con 57, porque si ponemos por ejemplo, si ponemos el A como 1] (el Sujeto cambia el valor del ángulo  $A_5=1$  pero no lo guardada) [ponemos el A como 1, ponemos el ángulo de B como 122 ] (cambia el ángulo



A4=122), [en ese caso también el ángulo para C va a dar 57 ya que ahí, desde que uno de los puntos tenga un ángulo de  $1^\circ$  y el otro de  $122^\circ$  las posibilidades son hasta que cambie digamos. Digamos que yo digo que el ángulo BAC tiene  $1^\circ$  ¿sí? y el ángulo ABC tiene  $122^\circ$ , poniendo esas dos y empezando a rotar que el que tiene  $1^\circ$  vaya subiendo hasta llegar a  $122^\circ$ , y el otro vaya bajando hasta llegar a  $1^\circ$ , todas esas son las posibilidades de que el ángulo ACB de 57, ahora cómo ponerlas todas que se vean, no estoy segura.]

En el momento que los sujetos contemplan la posibilidad de innumerables soluciones para el problema, los entrevistadores plantean el trabajo sobre un ángulo variable como una herramienta que permite recoger todos los casos individuales en una sola construcción. Un primer esquema de acción común en los sujetos es trabajar ese ángulo variable como un ángulo fijo, ya que los sujetos utilizaban expresiones en la calculadora como  $A2=123-52.7$ ,  $A5=123-44,7^\circ$ ,  $A8=77$  donde no está presente la etiqueta o una *expresión* que represente el ángulo indeterminado, en cambio se utiliza su medida, por lo que la construcción se desarma al arrastrar, aspecto que se observa cuando los sujetos presentan esquemas de comunicación [uyy no, espere que algo se dañó], ah no me quedó, No me va quedar porque como lo construí con el D no va a quedar exacta, [ahí ya comienza a cambiar uno sólo y ya no nos da todos los puntos ¿no?].

En el caso de los sujetos B y H un comportamiento que dista de los vistos en el grupo de pensamiento algebraico es la concepción de un punto que no está en el enunciado del problema (el punto libre del ángulo variable); estos se sorprenden al verlo en la construcción del ángulo variable e incluso ignoran su uso en la solución del problema, con esquemas de comunicación como: ah pero este punto no cuenta ¿o sí?, no, no cuenta], [sí, pero si yo pongo el ángulo de longitud dada no me va a dar directamente a P], [pero entonces ahí P me tocaría arrastrarlo hasta

donde me dé el ángulo ¿no?]. Estos esquemas pertenecen a los macroesquemas de variación no pertinente en el software, específicamente al llamado “Omisión del punto libre del objeto variable”.

En los casos de los sujetos F y H, es interesante observar que estos contemplan borrar el ángulo variable que los entrevistadores le habían sugerido construir para cambiarlo por un ángulo fijo, lo que permite deducir que el sujeto no se siente cómodo al utilizar el ángulo variable precisamente porque no sabe cómo usarlo en la solución del problema y por lo tanto recurren a esquemas de acción utilizados anteriormente.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores y en color rosado claro los esquemas de comunicación que presenta el sujeto.

#### SEGUNDA SESIÓN DEL SUJETO B

**#221 E1:** perfecto, muy bien, entonces para tratar de construir eso que usted está diciendo vamos hacer lo siguiente, si quiere en una nueva pestaña o borre lo que tenga, como le parezca más cómodo vamos a crear un punto A y punto B, listo, con la herramienta ángulo va crear el ángulo B A y el punto que salga, de la medida que quiera

**#224 SB:** [listo] (El sujeto abre una nueva pestaña de DGPad-Colombia, crea y etiqueta los puntos A y B, luego crea el ángulo A1 de amplitud 52.7) (*véase figura 52*)

**#225 SB:**

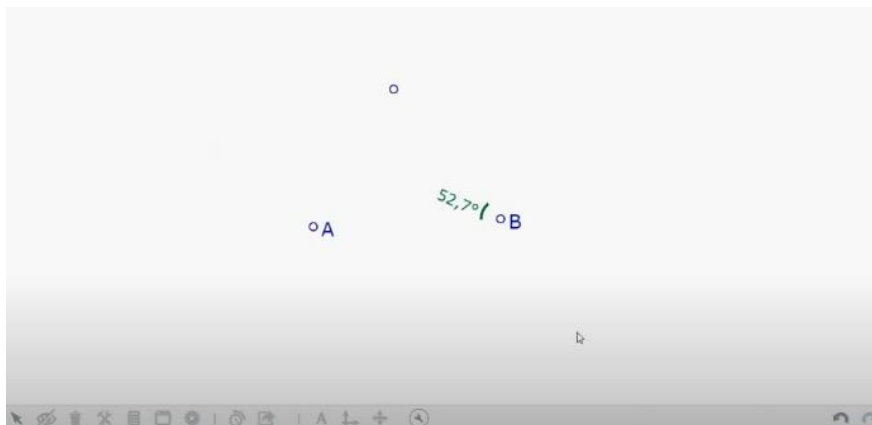


Figura 52 Sugerencia del ángulo variable por parte de los entrevistadores al sujeto B

**#226 E1:** listo, ya tiene un ángulo sobre el vértice B ¿qué forma debería tener el otro ángulo para encontrar un punto C tal que sea ACB igual a  $57^\circ$ ?

**#227 SB:** [el otro ángulo, o sea el ángulo en A]

**#228 E1:** exactamente.

**#233 SB:** [ah ya entendí, ah, pero este punto no cuenta ¿o sí?, no, no cuenta] (El sujeto señala el punto sin etiqueta)

**#235 SB:** [bueno, póngale cuidado] (El sujeto crea el ángulo fijo que pasa por B de vértice A y amplitud  $52^\circ$ , luego señala el ángulo A2 y activa calculadora realiza la operación de  $123 - 52.7$  obteniendo 70.3 como medida del ángulo fijo)

**#236 SB:** [pues sería a 123 se le resta  $52.7^\circ$  y esa resta da 70.3 que es lo que debe medir este (el sujeto hace referencia al ángulo CAB) ¿eso es lo que me está preguntando? ¿sí?] (véase figura 53)

**#238 SB:**

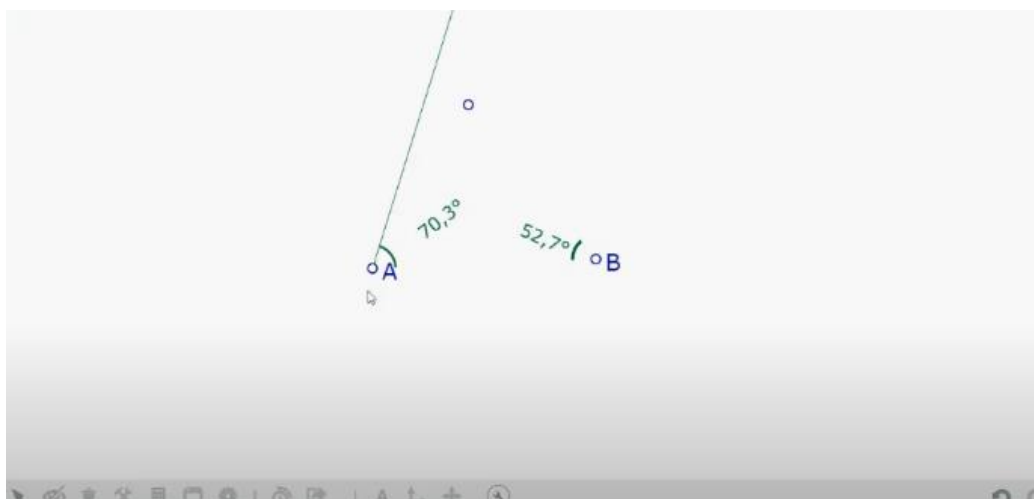


Figura 53 Construcción de un ángulo fijo teniendo en cuenta únicamente la medida del ángulo variable por parte del sujeto B

#239 E1: mmm sí, ¿dónde estaría ese punto C?

#242 SB: (El sujeto crea el segmento AB, luego crea recta por B y punto sin etiqueta (este punto conforma el ángulo A1), crea punto de intersección entre la recta y la semirrecta y mide con la herramienta ángulo al ángulo ACB)

#243 SB: [se supone que es este] (el sujeto hace referencia al punto de intersección) [tiene que medir 57, sí, véalo, ahí está] (véase figura 54)

#244 SB:

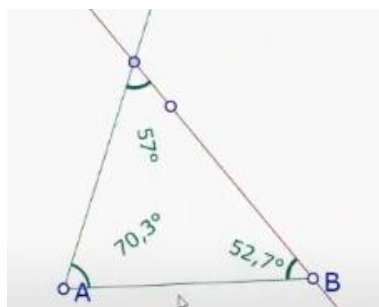


Figura 54 Construcción del punto de intersección de una construcción aproximada por parte del sujeto B

#245 E1: bien, ahora mueva la construcción, el punto A, el punto B

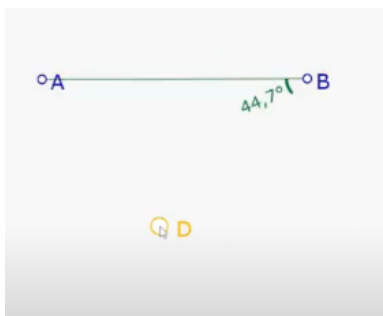
**#246 SB:** (El sujeto arrastra los puntos) [uyy no, espere que algo se dañó]

## SUJETO F

**#122 E2:** vas a crear con la herramienta ángulo el ángulo que sea ABD

**#123 SF:** (el sujeto construye ángulo que pasa por A de vértice en B y amplitud  $44.7^\circ$ ) (véase figura 55)

**#124 SF:**



*Figura 55 Sugerencia del ángulo variable por parte de los entrevistadores al sujeto F*

**#125 E2:** teniendo en cuenta lo que ya realizaste ¿cómo creo el otro ángulo en este caso con vértice en A que cumpla la condición que siempre sea  $180-57$ , ¿qué se te ocurre?

**#126 SF:** [al 123 le quitó el  $44.7^\circ$ ]

**#127 E2:** ¿con qué herramienta lo podrías realizar?

**#128 SF:** [con la de ángulo fijo y la pongo en la calculadora ¿lo hago?]

**#129 SF:** (el sujeto construye ángulo fijo que pasa por A de vértice en B y amplitud aleatoria, luego modifica su medida haciendo uso de la calculadora  $A5=123-44.7^\circ$ ) listo...

**#130 E2:** ¿cuál sería el punto C?, ¿dónde quedaría el punto C?

**#133 SF:** (el sujeto construye recta en B que pase por D y luego marca punto de intersección C entre la recta y la semirrecta) [y verifico ¿sí?]

**#135 SF:** (el sujeto verifica midiendo el ángulo ACB) [ah no me quedó ##] (véase figura 56)

**#136 SF:**

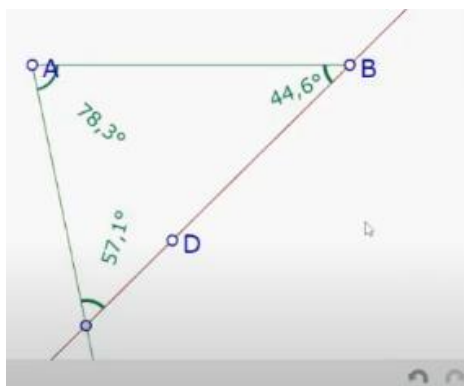


Figura 56 Construcción aproximada haciendo uso de un ángulo variable y un ángulo fijo por parte del sujeto F

**#137 E2:** mueve la construcción

**#138 SF:** [No me va quedar porque como lo construí con el D no va quedar exacta]

(el sujeto mueve el punto D)

**#140 E2:** y ¿cómo crees que se pueda hacer para que quede de manera exacta?

**#141 SF:** [pues en vez de utilizar el punto D yo creo a través del fijo] (el sujeto señala A, luego B y mueve el puntero de B hacia diagonal derecha) [y le pongo el 44.7 y pongo el punto de intersección, espérame lo hago]

**#143 SF:** (el sujeto elimina el ángulo variable, crea ángulo fijo que pasa por A de vértice en B y amplitud  $61^\circ$  y luego modifica su amplitud  $A_4=44.7$ )

**#145 SF:** [listo ahora si me va dar] (el sujeto marca el punto de intersección (C punto sin etiqueta) entre ambas semirrectas y verifica midiendo el ángulo ACB) (véase figura 57)

**#146 SF:**

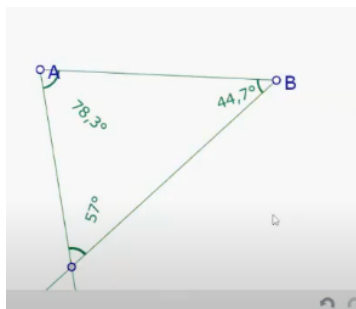


Figura 57 Construcción a partir de dos ángulos fijos por parte del sujeto F

## SUJETO H

#163 SH: (El Sujeto construye dos puntos y los etiqueta como A\_20 y B\_2)

#164 E2: ¿listo?, y vas a crear un ángulo con la herramienta ángulo de A, vértice en B y cualquier punto

#165 SH: (El Sujeto crea el ángulo A\_20B2P1) [ya]

#168 E2: Si quieres crea semirrecta de B a ese punto sin etiqueta (el E se refiere al punto P1)

#169 SH: [Listo] (véase figura 58)

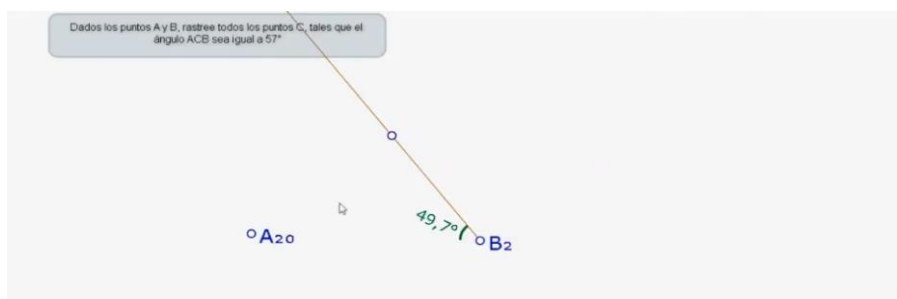


Figura 58 Ángulo variable sugerido por los entrevistadores al sujeto H

#170 E2: listo, este ángulo puedes modificar su medida sólo con el arrastre de ese punto ¿cierto?

**#171 SH:** [si, sólo con el arrastre]

**#172 E2:** que está sobre la semirrecta

**#173 SH:** [si]

**#174 E2:** listo, ahí tienes un ángulo que puede ser ángulo de cualquier medida

¿verdad?

**#175 SH:** [si]

**#176 E2:** listo, entonces si ya tienes este ángulo que es el que está sobre el vértice B y ya conoces el del vértice en C, ¿de qué forma debe ser el ángulo que está en el vértice en

A

*Nota: A partir de esta pregunta, el sujeto habla sobre los segmentos como una estrategia de solución, pero esta es errónea, por lo que se vuelve a presentar el ángulo variable para que el sujeto trabaje sobre este en una búsqueda de la solución.*

**#190 E1:** eso, cualquiera no importa, tú habías dicho antes que el ángulo ACB tiene que ser de  $57^\circ$  por lo que dice el widget ¿sí? y habías dicho que para que los ángulos restantes todos sumaran 180, los ángulos CAB y ABC tenían que sumar ambos 123 y viste algunos casos, un caso de ellos fue cuando los dos ángulos eran iguales que era 61,5 y 61,5 y pues 61,5 más 61,5 da 123

**#191 SH:** [ si]

**#192 E1:** Listo, entonces en este caso, se te puso un ángulo dado ya sobre el vértice B, entonces la pregunta sería ¿cómo tendría que ser el ángulo que está sobre el vértice A para que se cumpla esas condiciones que dijiste?

**#193 SH:** [ Pero las condiciones que dije para el primer ejemplo que era cuando nos daba isósceles ¿sí?]



**#194 E1:** si, todas las condiciones que has dicho, has dicho que todo tiene que sumar 180 por ejemplo, esa es una condición

**#195 SH:** [si, los tres ángulos de un triángulo, los ángulos internos deberían sumar 180 en base a eso, si nosotros a 180 le restamos 57 que es el ángulo que me están pidiendo el ángulo ACB eso da 123, entonces si estamos haciendo la opción con un triángulo isósceles, los otros dos ángulos por obligación deberían medir  $61.5^\circ$ , pero en la segunda opción que di que es con un triángulo rectángulo hay varias formas de, o sea los dos ángulos restantes podrían estar oscilando entre 1 y 122 igual nos daría el ángulo de  $57^\circ$  restante, lo que no sé es cómo construirlo porque no sé cómo hacer para mostrar eso, que un ángulo pueda estar entre 1 y 122 y ahí anclar los otros dos ángulos ¿sí? ]

*Nota: Como el sujeto no pudo abordar la actividad con un ángulo variable, los entrevistadores se devolvieron a trabajar algunos casos con la herramienta ángulo fijo para que este pudiera construir algunos casos, y a partir de esta estrategia pudiese volver al trabajo con el ángulo variable.*

**#198 E1:** entonces tu dijiste lo siguiente, creo un ángulo sobre el vértice B, de A a B con el ángulo fijo, si quieres de 40

**#199 SH:**(el Sujeto crea ángulo que pasa por A de vértice en B y amplitud  $36^\circ$  luego activa calculadora y modifica su medida a  $40^\circ$ ) [listo] (véase figura 59)

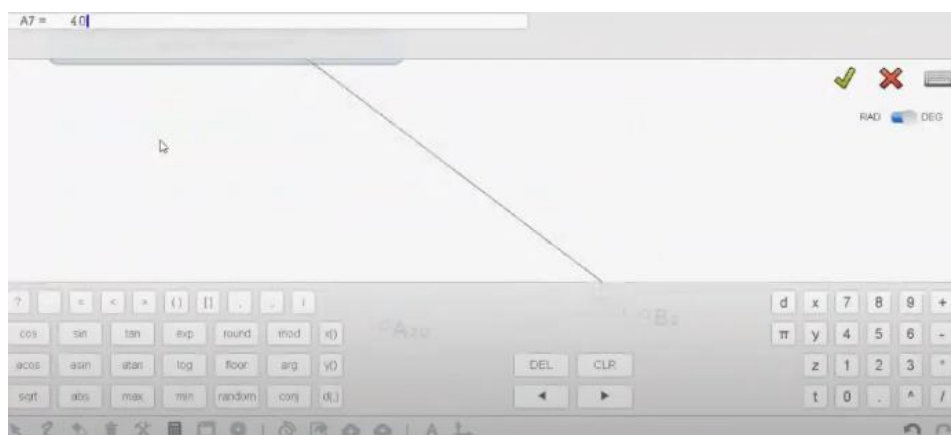


Figura 59 Sugerencia de un ángulo fijo por parte del sujeto H

**#200 E1:** listo por ejemplo tienes eso ¿cómo harías para encontrar un punto C teniendo eso?

**#201 SH:** [le resto a 123 los 40 y ahí me da el siguiente ángulo]

**#202 E1:** ¿y tú podrías construir ese ángulo? con las herramientas que hemos visto

**#203 SH:** [ si, pues con la misma de ángulo de longitud dada, construiría el ángulo BAC y le cambiaría la longitud a 83] (el sujeto crea ángulo que pasa por B de vértice en A y amplitud aleatoria luego activa calculadora y modifica su medida a  $83^\circ$ ) (véase figura 60)



Figura 60 Construcción de un segundo ángulo fijo de medida  $83^\circ$  por parte del sujeto H

**#205 SH:** [y el punto de intersección entre esas dos semirrectas nos va dar el punto C] (el sujeto marca punto de intersección entre ambas semirrectas), [pero lo que yo todavía no logro es cómo hacer para que esos ángulos que ya hicimos con longitud dada puedan oscilar entre  $1^\circ$  y  $122^\circ$ ]

*Nota: Luego de este abordaje, el sujeto vuelve a plantear la posibilidad de un arco que contenga esos puntos, pero como el objetivo es observar cómo el sujeto hace uso de las*

*medidas de los ángulos para establecer dependencias, se le plantea que no haga uso del arco, sino que en cambio use las herramientas vistas en la sesión de experimentación (ángulo variable, ángulo fijo y calculadora). Por ello nuevamente se le plantea el ángulo variable para que aborde el problema*

**#242 SH:** [pero si pongo digamos, si yo hago un ángulo dado (el sujeto selecciona el punto A y activa la barra herramientas y luego la desactiva) a no pero el que me de 57]

**#243 E1:** Bueno, ya sabes que el ángulo ACB tiene que medir 57, tienes el ángulo ABP que mide  $46^\circ$  ¿cuánto debería medir el último ángulo del triángulo? (véase figura 61)



Figura 61 Ángulo variable sugerido por los entrevistadores al sujeto H

**#244 SH:** [ $73^\circ$  ¿sí?]

**#245 E1:** ¿tú ya sabes construir un ángulo con la medida dada?

**#246 SH:** [sí, pero si yo pongo el ángulo de longitud dada no me dar directamente a P] (el sujeto hace referencia al ángulo APB) [yo pongo este ángulo,] (el sujeto crea ángulo fijo que pasa por B de vértice en A y amplitud aleatoria) [listo, me tiene que dar, dijimos 77, entonces yo ya lo pongo la medida] (el sujeto modifica la medida del ángulo

fijo  $A8=77$ ) [pero entonces ahí P me tocaría arrastrarlo hasta donde me del ángulo ¿no?]

(véase figura 62)

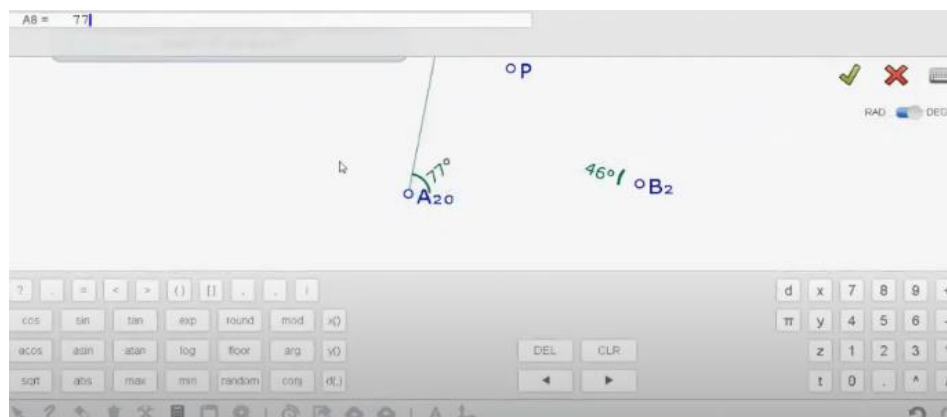


Figura 62 Construcción de un ángulo fijo de medida  $77^\circ$  por parte del sujeto H

#247 E1: aunque por ejemplo mira el ángulo A, B semirrecta no tiene ningún punto, en realidad no es que tenga ningún punto la semirrecta es una colección infinita de puntos ¿sí?

#248 SH: [si]

#249 E1: y el ángulo ABP tiene un solo punto, pero eso no significa que ese punto sea el único que sea medida 46, significa que ## la semirrecta BP es toda la colección infinita de puntos que tienen esa misma amplitud

#250 SH: (el Sujeto crea la semirrecta BP y marca punto de intersección C (punto sin etiqueta)) entre ambas semirrectas) [es decir que en teoría este punto que los une acá debería ser C] (el sujeto señala punto de intersección) ¿cierto?]

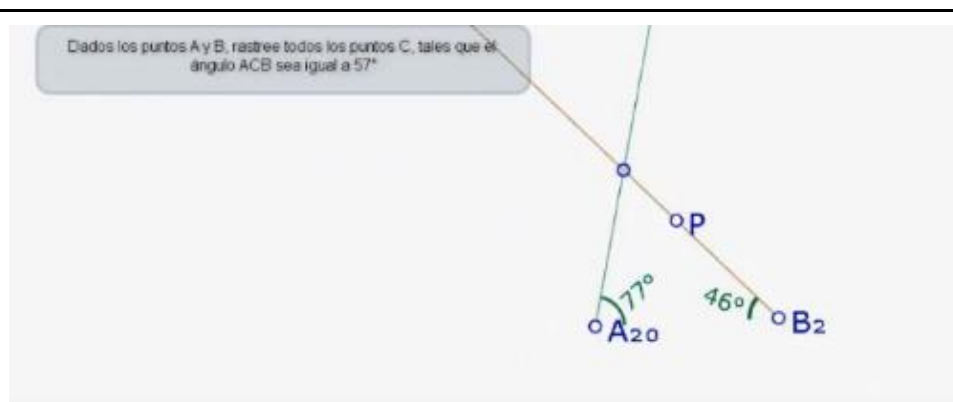


Figura 63 Construcción aproximada del sujeto H

#251 E1: si quieres puedes comprobar

#252 SH: (el Sujeto mide ángulo ACB) [si ¿qué pasa si yo muevo P?] (el sujeto mueve P) [ahí ya comienza a cambiar uno sólo y ya no nos da todos los puntos ¿no?]

#253 E1: listo ¿cómo harías para que se mantenga al arrastrar?

#254 SH: [no sé] (el sujeto mueve el punto P)

#255 E1: por ejemplo, cuando mueves P ¿qué es lo que varía?

#256 SH: [ varían dos de los ángulos, pero entonces tendría que construir todos los ángulos con la longitud dada, o sea con la herramienta de ángulo de longitud dada]

*fase 4. movilización del esquema de pensamiento algebraico asistido con ayuda de los entrevistadores.*

La presencia de la indeterminancia y la analiticidad en el contexto del software aparecen con ayuda de parte de los entrevistadores. Las ayudas presentadas buscan que los sujetos expresen en la calculadora tanto el ángulo variable como su relación de dependencia con el ángulo fijo.

A partir de estas ayudas, los sujetos movilizan el carácter de indeterminancia en el software a través de sus esquemas de comunicación como [Pues el A1 es un ángulo X], donde el

ángulo variable adquiere rol de medio semiótico para el sujeto para referirse a la cantidad variable e indeterminada; esto puede verse reflejado en la necesidad que tienen los sujetos de referirse a este no desde su medida sino a través de expresiones o su etiqueta. Producto de este proceso, los sujetos movilizan esquemas de acción en el software al establecer expresiones en la calculadora. Estas son de dos tipos: 1) para referirse a la cantidad indeterminada en expresiones como  $E3=A1$ , siendo A1 el ángulo variable 2) para referirse al ángulo fijo mediante una relación de dependencia, en expresiones como  $A2= 123-A1$ , presentando el carácter de designación simbólica propia de un pensamiento algebraico. El ángulo fijo adquiere rol de medio semiótico para el sujeto para expresar el carácter analítico de la cantidad indeterminada presente en la relación de dependencia.

Los macroesquemas de pensamiento algebraico en el software son movilizados por los sujetos con ayuda de los entrevistadores. En este proceso se pueden observar esquemas de acción y de comunicación como: (el sujeto activa la traza al punto C, mueve el punto P)..., acompañadas de afirmaciones como: sería como una semicircunferencia, como un arco..., [ahora si me cumple]..., los representa a todos..., ya si uno le pone el arrastre se hace la figura de todos los posibles C que se den..., Es Toda la línea azul ¿no?, que es el lugar geométrico]..., [Ajá, si, y pues esa línea azul, toda esa línea azul es una sucesión de puntos, y todos esos puntos cumplen la condición que pide el ejercicio]

Se puede apreciar que a pesar de que los sujetos encuentran la solución del problema, hay aspectos sobre los que los sujetos no tienen total control especialmente al referirse a lo indeterminado, al trabajo con objetos variables y al operar con el objeto variable.

En el caso de los sujetos B y F algunos errores son:

1) No considerar el punto libre del ángulo variable como un objeto importante en la solución del problema, como se puede observar en esquemas de acción como, oculta las semirrectas y el punto P1

2) Confundir el punto C y el punto libre por lo que al preguntar por el primero, los sujetos no sepan dónde ubicarlo, o traten de ubicar el punto libre sobre la semirrecta del ángulo fijo en esquemas de acción como (el sujeto mueve el punto del ángulo variable, aunque intenta ubicarlo sobre la semirrecta).

Estos reflejan la presencia del indicador “Omisión del punto libre del objeto variable” del macroesquema “variación que no es pertinente en el contexto del software”, aspecto que es un obstáculo para los sujetos a la hora de concebir más casos, ya que al no disponer del punto libre no pueden observar los casos que deja la traza. Ante estos errores, los entrevistadores realizan acciones para que los sujetos consideren este punto en sus acciones. Luego de las ayudas, los sujetos pueden observar las soluciones del problema mediante la traza y el arrastre del punto libre.

En el caso del sujeto B se puede apreciar que no está seguro de su respuesta ya que al realizar la construcción pregunta a los entrevistadores [¿esa es la respuesta?] buscando la aprobación o desaprobación de su procedimiento, dejando entrever que el sujeto no tiene total dominio del esquema de solución.

El sujeto F muestra todos los puntos solución del problema a partir de crear un arco de tres puntos y define esos puntos como: todos los puntos que están sobre este semicírculo, este arco va a cumplir con eso, con esa condición, van a tener el mismo ángulo. Esta solución no es válida porque, aunque el sujeto construye a partir de las relaciones de los ángulos, se refiere al arco y no a la variación que genera ese arco.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores, en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación que presentan los sujetos, y en color rosado oscuro las palabras clave como medios semióticos que corresponden a la identificación de los caracteres de indeterminancia y analiticidad en el problema.

## SEGUNDA SESIÓN DEL SUJETO B

**#252 SB:** (El sujeto crea y etiqueta los puntos A y B) (El sujeto establece la *expresión*, E1=180)

**#253 E2:** ¿por qué creaste la *expresión* E1=180?

**#254 SB:** [porque esa es la suma de los ángulos internos de un triángulo]

**#258 SB:** (El sujeto establece la *expresión*, E2=57, crea el segmento AB)

**#271 SB:** [Yo lo estaba escribiendo por acá en un papel, tenía el contador 1 que es 180, el contador 2 que es 57 y me falta la parte de un contador 3 que sea  $A+B-57$  sea igual a 58, ush pero es que no sé cómo plantear el A y el B son los ángulos de acá] (el sujeto señala los ángulos P1AB y P1BA) [el ángulo A; ¿esto se puede nombrar?] (el sujeto se refiere al ángulo sobre el vértice A señalando a la vez su apertura) (el sujeto señala la apertura del ángulo P1AB), [ay sí ¿no?, espérense]

**#272: E1:** Sí, si quiere puede ponerle etiqueta con propiedades

**#281 SB:** (El sujeto etiqueta el ángulo P1AB como A2, y etiqueta el ángulo P1BA como A1) (véase figura 64)

**#285 SB:**



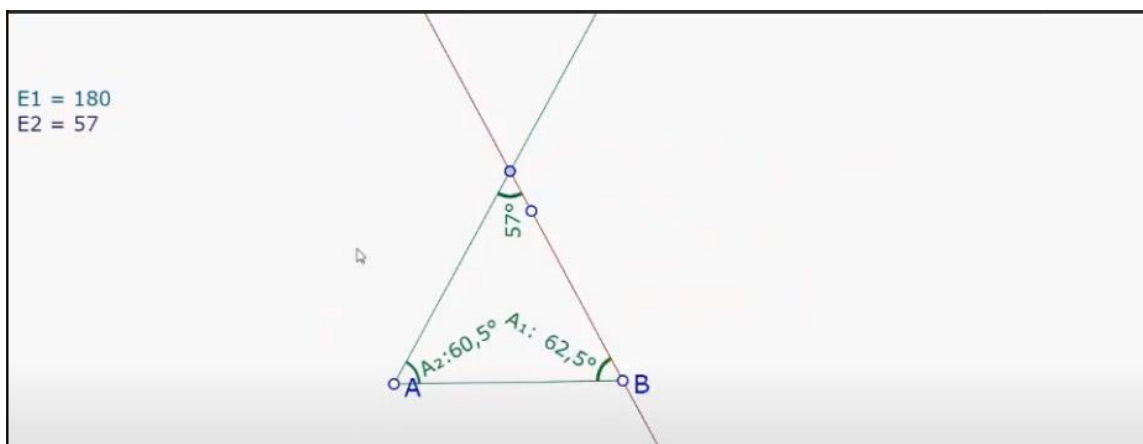


Figura 64 El sujeto B etiqueta los ángulos ABC y BAC

**#297 SB:** (El sujeto va moviendo el punto A) [o sea, es que, eh pues sí, está la ecuación que tengo  $A+B+57=180$ , ese tiene que ser la suma de los tres ángulos, ya un ángulo es fijo, que es 57, los otros dos son los que me generan el problema, pero es que no sé cómo ubicarlo en el programa para que boten distintos tipos de respuestas, no sólo]

**#303 E2:** Yo hago una pregunta antes de que inicie nuevamente la construcción, cuando construyó el ángulo A1, ¿Que tuvo en cuenta para construir el A2?, es decir, ah, el A2 tiene que ser de tal valor porque el A1 es de tal.

**#304 SB:** [ Pues el A1 es un ángulo X]

**#308 SB:** ... (El sujeto borra toda la construcción, crea el punto A, el punto B, segmento AB, ángulo ABP1 con la herramienta ángulo, etiqueta al ángulo ABP1 como A1, establece la expresión  $E3=A1$ , y la expresión  $E4=E1-E2-E3$ ) (El sujeto crea el ángulo fijo de B a A, y al cambiar su valor en la calculadora establece la expresión,  $A2=E4$ , luego mueve el punto B para mirar el comportamiento de su construcción) [vamos a hacer el siguiente (El sujeto establece la expresión  $E5=E3+E4+E2$ , obteniendo  $E5=180$ ) [uy sí, ujum] [El sujeto crea segmento AB, y la semirrecta con origen B hacia el punto P1, y ubica

el punto en la intersección de las semirrectas, luego oculta las semirrectas y el punto P1, con segmentos termina de construir el triángulo ABC, y procede a medir los ángulos, comprobando que el ángulo  $ACB=57^\circ$ , luego mueve el punto B para verificar que la propiedad se mantenga al arrastrar] [sí, ya, ahí es]

**#314 E1:** Listo, entonces, si quiere, eh, puede desocultar un objeto que usted ahorita ocultó porfa

**#315 SB:** [¿Desocultar?]

**#316 E1:** Sí, es que, ese puntico que está ahí (el entrevistador hace referencia al punto P1, que el sujeto había construido para el uso del ángulo A1)

**#317 SB:** [¿este?]

**#318 E1:** sí, y ¿puede moverlo porfa

**#319 SB:** [¿Puedo mover ese punto?, espere ¿ese?]

(El sujeto desoculta y mueve el punto P1 mientras pregunta)

**#320 E1:** Sí, exacto, listo, entonces, le da etiqueta porfa al punto C

**#321 SB:** [umm, espere] (el sujeto le da etiqueta al punto C)

*Nota: Adicionalmente la herramienta traza es presentada al sujeto por parte de los entrevistadores.*

**#322 E1:** y le da activar la traza al punto C también

**#323 SB:** (el sujeto le activa la traza al punto C) (véase figura 65)

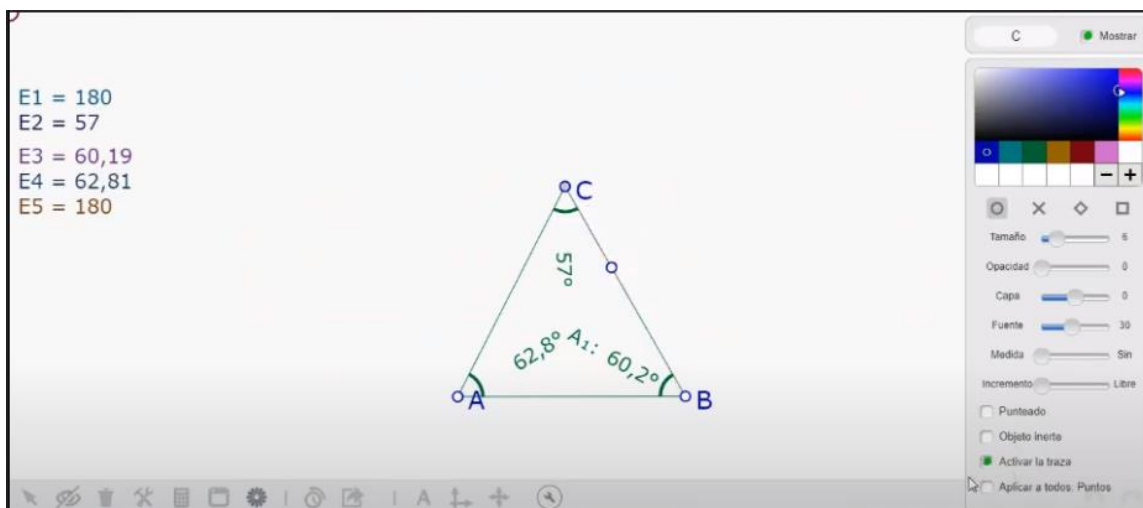


Figura 65 El sujeto B activa la traza del punto C

**#327 E1:** Entonces el problema era, dados los puntos A y B, construir todos los puntos C tal que el ángulo ACB sea igual a 57, entonces usted **¿cuáles pensaría que son los puntos C que estábamos buscando? y ¿qué condición tienen? para recapitular**

**#328 SB:** [Es Toda la línea azul ¿no?, que es el lugar geométrico] ++ Respuesta del problema al usar el arrastre ++

**#329 E1:** okay

**#330 SB:** [¿esa es la respuesta?]

**#331 E1:** no, pues es lo usted, sí, lo que observó

**#332 SB:** [esa línea azul que se va también es] (véase figura 66)

**#333 SB:**

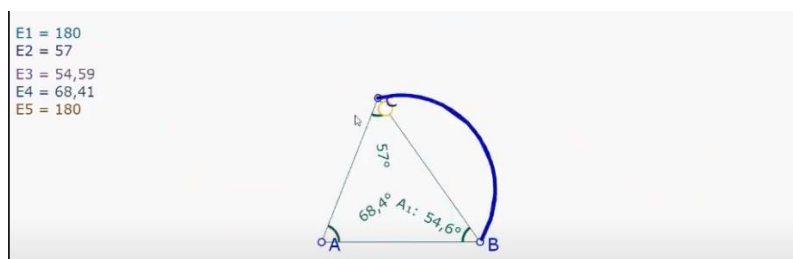


Figura 66 Movimiento del punto libre para mostrar la traza del punto C por parte del sujeto B

**#334 SB:** [Ajá, si, y pues esa línea azul, toda esa línea azul es una sucesión de puntos, y todos esos puntos cumplen la condición que pide el ejercicio]

## SUJETO F

**#161 E1:** si quieres colócale etiqueta al ángulo, le das click al ángulo y ahí te aparece una A con la flecha hacia arriba

**#162 SF:** (el sujeto coloca etiqueta al ángulo A7) (véase figura 67)

**#166 SF:**

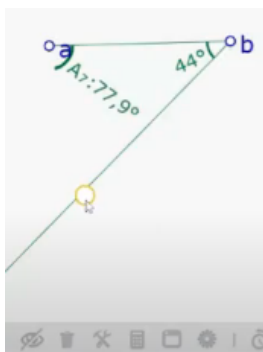


Figura 67 Etiqueta del ángulo variable por parte del sujeto F

**#168 E2:** bueno si no tuvieras que pensar en 77.1 sino en cualquier medida para ese ángulo, estás diciendo que puede ser todas las sumas que me den 123 ¿cierto?

**#171 SF:** [me perdí, sin cambiar el ángulo A7 ¿sí? o cualquier A7 poniéndole la etiqueta ahí ¿sí?]

**#172 E2:** si, te lo digo más es, como trata de pensar si A7 no fuera 77.1 sino tuvieras que establecer un A7 como cualquier medida, bueno plantea como lo ibas hacer y ahí nosotros intervenimos ¿sí?

**#173 SF:** [ok], (el sujeto activa la calculadora y selecciona el ángulo fijo A8)

[ustedes si se acuerdan si uno puede poner el nombre de la etiqueta ahí, es que hace rato no uso DGPad-Colombia]

#175 E1: inténtalo y miramos qué pasa, ya tienes la etiqueta que es A7 a ver si te permite

#176 SF: [A7 así] (el sujeto modifica el ángulo fijo  $A8=A7$ )

#177 E1: si

#179 SF: [menos 57 que es lo que yo tengo] (el sujeto modifica el ángulo fijo  $A8=180-A7-57$ ) [ya, listo] (véase figura 68)

#180 SF:

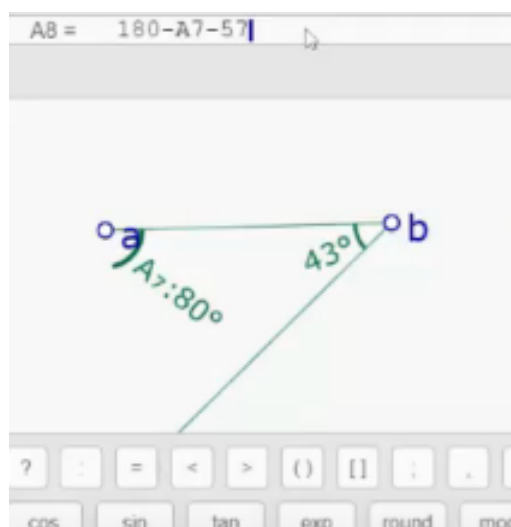


Figura 68 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F

#181 E1: listo, dónde quedaría el punto C

#182 SF: [no mentira, así no se puede] (el sujeto crea una recta, luego la borra)

[mmm la verdad no sé] (véase figura 69)

#183 SF:

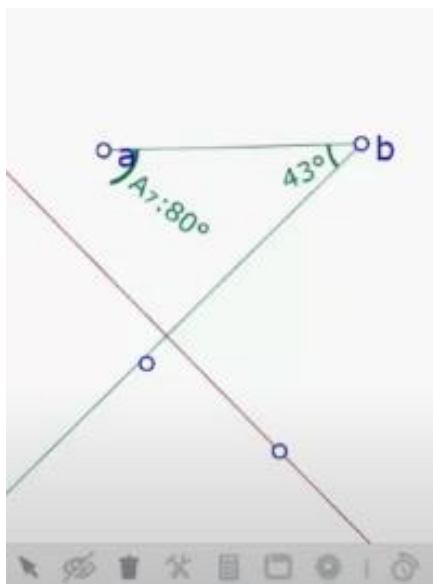


Figura 69 Intento de construcción de una recta por parte del sujeto F

#184 E1: tienes un ángulo BA punto-blanco por decirlo así, ese es el ángulo de 80 y el otro ángulo es el de BA-semirrecta, si quieres mueve el punto blanquito (P1 punto sin etiqueta) y mira cómo se comporta

#185 SF: [ah ok ya] (el sujeto mueve el punto del ángulo variable, aunque intenta ubicarlo sobre la semirrecta) (véase figura 70)

#186 SF:

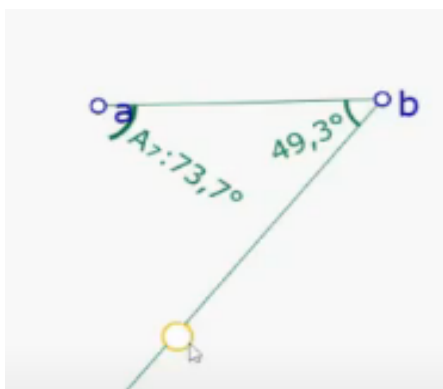


Figura 70 Acomodación del punto libre sobre la semirrecta del ángulo fijo por parte del sujeto F

#189 E1: a partir de lo que ves ¿dónde quedaría el punto C?

**#190 SF:** [aquí en la intersección del segmento A-puntico y la semirrecta] (el sujeto señala la intersección) (véase figura 71)

**#193 SF:**

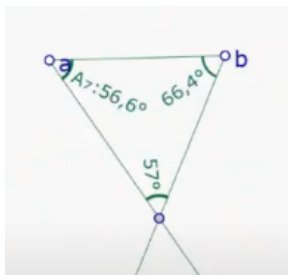


Figura 71 Construcción del punto de intersección por parte del sujeto F

**#194 E1:** listo en esta construcción ¿cuáles serían los puntos C?

**#195 SF:** (el sujeto mueve el punto P1 de lado a lado) [sería como una semicircunferencia, como un arco]

**#199 SF:** (el sujeto crea arco de tres puntos ACB) [entonces todos los puntos que están sobre este semicírculo, este arco va a cumplir con eso, con esa condición, porque todos los puntos que están a la misma distancia de un diámetro, o una cuerda van a tener el mismo ángulo, van a ser de la misma distancia] (el sujeto coloca un punto (P2 punto sin etiqueta) sobre el arco) (véase figura 72)

**#202 SF:**

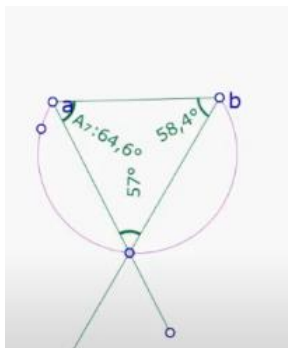


Figura 72 Construcción del arco de tres puntos por parte del sujeto F

## SUJETO H

#261 E1: ¿y cómo sería? ¿qué forma debería tener ese ángulo para que cumpla la condición? (los entrevistadores se refieren al ángulo fijo con vértice en A)

#262 SH: [no sé si estoy bien, pero si yo coloco que ese ángulo va ser  $123^\circ$  menos el punto B ¿eso funciona?] (el sujeto coloca en la calculadora  $A8=123-B$ , luego borra B)

#263 E1: tú quieres el punto B o el ángulo que está sobre el vértice B

#264 SH: [el ángulo que está sobre el punto B, buen punto] (el Sujeto selecciona el Ángulo A7 sobre el vértice B para completar la expresión en la calculadora  $A8=123-A7$ )  
[uyy sí, sí funciona ahora voy a mover otra vez P a ver qué pasa] (el sujeto mueve punto P)  
[ahora si me cumple, ahí no] (el sujeto mueve en los extremos de A y B) [o sea que aún no tengo la construcción exacta ¿cierto? porque digamos ahí me cumple si vamos de A a B en la parte positiva, pero si el ángulo es en la parte de abajo, ya no se da, ya no se unen...]  
(véase figuras 73 y 74)



Figura 73 Expresión de dependencia en la calculadora por parte del sujeto H

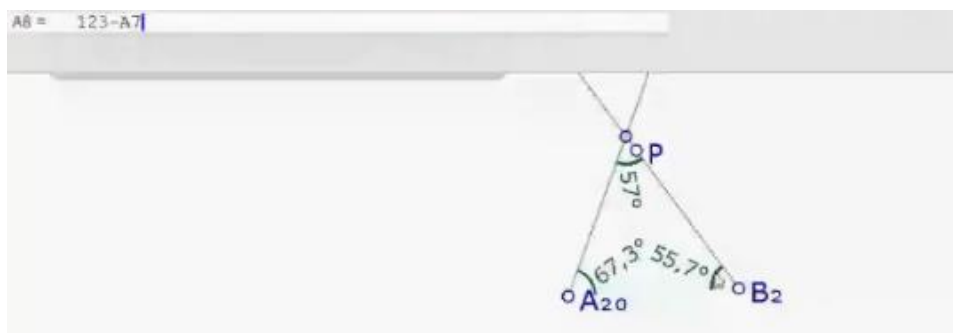


Figura 74 Construcción de la solución por parte del sujeto H

#265 E1: por ejemplo, en ese caso, cuando tu mueves P estás encontrando, (bueno



ignorando lo que tú dices de la parte negativa), ¿todos los puntos C en la parte positiva o sólo hay un punto C que cumple?

#266 SH: [ todos los posibles, ahí el ángulo que tiene 57 es todos los posibles C a medida que los otros dos ángulos van cambiando de medida, los representa a todos, ya si uno le pone el arrastre se hace la figura de todos los posibles C que se den, no me acuerdo con que herramienta es arrastre] (el sujeto mueve el punto P)

*Nota: Al sujeto se le presenta la herramienta traza*

#267 E1: le das en propiedades y ahí dice activar la traza

#268 SH: (el sujeto activa la traza al punto C, mueve el punto P) [ si yo muevo ahí se crean todos los posibles casos, pero si ves ahí ya tiene una falla, se ve como una línea]

*Nota: La línea que no corresponde a la semicircunferencia creada por la traza es un error que sucede cuando el sujeto mueve de forma muy rápida el punto libre (véase figura 75)*

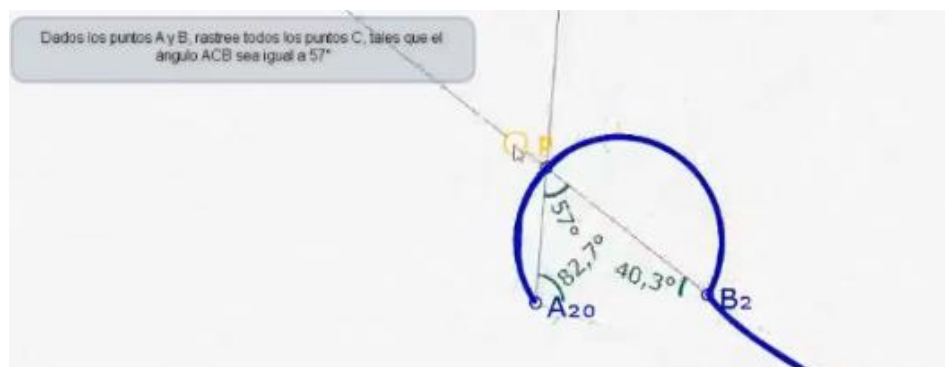


Figura 75 Uso de la traza por parte del sujeto H

*otros problemas de la misma familia 2 y 3.*

El abordaje del problema de esta familia para un ángulo  $ACB=25^\circ$  por parte de los sujetos B, F y H se caracteriza por no recurrir a la reconstrucción del proceso anterior para el

ángulo  $ACB=57^\circ$ , en cambio recurren a los macroesquemas de acción y comunicación que tienen activos para solucionar el problema, aunque persisten aspectos que no son interiorizados por los sujetos.

En efecto las expresiones usadas en la calculadora se modifican a  $E4=E1-E2-E3$ , con  $E1=180$ ,  $E2=25$ , etiqueta al ángulo  $ABP1$  como  $A1$ ,  $E3=A1$ ;  $A2=180-A1-25$ ,  $ABP1= A1$ ;  $A2=155- A1$   $ABP1= A1$ ; luego estos ubican el punto de intersección  $C$  y activan la traza de este a partir del arrastre del punto variable.

En el momento que los entrevistadores le preguntan la solución para un ángulo  $k^\circ$  cualquiera, el proceso secuencial lo describen los sujetos  $B$  y  $F$  mediante un widget (cuadro de texto usado en DGPAD-Colombia). En la descripción del sujeto  $F$  menciona el uso del arco de tres puntos para mostrar los puntos solución del problema, esto indica que el sujeto aún recurre a la construcción de un objeto que represente la variación en vez de mostrar los puntos mediante la traza como producto de la variación del punto libre y de la relación de dependencia establecida en la calculadora.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos tres sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores, en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación que presentan los sujetos, y en color rosado oscuro las palabras clave como medios semióticos que corresponden a la identificación de los caracteres de indeterminancia y analiticidad en el problema.

## SEGUNDA SESIÓN SUJETO B

**#352 SB:** (El sujeto construye un punto  $A$ , un punto  $B$ , segmento  $AB$ , un ángulo  $ABP1$  con la herramienta ángulo, las expresiones  $E1=180$ ,  $E2=25$ , etiqueta al ángulo  $ABP1$  como  $A1$ ,  $E3=A1$ ,  $E4=E1-E2-E3$ , ángulo fijo de  $B$  a  $A$ , de medida  $A2=E4$ , semirrecta con

origen B hacia P1, punto de intersección C entre las semirrectas del ángulo fijo y la semirrecta de B a P1, corrobora que el ángulo ACB es de  $25^\circ$ , para verificar que se mantiene al arrastrar, mueve los puntos A, B, luego oculta las semirrectas para construir los segmentos AC y BC, activa la traza del punto C y mueve el punto P1 para mostrar todos los puntos que son solución del problema)

#353 E1: Listo, ¿esos son todos los puntos C que cumplen la condición de  $ACB=25^\circ$ ?

#354 SB: [SÍ, ¿Si es eso no?, ah me faltó etiquetar esto, este es C, si, ahí está] (véase figura 76)

#355 SB:

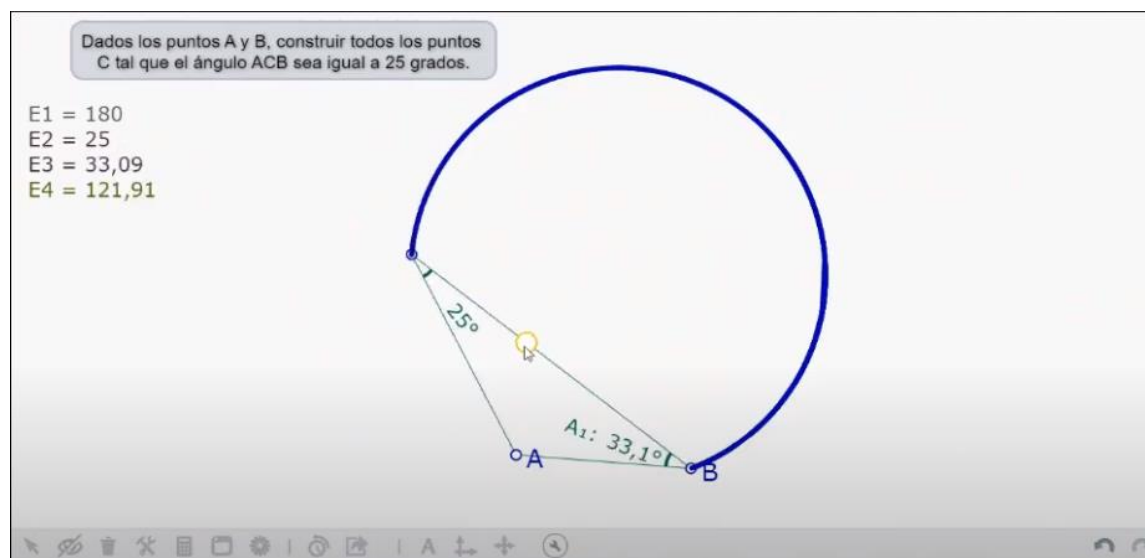


Figura 76 Activación de la traza para el caso del ángulo  $ACB=25^\circ$  por parte del sujeto B

Nota: Los entrevistadores le piden al sujeto que relata el procedimiento para un ángulo de valor  $k^\circ$  (véase figura 77)

#400 SB:

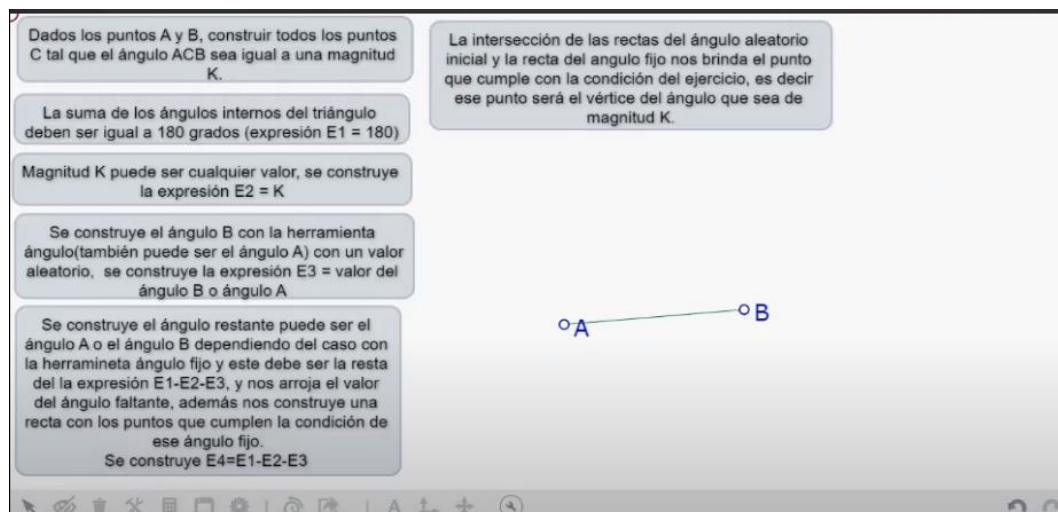


Figura 77 Descripción de las estrategias para el caso de un ángulo  $ACB = k^\circ$  por parte del sujeto B

## SUJETO F

**#208 SF:** [lo voy a leer y voy a mirar como lo puedo hacer, se puede hacer lo mismo que hice en la otra situación]

**#210 SF:** [Bueno yo haría un segmento] (el sujeto crea segmento AB (no coloca etiquetas)) [ángulo cualquiera] (el sujeto crea ángulo variable ABP1 con P1 punto libre, luego crea ángulo fijo que pasa por B de vértice en A y amplitud aleatoria, luego activa la calculadora para modificar la medida de A2 y cierra) [ah espera, falla] (el sujeto coloca etiqueta al ángulo variable (A1))

**#212 SF:** (el sujeto modifica la medida de ángulo fijo  $A2 = 180 - A1 - 25$  y mueve el punto P1 de ángulo variable) (véase figura 78)

**#213 SF:**

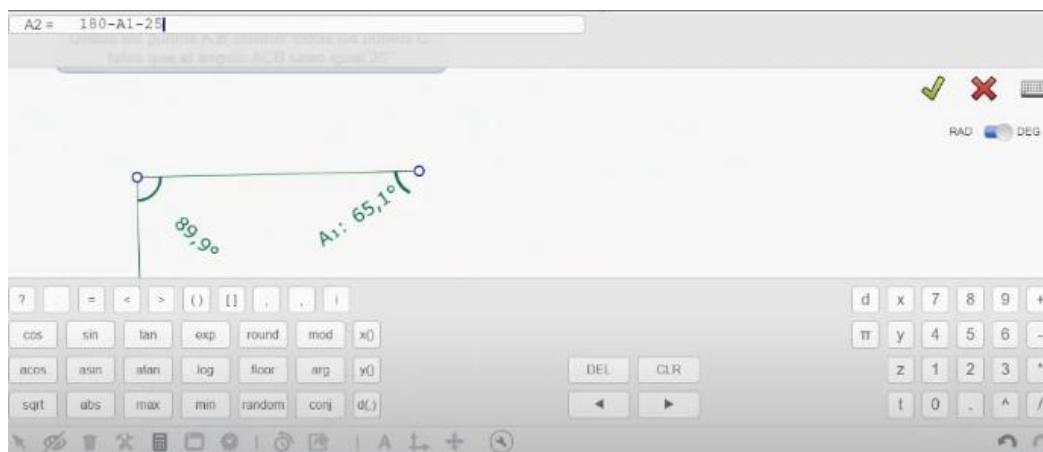


Figura 78 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F

#214 E1: igual no sólo puedes utilizar segmentos para señalar lo que ahorita señalamos con segmentos sino también con semirrectas, como te quede mejor

#215 SF: [ah ok] (el sujeto crea semirrecta de B a P1, luego marca punto de intersección (C punto sin etiqueta) entre ambas semirrectas y verifica midiendo el ángulo ACB y mueve el punto P1 en todas las direcciones) (véase figura 79)

#217 SF:

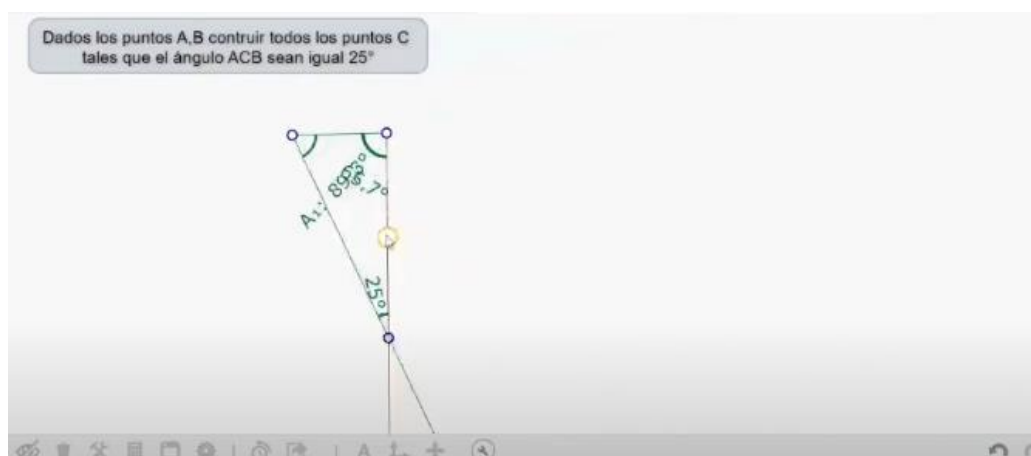


Figura 79 Movimiento del punto libre por parte del sujeto F

#220 E1: le das click en el engranaje y ahí le pones activar la traza

#221 SF: (el sujeto activa la traza del punto C) (véase figura 80)

**#224 SF:**

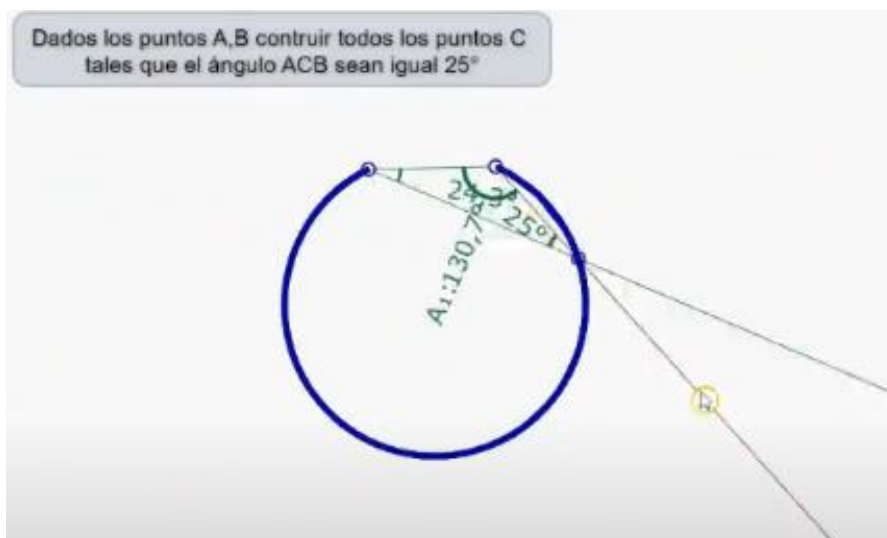


Figura 80 Uso de la traza para el caso del ángulo  $ACB=25^\circ$  por parte del sujeto F

*Nota:* Los entrevistadores le piden al sujeto que relata el procedimiento para un ángulo de valor  $k^\circ$  (véase figura 81)

**#295 SH:** (el sujeto escribe el enunciado de la situación) [entonces y es exactamente lo mismo creo un ángulo normal donde vamos a tener un punto P] (el sujeto crea ángulo variable ABP con P punto libre) [entonces 180 menos 25, 165 listo, la semirrecta de BP] (crea semirrecta de B que pasa por P) [después de eso ahora si creamos el ángulo con longitud dada y a ese ángulo con la calculadora lo ponemos como 165 menos el ángulo que tiene B] (el sujeto crea ángulo fijo que pasa por B de vértice en A y amplitud  $A2 = 165 - A1$ ) [y el punto de intersección sería nuestro C] (el sujeto marca el punto de intersección C entre ambas semirrectas BP y la de ángulo fijo A2) [le dejamos la traza activada de una vez] (el sujeto activa la traza al punto de intersección) (el sujeto minimiza la construcción) [ahí ya tenemos los de arriba], (el sujeto crea ángulo variable BAP1 con P1 punto libre) [luego el ángulo de longitud A B, igual lo modificamos entonces 165 menos el ángulo de A] (el sujeto crea ángulo fijo que pasa por A de vértice en B y amplitud  $A4 = 165 - A3$ ) [y la semirrecta entre A y P] (crea semirrecta de A que pasa por P1) [el punto de intersección] (el sujeto marca el punto de intersección C' entre ambas semirrectas AP1 y ángulo fijo A4) [que sería C' y le activamos la traza] (el sujeto activa la traza de punto C\_1) [si muevo la P de abajo me da todas las posibilidades y si muevo la P de arriba igual todas las posibilidades] (el sujeto mueve P y P1) [y nos queda la misma figura que en el anterior pero la circunferencia que es la de todos los posibles C es más grande que la anterior porque la diferencia es mayor, listo, ya la hice]

**#296 E1:** podrías comprobar que los ángulos ACB si son de  $25^\circ$

**#297 SH:** [ uy verdad no le puse el ángulo (el sujeto mide ángulos ACB) ah me dio 15 algo hice mal, ah sí, es que no era 165 era 125, espere es que hice algo mal] (el sujeto

activa calculadora selecciona el ángulo A4 y modifica  $A4 = 155 - A3$ ) (el sujeto activa calculadora selecciona el ángulo A2 y modifica  $A2 = 155 - A1$ ) [ángulo ACB] (el sujeto mide ángulo ACB) [ahora sí, cuando movemos P' prima nos da todas las posibilidades y cuando movemos P nos da todas las posibilidades de la parte positiva] (el sujeto mueve P y P\_1) [listo ahora si como están viendo pantalla, todos los ángulos dentro de las dos circunferencias nos van a dar 25] (véase figura 82)

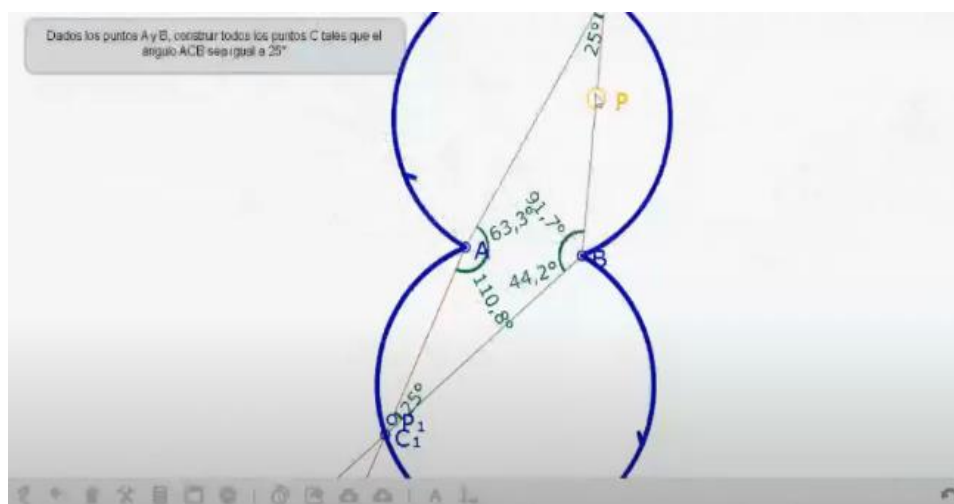


Figura 82 Activación de la traza para el caso del ángulo  $ACB = k^\circ$  por parte del sujeto H

**Nota:** Los entrevistadores le piden al sujeto que relate el procedimiento para un ángulo de valor  $k^\circ$

**#298 E2:** si tuvieras que decirle a alguien tu protocolo, como tu paso a paso de la construcción de qué manera lo dirías

**#299 SH:** el protocolo de construcción fue, el final porque lo errores no los voy a decir ahorita, el protocolo para que quedara bien fue hacer los puntos A y B que eran los puntos dados luego de eso con la herramienta de ángulo hicimos el ángulo ABP donde P es un punto cualquiera al tener ese ángulo se hace con la herramienta de ángulo dado el ángulo B, A a cualquier otro punto y con la calculadora restringimos ese ángulo A para que



sea la cantidad que en este caso fue 155 pero sea la cantidad de ángulos totales que necesitamos menos el ángulo que hicimos primero que era el ABP, y eso nos crea que el punto de intersección que se crea entre las líneas del ángulo BA otro punto digamos y ABP, ese punto de intersección nos va dar el punto C que era el que estábamos buscando que va crear el ángulo ACB en este caso igual 25]

## 2.2 análisis segunda familia de problemas.

Segunda familia de problemas: “Dados los puntos A y C construir todos los puntos B tales que la distancia AB sea igual a una razón dada de la distancia BC,  $AB=kBC$ ” Se trabajaron tres problemas de esta familia: cuando la razón de  $k=2$ , cuando la razón de  $k=3$  y finalmente se solicitó expresar la solución para una razón  $k$  cualquiera.

### 2.2.1 categoría sujetos pensamiento algebraico.

En el proceso de solución del problema, identificamos dos fases que describimos a continuación.

- **Fase 1: Aspectos relacionados al esquema de solución de la primera familia de problemas que están activos para la solución de otros problemas.**

- **Fase 2: Movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema**

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de pensamiento algebraico

- 1) Presencia de la indeterminancia y presencia de la indeterminancia en el software
- 2) Presencia de la analiticidad y presencia de la analiticidad en el software

### 3) Presencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

- **Otros problemas de la misma familia 2 y 3**

*fase 1: aspectos relacionados al esquema de solución de la primera familia de problemas que están activos para la solución de otros problemas.*

En esta fase los sujetos que pertenecen a esta categoría son los llamados “A” y “G”. Los sujetos hacen uso de la propiedad “la circunferencia es la colección de todos los puntos que equidistan de un punto llamado centro” de forma implícita, para la construcción de un caso de forma exacta. En este proceso los sujetos hacen uso de las relaciones de dependencia entre las medidas de dos circunferencias dada una razón  $k$ . Esto sugiere que hacen uso de los macroesquemas de pensamiento algebraico que tienen activos del abordaje hecho en la primera familia de problemas.

Algunos elementos que muestran la presencia del esquema activo son el uso de la relación de dependencia, el uso de la calculadora para expresarla y la concepción de los puntos de intersección como soluciones del problema. Los esquemas de comunicación a través de expresiones verbales como “que sea 2 por  $E1$ ” y los esquemas de acción a través de las expresiones en la calculadora como “ $E1*2$  con  $E1=3...$ ,  $c3=E1...$ ;  $c3=E2*2...$ ” muestran que los sujetos, aunque no denotan relaciones generales por la ausencia de objetos variables, muestran la dependencia entre dos objetos pensados de forma indeterminada con el fin de obtener puntos solución. Estos puntos son concebidos por los sujetos como la intersección de circunferencias, eso se observa en afirmaciones como: esas circunferencias se cortarán..., los puntos de intersección entre esta circunferencia y esta circunferencia. Estos dos son puntos B...

A pesar de que el sujeto G hace uso de un objeto variable para la construcción de una de las cantidades, el objeto variable no adquiere rol de medio semiótico porque no se considera indeterminado, esto se refuerza con el esquema de comunicación presente en la afirmación [podrían ser los puntos B, pero no todos]

Un elemento importante para establecer la dependencia general, es tener un objeto variable que denote la indeterminancia y así con esta poder expresar en la calculadora una relación de dos objetos (uno variable y uno que depende del que varía). Cuando los sujetos construyen casos exactos no existe un elemento que les permita variar la construcción y así observar el recorrido de los puntos solución del problema, a pesar de esto, esquemas de comunicación a través de afirmaciones como [podrían ser los puntos B, pero no todos] podrían sugerir que los sujetos están pensando de forma general.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos dos sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación que presentan los sujetos.

### SUJETO A

**#20 SA:** [...] el sujeto crea una circunferencia  $c1$  con centro en C que pasa por A, una semirrecta  $r1$  con origen en A que pasa por C y un punto de intersección  $P1$  entre  $c1$  y  $r1$ , luego señala los puntos en este orden, de  $P1$  a A, de C a  $P1$ , luego de A a  $P1$  y nuevamente de C a  $P1$ .] (véase figura 83)

**#21 SA:**

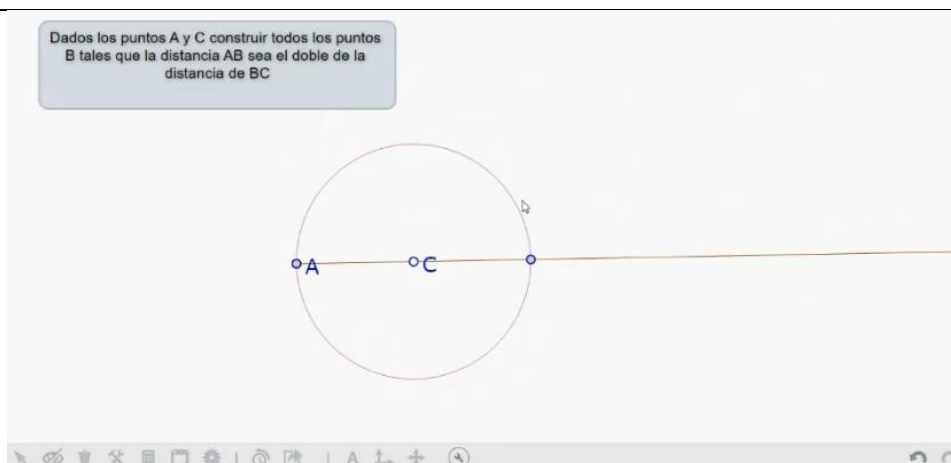


Figura 83 Construcción de un primer caso exacto por parte del sujeto A

**#37 SA:** [Pues trataba de plantearme primero la situación, que, si tenía 2 puntos, entonces cómo es tenía que ser B de tal forma que cumpla que la distancia AB sea el doble de la distancia BC ¿no?, entonces primero, un primer caso sería cuando uno tiene un punto, que sea diámetro de la circunferencia con centro en C y radio]

**#44 SA:** [es posible que existan otros puntos, pero quería pensar de qué manera podrían existir estos puntos en el plano a raíz de AC]

**#78 SA:** ... (El sujeto crea  $E1=5$ ) (el sujeto crea una circunferencia c2 centro C y radio E1) [c2 es lo que yo quiero, pero acá también debe ser el doble ¿no?, entonces por acá hago una circunferencia, que sea...si, calculadora.... Que sea 2 por E1] (el sujeto crea una circunferencia c3 con centro en A y radio  $E1*2$ , radio que es modificado así con la herramienta calculadora)

Nota: En la elaboración de un primer caso, las circunferencias no se cortan porque la medida de  $E1=5$  es mayor a la distancia de AC, lo que impide que las dos circunferencias (c2, c4) no se corten. Luego el sujeto oculta c2.



*Nota: el sujeto interactúa algunos minutos en el software, a partir del segmento AC, crea circunferencias o segmentos con relaciones incorrectas... Es importante destacar que este sujeto desde su primera estrategia establece expresiones como:  $c2=2 \cdot E2$  con  $E2 = s4$  (s4 segmento)*

# 217 SG: (el sujeto crea  $E2=s4$ ) (El Sujeto construye una circunferencia con centro en A y radio, luego cambia el valor del radio con la expresión  $c3=E2 \cdot 2$ ) (véase figura 85)

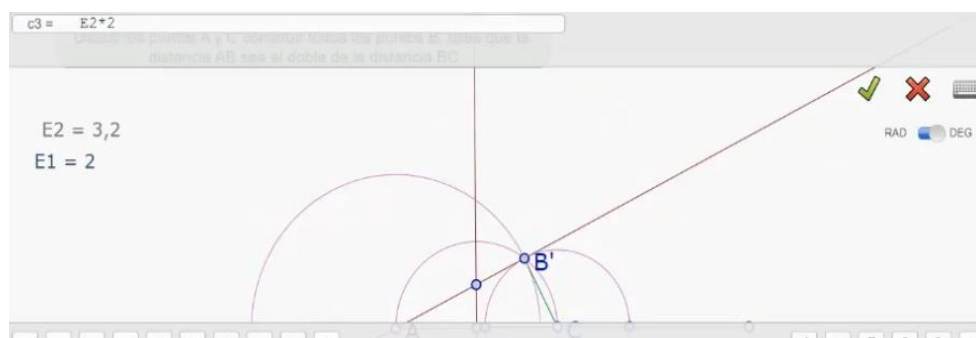


Figura 85 Construcción de dos puntos solución por parte del sujeto G

#218 SG: ... [estos dos puntos van a cumplir...]

#219 E1: Listo, hasta ese punto ¿qué puntos podrían ser puntos B?

#220 SG: [ estos dos puntos B ] (el sujeto señala B' y el punto B) [podrían ser los puntos B, pero no todos]

*fase 2: movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema.*

El proceso en que los sujetos buscan el uso de un objeto variable se caracteriza en dos tipos:

1) La sugerencia del uso del objeto variable: proceso que se realizó para el sujeto G, mostrando el indicador de presencia de indeterminancia en el software al contemplarlo como la representación de una cantidad indeterminada.

2) El trabajo en casos que conduce al uso del objeto variable de forma espontánea: Proceso que realizó el sujeto A, observando que en el problema existían casos donde, de acuerdo a los tamaños de las circunferencias estas podían o no intersectarse, elemento detonante para que el sujeto tuviera la necesidad de usar un objeto variable.

Estos sujetos movilizan los esquemas de pensamiento algebraico en el software de manera espontánea al poder hacer uso del objeto variable. Primero, utilizan expresiones en la calculadora  $E2 = d(A, D)$ ,  $c5 = E2$ ; o  $d(P1, C)$  para referirse al objeto variable, lo que denota la presencia del indicador “presencia de la indeterminancia en el software”. El segmento AD y la circunferencia centro-punto c1 se convierten en medios semióticos de objetivación que les sirve a los sujetos para referirse a la cantidad indeterminada.

Segundo, utilizan expresiones en la calculadora tales como “ $c6 = 2 * E2$ ” y “ $c2 = d(P1, C) * 2$ ” las cuales adquieren rol de medio semiótico ya que le sirven al sujeto para realizar una designación simbólica propia de un pensamiento algebraico, (relación analítica entre dos cantidades, la primera representada por la circunferencia variable c1 y la distancia del segmento AD, y la segunda representada por la circunferencia centro-radio).

Tercero, marcan los puntos de intersección “T y T1” o “P2 y P3” y activan su traza. Por último, surge la necesidad de variar los objetos variables mediante el arrastre del punto libre “D” o “P1” el cual permite observar el recorrido de los puntos B mediante la traza; a su vez estos puntos adquieren rol de medio semiótico porque son usados por los sujetos para representar el carácter indeterminado del objeto variable. Los sujetos afirman que la traza es la colección de

todos los puntos solución del problema. Las expresiones del software son propias de un pensamiento algebraico representadas simbólicamente por medio de la calculadora. Estos esquemas de acción y comunicación muestran la presencia de los indicadores “presencia de la analiticidad, indeterminancia y designación simbólica en el software”.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos dos sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación propios del pensamiento algebraico, y en color rosado oscuro los medios semióticos de objetivación que presentan los sujetos.

#### SUJETO A

**#92 SA:** (el Sujeto crea y etiqueta el punto D y luego segmento AD) [no sé si se validó este razonamiento] (véase figura 86)

**#93 SA:**

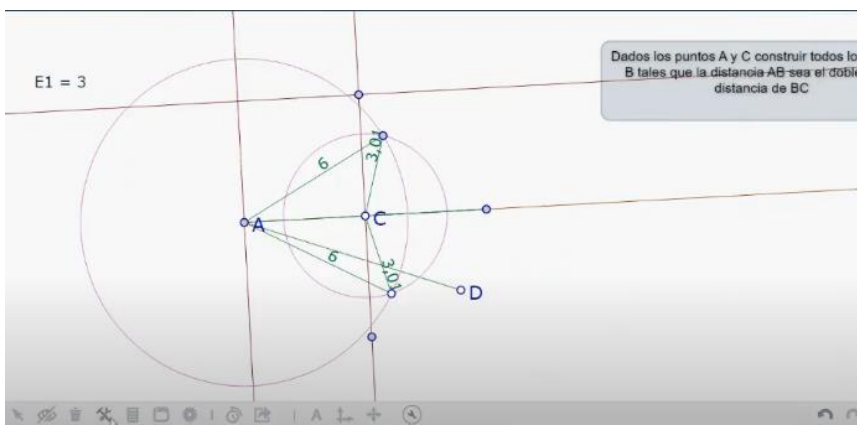


Figura 86 Construcción de un segmento como una cantidad indeterminada por parte del sujeto A

**#94 SA:** (el Sujeto activa la calculadora y crea la expresión  $E2 = d(A, D)$ ) obteniendo en el tablero  $E2 = 8,32$ , luego crea una circunferencia (centro-radio) de centro en C y un radio de medida  $c5 = E2$ ) (véase figuras 87 y 88)





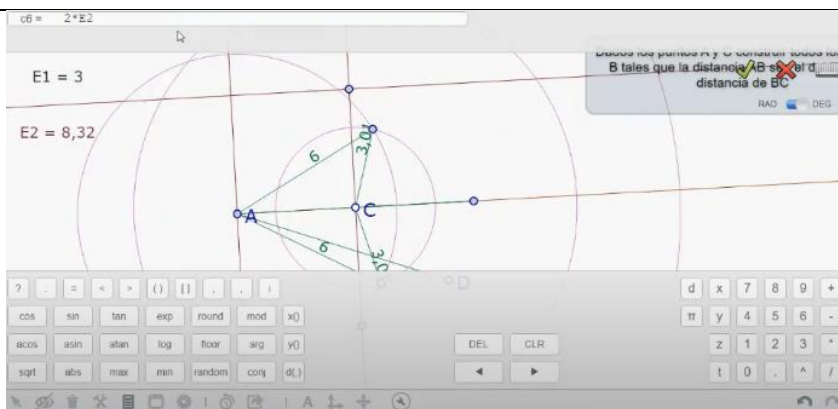


Figura 89 Construcción de la relación de dependencia en la calculadora por parte del sujeto A

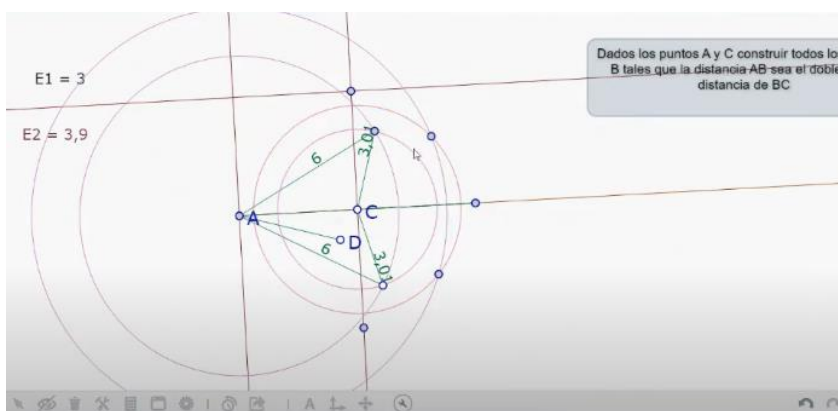


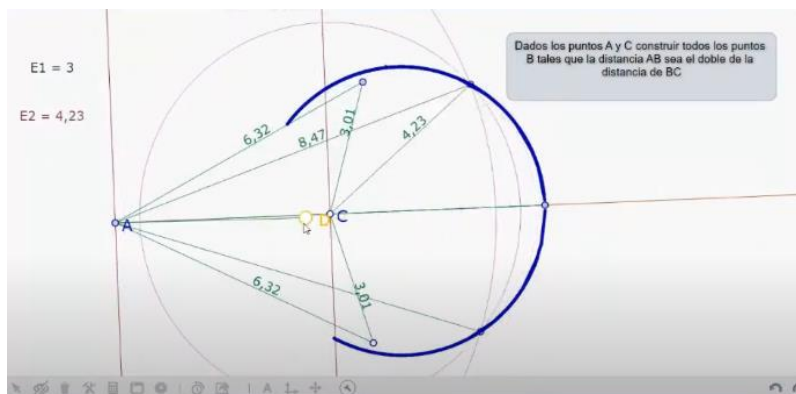
Figura 90 Construcción de las circunferencias por parte del sujeto A como solución del problema

**#98 SA:** (el sujeto crea los segmentos AT, AT1, y TC y a cada uno activa la herramienta de medida) [yo digo que ya, pero pues es raro,, mm ok] (el sujeto arrastra el punto D observando la construcción como se mueve) [voy a ocultar unas cosas, un momento] (el sujeto oculta algunos elementos en la construcción) [pues yo creo que ya encontraría todos los puntos, y pues es una situación muy rara, efectivamente todos los puntos B están a la derecha de esta perpendicular] (señala la perpendicular que pasa por C) [y así mismo todos los puntos B serían ¿cómo es que se activa la traza?]

**#99 E1:** con el engrane, yo veo que mueve D, ¿pero no sé qué es D en la construcción?

#102 SA: [D es un número, es cualquier número, no supe cómo más ponerlo, listo, D es cualquier distancia] (el sujeto activa la traza en los puntos de intersección T y T1 en la herramienta del engranaje) (véase figura 91)

**#103 SA:**



*Figura 91 Uso de la traza por parte del sujeto A*

#104 SA: [aquí lo que hace es poner un número, no importa la distancia, no importa que este segmento] (señala el segmento AD) [los puntos B serían todos los puntos que están a la derecha de esta perpendicular] (el sujeto señala la perpendicular que pasa por C) [como lo había pensado, pues porque vemos que aquí está cumpliendo, trata no sé si se diga converger como al primer punto que encontré, que es como el diámetro de la circunferencia con centro en C y radio AC] (el sujeto hace referencia que al mover D la traza de los puntos T y T1 en el punto P1 se unen) [y pues también va pasar por .. ah por lo que se movió la construcción ya no me sirven estos, porque antes era para probar que, si efectivamente servían, pero ya no] (el sujeto elimina los segmentos AZ, AZ1, CZ1 y CZ en la construcción) [ahora sí] (véase figura 92)

**#107 SA:**



## SUJETO G

#225 E1: listo entonces vas a crear una circunferencia centro punto con centro en C

#226 SG: (El sujeto construye una circunferencia con centro en C que pasa por un P1 punto libre)

#227 E1: Exacto, y listo, ¿a partir de eso podrías encontrar un punto B?

#228 SG: (El sujeto construye una circunferencia con centro A y radio, y luego cambia el valor del radio por la expresión  $c2=2*d(C, P1)$ ) (véase figura 94)

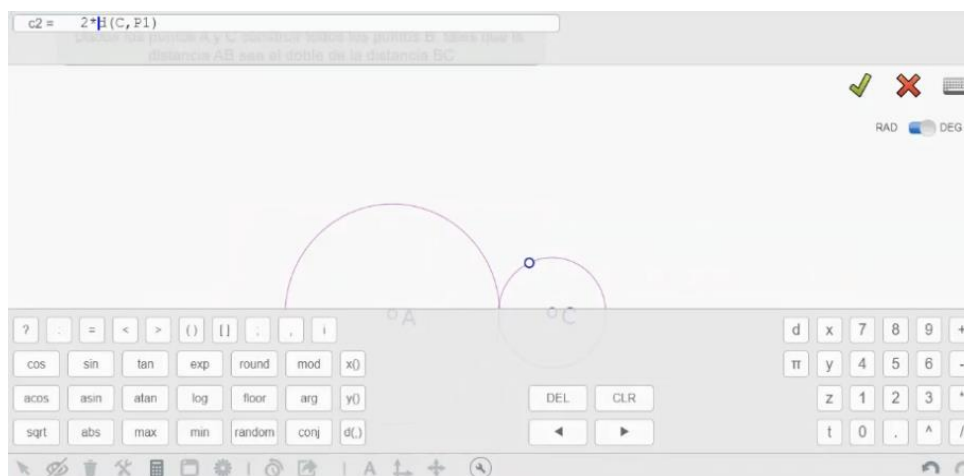


Figura 94 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto G

#231 SG: (el sujeto cambia la expresión por  $c2=d(P1, C) * 2$ , y ubica puntos de intersección P2 y P3 entre las circunferencias c1 y c2) [esos dos puntos cumplirían qué ###, que esta distancia]

#233 SG: (El sujeto construye los segmentos AC, AP3, CP3, luego en la calculadora establece la expresión  $E1=s1/s2$  (que sería los mismo de  $E1=AP3/CP3$ ) obteniendo  $E1=2$ ) (véase figura 95)

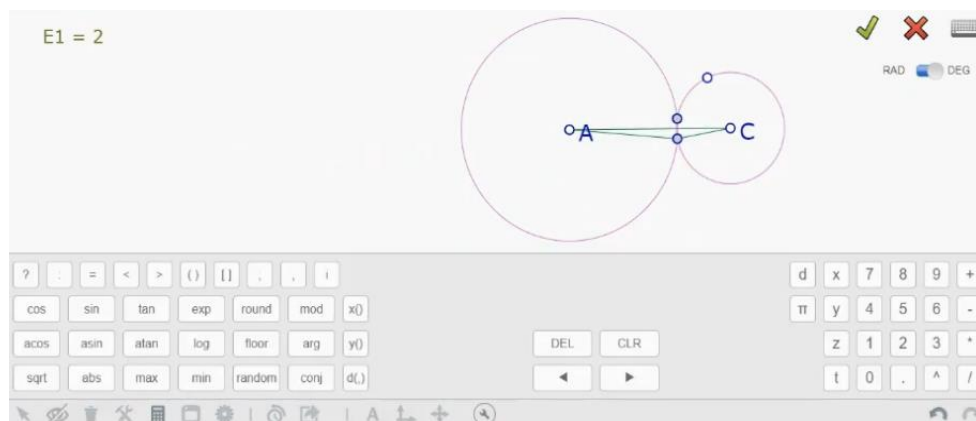


Figura 95 Construcción de las circunferencias que guardan la relación de dependencia por parte del sujeto G

#234 E1: ¿Y se mantiene al arrastrar?

#235 SG: [Si] (esto lo dice mientras mueve el punto P1)

#236 E1: Listo ¿cuáles serían los puntos B? cuando mueves la construcción

#237 SG: [Umm, espera]

#237 E1: bueno

#239 SG: (El sujeto activa la traza del punto P3 y P2 y luego mueve P1 obteniendo así puntos B que cumplen la condición) (véase figura 96)

#243 SG:

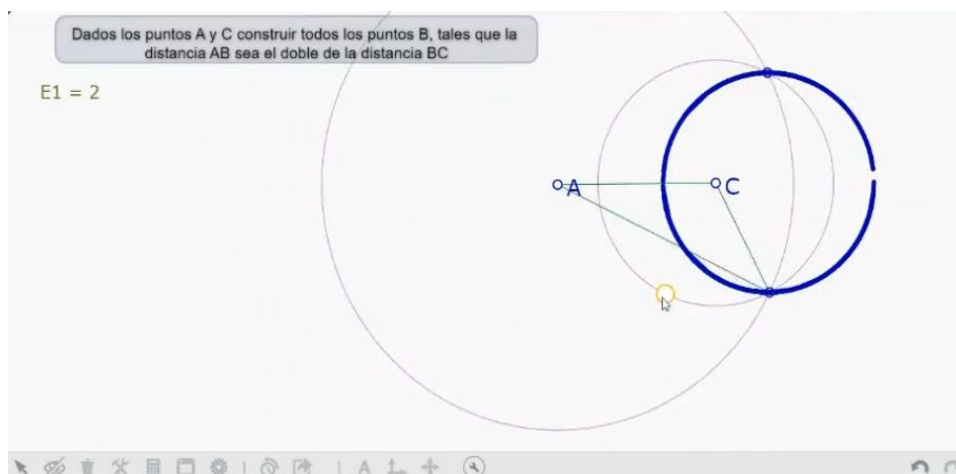


Figura 96 Uso de la traza por parte del sujeto G

**#244 SG:** [Bueno, todos estos puntos me cumplirían que AB es el doble de la distancia AC] ++El sujeto se refiere a los puntos que se pueden demarcar con la herramienta traza++

**#245 E1:** Y ¿qué condición le pusiste a la circunferencia con centro radio?, la que se puede usar calculadora

**#246 SG:** [ Ah, que fuera el doble de la distancia BC, o sea, de este punto] (el sujeto se refiere al punto P1 y lo señala) [si]

**#248 SG:** [encontrar esos puntos que nos cumplen exactamente que se va cumplir la propiedad mencionada que AB va a ser dos veces BC] (véase figura 97)

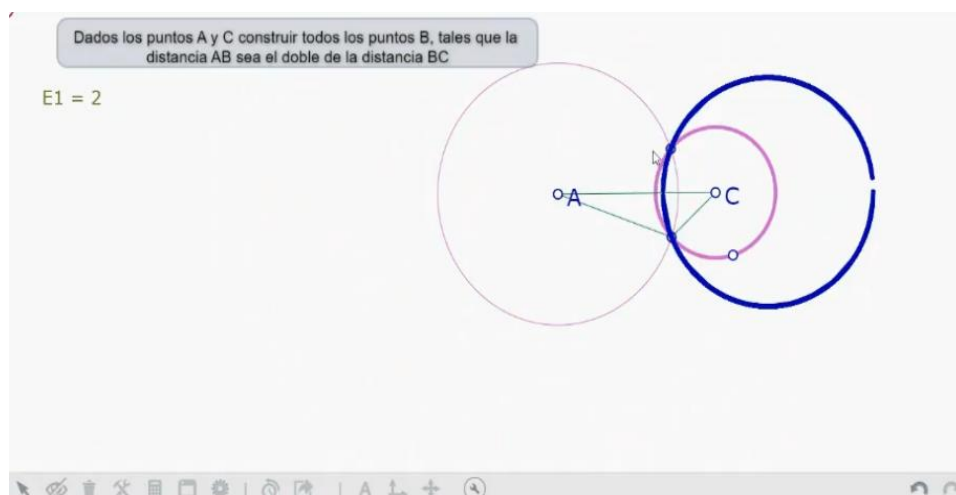


Figura 97 Representación en azul de todos los puntos B del problema por parte del sujeto G

*otros problemas de la segunda familia.*

El abordaje del problema de esta familia para una razón  $k=3$  por parte de los sujetos A y G se caracteriza por no recurrir a la reconstrucción del problema anterior para una razón  $k=2$ , en cambio recurren al uso de los medios semióticos y los esquemas de acción y comunicación que

tienen activos para solucionar el problema. En efecto las expresiones usadas en la calculadora se modifican a  $c2 = 3 * E1$ ,  $E1 = s1$ ;  $c2 = 3 * d(C, P1)$ ); luego estos ubican el punto de intersección C y activan la traza de este a partir del arrastre del punto variable.

Para una razón k cualquiera, el sujeto A describe el proceso mediante el uso de un widget (cuadro de texto usado en DGPad-Colombia), mientras que el sujeto G responde verbalmente la pregunta de los entrevistadores acerca de la solución de problemas para otros casos en esta familia de problemas (k con distintos valores a los presentados)

Un elemento común en estos sujetos es la observación de la trayectoria de la traza cuando se trabaja para distintas razones k, en el caso del sujeto G los esquemas de comunicación mediante afirmaciones como: “ estaría como denotando que, bueno claro, ###, es como de perspectiva... la circunferencia se estaría disminuyendo para los puntos que cumplen”, estas reflejan una relación entre el valor de k y el tamaño de la traza. En el caso del sujeto B, este menciona la relación entre k y la distancia de A a C, donde la expresión  $1/(k+1)$  permite establecer la posición del punto B cuando este está sobre el segmento AC. Aunque este tipo de afirmaciones no corresponden a ninguno de los indicadores expuestos de pensamiento algebraico, consideramos que son aspectos interesantes presentes en los dos sujetos clasificados como de pensamiento algebraico y ausente en los otros sujetos.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos dos sujetos, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación propios del pensamiento algebraico, y en color rosado oscuro los medios semióticos de objetivación que presentan los sujetos.



## SUJETO A

**#115 SA:** (el sujeto duplica la pestaña de DGPAd-Colombia y crea un nuevo widget con el enunciado) [pues yo supongo que será similar a ver] (el sujeto crea los punto A y B en el tablero, luego crea **P1** un punto libre y crea segmento s1 de A a ese punto) [umm ya sé cómo hacer para no crear ese segmento] (el sujeto activa calculadora y crea la expresión **E1= s1**, obteniendo  $E1=2,43$  en el tablero) (véase imagen 98)

### #116 SA:

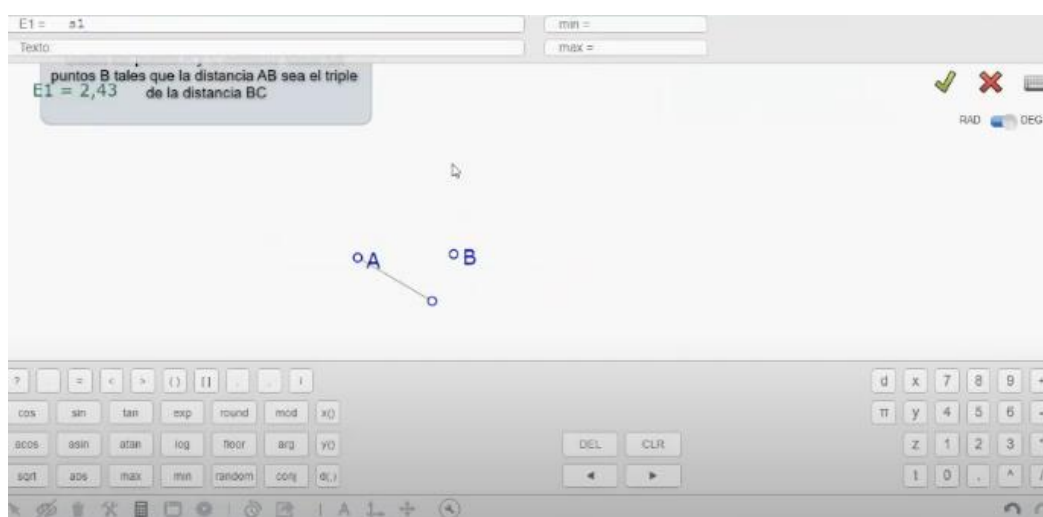


Figura 98 Uso de un segmento como cantidad indeterminada por el sujeto A

**#117 SA:** (el sujeto crea circunferencia (centro-radio) con centro en B y radio aleatorio (cambia la etiqueta del punto B por C), luego despliega las herramientas de circunferencia c1 y activa la herramienta de calculadora modificando su radio  $c1= E1$ ) (véase imagen 99)

### #118 SA:

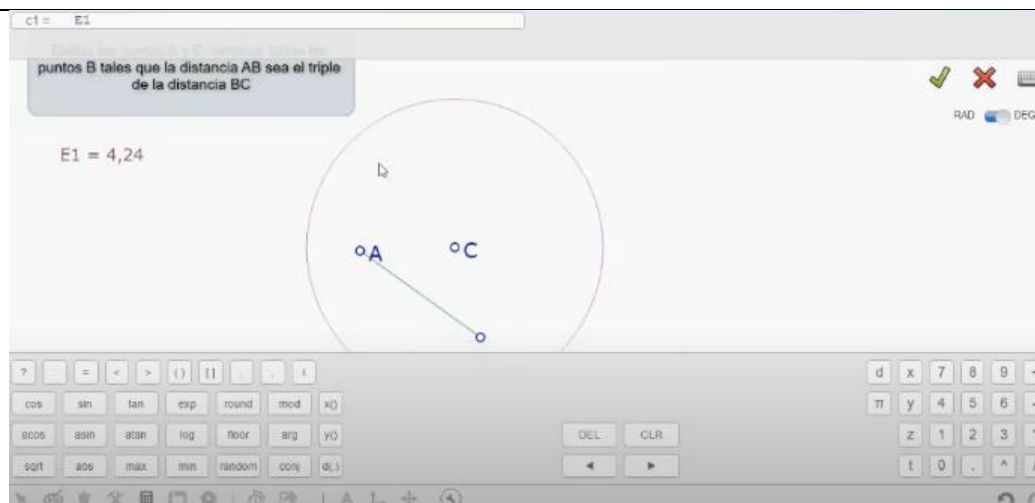


Figura 99 Construcción de la circunferencia indeterminada por parte del sujeto A.

**#119 SA:** (el sujeto crea circunferencia (centro-radio) con centro en A y radio aleatorio, luego despliega las herramientas de circunferencia c2 y activa la herramienta de calculadora modificando su radio  $c2 = 3 * E1$ ) (véase figura 100)

**#120 SA:**

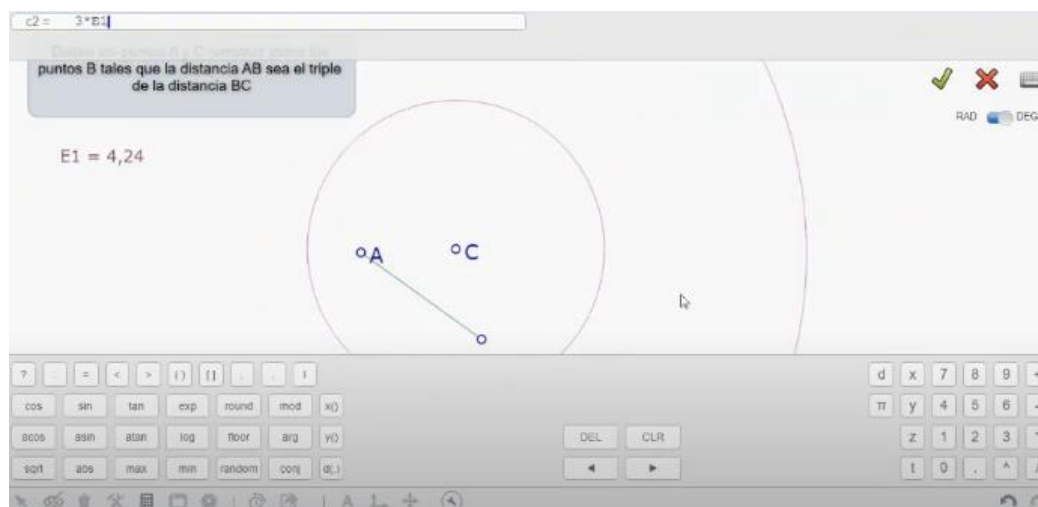


Figura 100 Construcción de la relación de dependencia en la calculadora por parte del sujeto A para una razón  $k=3$

**#121 E1:** etiquete los puntos por favor, es decir en la anterior pestaña colocho D al que decía que era un número, como para referirnos a lo mismo en la construcción anterior.

**#122 SA:** (el sujeto marca los puntos de intersección (que los llamaremos B y B\_0) entre la circunferencia c1 y c2, luego crea segmentos AB, CB, AB\_0 y CB\_0) [supongo que sería así también, los puntos serían estos, esta circunferencia] (el sujeto activa la traza para los puntos de intersección B y B\_0) [¿sí o no?] (véase figuras 101 y 102)

**#123 SA:**

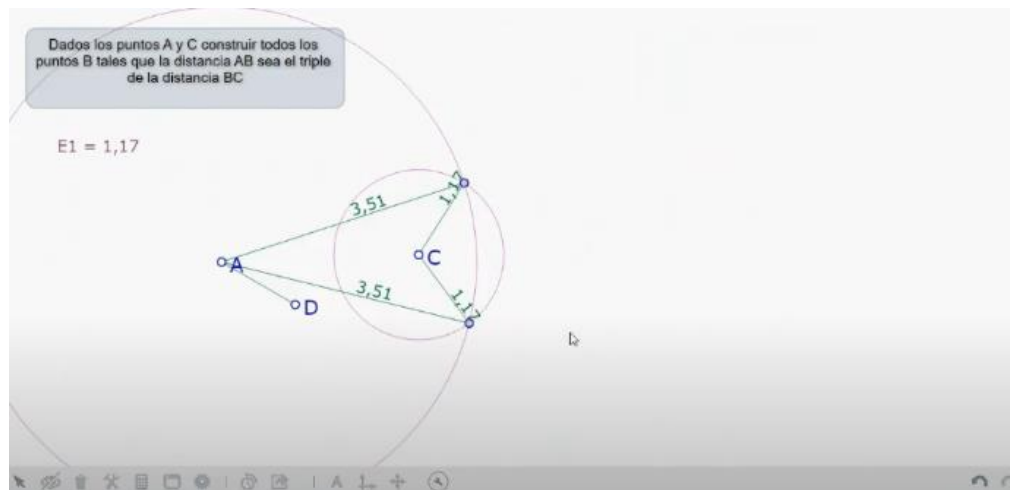


Figura 101 Construcción de los puntos de intersección para una razón  $k=3$  por el sujeto A

**#124 SA:**

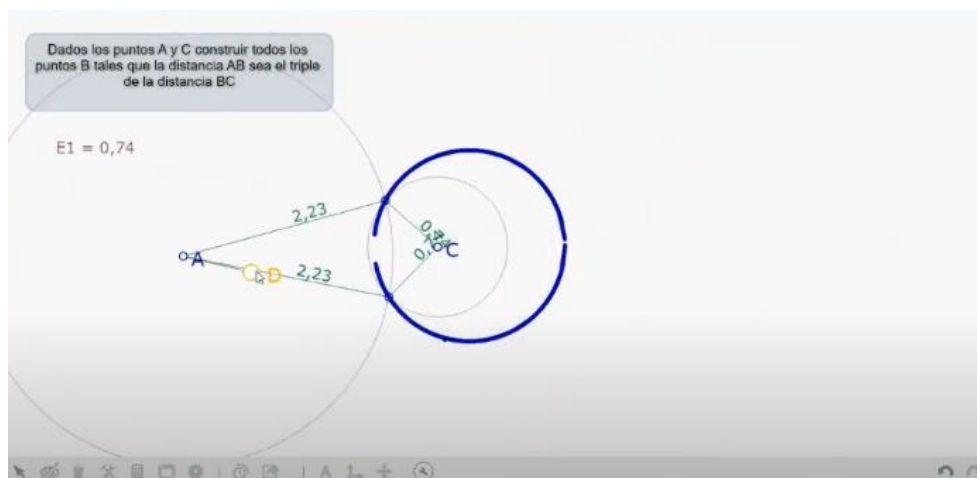


Figura 102 Uso de la traza para una razón  $k=3$  por parte del sujeto A

*Nota: Los entrevistadores le piden al sujeto que relata el procedimiento para una*

razón  $k$  (véase figura 103)

**#141 SA:**

Para que cumpla la condición se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Se sitúan los puntos A y C en el plano, estos serán fijos, es decir no cambiarán de posición.
2. Se crea un punto D en el plano y se crea una expresión  $E1 = d(A,D)$
3. Se crea la circunferencia con centro en C y radio E1 con la herramienta circunferencia (Centro/Radio).
4. Se crea la circunferencia con centro en A y radio  $K \cdot E1$  con la herramienta circunferencia (Centro/Radio).
5. Se crea el punto de intersección entre las circunferencias construidas en el numeral 3 y 4.
6. Se selecciona el punto de intersección obtenido en el numeral anterior y se activa la opción de "Activar traza"
7. Se mueve el punto D en el plano de tal manera que E1 esté entre el valor de la distancia AC y  $1/(k+1)$  veces AC.

Figura 103 Descripción de las estrategias usadas para una razón  $k$  cualquiera por parte del sujeto A

## SUJETO G

**#254 SG:** [Pues trabajaría con, digamos si tuviera ese puntito, este] (el sujeto se refiere al punto P1), [este no, lo haría como lo mismo, lo único que haría es que el nuevo círculo, mi circulito centro radio ya no sería dos veces la distancia, ese puntito, sino sería 3] (mientras el sujeto dice esto, el sujeto crea una circunferencia centro A y radio)

**#255 E1:** Puedes modificar el que ya está hecho

**#256 SG:** [Ah sí, espera] (el sujeto borra c3, luego cambia la expresión de c2 por  $c2 = 3 \cdot d(C, P1)$ ) [no sería el doble sino sería el triple]

**#266 SG:** (El sujeto mueve el punto P1 y con ello aparecen los puntos de intersección P2 y P3 y a su vez la traza de estos puntos) [serían estos puntos que cumplirían] (véase figura 104)

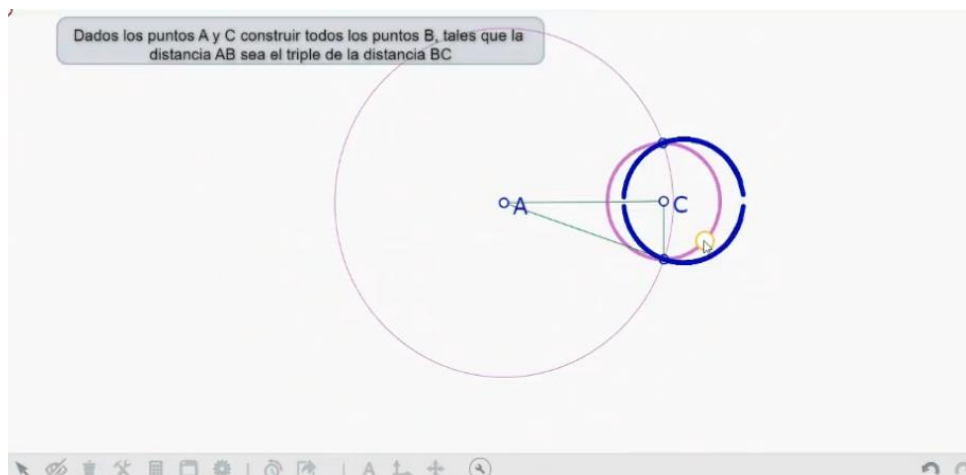


Figura 104 Uso de la traza para una razón  $k=3$  por parte del sujeto G

*Nota: Los entrevistadores le piden al sujeto que relate el procedimiento para una razón  $k$*

**#267 E1:** Okay, entonces si ya no fuera el triple sino cualquier medida, harías lo mismo, ¿sí?

**#268 SG:** [Si]

**#269 E1:** que fuera 4 veces, 5 veces más

**#270 SG:** [ Ujum, estaría como denotando que, bueno claro, ###, es como de perspectiva, que el arco se estaría como disminuyendo] ++el sujeto se refiere a la figura que forma la traza con el movimiento del punto P1++ [o sea, que la circunferencia se estaría disminuyendo para los puntos que cumplen]

### 2.1.2 categoría: sujetos pensamiento no algebraico.

En el proceso de solución del problema, identificamos tres fases que describimos a continuación.

### **Fase 1: Construcción casos a partir de un ejercicio de experimentación**

Se trabaja en casos por medio de repartos en un segmento, no se evidencia que el sujeto establece relaciones entre objetos.

### **Fase 2: Transición del pensamiento no algebraico al pensamiento algebraico (en el contexto del software)**

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de ausencia de pensamiento algebraico

- 1) Ausencia de la indeterminancia y analiticidad
- 2) Ausencia de la indeterminancia y la analiticidad en el software
- 3) Ausencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

### **Fase 3: Movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema**

En esta fase está constituida por 3 momentos acorde a los indicadores de pensamiento algebraico

- 1) Presencia de la indeterminancia y presencia de la indeterminancia en el software
- 2) Presencia de la analiticidad y presencia de la analiticidad en el software
- 3) Presencia de la designación simbólicamente en el abordaje del problema

- **Otros problemas de la misma familia**

*fase 1: construcción casos a partir de un ejercicio de experimentación.*

El sujeto F pasa por esta fase. Las estrategias usadas en el abordaje del problema se basan en la búsqueda de un primer caso de forma exacta. Los esquemas de comunicación mediante expresiones verbales como [(s3) dividido en tres...] [AB es el diámetro y CB es el radio]

muestran la presencia de los indicadores “ausencia de la indeterminancia y analiticidad” ya que el sujeto trabaja con medidas correspondientes a objetos fijos. Estas luego son puestas en juego en el software a partir de esquemas de acción mediante expresiones en la calculadora como  $E1=s3/3$ ,  $c5=E1$ , estas muestran la presencia de los indicadores “ausencia de la indeterminancia y analiticidad en el software”.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de este sujeto, en las que resaltamos en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación propios de los macroesquemas “ausencia de pensamiento algebraico en el software”.

### PRIMERA SESIÓN SUJETO F

**#63 SF:** [porque si yo le doy la opción de este (s3) dividido en tres, ya le sacaría punto medio a este de acá] (el sujeto desliza punto P8 por s4) [y ya tendría tres, pero no sé cómo sacarle el centro]

**#82 SF:** [ umm ya] (el sujeto activa calculadora selecciona la *expresión* E1 y modifica S3 por s3 en la *expresión*  $E1=s3/3$ , obteniendo  $E1=4,28$  en el tablero)

**#91 SF:** (el sujeto des-oculta el segmento s3, luego crea circunferencia con centro en P7 y radio  $c5=E1$ ) (véase figuras 105 y 106)



Figura 105 Construcción de la expresión E1 por parte del sujeto F



Figura 106 Construcción de la circunferencia fija por parte del sujeto F

**#93 E1:** listo ¿qué tienes ahí construido? ¿Cuáles serían los puntos A y C?

**#94 SF:** [ya ahora sí] (el sujeto coloca etiqueta a los puntos) [lo que hice fue coger la distancia del segmento AC dividirlo en tres y dibujar la circunferencia con radio dado que es la calculadora que saqué de la división] (señala E1) [o sea, ese punto que quedaba de intersección entre la circunferencia y el segmento ya me daba el doble] (véase figura 107)

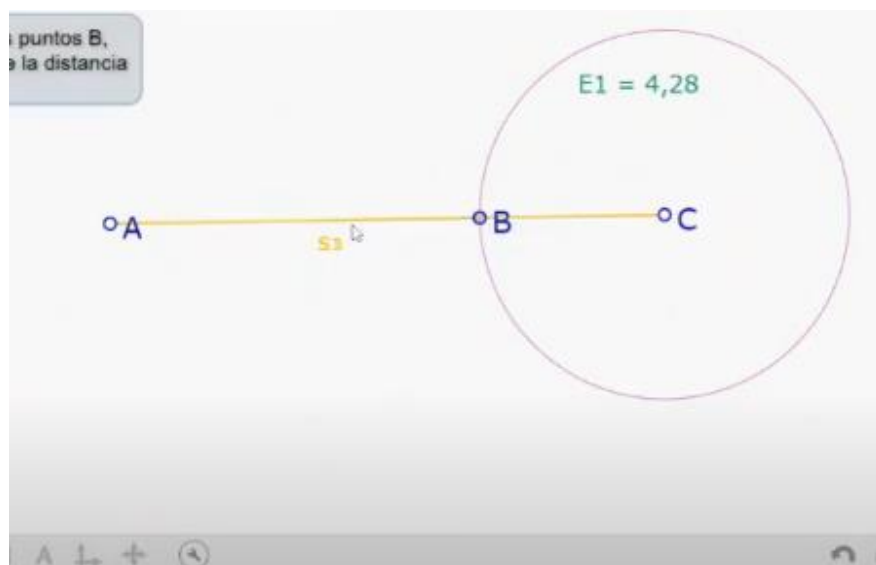


Figura 107 Construcción del primer punto de intersección B de forma exacta por parte del sujeto F

**#183 SF:** [es que lo que yo estaba pensando cuando les pregunté que, si C tenía que estar obligatoriamente en la circunferencia, es que AC puede ser el diámetro de una circunferencia y B puede ser pues los radios]



**#199 SF:** ... [donde AB es el diámetro y CB es el radio] (véase figura 108)

**#205 SF:**

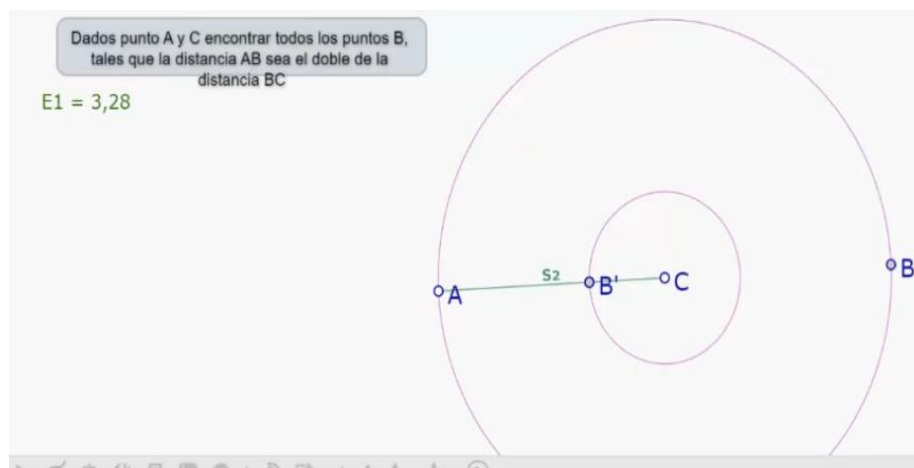


Figura 108 Segundo caso de forma exacta encontrada por parte del sujeto F

*fase 2: transición del pensamiento no algebraico al pensamiento algebraico (en el contexto del software) con ayuda de los entrevistadores*

Para movilizar el carácter de indeterminancia y analiticidad en el sujeto F, se desarrolla un trabajo guiado por los entrevistadores llamado “trabajo caso a caso a infinitud de casos” mediante el uso de objetos fijos en el que, dados dos puntos A y C, una circunferencia con centro en C y radio dado, se le pide encontrar un punto B que cumpla la condición del problema. Como el sujeto ya sabe usar la circunferencia centro radio y la calculadora para encontrar todos los puntos que estén a una distancia dada de un punto centro, se le pide encontrar puntos B para distintos radios.

Los casos trabajados fueron las circunferencias  $c1=3$ ,  $c1=4$  y sus correspondientes triples  $c2=9$  y  $c2=12$  respectivamente. Fruto de este proceso se observa un cambio en los esquemas de acción del sujeto, en las expresiones usadas en la calculadora, teniendo primero expresiones como  $c2=3*3$ , donde 3 era la medida de  $c1$ , y luego modificándolas para incluir la etiqueta de

una de las circunferencias en las expresiones, resultando esta como  $c2=c1*3$ . Estos tipos de comportamiento muestran cómo el sujeto al trabajar en varios casos particulares individuales empieza a mostrar esbozos de indeterminancia.

A continuación, mostramos extractos de la entrevista de este sujeto, en las que resaltamos en amarillo las intervenciones de los entrevistadores y en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación correspondientes a una transición hacia un pensamiento algebraico mediante la estrategia “trabajo caso a caso a infinidad de casos”.

## SEGUNDA SESIÓN SUJETO F

*Nota: el sujeto en una primera sesión realiza algunos casos de forma exacta, para una segunda sesión se realiza intervenciones de parte de los entrevistadores*

**#8 E2:** vas a crear una circunferencia centro-radio, con centro en C y suéltalo en cualquier punto

**#12 E2:** listo, vamos a modificar la medida del radio de esta circunferencia, vamos a colocar que sea de radio 3

**#13 SF:** (el sujeto modifica la medida de la circunferencia centro-radio  $c1=3$ )

**#15 E2:** vamos a colocar un punto sobre esta circunferencia (el E hace referencia a  $c1$ ) a ese punto lo vamos a nombrar P

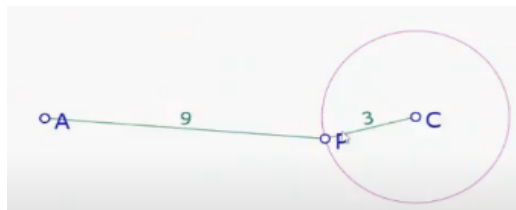


Figura 109 Trabajo caso a caso sugerido por los entrevistadores al sujeto F

#23 E2: para que cumpla la condición, ¿que es necesario para que se cumpla esa condición?

#24 SF: [que el segmento PC sea tres veces, o sea, que yo pueda multiplicar la distancia de PC tres veces y me dé la distancia de AP]

#48 E1: y ¿cuáles serían esas distancias?

#49 SF: [ en este caso 3 y 9]

#52 E1: ah, pero tú ya pudiste construir una distancia que fuera 3 entonces podrías construir una distancia que sea nueve

#53 SF: [ pues podría hacer un segmento y cambiarle la longitud con la calculadora]

#54 E1: aunque creo que con los segmentos no permite utilizar la calculadora, por ejemplo, qué hiciste para crear ese P que tuviera medida 3

#55 SF: [ahh ya entonces con la calculadora, con la circunferencia está perdón]...

*Nota: Luego que el sujeto realiza estrategias incorrectas se retoma nuevamente las intervenciones por parte de los entrevistadores para que el sujeto construya puntos exactos.*

#62 E1: lo que querías era que la distancia con respecto a A fuera 9

#63 SF: [sí, pero no sé cómo]

#64 E1: cuáles serían todos los puntos que equidistan a A que midan 9 o que tengas esa distancia con respecto a A

#65 SF: [así] (el sujeto crea circunferencia con centro en A y radio 9) (véase figura 110)

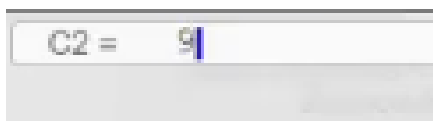


Figura 110 Medida de la segunda circunferencia que escribe el sujeto F en la calculadora

#66 E1: si quieres puedes acerca un poco C a A

#68 E1: Digamos que ahí tenías A y C, listo creaste esos puntos, ¿hay algún punto que cumpla la condición?

#69 SF: [este y este] (el sujeto marca los puntos de intersección entre  $c_1$  y  $c_2$ )  
(véase figura 111)

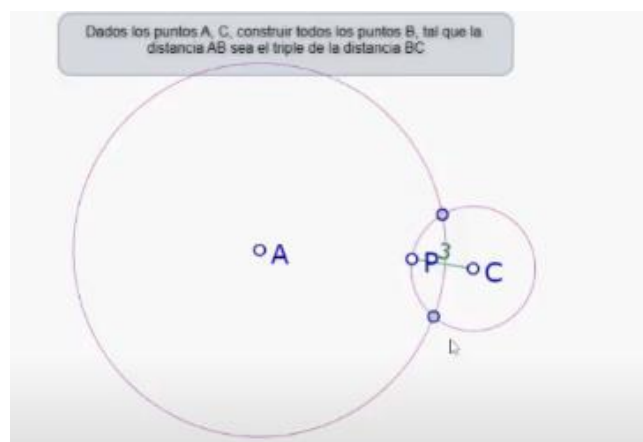


Figura 111 Construcción de los puntos de intersección B entre ambas circunferencias por parte del sujeto F

#74 E1: ahora vas a crear una circunferencia con C y que tenga de radio 4

#75 SF: (el sujeto crea circunferencia  $c_1=4$ )

#76 E1: ¿cómo harías para encontrar puntos B que cumplan la condición? o bueno cómo tendrían que ser los puntos B?

#77 SF: [tendrían que ser tres veces el radio de C] (el sujeto crea circunferencia centro radio con centro en A y radio  $3c$ , luego le da mostrar a la etiqueta de  $c_1$  y activa nuevamente la calculadora cambiando  $c_2=3*c_1$ )

#81 SF: (el sujeto crea segmentos AB, AB', BC y B'C y coloca medida a estos

segmentos) (véase figura 112)

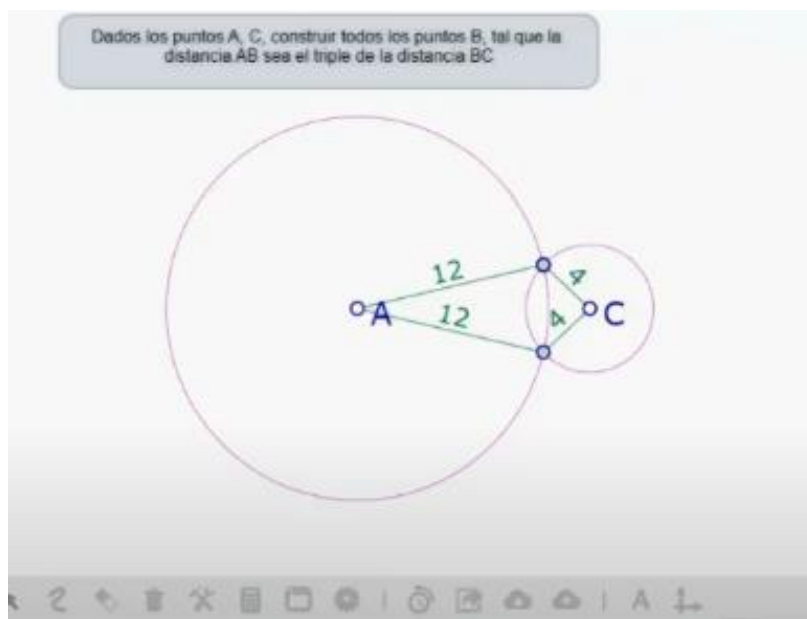


Figura 112 Comprobación de las medidas hecha por el sujeto F

*fase 3: movilización de los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución del problema.*

El trabajo en varios casos particulares desbloquea en el sujeto F la posibilidad de pensar en muchos casos, y luego de presentarle la circunferencia variable, este logra asociar esos muchos casos en una sola construcción, aspecto que le permite construir después la solución general del problema.

En el caso del sujeto H, a la hora de mover el punto libre, este no comprende por qué en algunos casos las circunferencias no se intersectan, esto genera que el sujeto tenga la necesidad de crear el segmento AC y ubicar el punto P1 sobre AC, restringiendo el área de arrastre del punto libre. Este comportamiento a pesar de no ser un indicador, consideramos que es importante porque se diferencia de los mostrados por parte de los sujetos de pensamiento algebraico, los

cuales no tenían el conflicto de que hubiese casos en los que las circunferencias no se intersectan. El sujeto anima el punto P1 y activa la traza de los puntos B para observar la trayectoria que representa la solución del problema.

Ambos sujetos hacen uso de los puntos O y P como medios semióticos para representar el carácter indeterminado de los objetos variables, aunque se puede observar que aún tiene dificultades para identificar las variaciones pertinentes en el software, ya sea porque confunden en ocasiones a P con B o porque aún consideran mover los puntos dados en vez del punto libre.

Acciones como: crear una circunferencia variable centro-punto, variarla mediante el arrastre del punto libre, la creación de una circunferencia fija cuya medida representa una relación de dependencia expresada numéricamente en la calculadora, el arrastre directo del punto P1 como forma de arrastre indirecto de los puntos B obteniendo una trayectoria puntual mediante la traza; todos son esquemas de acción correspondientes a los macro esquemas propios de pensamiento algebraico en el software. Las palabras clave como: lugar geométrico, todo momento y todos, y las expresiones en la calculadora como:  $c2=3*c1$ )  $c4=c3*2$  representan medios semióticos de objetivación usados por los sujetos para referirse a los caracteres de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica en el software.

A continuación, mostramos extractos de la entrevista de estos sujetos, en las que resaltamos en amarillo las intervenciones de los entrevistadores, en color rosado claro los macroesquemas de acción y comunicación, y de color rosa oscuro los medios semióticos de objetivación usados por los sujetos.

## SEGUNDA SESIÓN SUJETO F

#84 E1: listo ahora vas a construir una circunferencia centro punto, el punto donde quieras

#85 SF: (el sujeto crea circunferencia c1 con centro en C y que pase por P1)

#86 E1: ¿cómo encontrarías los puntos B que cumplan la condición?

#87 SF: (el sujeto crea circunferencia centro-radio con centro en A y radio  $c2=3*c1$ )

(véase figura 113)

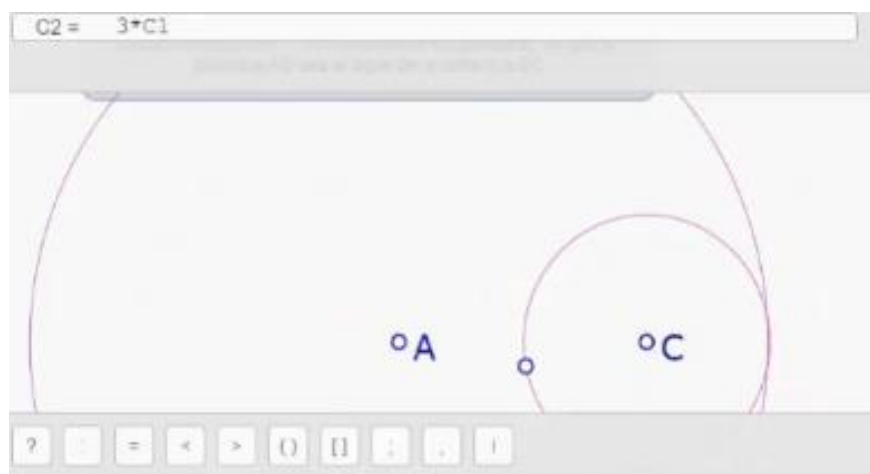


Figura 113 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto F

#89 SF: (el sujeto coloca etiqueta O al punto P1)

#90 E1: si quieres puedes cambiar el tamaño de la circunferencia centro punto

#91 SF: (el sujeto arrastra el punto O para cambiar el tamaño de c1, luego marca los puntos de intersección B y B' entre c1 y c2) (véase figura 114)

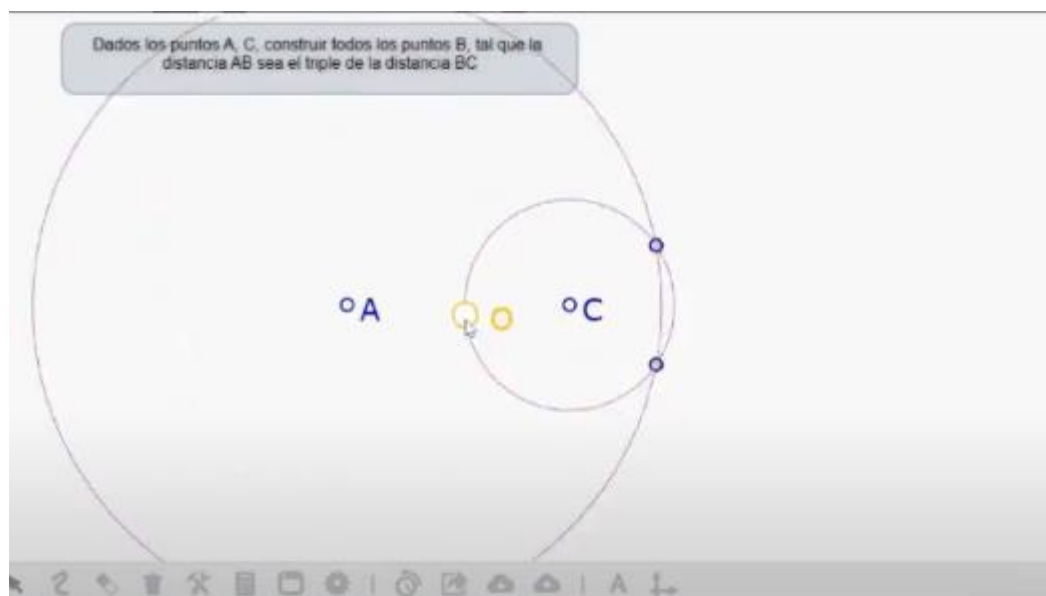


Figura 114 Construcción de los puntos de intersección entre ambos tipos de circunferencias por parte del sujeto F

#92 E1: listo, ¿cuáles serían los puntos B que cumplen la condición?

#93 SF: [estos de aquí] (el sujeto señala los puntos de intersección) los de la intersección (el sujeto crea segmentos AB, AB', BC y B'C y coloca medida a estos segmentos) [listo] (véase figura 115)

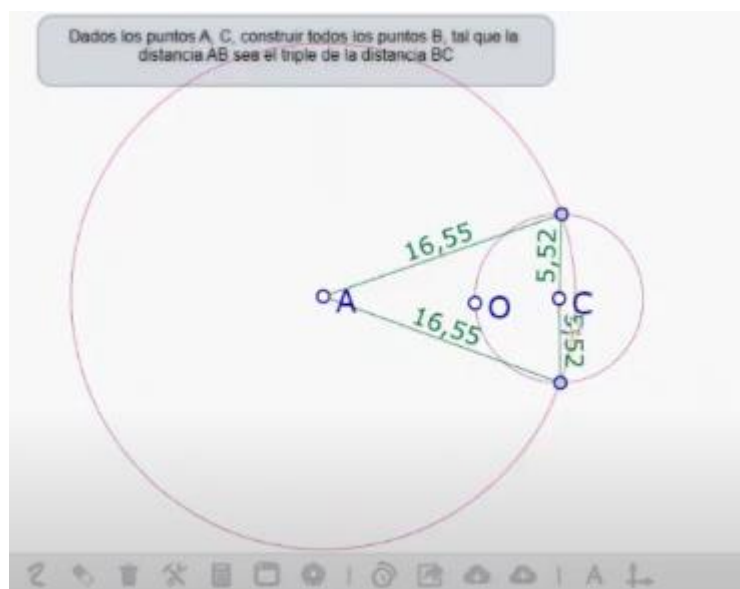


Figura 115 Comprobación de las medidas hecha por el sujeto F



**#97 SF:** [estoy mirando si hay otro] (el sujeto mueve el punto O, moviendo toda la construcción) [sólo esos porque son los únicos que, aunque yo mueva la circunferencia van a guardar la razón]

**#106 E1:** ... entonces tú me dices son otros casos o son los mismos de antes, es decir todo ese movimiento que estás haciendo son nuevo casos, o son los mismos B

**#107 SF:** [te diría que son otros B porque se está cambiando el radio de la circunferencia menor, pero...]

**#108 E1:** ese “pero” cómo lo dirías ¿qué observas de curioso ahí? ¿Qué te hace dudar?

**#109 SF:** [que lo que yo estoy cambiando es el O no el A y C]

**#110 E1:** y al cambiar el O ¿qué te lleva a pensar sobre los B, sí son los mismos o cambian? ¿Cuál es el conflicto que quizá te genera el movimiento?

**#111 SF:** [no, si son otros, si, son otros casos alrededor del mismo segmento]

**#112 E1:** bueno si dices que son otros, significa que cada vez que mueves todos esos B que se marcan cada uno es individual es como la colección de varios B ¿sí?

**#113 SF:** [ si, es como el lugar geométrico de los B]

**#117 SF:** (el sujeto activa la traza de B y B')

**#118 E1:** en ese problema entonces ¿cuáles serían los puntos B que cumplen la condición?

**#119 SF:** [los de esta circunferencia azul] (el sujeto señala la traza de B y B' alrededor de ella) (véase figura 116)

## #121 SF:

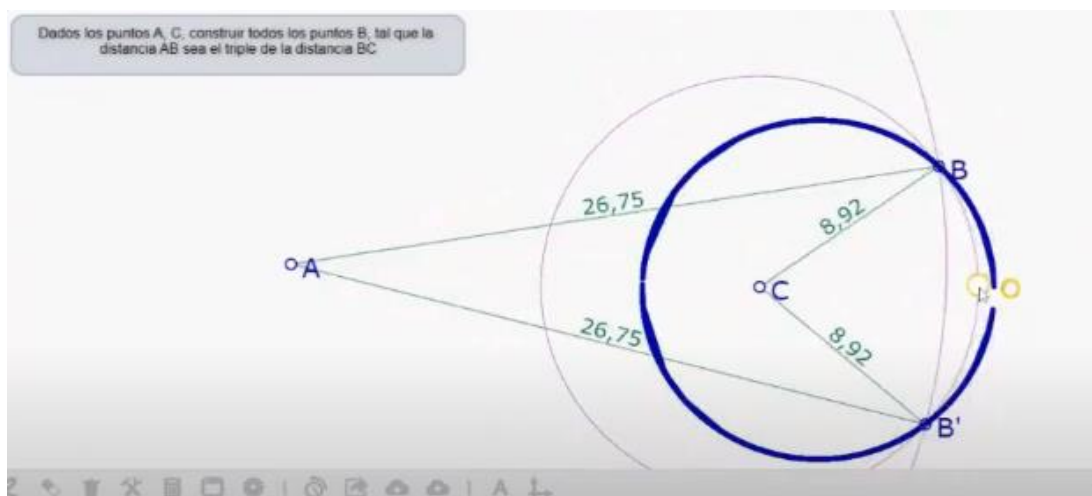


Figura 116 Uso de la traza por parte del sujeto F

## SUJETO H

#46 SH: [listo entonces creo un punto cualquiera A y un punto cualquiera C] ( el sujeto crea puntos A y C y susurra la situación) [listo, si yo hago una circunferencia de centro punto ahí tendría el primer punto B, voy a colocarlo como punto P porque no estoy segura si aún sea B] (el sujeto crea circunferencia c1 con centro en A que pasa por P) [ahí tengo AP y si uso la circunferencia centro-radio] (el sujeto crea circunferencia c2 con centro en C y radio aleatorio) [y con la calculadora puedo poner que esta centro radio va ser igual, hasta ahí va ser igual a la otra] (el sujeto escribe en la calculadora  $c2=c1$ ) [pero si la pongo como si fuera esa otra dividida en dos sería la mitad] (el sujeto modifica c2 haciendo uso de la calculadora  $c2=c1/2$ ) [pero ahí aún no la he anclado al punto P, o sea ya tengo que una de las circunferencias es exactamente la mitad de la otra, no sé si de pronto, uy no espérame] (el sujeto lee nuevamente la situación) [ah no lo puse mal, necesito es que sea el doble, no la

mitad, bueno en vez de dividirlo, toca multiplicarlo] (el sujeto modifica nuevamente  $c2 = c1 * 2$ ) [pero ahí aún no tengo anclado el punto P para que sea B] (el sujeto aproxima las dos circunferencias para que se vea punto P como un punto que toca las dos circunferencias)

(véase figuras 117 y 118)

**#49 SH:**

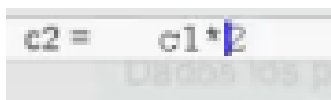


Figura 117 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto H

**#50 SH:**

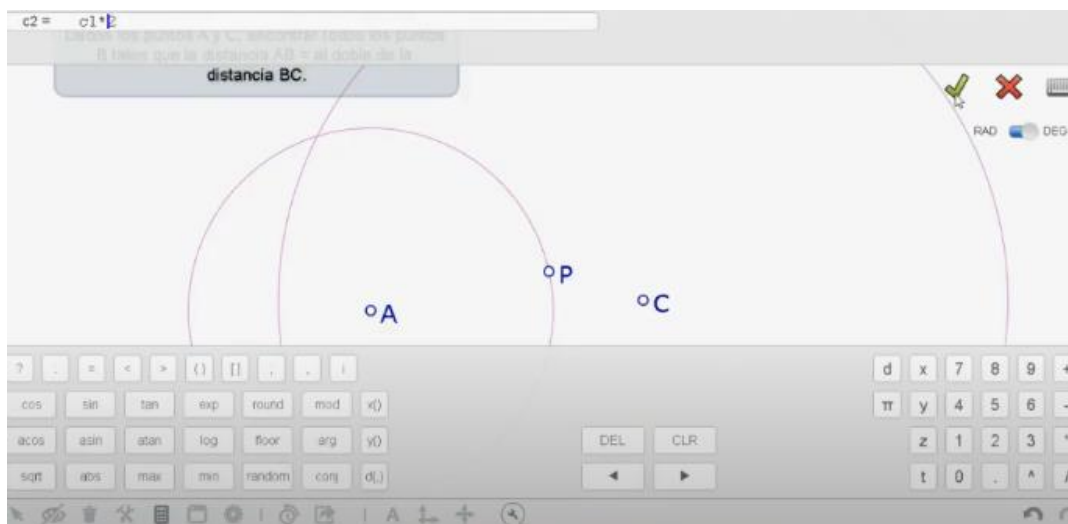


Figura 118 Construcción de la circunferencia que guarda la relación de dependencia por parte del sujeto H

**#52 SH:** [porque digamos si acerco, no estoy segura, si acerco las dos podría sacar el punto de intersección] (el sujeto coloca punto de intersección entre ambas circunferencias), [pero es que eso no me daría todas las soluciones o sea el punto de intersección en el momento en yo mueva C o mueva A pues hay veces en las que no se toca] (el sujeto mueve punto A y C) [necesito que obligatoriamente las dos estén en el punto B, tengo una pregunta

A y C obligatoriamente tienen que ser centros de la circunferencia ¿no, cierto?] (véase figura 119)

**#53 SH:**

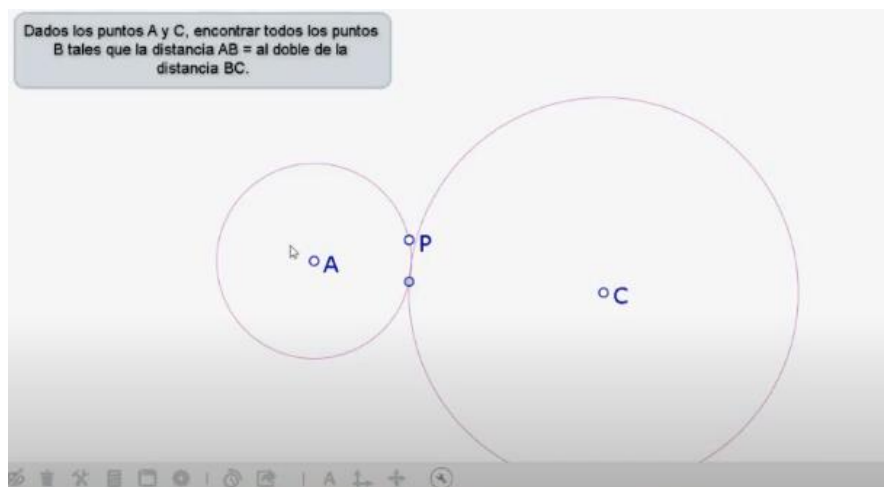


Figura 119 Construcción de ambas circunferencias

**#54 E2:** no, pues la situación tiene como unas variantes que AB sea el doble de BC, los puntos dados son A y C, digamos que tu dispones de cómo ubicarlos donde quieras

*Nota: El sujeto trata de que el punto P varíe en un dominio geométrico específico como un segmento AC impidiendo que las circunferencias dejen de intersectarse.*

**#55 SH:** [voy a intentar otra cosa, voy a dejar esta a un lado, porque no estoy segura si me sirve] (el sujeto traslada la construcción a la parte izquierda del tablero) [si yo tengo dos puntos A y C] (sujeto crea nuevos puntos A\_0 y C\_0) [y hago un segmento que vaya de A a C] (crea segmento AC) [y hago un punto sobre ese segmento] (el sujeto crea un punto (P1 punto sin etiqueta) [sobre el segmento y crea circunferencia c3 con centro en A\_0 que pasa por P1, luego circunferencia c4 centro en C radio CP1...yo me acuerdo que hay una herramienta que permite que se anclen, porque lo que quiero es anclar el punto con el que

hice la primera circunferencia a la segunda circunferencia] (el sujeto mueve P1 hasta que se perciba que toca las dos circunferencias) (véase figura 120)

**#56 SH:**

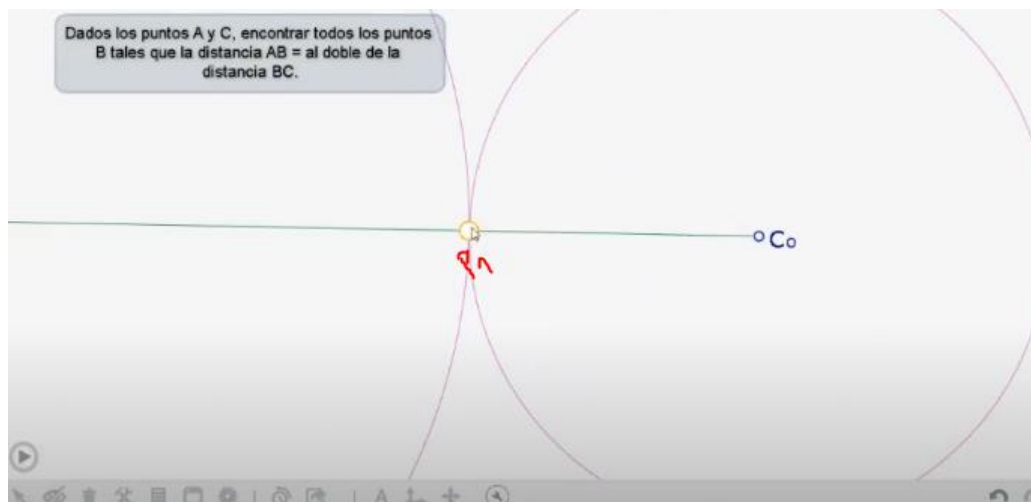


Figura 120 Arrastre del punto P1 para que pareciere estar sobre el segmento AC por parte del sujeto H

**#58 SH:** (el sujeto modifica la circunferencia  $c4 = c3 * 2$ , el sujeto susurra cómo la anclo al punto) [ah, pero es que no necesito] (el sujeto activa animación del punto P1) [ahí ya cumple que en todo momento va ser el doble] (véase figuras 121 y 122)

**#59 SH:**

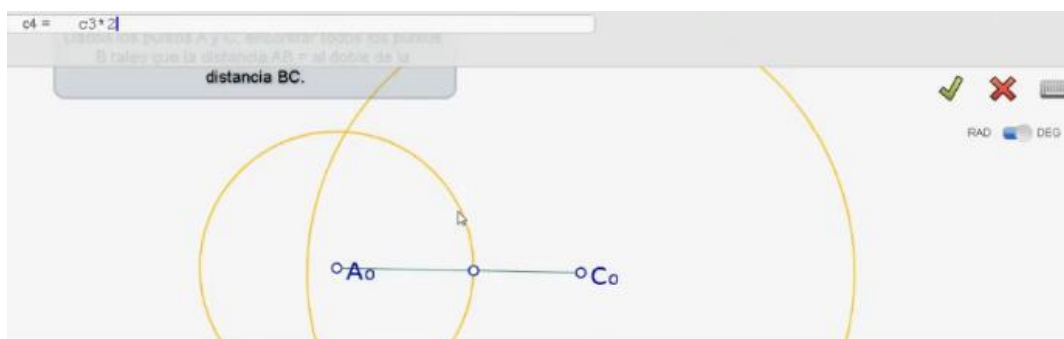


Figura 121 Relación de dependencia escrita en la calculadora por parte del sujeto H

**#60 SH:**

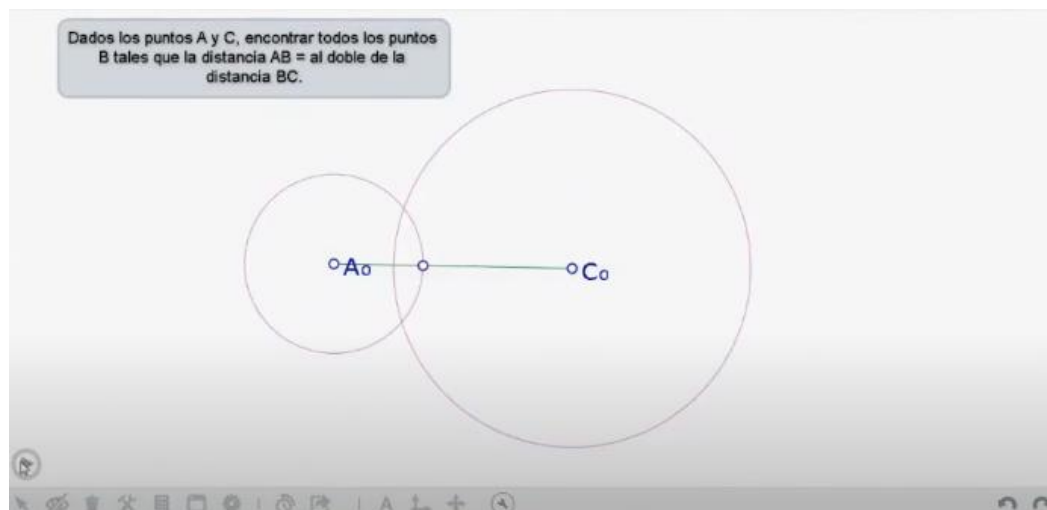


Figura 122 Construcción de las circunferencias que guardan la relación de dependencia por parte del sujeto H

**#61 SH:** [yo supongo que el campo van a ser todos los puntos de intersección que halle entre esas dos circunferencias] (el sujeto marca los puntos de intersección B y B\_0 entre ambas circunferencias c3 y c4 y activa la traza a B y B\_0 y luego dinamiza el punto PI) [tengo un problema en mi construcción, porque digamos desde mi punto de vista hacemos las dos circunferencias y ya dejamos que una es exactamente el doble de la otra, supongo yo, que todos los B que cumplen con esas características deberían ser los puntos de intersección de ambas circunferencias, pero el problema es que cuando le di para que me formará la traza los B siguen mostrándose en la circunferencia que tiene como centro A, entonces no sé por qué sucede eso, ah no mentiras, creo que ya lo encontré pero no estoy segura, para mí son esos, esa circunferencia que se creó ahí, es la circunferencia que muestra todos los posibles puntos B que cumplen que la distancia de AB sea el doble] (véase figura 123)

**#62 SH:**

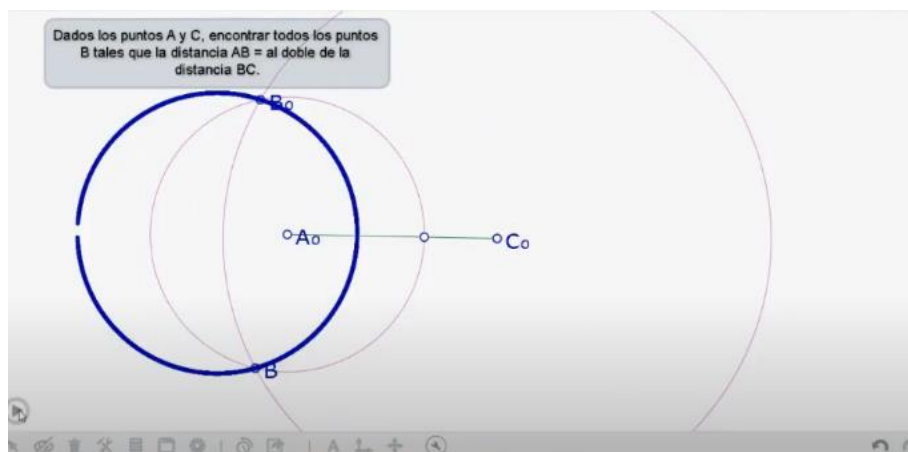


Figura 123 Uso de la traza por parte del sujeto H

**#64 SH:** [espérenme voy a cambiar porque es que puse mal los puntos porque puse la distancia BC como el doble de AB, entonces sólo voy a cambiar los puntos A y C, voy a invertirlos porque hice al revés la cuestión...] (véase figura 124)

**#75 SH:**

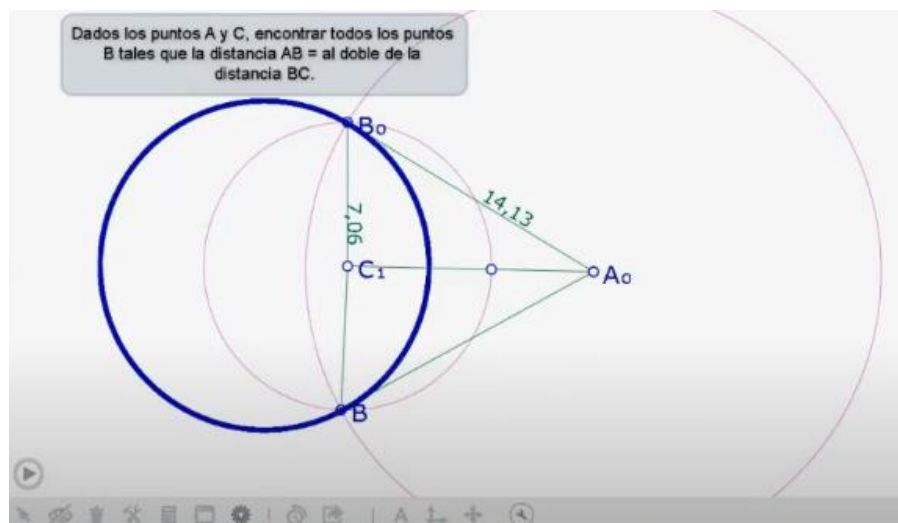


Figura 124 Comprobación de la medida por parte del sujeto H

*otros problemas de la misma familia.*

En el caso del sujeto F, este al resolver el caso de  $k=4$ , recurre nuevamente a estrategias de la fase uno, obteniendo únicamente un caso exacto. Las intervenciones de los entrevistadores como: ...en la situación anterior cuando tenías que tomar el triple de una distancia a otra, esa situación te permite aplicar también en esta..., ayudan al sujeto a activar nuevamente los esquemas de acción y comunicación usados en el caso  $k=2$  para este problema; esto permite que el sujeto pueda resolver el problema.

El abordaje del problema de esta familia para las razones  $k=3$  y  $k=4$  por parte de los sujetos F y H se caracteriza por no recurrir a la reconstrucción del problema anterior para una razón  $k=2$ , en cambio recurren al uso de los medios semióticos y los esquemas de acción y comunicación que tienen activos para solucionar el problema. En efecto, los esquemas de acción se movilizan en la reconstrucción del problema usando esta vez expresiones en la calculadora como  $c_3=4*c_2$ ;  $c_2=c_1*3$ ; luego estos ubican los puntos de intersección B y activan la traza de estos a partir del arrastre del punto variable.

En la movilización de esquemas de comunicación en las descripciones verbales para un caso  $k$ , se puede observar que el sujeto H no menciona los puntos de intersección en las circunferencias; y en ambos sujetos no se menciona el uso de la traza y el arrastre del punto libre, lo que indica que estos aspectos son implícitos en los esquemas de acción de estos sujetos.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores, en color rosado claro los esquemas de acción y comunicación, y en color rosado oscuro los medios semióticos de objetivación que presentan los sujetos.



## SEGUNDA SESIÓN SUJETO F

**#125 SF:** ... [entonces yo tengo A y C] (el sujeto crea punto A y C, crea segmento (s1) AC, luego crea circunferencia (c1) centro radio con centro en C y radio  $c1=s1/5$ ) (véase figuras 125 y 126)



Figura 125 Operación de una cantidad representada por el segmento escrita en la calculadora por parte del sujeto F

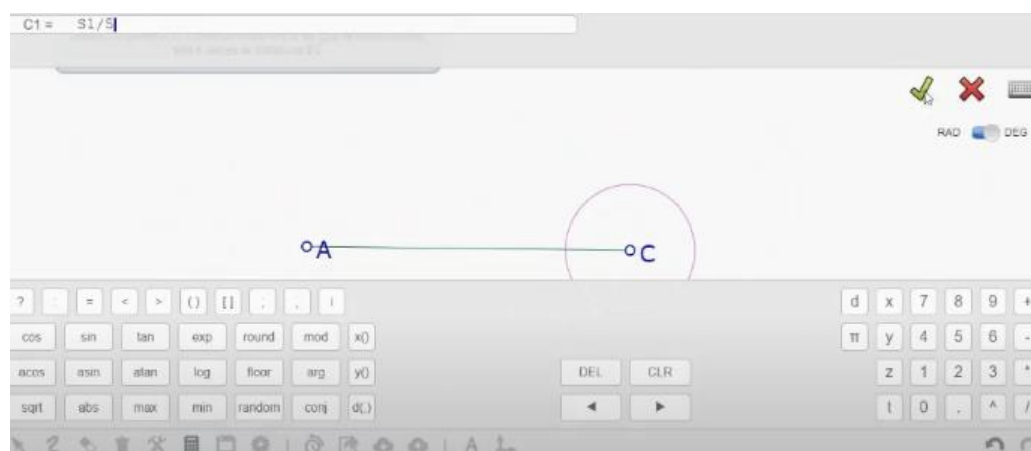


Figura 126 Creación de la circunferencia con radio  $S1/5$  por parte del sujeto F

**#126 SF:** (el sujeto marca punto de intersección B entre el s1 y c1, crea y coloca medidas a segmentos AB y BC, luego crea expresión  $E1=s2/s4$ ) listo (véase figuras 127 y 128)

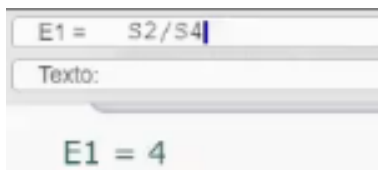


Figura 127 Comprobación de la operación por parte del sujeto F

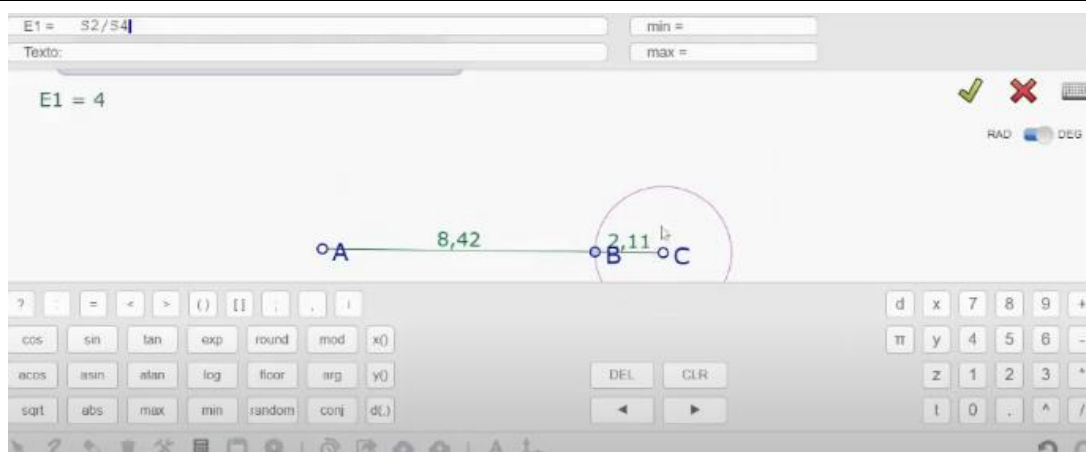


Figura 128 Uso de segmentos con medida para verificar la operación por parte del sujeto F

#128 SF: [busqué dividir 5 veces el segmento en partes iguales y coger una y ahí ya me da la razón de 4 a 1]

#129 E1: listo, ¿serían todos los puntos B o hay más?

#130 SF: [no hay más sólo encontré uno]

#131 E2: en la situación anterior cuando tenías que tomar el triple de una distancia a otra, esa situación te permite aplicar también en esta

#132 SF: [si]

#134 SF: (el sujeto crea puntos A' y C', crea circunferencia con centro en C' que pase por P1, crea circunferencia centro-radio con centro en A' y radio  $c3=4*c2$ )

#135 SF: (el sujeto marca los puntos de intersección B' y B'' (puntos sin etiqueta), crea y coloca medida a los segmentos A'B', C'B', A'B'' y C'B'' y luego activa traza a B' y B'') (véase figura 129)

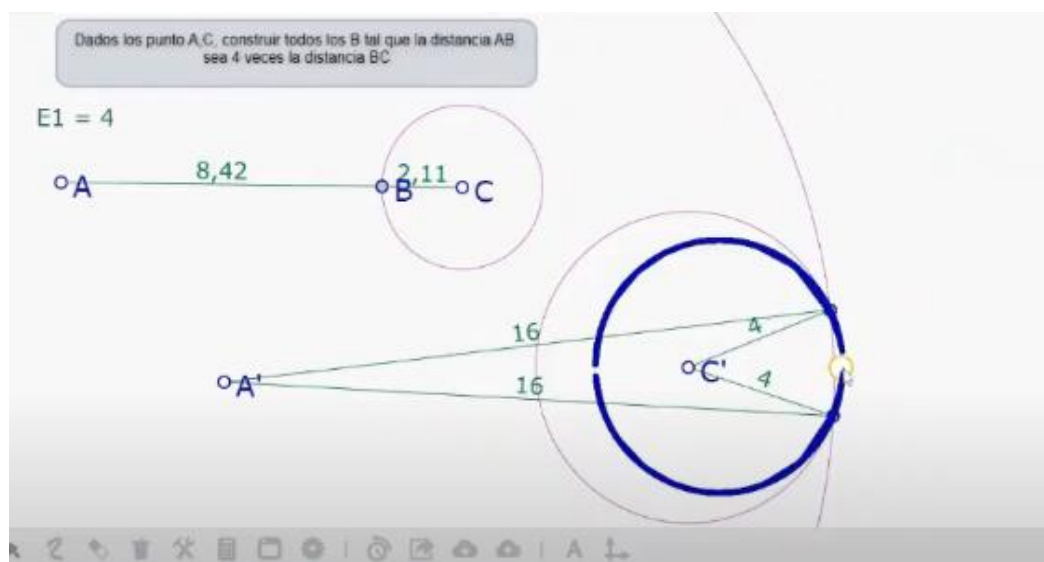


Figura 129 Uso de la traza para una razón  $k=4$  por parte del sujeto F

**#136 E2:** bueno, entonces ahí ¿cuáles serían todos los puntos C que cumplen la condición?

**#137 SF:** [todos los que están en la circunferencia que se formó con la traza]

*Nota: Luego de este problema, se le pregunta por un caso donde la razón entre las circunferencias no es el triple sino es cualquier  $k$ .*

**#138 E2:** listo y si tuvieras ..., cualquier relación de distancia ¿qué protocolo de construcción propones?

**#139 SF:** [¿Para hacer todos los puntos exactos o para hacer así con la traza?]

**#140 E2:** si, que fueran todos los puntos C que cumplen que ya no fuera el doble de la distancia digamos AB el doble de la distancia BC o el triple, sino que fuera 50 veces, 100 veces la distancia ¿sí?

**#142 E2:** ¿cómo propones un protocolo de construcción? ¿cómo sería tu paso a paso?

**#143 SF:** [sería tener A, C, construir A, C, luego haría la circunferencia con centro y punto, con centro en C y un radio cualquiera y construiría una circunferencia con radio dado

con centro en A y radio que sea la multiplicación de tantas veces se necesite sea el segmento AB con respecto al segmento BC, multiplicando el radio de la circunferencia C con radio punto]

## SUJETO H

**#82 SH:** (el sujeto crea puntos A y C) [vuelvo hacer exactamente lo mismo creo punto A y C dejó un segmento entre ellos] (el sujeto crea segmento AC) [y un punto cualquiera sobre el segmento] (el sujeto crea un punto P sobre el segmento) [entonces hago una circunferencia con la herramienta centro- punto entre ese punto que es P para no perdernos y C] (el sujeto crea circunferencia centro en C que pasa por P), [luego con la herramienta centro-radio, hago otra circunferencia, con calculadora en esa nueva circunferencia le voy a poner la condición que va ser el triple de la primera circunferencia] (el sujeto crea circunferencia con centro en A y radio  $c2 = c1 * 3$ ) [listo, hallo los puntos de intersección entre ambas circunferencias] (el sujeto marca los puntos de intersección entre circunferencia c1 y c2) [esos puntos los voy a poner como B y B'] (el sujeto etiqueta los puntos B y B' ) y les voy activar la traza (activa la traza de B y B\_0) [ahí ya deben cumplir con la condición de todos los puntos B, si yo animo el punto P] (El sujeto anima el punto P) [me va soltar todos los puntos B que cumplan con esa condición, no sé si es por lo rápido que no se ve todo la circunferencia, voy arrastrar el P yo misma para ver toda la circunferencia, ya tengo todos los posibles B, bueno ya complete lo que decía el enunciado] (véase figura 130)

**#84 SH:**

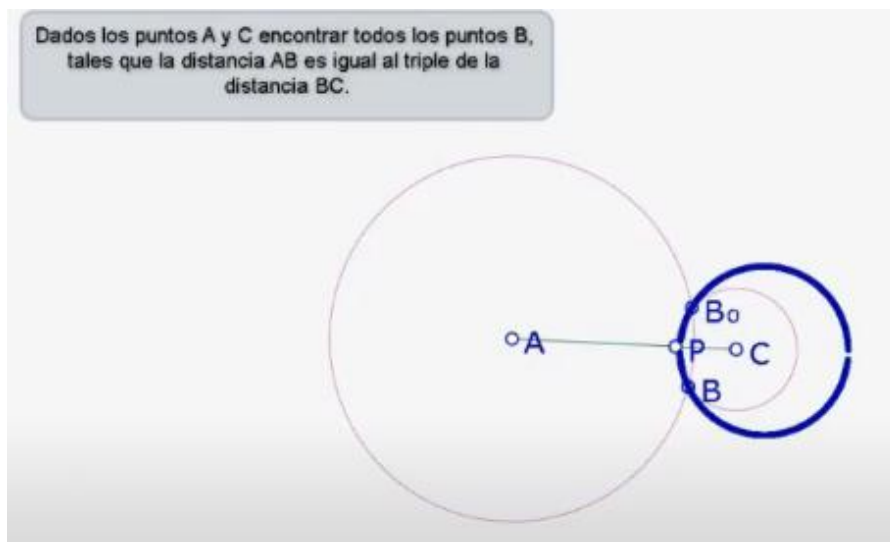


Figura 130 Uso de la traza para una razón  $k=3$  por parte del sujeto H

**#85 E2:** ¿todos los B cumplen esa condición?

**#86 SH:** [sí, o sea si medimos la distancia de C a B y de A a B nos va pasa lo mismo que ocurrió en el anterior y es que una distancia va ser la mitad de la otra, o sea no va ser la mitad CB va tener una distancia específica y AB va ser el triple de esa distancia ¿lo pruebo?]

**#88 SH:** [entonces hacemos un segmento de C a B] (el sujeto crea el segmento CB\_0) [y un segmento de A a B] (el sujeto crea el segmento AB\_0) [y medimos] (coloca medida a los segmentos) [entonces uno mide 5,59 y otro 16,78, es una aproximación no, si nosotros hacemos 5,59 por 3, nos da 16,78 y ahí cumple con AB sea el triple de CB y si digamos movemos el punto P] (el sujeto mueve el punto P) [pues las distancias van a seguir siendo tres veces una de la otra , por ejemplo aquí, como es una aproximada da CB como 5 y AB como 14,99 yo supongo que ese 99 es periódico, lo podemos aproximar a 15 que es el triple]

**#95 E1:** ¿esos serían todos los puntos B que cumplen la condición?

**#88 SH:** [Si]

*Nota: Luego de este problema, se le pregunta por un caso donde la razón entre las circunferencias no es el triple sino es cualquier k.*

**#97 E2:** Si tuvieras que describir tu protocolo de construcción o tu paso a paso para una relación de distancias que ya no fuera el doble o el triple, que fuera una distancia  $k$  cualquiera ¿cómo propones un protocolo de construcción?

**#98 SH:** [primero se tendría que construir la distancia fija por decirlo así, la que tenemos, que sería con la herramienta de circunferencia centro punto y luego de ello, pues a mí me parece que por obligación se debe trazar el segmento entre A y C para que nos de todos los posibles puntos B, pero por obligación sea cual sea la distancia superior o inferior que me pongan, necesito primero usar la circunferencia punto para tener una de las distancias y, para la otra distancia necesito usar la circunferencia centro radio para poder cambiar ese radio al número que yo necesito o la distancia que yo necesito, entonces digamos ustedes me podrían decir que ponga mayor o menor distancia a la primera que tenemos, que es la circunferencia centro- punto, pero con la circunferencia centro radio yo podría hacerlo de cualquier forma, así fuera distancia mayor o menor o exactamente igual, sin importar qué distancia me pongan, si, o sea, como que pasa lo mismo con las herramientas anteriores y es que se complementan , primero usamos una que no podemos cambiar exactamente a lo que queramos, la de centro punto sino que nos da un aproximado, pero gracias a tener eso, podemos crear la otra y como anclarla a la distancia aproximada, eso ya hace que nuestras distancias sean exactas y ya, no sé si tienen alguna otra pregunta]

Debido a que en la descripción del sujeto H no son claras las ventajas de abordar el problema haciendo uso de una circunferencia fija y otra variable frente al uso de dos circunferencias fijas, los entrevistadores realizaron intervenciones como: ¿qué pasaría si en cambio de tener una circunferencia centro punto y una centro radio, tuvieras dos circunferencias centro radio? ¿qué diferencia hay de que tengas dos herramientas diferentes o dos herramientas que son iguales? Esto produce un conflicto en el sujeto, porque en la construcción a pesar de tener solo dos soluciones sigue insistiendo en arrastrar para obtener más puntos solución a través de la traza, no observa que en la construcción con ambas herramientas diferentes se obtienen infinitos puntos, mientras que en la segunda construcción solo obtiene dos. Estos esquemas hacen parte del indicador de variación no pertinente en el software llamado “Variación que tiene que ver con un cambio de posición” representado en la variación de puntos dados en el problema. Esto genera un obstáculo en el abordaje del sujeto porque al observar variaciones que no son pertinentes, las condiciones del problema cambian y por lo tanto los puntos B que se muestran en la traza dejan de ser soluciones.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas de estos sujetos, en las que resaltamos en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores, y en color rosado claro los esquemas de los sujetos correspondientes a una variación no pertinente.

### **SUJETO H**

*Nota: Luego se le pregunta al sujeto por una posible solución únicamente usando la herramienta circunferencia centro-radio, con el objetivo de que el sujeto explicite si concibe o no la variación de cantidades a partir de objetos variables.*

**#99 E2:** ... ¿qué pasaría si en cambio de tener circunferencia centro punto y centro radio, tendrías dos circunferencias centro radio ¿qué diferencia hay de que tengas dos herramientas diferentes o dos herramientas que son iguales? ¿qué pasa con las distancias?

**#100 SH:** [si yo tengo la circunferencia centro punto como mi primera distancia yo la puedo manipular fácilmente, si yo tengo dos circunferencias con centro radio utilizaría la calculadora para manipular a las dos, pero no estoy segura que dé, o sea que una esté sujeta a la otra, espérame lo hago a ver si sí]

**#102 SH:** [digamos que no voy a utilizar la circunferencia centro punto, entonces tenemos puntos A y C] (el sujeto crea puntos A\_0 y C\_0) [voy hacer exactamente los mismos pasos que hice para construir la anterior porque no uso la circunferencia centro punto] (el sujeto crea el segmento AC) [ahí ya no podrían haber un P sobre la recta porque ya no necesitaría anclar la primera circunferencia, entonces hacemos centro radio] (el sujeto crea circunferencia c3 con centro en A\_0 y radio aleatorio) [hacemos otra centro radio] (el sujeto crea circunferencia c4 con centro en C\_0 y radio aleatorio) [y con la calculadora vamos a decir que la segunda va ser igual a la primera por 3 para que nos dé el triple] (el sujeto modifica la amplitud de  $c3=c4*3$ ) [ahí podemos igual hallar los puntos de intersección] (el sujeto marca los puntos de intersección B\_1 y B\_2 entre c3 y c4) [se le activa la traza] (el sujeto activa la traza de B\_1 y B\_2) [ahí nos da únicamente dos posibles puntos, voy a ver si moviendo B o moviendo A nos deja hacer algo] (el sujeto mueve el punto C\_2) [no sé qué decir porque digamos que moviendo C hace un trazo de posibles puntos B que cumplen con las distancias]

**#110 SH:** [..., voy probar nuevamente] (el sujeto mueve C\_0) [me estoy dando cuenta de algo que la distancia de C a B siempre..., no mira que pasa lo mismo, si esta con



el triple, la distancia de AB si es el triple de la de C a B, en un caso específico que la distancia CB es 8, o sea me tocaría para sacar todos los posibles... creo que me tocaría ir cambiando a C con la calculadora el diámetro, o sea el radio] (el sujeto modifica  $c4=5$  y mueve  $C_0$ ) [y me daría exactamente la circunferencia AB, mueva hacia donde la mueva se va crear la misma circunferencia, mientras que en la otra construcción que había hecho me daba la circunferencia CB inicial] (véase figuras 131 y 132)

**#111 SH:**

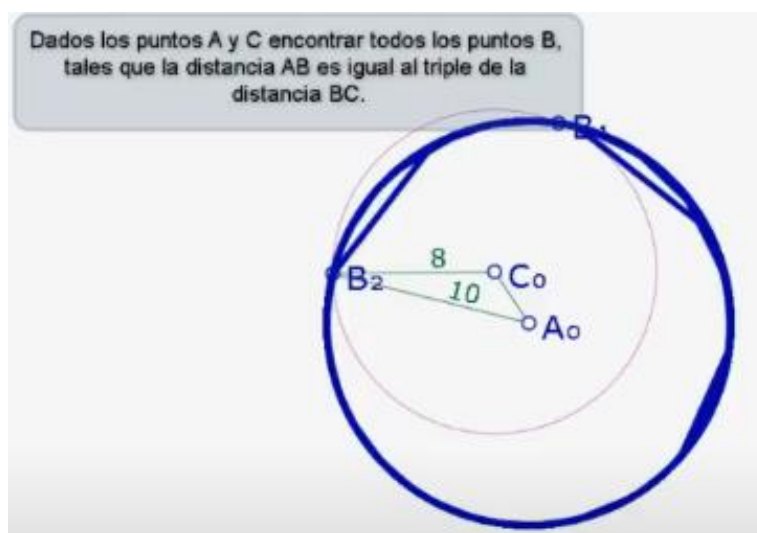


Figura 131 Uso de la traza en el punto B y movimiento del punto C por parte del sujeto H

**#113 SH:**

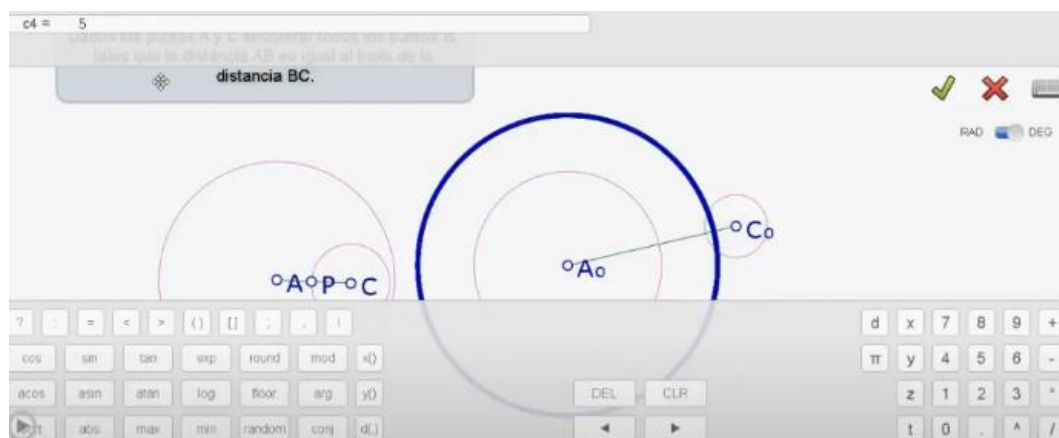


Figura 132 Comparación de ambos tipos de construcciones por parte del sujeto H

**#114 SH:** [en la construcción que hice con las dos distancias, con el centro punto y centro radio, me marca una circunferencia que pareciera ser la circunferencia CD inicial, no la circunferencia que tiene como radio C inicial y en la segunda me da la circunferencia que tiene como centro A, no sé porque, no sé a cuál de las dos construcciones creerle.] (véase figura 133)

**#115 SH:**

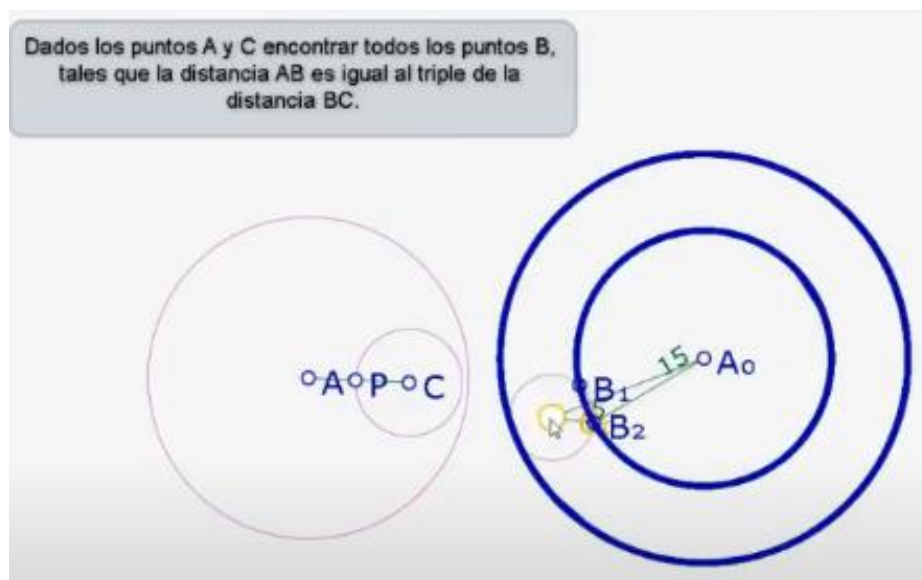


Figura 133 Comparación de ambos tipos de construcciones al arrastrar puntos por parte del sujeto H

**#116 E1:** ¿cuál de los dos casos te permite ver todos puntos B?, teniendo A, C dados

**#117 SH:** [creo que la primera, porque se varía de radio y aun así me permite ver todos los puntos que se cumplen ¿sí?, la segunda construcción me permite ver todos los puntos en que se cumple únicamente con una distancia dada, o sea con que C tenga una distancia específica,] (el sujeto anima el punto P) [porque si te das cuenta en la primera circunferencia, la primera construcción de las dos circunferencias usando la circunferencia centro radio y centro punto uno mueve ambas circunferencias y me da una sola circunferencia de los posibles puntos B] ++ el sujeto hace referencia a la circunferencia que queda con la traza ++ [pero en la segunda me da distintas circunferencias dependiendo de la distancias que yo le ponga a la primera circunferencia dada que, es la de C, la de centro en C]

**#119 E2:** bueno, primero ¿qué concluyes al utilizar dos herramientas distintas y dos herramientas que son iguales? ¿qué pasa con esas herramientas?

**#120 SH:** [es que no estoy segura, porque es que con las herramientas distintas me da fácilmente todos los posibles puntos, pero quiero probar algo qué pasa si yo pongo A de la primera construcción sobre A de la segunda construcción y C de la segunda construcción sobre C]

**#122 SH:** [o sea, A de la primera me sigue dando lo mismo de la primera construcción, pero tendría si muevo la circunferencia C no me dan los mismos puntos B, entonces no sé, porque en ambas se prueba que si son el triple, pero poniéndolo hipotético A y C no deberíamos moverlos en la construcción donde yo uso la misma herramienta dos veces, que en este caso es la circunferencia de centro-radio me toca por obligación ir

moviendo C para que me den todos los posibles B, mientras que cuando yo uso las dos herramientas al tiempo la de circunferencias con centro-radio y la circunferencia con centro punto no necesito mover los puntos A y C para que me de los posibles puntos B] (el sujeto separa las dos construcciones moviendo los puntos A y C)

**#129 E2:** ¿por qué en una tienes que mover el punto C y por qué en la otra no?

**#130 SH:** [es que en la que utilice las dos herramientas distintas como hay una que es centro punto yo ancle ese punto a una recta que va entre A y C entonces no importa la distancia que hay entre A y C ese punto va ir moviendo la circunferencia mientras que en el que utilice la misma herramienta dos veces no hay nada que vaya cambiando la distancia, me toca por obligación mover alguno de los dos puntos.]

### ***2.1.3 sujeto b. un abordaje fuera de la clasificación propuesta en la investigación.***

El sujeto B hace parte de la categoría de sujetos de “Pensamiento no algebraico” en el abordaje de la primera familia de problemas, ya que moviliza los esquemas de solución con ayuda de los entrevistadores. Para una segunda familia de problemas el tratamiento de dependencias entre objetos es través de construcciones geométricas y no a través de expresiones numéricas en la calculadora.

En el proceso de solución del problema, identificamos tres fases que describimos a continuación.

*fase 1: construcción de un primer caso de forma exacta.*

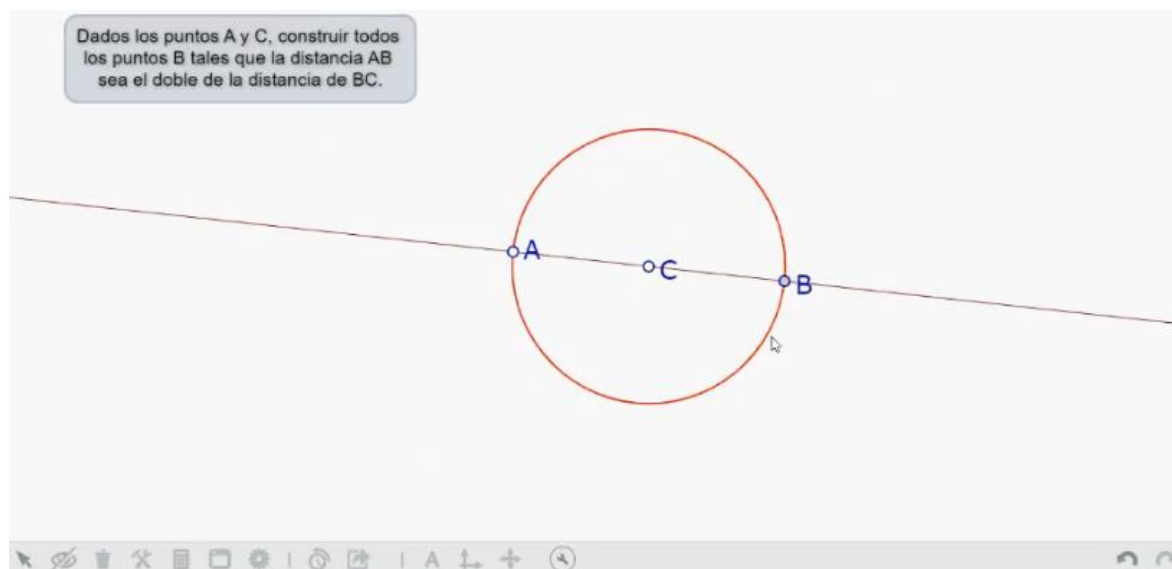
El sujeto construye un primer caso de forma particular, este corresponde a la distancia AB como el diámetro de una circunferencia y BC como uno de sus radios, en esta construcción se cumple la condición que  $AB=2BC$ .

A continuación, mostramos extractos de la entrevista realizada al sujeto, en la que resaltamos en color rosado las acciones y expresiones del sujeto que corresponden a la construcción de un caso de forma exacta.

### SUJETO B

*Nota: Mediante construcciones aproximadas, el sujeto B encuentra un caso exacto, en el que los puntos A, B y C son colineales, y la distancia AB es el diámetro de una circunferencia de radio BC (véase figura 134)*

**#32 SB:**



*Figura 134 Construcción de un primer caso de forma exacta por parte del sujeto B*

#36 SB: [Creo que ese sería uno...]

*fase 2: construcción de más casos de forma aproximada.*

Luego de la construcción de un primer caso exacto del problema, aparece la pregunta sobre la existencia de más puntos por parte de los entrevistadores. En respuesta a esto, el sujeto construye dos puntos adicionales que son de forma aproximada mediante un ejercicio de experimentación. Los entrevistadores nuevamente incitan al sujeto a que encuentre más casos, lo que resulta en la construcción de una triple intersección en un intento de construir un caso de forma exacta.

En el abordaje del sujeto se puede ver: La presencia constante de ayudas por parte de los entrevistadores para que el sujeto piense en muchos casos, lo que refleja que esta necesidad no surge por parte del sujeto. 2) El inexistente uso de la calculadora en la construcción de casos. 3) Los casos encontrados tienen como base el uso de conceptos geométricos como simetría y equidistancia; y el uso de objetos como el compás; aspectos que en su mayoría el sujeto conocía de antemano a la solución de estos problemas. Los esquemas movilizados por el sujeto son de índole geométrico expresados de forma verbal y representados por medio de un dibujo en la pantalla de DGPad-Colombia.

A continuación, mostramos extractos de la entrevista realizada al sujeto, en la que resaltamos en color rosado las acciones y expresiones del sujeto que corresponden a la construcción de casos, y en color amarillo las intervenciones de los entrevistadores que ayudan al sujeto a pensar en más casos.

#### SUJETO B

**#39 E1:** listo, ya que encontró ese ¿puede encontrar otro?

*Nota: Antes esta pregunta el sujeto realiza construcciones aproximadas mediante*

circunferencias para encontrar otro punto. Al no hallar otro, éste decide hacer uso de los segmentos  $AB$  y  $CB$  para encontrar uno aproximado mediante el arrastre de  $B$ .

**#55 SB:** (El sujeto empieza a mover el punto para encontrar de forma aproximada un punto  $B$  tal que  $AB=2BC$ ) (véase figura 135)

**#56 SB:**

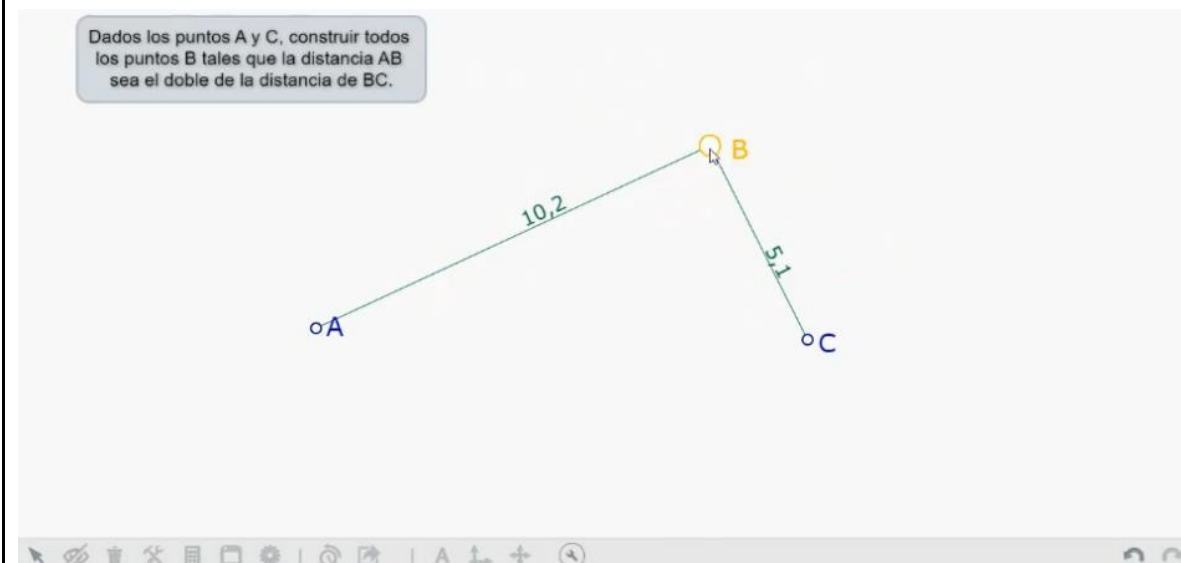


Figura 135 Búsqueda de otro punto  $B$  que cumpla la condición de forma aproximada por parte del sujeto B

**#57 SB:** (El sujeto construye una circunferencia  $c1$  con centro en  $A$  que pasa por  $B$ , y una circunferencia  $c2$  con centro en  $C$  que pasa por  $B$ , ubica un punto de intersección  $P1$  entre  $c1$  y  $c2$ , construye los segmentos  $AP1$  y  $CP1$  y muestra sus medidas, corroborando que  $P1$  es otro punto que cumple la condición) (véase figura 136)

## #58 SB

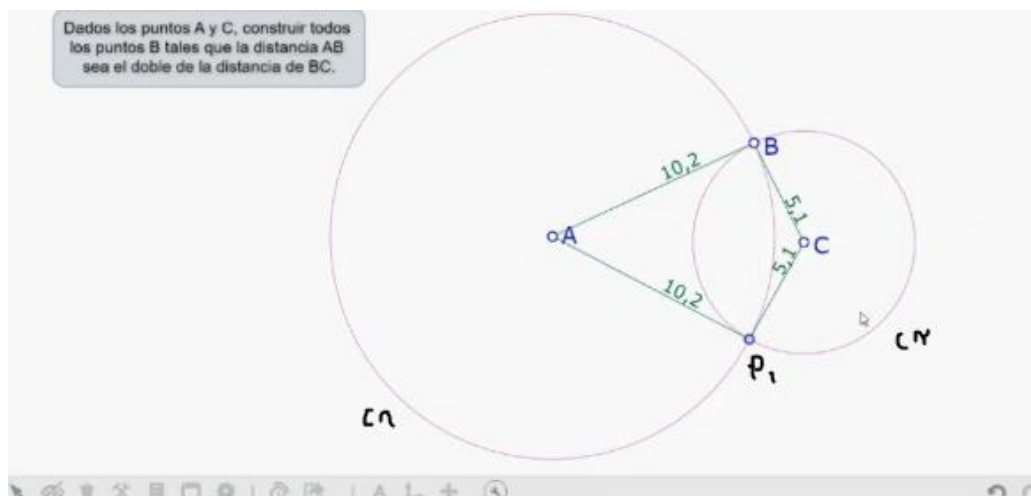


Figura 136 Construcción de dos circunferencias para obtener dos puntos de intersección B por parte del sujeto

B

#61 SB: [Pues estaba notando que siempre va a tener la forma de un triángulo, en este caso (el sujeto construye el segmento AC y con ello se visualizan dos triángulos ACB y AP1C), de acá a acá ... dos triángulos rectángulos... obvio que, para el caso, para el otro lado también debe existir, pues ahí está el punto ¿no?, la distancia de A a B es el doble de B a C]

#63 SB: ### [toca explicar el punto hacia abajo]

#64 E1: Y también cumple al parecer

# 65 SB: [Ujum]

#66 E1: Entonces ya tendría tres casos, estos dos más el que hizo al principio que era colineal

#67 SB: [Si...]

#68 E1: Listo, ¿puede encontrar otro caso? ¿A parte de esos tres?



*Nota: El sujeto construye una recta  $r_2$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $P_3$ , circunferencia  $c_1$  con centro en  $A$  que pasa por  $P_3$ , una circunferencia  $c_2$  con centro  $P_3$  que pasa por  $A$ , una circunferencia  $c_3$  con centro  $C$  y radio  $AP_3$  con la herramienta compás, luego un punto de intersección  $P_4$  entre  $r_2$  y  $c_2$ . Luego mueve  $P_3$  intentando que el punto  $P_4$  quede sobrepuesto sobre 3 objetos ( $r_2$ ,  $c_2$  y  $c_3$ ) en lo que llamamos como una “triple intersección”, acción que no es posible en DGPad-Colombia, porque los puntos de intersección se crean entre dos objetos únicamente.*

**#81 SB:** (El sujeto hace ese movimiento hasta que logra sobreponer de forma aproximada el punto  $P_4$  sobre  $c_3$ , luego crea el segmento  $CP_4$ , el segmento  $P_4A$ , oculta la recta  $r_2$ , y muestra las medidas de  $CP_4$  y  $P_4A$ ) (véase figura 137)

**#82 SB:**

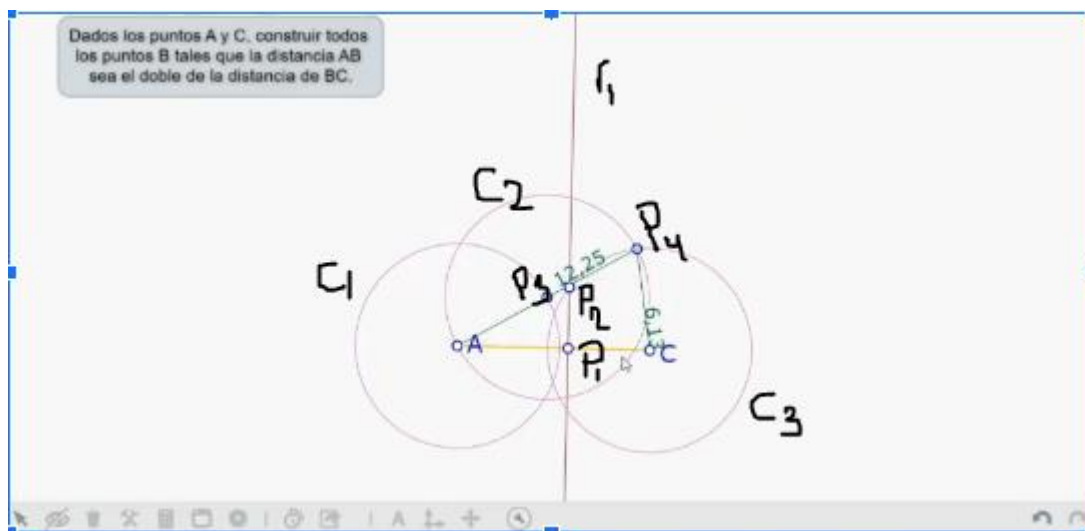


Figura 137 Construcción aproximada realizada por el sujeto B

**#84 SB:** (El sujeto se queda inmóvil por unos momentos, luego mueve  $P_3$ , observando como la medida de  $c_3$  varía con el movimiento de  $P_3$ ) [Me falta una cosita, me

falta solo unirlo acá]

*fase 3: movilización del esquema geométrico para la solución del problema cuando  $k=2$ ,  $k=3$  y  $k$  es una razón cualquiera.*

Ante la imposibilidad del sujeto de construir la “triple intersección”, este retoma las relaciones entre distancias representadas en la construcción aproximada para la creación de una construcción exacta. Para esto, el sujeto construye circunferencia  $c1$  centro A radio  $P1$ , marca punto medio  $P2$  del segmento  $AP1$ . crea circunferencia  $c2$  con centro es A y radio  $AP2$  con la herramienta compás, marca puntos de intersección  $P3$  y  $P4$ , luego cambia etiqueta de  $P3$  y  $P4$  a B y  $B_1$  y activa la traza de estos puntos, mueve el punto  $P1$  mostrando el recorrido de los puntos afirmando que - la línea azul es el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen la condición-.

Para un caso donde  $k$  es el triple el sujeto moviliza el mismo esquema geométrico con algunas variaciones, ya que aunque la operabilidad se basa en el uso del compás, en este problema el sujeto descarta la partición de un segmento ya que no puede partirlo en tres, por lo que recurre a la reiteración de una unidad (3 veces, para la construcción de una medida  $AP4$ , radio de la circunferencia  $c1$  con centro en A), y con la unidad crear la otra medida ( $AP1$ , radio de la circunferencia  $c2$  con centro en C). Todos los puntos se encuentran cuando el sujeto mueve el punto  $P1$  y observa el recorrido de la traza de los puntos B (puntos de intersección de ambas circunferencias ( $c1$  y  $c2$ )).

Para el abordaje de un caso  $k$  como una razón cualquiera, el sujeto afirma que es necesario replicar  $k$  veces la medida  $AP1$  para encontrar el punto  $Pn$  que permite la construcción de la circunferencia  $c1$  con radio  $APn$ , la circunferencia  $c2$  en cambio tiene como radio  $AP1$  que

se crea mediante la herramienta compás. Este procedimiento permite solucionar problemas cuando se trabaja con razones enteras positivas. Ante la pregunta de cualquier magnitud entera, el sujeto afirma que su estrategia es válida, y que lo que variaría de la solución es la cantidad de veces que se reitera una unidad. Es interesante que la estrategia ante un problema con una magnitud no entera, no funciona.

A continuación, mostramos extractos de la entrevista realizada al sujeto, en la que resaltamos en color rosado las acciones y expresiones del sujeto que corresponden a la solución de estos problemas.

#### SUJETO B

*Nota: Luego de que el sujeto no pudiera crear un punto de una intersección triple ( $r_2$ ,  $c_2$  y  $c_3$ ) el sujeto borra la construcción, y con la estrategia usada en la que reitera radio crea una nueva construcción*

**#87 SB:** (El sujeto crea un punto cualquiera  $P_1$ , una circunferencia  $c_1$  con centro en  $P_1$  que pasa por  $A$ , luego borra  $c_1$ , luego crea una circunferencia  $c_1$  con centro en  $A$  que pasa por  $P_1$ , crea el segmento  $AP_1$ , luego ubica punto medio  $P_2$  entre  $A$  y  $P_1$ )

**#91 SB:** (Mientras el entrevistador hablaba, el sujeto terminaba su idea de construcción, creando con compás la circunferencia  $c_2$  con centro en  $C$  y radio  $AP_2$ , acerca las circunferencias y crea punto de intersección  $P_3$  y  $P_4$  entre  $c_1$  y  $c_2$ ) [espere] (el sujeto crea el segmento  $AP_3$ , el segmento  $P_3C$ , el segmento  $AP_4$  y el segmento  $P_4C$  y muestra sus respectivas medidas, mueve la construcción y se da cuenta que la relación se mantiene al arrastrar. luego activa la traza a los puntos  $P_3$  y  $P_4$ , mueve el punto  $P_1$  y observa los puntos  $B$  que cumplen la condición  $AB=2BC$ ) (véase figura 138)

**#92 SB:**

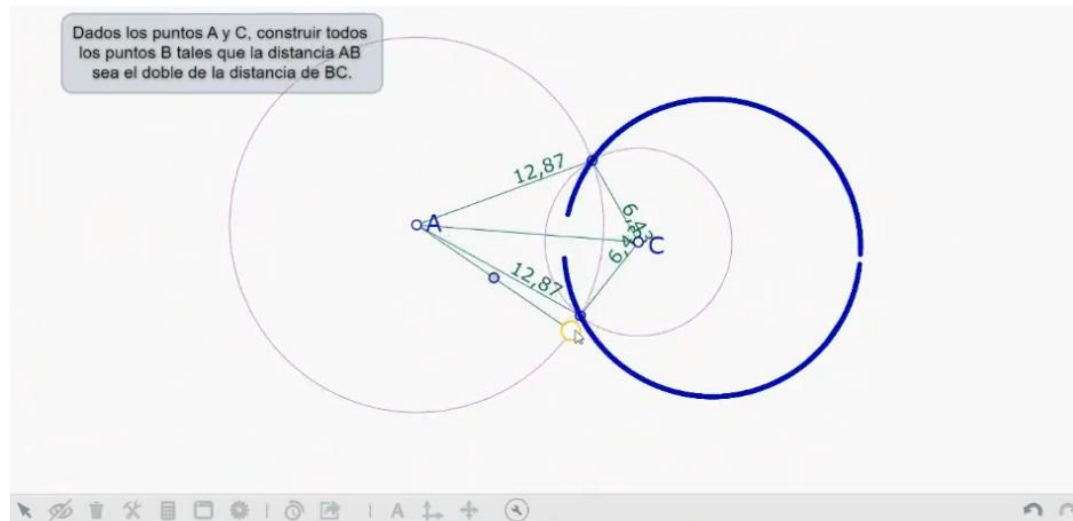


Figura 138 Uso de la traza para una razón  $k=2$  por parte del sujeto B

**#93 SB:** (El sujeto cambia las etiquetas de los puntos P3 y P4 por B y B\_1 respectivamente, y vuelve a mover el punto P1 para generar la traza) (véase figura 139)

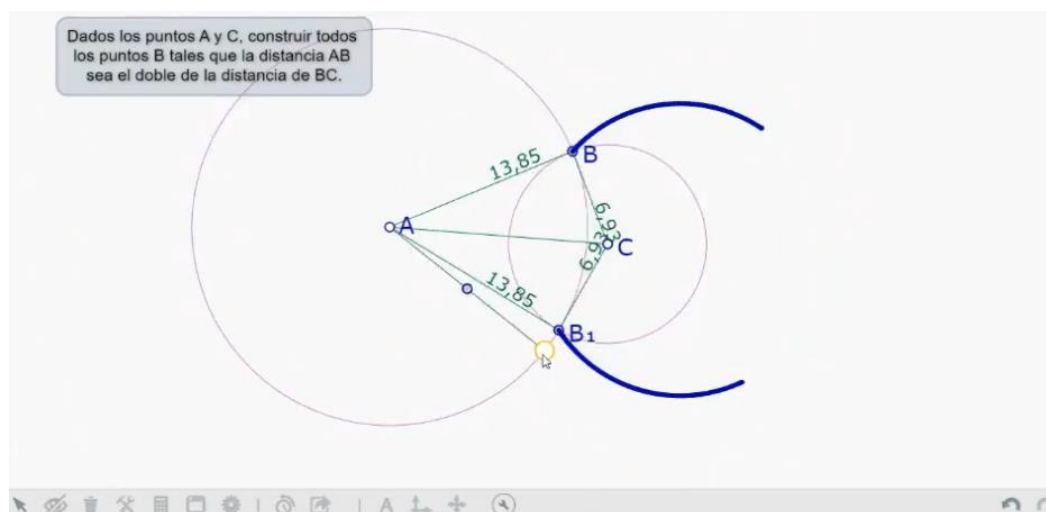


Figura 139 Uso de las etiquetas para marcar los puntos B por parte del sujeto B

**#95 E1:** Cuéntenos qué hizo, cómo lo pensó y qué está obteniendo ahí

**#97 SB:** [Pues ahorita estaba pensando, tengo A y B] (el sujeto se equivoca al nombrar el punto, este punto corresponde al punto C) [entonces necesito un punto que la distancia a ese punto sea el doble que el punto a C, entonces lo que primero **hice fue**

intentar duplicar la, o sea, sacar una circunferencia con centro en C y radio cualquiera y ese radio, crear una circunferencia con ese mismo radio pero que tenga centro en A, entonces hay ya tengo dos circunferencias del mismo radio por así decirlo, del mismo tamaño, sólo que el paso siguiente es duplicar el segmento de la circunferencia con centro en A ¿sí? para que me quede una circunferencia que su radio va ser el doble que el radio de la distancia inicial, el radio de la circunferencia con centro en C, entonces tengo dos circunferencias una con centro en C y un radio cualquiera y otra circunferencia con centro en A que es el doble del radio de la circunferencia con centro en C, entonces cuando se tocaban esas dos circunferencias en algún se iba como a generar un punto que cumpliera la condición, pues trataba de unirlos con una recta, pero no, entonces pues lo que hice fue el mismo proceso pero a la inversa, puse una distancia cualquiera en centro, una distancia a un punto cualquiera y el punto lo uní con un segmento al punto A entonces lo que hice fue sacar una circunferencia de centro en A hasta el punto, para ser una circunferencia cualquiera y lo que hice fue hallar punto medio, que es este que está acá] (el sujeto señala P2)

**#100 SB:** [si, de entrada puse un punto cualquiera, punto que va ser punto 1 y puse una distancia de ese punto a A] (el sujeto señala con el puntero de A a P1 y de P1 a A), [luego saque una circunferencia, el paso siguiente fue sacar punto medio de ese segmento que me da como resultado el punto P2 y esa distancia de A a P2 la puse sobre C, entonces ahí me da una circunferencia que tiene el mismo radio que la distancia de A a punto 2 (P2) y pues ya cuando se toquen, los puntos de intersección entre las dos circunferencias y le dé rastro, la circunferencia se tocan en dos puntos se grafica el punto y eso es lo que da las condiciones del ejercicio de la distancia y pues la línea azul es el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen la condición] ( el sujeto a medida que habla de manera simultánea

señala los objetos de la construcción)

*Nota: Los entrevistadores le piden al sujeto construya para una razón del triple*

**#112 E1:** escribe el siguiente problema “ dados los puntos A y C construir todos los puntos B tales que la distancia AB sea el triple de la distancia BC

**#139 E1:** listo, cuéntenos ¿qué fue lo que hizo?

**#140 SB:** [No pues replicar el proceso anterior, espere] (el sujeto coloca etiqueta a todos los puntos) [al igual que el proceso anterior puse un punto al azar si? en este caso P1, luego construí una recta que pasa por A y P1 y lo que hice fue construir la misma circunferencia, o sea una circunferencia con centro en P1 y radio A que me va dar el punto de corte con la recta, que es el punto P2 que intersecta la circunferencia con la recta, y volví a construir sobre el punto P2 una circunferencia con **la herramienta compás** que tenía el centro P1 y A, pero en el centro va ser P2, entonces ahí tengo el punto P3, entonces lo que pasa es que el segmento P3A está dividido en 3 partes ¿sí? y pues construí una circunferencia de centro en A y radio P3, y lo que hice fue pasar con la herramienta compás una circunferencia con centro en A y radio P1 pero está vez sobre el punto B, que me construya la circunferencia que está acá, y ya hago punto de intersección entre las circunferencias que me da dos puntos de intersección y grafique los segmentos con la distancia para medir. **Gráficamente es la misma imagen del ejercicio anterior**, claro que hay otras maneras de hacer el ejercicio, pero pues de **seccionar el segmento** o como sea] (el sujeto señala cada objeto del que habla de manera simultánea) (véase figura 140)

**#141 SB:**

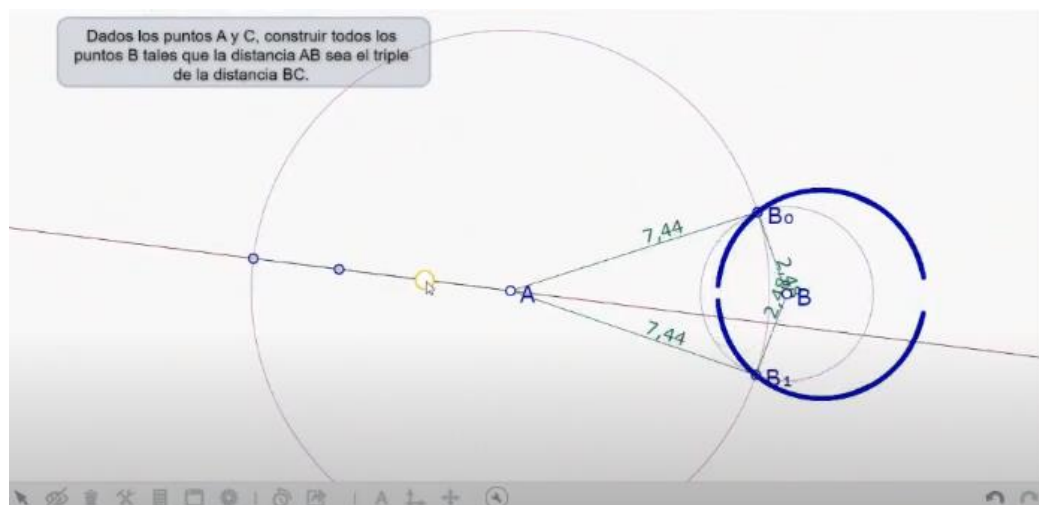


Figura 140 Uso de la traza para una razón  $k=3$  por parte del sujeto B

*Nota:* Los entrevistadores le piden al sujeto que relata el procedimiento para una razón  $k$

**#145 E1:** en un widget va escribir “dados los puntos A y C crear todos los puntos B tales que  $AB=k$  veces  $BC$ ”,  $k$  siendo un número, así como en la anterior fue el doble, el triple, entonces la idea es como aquí le damos  $k$ , es que trate de escribir en un widget las instrucciones que usted le daría a alguien con lo que hizo en las pestañas anteriores. (véase figura 141)

**#149 SB:**

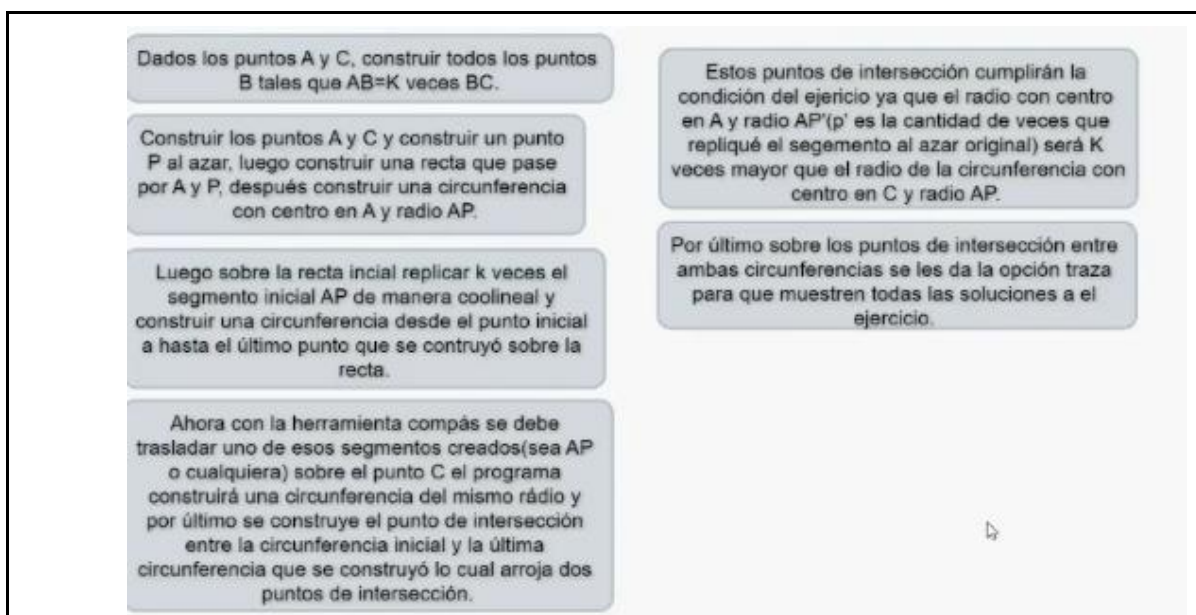


Figura 141 Descripción de las estrategias usadas para una razón  $k$  por parte del sujeto B

**#150 E1:** Una última pregunta, ese método serviría para cuando  $k$  es 3,10, 50 100 ¿sí?

**#151 SB:** [si, el punto crucial es si tiene 50 veces, entonces pongo un punto al azar y una recta sobre ese punto al azar a A y voy replicando ese segmento las veces que se necesario, voy construyendo el radio, pasando el radio sobre el punto que se va construyendo, el segmento AP sobre esa misma recta.]

**#152 E1:** ¿reiterando?

**#153 SB:** [si, reiterando, pues hay otras formas de hacerlo, digamos tengo un segmento y me dicen por ejemplo que sea 7 veces, seccionó el segmento 7 veces y lo paso a una circunferencia en C que tenga la misma medida y ahí la intersección y ya.]

El sujeto a pesar que de movilizar los esquemas de pensamiento algebraico con ayuda en una primera familia de problemas, para una segunda familia recurre a esquemas geométricos, lo



que deja observar que los esquemas de pensamiento algebraico podrían no estar activos totalmente.

Acciones como: 1) Hacer uso de la herramienta compás o el punto medio para partir un segmento y reiterar. 2) No hacer uso de la calculadora, impidiendo que las cantidades estén representadas mediante símbolos alfanuméricos. 3) No expresar verbalmente (mediante palabras clave) que la circunferencia variable representa una cantidad indeterminada a pesar de que en la solución general el sujeto tenga la necesidad de mover el punto variable para mostrar la traza de los todos los puntos B; no corresponden a comportamientos contemplados en los indicadores, a pesar de que el sujeto logra encontrar solución a los problemas de esta familia sin recurrir al uso del esquema de pensamiento algebraico. Por estas razones no es posible clasificar este sujeto en los dos grupos y queda por fuera de la clasificación hecha para esta investigación.

## Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presenta la respuesta a la pregunta de investigación con base en las producciones de los sujetos y la revisión teórica que orientó este trabajo, adicionalmente se presenta el cumplimiento de los objetivos de investigación. Finalmente se presentan algunos aspectos que consideramos importantes relacionados con la potencialidad del software en el desarrollo del pensamiento algebraico en un contexto educativo, y elementos que pueden ser objeto de estudio en futuras investigaciones.

### **Respuesta a la pregunta y objetivo general de la investigación.**

En la presente investigación nos planteamos la siguiente pregunta:

*¿Qué esquemas de acción-comunicación relacionados con el uso de objetos variables, en el contexto del software de geometría dinámica, movilizan estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de último semestre cuando abordan situaciones que implican el reconocimiento y la representación de las dependencias numéricas?*

Para responder a la pregunta debemos reflexionar sobre la idea de esquema: esta surgió como una necesidad de observar aspectos invariantes presentes en los comportamientos de los sujetos durante el abordaje de los problemas; los aspectos a los que se les prestó mayor atención fueron los relacionados con los componentes de pensamiento algebraico. En este proceso, se observó que existían esquemas comunes en los sujetos lo que llevó a clasificarlos en dos categorías, los sujetos de pensamiento algebraico y los sujetos de pensamiento no algebraico; así mismo los comportamientos presentados tenían aspectos en común, por lo que la creación de macroesquemas era necesario para agrupar los comportamientos de acuerdo a elementos comunes. En este trabajo se presentan seis tipos de macroesquemas, compuestos cada uno por una serie de indicadores que permiten

discriminar las acciones presentadas en las producciones y categorizarse en el macroesquema correspondiente.

Los esquemas que presentaron los sujetos analizados son de acción y de comunicación.

### **Esquemas de acción**

Los esquemas de acción presentados por los sujetos hacen parte de la forma de pensamiento algebraico simbólico presentado por Radford (2010) citado por Vergel (2015). Dentro de esta forma de esquemas se identificaron de dos tipos.

- **Acciones del sujeto con los objetos geométricos del software:** Los objetos geométricos son usados para construir soluciones del problema. Un aspecto que diferencia a ambos tipos de sujetos es la concepción de ciertos elementos como medios semióticos de objetivación; para los sujetos de pensamiento algebraico; 1) la circunferencia centro punto se convierte en medio semiótico al considerarse la cantidad variable, indeterminada e independiente, 2) la circunferencia centro radio se convierte en medio semiótico al considerarse el objeto fijo que representa la cantidad dependiente y que permite establecer la relación de dependencia numérica, 3) El punto libre se convierte en medio semiótico al considerarse como el objeto que permite variar directamente el objeto variable, y 4) los puntos de intersección se convierten en medios semióticos al considerarse los objetos que mantienen la relación de dependencia y al ser movidos indirectamente crean una trayectoria puntual de los puntos solución del problema.

- **Acciones que tienen que ver con el uso de la calculadora en el software:** Los sujetos crean expresiones mediante el uso de símbolos alfanuméricos

para trabajar con los objetos del problema. Un aspecto que diferencia a ambos tipos de sujetos es la presencia de medios semióticos en las expresiones escritas en la calculadora; para los sujetos de pensamiento algebraico, 1) la etiqueta del objeto variable se convierte en medio semiótico para referirse a la cantidad indeterminada, y 2) la *expresión* del objeto dependiente incluyendo la etiqueta del objeto variable se convierte en medio semiótico para referirse al carácter de analiticidad, y por ende, al carácter de designación simbólica.

Los sujetos de pensamiento no algebraico a pesar de poder construir los mismos medios semióticos en los esquemas de acción, necesitan ayuda de los entrevistadores para construir esos significados de los objetos, por lo que este tipo de esquemas no aparece de forma espontánea.

### **Esquemas de comunicación**

Teniendo en cuenta las formas de pensamiento algebraico presentadas por Radford (2010) citado por Vergel (2015), distinguimos formas de comunicación que hacen parte de un pensamiento algebraico contextual.

- **Esquemas de comunicación:** Estos tipos de esquemas se distinguen por el uso del lenguaje natural que tienen los sujetos para transmitir una idea generalizada al utilizar elementos de los problemas. Un aspecto que diferencia a ambos tipos de sujetos es la presencia de medios semióticos en las expresiones lingüísticas; para los sujetos de pensamiento algebraico, 1) las palabras como: “siempre”, “todos”, “infinitos” se convierten en medio semiótico para referirse a la cantidad indeterminada; a su vez; 2) las frases como [también va a variar conforme este varía]-,- existen dos ángulos con infinitas posibilidades de dar el tercero con 57-

.- el ángulo A va a variar condicionado por el ángulo B, van a ser cualesquiera números siempre...; representan el carácter operatorio de la indeterminancia, donde las expresiones subrayadas son utilizadas para referirse al carácter analítico de la solución. A pesar de que los sujetos de pensamiento no algebraico logran construir los mismos medios semióticos en los esquemas de comunicación, necesitan ayuda de los entrevistadores para incorporar estas formas de hablar y por ende concebir los objetos indeterminados.

Adicionalmente los sujetos al referirse al punto libre presentan las siguientes afirmaciones: el sujeto B, [pero este punto no cuenta ¿o sí?, no, no cuenta]; el sujeto F, [que lo que yo estoy cambiando es el O no el A y C ]; y el sujeto H [mientras que en el que utilicé la misma herramienta dos veces no hay nada que vaya cambiando la distancia, me toca por obligación mover alguno de los dos puntos (dados)]; este tipo de afirmaciones dejan ver que los sujetos ignoran el punto libre con el cual se genera la trayectoria de los puntos solución, por lo tanto expresan comportamientos de una variación no pertinente en el software.

### **Cumplimiento de los objetivos de investigación**

Para el desarrollo de esta investigación se plantearon tres objetivos específicos. A continuación, presentamos las acciones desarrolladas para su cumplimiento.

*Describir la forma en que los estudiantes de licenciatura en matemáticas comunican sus producciones al enfrentar situaciones asociadas al uso de objetos variables en el contexto del software de geometría dinámica.*

La forma en que los sujetos comunican sus producciones es a partir de esquemas de acción y comunicación. Como mencionamos en la respuesta a la pregunta de investigación

cuando estos esquemas son propios de un pensamiento algebraico se tiene como resultado la movilización de medios semióticos de objetivación, estos otorgan significado a los objetos y con ello un cambio de concepción sobre sus usos.

La descripción de estos esquemas se hizo por medio de recortes de las transcripciones y su correspondiente análisis basados en los indicadores de observación presentes en los macroesquemas propuestos.

*Clasificar los sujetos en grupos a partir de los esquemas de acción y comunicación movilizados en la resolución de los problemas.*

*Identificar elementos asociados al desarrollo de pensamiento algebraico en el abordaje de situaciones en el contexto del software de geometría dinámica.*

Es importante señalar que los seis sujetos lograron implementar los esquemas de acción y comunicación de pensamiento algebraico en la solución de los problemas, solo que tres necesitaron ayuda (Sujetos de pensamiento no algebraico) y los otros tres, una vez los movilizaron espontáneamente, los mantuvieron activos para el abordaje de las demás familias (Sujetos de pensamiento algebraico).

Se pudo observar que los sujetos de pensamiento algebraico ya tenían construidos los esquemas de pensamiento algebraico, ya que en un primer abordaje del problema presentaron comportamientos que implican el trabajo con cantidades indeterminadas, luego con ayuda de estrategias como el hilvanado y la presentación de los objetos (variable y fijo) pudieron activarlos asimilando el nuevo contexto del software. Por su parte, para los sujetos de pensamiento no algebraico el proceso es más lento, eso se debe a que, no solo no saben usar las herramientas, sino que se suma la dificultad de solucionar el problema fuera del software, es por eso que para ellos se debe ir trabajando la forma de entender el problema y solucionarlo, a la par

de la resignificación de las herramientas. Cuando estos dos procesos se dan, este tipo de sujetos pueden movilizar los esquemas de acción y comunicación en el software. Esta es la principal razón de que el abordaje de estos problemas con estos sujetos tome tanto tiempo.

En estos últimos sujetos, no ocurre una asimilación del software, en cambio se construye un nuevo esquema por medio de una acomodación, nuevo para ellos construido con ayuda de los entrevistadores. Ahora bien, la pregunta es ¿lograron activarlo cuando no está la ayuda de los entrevistadores? la respuesta es no totalmente, ya que como se pudo observar, para una segunda familia de problemas aún necesitaban ayuda del entrevistador para solucionar los problemas; sin embargo algunos comportamientos de la primera familia se mantienen para algunos sujetos, como: el uso de expresiones donde se opera con el objeto variable, la necesidad de crear puntos fruto de una construcción; por lo que la conclusión es un punto intermedio, parece que hay cosas que se construyeron pero no totalmente. Quizás con la presentación de más familias de problemas podría conseguirse que los sujetos de pensamiento no algebraico puedan incorporar los esquemas de pensamiento algebraico en su repertorio.

### **Potencialidad del software en el desarrollo del pensamiento algebraico.**

A continuación, se presentan algunos aspectos relacionados con el software de geometría dinámica que están relacionados con su potencial semiótico en el desarrollo y movilización de pensamiento algebraico.

- Estrategia “Caso a caso a muchos casos representados por un objeto variable”

A través de este trabajo experimental es posible que los estudiantes vayan pasando de la concepción de unas cuantas soluciones a la concepción de muchas soluciones, pero separadas, hasta finalmente construir la idea de muchas soluciones que hacen parte de una sola familia y por

lo tanto de un solo objeto que varía. Esta estrategia se lleva a cabo con los sujetos de pensamiento no algebraico, ya que los de pensamiento algebraico hacen el salto directo de pocas a muchas continuas. Por ejemplo: Un objeto variable pasa de un antiguo significado como “esa herramienta me permite ponerle una medida arrastrando” a un nuevo significado “esa herramienta me permite representar todas las medidas que me pueden dar los objetos fijos, es una infinidad de casos representados en un solo objeto, y haciendo uso de su etiqueta pueden designarse operaciones con ese objeto sabiendo que es un objeto variable”.

- Hilvanado

El hilvanado no es una operación mental del sujeto, sino es una operación experimental. El hilvanado, es apenas la búsqueda de una estrategia de solución que le permite al sujeto confrontar su creencia de que hay una sola solución con la existencia de múltiples soluciones para los problemas. Este potencial del hilvanado representa una transición entre un pensamiento no indeterminado a uno indeterminado, tal como se pudo observar en las soluciones de los sujetos de pensamiento algebraico.

- La traza y su necesidad para el pensamiento algebraico

Para el abordaje de la primera familia de problemas, algunos sujetos hicieron uso de la herramienta arco de tres puntos para representar la multiplicidad de soluciones en un sólo objeto, es decir, pasan de concebir -hay muchos puntos- a decir -hay un arco- esto podría indicar que los sujetos vuelven al indicador de “ausencia de indeterminancia”, ya que pasan de pensar en muchos objetos a uno solo y se conforman con ese solo, y no es claro si ese único objeto es representante de los muchos. Por ello, este tipo de estrategia de los sujetos fue redireccionado ya que consideramos que esta manera de pensar evita activar los esquemas de pensamiento algebraico, no se necesitan hacer cálculos, los sujetos solo necesitan encontrar



un punto y con ese punto construyen el arco obteniéndolos todos.

En cambio, la traza como trayectoria de los puntos de intersección, permite que el sujeto vea cómo se van construyendo todos los puntos mediante el movimiento directo del punto libre y el movimiento indirecto de los puntos de intersección, estos últimos reflejan en un dibujo la relación de dependencia expresada en la calculadora; la *expresión* en la calculadora de por sí no es suficiente, solo al mover el punto libre para obtener la trayectoria puntual es que se hace explícito el carácter analítico en el software.

### **Síntesis y conclusiones adicionales**

En aspectos generales la riqueza del software en resignificar el trabajo con cantidades, hace que aspectos como la variación, dependencia, indeterminancia, analiticidad, designación simbólica se unan todas en miras a un objetivo, ese es desarrollar el pensamiento algebraico en el software.

Las posibilidades que presenta el software en el desarrollo del pensamiento algebraico frente al trabajo en otros medios como el papel, sigue siendo una pregunta de investigación abierta e interesante. Por eso invitamos a otros investigadores a trabajar en esta línea de trabajo, no sólo en la aplicación de estos problemas en otro tipo de poblaciones, sino adicionalmente a proponer situaciones que posibiliten la movilización del pensamiento algebraico en el contexto del software de geometría dinámica.

El carácter analítico en la resolución de problemas de geometría no necesariamente debe aparecer como el tratamiento de relaciones numéricas. El razonamiento geométrico que utiliza lugares geométricos es en sí un razonamiento analítico. Por eso pudimos observar uno de los sujetos que podía resolver los problemas utilizando únicamente objetos geométricos, sin relacionarlos con expresiones algebraicas o numéricas. Esta es otra pista de investigación: qué

tipos de problemas de construcción requieren el tratamiento numérico y cuáles podrían resolverse sin necesidad de ese tratamiento, y hasta qué punto los sujetos que desarrollan razonamientos exclusivamente geométricos (que son analíticos), desarrollan o no esquemas de acción y comunicación que necesitan el álgebra.

## Referencias

- Ávila Soria, J. (2018). Experimentando con el aprendizaje del álgebra usando tecnología. *Acta latinoamericana de Matemática educativa.*, 31(2), 1931-1938. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/13615/1/Avila2018Experimentando.pdf>
- Butto Zarzar, C. (Junio de 2011). Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de tecnologías digitales: Un estudio teórico-experimental en el nivel básico. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Obtenido de [https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/2358/882](https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2358/882)
- Calderón, J (2016). Diseño de una ingeniería didáctica para promover el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo en el contexto de la construcción de paralelogramos, utilizando software de geometría dinámica. (Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas). Recuperado de <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/4035/CalderonGarciaJoseLuis2016.PPD..pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Díaz Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Obtenido de [https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7\\_Algebra.pdf](https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf)
- Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M.A. Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educ Stud Math* 66, 317–333 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9072-y>

Falcade, Rossana & Mariotti, Maria Alessandra & Laborde, Colette. (2004). Towards a definition of function. ResearchGate. Obtenido de

[https://www.researchgate.net/publication/242709175\\_TOWARDS\\_A\\_DEFINITION\\_OF\\_FUNCTION](https://www.researchgate.net/publication/242709175_TOWARDS_A_DEFINITION_OF_FUNCTION)

Mojica, A (2014). Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. (Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas). Recuperado de

<http://funes.uniandes.edu.co/9234/1/Mojica2014Medios.pdf>

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (2005). Function and graph in DGS environment. *Laboratoire IMAG*. Obtenido de

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.975.5599&rep=rep1&type=pdf>

Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Instituto de Física, UFRGS*. Obtenido de

<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf>

Ñaupas Paitán, H., Valdivia Dueñas, M. R., Palacios Vilela, J. J., & Romero Delgado, H. E. (2013). *Metodología de la investigación. Cuantitativa - Cualitativa y Redacción de la Tesis* (Quinta ed.). (A. Gutiérrez M., Ed.) Bogotá, Colombia: Ediciones de la U. Obtenido de

<https://edicionesdelau.com/producto/metodologia-de-la-investigacion-cuantitativa-cualitativa-y-redaccion-de-la-tesis-5a-edicion/>

Rodríguez, C. F. (2011). Uso de Cabri para la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Obtenido de

<https://www.yumpu.com/es/document/read/17353388/uso-de-cabri-para-la-ensenanza-aprendizaje-del-algebra-cimm>

Serres Voisin, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Scielo*, 12(1). Obtenido de

[http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1317-58152011000100007](http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1317-58152011000100007)

- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica. Métodos de investigación. Evaluación*. (R. F. Escolá, Trad.) Madrid, España: Ediciones Morata. Obtenido de [https://books.google.com.pe/books?id=WZxyAgAAQBAJ&hl=es&source=gbs\\_navlinks\\_s](https://books.google.com.pe/books?id=WZxyAgAAQBAJ&hl=es&source=gbs_navlinks_s)
- Vergel, R (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). (Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas). Recuperado de <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2608>
- Vergel Causado, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *Dialnet*, IX(3), 193-215. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5379309>
- Vergel Causado, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas . Obtenido de [http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre\\_la\\_emergencia\\_del\\_pensamiento\\_algebraico\\_temprano\\_y\\_su\\_desarrollo\\_en\\_la\\_educacion\\_primaria.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano_y_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf)
- Vergel Causado, R., & Rojas Garzón, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula* (Primera ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.